

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»



**Массалітіна Є.В., Шевцова О.М.**

## **НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ**

Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни  
«Вища математика» для студентів теплоенергетичного  
факультету денної та заочної форм навчання

Київ  
НТУУ «КПІ»  
2013

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

## **НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ**

Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни  
«Вища математика» для студентів теплоенергетичного  
факультету денної та заочної форм навчання

*Рекомендовано Вченою радою фізико-математичного  
факультету НТУУ «КПІ»*

Київ  
НТУУ «КПІ»  
2013

Невласні інтеграли. Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання / Уклад.: Є.В. Массалітіна, О.М. Шевцова. К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 48 с.

*Гриф надано Вченою радою  
фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»  
Протокол №6 від 19.11.2013 р.*

## **Навчальне видання**

### **НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ**

Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика»  
для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм  
навчання

Укладачі: *Массалітіна Є. В., канд. фіз.-мат. наук,  
Шевцова О.М., канд. фіз.-мат. наук.*

Відповідальний

редактор: *Дудкін М.Є., д-р фіз.-мат. наук, доц.*

Рецензент: *Диховичний О.О., канд. фіз.-мат. наук, доц.*

*За редакцією укладачів  
Надруковано з оригінал-макета замовника*

## НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Визначений інтеграл - одне із основних понять математичного аналізу є ефективним та потужним методом дослідження в математиці, фізиці та інших дисциплінах. Визначений інтеграл

вводиться як границя інтегральних сум  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , де

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta x_i)$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , за умови, що виконуються

**два припущення:**

1. Проміжок інтегрування – скінченний;
2. Підінтегральна функція  $f(x)$  неперервна на  $[a, b]$ .

І тоді цей визначений інтеграл іноді називають ще **власним інтегралом**. Якщо не виконується хоча б одна з цих двох умов, то означення визначеного інтеграла стає неприйнятним.

Але у ряді практичних задач виникає необхідність обчислювати інтеграли на нескінченних проміжках  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, +\infty)$ , або інтеграл від функції, яка є необмеженою в деяких точках відрізка інтегрування.

Якщо ввести додаткові означення та поширити поняття визначеного інтеграла і на ці випадки, то прийдемо до:

1. Невласного інтеграла від функції на нескінченному проміжку (невласного інтеграла першого роду);
2. Невласного інтеграла від необмеженої функції (невласного інтеграла другого роду).

## §1. Невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду)

1. Нехай функція  $y = f(x)$  визначена на проміжку  $[a, +\infty)$  і є неперервною на будь-якому відрізку  $[a, b]$  (рис. 1), де

$-\infty < a < b < +\infty$ . Тоді існує визначений інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$ .

• Якщо існує скінченна границя визначеного інтеграла  $\int_a^b f(x) dx$  при  $b \rightarrow +\infty$ , то цю границю називають **невласним інтегралом першого роду** і позначають так

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Невласний інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  в цьому випадку називають **збіжним**,

а підінтегральну функцію  $f(x)$  – інтегрованою на проміжку  $[a, +\infty)$ . Якщо границя не існує, або нескінченна, то невластний інтеграл (1)

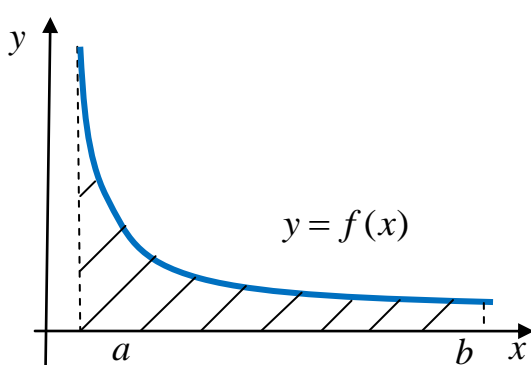


Рис. 1

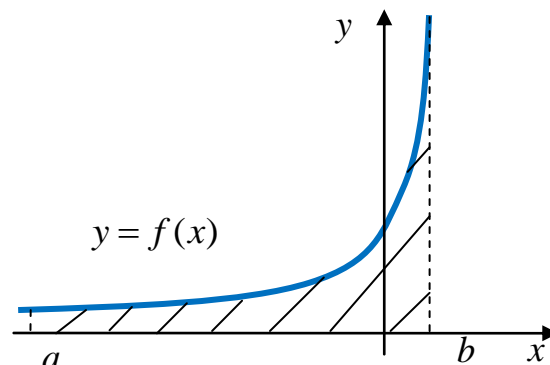


Рис. 2

називають **розбіжним**, а функцію  $f(x)$  – неінтегрованою на проміжку  $[a, +\infty)$ .

2. Невласний інтеграл першого роду на проміжку  $(-\infty, b]$  (рис. 2) визначається аналогічно інтегралу (1):

## Невласні інтеграли першого роду

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

3. Невласний інтеграл з двома нескінченними межами (рис. 3) визначається рівністю

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Інтеграл зліва існує і є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа.

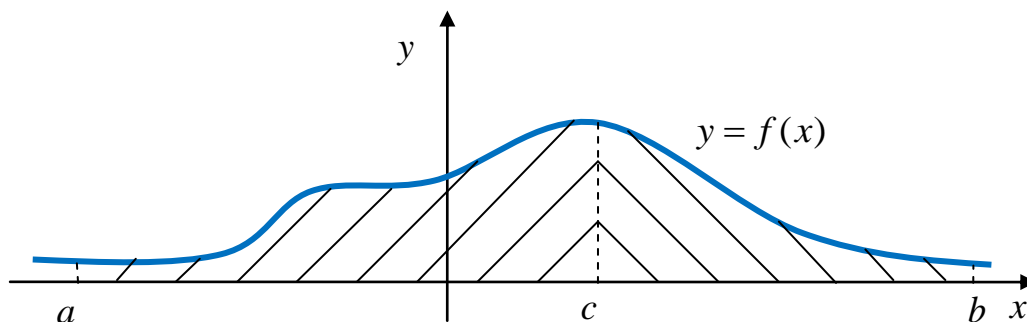


Рис. 3

З наведених означень видно, що невластний інтеграл є границею визначеного інтеграла зі змінною межею інтегрування. Тому для збіжних невластних інтегралів 1-го роду зберігаються основні властивості та формули визначеного інтеграла, а саме:

- лінійність, адитивність;
- формула Ньютона-Лейбніца;
- формула заміни змінних;
- формула інтегрування частинами.

### Геометричний зміст невластного інтеграла першого роду.

Якщо функція  $y = f(x) \geq 0$  неперервна на проміжку  $[a, +\infty)$  і інтеграл (1) збігається, то він виражає площу необмеженої області, розташованої між лініями  $y = f(x)$ ,  $x = a$  і віссю  $Ox$ .

## Невласні інтеграли першого роду

**Приклад.** Дослідити на збіжність еталонний інтеграл 1-го роду<sup>1</sup>

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \quad (\text{рис. 4}).$$

**Розв'язання.** Розглянемо два випадки:

1.  $\lambda = 1$ : 
$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty.$$

2.  $\lambda \neq 1$ : 
$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda} \lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}) = \begin{cases} \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \lambda > 1, \\ +\infty, & \lambda < 1. \end{cases}$$

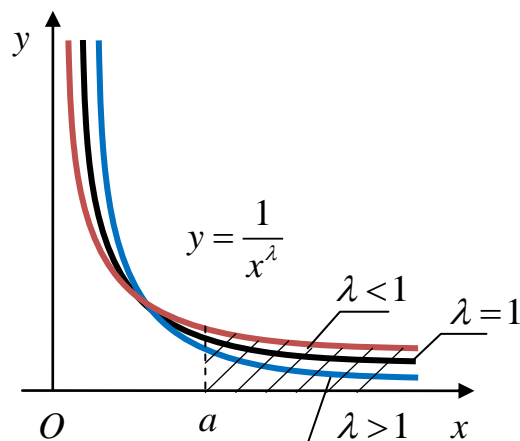


Рис. 4

### Висновок:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \text{при } \lambda > 1 \text{ — інтеграл збігається,} \\ +\infty, & \text{при } \lambda \leq 1 \text{ — інтеграл розбігається.} \end{cases}$$

У розглянутому прикладі обчислення невластного інтеграла 1-го роду ґрунтувалося на його означенні.

Іноді питання про збіжність чи розбіжність невластного інтеграла 1-го роду можна розв'язати, не знаходячи первісної для підінтегральної функції. При цьому використовують ознаки збіжності невластних інтегралів першого роду.

<sup>1</sup> Інтеграл  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$  будемо називати **еталонним**, бо його часто використовують як зразок для порівняння при дослідженні невластних інтегралів першого роду на збіжність за допомогою ознак порівняння.

## §2. Ознаки збіжності невластного інтеграла першого роду

**Теорема 1 (перша ознака порівняння – арифметична).**

Нехай виконуються умови:

1. Функції  $f(x)$  та  $g(x)$  неперервні на проміжку  $[a, +\infty)$ ;
2.  $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$ .

Тоді, якщо

1.  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  – збігається, то  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  – збігається;
2.  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  – розбігається, то  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  – розбігається.

Наведена теорема має просту **геометричну інтерпретацію**:

1. Якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченною величиною, то площа меншої області є також скінченною величиною (рис. 5).
2. Якщо площа меншої за розмірами необмеженої області є нескінченно великою величиною, то площа більшої області є також нескінченно великою величиною.

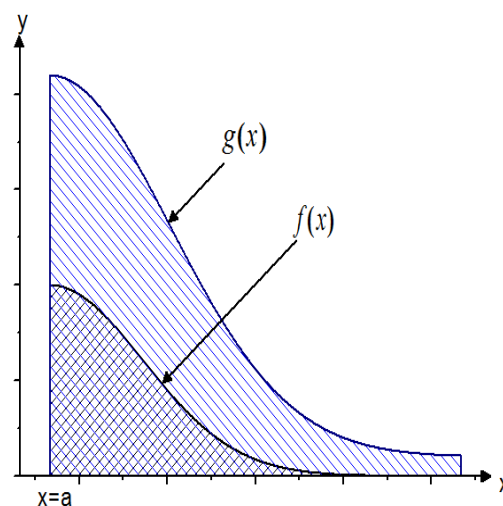


Рис. 5

### **Теорема 2 (друга ознака порівняння – гранична).**

Нехай виконуються умови:

1. Функції  $f(x)$  та  $g(x)$  неперервні на проміжку  $[a, +\infty)$ ;
2.  $f(x) > 0, \quad g(x) > 0 \quad \forall x \in [a, +\infty)$ .

Тоді, якщо існує скінченна границя  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < \infty$ , то

інтеграли  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  і  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  одночасно збігаються або розбігаються.

В теоремах 1 і 2 розглядалися невластні інтеграли від невід'ємних функцій. У випадку, коли підінтегральна функція є знакозмінною, справедлива наступна теорема.

**Теорема 3 (про абсолютну збіжність).** Якщо інтеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  – збігається, то збігається і інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

• Якщо інтеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  збігається, то інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  називається **абсолютно збіжним**, а функція  $f(x)$  називається **абсолютно інтегровною** на проміжку  $[a, +\infty)$ .

• Якщо інтеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  - розбігається, а інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  збігається, то інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  називається **умовно (неабсолютно) збіжним**.

### §3. Дослідження на збіжність невластних інтегралів першого роду

#### 3.1. Дослідження на збіжність невластних інтегралів першого роду за означенням

**Приклад 1.** Обчислити невластні інтеграли 1-го роду або встановити їх розбіжність:

$$1) \int_0^{+\infty} \sin x \, dx; \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}; \quad 3) \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

**Розв'язання.**

$$1) \int_0^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin x \, dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \cos x \Big|_0^b = - \lim_{b \rightarrow +\infty} (\cos b - \cos 0) = \\ = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b + 1.$$

Оскільки  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b$  не існує, то невластний інтеграл 1-го роду  $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$

розбігається.

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = I_1 + I_2.$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{(x+2)^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_a^0 = \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \frac{a+2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+2)^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_0^b = \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{b+2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

## Невласні інтеграли першого роду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = I_1 + I_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \cancel{\arctg \frac{2}{\sqrt{5}}} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \cancel{\arctg \frac{2}{\sqrt{5}}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Отже, цей невластний інтеграл 1-го роду збігається і чисельно дорівнює площі фігури (рис. 6), обмеженої графіком підінтегральної функції та віссю  $Ox$ .

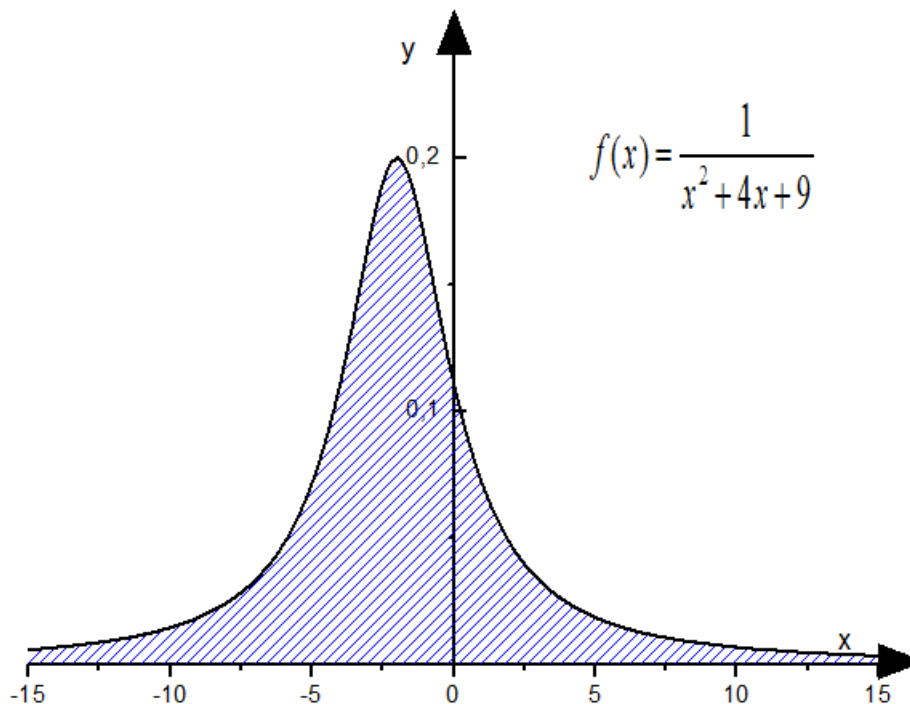


Рис. 6

$$\begin{aligned} \mathbf{3)} \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2 - 1} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-2} \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_a^{-2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln \left| 1 - \frac{2}{x+1} \right| \Big|_a^{-2} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \ln 3 - \ln \left| 1 - \frac{2}{a+1} \right| \right) = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

Невластний інтеграл 1-го роду збігається.

**Приклад 2.** Обчислити невластні інтеграли 1-го роду або встановити їх розбіжність:

$$\begin{aligned} \mathbf{1)} \int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{th} x \, dx; & \quad \mathbf{2)} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)^3}; & \quad \mathbf{3)} \int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^2} \, dx; \\ \mathbf{4)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}. & & \end{aligned}$$

### Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1)} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{th} x \, dx &= \left| \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \right| = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx = \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left( \operatorname{sh} x - \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x} \right) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left( \operatorname{sh} x - \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch} x} \right) dx = \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left( \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x + \frac{1}{\operatorname{ch} x} \right) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left( \frac{1}{\operatorname{ch} x} - e^{-x} \right) dx = \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left( \frac{2}{e^x + e^{-x}} - e^{-x} \right) dx = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{de^x}{e^{2x} + 1} + \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-x} \Big|_0^b = \\
 &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} e^x \Big|_0^b + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^b} - 1 \right) = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{\left( \operatorname{arctg} e^b - \operatorname{arctg} 1 \right)}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} - 1 = \\
 &= 2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{2)} \quad \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3} &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\sqrt{2}}^b \frac{d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^3} = -\frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \Big|_{\sqrt{2}}^b = \\
 &= -\frac{1}{4} \left( \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{(b^2 + 1)^2} - \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{36}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = \frac{dx}{x^2}, \quad v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = \\
 &= -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \Big|_1^b + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x(1+x^2)} = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} b}{b}}_{\rightarrow 0} + \frac{\pi}{4} + \\
 &+ \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{4} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_1^b = \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + 1} \Big|_1^b = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \left( \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^2}{b^2 + 1} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

## Невласні інтеграли першого роду

$$\begin{aligned}
 4) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x}, \quad x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 1 & b \\ \hline t & 1 & \frac{1}{b} \\ \hline \end{array} \\ \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1} = \frac{1}{t} \sqrt{1 + t + t^2} \end{array} \right| = \\
 &= - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{t \cdot t \cdot dt}{t^2 \cdot \sqrt{1 + t + t^2}} = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{dt}{\sqrt{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = \\
 &= - \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \left( t + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + t + t^2} \right) \Big|_1^{\frac{1}{b}} = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}} \right) + \\
 &\quad + \ln \left( \frac{3}{2} + \sqrt{3} \right) = - \ln \frac{3}{2} + \ln \left( \frac{3}{2} + \sqrt{3} \right) = \ln \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right).
 \end{aligned}$$

### 3.2. Дослідження на збіжність невластних інтегралів першого роду за арифметичною ознакою порівняння

**Приклад 1.** Дослідити на збіжність інтеграл Пуассона  $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = e^{-x^2} > 0$  та неперервна  $\forall x \in [1, +\infty)$ . Оскільки даний інтеграл не виражається через елементарні функції, то підберемо функцію порівняння  $g(x)$ :

$$\forall x \in [1, +\infty) \quad x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x},$$

отже,  $f(x) = e^{-x^2} \leq e^{-x} = g(x) \quad \forall x \in [1, +\infty)$ .

Дослідимо на збіжність інтеграл  $\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx =$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^{-x} dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-x} \Big|_1^b = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^b} - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e}.$$

## Невласні інтеграли першого роду

Інтеграл збігається, тому за арифметичною ознакою порівняння

збігається інтеграл Пуассона  $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

**Приклад 2.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^3 + 5)}{x} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = \frac{\ln(x^3 + 5)}{x} > 0$  та неперервна  $\forall x \in [1, +\infty)$ . Підберемо функцію порівняння  $g(x)$ :

$$\forall x \in [1, +\infty) \quad x^3 + 5 > x \quad \Rightarrow \quad \ln(x^3 + 5) > \ln x \quad \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{\ln(x^3 + 5)}{x} > \frac{\ln x}{x} = g(x).$$

Дослідимо на збіжність інтеграл  $\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx =$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln^2 x \Big|_1^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln^2 b - \ln^2 1) = \infty.$$

Інтеграл розбігається, тому за арифметичною ознакою порівняння

розбігається інтеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

**Приклад 3.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_2^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 - x}}$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - x}} > 0$  та неперервна  $\forall x \in [2, +\infty)$ . Підберемо функцію  $g(x)$ . Оскільки

$$\forall x \in [2, +\infty) \quad \sqrt{x^6 - x} < \sqrt{x^6} = x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x^6 - x}} > \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - x}} > \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} = g(x).$$

## Невласні інтеграли першого роду

Еталонний інтеграл  $\int_2^{+\infty} g(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$  – при  $\lambda = 1$  розбігається, тому

за арифметичною ознакою порівняння розбігається інтеграл  $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ .

**Приклад 4.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{4x^2 + 3x + 5}$ .

**Розв'язання.** Запишемо інтеграл у вигляді

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{4x^2 + 3x + 5} = \underbrace{\int_0^a \frac{\arctg x dx}{4x^2 + 3x + 5}}_{\text{Власний інтеграл}} + \int_a^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{4x^2 + 3x + 5}.$$

Підінтегральна функція  $f(x) = \frac{\arctg x}{4x^2 + 3x + 5} > 0$  та неперервна

$\forall x \in [a, +\infty)$ ,  $a > 0$ . Знайдемо функцію порівняння  $g(x)$ . Оскільки

$\forall x > 0$  виконуються нерівності  $4x^2 + 3x + 5 > 4x^2$ ,  $\arctg x < \frac{\pi}{2}$ ,

то  $f(x) = \frac{\arctg x}{4x^2 + 3x + 5} < \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{8} g(x)$ .

Еталонний інтеграл  $\int_a^{+\infty} g(x) dx = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  – при  $\lambda = 2$  збігається, тому за

арифметичною ознакою порівняння збігається інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Отже, збігається і інтеграл  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ .

**Приклад 5.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_2^{+\infty} \frac{x^{12}}{(5x^5 + x^3 + 1)^3} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = \frac{x^{12}}{(5x^5 + x^3 + 1)^3} > 0$  та

неперервна  $\forall x \in [2, +\infty)$ . Знайдемо функцію порівняння  $g(x)$ .

## Невласні інтеграли першого роду

Для цього запишемо функцію  $f(x)$  у вигляді

$$f(x) = \frac{x^{12}}{(5x^5 + x^3 + 1)^3} = \frac{x^{12}}{x^{15} \left(5 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right)^3} < \frac{x^{12}}{x^{15}} = \frac{1}{x^3} = g(x).$$

Еталонний інтеграл  $\int_2^{+\infty} g(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$  – при  $\lambda = 3$  збігається, тому за

арифметичною ознакою порівняння збігається інтеграл  $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ .

### 3.3. Дослідження на збіжність невластних інтегралів першого роду за граничною ознакою порівняння

**Приклад 1.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) dx$ .

**Розв'язання.** Запишемо підінтегральну функцію у вигляді:

$$f(x) = 1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = 2 \sin^2 \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} > 0 \text{ та неперервна } \forall x \in [1, +\infty).$$

Підберемо функцію  $g(x)$ , використовуючи еквівалентність нескінченно малих функцій:

$$\sin \alpha \sim \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

тому  $g(x) = \frac{1}{(2\sqrt[4]{x})^2} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$ . Еталонний інтеграл  $\int_1^{+\infty} g(x) dx = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  –

при  $\lambda = \frac{1}{2}$  розбігається.

За граничною ознакою порівняння, оскільки існує границя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{x}}}{\frac{1}{4\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin^2 \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} \cdot 4\sqrt{x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = 2 = k,$$

## Невласні інтеграли першого роду

то інтеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  розбігається одночасно з інтегралом  $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ .

**Приклад 2.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\arcsin(\frac{1}{x}) dx}{1 + x\sqrt{x}}$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = \frac{\arcsin(\frac{1}{x})}{1 + x\sqrt{x}} > 0$  та неперервна  $\forall x \in [1, +\infty)$ . Підберемо функцію  $g(x)$ , використовуючи еквівалентність нескінченно малих функцій:

$$\arcsin \alpha \sim \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

тому  $g(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ . Еталонний інтеграл  $\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}}$  – при  $\lambda = \frac{5}{2}$

збігається. Оскільки за граничною ознакою порівняння  $\exists$  скінченна границя

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin(\frac{1}{x})}{1 + x\sqrt{x}} \cdot x^2\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2\sqrt{x}}{x + x^2\sqrt{x}} = 1 = k,$$

то інтеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  збігається одночасно з інтегралом  $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ .

**Приклад 3.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_8^{+\infty} \frac{5x + \sqrt[3]{x+2}}{x^3 + 9 \cdot \sqrt[5]{x^4+1}} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = \frac{5x + \sqrt[3]{x+2}}{x^3 + 9 \cdot \sqrt[5]{x^4+1}} > 0$

та неперервна  $\forall x \in [8, +\infty)$ . Знайдемо функцію порівняння  $g(x)$ .

Для цього запишемо функцію  $f(x)$  у вигляді

## Невласні інтеграли першого роду

$$f(x) = \frac{5x + \sqrt[3]{x+2}}{x^3 + 9 \cdot \sqrt[5]{x^4 + 1}} = \frac{x \left( 5 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} \right)}{x^3 \left( 1 + 9 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{x^{11}} + \frac{1}{x^{15}}} \right)} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{5 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}}{1 + 9 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{x^{11}} + \frac{1}{x^{15}}}}.$$

Нехай  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ , еталонний інтеграл  $\int_8^{+\infty} g(x) dx = \int_8^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  – при  $\lambda = 2$

збігається. Оскільки за граничною ознакою порівняння існує скінчена границя

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x + \sqrt[3]{x+2}) \cdot x^2}{x^3 + 9 \cdot \sqrt[5]{x^4 + 1}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}}{1 + 9 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{x^{11}} + \frac{1}{x^{15}}}} = 5 = k,$$

то інтеграл  $\int_8^{+\infty} f(x) dx$  збігається одночасно з інтегралом  $\int_8^{+\infty} g(x) dx$ .

**Приклад 4.** Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \cos(e^{-x}) \cdot 3^x \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{7^x} dx.$$

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = \cos(e^{-x}) \cdot 3^x \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{7^x} > 0$

та неперервна  $\forall x \in [0, +\infty)$ . Підберемо функцію  $g(x)$ , використовуючи еквівалентність нескінченно малих функцій:

$$\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{7^x} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad \text{тому } g(x) = \left( \frac{3}{7} \right)^x.$$

Дослідимо на збіжність інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(x) dx &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{3}{7} \right)^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left( \frac{3}{7} \right)^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln \frac{3}{7}} \left( \frac{3}{7} \right)^x \Big|_0^b = \\ &= \frac{1}{\ln \frac{3}{7}} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{3}{7} \right)^b - 1 \right) = -\frac{1}{\ln \frac{3}{7}}. \end{aligned}$$

## Невласні інтеграли першого роду

Отже, інтеграл збігається. Оскільки за граничною ознакою порівняння існує скінчена границя

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(e^{-x}) \cdot 3^x \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{7^x}}{\left(\frac{3}{7}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\cos \frac{1}{e^x}}_{\rightarrow 1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \cdot \frac{1}{7^x}}{\left(\frac{3}{7}\right)^x} = 1 = k,$$

то  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  збігається одночасно з інтегралом  $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ .

### 3.4. Дослідження на абсолютну збіжність невластних інтегралів першого роду

**Приклад 1.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{1 + 4 \sin 16x}{x^5 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = \frac{1 + 4 \sin 16x}{x^5 \sqrt{x^2 + 1}}$  змінює

знак на проміжку  $[1, +\infty)$ . Досліджуємо на збіжність інтеграл

$$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|1 + 4 \sin 16x|}{x^5 \sqrt{x^2 + 1}} dx. \text{ Підберемо функцію } g(x):$$

$$\forall x \in [1, +\infty) \quad x^5 \cdot \sqrt{x^2 + 1} > x^6 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^5 \sqrt{x^2 + 1}} < \frac{1}{x^6}.$$

$$-1 \leq \sin 16x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -4 \leq 4 \sin 16x \leq 4 \quad \Rightarrow$$

$$-3 \leq 1 + 4 \sin 16x \leq 5 \quad \Rightarrow \quad |1 + 4 \sin 16x| \leq 5 \quad \Rightarrow$$

$$|f(x)| = \frac{|1 + 4 \sin 16x|}{x^5 \sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{5}{x^6} = g(x).$$

Отже, підінтегральна функція обмежена двома функціями

$$-\frac{5}{x^6} < f(x) < \frac{5}{x^6} \quad (\text{рис. 7}).$$

## Невласні інтеграли першого роду

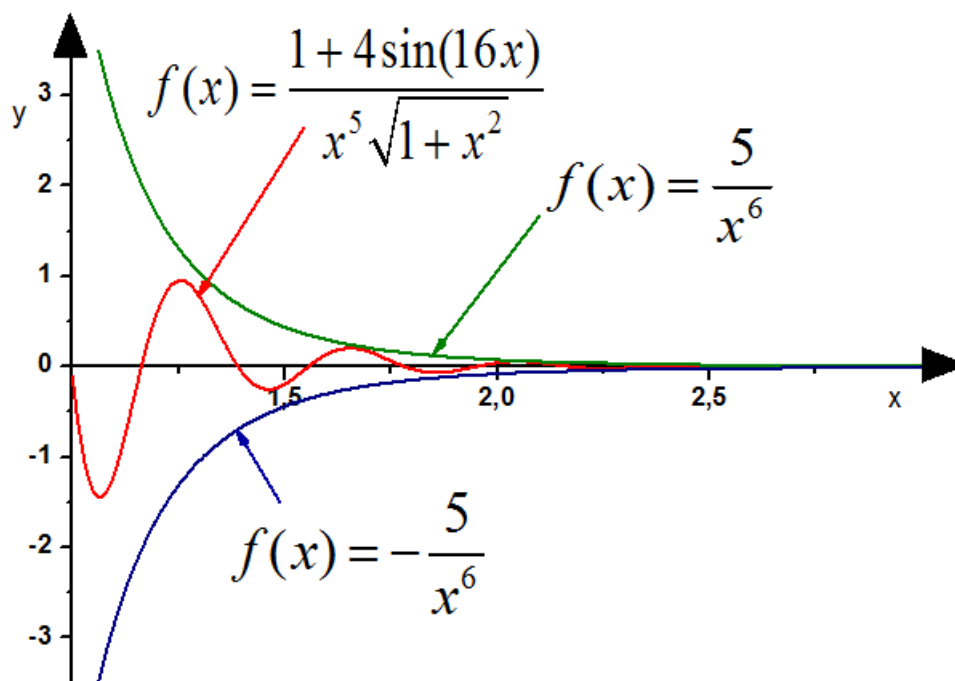


Рис. 7

Еталонний інтеграл  $\int_1^{+\infty} g(x) dx = 5 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^6}$  – при  $\lambda = 6$  збігається, тому за

арифметичною ознакою порівняння інтеграл  $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$  – також збігається.

**Висновок:** Інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{1 + 4 \sin 16x}{x^5 \sqrt{x^2 + 1}} dx$  збігається абсолютно.

**Приклад 2.** Дослідити на збіжність інтеграл Діріхле  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

**Розв'язання.** Запишемо інтеграл Діріхле у вигляді

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx}_{I^*} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

## Невласні інтеграли першого роду

Інтеграл  $I^*$  – власний, оскільки  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Підінтегральна функція

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ змінює знак на проміжку } \left[ \frac{\pi}{2}, +\infty \right).$$

1. Досліджуємо на збіжність інтеграл  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ .

Підберемо функцію  $g(x)$ :

$$\forall x \in \left[ \frac{\pi}{2}, +\infty \right) \quad \sin^2 x \leq |\sin x| \Rightarrow g(x) = \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x} = f(x).$$

Дослідимо на збіжність інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{2x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Перший з інтегралів  $I_1 = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x}$  – еталонний, при  $\lambda = 1$  розбігається,

тому розбігається інтеграл  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(x) dx$ . Тоді за арифметичною ознакою

порівняння розбігається і інтеграл  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |f(x)| dx$ .

2. Досліджуємо на збіжність інтеграл  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(x) dx$ . Інтегруємо частинами:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\sin x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{x}, \quad du = -\frac{dx}{x^2}, \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| =$$

## Невласні інтеграли першого роду

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\cos x}{x} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^b - \int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\cos x}{x^2} dx \right) = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\cos b \cdot \frac{1}{b}}_{\rightarrow 0} + \int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\cos x}{x^2} dx \right) = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Інтеграл  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  є абсолютно збіжним. Дійсно,  $\forall x \in \left[ \frac{\pi}{2}, +\infty \right)$

$$|\varphi(x)| = \frac{|\cos x|}{x^2} < \frac{1}{x^2} = g(x).$$

Еталонний інтеграл  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} g(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  – при  $\lambda = 2$  збігається, тому за

арифметичною ознакою порівняння інтеграл  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx$  –

збігається. Отже, інтеграл  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  є абсолютно збіжним, тоді

збігається і інтеграл  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

**Висновок:** Інтеграл Діріхле  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  збігається умовно.

**Приклад 3.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{x(x-\pi)} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = \frac{\cos^3 x}{x(x-\pi)}$  змінює

знак на проміжку  $[2\pi, +\infty)$ . Досліджуємо на збіжність інтеграл

$$\int_{2\pi}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{|\cos^3 x|}{x(x-\pi)} dx.$$

Підберемо для порівняння функцію  $g(x)$ :

$$\forall x \in [2\pi, +\infty) \quad x(x-\pi) > (x-\pi)^2,$$

## Невласні інтеграли першого роду

отже, 
$$|f(x)| = \frac{|\cos^3 x|}{x(x-\pi)} \leq \frac{1}{x(x-\pi)} < \frac{1}{(x-\pi)^2} = g(x).$$

Оскільки інтеграл 
$$\int_{2\pi}^{+\infty} g(x) dx = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\pi)^2} =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{2\pi}^b \frac{dx}{(x-\pi)^2} = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-\pi} \Big|_{2\pi}^b = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{(b-\pi)} - \frac{1}{\pi} \right) = \frac{1}{\pi}$$

– збігається, то за арифметичною ознакою порівняння інтеграл

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{|\cos^3 x|}{x(x-\pi)} dx \text{ – також збігається.}$$

**Висновок:** Інтеграл 
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{x(x-\pi)} dx$$
 збігається абсолютно.

## §4. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду)

1. Розглянемо функцію  $y = f(x)$ , яка визначена на проміжку  $[a, b)$ . Нехай функція  $y = f(x)$  є обмеженою і інтегрованою на будь-якому відрізку  $[a, b - \varepsilon]$  (рис. 8), де  $0 < \varepsilon < b - a$ , а зліва від точки  $x = b$  функція  $y = f(x)$  є **необмеженою**. Точку  $x = b$  при цьому будемо називати **особливою** точкою функції  $y = f(x)$ .

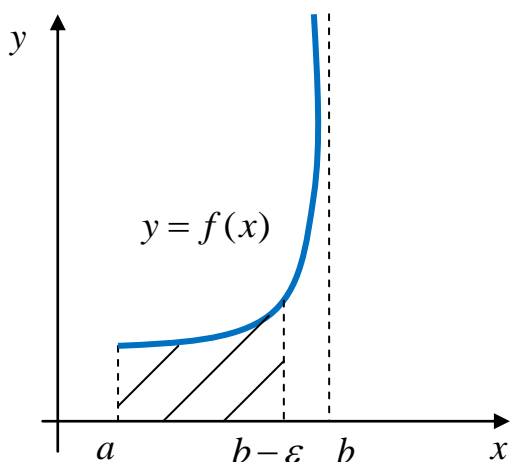


Рис. 8

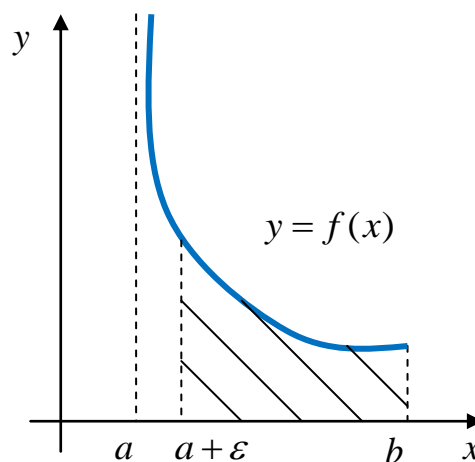


Рис. 9

- Якщо існує скінчена границя визначеного інтеграла  $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то цю границю називають **невласним інтегралом другого роду функції**  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  і позначають так

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (3)$$

Цей невластний інтеграл називають **збіжним**. Якщо границя (3) не існує, або нескінченна, то невластний інтеграл називають **розбіжним**.

## Невласні інтеграли другого роду

2. Розглянемо функцію  $y = f(x)$ , яка визначена на проміжку  $(a, b]$ . Невласний інтеграл другого роду від функції  $y = f(x)$ , яка є обмеженою і інтегровною на будь-якому відрізку  $[a + \varepsilon, b]$  (рис. 9), де  $0 < \varepsilon < b - a$ , а справа від точки  $x = a$  функція  $y = f(x)$  є **необмеженою**, визначається аналогічно інтегралу (3)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Точку  $x = a$  при цьому називають **особливою** точкою функції  $y = f(x)$ .

3. Якщо функція  $y = f(x)$  необмежена в внутрішньої точці  $c \in (a, b)$  (рис. 10), то невластний інтеграл другого роду визначається так:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_1 > 0}} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 > 0}} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx.$$

Інтеграл зліва існує і є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа.

**Приклад.** Дослідити на збіжність еталонний інтеграл 2-го роду<sup>2</sup>

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

**Розв'язання.** Розглянемо два випадки:

1.  $\lambda = 1$ : 
$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} =$$

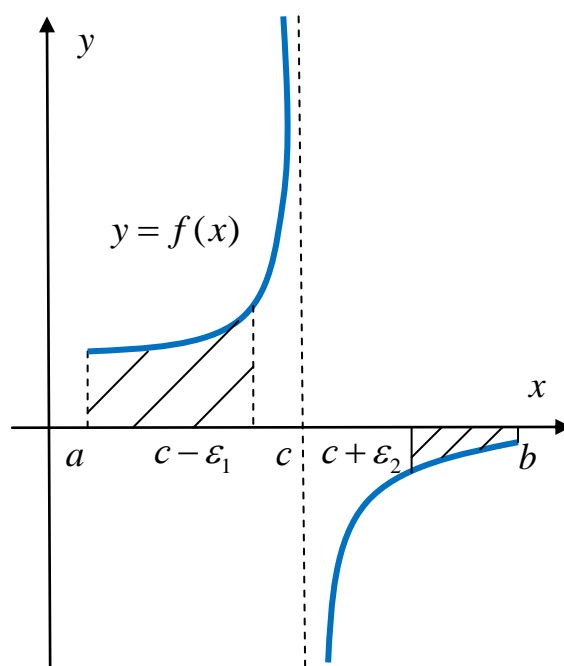


Рис. 10

<sup>2</sup> Інтеграли  $I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$  та  $I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$  будемо називати **еталонними**, бо їх часто використовують як зразок для порівняння при дослідженні невластних інтегралів другого роду на збіжність за допомогою ознак порівняння.

## Невласні інтеграли другого роду

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(x-a) \Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln(b-a) - \ln \varepsilon) = +\infty, \quad \text{де } 0 < \varepsilon < b-a.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \lambda \neq 1: \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_{a+\varepsilon}^b = \\ &= \frac{1}{1-\lambda} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((b-a)^{1-\lambda} - \varepsilon^{1-\lambda}) = \begin{cases} +\infty, & \lambda > 1, \\ \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & 0 < \lambda < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

### Висновок:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \begin{cases} +\infty, & \text{при } \lambda \geq 1 - \text{інтеграл розбігається,} \\ \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \text{при } 0 < \lambda < 1 - \text{інтеграл збігається.} \end{cases}$$

**Еталонний інтеграл**  $I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$  збігається і розбігається так

само, як і інтеграл  $I_1$  (переконайтеся в цьому самостійно).

У розглянутому прикладі обчислення невластного інтеграла 2-го роду ґрунтувалося на його означенні. Питання про збіжність чи розбіжність невластного інтеграла 2-го роду можна розв'язати, не знаходячи первісної для підінтегральної функції, оскільки для невластних інтегралів 2-го роду, так само, як і для невластних інтегралів 1-го роду, існує ряд теорем, які дають достатні ознаки збіжності (розбіжності).

## §5. Ознаки збіжності невластного інтеграла другого роду

### Теорема 1 (перша ознака порівняння – арифметична).

Нехай виконуються умови:

1. Функції  $f(x)$  та  $g(x)$  неперервні на проміжку  $[a, b)$  і мають особливу точку  $x = b$ ;
2.  $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b)$ .

Тоді, якщо

## Невласні інтеграли другого роду

1.  $\int_a^b g(x) dx$  – збігається, то  $\int_a^b f(x) dx$  – збігається;

2.  $\int_a^b f(x) dx$  – розбігається, то  $\int_a^b g(x) dx$  – розбігається.

### Теорема 2 (друга ознака порівняння – гранична).

Нехай виконуються умови:

1. Функції  $f(x)$  та  $g(x)$  неперервні на проміжку  $[a, b)$  і мають особливу точку  $x = b$ ;
2.  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b)$ .

Тоді, якщо існує скінченна границя  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ ,  $0 < k < \infty$ , то

інтеграли  $\int_a^b g(x) dx$  і  $\int_a^b f(x) dx$  одночасно збігаються або розбігаються.

У випадку, коли підінтегральна функція є знакозмінною, справедлива наступна теорема.

### Теорема 3 (про абсолютну збіжність).

Якщо  $x = b$  – особлива точка функції  $f(x)$  і інтеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$  –

збігається, то збігається і інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$ .

- Якщо інтеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$  збігається, то інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$

називається **абсолютно збіжним**.

- Якщо  $x = b$  – особлива точка функції  $f(x)$  і інтеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$  – розбігається, а інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  збігається, то інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  називається **умовно (неабсолютно) збіжним**.

Аналогічні признаки справедливі і для невластних інтегралів  $\int_a^b f(x) dx$ ,

де функція  $f(x)$  необмежена справа від точки  $x = a$ .

## §6. Дослідження на збіжність невластних інтегралів другого роду

### 6.1. Дослідження на збіжність невластних інтегралів другого роду за означенням

**Приклад 1.** Обчислити невластні інтеграли 2-го роду або встановити їх розбіжність:

$$1) \int_{-2}^1 \frac{dx}{x^{6/5}}; \quad 2) \int_{-1}^1 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad 3) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx; \quad 4) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx.$$

#### Розв'язання.

1) Розглянемо інтеграл  $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^{6/5}}$ . Оскільки особлива точка  $x = 0$

підінтегральної функції  $f(x) = \frac{1}{x^{6/5}}$  знаходиться всередині відрізка

$[-2,1]$ , то розіб'ємо його на дві частини таким чином, щоб у кожному з проміжків інтегрування знаходилась одна особлива точка.

$$\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^{6/5}} = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^{6/5}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{6/5}} = I_1 + I_2.$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл

## Невласні інтеграли другого роду

$$I_1 = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^{6/5}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^{6/5}} = -5 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^{1/5}} \right) \Big|_{-2}^{-\varepsilon} = -5 \left( -\infty + \frac{1}{2^{1/5}} \right) = \infty.$$

Невласний інтеграл 2-го роду  $I_1$  розбігається, отже, розбігається інтеграл  $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^{6/5}}$ .

Слід звернути увагу на те, що, якщо не врахувати, що підінтегральна функція має розрив на проміжку інтегрування та формально використати формулу Ньютона-Лейбніца, то отриманий результат буде невірним:

$$\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^{6/5}} = -\frac{5}{\sqrt[5]{x}} \Big|_{-2}^1 = -5 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \right).$$

**2)** Розглянемо інтеграл  $\int_{-1}^1 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ . Підінтегральна функція

$f(x) = \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$  має 2 особливі точки  $x = -1$  та  $x = 1$  на нижньому та

верхньому кінцях проміжку інтегрування (рис. 11).

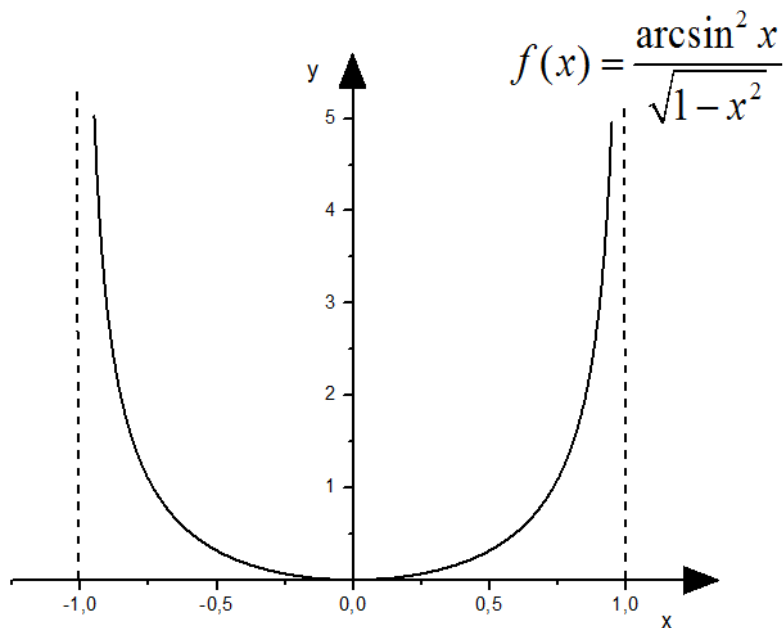


Рис. 11

## Невласні інтеграли другого роду

Тому розіб'ємо даний інтеграл на два інтеграли, в кожному з яких функція буде мати тільки одну особливу точку:

$$\int_{-1}^1 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = I_1 + I_2.$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^0 \arcsin^2 x d(\arcsin x) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{(\arcsin x)^3}{3} \right|_{-1+\varepsilon}^0 = \frac{1}{3} \arcsin^3(0) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin^3(-1+\varepsilon) = \frac{1}{3} \left( 0 + \frac{\pi^3}{8} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \arcsin^2 x d(\arcsin x) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{(\arcsin x)^3}{3} \right|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin^3(1-\varepsilon) - \arcsin^3 0 = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi^3}{8} + 0 \right). \end{aligned}$$

Отже, 
$$\int_{-1}^1 \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = I_1 + I_2 = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^3}{12}.$$

Невласний інтеграл 2-го роду збігається.

**3)** Розглянемо інтеграл  $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ . Підінтегральна функція  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

має одну особливу точку  $x = 0$ . Інтегруємо частинами:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad v = 2\sqrt{x} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\sqrt{x} \cdot \ln x) \Big|_{0+\varepsilon}^1 - 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{\sqrt{x}}{x} dx = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{0+\varepsilon}^1 = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &\text{пр. Лопіталя} \\ &= -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\ln \varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)'} - 4 = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{-1}}{-\frac{1}{2} \varepsilon^{-\frac{3}{2}}} - 4 = 4 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} - 4 = -4. \end{aligned}$$

Невласний інтеграл 2-го роду збігається.

## Невласні інтеграли другого роду

4) Розглянемо інтеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$ . Підінтегральна функція

$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$  на відрізку  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  має особливу точку  $x = \frac{\pi}{2}$  (рис. 12).

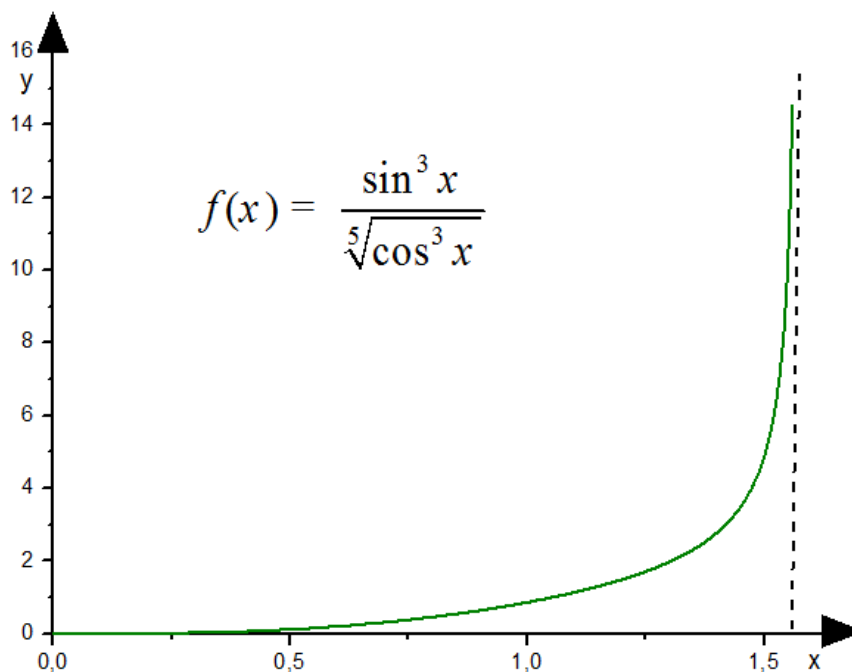


Рис. 12

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\sin^2 x d(\cos x)}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{(1 - \cos^2 x) d(\cos x)}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{d(\cos x)}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \cos^{\frac{7}{5}} x d(\cos x) = \\ &= -\frac{5}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos^{\frac{2}{5}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \frac{5}{12} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos^{\frac{12}{5}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} = -\frac{5}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \cos^{\frac{2}{5}} \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) - 1 \right) + \\ &\quad + \frac{5}{12} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \cos^{\frac{12}{5}} \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) - 1 \right) = \frac{5}{2} - \frac{5}{12} = \frac{25}{12}. \end{aligned}$$

Невласний інтеграл 2-го роду збігається.

**Зауваження 1.** Невласні інтеграли 2-го роду можуть перетворюватись у власні інтеграли при певних замінах змінних.

## Невласні інтеграли другого роду

**Наприклад,** обчислимо інтеграл:  $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ .

Підінтегральна функція на відрізку  $[0;1]$  має одну особливу точку  $x = 1$ .

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{1-x} = t \geq 0, \quad x = 1-t^2, \\ 1-x = t^2, \quad dx = -2tdt, \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 0 & 1-\varepsilon \\ \hline t & 1 & \sqrt{\varepsilon} \\ \hline \end{array} \right| = \\
 &= -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{tdt}{(1+t^2)t} = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_1^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{dt}{1+t^2}}_{\text{Власний інтеграл}} = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{arctg } t \Big|_1^{\sqrt{\varepsilon}} = \\
 &= -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{arctg } \sqrt{\varepsilon} - \text{arctg } 1 = -2 \left( 0 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

**Зауваження 2.** Невласні інтеграли 2-го роду у деяких випадках можуть перетворюватись у власні інтеграли при інтегруванні частинами.

**Наприклад,** обчислимо інтеграл:  $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx$ .

Підінтегральна функція  $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}$  має одну особливу точку  $x = 1$ .

Інтегруємо частинами:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x, \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \quad v = -2\sqrt{1-x} \end{array} \right| = \\
 &= -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{1-x} \cdot \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} + 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}}_{\text{Власний інтеграл}} = \\
 &= 4 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{1+x} \Big|_0^{1-\varepsilon} = 4(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{2-\varepsilon} - 1) = 4(\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

## 6.2. Дослідження на збіжність невластних інтегралів другого роду за арифметичною ознакою порівняння

**Приклад 1.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$  та неперервна  $\forall x \in (0,1]$ . Точка  $x = 0$  є особливою для функції  $f(x)$ . Підберемо функцію  $g(x)$ . Оскільки  $\forall x \in (0,1]$  має місце нерівність:

$$f(x) = \frac{\sin^2 \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$$

та еталонний інтеграл  $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-0}}$  – при  $\lambda = \frac{1}{2}$  збігається, то

за арифметичною ознакою порівняння збігається інтеграл  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**Приклад 2.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^4}} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{16-x^4}} > 0 \text{ та неперервна } \forall x \in [0,2).$$

Точка  $x = 2$  є особливою для функції  $f(x)$ . Підберемо функцію  $g(x)$ .

Запишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{16-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2-x}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{2+x} \sqrt{4+x^2}}.$$

Оскільки  $\forall x \in [0,2)$   $\sqrt{2-x} \cdot \sqrt{2+x} \cdot \sqrt{4+x^2} > \sqrt{2-x}$ , то

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2-x}}}_{g(x)} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{2+x} \sqrt{4+x^2}} < \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} < \frac{4}{\sqrt{2-x}} = 4g(x).$$

## Невласні інтеграли другого роду

Еталонний інтеграл  $\int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$  – при  $\lambda = \frac{1}{2}$  збігається. Тоді,

за арифметичною ознакою порівняння, інтеграл  $\int_0^2 f(x) dx$  – також збігається.

**Приклад 3.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_0^4 \frac{1+x}{x^5 + \sqrt[3]{x^2} + 2x} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція

$$f(x) = \frac{1+x}{x^5 + \sqrt[3]{x^2} + 2x} > 0 \text{ та неперервна } \forall x \in (0, 4].$$

Точка  $x = 0$  є особливою для функції  $f(x)$ . Підберемо функцію  $g(x)$ .

Оскільки  $\forall x \in (0, 4]$

$$f(x) = \frac{1+x}{x^5 + \sqrt[3]{x^2} + 2x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{1+x}{(\sqrt[3]{x^{13}} + 1 + 2\sqrt[3]{x})} < \frac{1+x}{\sqrt[3]{x^2}} < \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} = 5g(x)$$

і еталонний інтеграл  $\int_0^4 g(x) dx = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-0)^2}}$  – при  $\lambda = \frac{2}{3}$  збігається, то

за арифметичною ознакою порівняння  $\int_0^4 f(x) dx$  – також збігається.

**Приклад 4.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[7]{\frac{1}{8} - x^3}} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[7]{\frac{1}{8} - x^3}} > 0 \text{ та неперервна на } \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Точка  $x = \frac{1}{2}$  є особливою для функції  $f(x)$ . Підберемо функцію  $g(x)$ :

## Невласні інтеграли другого роду

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[7]{\frac{1}{8} - x^3}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[7]{\frac{1}{2} - x}}_{g(x)}} \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[7]{\frac{1}{4} + \frac{x}{2} + x^2}} < \frac{2}{\sqrt[7]{\frac{1}{2} - x}} = 2g(x) \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Еталонний інтеграл  $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[7]{\frac{1}{2} - x}}$  – при  $\lambda = \frac{1}{7}$  збігається, тому

за арифметичною ознакою порівняння інтеграл  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$  – також збігається.

### 6.3. Дослідження на збіжність невластних інтегралів другого роду за граничною ознакою порівняння

**Приклад 1.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_0^5 \frac{dx}{\log_2(1 + \sqrt[3]{x^4})}$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція

$$f(x) = \frac{1}{\log_2(1 + \sqrt[3]{x^4})} > 0 \text{ та неперервна } \forall x \in (0, 5].$$

Точка  $x = 0$  є особливою для функції  $f(x)$ . Підберемо функцію  $g(x)$ , використовуючи еквівалентність нескінченно малих функцій:

$$\log_2(1 + \sqrt[3]{x^4}) \sim \sqrt[3]{x^4} \log_2 e, \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

тому  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$ . Еталонний інтеграл  $\int_0^5 g(x) dx = \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-0)^4}}$  – при

$\lambda = \frac{4}{3}$  розбігається. Оскільки за граничною ознакою порівняння існує

границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\log_2(1 + \sqrt[3]{x^4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4} \log_2 e} = \frac{1}{\log_2 e} = k,$$

## Невласні інтеграли другого роду

то з розбіжності інтеграла  $\int_0^5 g(x) dx$  впливає розбіжність інтеграла

$$\int_0^5 f(x) dx.$$

**Приклад 2.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_2^6 \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x^2+2x-8)^7}} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x^2+2x-8)^7}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{(x-2)^7}}_{g(x)}} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x+4)^7}} > 0$$

та неперервна  $\forall x \in (2, 6]$ . Точка  $x = 2$  є особливою для функції  $f(x)$ .

Нехай  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}}$ , еталонний інтеграл  $\int_2^6 g(x) dx = \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^7}}$  –

при  $\lambda = \frac{7}{3}$  розбігається. Оскільки за граничною ознакою порівняння

існує границя

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\cancel{\sqrt[3]{(x-2)^7}}} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x+4)^7}} \cdot \cancel{\sqrt[3]{(x-2)^7}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x+4)^7}} = \frac{3}{\sqrt[3]{6^7}} = k,$$

то з розбіжності інтеграла  $\int_2^6 g(x) dx$  впливає розбіжність інтеграла

$$\int_2^6 f(x) dx.$$

**Приклад 3.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{\sin x})}{e^{\arctg x} - 1} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція

$$f(x) = \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{\sin x})}{e^{\arctg x} - 1} > 0 \text{ та неперервна } \forall x \in (0, 1].$$

Точка  $x = 0$  є особливою для функції  $f(x)$ . Підберемо функцію  $g(x)$ , використовуючи еквівалентність нескінченно малих функцій:

## Невласні інтеграли другого роду

$$\ln(1 + \sqrt[3]{\sin x}) \sim \sqrt[3]{\sin x} \sim \sqrt[3]{x}, \quad e^{\operatorname{arctg} x} - 1 \sim \operatorname{arctg} x \sim x, \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

тому  $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ . Еталонний інтеграл  $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-0)^2}}$  –

при  $\lambda = \frac{2}{3}$  збігається. Оскільки за граничною ознакою порівняння

існує границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{\sin x})}{e^{\operatorname{arctg} x} - 1} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \sqrt[3]{x^2} = 1 = k,$$

з збіжності інтеграла  $\int_0^1 g(x) dx$  випливає збіжність інтеграла  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**Приклад 4.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} > 0 \text{ та неперервна } \forall x \in (0, 1].$$

Точка  $x = 0$  є особливою для функції  $f(x)$ . Підберемо функцію  $g(x)$ , використовуючи еквівалентність нескінченно малих функцій:

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1 \sim \frac{1}{3} \sqrt[3]{x}, \quad \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) \sim \left(\frac{\pi x}{4}\right)^2, \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

тому  $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ . Еталонний інтеграл  $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-0)^5}}$  –

при  $\lambda = \frac{5}{3}$  розбігається. Оскільки за граничною ознакою порівняння

існує границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \cdot \sqrt[3]{x^5} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16 \sqrt[3]{x}}{(\pi x)^2} \cdot \sqrt[3]{x^5} = \frac{16}{3\pi^2} = k,$$

то з розбіжності інтеграла  $\int_0^1 g(x) dx$  випливає розбіжність інтеграла

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

### 6.4. Дослідження на абсолютну збіжність невластних інтегралів другого роду

**Приклад 1.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{x^3}$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x^3}$  є знакозмінною на проміжку  $\left[0; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$ . Точка  $x = 0$  є особливою точкою функції  $f(x)$ . Підінтегральна функція обмежена двома функціями  $-\frac{1}{x^3} < f(x) < \frac{1}{x^3}$  та наведена на рис. 13.

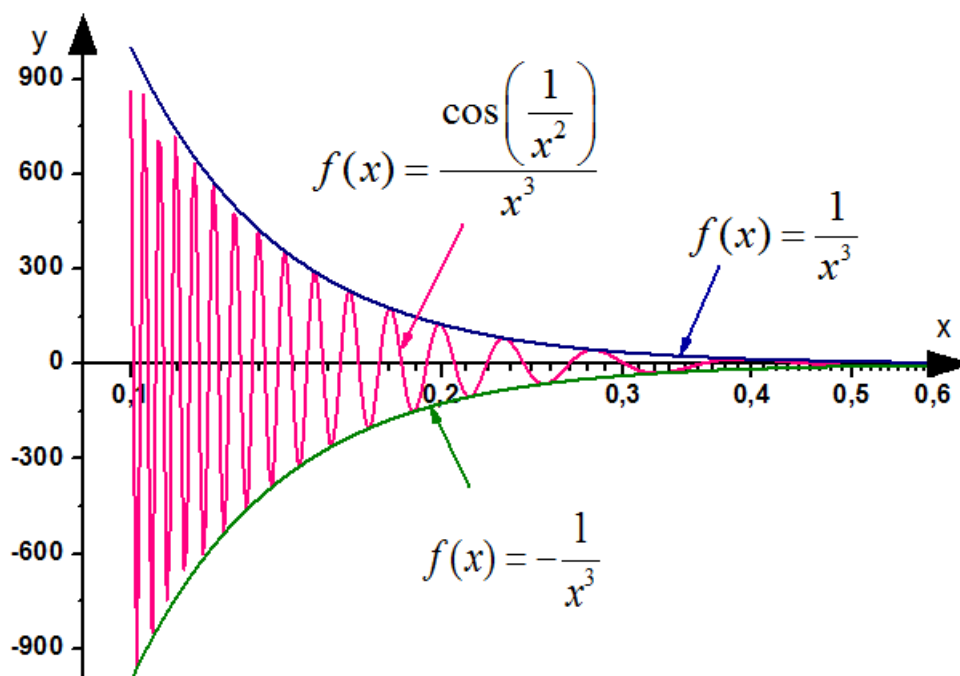


Рис. 13

## Невласні інтеграли другого роду

1. Досліджуємо на збіжність інтеграл  $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} |f(x)| dx = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \left| \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \frac{dx}{x^3}$ .

Виберемо функцію для порівняння. Оскільки

$$\forall x \in \left(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right] \quad \cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq \left| \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right|,$$

то  $g(x) = \cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x^3} < \left| \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \cdot \frac{1}{x^3} = |f(x)|$ .

Дослідимо на збіжність інтеграл  $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} g(x) dx = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos^2\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{dx}{x^3} =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \left(1 + \cos\left(\frac{2}{x^2}\right)\right) \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{dx}{x^3} + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\left(\frac{2}{x^2}\right) \frac{dx}{x^3} = I_1 + I_2.$$

Перший з інтегралів  $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{dx}{(x-0)^3}$  – еталонний, при  $\lambda = 3$

розбігається, отже, розбігається інтеграл  $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} g(x) dx$ . Тоді, за

арифметичною ознакою порівняння, розбігається інтеграл  $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} |f(x)| dx$ .

2. Досліджуємо інтеграл  $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{x^3}$  на збіжність за означенням.

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{x^3} &= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x^2} \Big|_{\varepsilon}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} = \\ &= -\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)}_{\text{Не існує}}. \end{aligned}$$

## Невласні інтеграли другого роду

Оскільки  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin \varepsilon^{-2}$  не існує, то невластний інтеграл 2-го роду розбігається.

**Висновок:** Інтеграл  $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{x^3}$  розбігається.

**Приклад 2.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_1^7 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція

$$f(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x - 1} \cdot \sqrt[3]{x + 1}}$$
 змінює знак на проміжку  $(1, 7]$ .

Точка  $x = 1$  є особливою точкою функції  $f(x)$ . Досліджуємо на

збіжність інтеграл  $\int_1^7 |f(x)| dx = \int_1^7 \frac{|\sin \frac{x}{2}|}{\sqrt[3]{x - 1}} dx$ . Підберемо функцію  $g(x)$ .

Оскільки  $\forall x \in (1, 7]$

$$|f(x)| = \frac{|\sin \frac{x}{2}|}{\sqrt[3]{x + 1}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{x - 1}}_{g(x)}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}} = g(x)$$

і еталонний інтеграл  $\int_1^7 g(x) dx = \int_1^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x - 1}}$  – при  $\lambda = \frac{1}{3}$  збігається, то за

арифметичною ознакою порівняння збігається інтеграл  $\int_1^7 |f(x)| dx$ .

**Висновок.** Інтеграл  $\int_1^7 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x - 1}} dx$  збігається абсолютно.

**Приклад 3.** Дослідити на збіжність інтеграл  $\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція  $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  є

знакозмінною на проміжку  $(0, 1]$ . Точка  $x = 0$  є особливою точкою функції  $f(x)$ .

## Невласні інтеграли другого роду

Досліджуємо на збіжність інтеграл  $\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ .

$$|f(x)| = \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = g(x) \quad \forall x \in (0,1].$$

Отже, підінтегральна функція обмежена двома функціями  $-\frac{1}{\sqrt[3]{x}} < f(x) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  (рис. 14).

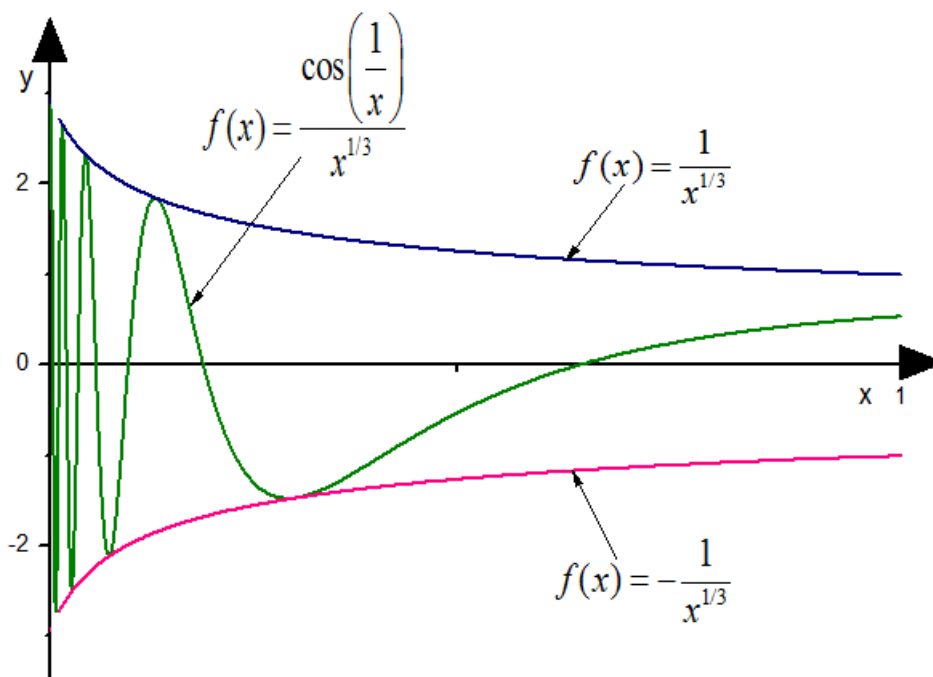


Рис. 14

Еталонний інтеграл  $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - 0}$  – при  $\lambda = \frac{1}{3}$  збігається, тому за арифметичною ознакою порівняння збігається інтеграл  $\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ .

**Висновок:** Інтеграл  $\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$  збігається абсолютно.

## §7. Завдання для самостійної роботи та відповіді до завдань

1. Дослідити на збіжність невласні інтеграли 1-го роду.

1.	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^7 + 7 \ln x}},$ збіг.	2.	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} \sqrt{x}},$ збіг.
3.	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x-1}},$ збіг.	4.	$\int_1^{\infty} \ln \frac{x^2 + 5}{x^2 + 4} dx,$ збіг.
5.	$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^3}} dx,$ розб.	6.	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x},$ розб.
7.	$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx,$ збіг.	8.	$\int_1^{\infty} \frac{1 + \operatorname{tg}(\frac{1}{x})}{1 + \sqrt{x}} dx,$ розб.
9.	$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^{1,1}} dx,$ збіг.	10.	$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 1}},$ розб.
11.	$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{(1+x^2)^2} dx,$ збіг.	12.	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1+2x^3}},$ збіг.
13.	$\int_1^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{(x^3 + 1)^2 + 1},$ збіг.	14.	$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1},$ збіг.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли 1-го роду.

1.	$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} \operatorname{arctg} x dx$ збіг. ум.	2.	$\int_{10}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ збіг. абс.	3.	$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ збіг. ум.
----	---	----	--	----	--

## Невласні інтеграли

4.	$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ збіг. ум.	5.	$\int_1^{\infty} x^2 \cos(e^x) dx$ збіг. ум.	6.	$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^3}} dx$ збіг. абс.
7.	$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x}{x^4} dx$ збіг. абс.	8.	$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x}{\sqrt{x}} dx$ збіг. ум.	9.	$\int_1^{\infty} x^2 \operatorname{arctg} x \cos x dx$ розб.
10.	$\int_1^{\infty} \frac{\cos^3 x}{e^{2x} + \ln x} dx$ збіг. абс.	11.	$\int_1^{\infty} \frac{\cos^3 x}{e^{-x} + \ln x} dx$ збіг. ум.	12.	$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - \sin x} dx$ збіг. абс.
13.	$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ збіг. абс.	14.	$\int_2^{\infty} \frac{\cos x}{x \ln^2 x} dx$ збіг. абс.	15.	$\int_1^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$ збіг. ум.
16.	$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$ збіг. ум.	17.	$\int_0^{\infty} \frac{\cos^5 x}{x^3} dx$ збіг. абс.	18.	$\int_{10}^{\infty} \frac{\sin(5x-1)}{e^{3x} + \frac{1}{x}} dx$ збіг. абс.

### 3. Дослідити на збіжність невластні інтеграли 2-го роду.

1.	$\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x} dx$ збіг.	2.	$\int_1^2 \frac{x^4 + 2x + 1}{\sqrt[5]{(x^3 - 1)^2}} dx$ збіг.	3.	$\int_1^3 \frac{3x + 4}{x^3 \sqrt[3]{\ln x}} dx$ збіг.
4.	$\int_0^1 \frac{\ln^3 x^{-1}}{x^3} dx$ розб.	5.	$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{\sin x}} - 1}{x} dx$ збіг.	6.	$\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$ збіг.
7.	$\int_0^1 \frac{dx}{1 - e^{\sqrt{x}}}$ збіг.	8.	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ розб.	9.	$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x \sqrt{x}} dx$ збіг.
10.	$\int_0^{\frac{1}{8}} \frac{\arcsin x^2 dx}{x \ln^2(1+x)}$ розб.	11.	$\int_0^1 \frac{x dx}{e^x - e^{-x}}$ збіг.	12.	$\int_0^1 \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ збіг.

## Невласні інтеграли

13.	$\int_1^3 \frac{\ln^2 x}{(3-x)^3} dx$ розб.	14.	$\int_0^1 \ln x dx$ збіг.	15.	$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ збіг.
16.	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ збіг.	17.	$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$ розб.	18.	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}$ збіг.
19.	$\int_{0,1}^1 \frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-x}} dx$ збіг.	20.	$\int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x} - 1} dx$ збіг.	21.	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1}$ збіг.

**4.** Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли 2-го роду.

1.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ розб.	2.	$\int_3^9 \frac{x \cos x}{(x-3)^2} dx$ розб.	3.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 - \cos x}{x^5} dx$ розб.
4.	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^7 x}$ розб.	5.	$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{\ln(1+x)}}{1 - \cos x} dx$ розб.	6.	$\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\sin x} dx$ збіг. абс.

## §8. Завдання для типового розрахунку

**Завдання 1.** Обчислити невластні інтеграли 1-го роду (або встановити їх розбіжність):

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$ | 2. $\int_2^{\infty} e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}$ | 3. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$ |
| 4. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$                 | 5. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$        | 6. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$                           |
| 7. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$            | 8. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}$     | 9. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^7 x}$                      |
| 10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$          | 11. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$           | 12. $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{(x^2-1)^2}$                   |
| 13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x dx}{x^2+1}$          | 14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$    | 15. $\int_2^{\infty} \frac{\ln^4 x}{x} dx$                     |
| 16. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)^2}$                  | 17. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x+1)^2}$           | 18. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$                 |
| 19. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^4 x}$                 | 20. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$                  | 21. $\int_0^{\infty} x \cos x dx$                              |
| 22. $\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$                     | 23. $\int_0^{\infty} x e^{-x/2} dx$                  | 24. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$                         |
| 25. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$       | 26. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x)^2}$    | 27. $\int_0^{\infty} x \sin x dx$                              |
| 28. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+x^2}$                     | 29. $\int_1^{\infty} \frac{2+x}{x^2(1+x)} dx$        | 30. $\int_2^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$           |

**Завдання 2.** Дослідити невластні інтеграли 1-го роду на збіжність або розбіжність:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $\int_1^{\infty} \frac{5+\cos x}{\sqrt[3]{x}} dx$ | 2. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln(1+x^2)}$   | 3. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^4+2}}{x^6+2x+1} dx$ |
| 4. $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{3+2x^2+3x^5}$        | 5. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}-2}$ | 6. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sin^4 x}$                |

## Невласні інтеграли

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 7. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+4)(x+2)}}$                             | 8. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \cos^4 x}$                         | 9. $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} dx$                        |
| 10. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 3}$                     | 11. $\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^5 + 1}} dx$    | 12. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^3} dx$                         |
| 13. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4x + 4}}$                           | 14. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + \sqrt{x^2 + 1}}}{x^4 + 4x + 1} dx$   | 15. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2 + \cos x}{x^5} dx$                   |
| 16. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^4 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}$                       | 17. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}$                    | 18. $\int_3^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{x}}{4 + x^2 \sqrt{x}} dx$ |
| 19. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 1}}$                            | 20. $\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1 + x^9}} dx$ | 21. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}} dx$                    |
| 22. $\int_2^{\infty} \frac{1 + \arcsin \frac{1}{x}}{4 + x\sqrt{x}} dx$         | 23. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x^5 + 1}}$                   | 24. $\int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{2 + x\sqrt{x}} dx$       |
| 25. $\int_1^{\infty} \frac{x^2 + \sqrt{(x+1)^3}}{4x^4 + \sqrt[3]{x^5 + 1}} dx$ | 26. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x + x^9 + 1}}$                     | 27. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + \sqrt{x}} dx$  |
| 28. $\int_2^{\infty} \frac{4 + \arccos \frac{1}{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$          | 29. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \frac{3 + \sin x}{x^2} dx$               | 30. $\int_0^{\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^5 + 2}} dx$                 |

**Завдання 3.** Обчислити невластні інтеграли 2-го роду (або встановити їх розбіжність):

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1. $\int_{-1}^1 \frac{x^2 + 4}{\sqrt[3]{x^2}} dx$                  | 2. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$      | 3. $\int_0^2 \frac{xdx}{x^2 - 1}^{4/5}$       |
| 4. $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln^3 x}$                                 | 5. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$           | 6. $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$ |
| 7. $\int_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3}$ | 8. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$     | 9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$        |
| 10. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x^4}$                                | 11. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ | 12. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$       |
| 13. $\int_0^1 x \ln^2 x dx$  | 14. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$   | 15. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$         |
| 16. $\int_0^1 x \ln x dx$  | 17. $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$         | 18. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$             |

## Невласні інтеграли

19. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	20. $\int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}$	21. $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$
22. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$	23. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$	24. $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$
25. $\int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$	26. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{1-x^2}}$	27. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$
28. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$	29. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$	30. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$

**Завдання 4.** Дослідити невлаcні інтеграли 2-го роду на збіжність або розбіжність:

1. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\ln x}$	2. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}$	3. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{x\sqrt{x}}$
4. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$	5. $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$	6. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(8-x)^3}} dx$
7. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x} dx$	8. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$	9. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$
10. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$	11. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{16-x^4}} dx$	12. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} dx$
13. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$	14. $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x} dx}{e^{\sin x}-1}$	15. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-\cos \sqrt{x}}$
16. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x dx}{\sqrt{x}}$	17. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$	18. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$
19. $\int_0^1 \frac{x dx}{e^{x^3}-1}$	20. $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1} dx$	21. $\int_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$
22. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$	23. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$	24. $\int_0^1 \frac{dx}{x-\operatorname{tg} x}$
25. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$	26. $\int_1^4 \frac{\sin x+2}{(x-1)^2} dx$	27. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$
28. $\int_1^3 \frac{\cos x+3}{(x-1)^3} dx$	29. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	30. $\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

- 1. Данко П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учебное пособие для вузов в 2-х ч. Ч. I / Павел Ефимович Данко, Александр Георгиевич Попов, Татьяна Яковлевна Кожевникова. – Изд. 5-е, исп. – М.: Высш. шк., 1996. – 416 с.: ил.; 21 см. – Библиогр.: с. 416 . – 10000 экз. – ISBN 5–06–003071–7 (ч. I). – ISBN 5–06–003072.
- 2. Пискунов Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов [Текст]: учебник для вузов / Том I- II. – М. Наука, 1972, 1978.
- 3. Каплан И. А.** Практические занятия по высшей математике. [Текст] учебник для вузов / Ч. 1-5. – Харьков, Издательство Харьковского университета, 1967-1972.
- 4. Письменный Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике [Текст]: Тридцать пять лекций. 1 часть / Дмитрий Письменный; [вступ. ст. автора] – М.: Рольф, 2002. – 256 с.: ил; 21 см. – 10000 экз. – ISBN 5–7836–0312–0.
- 5. Марон И. А.** Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. [Текст]: учебное пособие по решению задач математического анализа. - М.: Наука, 1970.

## ЗМІСТ

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ .....	4
§1. Невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду) .....	5
§2. Ознаки збіжності невластного інтеграла першого роду .....	8
§3. Дослідження на збіжність невластних інтегралів першого роду ...	10
3.1. Дослідження на збіжність невластних інтегралів першого роду за означенням .....	10
3.2. Дослідження на збіжність невластних інтегралів першого роду за арифметичною ознакою порівняння .....	13
3.3. Дослідження на збіжність невластних інтегралів першого роду за граничною ознакою порівняння.....	16
3.4. Дослідження на абсолютну збіжність невластних інтегралів першого роду.....	19
§4. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду).....	24
§5. Ознаки збіжності невластного інтеграла другого роду .....	26
§6. Дослідження на збіжність невластних інтегралів другого роду.....	28
6.1. Дослідження на збіжність невластних інтегралів другого роду за означенням .....	28
6.2. Дослідження на збіжність невластних інтегралів другого роду за арифметичною ознакою порівняння.....	33
6.3. Дослідження на збіжність невластних інтегралів другого роду за граничною ознакою порівняння .....	35
6.4. Дослідження на абсолютну збіжність невластних інтегралів другого роду .....	38
§7. Завдання для самостійної роботи та відповіді до завдань.....	42
§8. Завдання для типового розрахунку .....	45
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА .....	48