Міністерство Освіти і Науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського”

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ’ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчально-методичний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 111 “Математика”.

Київ – 2021

Дослідження стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь. Навчально-методичний посібник:[Електронний ресурс]: для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 111 "Математика" / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: А.Л.Гречко, М.Є.Дудкін. – Електронні текстові дані (1 файл: 345Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 25с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 13 травня 2021 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 3 від 29 березня 2021 р.)

Електронне мережеве видання
ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ
СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Укладачі: *Гречко Андрій Леонідович,*
кандидат фіз.-мат. наук, доц.,
Дудкін Микола Євгенович,
доктор фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний редактор: *Волков Андрій Вікторович,*
кандидат фіз.-мат. наук, доц.,

Рецензент: *Дюженкова Ольга Юріївна,*
кандидат фіз.-мат. наук, доц.,
кафедри математичної фізики ФМФ,
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Посібник "Дослідження стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь" містить в собі стислий теоретичний матеріал, зразки розв'язання задач та індивідуальні завдання для виконання розрахункової роботи з теми "Дослідження стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь".

Для студентів фізико-математичних спеціальностей університетів та педагогічних інститутів, які вивчають курс "Диференціальні рівняння", зокрема розділ "Системи диференціальних рівнянь". Матеріал можна використовувати на заняттях з вищої математики на технічних факультетах університетів та інститутів.

©КПІ ім. Ігоря Сікорського

Вступ

Нехай задана нормальна система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1, x_2, ...x_n), \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1, x_2, ...x_n), \\ ... ... \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1, x_2, ...x_n) \end{cases} \tag{1}$$

з початковими умовами в точці t_0. Розв'язок $X_0(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ...$ $, \varphi_n(t))$ системи називається *стійким за Ляпуновим*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для кожного розв'язку $X(t) = (x_1(t), x_2(t)..., x_n(t))$ ціхщ системи, значення якої в точці t_0 задовольняють нерівності

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon),\ i = 1, 2, ..., n,$$

для всіх $t > t_0$ випливають нерівності

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, ..., n. \tag{2}$$

Якщо при як завгодно малому $\delta > 0$ хоча б для одного розв'язку $X(t)$ нерівності (2) не виконуються, то розв'язок $X_0(t)$ називається не стійким.

Якщо розв'язок $X_0(t)$ є стійким і задовольняє умову

$$\lim_{t \to +\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0,\ i = 1, 2, ..., n,$$

то цей розв'язок називається *асимптотично стійким*

Дослідження на стійкість розв'язку $X_0(t)$ системи (1) як правило зводиться до дослідження на стійкість тривіального (нульового) розв'зку — точки спокою зведеної системи.

Дослідження на стійкість

Для дослідження на стійкість точки спокою системи двох лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

необхідно скласти характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \Delta = 0$$

і знайти його корені λ_1 і λ_2. Класифікація точок спокою системи в залежності від значень λ_1 і λ_2 наведені у таблиці.

Корені λ_1, λ_2	Характер точки спокою	Стійкість точки спокою
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$		
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Стійкий вузел	Асимптотично стійка
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Нестійкий вузел	Нестійка
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Седло	Нестійка
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$		
$\alpha < 0, \beta \neq 0$	Стійкий фокус	Асимптотично стійка
$\alpha > 0, \beta \neq 0$	Нестійкий фокус	Нестійка
$\alpha = 0, \beta \neq 0$	Центр	Стійка
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$		
$\lambda_{1,2} < 0$	Стійкий вузел	Асимптотично стійка
$\lambda_{1,2} > 0$	Нестійкий вузел	Нестійка

Наведемо узагальнення попереднього метода на випадок однорідної системи зі сталими коефіцієнтами довільної скінченої розмірності.

Теорема 1 . *Розв'язки лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами тоді і тільки тоді є 1) стійкими, коли дійсні частини власних значень головної матриці системи недодатні, причому власним значенням з нульовою дійсною частиною відповідають одновимірні клітини Жордана в жордановій формі матриці;*

2) асимптотично стійкими, коли дійсні частини всіх власних значень головної матриці системи від'ємні;

3) нестійкими, якщо хоча б одному власному значенню з ненульовою дійсною частиною відповідає неодновимірна клітина Жордана, або серед власних значень матриці є хоча б одне з додатньою дійсною частиною.

Умови, за яких дійсні частини всіх власних значень матриці A від'хмні, визначаються за допомогою такої теореми.

Теорема 2 *(Критерій Рауса-Гурвіца). Дійсні частини всіх коренів рівняння*

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + ... + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$$

вів'хмні тоді і тільки тоді, коли додатні всі головні діагональні міно-

ри матриці Гурвіца

$$\begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & b_n \end{pmatrix},$$

тобто

$$\Delta_1 = b_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} > 0,\ ...,\ \Delta_n > 0.$$

Метод Функцій Ляпунова

Метод Функцій Ляпунова у застосуванні до автономної системи

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \tag{3}$$

де $f_i(0, 0, ...0) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, полягає у безпосередньому дослідженні щщ точки спокою за допомогою відповідно підібраних функцій Ляпунова $V(x_1, x_2, ..., x_n)$. Дослідження спирається на такі твердження.

Теорема 3 *(про стійкість). Якщо існує диференційовна функція $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка задовольняє в околі початку координат умови:*

a) $V(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, і $V = 0$ лише коли $x_1 = ... = x_n = 0$;

b) $\frac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$, то точка спокою системи (3) є стійкою.

Теорема 4 *(про асимптотичну стійкість). Якщо існує диференційовна функція $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка задовольняє в околі початку координат умови:*

a) $V(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, і $V = 0$ лише коли $x_1 = ... = x_n = 0$;

b) $\frac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$, і $\frac{dV}{dt} = 0$ лише коли $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, то точка спокою системи (3) є асимптотично стійкою.

Теорема 5 *(про нестійкість). Якщо існує диференційовна функція $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка задовольняє в околі початку координат умови:*

a) $V(0, 0, ..., 0) = 0$, і в околі початку координат існують точки в яких $V(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$;

b) $\frac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, *і* $\frac{dV}{dt} = 0$ *лише коли* $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, *то точка спокою системи (3) є нестійкою.*

Стійкість за першим наближенням

Припустимо, що функції $f_i(x_1, ..., x_n), i = 1, ..., n$ у правій частині (3) диференційовні у початку координат достатню кількість разів. Розвинемо їх в ряд Тейлора в околі початку координат:

$$f_i(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + F_i(x_1, ..., x_n),$$

де $a_{ij} = \frac{\partial f_i(0,...,0)}{\partial x_j}$, а F_i — члени другого порядку малості відносно $x_1, ..., x_n$. Тоді система (3) записується у вигляді:

$$\begin{cases} x_1' = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + F_1(x_1, ..., x_n), \\ x_2' = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} x_j + F_2(x_1, ..., x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} x_j + F_n(x_1, ..., x_n). \end{cases}$$

Систему

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \ i = 1, ..., n, \tag{4}$$

називають системою першого наближення системи (3).

Теорема 6 *Якщо дійсні частини всіх власних значень матриці* $\{a_{ij}\}_{ij=1}^{n}$ *від'ємні, то нульовий розв'язок системи (3) є асимптотично стійким.*

Якщо серед власних значень матриці $\{a_{ij}\}_{ij=1}^{n}$ *системи (4) є хоча б одне з додатньою дійсною частиною, то нульовий розв'язок системи (3) є нестійким.*

Якщо серед власних значень матриці $\{a_{ij}\}_{ij=1}^{n}$ *є хоча б одне з нульовою дійсною частиною, а інші мають від'ємні дійсні частини, то нульовий розв'язок системи (3) може бути як стійким (асимптотично стійким) так і нестійким.*

Приклади розв'язання задач

Приклад I. Визначити характер і дослідити на стійкість точку спокою системи

$$\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Запишемо характеристичний визначник.

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Обчислимо корені характеристичного многочлена.

$$\lambda_{1,} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Оскільки корені дійсні і різних знаків, то за таблицею з'ясовуємо, що точка спокою системи не є стійкою (седло).

Приклад II. Дослідити на стійкість точку спокою системи

$$\begin{cases} x' = -x + 4y + 2z, \\ y' = -4x - y + 4z, \\ z' = -2x - 4y - z. \end{cases}$$

Запишемо характеристичний визначник

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 2 \\ -4 & -1-\lambda & 4 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислимо корені характеристичного многочлена

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 37) = 0.$$

Очевидно, що всі дійсні частини коренв характеристичного многочлена від'ємні. За Теоремою 1 з'ясовуємо, що система є асимптотично стійкою.

Приклад III. Дослідити на стійкість точку спокою системи

$$\begin{cases} x' = 2x + 8\sin y, \\ y' = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

Розвинемо функції $\sin y, \cos y, e^x$ у ряд Тейлора і виділимо члени 1-го порядку малості

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y + F_1(x, y), \\ y' = -x - 3y + F_2(x, y), \end{cases}$$

де F_1, F_2 — члени 2-го порядку малості. Система першого наближення мах вигляд:

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$$

Корені її характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ мають від'ємну дійсну частину. Таким чином, точка спокою заданої системи стійка.

Приклад IV. Довести, що тривіальний роз'язок системи асимптотично стійкий.

$$\begin{cases} x' = -4x - \cos y + e^{3z}, \\ y' = 3\sin x + \ln(1 - 4y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z + 3y + \sin(-4z). \end{cases}$$

Лінеарізуємо систему в околі $x = y = z = 0$.

$$\begin{cases} x' = -4x + 3z, \\ y' = 3x - 4y, \\ z' = 3y - 4z. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння лінеарізованої системи має вигляд:

$$\lambda^3 + 12\lambda^2 + 48\lambda + 37 = 0.$$

Використаємо критерій Рауса-Гурвіца для з'ясування, коли корені многочлена від'ємні. Складемо матрицю Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 37 & 48 & 12 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо умови додатності головних діагональних мінорів останньої матриці:

$$12 > 0, \; 12 \cdot 48 - 37 \cdot 1 > 0, \; 37 > 0.$$

Отже тривіальний розв'язок заданої системи асимптотично стійкий.

Приклад V. Дослідити на стійкість точку спокою системи

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -2y^3 - x. \end{cases}$$

Дослідимо методом функцій Ляпунова. В якості функції виберемо $V = x^2 + y^2$. Тоді $\frac{dV}{dt} = 2x(-x + y) + 2y(-2y^3 - x) = -2(x^2 + 2y^4)$, тобто функція V задовольняє умови теореми про асимптотичну стійкість. Точка спокою системи асимптотично стійка.

Приклад VI. Знайти всі положення рівноваги системи, дослідити їх на стійкість та визначити характер

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 17, \\ y' = xy + 4. \end{cases}$$

Положення рівноваги обчислимо як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} 0 = x^2 + y^2 - 17, \\ 0 = xy + 4. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знаходимо чотири положення рівноваги:

$$A(-1;4),\ B(-4;1),\ C(1;-4),\ D(4;-1).$$

Розвинемо праві частини заданої системи в ряд Тейлора в околі положення рівноваги $(x_0; y_0)$ і залишимо лише лінійні члени

$$\begin{cases} x' = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0), \\ y' = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0). \end{cases}$$

Замінивши $x - x_0$ на x, а $y - y_0$ на y дістанемо лінеарізовану систему з положенням рівноваги у початку координат.

$$\begin{cases} x' = y_0 x + x_0 y, \\ y' = 2x_0 x + 2y_0 y. \end{cases}$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} y_0 - \lambda & x_0 \\ 2x_0 & 2y_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3y_0\lambda + 2(y_0^2 - x_0^2) = 0.$$

Якщо $y_0^2 < x_0^2$, то корені характеристичного рівняння дійсні і мають різні знаки. Оскільки координати положення рівноваги в точках B і D задовольняють цю умову, то вказані положення рівноваги є нестійкими. Характерістичне рівняння, яке відповідає точці A, має вигляд $\lambda^2 - 12\lambda + 30 = 0$. Його обидва корені додатні, тому положення рівноваги A – нестійке. Характерістичне рівняння, яке відповідає точці C, має вигляд $\lambda^2 + 12\lambda + 30 = 0$. Його обидва корені від'ємні, тому положення рівноваги C – асимптотично стійке.

Завдання для самостійного виконання

I. Визначити характер і дослідити на стійкість точку спокою системи.

1. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x' = -3x + 2y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x' = -3x + 3y, \\ y' = -3x + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 7x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x' = -3x + 4y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x' = -3x + 5y, \\ y' = -5x + y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x' = -3x - 2y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = -5x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = -3x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x' = -3x - 4y, \\ y' = 4x + y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = -7x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x' = -3x - 5y, \\ y' = 5x + y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x' = -3x + 7y, \\ y' = -7x + y. \end{cases}$

II. Дослідити на стійкість систему.

1. $\begin{cases} x' = -x + y + 2z, \\ y' = -x - y + z, \\ z' = -2x - y - z. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -x + 2y + z, \\ y' = -2x - y + 2z, \\ z' = -x - 2y - z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -x - y + 2z, \\ y' = x - y - z, \\ z' = -2x + y - z. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x' = -x + y - 2z, \\ y' = -x - y + z, \\ z' = 2x - y - z. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -x + 2y + 3z, \\ y' = -2x - y + 2z, \\ z' = -3x - 2y - z. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 2z, \\ y' = -3x - y + 3z, \\ z' = -2x - 3y - z. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -x + 3y + z, \\ y' = -3x - y + 3z, \\ z' = -x - 3y - z. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x' = -x + y + 3z, \\ y' = -x - y + z, \\ z' = -3x - y - z. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = -x - 2y + 3z, \\ y' = 2x - y - 2z, \\ z' = -3x + 2y - z. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x' = -x + y - 3z, \\ y' = -x - y + z, \\ z' = 3x - y - z. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = -x - 2y - 3z, \\ y' = 2x - y - 2z, \\ z' = 3x + 2y - z. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x' = -x - 3y - 2z, \\ y' = 3x - y - 3z, \\ z' = 2x + 3y - z. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = -x - y + 3z, \\ y' = x - y - z, \\ z' = -3x + y - z. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = -x - y - 3z, \\ y' = x - y - z, \\ z' = 3x + y - z. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = -x + 3y - 2z, \\ y' = -3x - y + 3z, \\ z' = 2x - 3y - z. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x' = -x - 3y + 2z, \\ y' = 3x - y - 3z, \\ z' = -2x + 3y - z. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = -x - y + z, \\ z' = -x - y - z. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x' = -x + 2y + 2z, \\ y' = -2x - y + 2z, \\ z' = -2x - 2y - z. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = -x - 2y + z, \\ y' = 2x - y - 2z, \\ z' = -x + 2y - z. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x' = -x + 2y - z, \\ y' = -2x - y + 2z, \\ z' = x - 2y - z. \end{cases}$

III. Визначити характер точки спокою системи.

1. $\begin{cases} x' = -\sin(x + 2y), \\ y' = 2x + \ln(1 - y). \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -\sin(x + y), \\ y' = 2x + \ln(1 - y). \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -\sin(x + 2y), \\ y' = x + \ln(1 - y). \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x' = -\sin(x + y), \\ y' = x + \ln(1 - y). \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -\sin(x+y), \\ y' = 3x + \ln(1-y). \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x' = -\sin(x+3y), \\ y' = x + \ln(1-y). \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -\sin(x+3y), \\ y' = 2x + \ln(1-y). \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x' = -\sin(x+2y), \\ y' = 3x + \ln(1-y). \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = -\sin(x+3y), \\ y' = 3x + \ln(1-y). \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x' = -\sin(x-y), \\ y' = -2x + \ln(1-y). \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = -\sin(x-2y), \\ y' = -x + \ln(1-y). \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x' = -\sin(x-3y), \\ y' = -x + \ln(1-y). \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = -\sin(x-y), \\ y' = -3x + \ln(1-y). \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = -\sin(x-3y), \\ y' = -2x + \ln(1-y). \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = -\sin(x-2y), \\ y' = -3x + \ln(1-y). \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x' = -\sin(x-3y), \\ y' = -3x + \ln(1-y). \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = -\sin(x+4y), \\ y' = x + \ln(1-y). \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x' = -\sin(x+y), \\ y' = 4x + \ln(1-y). \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = -\sin(x+2y), \\ y' = 4x + \ln(1-y). \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x' = -\sin(x+4y), \\ y' = 2x + \ln(1-y). \end{cases}$

IV. Довести, що тривіальний роз'язок системи асимптотично стійкий. Дослідити на стійкість за першим наближенням.

1. $\begin{cases} x' = -2x - \cos y + e^{-3z}, \\ y' = -3\sin x + \ln(1-2y) - xz^2, \\ z' = x^2\cos z - 3y + \sin(-2z). \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -2x - \cos y + e^{-2z}, \\ y' = -2\sin x + \ln(1-2y) - xz^2, \\ z' = x^2\cos z - 2y + \sin(-2z). \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -2x - \cos y + e^{-z}, \\ y' = -\sin x + \ln(1-2y) - xz^2, \\ z' = x^2\cos z - y + \sin(-2z). \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x' = -2x - \cos y + e^{z}, \\ y' = \sin x + \ln(1-2y) - xz^2, \\ z' = x^2\cos z + y + \sin(-2z). \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -3x - \cos y + e^{-5z}, \\ y' = -5\sin x + \ln(1-3y) - xz^2, \\ z' = x^2\cos z - 5y + \sin(-3z). \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x' = -3x - \cos y + e^{-4z}, \\ y' = -4\sin x + \ln(1-3y) - xz^2, \\ z' = x^2\cos z - 4y + \sin(-3z). \end{cases}$

7. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -3x - \cos y + e^{-3z}, \\ y' = -3\sin x + \ln(1-3y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z - 3y + \sin(-3z). \end{array} \right.$ 8. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -3x - \cos y + e^{-2z}, \\ y' = -2\sin x + \ln(1-3y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z - 2y + \sin(-3z). \end{array} \right.$

9. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -3x - \cos y + e^{-z}, \\ y' = -\sin x + \ln(1-3y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z - y + \sin(-3z). \end{array} \right.$ 10. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -3x - \cos y + e^{z}, \\ y' = \sin x + \ln(1-3y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z + y + \sin(-3z). \end{array} \right.$

11. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -3x - \cos y + e^{2z}, \\ y' = 2\sin x + \ln(1-3y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z + 2y + \sin(-3z). \end{array} \right.$ 12. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -4x - \cos y + e^{-6z}, \\ y' = -6\sin x + \ln(1-4y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z - 6y + \sin(-4z). \end{array} \right.$

13. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -4x - \cos y + e^{-5z}, \\ y' = -5\sin x + \ln(1-4y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z - 5y + \sin(-4z). \end{array} \right.$ 14. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -4x - \cos y + e^{-4z}, \\ y' = -4\sin x + \ln(1-4y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z - 4y + \sin(-4z). \end{array} \right.$

15. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -4x - \cos y + e^{-3z}, \\ y' = -3\sin x + \ln(1-4y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z - 3y + \sin(-4z). \end{array} \right.$ 16. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -4x - \cos y + e^{-2z}, \\ y' = -2\sin x + \ln(1-4y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z - 2y + \sin(-4z). \end{array} \right.$

17. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -4x - \cos y + e^{-z}, \\ y' = -\sin x + \ln(1-4y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z - y + \sin(-4z). \end{array} \right.$ 18. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -4x - \cos y + e^{z}, \\ y' = \sin x + \ln(1-4y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z + y + \sin(-4z). \end{array} \right.$

19. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -4x - \cos y + e^{2z}, \\ y' = 2\sin x + \ln(1-4y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z + 2y + \sin(-4z). \end{array} \right.$ 20. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -4x - \cos y + e^{3z}, \\ y' = 3\sin x + \ln(1-4y) - xz^2, \\ z' = x^2 \cos z + 3y + \sin(-4z). \end{array} \right.$

V. Дослідити на стійкість тривіальний роз'язок системи, методом функцій Ляпунова.

1. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -x^3 - y, \\ y' = x - 9y^3. \end{array} \right.$ 2. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -2x^3 - 2y, \\ y' = x - 8y^3. \end{array} \right.$

3. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -3x^3 - 2y, \\ y' = 2x - 8y^3. \end{array} \right.$ 4. $\left\{ \begin{array}{l} x' = -4x^3 + 2y, \\ y' = -2x - 7y^3. \end{array} \right.$

5. $\begin{cases} x' = -5x^3 - y, \\ y' = 3x - 6y^3. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x' = -6x^3 - 3y, \\ y' = x - 5y^3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -7x^3 + 3y, \\ y' = -x - 4y^3. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x' = -8x^3 + 2y, \\ y' = -x - 3y^3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = -9x^3 - 2y, \\ y' = 3x - 2y^3. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x' = -x^3 - 3y, \\ y' = 3x - y^3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = -2x^3 + 3y, \\ y' = -3x - 9y^3. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x' = -3x^3 + y, \\ y' = -1x - 8y^3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = -4x^3 + 2y, \\ y' = -x - 7y^3. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = -5x^3 - 2y, \\ y' = x - 6y^3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = -6x^3 + 2y, \\ y' = -2x - 5y^3. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x' = -7x^3 - 2y, \\ y' = 2x - 4y^3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = -8x^3 + 3y, \\ y' = -x - 3y^3. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x' = -9x^3 - y, \\ y' = 3x - 2y^3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = -x^3 - 3y, \\ y' = x - 3y^3. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x' = -2x^3 + 3y, \\ y' = -x - 4y^3. \end{cases}$

VI. Визначити характер всіх точок спокою системи.

1. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 5, \\ y' = x^2 + y^2 - 13. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 5, \\ y' = x^2 + y^2 - 13. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 21, \\ y' = x^2 + y^2 - 29. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 21, \\ y' = x^2 + y^2 - 29. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 16, \\ y' = x^2 + y^2 - 34. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 16, \\ y' = x^2 + y^2 - 34. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 3, \\ y' = x^2 + y^2 - 5. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 3, \\ y' = x^2 + y^2 - 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 8, \\ y' = x^2 + y^2 - 10. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 8, \\ y' = x^2 + y^2 - 10. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 24, \\ y' = x^2 + y^2 - 26. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 24, \\ y' = x^2 + y^2 - 26. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 11, \\ y' = x^2 + y^2 - 61. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 35, \\ y' = x^2 + y^2 - 37. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 35, \\ y' = x^2 + y^2 - 37. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 32, \\ y' = x^2 + y^2 - 40. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 32, \\ y' = x^2 + y^2 - 40. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 27, \\ y' = x^2 + y^2 - 45. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + 27, \\ y' = x^2 + y^2 - 45. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 11, \\ y' = x^2 + y^2 - 61. \end{cases}$

Додаток

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА
КРЕДИТНОГО МОДУЛЯ
Диференціальні рівняння - 2
Системи диференціальних рівнянь. Застосування

I. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Сучасна теорія диференціальних рівнянь (д.р.) містить велику кількість різних ідей та методів, що дуже корисно для всіляких застосувань і постійно стимулює теоретичні дослідження в усіх відділах математики. Більша частина шляхів, що пов'язують абстрактні математичні теорії з природно-науковими застосуваннями, проходять через д.р. Багато розділів теорії д.р. настільки розвинулись, що стали самостійними науками. Проблеми теорії д.р. мали велике значення для виникнення таких наук, як лінійна алгебра, теорія груп Лі, функціональний аналіз, квантова механіка і т.д. Отже, д.р. лежать в основі природно-наукового світогляду. Теорія д.р. належить до циклу математичних наук і є одним з провідних розділів сучасної математики. Поєднання теоретичних результатів з прикладним застосуванням дає змогу вважати її привабливою не тільки для математиків, але і для тих, хто використовує математичні методи в різноманітних галузях знань - механіків, фізиків, хіміків, біологів, економістів та інших. Основна частина цієї дисципліни присвячена вивченню звичайним д.р. та їх застосуванням. Щоб успішно оволодіти курсом д.р. необхідно володіти поняттями: - математичного аналізу: теорія границь, теорія похідної, інтеграл Рімана, теорія числових та функціональних рядів, теорія інтеграла з параметром, теорія неявної функції, диференціальне числения функції багатьох змінних; - вищої алгебри: теорія лінійних систем та визначники, алгебра матриць, комплексні числа, многочлени та їх корені, лінійні простори, нормальна форма матриці; - аналітичної геометрії: перетворення системи координат, побудова кривих, теорія поверхонь. Самі д.р. застосовуються у надзвичайно широкому спектрі наук. Диференціальні моделі, які зводяться до розв'язання д.р., виникають у механіці та фізиці (другий закон Ньютона, теорія стійкості), біології (процеси розвитку різноманітних популяцій), хімії (процеси хімічних реакцій), математичній фізиці, економіці тощо.

II. ПРИБЛИЗНИЙ РОЗПОДІЛ НАВЧАЛЬНОГО ЧАСУ

Семест 4, Кредити 5, Годин 150, Лекції 36, Практика 36, СРС 78, Семестрова атестація - Залік.

III. МЕТА І ЗАВДАННЯ КРЕДИТНОГО МОДУЛЯ

Мета цієї дисципліни - познайомити студентів з основними фундаментальними поняттями, результатами, навчити методам розв'язання та застосування д.р., звернути увагу до проблем загальної теорій д.р., виховати у студентів уміння самостійно поширювати математичні знання та проводити аналіз прикладних задач, допомогти досягти необхідного рівня для оволодіння матеріалами спецкурсів, які вивчаються на фізико-математичному факультеті.

IV. 2. ЛЕКЦІЇ

Розділ 4. Системи диференціальних рівнянь.

Тема 4.1. Нормальна форма диференціальних систем

Лекція 19. Зведення д.с. до д.р. вищих порядків. Зведення д.с. до д.р. n-го порядку. Поняття частинного та загального розв'язків д.с. Задача Коші. Векторна форма запису д.с. Теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші (Пеано, Пікар). Фізичне тлумачення д.с, траєкторія руху, фазовий простір. Приклади. [1] с. 109-115, 131 -132; [2] с 241 -250.

Тема 4.2. Лінійні диференціальні системи.

Лекція 20. Структура загального розв'язку д.с. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Лінійна однорідна д.с. Лінійна залежність та лінійна незалежність вектор-функцій. Визначник Вронського, фундаментальна система розв'язків (ФСР) д.с. Структура загального розв'язку лінійної однорідної д.с. Побудова лінійної однорідної д.с. за її ФСР. Лінійна неоднорідна д.с., структура її загального розв'язку, метод варіації довільних сталих. Приклади. [1] с 147 -148 , 196 - 201; [2] с. 250 - 261.

Лекція 21. Д.с. зі сталими коефіцієнтами. Лінійні однорідні д.с. зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера, характеристичне рівняння, випадки простих та кратних його коренів. Комплексифікація розв'язків. Лінійні неоднорідні д.с. зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною, метод невизначених коефіцієнтів, нерезонансний та резонансний випадки. Приклади. [1] с 158 - 167, 192 - 196; [2], с. 261 - 274.

Лекція 22. Однорідні д.с. зі сталими коефіцієнтами в . Особливі точки векторних полів на площині. Фазовий портрет лінеаризованої д.с. Приклади. [1] с 78-85.

Лекція 23. Однорідні д.с. зі сталими коефіцієнтами в . Лінійні однорідні д.с. зі сталими коефіцієнтами у тривимірному просторі, різні випадки власних чисел матриці коефіцієнтів. Приклади. [1] с. 167-177.

Лекція 24. Експонента матриці. Експонента матриці, логарифм матриці. Теорема Флоке, матриця монодромії, мультиплікатори. Приклади. [1] с 177-184.

Тема 4.3. Нелінійні диференціальні системи.

Лекція 25. Метод інтегровних комбінацій. Загальний та перший інтеграл д.с. Необхідні та достатні умови існування першого інтегралу. Си-метрична форма запису д.с, метод інтегровних комбінацій. Приклади. [1] с. 207-217; [21 с 280 - 290.

Розділ 5. Застосування диференціальних рівнянь.

Тема 5.1. Диференціальні рівняння з частинними похідними.

Лекція 26. Лінійне та квазілінійне д.р. Постановка задачі. Задача Коші, її геометричне тлумачення, загальний розв'язок. Лінійне однорідне д.р. першого порядку, система характеристик, задача Коші. Квазілінійне д.р. першого поряд-ку, задача Коші. Приклади. [1] с 217-229; [2] с. 291 - 309.

Лекція 27. Системи д.р. Системи двох сумісних д.р., метод Камке. Д.р. Пффафа, геометричне тлумачення, двовимірний та одновимірний многовиди, теорема Фробеніуса. Приклади. [1] с 239-246; [2] с. 312-350.

Тема 5.2. Елементи теорії стійкості.

Лекція 28. Стійкість автономної д.с.

Деякі історичні відомості, приклади. Збурений та незбурений рухи, точка спокою. Означення стійкості, метод лінеарізації, д.с. першого наближення, стійкість автономної д.с. першого наближення. Критерій Рауса-Гурвиця. Стійкість точки спокою лінійної однорідної д.с. на площині. [1] с 310-312, 314-316; [4] с. 13-26.

Лекція 29. Теореми Ляпунова про стійкість. Другий метод Ляпунова. Знаковизначені, знакосталі, знакозмінні функції. Теореми Ляпунова про стійкість автономних д.с, функції Ляпунова. Теорема Лагранжа. Приклади. [1] с 321-326; [4] с. 27-40.

Лекція 30. Теореми Ляпунова про нестійкість. Теореми про нестійкість автономних д.с, геометричне тлумачення теорем Ляпунова. Теорема М.Г. Четаєва. Про одне д.р. з частинними похідними. Приклади. [1] с 326 - 328; [4] с. 47 - 54, 62 - 67.

Лекція 31. Теореми про стійкість за першим наближенням. Побудова функцій Ляпунова для автономних д.с. першого наближення. Теореми Ляпунова про стійкість та нестійкість за першим наближенням. Поняття критичних випадків. Стійкість лінійної неавтономної д.с. Приклади. [1] с 312-313, 316-321; [4] с. 67-74.

Тема 5.3. Диференціальні моделі.

Лекція 32. Математична модель. Поняття математичної моделі, основні вимоги. Множинність та єдиність моделей, адекватність, достатня простота, повнота, продуктивність. Типи математичних моделей. Модель війни або битви. Приклади. [5] с 4-15.

Лекція 33. Модель руху матеріальної частинки. Моделі за другим законом Ньютона. Рух матеріальної частинки, інтеграл енергії; структура ліній рівня, що проходять через стаціонарні точки повної енергії; лінії рівня енергії в околі стаціонарної точки, лема Морса, коливання математичного маятника. [1] с 329-339.

Лекція 34. Моделі теорії коливань. Деякі задачі теорії коливань, аналіз моделі двовидової популяції. [1] с 201-207.

Лекція 35. Модель коливання струни. Побудова моделі, телеграфне д.р., розв'язання д.р. коливання струни методом Фур'є. [6] с 23 - 50, 82 - 96.

Лекція 36. Оглядова лекція.

IV. 3. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Розділ 4. Системи диференціальних рівнянь.

Тема 4.1. Лінійні диференціальні системи.

Заняття 19 - 20. Однорідні д.с. зі сталими коефіцієнтами. Метод виключення невідомих. Матричниа форма запису д.с. Однорідні д.с, характеристичне рівняння, випадок простих та кратних коренів. АР: [8] 4.25, 4.27, 4.29, 4.31, 4.33, 4.35, 4.43; ДР: [8] 4.26, 4.28, 4.30, 4.32, 4.34, 4.45, 4.44.

Заняття 21-22. Неоднорідні д.с, зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Метод невизначених коефіцієнтів. АР: [8] 4.47, 4.49, 4.51, 5.53, 4.55, 4.59; ДР: [8] 4.48, 4.50, 4.52, 4.54.

Заняття 23. Лінійні д.с. з неспеціальною правою частиною. Метод варіації довільних сталих. АР: [8] 4.48,4.49,4.51,4.52; ДР: [8] 4.47, 4.50, 4.53, 4.54.

Тема 4.2. Нелінійні диференціальні системи.

Заняття 24. Симетрична форма д.с. Перший та загальний інтеграли. Метод інтегровних комбінацій. АР: [8] 4.15,4.17,4.19,4.21,4.23; ДР: [8] 4.16,4.18,4.20,4.22.

Заняття 25. МКР - 2 за матеріалом занять 19 - 24.

Розділ 5. Застосування диференціальних рінянь.

Тема 5.1. Д.р. з частинними похідними.

Заняття 26. Д.р. першого порядку. Лінійне та квазілінійне д.р., метод характеристик, задачі Коші. АР: [19] 1290, 1292,1294, 1296,1299, 1301,1303; ДР: [19] 1291, 1293, 1295, 1297, 1300, 1302, 1304.

Заняття 27 - 28. Нелінійні д.р. Системи двох нелінійних д.р. першого порядку. Метод Лагранжа - Шарпі. Д.р. Пфаффа. АР: [19] 1308, 1310, 1312,1314; ДР: [19] 1309,1311,1313.

Тема 5.2. Елементи теорії стійкості.

Заняття 29. Стійкість лінійної автономної д.с. Означення стійкості. Характеристичне рівняння. Критерій Гурвиця. АР: [8] 5.1,5.2,5.5,5,6,5.8; ДР: [8] 5.3,5.4,5.7,5.9,5.10.

Заняття 30. Стійкість за першим наближенням. Функції Ляпунова, теореми Ляпунова, Четаева. АР: [8] 5.21,5.23,5.25,5.27; ДР: [8] 5.20, 5.22, 5.24, 5.26, 5.28.

Заняття 31. Метод функцій Ляпунова. Теореми Ляпунова, характер положення рівноваги. АР: [8] 5.32, 5.34, 5.36, 5.39, 5.41, 5.44; ДР: [8] 5.31, 5.33, 5.34, 5.38, 5.40, 5.43.

Тема 4.2. Диференціальні моделі.

Заняття 32 - 34. Побудова диференціальних моделей. Моделі Зімана пульсації серця та нервового імпульсу. Модель конфліктної поведінки тварин. Модель росту пухлини. АР: [8] 1.40, 1.44, 1.48, 1.50, 1.52, 2.111, 2.112, 4.55, 4.57, 4.58, 4.59; [10] 506, 507; [20] 1.6.5, 1.9.1,1.9.4, 1.11.5; ДР: [8] 1.39, 1.45, 1.49, 1.51, 2.92, 2.93, 2.95, 2.96, 2.113, 4.56; [10] 508, 509; [20] 1.12, 23,1, 12.29.

Заняття 35, 36. Оглядові заняття.

VI. НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

Основна література.

1. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. -Київ: Либідь, 1994. - 360 с.

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: ГИФМЛ, 1949. - 366 с.

3. Найфе А. Введение в методы возмущений. - М.: Мир, 1984. - 536 с.

4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. - М.: Наука, 1966. - 532 с.

5. Арнольд В. И. "Жесткие"и "мягкие"математические модели. - М.: МЦНМО, 2000. - 32 с.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, - М.: Наука, 1977. - 736 с.

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - Минск: Вышэйшая школа, 1967. - 564 с.

8. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. - Київ: Вища школа, 1994. - 455 с.

9. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. Збірник задача з диференціальних рівнянь. - Київ: Вища школа, 1972. - 156 с.

10. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1992. - 126 с

11. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике (ТР). - М.: Высшая школа, 1983. - 175 с.

Додаткова література.

12. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1984. - 272 с.

13. Петровский Я. Л. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1970.-279 с.

14. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1970. - 332 с.

15. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я. Т., Калайда О. Ф. Диференціальні рівняння. - Київ: Вища школа, 1981.-504 с.

16. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задача по математике для ВТУЗов, т. 2. - М.: Наука, 1986.-368 с.

17. Данко Т.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть II. - М.: Высшая школа, 1986. - 416 с.

18. Головач Г.П., Калайда О.Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. - Київ: Техніка, 1997.-288 с.

19. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Минск: Вышэйшая школа, 1977. - 416 с.

20. Самойленко А.М., Борисенко С.Д., Матараццо Д., Тоскано Р., Ясінський В.В. Диференціальні моделі. Стійкість. - Київ: Вища школа, 2000. - 330 с.

Орієнтовні теми курсових робіт із джерелами.

1. Теорема Флоке-Ляпунова. Звідність лінійних диференціальних систем з періодичними коефіцієнтами. Еругин Н.П. Линейные системы с периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

2. Метод усереднення. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.

3. Крайові задачі та методи їх розв'язання. Самойленко А.М., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння.

4. Регулятор Вишнеградського Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

5. Диференціальні рівняння з загаювальним аргументом. Мышкис А. Д. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.

6. Сингулярно збурені диференціальні рівняння. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.С. Дифференциальные уравнения.

7. Проблема центро-фокуса. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

8. Періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь. Эльсгольц Э.Л. Введение в теорию дифференциальных уравнений.

9. Стійкість рівнянь з відхильним аргументом. Эльсгольц Л.Э., Корим С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

10. Ряди Фур'є в диференціальних рівняннях. Михлин С.Г. Курс математической физики.

11. Принцип С.О. Чаплигіна. Чаплыгин С.А. Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений.

12. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів. Бугров Я.С.. Никольский СМ. Высшая математика.

13. Інтегрування лінійних диференціальних рівнянь операційним методом. Мартыненко В.С. Операционное исчисление.

14. Функція Гріна та крайові задачі. Самойленко А.М., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння.

15. Перший метод Ляпунова для дослідження стійкості. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

16. Крайова задача Штурма-Ліувілля. Положий Г.Н. Уравнения математической физики.

17. Поліноми Лежандра та Чебишева. Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики.

18. Найпростіша задача варіаційного числення. Гончаренко В.Н. Основы теории равенств с частными производными.

19. Другий метод Ляпунова. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.

20. Елементи аналітичної теорії диференціальних рівнянь. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.

21. Гіпергеометричне рівняння. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.

22. Аналітичні методи розв'язання систем диференціальних рівнянь. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

23. Методи наближеного розв'язання диференціальних рівнянь. Безикович Я.С. Приближённые вычисления.

24. Сингулярно збурені диференціальні рівняння. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.

25. Диференціальні рівняння з періодичними коефіцієнтами. Федорюк А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

26. Асимптотичне інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

27. Стійкі поліноми. Постников М.М. Устойчивые многочлены.

28. Метод Адамса наближеного інтегрування диференціальних рівнянь. Тихонов А.Н., Васильєва А.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

29. Відцентровий регулятор. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

30. Чисельно-аналітичні методи дослідження розв'язків крайових задач, Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решений дифференциальных уравнений.

31. Нескінченні системи диференціальних рівнянь. Валеев К.Г., Жаутыков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений.

32. Поліноми Ерміта та Лаггера. Суэтин В.П. Классические ортогональные многочлены.

33. Асимптотика розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку. Павлюк І. А. Асимптотичні властивості розв'язків систем диференціальних рівнянь другого порядку.

34. Дельта-функція та її застосування в теорії диференціальних рівнянь. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.

35. Одновимірний рух частинки у потенціальному полі. Лопатинский Я.Б. Общий курс дифференциальных уравнений.

36. Гамільтонові системи. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы нелинейной теории возмущений.

37. Динамічні системи у метричному просторі. Зубов В.И. Устойчивость движения.

38. Математичні моделі коливних систем. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний.

39. Системи типу хижак - жертва. Свирижев Ю.М. Устойчивость биологических сообществ.

40. Математична модель зростання пухлини. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями.