

АТРАКТОРИ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ

Гресь О. М., Кушлик-Дивульська О. І.

Національний технічний університет України

“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

пр-т Перемоги 37, Київ, Україна, 03056,

e-mail: olgakushlyk64@gmail.com

Диференціальні рівняння широко використовуються на практиці: для опису перехідних процесів, коливань, теплопровідності, деформації балок і пластин, поширення електричного струму у провіднику тощо. Математичне моделювання, в основі якого покладено диференціальні рівняння, досягло настільки високого рівня, що викликало новий поштовх розвитку й інших наук, зокрема фізики, хімії, економіки, також глибоко вплинуло на архітектуру, медицину і метрологію.

Новий етап розвитку теорії диференціальних рівнянь починається від робіт Анрі Пуанкаре. Створена ним «якісна теорія диференціальних рівнянь» разом із теорією функцій комплексних змінних привела до заснування сучасної топології. Якісна теорія диференціальних рівнянь, або, як тепер її частіше називають, теорія динамічних систем, зараз розвивається найактивніше. Цікавим предметом вивчення динамічної системи є атрактор. Одним із найвідоміших є дивний атрактор Лоренца [1], який ще називають «метеликом Лоренца» через свою форму, з цього й виникло поняття «ефект метелика» в теорії хаосу, згодом помилково пов'язане в масовій свідомості з відомим оповіданням Рея Бредбері «І грянув грім».

Дивний атрактор Лоренца – атрактор, що демонструє хаотичну поведінку і є розв'язком системи трьох нелінійних диференціальних рівнянь, вперше записаних в 1963 р. Едвардом Лоренцом при розгляді конвекційного руху в однорідному шарі рідини, що підігрівається знизу. [2]

Атрактор (attractor) у перекладі з англійської означає "притягувач", в даному випадку це точка або безліч точок у фазовому просторі, до яких притягуються всі траєкторії з деякого околу атрактора, що називається також областю тяжіння.

Едвард Лоренц, американський метеоролог, пройшов складний довгий шлях, щоб стати одним із засновників теорії хаосу. Відомим є його базове комп'ютерне моделювання атмосфери Землі із використанням 12 рівнянь та 12 змінних (такі показники як температура, тиск, вологість тощо). За допомогою програмного забезпечення на комп'ютері виводилось кожне значення у вигляді рядка з 12 чисел, які з часом змінювалися. Вирішивши

перевірити отримані значення, Едвард Лоренц повторно виконав цю ж процедуру, та результати цього разу здивували вченого: нові розрахунки моделі збігалися з попередніми на початку, проте наступні не збігалися один із одним взагалі. Модель атмосфери вже була зовсім інакшою!

Причиною таких відмінностей величин було неспівпадіння округлень чисел комп'ютера й принтера. Тому Едвард Лоренц вирішив спростити свої рівняння, розглянув систему з трьох рівнянь із трьома змінними:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z. \end{cases}$$

В цій системі x відповідає за інтенсивність конвекції; y відображає різницю між температурами вхідних та низхідних потоків; z характеризує відхилення вертикального температурного профіля від лінійної залежності; $\sigma > 1$ – число Прандтля; $\rho > 0$ – число Релея; $\beta > 0$ – число, що відображає геометрію конвекційної комірки. Права частина рівнянь немає вільних членів(система рівнянь однорідна).

В Anaconda (дистрибутиві Python), завантаживши необхідні пакети (Plotly, scipy), виконано наступний код, за допомогою якого отримали 3D-модель дивного атрактора Лоренца (Рис.1), про який і говорилося вище:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import plotly.graph_objects as go
def LorenzMod1(XYZ, t, alpha, beta, xi, delta):
    x, y, z = XYZ
    x_dt = -alpha*x + y*y - z*z + alpha*xi
    y_dt = x*(y - beta*z) + delta
    z_dt = -z + x*(beta*y + z)
    return x_dt, y_dt, z_dt
alpha = 0.1
beta = 4
xi = 14
delta = 0.08
x_0, y_0, z_0 = 0, 1, 0
tmax, n = 100, 50000
t = np.linspace(0, tmax, n)
f = odeint(LorenzMod1, (x_0, y_0, z_0), t, args=(alpha, beta, xi, delta))
X, Y, Z = f.T
c = np.linspace(0, 1, n)
```

```

DATA = go.Scatter3d(x=X, y=Y, z=Z,
                    line=dict(color= c,
                              width=3,
                              colorscale="Cividis"),
                    mode='lines')
fig = go.Figure(data=DATA)
fig.update_layout(width=1000, height=1000,
                  margin=dict(r=10, l=10, b=10, t=10),
                  paper_bgcolor='rgb(128,0,128)',
                  scene=dict(camera=dict(up=dict(x=0, y=0, z=1),
                                              eye=dict(x=0, y=1, z=1)),
                              aspectratio = dict(x=1, y=1, z=1),
                              aspectmode = 'manual',
                              xaxis=dict(visible=False),
                              yaxis=dict(visible=False),
                              zaxis=dict(visible=False))

```

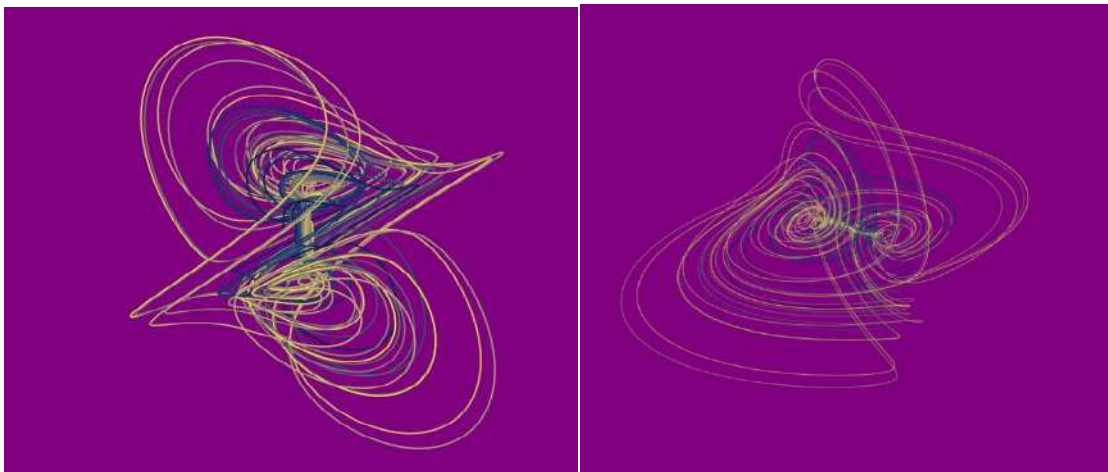


Рис.1. Вигляд атракторів за даною програмою.

Подібних атракторів можна отримати безліч. Заміна частково рівнянь із системи та надання змінним інших значень приводить до інших візуально атракторів. А саме, заміна першого рівняння системи на рівняння вигляду $x_{dt} = -\alpha \cdot x + x \cdot y - x \cdot z + \alpha \cdot x_i$ та величини $\beta = 89$ дає прекрасний візуально і цікавий математично атрактор (Рис. 2):

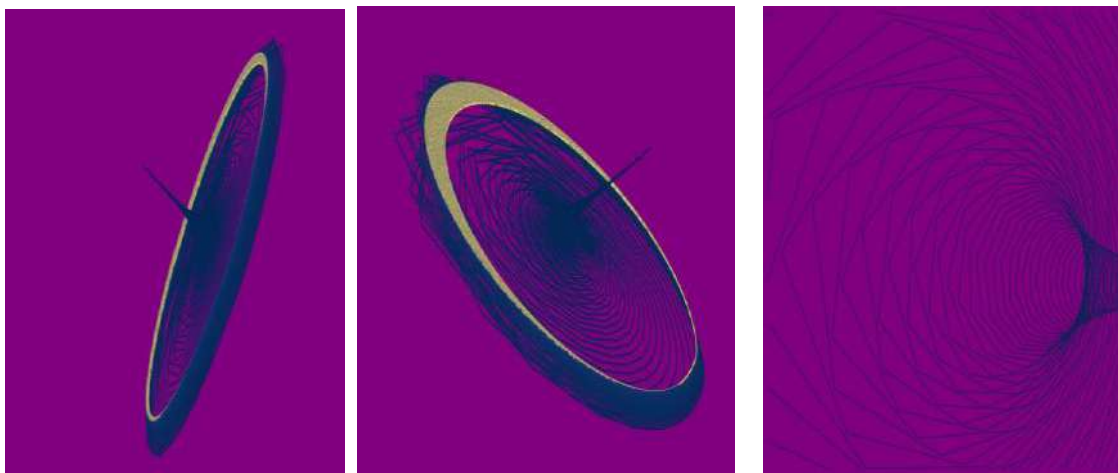


Рис. 2. Атрактори при зміні першого рівняння та величини β .

Заміна в третьому рівнянні доданка z на x та надання $x_1 = 19$ приводить до деякої розмитості та незрозумілої хаотичності стосовно вибраного положення (Рис. 3).

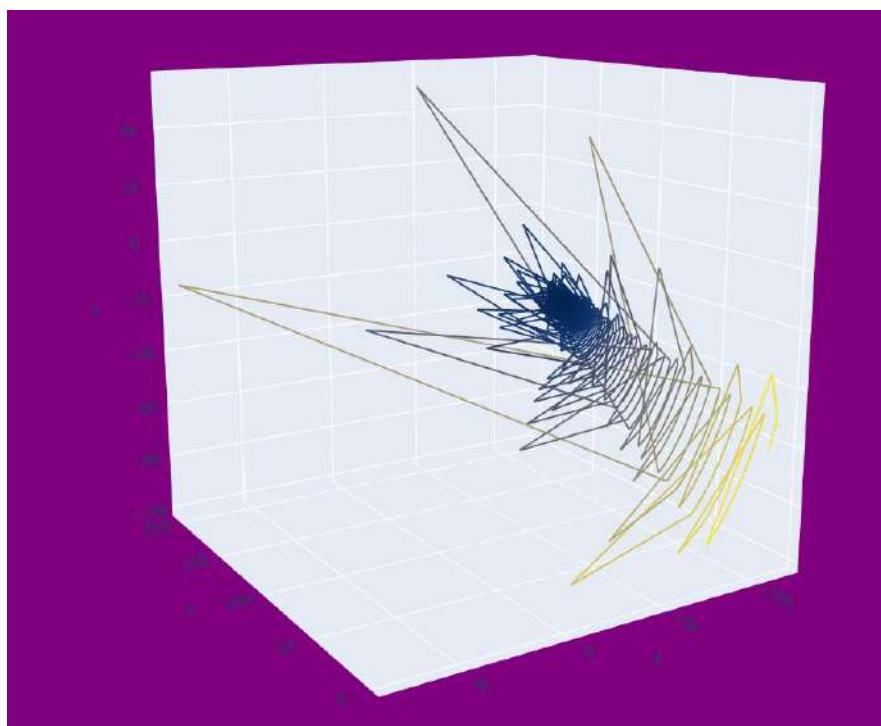


Рис. 3. Вигляд атрактора зі зміною третього рівняння.

Подібним чином виконали ще кілька атракторів. Їхній вигляд справді заворожує, навіть в якомусь сенсі гіпнотизує (Рис. 4):

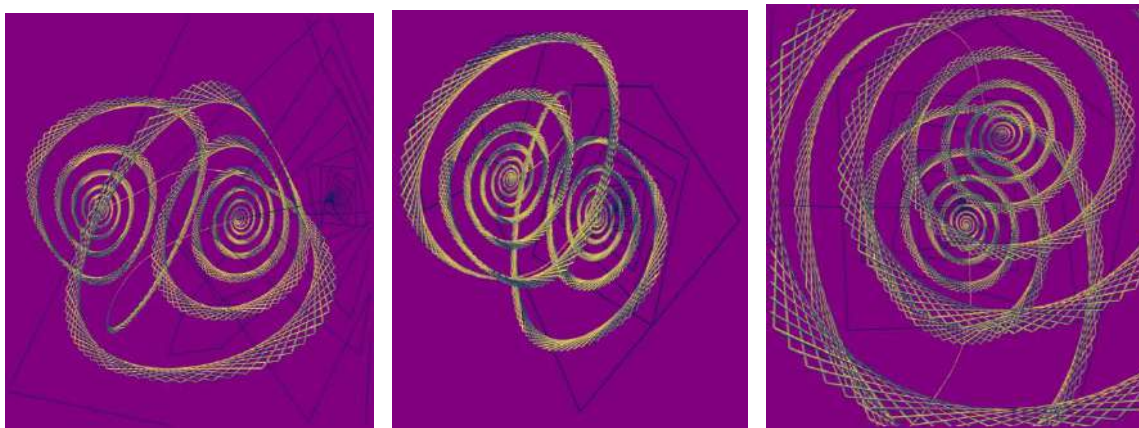


Рис. 4. Красиві аттрактори.

Дані системи зовсім непередбачувані, невідомо куди «захоче» зміститися точка через певний час. Якщо спочатку здається, що є певна періодичність, то потім функція може кардинально змінити свій напрям.

Аттрактори, як Світовий океан, малодосліджені і приховують в собі щось незвичайне. Вчені, які займаються наразі цією темою, стоять за крок до кардинального відкриття. Можливо, саме на базі аттракторів, вдасться створити портал для квантової телепортації, абсолютно повністю чи частково дослідити чорні діри, також і створити модель, що визначає чітко траєкторію чого-небудь. Дивовижно, але хаотичні аттрактори вже застосовують для управління обробкою звуку програмними інструментами в живій електроакустичній композиції [3]. Цікавим є дослідження, опубліковане у випуску «Biophysical Journal» [4], моделювання злиття клітин з використанням простого підходу моделювання динамічних систем.

Непередбачуваність і хаотичність, можливо, в майбутньому приведе до важливих відкриттів науки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дивний аттрактор Лоренца. – Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/>.
2. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963.Т. 20. С. 130–141.
3. Spasov, Miroslav. Using Strange Attractors to Control Sound Processing in Live Electroacoustic Composition. *Computer Music Journal*, vol. 39, no. 3, The MIT Press, 2015, pp. 25-45. – Режим доступу: <http://www.jstor.org/stable/43829276>.
4. Koulakov A.A., Lazebnik Y. The problem of colliding networks and its relation to cell fusion and cancer. *Biophys. J.* 2012;103: 2011–2020.