

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут”

Кафедра приладів і систем орієнтації і навігації

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних занять

з кредитного модуля

«Випробування і діагностика приладів та систем-1»

для студентів напрямку підготовки 6.051003 - “Приладобудування”
приладобудівного факультету
спеціальності: 7.05100303 та 8.05100303 – прилади і системи
орієнтації та навігації

Затверджено Вченою радою ПБФ НТУУ “КПІ”

Київ – 2015

Випробування і діагностика приладів та систем-1: методичні вказівки до виконання практичних занять для студентів напряму підготовки 6.051003 – "Приладобудування", спеціальності: 7.05100303 та 8.05100303 – прилади і системи орієнтації та навігації / Уклад.: В.В. Аврутов – К.: НТУУ "КПІ", 2015. – 28 с.

Гриф надано Вченою радою ПБФ НТУУ "КПІ"
(Протокол № ____ від __.__.____)

Методичні вказівки є практичною частиною комплексу навчально-методичних матеріалів з дисципліни «Випробування і діагностика приладів та систем-1» для студентів приладобудівного факультету які навчаються за програмою освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст» спеціальності: 7.05100303 та 8.05100303 – прилади і системи орієнтації та навігації.

В матеріалах методичних вказівок наведені матеріали для проведення практичних занять стосовно тематиці розділу «Випробування і контроль приладів та систем».

Укладач:

Аврутов Вадим Вікторович,
канд. техн. наук, доц.

Відповідальний
редактор

Н.І. Бурау, докт. техн. наук, проф.

Рецензент

І.В. Коробко, докт. техн. наук, проф.

ЗМІСТ

Передмова	4
Практичне заняття № 1.....	5
Практичне заняття № 2.....	8
Практичне заняття № 3.....	12
Практичне заняття № 4.....	17
Практичне заняття № 5.....	20
Практичне заняття № 6.....	23
Практичне заняття № 7.....	26
Література	28

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки складені відповідно до чинної робочої навчальної дисципліни кредитного модуля "Випробування і діагностика приладів та систем-1" для студентів приладобудівного факультету які навчаються за програмою освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст» (спеціальність: 7.05100303) та «магістр» (спеціальність: 8.05100303 – прилади і системи орієнтації та навігації).

Метою даного навчального видання є допомога студентам в освоєнні теоретичного матеріалу та надбанні необхідних практичних навичок в методах обробки результатів випробувань в процесі виконання практичних занять.

Виконання практичних занять сприятиме закріпленню, поглибленню та узагальненню теоретичних основ курсу, а також сприятиме розвитку навичок самостійної творчої роботи студентів у процесі їх навчання.

Методичні вказівки містять стислі теоретичні відомості та приклади виконання практичних занять.

Практичне заняття № 1

Обробка результатів випробувань

Нехай в результаті випробувань отримані дані $z_1, z_2, \dots, z_n$ ($i = 1, n$), n - число випробувань.

Середнє значення (оцінка середнього значення): $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$; (1.1)

Середньоквадратичне відхилення (СКВ) має вираз:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2} \quad - \text{ незміщена оцінка СКВ; } \quad (1.2)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2} \quad - \text{ зміщена оцінка СКВ (Std. 1554-2005). } \quad (1.3)$$

Для великого n ($n \geq 50$) формули (1.2) и (1.3) співпадають.

В стандарті Std.1554-2005 приведена ще така формула для зміщеної оцінки СКВ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 - \mu^2}. \quad (1.4)$$

Покажемо, що для зміщеної оцінки (1.3) рівняння (1.4) справедливе.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i^2 - 2\mu z_i + \mu^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 - \frac{2\mu}{n} \sum_{i=1}^n z_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu^2 = \oplus$$

$$\text{Відмітимо, що у другому доданку} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \mu,$$

$$\text{а в третьому} \quad \sum_{i=1}^n \mu^2 = \mu^2 \sum_{i=1}^n 1 = \mu^2 n.$$

Відтоді

$$\oplus = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 - 2\mu \cdot \mu + \frac{1}{n} n\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 - 2\mu^2 + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 - \mu^2.$$

Витягуючи корінь з останнього виразу, отримаємо формулу (1.4). Аналогічно для незміщеної оцінки СКВ отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i^2 - 2\mu z_i + \mu^2) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n z_i + \sum_{i=1}^n \mu^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 - 2\mu^2 \cdot n + n\mu^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 - n\mu^2 \right). \end{aligned}$$

Витягуючи корінь з останнього виразу, отримаємо формулу для незміщеної оцінки СКВ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 - n\mu^2 \right)} \quad (1.5)$$

Пример 1. В результаті випробувань гіроскопів проведено вимірювання часу готовності для 4-х партій гіроскопів однакового типу. Результати вимірювань показані в табл. 1. Визначити середні значення часу готовності і СКВ для кожної партії.

Табл. 1

	I	II	III	IV
	t_I , сек	t_{II} , сек	t_{III} , сек	t_{IV} , сек
1	150	196	145	163
2	110	117	106	175
3	133	99	114	158
4	97	183	125	144
5	132	115	164	161
6	192	145	150	172
7	184	120	121	143
8	150	132	144	151
9	122	123	132	143
10	136	132	161	122

Для кожної партії обчислюємо середнє значення і СКВ часу готовності по формулах (1.1) и (1.2):

$$1) \mu_I = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} t_{Ii} = 140,6 \text{ сек};$$

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (t_{Ii} - \mu_I)^2 = \frac{8038,4}{9} = 893,16;$$

$$\sigma_I = \sqrt{893,16} = 29,88 \text{ сек.}$$

$$2) \mu_{II} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} t_{IIi} = 136,2 \text{ сек}$$

$$\sigma_{II}^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (t_{IIi} - \mu_{II})^2 = \frac{8517,6}{9} = 946,4$$

$$\sigma_{II} = \sqrt{946,4} = 30,76 \text{ сек}$$

$$3) \mu_{III} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} t_{IIIi} = 136,2 \text{ сек}$$

$$\sigma_{III}^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (t_{IIIi} - \mu_{III})^2 = \frac{3495,6}{9} = 388,4$$

$$\sigma_{III} = \sqrt{388,4} = 19,7 \text{ сек}$$

$$4) \mu_{IV} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} t_{IVi} = 153,2 \text{ сек}$$

$$\sigma_{IV}^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (t_{IVi} - \mu_{IV})^2 = \frac{2279,6}{9} = 253,28$$

$$\sigma_{IV} = \sqrt{253,28} = 15,9 \text{ сек}$$

Пример 2. В результаті випробувань набуті значення дрейфів ω_x и ω_y гіроскопа:

	1	2	3	4	5
ω_x , град/час	0,015	0,021	0,017	0,009	0,002
ω_y , град/час	0,011	0,016	0,009	0,008	0,004

Визначити СКВ дрейфів гіроскопу.

Спочатку обчислимо середні значення дрейфів:

$$\tilde{\omega}_x = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \omega_{xi} = 0,013 \text{ град/час};$$

$$\tilde{\omega}_y = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \omega_{yi} = 0,0096 \text{ град/час};$$

Тепер обчислюємо СКВ дрейфів:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (\omega_{xi} - \tilde{\omega}_x)^2 = \frac{0,000221}{4};$$

$$\sigma_x = 0,0074 \text{ град/час};$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (\omega_{yi} - \tilde{\omega}_y)^2 = \frac{0,000772}{4};$$

$$\sigma_y = 0,0043 \text{ град/час};$$

Д.3. Визначити СКВ дрейфів ω_x и ω_y гіроскопу:

	1	2	3	4	5
ω_x , град/час	0,010	0,009	0,004	0,005	0,003
ω_y , град/час	0,012	0,008	0,006	0,007	0,004

Спочатку обчислимо середні значення дрейфів:

$$\tilde{\omega}_x = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \omega_{xi} = 0,0062 \text{ град/час};$$

$$\tilde{\omega}_y = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \omega_{yi} = 0,0074 \text{ град/час};$$

Тепер обчислюємо СКВ дрейфів:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (\omega_{xi} - \tilde{\omega}_x)^2 = \frac{0,000368}{4};$$

$$\sigma_x = 0,0031 \text{ град/час};$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (\omega_{yi} - \tilde{\omega}_y)^2 = \frac{0,0000352}{4};$$

$$\sigma_y = 0,003 \text{ град/час};$$

Практичне заняття № 2

Визначення промахів результатів випробувань

На практиці часто зустрічаються випадки, коли деякі значення з результатів випробувань викликають сумніви.

Якщо в отриманій групі результатів випробувань одне або два суттєво відрізняються від інших, а наявності помилки в отриманні даних, описки і інших недоліків не виявлено, то необхідно перевірити, чи не являються вони грубими похибками, що підлягають виключенню. Рішення цієї задачі виконується загальними методами перевірки статистичних гіпотез в припущенні нормального розподілу результатів спостережень.

Якщо число випробувань невелике ($n \leq 20$) використовують критерій оцінки аномальності результатів випробувань.

Алгоритм виключення грубих погрешностей по цьому критерію з результатів випробувань наступний:

1. Результати з n випробувань упорядковують за збільшенням

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots < x_n.$$

Тут x_1 та x_n - передбачувані промахи.

2. Обчислюють оцінки середнього арифметичного значення, абсолютних похибок та СКВ:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.1)$$

$$\tilde{\Delta}_i = x_i - \tilde{x}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i^2}. \quad (2.3)$$

3. Для передбачуваних промахів, якими можуть бути результати x_1 та x_n , проводять розрахунок коефіцієнтів

$$t_1 = \frac{|\tilde{\Delta}_1|}{\tilde{\sigma}}, \quad t_n = \frac{|\tilde{\Delta}_n|}{\tilde{\sigma}}. \quad (2.4)$$

4. Задаються **рівнем значущості критерію помилки** q , який залежить від вірогідності того, що дійсне значення вимірюваної величини x_n знаходиться в довірчому інтервалі

$$P_d(x_n < x_n < x_n) = 1 - q.$$

Тут x_n, x_n - нижня та верхня межі довірчого інтервалу.

Цей рівень повинен бути достатньо малим, щоб вірогідність помилки була невелика.

Чим більше довіря вірогідність P_d , тим менше рівень значущості критерію помилки q .

З табл. 1 по заданих параметрах q и n знаходять граничні значення коефіцієнта t_r .

5. Виконують порівняння коефіцієнтів, визначених по формулах (2.4) з t_r . Якщо виконується $t_1 > t_r$ та $t_n > t_r$, результати x_1 і x_n відносять до промахів і виключають з результатів випробувань.
6. Обчислюють нові значення $\tilde{x}$ і $\tilde{\sigma}$ без урахування промахів.

Табл.1. Гранічні значення коефіцієнта t_r .

Число випробувань n	Гранічне значення t_r при рівень значущості q				Число випробувань n	Гранічне значення t_r при рівень значущості q			
	0,100	0,075	0,050	0,025		0,100	0,075	0,050	0,025
3	1,15	1,15	1,15	1,15	12	2,13	2,20	2,29	2,41
4	1,42	1,44	1,46	1,48	13	2,17	2,24	2,33	2,47
5	1,60	1,64	1,67	1,72	14	2,21	2,28	2,37	2,50
6	1,73	1,77	1,82	1,89	15	2,25	2,32	2,41	2,55
7	1,83	1,88	1,94	2,02	16	2,28	2,35	2,44	2,58
8	1,91	1,96	2,03	2,13	17	2,31	2,38	2,48	2,62
9	1,98	2,04	2,11	2,21	18	2,34	2,41	2,50	2,66
10	2,03	2,10	2,18	2,29	19	2,36	2,44	2,53	2,68
11	2,09	2,14	2,23	2,36	20	2,38	2,46	2,56	2,71

Приклад 1. При определении сопротивления резистора получена упорядоченная выборка пяти значений:

180, 182, 183, 184, 196 Ом.

Требуется оценить результат 196 Ом при заданном уровне значимости ошибки $q = 0,05$.

Решение.

Для данной выборки по формулам (2.1), (2.2) и (2.3) вычисляем оценки среднего арифметического значения

$$\tilde{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = 185 \text{ Ом};$$

и составляем таблицу:

i	1	2	3	4	5
R_i	180	182	183	184	196
$\tilde{\Delta}_i$	-5	-3	-2	-1	11

Затем вычисляем СКО:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i^2 = \frac{160}{4} = 40 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{40} = 6,32 \text{ Ом};$$

Затем с помощью (4) вычисляем

$$t_5 = \frac{|R_5 - \tilde{R}|}{\tilde{\sigma}} = \frac{196 - 185}{6,32} = 1,74$$

По табл.1 для $n = 5$ и $q = 0,05$ находим $t_r = 1,67$.

Так как $t_5 > t_r$, то результат $R_5 = 196$ Ом является промахом и его следует исключить из выборки измерений.

$$\text{Новые значения } \tilde{R} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 R_i = 182,25 \text{ Ом}$$

и СКО

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \tilde{R})^2 = \frac{8,75}{3} = 2,92 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{2,92} = 1,71 \text{ Ом};$$

Пример 2. Проверить результаты 18-ти многократных измерений сопротивления R (Ом), представленные в табл.2, на наличие промахов. Уровень значимости ошибки $q=0.1$.

Табл.2

R_i	8,619	8,380	8,498	8,484	8,340	8,526	8,394	8,641	8,420
R_i	8,553	8,522	8,408	8,283	8,494	8,399	8,561	8,551	8,669

Решения:

Упорядковуємо результати вимірювань за збільшенням:

Табл.3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R_i	8,283	8,340	8,380	8,394	8,399	8,408	8,420	8,484	8,494
$\tilde{\Delta}_i$	-0,203	-0,146	-0,106	-0,092	-0,087	-0,078	-0,066	-0,002	0,008
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
R_i	8,498	8,522	8,526	8,551	8,553	8,561	8,619	8,641	8,669
$\tilde{\Delta}_i$	0,012	0,036	0,04	0,065	0,067	0,075	0,133	0,155	0,183

Обчисляємо оцінку $\tilde{x} = \tilde{R}$, абсолютну похибку $\tilde{\Delta}_i = x_i - \tilde{x}$ та оцінку СКВ $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{152,742}{18} = 8,486 \text{ Ом};$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{\Delta}_i)^2} = \sqrt{\frac{0,188528}{17}} = 0,105.$$

Обчисляємо коефіцієнти t_1 та t_{18} за формулою (3):

$$t_1 = \frac{|R_1 - \tilde{R}|}{\tilde{\sigma}} = 1,933 \quad ; \quad t_{18} = \frac{|R_{18} - \tilde{R}|}{\tilde{\sigma}} = 1,743.$$

По рівню значимости похибки $q=0.1$ та $n=18$ за табл.1 знаходимо $t_\Gamma = 2,34$.

Оскільки $t_1 < t_\Gamma$ та $t_{18} < t_\Gamma$, результати R_1 та R_{18} не являються грубими попохибками (промахами). Аналогічний висновок стосується для всіх результатів випробувань.

Критерий «трех сигм».

Данный критерий хорошо работает при числе испытаний $n > 20$.

1. Значения $\tilde{x}$ и $\tilde{\sigma}$ вычисляют без учета экстремальных значений x_i .

2. Результат x_i считают промахом, если $|x_i - \tilde{x}| > 3\tilde{\sigma}$.

Д.з. Для 1-ой и 2-ой групп приборов из пр. занятия №1 найти промахи при $q = 0,1$.

$$1) \quad \tilde{t}_I = 140,6 \text{ сек.} \quad \tilde{\sigma}_I = 29,88$$

$$t_{1I} = \frac{|t_{\min}^I - \tilde{t}_I|}{\tilde{\sigma}_I} = \frac{97 - 140,6}{29,88} = 1,46.$$

$$t_{10I} = \frac{|t_{\max}^I - \tilde{t}_I|}{\tilde{\sigma}_I} = \frac{192 - 140,6}{29,88} = 1,72.$$

Из табл.1 при $q = 0,1$ и $n = 10$ находим $t_r = 2.03$. Поскольку $t_{1I} < t_r$ и $t_{10I} < t_r$, то результаты испытаний не являются промахами.

$$2) \tilde{t}_{II} = 136,2 \text{ сек.} \quad \tilde{\sigma}_{II} = 30,76$$

$$t_{1II} = \frac{|t_{\min}^{II} - \tilde{t}_{II}|}{\tilde{\sigma}_{II}} = \frac{99 - 136,2}{30,76} = 1,209.$$

$$t_{10II} = \frac{|t_{\max}^{II} - \tilde{t}_{II}|}{\tilde{\sigma}_{II}} = \frac{196 - 136,2}{30,76} = 1,94.$$

Из табл.1 при $q = 0,1$ и $n = 10$ находим $t_r = 2.03$. Поскольку $t_{1II} < t_r$, то результат 99 сек не является промахом. Остальные результаты испытаний также не являются промахами.

Практичне заняття № 3

Перевірка гіпотези про нормальний розподіл результатів спостережень

Закон розподілу випадкових погрішностей може або відповідати нормальному закону, або відрізнятись від нього. За експериментальними даними можна ідентифікувати форму закону розподілу, тобто перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу випадкових погрішностей результатів спостережень.

При числі результатів спостережень $n < 15$ перевірка не проводиться.

При числі результатів спостережень $15 < n < 50$ перевірка проводиться по складеному критерію.

Критерій I.

Шаг 1). За наслідками спостережень $x_1, x_2, \dots, x_n$ обчислюють параметр

$$\tilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |\tilde{\Delta}_i|}{n \tilde{\sigma}^*}, \quad (3.1)$$

де $\tilde{\Delta}_i = x_i - \tilde{x}$ - оцінка абсолютної похибки, $\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ - оцінка середнього значення,

$\tilde{\sigma}^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i^2}$ - зміщена оцінка СКВ.

Шаг 2). Задають рівень значущості критерію помилки $q_1 = 0,02$ або $0,1$.

З табл.4.1 по заданому q_1 і відомому числу спостережень n знаходять граничні значення параметра $\tilde{d}$, що є квантилями нормального розподілу

$$d_{\min} = d_{1-\frac{q_1}{2}}, d_{\max} = d_{\frac{q_1}{2}}$$

Табл.4.1 Квантилі розподілу (статистика d)

Число спостережень n	$q_1 = 0,02$		$q_2 = 0,1$	
	$d_{\min}$	$d_{\max}$	$d_{\min}$	$d_{\max}$
16	0,683	0,914	0,724	0,888
21	0,695	0,900	0,730	0,877
26	0,704	0,890	0,736	0,869
31	0,711	0,883	0,740	0,863
36	0,717	0,877	0,744	0,858
41	0,722	0,872	0,747	0,854
46	0,726	0,868	0,750	0,850
51	0,730	0,865	0,752	0,848

Якщо число n не співпадає з табличним, то використовують формулу лінійної інтерполяції

$$d(n) = d(n_0) + \frac{n - n_0}{n_1 - n_0} [d(n_1) - d(n_0)], \quad (3.2)$$

де n_0 та n_1 - значення числа спостережень в табл.4.1, між якими знаходиться n ;

$d(n_0), d(n_1)$ - табличні значення квантилів розподілу, відповідні n_0 та n_1 ; $d(n)$ - шукане значення квантиля розподілу для n .

Шаг 3). Якщо $d_{\min} < \tilde{d} < d_{\max}$, то гіпотезу про нормальний розподіл результатів спостережень по критерію 1 вважають вірними.

Критерий II.

Шаг 1. Для результатів спостережень $x_1, x_2, \dots, x_n$ обчислюють

$$\tilde{\Delta}_i = x_i - \tilde{x} - \text{оцінка абсолютної похибки, и } \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i^2} - \text{незміщену оцінку СКВ.}$$

Шаг 2). Задають рівень значущості критерію помилки $q_2 = 0,01; 0,02$ або $0,05$.

По табл.4.2 по заданому q_2 і відомому числу спостережень n знаходять P - значення вірогідності попадання випадкової похибки в необхідний інтервал и m - теоретичний коефіцієнт.

Табл.4.2.Значення Р для обчислення $z_{p/2}$

n	m	q_2		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,96
11...14	1	0,99	0,98	0,97
15...20	1	0,99	0,99	0,98
21...22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24...27	2	0,98	0,98	0,97
28...32	2	0,99	0,98	0,97
33...35	2	0,99	0,98	0,98
36...49	2	0,99	0,99	0,98

Шаг 3). Обчислюють $\frac{P}{2}$.

По табл.4.3 значень функцій Лапласа $\Phi(z) = \frac{P}{2}$ знаходять аргумент $z = z_{\frac{P}{2}}$

Табл.4.3 Значения функции Лапласа $\Phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,4773	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4865	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4889
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4980	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986

і розраховують коефіцієнт $z_{\frac{P}{2}} \tilde{\sigma}$.

Шаг 4. Підраховують експериментальне число m_3 , модулів $|\tilde{\Delta}_i|$, яке повинне задовольняти умові $|\tilde{\Delta}_i| > z_{\frac{P}{2}} \tilde{\sigma}$.

Якщо $m_3 \leq m$ - гіпотеза про нормальний розподіл вірна по критерію II.

Якщо виконуються обидва критерії - гіпотеза про нормальний розподіл приймається.

Приклад 4.1. Перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу погрешностей результатів вимірювань опору резистора R, представлених в табл.2 ін. заняття №2.

$$q_1 = q_2 = 0,02.$$

R_i	8,619	8,380	8,498	8,484	8,340	8,526	8,394	8,641	8,420
R_i	8,553	8,522	8,408	8,283	8,494	8,399	8,561	8,551	8,669

Оскільки $15 < n < 50$, то виконуємо перевірку гіпотези по складеному критерію.

Критерій I.

Обчислюємо оцінку $\tilde{x} = \tilde{R}$, абсолютну похибку $\tilde{\Delta}_i = x_i - \tilde{x}$ та оцінку СКВ $\tilde{\sigma}^*$:

$$\tilde{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{152,742}{18} = 8,486 \text{ Ом};$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R_i	8,283	8,340	8,380	8,394	8,399	8,408	8,420	8,484	8,494
$\tilde{\Delta}_i$	-0,203	-0,146	-0,106	-0,092	-0,087	-0,078	-0,066	-0,002	0,008
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
R_i	8,498	8,522	8,526	8,551	8,553	8,561	8,619	8,641	8,669
$\tilde{\Delta}_i$	0,012	0,036	0,04	0,065	0,067	0,075	0,133	0,155	0,183

$$\tilde{\sigma}^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{\Delta}_i)^2} = \sqrt{\frac{0,188528}{18}} = 0,1023$$

$$\tilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |\tilde{\Delta}_i|}{n \tilde{\sigma}^*} = \frac{1,554}{18 \cdot 0,1023} = 0,844.$$

З табл.4.1 для $n=18$, $n_1 = 21$ і $n_0 = 16$, використовуючи формулу лінійної інтерполяції (4.2), знаходимо

$$d_{\min}(18) = d_{\min}(16) + \frac{18-16}{21-16} [d_{\min}(21) - d_{\min}(16)] = 0,683 + \frac{2}{5} (0,695 - 0,683) = 0,6878;$$

$$d_{\max}(18) = d_{\max}(16) + \frac{18-16}{21-16} [d_{\max}(21) - d_{\max}(16)] = 0,914 + \frac{2}{5} (0,900 - 0,914) = 0,9084.$$

Перевіряємо умову $d_{\min} < \tilde{d} < d_{\max}$: $0,6878 < 0,844 < 0,9084$ - > гіпотеза о нормальності закона розподілу похибок спостережень за критерієм 1 вірна.

Критерій II.

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{\Delta}_i)^2} = \sqrt{\frac{0,188528}{17}} = 0,105$$

З табл. 4.2 знаходимо $P=0,99$ та $m = 1$.

З табл. 4.3 за значенням $\Phi(z) = \frac{P}{2} = 0,495$ знаходимо $z_{\frac{P}{2}} = 2,5$.

Обчислюємо $z_p \frac{\tilde{\sigma}}{2} = 2,5 \cdot 0,105 = 0,2625$.

Підраховуємо число m_3 - скільки разів $|\tilde{\Delta}_i| > 0,2625$ - ні жодного разу $\rightarrow m_3 = 0$.

Оскільки $m_3 < m$, то гіпотеза про нормальний розподіл вірна по критерію II.

Оскільки виконуються обидва критерії - гіпотеза про нормальний розподіл приймається.

Д.з. Перевірити справедливність гіпотези про нормальний закон розподілу похибок випробувань акселерометра при $q_1 = 0,1$ и $q_2 = 0,05$.

i	$u, \text{В}$
1	1,0157
2	0,9875
3	1,0014
4	0,9997
5	0,9828
6	1,0047
7	0,9892
8	1,0183
9	0,9922
10	1,0079
11	1,0042
12	0,9908
13	0,9760
14	1,0009
15	0,9897
16	1,0436

$n=16$ – перевіряємо гіпотезу по складеному критерію.

Позначимо $u = x$. Знайдемо $\tilde{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 1,0003$.

Обчислюємо $\tilde{\Delta}_i = x_i - \tilde{x}$:

i	$u, \text{В}$	$\tilde{\Delta}_i$		
1	1,0157	0,0154		
2	0,9875	-0,0128		
3	1,0014	0,0011		
4	0,9997	-0,0006		
5	0,9828	-0,0175		
6	1,0047	0,0044		
7	0,9892	-0,0111		
8	1,0183	0,018		
9	0,9922	0,0081		
10	1,0079	0,0076		
11	1,0042	0,0039		
12	0,9908	0,0095		
13	0,9760	-0,0243		
14	1,0009	0,0006		
15	0,9897	-0,0106		
16	1,0436	0,0433		

$$\tilde{\sigma}^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{\Delta}_i)^2} = \sqrt{\frac{0,0039}{16}} = 0,0158$$

$$\tilde{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |\tilde{\Delta}_i|}{n \tilde{\sigma}^*} = \frac{0,188}{16 \cdot 0,0158} = 0,743.$$

З табл.4.1 для $n=16$, знаходимо $d_{\min} = 0,724$; $d_{\max} = 0,888$.

Перевіряємо умову $d_{\min} < \tilde{d} < d_{\max}$: $0,724 < 0,743 < 0,888$ - > гіпотеза про нормальність закону розподілу похибок спостережень по критерію 1 вірна.

Критерій II.

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{\Delta}_i)^2} = \sqrt{\frac{0,0039}{15}} = 0,016$$

З табл. 4.2 знаходимо $P=0,98$ та $m=1$.

З табл. 4.3 за значенням $\Phi(z) = \frac{P}{2} = 0,49$ знаходимо $z_{\frac{P}{2}} = 2,3$.

Обчислюємо $z_{\frac{P}{2}} \tilde{\sigma} = 2,3 \cdot 0,016 = 0,037$.

Підраховуємо число m_3 - скільки разів $|\tilde{\Delta}_i| > 0,037$ -> $m_3 = 1$.

Оскільки $m_3 = m$, то гіпотеза про нормальний розподіл вірна по критерію II.

Оскільки обидва критерії виконуються - гіпотеза про нормальний розподіл приймається.

Практичне заняття № 4

Метод найменших квадратів. Частина 1.

Хай дані експериментальні дані $x_i, y_i (i = 1, 2, \dots, n)$, де n - число випробувань (рис.1).

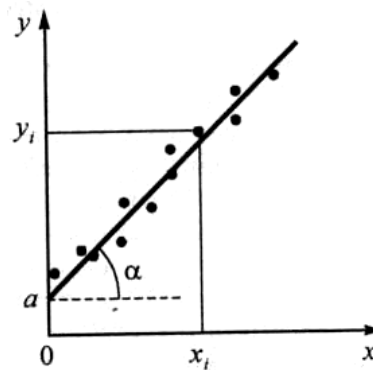


Рис.1

Потрібно визначити аналітичну залежність $y = f(x)$ між x та y .

Експериментальні дані x_i, y_i відрізняються від дійсних значень і із-за систематичних і випадкових похибок вимірювань.

Виникає потреба якнайкращої апроксимації залежності $y = f(x)$ за експериментальними даними x_i, y_i .

Оптимальний підхід до рішення даної задачі можливий на основі застосування *методу найменших квадратів* (МНК).

Суть методу МНК полягає в тому, що найверогідніми значеннями шуканої аналітичної залежності будуть такі, при яких сума квадратів відхилень експериментальних значень y_i від значень самої функції y , буде найменшою:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y)^2 = \min. \quad (4.1)$$

У разі регресійної моделі $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ - поліном з невідомими коефіцієнтами, які потрібно обчислити.

Сума (1) мінімальна, якщо її частинні похідні по a_j дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^n (y_i - y)^2 = 0, \text{ де } j = 1, 2, \dots, m$$

Розглянемо важливий для практики **випадок I**, коли шукана залежність має лінійний характер вигляду

$$y = a_0 + a_1x. \quad (4.2)$$

Підставимо (2) в (1):

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i)]^2 = \min. \quad (4.3)$$

Сума (3) мінімальна, якщо її частинні похідні по a_0 и a_1 дорівнюють нулю.

Знаходимо частинні похідні та вирішуємо получені рівняння:

$$1) \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i)]^2 = 0; \quad 2) \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i)]^2 = 0;$$

$$2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)](-1) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)] = 0;$$

$$\boxed{\sum y_i - na_0 - a_1 \sum x_i = 0}.$$

$$2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 x_i)](-x_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i x_i - a_0 x_i - a_1 x_i^2) = 0;$$

$$\boxed{\sum y_i x_i - a_0 \sum x_i - a_1 \sum x_i^2 = 0}.$$

З отриманих рівнянь складемо систему

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x_i = \sum y_i; \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum y_i x_i. \end{cases}; \quad (4.4)$$

Позначемо $\sum x_i = s_1$, $\sum x_i^2 = s_2$; $\sum y_i = s_3$; $\sum y_i x_i = s_4$

Тоді систему рівнянь можна записати в матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} n & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Вирішуємо систему рівнянь (5) методом Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad (4.6)$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} n & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = ns_2 - s_1^2, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} s_3 & s_1 \\ s_4 & s_2 \end{vmatrix} = s_2 s_3 - s_1 s_4, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} n & s_3 \\ s_1 & s_4 \end{vmatrix} = ns_4 - s_1 s_3.$$

Приклад 1. Потрібно встановити реальну залежність опору металевих провідників від температури $R_t = f(t)$ по результатах сумісних вимірювань (табл.1).

Теоретична залежність опору від температури: $R_t = R_0(1 + \alpha t)$,

$t, ^\circ\text{C}$	$R_t, \text{Ом}$
10	10,3
15	10,9
20	11,3
25	11,6

де R_0 - опір при $t = 0$, α - температурний коефіцієнт.

Табл.1

$$R_t = R_0 + R_0 \alpha t$$

$$a_0 = R_0, \quad a_1 = R_0 \alpha$$

Розрахунки по формулах (6) дали

$$a_0 = 9,52 \text{ Ом}, \quad a_1 = 0,086 \text{ Ом/град}$$

$$\alpha = \frac{a_1}{R_0} = 9,03 \cdot 10^{-3} \text{ 1/град}$$

Отже, реальна залежність має вигляд $R_t = 9,52(1 + 9,03 \cdot 10^{-3} t)$.

Приклад 2. Отримати реальну характеристику навантаження електронного пристрою $U_{\text{ВЫХ}} = f(I_H)$ за результатами випробувань, які приведені в табл.2.

$I_H, \text{мА}$	$U_{\text{ВЫХ}}, \text{В}$
105	5,35
110	5,2
129	5,11
148	4,92
154	4,76
181	4,76
190	4,5
206	4,33

225	4,3
241	4,04

Практичне заняття № 5

Метод найменших квадратів. Частина 2.

На минулому занятті за допомогою МНК ми вирішували задачу якнайкращої апроксимації залежності $y = f(x)$ за експериментальними даними x_i, y_i , коли шукана залежність має лінійний характер вигляду $y = a_0 + a_1x$.

Розглянемо випадок II, коли шукана залежність має нелінійний характер вигляду $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. (5.1)

Суть методу МНК полягає в тому, що найверогідніми значеннями шуканої аналітичної залежності будуть такі, при яких сума квадратів відхилень експериментальних значень y_i від значень самої функції y , буде найменшою:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y)^2 = \min. \quad (5.2)$$

Підставимо праву частину функції (1) в умову (2):

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)]^2 = \min. \quad (5.3)$$

Знаходимо частинні похідні за a_0, a_1, a_2 та вирішуємо отримані рівняння:

$$1) \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)]^2 = 0;$$

$$2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)](-1) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)] = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - na_0 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0. \quad (5.4)$$

$$2) \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)]^2 = 0;$$

$$2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)](-x_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i x_i - a_0 x_i - a_1 x_i^2 - a_2 x_i^3) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = 0. \quad (5.5)$$

$$3) \frac{\partial}{\partial a_2} \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)]^2 = 0;$$

$$2 \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)](-x_i^2) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i x_i^2 - a_0 x_i^2 - a_1 x_i^3 - a_2 x_i^4) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i^2 - a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = 0. \quad (5.6)$$

З отриманих рівнянь (4),(5) і (6) складемо систему

$$\begin{aligned} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i; \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i; \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Позначимо

$$\sum_{i=1}^n x_i = s_1, \sum_{i=1}^n x_i^2 = s_2, \sum_{i=1}^n x_i^3 = s_3, \sum_{i=1}^n x_i^4 = s_4, \sum_{i=1}^n y_i = s_5, \sum_{i=1}^n y_i x_i = s_6, \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 = s_7.$$

Тоді систему рівнянь (7) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} na_0 + s_1 a_1 + s_2 a_2 &= s_5; \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 &= s_6; \\ s_2 a_0 + s_3 a_1 + s_4 a_2 &= s_7 \end{aligned} \quad (5.8)$$

або в матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} n & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Вирішуємо систему рівнянь (9) методом Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (5.10)$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = ns_2s_4 + s_1s_3s_2 + s_1s_3s_2 - s_2^3 - ns_3^2 - s_1^2s_4;$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} s_5 & s_1 & s_2 \\ s_6 & s_2 & s_3 \\ s_7 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = s_5s_2s_4 + s_1s_3s_7 + s_6s_3s_2 - s_7s_2^2 - s_5s_3^2 - s_1s_4s_6;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} n & s_5 & s_2 \\ s_1 & s_6 & s_3 \\ s_2 & s_7 & s_4 \end{vmatrix} = ns_6s_4 + s_5s_3s_2 + s_1s_7s_2 - s_2^2s_6 - ns_7s_3 - s_1s_5s_4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} n & s_1 & s_5 \\ s_1 & s_2 & s_6 \\ s_2 & s_3 & s_7 \end{vmatrix} = ns_2s_7 + s_1s_6s_2 + s_1s_3s_5 - s_2^2s_5 - ns_3s_6 - s_1^2s_7.$$

або в матричному вигляді:

$$S \cdot A = B, \quad (5.11)$$

де $S = \begin{bmatrix} n & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix}.$

Для того, щоб знайти матрицю A , помножимо ліву і праву частини останнього виразу на S^{-1} :

$$S^{-1} \cdot S \cdot A = S^{-1} \cdot B.$$

Оскільки $S^{-1} \cdot S = E$ - одинична матриця, то

$$A = S^{-1} \cdot B$$

В середовищі MatLAB останній вираз можна записати у вигляді

$$A = S \setminus B$$

Пример 1. За наслідками випробувань, представленим в табл.1, отримати аналітичну залежність $y = f(x)$.

Табл.1

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	7	10	15	18	20	22	23	23,5	25	24,5	25

```
clc
clear all
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
y=[4.5 6.4 9 10.5 10 9.5 9.6 7 5 2 -2.5];
n=11
s1=sum(x)
s2=sum(x.*x)
s3=sum(x.*x.*x)
s4=sum(x.*x.*x.*x)
s5=sum(y)
s6=sum(y.*x)
s7=sum(y.*x.*x)
s=[n s1 s2;s1 s2 s3;s2 s3 s4]
b=[s5;s6;s7]
a=s\b
a0=a(1);
a1=a(2);
a2=a(3);
yt=a0+a1.*x+a2.*(x.*x);
plot(x,y,'p',x,yt, ' - ')
```

Практичне заняття № 6

Метод найменших квадратів. Часть 3.

Спочатку розглянемо випадок, коли шукана залежність має нелінійний характер вигляду

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (6.1)$$

Нехай у нас є n реалізацій:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \xi_1; \\ y_2 &= a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \xi_2; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$y_n = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \xi_n;$$

Дану систему рівнянь запишемо в матричній формі

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \boldsymbol{\xi}, \quad (6.3)$$

де $\mathbf{y}$ - вектор-стовбець розмірності $(n \times 1)$, $\mathbf{X}$ - матриця $(n \times 3)$, $\mathbf{a}$ - вектор-стовбець розмірності (3×1) , $\boldsymbol{\xi}$ - вектор-стовбець шуму розмірності (3×1) :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

Вирішення рівняння (12) методом найменших квадратів має вигляд

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (6.4)$$

Даний вираз зручно реалізувати в середовищі MatLAB.

Приклад 1. За результатами випробувань, які представлені в табл.1, отримати аналітичну залежність $y = f(x)$.

Табл.1

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	7	10	15	18	20	22	23	23,5	25	24,5	25

Скрипт-файл *mnk3.m* в середовищі MatLAB:

```
x=[0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10]; %Заданные значения входного сигнала
y=[7;10;15;18;20;22;23;23.5;25;24.5;25]; %Заданные значения выходного сигнала

z=size(x); %Нахождение размера матрицы входного сигнала X

X=[ones(z) x (x.^2)] % формирование матрицы X
a=(X'*X)\(X'*y); % матричный МНК

a0=a(1), a1=a(2), a2=a(3) %Вывод коэффициентов a=[a0 a1 a2]
```

Найчастіше на практиці [IEEE Std. 1554-2005] мають справу з нелінійною залежністю вигляду

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad . \quad (6.5)$$

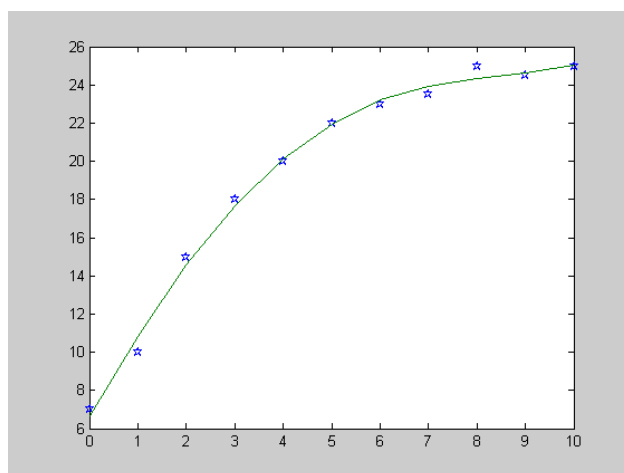


Рис.2.

Практичне заняття № 7

Обробка результатів випробувань акселерометра

Застосуємо отримані результати до випробувань акселерометра.

З лекції нам відомий вид вихідного сигналу u_i ($i = \overline{1, n}$) акселерометра. Для n випробувань матимемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} u_1 &= c_0 + c_1 \sin \alpha_1 + c_2 \cos \alpha_1 + c_3 \sin 2\alpha_1 + c_4 \cos 2\alpha_1 + \xi_1; \\ u_2 &= c_0 + c_1 \sin \alpha_2 + c_2 \cos \alpha_2 + c_3 \sin 2\alpha_2 + c_4 \cos 2\alpha_2 + \xi_2; \\ &\dots\dots\dots \\ u_n &= c_0 + c_1 \sin \alpha_n + c_2 \cos \alpha_n + c_3 \sin 2\alpha_n + c_4 \cos 2\alpha_n + \xi_n. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Тут ξ_i - шумова (випадкова) складова.

Напишемо систему (7.13) в матричній формі:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{c} + \boldsymbol{\xi}, \quad (7.14)$$

де $\mathbf{u}$ - вектор – стовбець розмірності $(n \times 1)$, $\mathbf{A}$ - матриця розмірності $(n \times 5)$,
 $\mathbf{c}$ - вектор – стовбець розмірності (5×1) ; $\boldsymbol{\xi}$ - вектор – стовбець розмірності $(n \times 1)$,
 причому

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & \sin 2\alpha_1 & \cos 2\alpha_1 \\ 1 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & \sin 2\alpha_2 & \cos 2\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & \sin 2\alpha_n & \cos 2\alpha_n \end{bmatrix}; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

Оцінки вихідних сигналів акселерометра (модель лінійної регресії) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \hat{c}_0 + \hat{c}_1 \sin \alpha_1 + \hat{c}_2 \cos \alpha_1 + \hat{c}_3 \sin 2\alpha_1 + \hat{c}_4 \cos 2\alpha_1; \\ \hat{u}_2 &= \hat{c}_0 + \hat{c}_1 \sin \alpha_2 + \hat{c}_2 \cos \alpha_2 + \hat{c}_3 \sin 2\alpha_2 + \hat{c}_4 \cos 2\alpha_2; \\ &\dots\dots\dots \\ \hat{u}_n &= \hat{c}_0 + \hat{c}_1 \sin \alpha_n + \hat{c}_2 \cos \alpha_n + \hat{c}_3 \sin 2\alpha_n + \hat{c}_4 \cos 2\alpha_n. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Або в матричній формі

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{c}}, \quad (7.16)$$

де $\hat{\mathbf{u}}$ - вектор – стовбець $(n \times 1)$ оцінок $\mathbf{u}$, $\hat{\mathbf{c}}$ - вектор оцінок параметрів.

Похибки вимірювань матимуть вигляд

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 - \hat{u}_1; \\ e_2 &= u_2 - \hat{u}_2; \\ &\dots\dots\dots \\ e_n &= u_n - \hat{u}_n \end{aligned} \quad (7.17)$$

Функцію похибок представимо у вигляді

$$F(\hat{\mathbf{c}}) = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 = \sum_{i=1}^n (u_i - \hat{u}_i)^2. \quad (7.18)$$

Згідно МНК, з умови

$$\sum_{i=1}^n (u_i - \hat{u}_i)^2 = \min. \quad (7.19)$$

визначають параметри u_i , по яких можна відновити шукані характеристики приладу.

Використовуючи вираз (7.12), в нашому випадку будемо мати

$$\hat{\mathbf{c}} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}'\mathbf{u}. \quad (7.20)$$

Вирішуємо (7.20), получимо $\hat{c}_0, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_4$. Використовуючи формули з лекції, обчислимо шукані параметри акселерометра:

$$u_0 = \hat{c}_0, \quad (7.21)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg \frac{\hat{c}_4}{\hat{c}_3}, \quad (7.22)$$

$$k_{xy} = \frac{2}{g^2} \sqrt{\hat{c}_3^2 + \hat{c}_4^2}, \quad (7.23)$$

$$k_x = -\frac{1}{g} (\hat{c}_1 \cos \alpha_0 + \hat{c}_2 \sin \alpha_0), \quad (7.24)$$

$$k_y = \frac{1}{g} (\hat{c}_1 \sin \alpha_0 - \hat{c}_2 \cos \alpha_0). \quad (7.25)$$

Скрипт-файл в середовищі MatLAB:

% КАЛИБРОВКА АКСЕЛЕРОМЕТРА по МНК С УЧЕТОМ ПОГРЕШНОСТИ ВЫСТАВКИ

clear all;clc

% данные измерений канала X

%ux=[2.4883,2.2301,1.9903,1.7851,1.6286,1.5313,1.5000,1.5369,1.6394,1.8007...

% 2.0097,2.2523,2.5117,2.7704,3.0106,3.2159,3.3723,3.4692,3.5000,3.4626...

% 3.3597,3.1983,2.9894,2.7472,2.4883]

ux=[2.4222,2.2718,2.0485,1.7695,1.7845,1.6715,1.4637,1.4245,1.4825,1.8148,1.9230,2.1868...

2.6312,2.6808,3.0432,3.1541,3.2491,3.5837,3.5867,3.5335,3.3768,3.1925,2.9905,2.8262,2.4881

]

aln=0; % начальное значение угла,град

alk=360; % конечное значение угла,град

al=aln:15:alk; % угол поворота,град

alfa=al*pi/180; % радианная мера угла поворота

% вычисление элементов матриц

sn=sin(alfa)

cs=cos(alfa)

sn2=sin(2*alfa)

cs2=cos(2*alfa)

Sn=sn'

Cs=cs'

Sn2=sn2'

Cs2=cs2'

Et=[1 1];

E=Et'

```

At=[E  Sn  Cs  Sn2  Cs2]
A=At'
C=(A'*A)\(A'*ux')
c0=C(1);
c1=C(2);
c2=C(3);
c3=C(4);
c4=C(5);
u0=c0 % нулевой сигнал, В
alf0rad=(atan(c4/c3))/2; % погрешность выставки ,рад
alfa0=alf0rad*180/pi % погрешность выставки ,град
Kx=-(c1*cos(alf0rad)+c2*sin(alf0rad))% масштабный к-т, В/g
Ky=(c1*sin(alf0rad)-c2*cos(alf0rad)) % к-т перекрестной связи, В/g
Kxy=2*sqrt(c3^2+c4^2) % вибромаятн. к-т , В/g2

```

ЛІТЕРАТУРА

1. Аврутов В.В., Аврутова І.В., Попов В.М. Випробування приладів і систем. Види випробувань та сучасне обладнання. Навчальний посібник – Київ, НТУУ «КПІ», 2009. – 64 с.
www.kafpson.kpi.ua/Arhiv/vyprob_sec.pdf
2. Метрология и радиоизмерения: Учебник для вузов/ Под ред. Нефедова В.И. – М.: Высшая шк., 2003. – 526 с.