Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

В. В. Бакун

Математичний аналіз

Частина III

Числові й функціональні ряди. Інтеграли, залежні від параметра

Підручник

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського

як підручник для студентів, які навчаються

за спеціальністю «Фізика та астрономія»

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2021

УДК 66.02(075.8) *Рекомендовано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Б19 *(Протокол №6 від 29 червня 2021 р.)*

Рецензенти: *М. О. Денисьєвський*, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О. М. Радченко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Відповідальний редактор *О. І. Клесов*, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Бакун В. В.

Б19 Математичний аналіз : підручник у 3-х ч. / В. В. Бакун. – Ч. 3. Числові й функціональні ряди. Інтеграли, залежні від параметра. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 435 с.

Уміщено матеріал із чітким та строгим доведенням усіх тверджень курсу, який повною мірою охоплює програму навчальної дисципліни «Математичний аналіз» для студентів фізико-математичного факультету зі спеціальності «Фізика та астрономія». У третій частині підручника викладено теорію числових і функціональних рядів та теорію інтегралів, залежних від параметра.

Для студентів факультетів фізико-математичного й електронно-технічного профілів, може бути корисним для поглибленого вивчення дисципліни та успішного виконання самостійної роботи.

УДК 66.02(075.8)

Зміст

Передмова

Третя частина підручника «Математичний аналіз» охоплює навчальний матеріал, передбачений робочою програмою кредитного модуля «Математичний аналіз – 3. Ряди. Інтеграли, залежні від параметра» для студентів другого курсу фізико-математичного факультету, які навчаються за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія».

Під час написання тексту підручника автор, по-перше, намагався використовувати найпростіший навчально-науковий мовний стиль, найбільш сприятливий для сприймання студентом-другокурсником. По-друге, основні теореми курсу подано на тому рівні узагальнення, який не потребує занадто обтяжливої техніки доведення, але при цьому демонструють основну його ідею. По-третє, автор сподівався привчити читача до використання основ математичної символіки, яка допомагає формулювати математичні твердження коротко і точно.

З повним переліком питань, викладених у цій частині підручника, можна ознайомитись у детальному її змісті, який наведено на початку книги.

Нумерація розділів, формул та тверджень у третій частині підручника продовжує відповідну нумерацію перших двох, і подана за тим самим принципом, а саме: за розділом, підпунктом розділу та за порядковим номером у підрозділі. Кожен вид тверджень нумерується окремо. Наприклад, третю теорему другого підпункту двадцять першого розділу позначено як «**Теорема 21.2.3**».

З повагою до читача, автор!

Основи символіки та позначення

Для стислості запису та посилення точності математичних тверджень у третій частині підручника (так само, як і у попередніх його частинах) застосовані такі символи:

=> − читають ***«випливає»*** і пишуть між двома твердженнями, щоб показати, що одне твердження є наслідком іншого

<=> − читають ***«рівносильно»***, «тоді й лише тоді», «необхідно і достатньо» і пишуть між двома твердженнями, щоб показати, що множини їх істинності однакові

$\exists$ − читають ***«існує»***, ***«знайдеться»***, ***«можна знайти»***, називають ***квантором існування*** і пишуть перед об'єктом, існування якого стверджується; походить від першої літери слова Exist

$\nexists$ − читають ***«не існує», «не має»*** тощо, використовують для ***заперечення існування*** об'єктів

$\exists!$ – читають ***«існує і є єдиним»***, ***«знайдеться тільки єдиний (єдина, єдине)»***, використовують для ствердження існування об'єкта тільки в єдиному числі (екземплярі)

$\forall$ − читають ***«для всіх»***, ***«для кожного»***, ***«всі»*** тощо; називають ***квантором узагальнення***, використовують для ствердження виконання деякої умови (властивості) для всіх елементів вказаної множини; наприклад, запис ***«*** $\forall x \in R$ ***»*** читають ***«для всіх дійсних чисел», «на всій дійсній числовій осі»*** тощо; походить від першої літери слова All

$\vee$ – те саме, що і символ великої квадратної дужки; читають ***«або»***, ***«сукупність»***, ***«об'єднання»*** тощо; твердження, утворене з інших тверджень, з'єднаних знаком «або» є істинним тоді й лише тоді, коли істинне хоч одне із тверджень, що входять у з'єднання

$\wedge$ – те саме, що і кома або фігурна дужка, читається ***«і»***, означає, що твердження (умови), з'єднані цим символом, повинні виконуватись разом (одночасно)

$:=$ – читають ***«покладемо»***, ***«покласти»***, ***«позначимо»*** тощо, застосовують для позначення рівності за означенням

$\overset{def}{<=>}$ – читають ***«рівносильно за означенням»***, використовують найчастіше в означеннях тих чи інших математичних об'єктів, щоб з'ясувати його сутність

$:$ (дві крапки) або $|$ (вертикальна риска) – читають «***виконано***», «***такі, що***», «***задовольняють***»; цей символ означає, що математичний об'єкт, після якого поставлено цей знак, задовольняє умови, записані після цього символу

$x \in A$	– елемент x належить множині A
$x \notin A$	– елемент x не належить множині A
$A \cup B$	– об'єднання (сукупність) множин A а B
$A \cap B$	– перетин (переріз) множин A та B
$A \setminus B$	– різниця множин A та B, а саме A мінус B
$A \subset B$	– множина A є підмножиною множини B
$A \times B$	– декартовий добуток множин A та B

$supA$ — точна верхня межа числової множини A

$infA$ — точна нижня межа числової множини A

$f : A \to B$ — відображення f множини A у множину B

$f\,|_{A_\circ}$ — звуження відображення (функції) f на підмножину $A_\circ$ множини A відображення $f : A \to B$

$f \circ g$ — суперпозиція функцій f та g (складена функція)

f^{-1} — обернене відображення (функція) до відображення (функції) f

N, Z, Q, R – відповідно множина натуральних, цілих, раціональних та дійсних чисел

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ — границя послідовності $\{x_n \mid n \in N\}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ — границя функції f у точці x_0

$\bar{R} := R \cup \{\pm\infty;\}$ — розширена множина дійсних чисел

$C(A)$ — клас (сукупність) усіх функцій, неперервних на множині A

$f'(x),\ \frac{df}{dx}$ – повна похідна функції f за змінною x

df — диференціал функції f

$\int f(x)dx$ — невизначений інтеграл функції f

$\overline{1,m} := 1,2,\dots,m$ — сукупність натуральних чисел від 1 до $m \in N$

Інші математичні символи будуть уведені за потреби використання нових понять.

Розділ 21. Числові ряди

21.1. Основні означення та найпростіші властивості

Основні поняття математики були винайдені при спробі людського розуму знайти відповіді на фундаментальні закони світоустрою. Не є винятком і таке одне з первинних математичних понять як числовий ряд.

Ще в VI столітті до н. е. видатний старогрецький філософ Зенон Елейський виголосив відомі парадоксальні міркування, апорії, одна з яких, наприклад, стверджувала, що такий прудконогий та славнозвісний воїн, як-от Ахілл, ніколи не наздожене черепаху.

Справді, уявімо собі, що Ахілл у $k = 10$ разів швидший за черепаху і в початковий момент часу він перебував на відстані $a_1 = 100$ м від неї, тоді за час, поки Ахілл здолає цю відстань, черепаха проповзе шлях a_2 у k разів коротший, тобто $a_2 = \frac{a_1}{k} = 10$ м. Далі, у наступний момент часу, коли Ахілл здолає відстань a_2 , що утворилась між ними, черепаха проповзе відстань $a_3 = \frac{a_2}{k} = \frac{a_1}{k^2} = 1$ м. Якщо так міркувати знову і знову, то виходить, що у будь який n-й момент часу між Ахіллом та черепахою є деяка відстань, а саме

$$a_n = \frac{a_1}{k^{n-1}} = \frac{1}{10^{n-3}}$$

метрів, яка стає неосяжно малою, але не нульовою величиною. Виходить, що Ахілл ніколи не наздожене черепаху, а це суперечить здоровому глузду. Між тим, відстань, яку долає Ахілл, наздогнавши черепаху, має складатися з нескінченної кількості відрізків загальної довжини

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots =$$

$$= a_1 + \frac{a_1}{k} + \frac{a_1}{k^2} + \cdots + \frac{a_1}{k^{n-1}} + \cdots =$$

$$=100+10+1+\ldots+\frac{1}{10^{n-3}} + \cdots$$

метрів. Переписавши суму у скороченому вигляді, отримаємо вираз

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1}{k^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n-3}} \ .$$

У подібному вигляді можна записати також і час, який повинен витратити “бідолашний” Ахілл на те, щоб наздогнати черепаху з описаного уявного досліду.

Звичайно, слово “бідолашний” застосовано у жартівливому сенсі, але майже у прямому значенні це слово можна було застосувати до старогрецьких філософів, математиків, фізиків, перед якими Зенон висвітлив зовсів не жартівливу задачу: а чи може простір або час бути розділеними на нескінченну кількість відрізків, відрізки нескінченно малої величини. Це запитання можна поставити так: простір та час є дискретні чи неперервні? Таким робом сформульовану проблему людство не розв’язало й до сьогодення, бо вона належить до первісних глобальних питань на кшталт: чи є Бог чи нема, або про первинність матеріального чи ідеального. Є надія, що людина досягне колись такого рівня знань, такої стадії свого розумового розвитку, що зможе знайти відповіді на ці запитання.

У апорії Зенона можна угледіти і суто математичний бік задачі: а чи можна якимось (розумним) чином, тобто за певним правилом та за певних умов, приписувати таким сумам, що складаються формально з нескінченної кількості доданків, ті чи інші числові значення?

Одним із перших, хто розв’язав подібну задачу, був видатний мислитель Архімед зі Сіракуз (III ст. до н. е.) − він обчислив площу параболічного сегмента, застосувавши метод Евдокса Кнідського (IV ст. до н. е.), який через дві тисячі років назвали методом вичерпання. Для цього Архімед вписав у пароболічний сегмент трикутник так, щоб основа трикутника збігалася із хордою, яка стягує дугу сегмента, а вершиною трикутника була точка дотику дотичної прямої, що паралельна цій хорді. Назвемо цей трикутник трикутником першого порядку та покладемо, що його площа становить a_1 одиниць площі. Після цього в нові два параболічні сегменти, утворені сторонами трикутника першого порядку та дугою первісного сегмента, Архімед точно таким же чином вписав трикутники, які назвемо трикутниками другого порядку. Потім у сегменти, новоутворені сторонами трикутниками другого порядку, Архімед вписав трикутники третього порядку, і так далі. Архімед довів, що загальна площа a_2 трикутників другого порядку у чотири рази менша площі a_1 трикутника першого порядку, а загальна площа a_3 трикутників третього порядку, відповідно, менша у чотири рази загальної площі a_2 трикутників другого порядку, і взагалі, загальна площа a_n трикутників n-го порядку у чотири рази менша загальної площі a_{n-1} трикутників $n-1$ порядку, тобто

$$a_2 = \frac{1}{4}a_1,\ a_3 = \frac{1}{4}a_2,\ \dots\ ,\ a_n = \frac{1}{4}a_{n-1},\ \dots\ .$$

Отже, на n-му кроці загальна площа вписаної у первісний параболічний сегмент фігури, яка складається з усіх трикутників від першого до n-го порядків, становить

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n =$$

$$= a_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\right). \qquad (21.1.1)$$

Архімед зміг звести останню суму (21.1.1) до вигляду

$$s_n = \frac{4}{3}a_1 - \frac{1}{4^{n-1}}\frac{a_1}{3}, \qquad (21.1.2)$$

та помітив, що другий доданок у різниці (21.1.2) зі зростанням числа n стає як завгодно малою величиною, а тому як завгодно мало відрізняється від числа $\frac{4}{3}a_1$. До того ж, можна помітити, що якщо на n-му кроці замість трикутників n-го порядку побудувати паралелограми з тими же основами і висотами, як і у цих трикутниках, то утвориться геометрична фігура, яка повністю містить у собі первісний параболічний сегмент і має площу $\widehat{s_n}$, що більша від площі s_n на величину

$$a_n = \frac{1}{4^{n-1}} a_1,$$

яка теж може бути зроблена як завгодно малим числом за рахунок вибору відповідного значення числа n, тобто

$$\widehat{s_n} = s_n + \frac{1}{4^{n-1}} a_1.$$

Отже, в Архімеда були всі підстави вважати, що площа s параболічного сегмента дорівнює чотирьом третинам площі вписаного в нього трикутника першого порядку, а саме

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots =$$

$$= a_1 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}} + \cdots \right) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3} a_1. \qquad (21.1.3)$$

Так само, як у маленької дитини можна угледіти характерні риси майбутньої особистості, так цей математичний алгоритм, запропонований Архімедом для обчислення площі параболічного сегмента, давав змогу означити такі поняття сучасної математики, як границя числової послідовності, числовий ряд та його сума, геометрична міра плоскої фігури та визначений інтеграл. Проте, як роки і роки кропіткого доглядання, виховання, навчання та щастя потрібні для того, щоб дитина виросла у гідну людину, так само знадобилося дві тисячі років розвитку людської цивілізації для того, щоб математики усвідомили поняття ряду, границі, інтеграла, міри, надали їм чіткого абстрактного означення, вивчили їх властивості й навчилися слушно їх застосовувати при розв'язанні різноманітних прикладних та теоретичних математичних задач.

Означення 21.1.1. ***Числовим рядом*** *називають формальну нескінченну числову суму*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots . \qquad (21.1.4)$$

Це означає, що розглядають дві числові послідовності, а саме послідовність ***членів (елементів) ряду*** $\{a_n \in R \mid n \in N\}$ *та послідовність* ***часткових (частинних) сум ряду*** $\{s_n \in R \mid n \in N\}$, *де*

$$s_n = a_1 + a_2 + \ a_3 + \cdots + \ a_n\,, \quad n \in N.$$

Якщо існує границя

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \qquad (21.1.5)$$

то її називають ***сумою ряду*** (21.1.4) *та позначають*

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Якщо послідовність часткових сум ряду $\{s_n \in R \mid n \in N\}$ *є збіжною, тобто границя* (21.1.5) *скінченна, то числовий ряд* (21.1.4) *називають* ***збіжним*** *та говорять, що* ***ряд збігається***. *Інакше ряд називають* ***розбіжним***. *Залежність*

$$a_n = f(n), \quad n \in N,$$

називають ***загальним членом ряду*** (21.1.4).

Приклад **21.1.1.** Звичайно, найпростішим і найвідомішим числовим рядом, знаним ще Архімедом, є ***геометричний ряд***, який відіграє стрижневу роль у теорії числових і функціональних рядів. Це ряд, що складається з елементів деякої геометричної прогресії (зі знаменником $q \in R$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots . \qquad (21.1.6)$$

Щоб обчислити суму ряду (21.1.6), запишемо вираз його n–ї часткової суми

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} \qquad (21.1.7)$$

і знайдемо границю цього виразу за умови, що $n \to +\infty$. Відразу виникають стандартні (для задач на ряди) труднощі, тому що зі зростанням параметра n до нескінченності стає нескінченно великою і кількість членів у сумі (21.1.7). Отже, до неї не застосовна теорема про перехід до границі у сумі. Таким чином, вираз (21.1.7) потребує спрощення до прийнятного вигляду.

Помітимо, що часткову суму s_{n+1} можна подати двома способами. По-перше,

$$s_{n+1} = s_n + a_n = s_n + aq^n,$$

по-друге, на відміну від цього, згрупувавши у сумі s_{n+1} доданки, що містять множник q, та винісши цей множник за дужку, можна записати

$$s_{n+1} = a + q(a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}) = a + qs_n.$$

Тож маємо рівняння

$$a + qs_n = s_n + aq^n,$$

яке за умови $q \neq 1$ має розв'язок

$$s_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q}. \qquad (21.1.8)$$

Якщо ж $q = 1$, то

$$s_n = a + a + \cdots + a = na. \qquad (21.1.9)$$

Послідовність $\{q^n \mid n \in N\}$ має границю нуль за умови, що $|q| < 1$, і має границю $+\infty$ при $q > 1$, та не має границі, якщо $q \leq -1$. У свою чергу, послідовність (21.1.9) має границю $+\infty$. Отже, якщо $a \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \left[\begin{array}{ll} \frac{a}{1-q}, & |q| < 1; \\ +\infty, & q \geq 1; \\ \nexists, & q \leq -1. \end{array}\right. \tag{21.1.10}$$

Таким чином, *геометричний ряд є збіжним і має суму* $s = \frac{a}{1-q}$ *, якщо* $|q| < 1$*, та розбігається в інших випадках.*

***Приклад* 21.1.2.** Розглянемо ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \cdots, \tag{21.1.11}$$

де x – довільне не ціле від'ємне дійсне число, тобто

$$x \notin Z_- = \{-1;\ -2; \ldots,\ -n; \ldots\}.$$

Розвинемо загальний член ряду у різницю двох послідовних дробів:

$$a_n = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}.$$

Тоді n-ту часткову суму ряду можна подати у вигляді

$$s_n = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(x+n-3)(x+n-2)} + \frac{1}{(x+n-2)(x+n-1)} + \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} =$$

$$= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) + \cdots + + \left(\frac{1}{x+n-3} - \frac{1}{x+n-2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{x+n-2} - \frac{1}{x+n-1}\right) + \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right),$$

отже, після відкриття дужок у якому і скорочення подібних членів отримаємо

$$s_n = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n}\,.$$

Тепер легко знайти границю останнього виразу:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n}\right) = \frac{1}{x+1} - 0 = \frac{1}{x+1}\,.$$

Отже, числовий ряд (21.1.11) збігається і має суму $s = \frac{1}{x+1}$, тобто

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+1}, \quad x \notin Z_-\,.$$

Наприклад, якщо $x = 0$, то

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = 1.$$

***Відповідь*:** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+1}, \quad x \notin Z_-\,.$

Слід зауважити, що у ***прикладі* 21.1.1** для знаходження спрощеного вигляду n-ї часткової суми s_n числового ряду (21.1.6) було застосовано ***метод складання рівняння*** відносно неї, натомість у наступному прикладі буде запроваджено метод, який називають ***методом послідовних різниць***.

Сутність методу послідовних різниць полягає у спробі розвинути елементи послідовності членів ряду $\{a_n \in R \mid n \in N\}$ у послідовні різниці деякої іншої послідовності $\{b_n \in R \mid n \in N\}$, себто у спробі подати загальний член ряду a_n у вигляді

$$a_n = b_n - b_{n+1}, \quad n \in N, \qquad (21.1.12)$$

або

$$a_n = b_{n+1} - b_n, \quad n \in N. \tag{21.1.13}$$

Якщо, наприклад, розвинення (21.1.12) можливе, то матимемо скорочений вираз для суми s_n вигляду

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n =$$

$$= b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \dots + b_{n-1} - b_n + b_n - b_{n+1} =$$

$$= b_1 - b_{n+1} . \tag{21.1.14}$$

Так само за розвиненням (21.1.13) отримаємо

$$s_n = b_{n+1} - b_1 . \tag{21.1.15}$$

Якщо ж виконується розвинення

$$a_n = b_n - b_{n+k}, \quad n \in N, \tag{21.1.16}$$

де $k \in N$ є фіксованим натуральним числом, то матимемо

$$s_n = b_1 + b_2 + \dots + b_k - b_{n+1} - b_{n+2} - \dots - b_{n+k} . \tag{21.1.17}$$

У випадку, коли залежність $a_n = f(n),\ n \in N$, є дробово-раціональною, аби розвинути правильний дріб в елементарні, можна застосовувати метод невизначених коефіцієнтів.

Легко помітити, що у наведених вище прикладах числових рядів обчислити границю загального члена ряду, себто границю послідовності $\{a_n \in R \mid n \in N\}$, було досить просто. Приміром, у випадку ряду (21.1.11) не важко було знайти, що

$$a_n = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \to 0, \ n \to +\infty, \ x \notin Z_- , \tag{21.1.18}$$

але це жодним чином не полегшило обчислення границі послідовності часткових сум ряду і довелось ще “попотіти”.

Навпаки, можна поміти, що якщо послідовність часткових сум s_n збіжна, тобто

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in R,$$

то тоді є збіжною до того самого числа $s \in R$ і послідовність часткових сум s_{n+1}, а тому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = s - s = 0. \qquad (21.1.19)$$

Фактично доведене таке твердження:

Теорема 21.1.1 (***необхідна умова збіжності числового ряду***). *Якщо числовий ряд є збіжним, то є збіжною, причому до числа нуль, і послідовність його членів*, себто

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \in R \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (21.1.20)$$

Звісно, потрібно чітко усвідомити, що умова (21.1.19) є тільки необхідною, та не є достатньою умовою збіжності числового ряду: якщо (21.1.19) справджується, то це вказує лише на те, що ряд може бути збіжним, але не обов'язково таким є.

Навпаки, необхідну умову збіжності (21.1.19), як правило, застосовують для доведення розбіжності числового ряду, а саме, використовують таке рівносильне попередньому твердження.

Теорема 21.1.2 (***достатня умова розбіжності числового ряду***). *Якщо послідовність членів числового ряду не збігається до числа нуль, то він є розбіжним*:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ -\textit{розбіжний ряд.} \qquad (21.1.21)$$

***Приклад* 21.1.3.** Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots \qquad (21.1.22)$$

та перевірити необхідну умову його збіжності.

Розв'язання. Легко знайти границю послідовності його часткових сум:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = +\infty.$$

Отже, числовий ряд (21.1.22) є розбіжним, проте послідовність його членів збігається до нуля:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln 1 = 0.$$

***Відповідь*:** ряд (21.1.22) розбігається, хоча необхідна умова його збіжності виконана.

Цей приклад підтверджує, що умова (21.1.19) є лише необхідною умовою збіжності ряду, та не є достатньою!

***Приклад* 21.1.4.** Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\alpha n = \sin\alpha + sin2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots, \qquad (21.1.23)$$

де α – довільне дійсне число, яке не пропорційне числу π.

Розв'язання. Інтуїція підказує, що за умови непропорційності коефіцієнта α числу π , є вагомі підстави для припущення, що зі зростанням параметра n до нескінченності загальний член ряду $a_n = sin\alpha n$ не прямує до нуля. Доведемо це твердження методом від супротивного.

Справді, якщо припустити, що

$$\lim_{n\to\infty} \sin\alpha n = 0, \qquad (21.1.24)$$

то тоді також

$$\lim_{n\to\infty} \sin\alpha(n+1) = 0, \qquad (21.1.25)$$

проте

$$\sin\alpha(n+1) = \sin\alpha n \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha n, \quad n \in N. \qquad (21.1.26)$$

Тож із тверджень (21.1.24)–(21.1.26) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} (\sin\alpha \cdot \cos\alpha n) = \sin\alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \cos\alpha n = 0. \qquad (21.1.27)$$

Але параметр α не пропорційний числу π, тому $\sin\alpha \neq 0$, отже, з рівності (21.1.27) робимо висновок, що

$$\lim_{n\to\infty} \cos\alpha n = 0. \qquad (21.1.28)$$

У свою чергу, за границями (21.1.24) та (21.1.28) маємо рівності

$$\lim_{n\to\infty} \cos^2\alpha n = 0 , \quad \lim_{n\to\infty} \sin^2\alpha n = 0,$$

які зумовлюють границю

$$\lim_{n\to\infty} (\cos^2\alpha n + \sin^2\alpha n) = \lim_{n\to\infty} \cos^2\alpha n + \lim_{n\to\infty} \sin^2\alpha n = 0,$$

однак остання рівність суперечить основній тригонометричній тотожності

$$\cos^2\alpha n + \sin^2\alpha n = 1, \ n \in N, \ \alpha \in R.$$

Отже, припущення (21.1.24) не правильне, а тому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin\alpha n \neq 0.$$

Таким чином, за **теоремою 21.1.2** робимо висновок, що числовий ряд (21.1.23) є розбіжним.

***Відповідь*:** ряд (21.1.23) розбігається.

Визначальним чинником, наріжним каменем, закладеним у фундамент теорії числових рядів, звичайно, є означення суми і збіжності числового ряду у термінах границі (21.1.5) числової послідовності його членів. Тому не дивно, що основні властивості числових рядів є наслідком відповідних властивостей границь числових послідовностей.

Так-от, наприклад, критерій Коші збіжності числових послідовностей легко переформулювати у відповідне твердження для числових рядів.

Теорема 21.1.3 (*критерій Коші збіжності числового ряду*). *Числовий ряд є збіжним тоді й лише тоді, коли за досить великих значень індексу* $n \in N$ *будь-які скінченні суми членів ряду з більшими номерами стають як завгодно малими*:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ – збіжний} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\colon \left(\forall n > n_0\ \forall k \in N\colon\ \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\right| < \varepsilon\right). \tag{21.1.29}$$

Доведення. За означення збіжності числового ряду, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігається тоді й лише тоді, коли є збіжною послідовність $\{s_n \mid n \in N\}$ його часткових сум, що за критерієм Коші збіжності числової послідовності рівносильно її фундаментальності, цебто коли за досить великого значення індексу $n \in N$

різниці між будь-якими частковими сумами ряду з більшими номерами стають як завгодно малими:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in N\colon \left(\ \forall n > n_0 \ \ \forall k \in N: \ \ |s_n - s_{n+k}| < \varepsilon \right). \quad (21.1.30)$$

Але легко помітити, що

$$|s_n - s_{n+k}| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n+k} a_i\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\right|. \quad (21.1.31)$$

З (21.1.30) та (21.1.31) маємо (21.1.29).

Що і потрібно було довести.

Приклад* 21.1.5.** Дослідити на збіжність числовий ряд, який називають ***гармонічним рядом:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots . \quad (21.1.32)$$

Розв'язання. Послідовність часткових сум $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > 0, \ n \in N$, ряду (21.1.32) є додатною та строго зростаючою, але не фундаментальною.

Справді, оцінимо різницю часткових сум s_n та s_{2n} за будь-якого $n \in N$:

$$s_{2n} - s_n = \sum_{i=n+1}^{2n} a_i = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Отже, умова (21.1.29) не виконується, через що ***гармонічний ряд розбігається*** до плюс нескінченності, тобто

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty. \quad (21.1.33)$$

Відповідь: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Зауважимо, що значення сум в умові (21.1.29) не залежать від зміни скінченної кількості членів початкового числового ряду, бо число $n_0 \in N$ завжди можна вибрати настільки великим, щоб ці суми вже не містили змінених членів ряду. Тож за **теоремою 21.1.3** маємо такий наслідок:

Наслідок 21.1.1. *Будь-яка зміна скінченної кількості членів числового ряду не впливає на його збіжність чи розбіжність.*

Для уточнення твердження **наслідку 21.1.1** означимо ще одне поняття теорії рядів.

***Означення* 21.1.2.** *Якщо із числового ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *вилучити його перші* n *членів, то утвориться ряд*

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots , \qquad (21.1.34)$$

*який називають **n-м залишковим рядом** вихідного числового ряду. Якщо до того ж ряд* (21.1.34) *збігається, то його суму називають **n-м залишком** ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *і позначать, як правило, символом* r_n:

$$r_n := \sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i \, . \qquad (21.1.35)$$

Теорема 21.1.4 (*критерій збіжності числового ряду у термінах залишкових рядів*). *Числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *є збіжним тоді й лише тоді, коли збігаються всі його залишкові ряди* $\sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i, n \in N$. *Притому, якщо вихідний числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збігається до суми* $s \in R$, *то для довільного натурального числа* $n \in N$ *виконується рівність*

$$s = s_n + r_n \, , \qquad (21.1.36)$$

і числова послідовність $\{r_n \mid n \in N\}$, *складена із залишків вихідного ряду, є нескінченно малою*:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0. \qquad (21.1.37)$$

Доведення. Вихідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ та його залишковий ряд $\sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i$ за будь-якого числа $n \in N$ різняться між собою на скінчену кількість членів, а тому за **наслідком 21.1.1** вони одночасно всі є збіжними чи всі є розбіжними.

Нехай вихідний ряд збігається до суми s. Зафіксуємо довільне число $n \in N$ і виберемо число $k \in N$ більше за n, тоді

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{k} a_i = s_n + s'_{k-n}, \qquad (21.1.38)$$

де число $s'_{k-n} \coloneqq \sum_{i=n+1}^{k} a_i$ – це $(k-n)$-та часткова сума n-го залишкового ряду $\sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i$, який збігається до суми $r_n = \lim_{k\to\infty} s'_{k-n}$, з чого випливає границя

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = s_n + \lim_{k\to\infty} s'_{k-n} = s_n + r_n .$$

Таким чином, розвинення (21.1.36) справджується за будь-якого натурального числа $n \in N$. Звідси маємо

$$r_n = s - s_n, \quad n \in N,$$

що, у свою чергу, зумовлює границю

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(s - s_n) = s - s = 0.$$

Що й потрібно було довести.

Ця теорема посідає чільне місце у теорії числових рядів, бо вказує на теоретичну можливість обчислення суми збіжного ряду з будь-якою наперед заданою точністю.

Справді, з чинності границі (21.1.37) випливає, що для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $n \in N$, за якого за всіх $k \geq n$ модулі залишків r_k не перевищують це число:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in N: \quad \forall\, k \geq n \quad |r_k| \leq \varepsilon. \tag{21.1.39}$$

Отже, якщо вибрати за наближене значення $\tilde{s}$ суми ряду $s = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ його часткову суму s_n із тим же самим номером n, що і у залишку r_n, себто,

$$s \approx \tilde{s} = s_n, \tag{21.1.40}$$

то за такого вибору абсолютна похибка наближення не буде перевищувати вказаного числа $\varepsilon > 0$, а саме, з (21.1.36) випливає, що

$$\Delta = |s - \tilde{s}| \leq \max_{k \geq n} |s - s_k| \leq |s - s_n| = |r_n| \leq \varepsilon. \tag{21.1.41}$$

Введемо поняття суми й різниці двох числових рядів та поняття добутку числового ряду на число узгодженим чином до відповідних понять для числових послідовностей. Тоді, так само як це було зроблено у випадку критерію Коші, властивості лінійності границь числових послідовностей можна буде переформулювати в термінах числових рядів.

Означення* 21.1.3.** 1. ***Сумою *двох* ***числових рядів*** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *будемо називати ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n), \tag{21.1.42}$$

тобто послідовність елементів ряду-суми (21.1.42) *є сумою послідовностей елементів рядів-доданків* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

2. ***Добутком*** $c\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ***числового ряду*** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ***на число*** $c \in R$ *будемо називати ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(ca_n), \qquad (21.1.43)$$

тобто послідовність елементів ряду-добутку (21.1.43) *є добутком послідовності членів ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *на число* $c \in R$.

Теорема 21.1.5 (***лінійні властивості числових рядів***).

1. *Множення числового ряду на довільне відмінне від нуля число не впливає на його збіжність*:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{збіжний} \Leftrightarrow (\ c \neq 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty}(ca_n) - \text{збіжний}\ ). \qquad (21.1.44)$$

При цьому, якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *є збіжними та збігається до своєї суми* $s^a = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty}(ca_n)$ *збігається відповідно до суми* cs^a, *що записують у вигляді*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(ca_n) = c\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ . \qquad (21.1.45)$$

2. *Якщо числові ряди* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *є збіжними і збігаються відповідно до своїх сум* $s^a = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *та* $s^b = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, *то сума цих рядів є збіжним рядом, який збігається до суми їх сум*

$$s^{a+b} = s^a + s^b, \qquad (21.1.46)$$

що записують у вигляді

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\ . \qquad (21.1.47)$$

3. *Якщо числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *є збіжним, а ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *розбігається, то розбігається також їх сума* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$.

Доведення. Всі три твердження даної теореми є безпосередніми наслідками властивостей лінійності границь числових послідовностей.

Справді, якщо числа $s_n^a = \sum_{i=1}^{n} a_i,\ n \in N,$ є частковими сумами вихідного ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, то числа

$$s_n' = \sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i = c s_n^a, \quad n \in N, \tag{21.1.48}$$

будуть частковими сумами добутку цього ряду на число $c \neq 0$, а тому границі лівої і правої частин рівності (21.1.48), обидві разом, або існують і є однаковими, або не існують; за чим маємо перше твердження теореми.

Так само, послідовність частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ складається з чисел

$$s_n'' = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = s_n^a + s_n^b, \ \ n \in N, \tag{21.1.49}$$

де s_n^a та s_n^b $-$ часткові суми числових рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ відповідно. Перейшовши до границі у співвідношенні (21.1.49) за умови, що $n \to +\infty$, за властивостями границі суми числових послідовностей отримаємо друге та третє твердження теореми.

Що й потрібно було довести.

***Завдання для самостійної роботи* 21.1.1.** *Довести, що за умови збіжності числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ з додатними членами $a_n > 0,\ n \in N$, послідовність яких є спадною, чинна границя*

$$\lim_{n \to +\infty} n\, a_{2n} = 0, \tag{21.1.50}$$

та, спираючись на це, показати розбіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \leq 1. \tag{21.1.51}$$

Довести , що обернене твердження не справджується.

Завдання для самоперевірки

21.1.1. Чи може сума двох розбіжних числових рядів бути збіжним рядом? Навести приклади.

21.1.2. Якою є сума s числового ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)}, \quad x \notin Z_- \ ? \qquad (21.1.52)$$

21.1.3. Якою є сума s числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{2}{n})$?

21.1.4. Якою є сума s числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-\frac{1}{(n+1)^2})$?

Відповіді на завдання для самоперевірки

21.1.1. Може (приклади підібрати самостійно!).

21.1.2. $s = \frac{1}{2(x+1)(x+2)}$.

21.1.3. $s = +\infty$.

21.1.4. $s = \ln\frac{1}{2}$.

Аби задіяти наведений вище алгоритм наближеного обчислення суми числового ряду, який ґрунтується на співвідношеннях (21.1.39)−(21.1.41), щонайменше необхідно встановити збіжність цього ряду. Також деякі інші теоретичні або обчислювальні задачі теж не потребують точного знання суми ряду, але потребують умови його збіжності. Отже, постає задача про з'ясування достатніх умов збіжності числового ряду без, можливо, точного обчислення його суми.

21.2. Збіжність додатних та невід'ємних числових рядів

Можна помітити, що часткові суми $s_n, n \in N$, числових ряду, який містить члени тільки одного знаку, утворюють монотонну послідовність, а це гарантує існування її границі, скінченної чи нескінченної. Отже, для збіжності такої послідовності (а значить, і для збіжності числового ряду) досить вимагати лише її обмеженості.

Оскільки множення недодатного числового ряду на мінус одиницю перетворює його у невід'ємний ряд і не змінює його поведінки (збіжності чи розбіжності), то надалі для простоти будемо формулювати відповідні твердження тільки для невід'ємних рядів.

Якщо ж усі члени ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ невід'ємні, то послідовність, складена з його часткових сум s_n, $n \in N$, є невід'ємною і строго чи нестрого зростаючою, тому за умови її обмеженості зверху вона буде збіжною. Та навпаки: якщо послідовність не обмежена, то вона розбігається до $+\infty$. При цьому монотонна числова послідовність збіжна тоді й лише тоді, коли збіжна хоча б одна її підпослідовність. Таким чином, справедливе таке твердження:

Теорема 21.2.1 (***необхідна і достатня умова збіжності невід'ємного ряду*).** *Числовий ряд з невід'ємними членами збіжний тоді й лише тоді, коли послідовність часткових сум або будь-яка її підпослідовність є обмеженою зверху*:

$$a_n \geq 0,\ n \in N \Rightarrow (\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{збіжний} \Leftrightarrow \exists c \geq 0:\ s_n \leq c,\ n \in N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists c \geq 0:\ s_{n_k} \leq c,\ \text{де}\ n_k \uparrow +\infty,\ k \to +\infty,\ n_k \in N). \qquad (21.2.1)$$

***Приклад* 21.2.1.** Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in R, \qquad (21.2.2)$$

(який називають ***рядом Рімана–Діріхле***).

Розв'язання. Очевидно, що за $\alpha = 1$ ряд Рімана–Діріхле є гармонічним рядом, який, як це було доведено вище, є розбіжним числовим рядом з додатними членами, а тому послідовність його часткових сум розбігається до нескінченності:

$$s_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty, \quad n \to +\infty,$$

тож, якщо $\alpha \leq 1$, то послідовність часткових сум

$$s_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \geq s_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

теж розбігається до $+\infty$. Отже, у цьому випадку ряд Рімана–Діріхле є розбіжним.

Якщо ж $\alpha > 1$, то для підпослідовності часткових сум $s_{2n}(\alpha)$ з парними номерами справедливі нерівності

$$s_{2n}(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)^{\alpha}} + \frac{1}{(2k)^{\alpha}} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(2k)^{\alpha}}\right) + \left(\frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)^{\alpha}}\right) \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} s_n(\alpha) + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(2k-2)^{\alpha}}\right) = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} s_n(\alpha) + \frac{1}{2^{\alpha}} s_{n-1}(\alpha) <$$

$$< 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} s_n(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} s_{2n}(\alpha), \quad n \in N,$$

за якими, у свою чергу, маємо нерівності

$$s_{2n}(\alpha) \le \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}, \quad n \in N, \ \alpha > 1.$$

Отже, за будь-якого значення параметра $\alpha > 1$ підпослідовність часткових сум $s_{2n}(\alpha), n \in N$, обмежена зверху. Очевидно, що послідовність часткових сум $s_{2n+1}(\alpha), n \in N$, теж обмежена:

$$s_{2n+1}(\alpha) = s_{2n}(\alpha) + \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}} < s_{2n}(\alpha) + 1, \ n \in N.$$

Таким чином, за висновком попередньої теореми, коли $\alpha > 1$, ряд Рімана–Діріхле є збіжним.

Відповідь: *ряд Рімана–Діріхле збігається лише за умови* $\alpha > 1$!!!

Наступне твердження є безпосереднім наслідком **теореми 21.2.1**.

Теорема 21.2.2 (***мажорантна ознака порівняння збіжності числових рядів***). *Нехай для числових рядів з невід'ємними членами виконана умова*

$$0 \le a_n \le b_n, \quad n \in N. \tag{21.2.3}$$

Тоді:

1) якщо є збіжним ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$;

2) якщо ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ розбігається, то таким є і ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$,

тобто

$$0 \le a_n \le b_n, \ n \in N \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n - \text{збіжний} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{збіжний}; \\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{розбіжний} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n - \text{розбіжний}. \end{array}\right.$$

Доведення. 1. Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ збігається, то його часткові суми s_n^b, $n \in N$, обмежені зверху деяким числом $c \geq 0$:

$$\exists c \geq 0:\ s_n^b \ \leq\ c,\ n \in N.$$

Тоді за умови (21.2.3) справджуються і відповідні нерівності для часткових сум s_n^a ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$:

$$s_n^a \leq s_n^b \quad \leq\ c,\quad n \in N.$$

Таким чином, часткові суми s_n^a, $n \in N$, теж обмежені зверху тим самим числом $c \geq 0$, а отже, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігається.

2. Нехай виконана умова (21.2.3) і ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ є розбіжним. Тоді другий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ не може бути збіжним, інакше згідно з доведеним вище першим твердженням теореми ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ теж збігався б, що суперечить умові. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ може бути тільки розбіжним.

Теорему доведено.

Якщо виконані нерівності (21.2.3), *то говорять, що числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ***мажорує ряд*** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, *або говорять, що ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *є* ***мажорантним рядом*** *числового ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. *У свою чергу, ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *називають* ***мінорантним рядом*** *числового ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Отже, **теорему 21.2.2** можна сформулювати у скороченому вигляді: *якщо обидва ряди невід'ємні, то за збіжністю мажорантного ряду збігається і мінорантний, та навпаки, за розбіжністю мінорантного ряду, розбігається і мажорантний.*

Слід пам'ятати, що за **наслідком 21.1.1** збіжність числового ряду не залежить від зміни скінченної кількості його членів, тож в умові (21.2.3) досить вимагати виконання нерівностей починаючи не з першого натурального числа $n = 1$, а з деякого більшого (можливо, досить великого) натурального числа $n_0 \in N$. Це стосується й інших умов, які накладаються на члени числових рядів у задачах на їх збіжність, тому лише задля простоти формулювання наступних теорем будемо вимагати чинності подібних умов на всій множині натуральних чисел N.

Крім того, дуже часто при дослідженні числових рядів на збіжність умову (21.2.3) зручно замінити на іншу, більш просту у перевірці, яка б гарантувала справедливість нерівностей (21.2.3), наприклад, на граничну нерівність

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} < 1,$$

або на нерівності для нескінченних відношень

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n \in N,$$

тощо. Отже, є сенс сформулювати декілька наслідків **теореми 21.2.2** за відповідним чином зміненою умовою (21.2.3).

Теорема 21.2.3 (***ознака порівняння збіжності рядів у термінах послідовних відношень***). *Нехай для членів додатних числових рядів* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *виконані нерівності*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \; n \in N. \qquad (21.2.4)$$

Тоді справджуються висновки **теореми 21.2.2**.

Доведення. З нерівностей (21.2.4) випливає чинність нерівностей

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_4}{b_3}\cdot\ldots\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n+1}}{b_n}, \; n \in N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_1} \le \frac{b_{n+1}}{b_1}, n \in N \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}, n \in N \Leftrightarrow a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n, \; n \in N.$$

Звідси маємо

$$0 < a_n \ \leq cb_n, \ \ n \in N, \qquad (21.2.\ 5)$$

де позначено $c := \frac{a_1}{b_1} \neq 0$.

Отже, виконані всі умови **теореми 21.2.2** для рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{+\infty} cb_n$, але множення ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ на константу $c \neq 0$ не змінює умов його збіжності.

Таким чином, всі висновки **теореми 21.2.2** щодо збіжності числових рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ є істинними.

Теорему доведено.

Теорема 21.2.4 (***ознака збіжності числового ряду, складеного з добутків***)**.** *Нехай невід'ємний числових ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *є збіжним і невід'ємна числова послідовність* $\{0 \leq a_n \mid n \in N\}$ *обмежена. Тоді числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$$

теж є збіжним.

Притому, якщо послідовність $\{0 \leq a_n \mid n \in N\}$ *відокремлена від нуля, тобто*

$$\exists c_0 > 0\colon \ \forall n \in N \ \ a_n > c_0, \qquad (21.2.6)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *збігається тоді й лише тоді, коли є збіжним ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Доведення. Нехай невід'ємна числова послідовність $\{0 \leq a_n \mid n \in N\}$ обмежена:

$$\exists\, c > 0 : \ \forall\, n \in N \ \ 0 \leq a_n \leq c.$$

Тоді виконані нерівності

$$\forall n \in N \ \ 0 \le a_n b_n \le c b_n, \tag{21.2.7}$$

за яких та за **теоремою 21.2.2** справджується перший висновок цієї теореми.

Якщо, до того ж, послідовність $\{0 \le a_n \mid n \in N\}$ відокремлена від нуля, то нерівності (21.2.7) посиляться до вигляду

$$\forall n \in N \quad 0 \le c_0 b_n \le a_n b_n \le c b_n, \tag{21.2.8}$$

що гарантує істинність другого висновку теореми.

Теорему доведено.

Теорема 21.2.5 (***гранична ознака порівняння збіжності числових рядів***)**.** *Нехай для членів числових рядів* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *виконані нерівності*

$$a_n \ge 0, \ b_n > 0, \ n \in N, \tag{21.2.9}$$

та існує границя

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c. \tag{21.2.10}$$

Тоді:

1. *Якщо границя* (21.2.10) *є додатним числом, тобто* $0 < c < +\infty$,

то ряди $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *є або обидва збіжні, або обидва розбіжні, та умову* (21.2.10) *можна подати у рівносильному вигляді*

$$a_n \sim c b_n\,, \quad n \to +\infty. \tag{21.2.11}$$

2. *Якщо границя* $c = 0$, *то справджуються твердження попередньої* ***теореми* 21.2.2**.

3. *Якщо границя* $q = +\infty$*, то справджуються твердження попередньої* ***теореми* 21.2.2,** *в якій ряди* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *змінено місцями.*

Доведення. 1. Нехай границя (21.2.10) є додатною. Виберемо додатне число $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб різниця чисел c та ε була додатною, тобто $c - \varepsilon > 0$. Тоді за теорією границь числових послідовностей знайдеться такий номер $n_0 \in N$ елемента послідовності, що, починаючи з нього, виконані нерівності

$$c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon\,,\;\; n \ge n_0\,,$$

або

$$0 \le (c - \varepsilon\;)\, b_n < a_n < (c + \varepsilon\;)\, b_n\,,\quad n \ge n_0\,. \qquad (21.2.12)$$

Тож за нерівностями (21.2.12) та за висновками **теореми 21.2.2** отримаємо перше твердження цієї теореми.

2. Якщо

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c = 0 < 1,$$

то за теорією границь числових послідовностей знайдеться такий номер $n_0 \in N$ елемента послідовності, що починаючи з нього виконані нерівності

$$\frac{a_n}{b_n} < 1\,,\;\; n \ge n_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le a_n < \; b_n\,,\quad n \ge n_0\,.$$

Отже, для елементів рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, починаючи із вказаного номера $n_0 \in N$, виконані умови (21.2.3) **теореми 21.2.2**, а значить, справджуються і висновки цієї теореми.

3. Якщо ж

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty,$$

то знайдеться такий номер $n_0 \in N$ елемента послідовності, що починаючи з нього, виконані нерівності

$$\frac{a_n}{b_n} > 1\,, \quad n \geq n_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; 0 \leq \; b_n < a_n\,, \quad n \geq n_0\,.$$

Отже, члени рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ у нерівностях (21.2.3) помінялися місцями, тож і у висновках **теореми 21.2.2** потрібно змінити один ряд на інший.

Теорему доведено.

Якщо в умові (21.2.11) за додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ вибрати ряд Рімана–Діріхле, цебто ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in R$, який, як було встановлено, збігається лише за показника степеня $\alpha > 1$, то негайно за попередньою теоремою отримаємо досить простий у користуванні наслідок.

Наслідок 21.2.1. *Нехай для послідовності членів числового ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *виконана умова*

$$a_n \sim c\cdot\frac{1}{n^\alpha}\,, \quad n \to +\infty, \quad c \neq 0. \tag{21.2.13}$$

Тоді числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збігається тоді й лише тоді, коли* $\alpha > 1$.

***Приклад* 21.2.2.** Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\cos n}}{n^2} . \qquad (21.2.14)$$

Розв'язання. Позаяк

$$\cos n < 1,\ n \in N,$$

то члени цього ряду задовольняють нерівності

$$0 < a_n = \frac{2^{\cos n}}{n^2} < \frac{2}{n^2} := 2b_n ,\ n \in N,$$

та числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ є рядом Рімана-Діріхле з показником степеня $\alpha = 2 > 1$, а тому цей ряд і мажорантний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} 2b_n$ є збіжними.

Отже, за першим висновком монотонної ознаки порівняння збіжності числових рядів (**теорема 21.2.2**) досліджуваний числовий ряд (21.2.14) теж збігається.

***Відповідь*:** ряд (21.2.14) є збіжним.

***Приклад* 21.2.3.** Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\cos n}{n^2+\cos n^2} . \qquad (21.2.15)$$

Розв'язання. Позаяк послідовності, складені з чисел $\frac{\cos n}{n}$, $n \in N$, та з чисел $\frac{\cos n^2}{n}$, $n \in N$, є нескінченно малими, то за $n \to +\infty$ справджуються еквівалентності

$$(n + \cos n) \sim n ,$$

$$(n^2 + \cos n^2) \sim n^2,$$

за якими маємо

$$a_n = \frac{n+\cos n}{n^2+\cos n^2} \sim \frac{1}{n} = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha = 1.$$

Тому за **наслідком 21.2.1** заданий ряд розбігається.

Відповідь**:** ряд (21.2.15) розбігається.

Приклад **21.2.4.** Довести існування границі послідовності числових сум

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = \gamma \in R. \qquad (21.2.16)$$

Розв'язання. Подамо суми $s_n,\ n \in N$, у вигляді

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{n}-\ln n =$$

$$= 1+\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\ln\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}\right).$$

Можна помітити, що величини s_n – це часткові суми числового ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}\right), \qquad (21.2.17)$$

для загального члена якого a_n, беручи до уваги, що

$$\ln(1+x) \sim x,\ \ x \to 0,$$

легко встановити еквівалентність

$$a_n = \frac{1}{n} - ln\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \sim \frac{1}{n}-\frac{1}{n-1} =$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2},\ \ n \to +\infty.$$

Остаточно маємо:

$$a_n \sim \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha = 2,\ n \to +\infty.$$

Отже, за висновком **наслідку 21.2.1** числовий ряд (21.2.17) є збіжним, а тому існує границя його часткових сум

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \gamma \in R.$$

Що й потрібно було довести.

Величину границі (21.2.16), себто число $\gamma \in R$ називають ***сталою Ойлера***. Було знайдено її наближене значення:

$$\gamma \approx 0{,}57721566490 \dots ,$$

однак дотепер невідомо, чи є це число раціональним чи ні (є задача для сміливців!).

Якщо за стандартний ряд, з яким порівнюється збіжність досліджуваного числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, вибрати геометричний ряд, то отримаємо прості у застосуванні ознаки Даламбера та Коші збіжності числового ряду.

Теорема 21.2.6 (***ознака Даламбера збіжності числового ряду***)**.**

Нехай числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *складено з додатних членів*:

$$a_n > 0, \quad n \in N. \tag{21.2.18}$$

Тоді:

1. *Якщо члени ряду задовольняють нерівностям*

$$\frac{a_n+1}{a_n} \le q < 1, \quad n \in N. \tag{21.2.19}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *є збіжним.*

2. *Якщо справедливі нерівності*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1, \quad n \in N, \tag{21.12.20}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *розбігається.*

Доведення. 1. Покладемо $b_n = q^n,\ n \in N,\ 0 < q < 1.$ Тоді нерівності (21.2.19) рівносильна умові (21.2.4) **теореми 21.2.3**:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

притому ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ є збіжним геометричним рядом $(0 < q < 1)$. Тому за першим висновком вказаної теореми числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ теж збігається.

2. Якщо виконуються нерівності (21.2.20), то

$$a_{n+1} \ge a_n,\quad n \in N,$$

тобто члени ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ утворюють зростаючу послідовність додатних чисел. Таким чином, не виконується необхідна умова збіжності числового ряду, а саме

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \ne 0.$$

Отже, числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ розбігається.

Теорему доведено.

Умови (21.2.19) та (21.2.20) можна подати у граничному вигляді, відтак ознака Даламбера отримає таке формулювання:

Теорема 21.2.7 (*гранична ознака Даламбера збіжності числового ряду*). *Нехай числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *є додатним та існує границя*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q. \tag{21.2.21}$$

Тоді:

1. *Якщо число* $0 \le q < 1,$ *то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збіжний.*

2. *Якщо число* $q > 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *розбіжний.*

Доведення. 1. Нехай границя (21.2.21) існує й набуває значення, меншого за одиницю: $0 \leq q < 1$. Виберемо число $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб числова сума $q + \varepsilon$ теж була меншою за одиницю:

$$0 < q + \varepsilon < 1.$$

Тоді знайдеться такий номер $n_0 \in N$, за якого всі елементи з більшими номерами послідовності, що записана в границі (21.2.21), не перевищать значення $q + \varepsilon < 1$:

$$\exists\, n_0 \in N\colon\ \forall\, n > n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q + \varepsilon < 1.$$

Тож додатній числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ задовольняє умову (21.2.19) **теореми 21.2.6**, і тому за першим висновком вказаної теореми є збіжним.

2. Нехай границя (21.2.21) набуває значення $q > 1$. Тоді можна вибрати додатне число $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб різниця $q - \varepsilon$ теж була б більшою за одиницю, притому знайдеться такий номер $n_0 \in N$, що всі відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ з більшими номерами n за n_0 будуть мати значення не менше від вказаного числа $q - \varepsilon > 1$, унаслідок чого числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ задовольнятиме умову (21.2.20) **теореми 21.2.6.** Отже, за другим висновком **теореми 21.2.6** цей ряд розбігається.

Теорему доведено.

***Завдання для самостійної роботи* 21.2.1.** *Довести, що за умови*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \qquad (21.2.22)$$

додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *може бути як збіжним, так і розбіжним.*

***Приклад* 21.2.5.** Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} . \qquad (21.2.23)$$

Розв'язання. Знайдемо границю (21.2.21) послідовних відношень членів додатного числового ряду (21.2.23):

$$q = \lim_{n\to+\infty}\left(a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)!}{\sqrt{(2n+2)!}}\cdot\frac{\sqrt{(2n)!}}{n!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{\sqrt{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)\cdot(2n+2)}} = \left|\begin{array}{c} n+1\sim n, \\ \sqrt{(2n+1)\cdot(2n+2)}\sim 2n^2, \\ n\to+\infty \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, згідно граничної ознаки Даламбера (**теорема 21.2.7**) заданий числовий ряд збігається.

***Відповідь*:** ряд (21.2.23) збігається.

Теорема 21.2.8 (*ознака Коші збіжності числового ряду*). *Нехай числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *складено з невід'ємних членів*:

$$a_n \ge 0,\ \ n \in N.$$

Тоді:

1. *Якщо члени ряду задовольняють нерівностям*

$$\sqrt[n]{a_n} \le q < 1, \quad n \in N, \qquad (21.2.24)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *є збіжним.*

2. *Якщо справедливі нерівності*

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1, \quad n \in N, \tag{21.2.25}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *розбігається.*

Доведення. 1. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що число q з умови (21.2.24) є додатним (інакше всі $a_n = 0,\ n \in N$). Покладемо

$$b_n := q^n,\ n \in N, \quad 0 < q < 1.$$

Тоді нерівність (21.2.24) рівносильна умові (21.2.3) **теореми 21.2.2**. Справді,

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q,\ n \in N \ \Leftrightarrow\ a_n \leq q^n,\ n \in N \ \Leftrightarrow\ a_n \leq b_n\ ,\ n \in N.$$

Позаяк за умови $0 < q < 1$ геометричний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ збігається, то за першим висновком **теореми 21.2.2** ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ теж є збіжним.

2. З нерівності (21.2.25) отримаємо, що

$$a_n \geq 1, \quad n \in N, \tag{21.2.26}$$

а тому не виконується необхідна умова збіжності числового ряду:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0.$$

Отже, числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ розбігається.

Теорему доведено.

Теорема 21.2.9 (***гранична ознака Коші збіжності числового ряду***). *Нехай числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *є невід'ємним та існує границя*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \tag{21.2.27}$$

Тоді:

1. *Якщо число* $0 \leq q < 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збіжний.*

2. *Якщо число* $q > 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *розбіжний.*

Доведення. Міркування майже ті самі, що були наведені за доведення граничної ознаки Даламбера.

1. Нехай границя (21.2.27) існує і набуває значення $0 \leq q < 1$. Виберемо число $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб сума $q + \varepsilon$ теж була меншою за одиницю:

$$0 < q + \varepsilon < 1.$$

Тоді знайдеться такий номер $n_0 \in N$, що всі елементи з більшими номерами послідовності, яка зазначена в границі (21.2.21), не перевищать числа $q + \varepsilon < 1$:

$$\exists n_0 \in N: \quad \forall n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q + \varepsilon < 1.$$

Отже, починаючи з деякого числа $n_0 \in N$ виконана умова (21.2.24) попередньої теореми, а тому за її першим висновком ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ буде збіжним.

2. Нехай границя (21.2.27) набуває значення $q > 1$. Тоді можна вибрати додатне число $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб різниця $q - \varepsilon$ була меншою за одиницю, і знайдеться такий номер $n_0 \in N$, що всі радикали $\sqrt[n]{a_n}$ з більшими номерами n за n_0 будуть мати значення не менше від числа $q - \varepsilon > 1$. У такому разі числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ буде задовольняти умову (21.2.25) **теореми 21.2.8**, а отже, за другим висновком **теореми 21.2.8** буде розбігатися.

Теорему доведено.

***Завдання для самостійної роботи* 21.2.2.** *Довести, що за умови*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \qquad (21.2.28)$$

невід'ємний числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *може бути як збіжним, так і розбіжним.*

Легко помітити, що висновки граничних ознак Даламбера і Коші є повністю тотожними. Це і не дивно, позаяк за існуванням границі (21.2.24) маємо існування границі (21.2.27) та однаковість їх числових значень. Отже, якщо гранична ознака Даламбера дає деякий визначений висновок про збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, то напевне той самий висновок буде чинним і за граничною ознакою Коші. Однак обернене твердження не справджується, тобто можна вказати ряд, до якого застосовна гранична ознака Коші та не застосовна гранична ознака Даламбера. Тож говорять, що перша ознака є ***сильнішою*** за другу.

Щоб підтвердити цей висновок, розглянемо такий приклад.

***Приклад* 21.2.6.** Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} \ldots + \frac{2^n}{3^{n-1}} + \frac{2^n}{3^n} + \cdots . \qquad (21.2.29)$$

Розв'язання. Обчислимо послідовні відношення членів заданого ряду:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{3}, & n = 2k-1,\ k \in N; \\ 2, & n = 2k,\ k \in N. \end{array}\right.$$

Отже, відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \in N$, утворюють періодичну послідовність, яка не має границі, у такому разі гранична ознака Даламбера до ряду (21.2.29) не застосовна. Проте послідовність радикалів $\sqrt[n]{a_n}$, $n \in N$, збіжна.

Справді, границі

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{\frac{2^n}{3^n}}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n-1]{\frac{2^n}{3^{n-1}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n-1]{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

зумовлюють існування границі

$$q=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt{\frac{2}{3}}<1,$$

тож за граничною ознакою Коші досліджуваний числовий ряд є збіжним.

Відповідь: ряд (21.2.29) збіжний.

Приклад **21.2.7.** Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}. \qquad (21.2.30)$$

Розв'язання. Числовий ряд (21.2.30) є додатним, і його загальний член складений із множників, що утворюють степені з показниками, кратними натуральному числу n. Тож є сенс застосувати до його дослідження граничну ознаку Коші, обчисливши границю (21.2.28):

$$q=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}}=3\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=$$

$$=3\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{3}{e}>1.$$

Позаяк числове значення границі $q=\frac{3}{e}$ є більшим за одиницю, то за другим висновком **теореми 21.2.9** заданий ряд буде розбіжним.

Відповідь: ряд (21.2.30) розбіжний.

Звичайно, розбіжність останнього ряду можна було встановити іншими способами. Наприклад, достатньо було перевірити чи виконана необхідна умова збіжності числового ряду і переконатись, що це не так. Проте такі дії, швидше за все, були б технічно обтяжливішими.

Ознаки Коші та Даламбера (сформульовані у граничний формі чи ні) порівнюють збіжність дослідного ряду зі збіжністю геометричного ряду, члени якого є показниковою функцією відносно натуральної змінної $n \in N$. Такі ряди досить швидко збігаються (чи розбігаються) у разі, коли їх збіжність порівнювати зі збіжністю рядів Рімана−Діріхле. Для останніх значення границь (21.2.21) і (21.2.28) становить одиницю, що приводить до небажаного невизначеного випадку.

Натомість у **наслідку 21.2.1** (з **теореми 21.2.5**) збіжність досліджуваного числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (із членами сталого знака) порівнюється з рядами Рімана−Діріхле. На жаль, умова еквівалентності (21.2.13), що вказана у цьому твердженні, не завжди виконується, тому сформулюємо декілька найвідоміших ознак, у яких збіжність дослідного ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ хоча порівнюється зі збіжністю "повільних" рядів Рімана−Діріхле, однак умова їх мажорантності чи мінорантності перевіряється засобами **теореми 21.2.3**, себто доводяться нерівності

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}}, \quad n \in N, \quad \alpha > 1,$$

чи

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}}, \quad n \in N, \quad \alpha \leq 1.$$

Теорема 21.2.10 (***ознака Раабе збіжності числового ряду***). *Нехай числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *складений з додатних членів.*

Тоді:

1. *Якщо виконані нерівності*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \rho > 1, \quad n \in N, \tag{21.2.31}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збіжний.*

2. *Якщо члени ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *задовольняють умову*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1, \ \ n \in N, \tag{21.2.32}$$

то такий ряд розбіжний.

Доведення. 1. Нехай справедливі нерівності (21.2.31). Запишимо їх у рівносильному вигляді:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{\rho}{n}, \ \ n \in N. \tag{21.2.33}$$

Виберемо довільне число α між числами ρ та 1:

$$\rho > \alpha > 1.$$

Тоді з існування відомої границі

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha < \rho$$

випливає, що для всіх натуральних чисел, більших за деяке число $n_0 \in N$, справджуються нерівності

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} < \rho \ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1 < \frac{\rho}{n} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} < 1 + \frac{\rho}{n},$$

за якими та за нерівностями (21.2.33) отримаємо, що

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}},$$

тобто

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad b_n = \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad n \geq n_0\,, \quad \alpha > 1.$$

Отже, виконані умови **теореми 21.2.3** для ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ і збіжного ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$. Тож додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ є збіжним.

2. Якщо справджуються нерівності (21.2.32), то тоді

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1, \; n \in N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}, \; n \in N \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}, \; n \in N \;\Leftrightarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \;\; b_n := \frac{1}{n}, \;\; n \in N.$$

Отже, виконані умови **теореми 21.2.3** для ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ і розбіжного ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, з чого випливає розбіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Теорему доведено.

Теорема 21.2.11 (***логарифмічна ознака збіжності числового ряду***). *Нехай числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ складений з додатних членів.*

Тоді:

1. *Якщо виконані нерівності*

$$n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha > 1, \;\; n \in N, \qquad (21.2.34)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ збіжний.

2. *Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ задовольняють умову*

$$n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} \le 1,\ \ n \in N, \qquad (21.2.35)$$

то такий ряд розбіжний.

Доведення. 1. Нехай члени додатного числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ задовольняють нерівностям (21.2.34). Запишимо ці нерівності у вигляді

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} \ge \frac{\alpha}{n},\ \ n \in N. \qquad (21.2.36)$$

При доведенні існування класичної границі

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

були встановлені нерівності

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \ n \in N,$$

які, у свою чергу, рівносильні нерівностям

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n},\ \ n \in N \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \ \ n \in N; & (21.1.37) \\ \frac{1}{n} < \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right), \ \ n > 1, & (21.1.38) \end{cases}$$

після чого, за останніми нерівностями (21.2.36) і (21.2.37), отримаємо

$$ln\frac{a_n}{a_{n+1}} > \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\ \ n \in N \ \Leftrightarrow\ \frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha},\ \ n \in N \ \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}},\ n \in N,\ \alpha > 1.$$

Звідси, за збіжністю ряду $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 1$, й за висновком **теореми 21.2.3** випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

2. Якщо виконана умова (21.2.35), то із неї та із (21.2.38) маємо нерівності

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \frac{1}{n} < \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right), \quad n>1,$$

за якими випливає, що

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{n-1}, \ n>1, \ \Leftrightarrow \ \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}, \ n>1.$$

Це означає, що гармонічний ряд є мінорантним щодо числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Позаяк гармонічний ряд є розбіжним, то розбігається і числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Теорему доведено.

Стандартним чином, як це було зроблено у випадку ознак Даламбера та Коші, можна отримати і граничні версії логарифмічної ознаки та ознаки Раабе.

Теорема 21.2.12 (***гранична ознака Раабе збіжності числового ряду***). *Нехай числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *складено з додатних членів, і нехай існує числова границя*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \rho. \tag{21.2.39}$$

Тоді:

1) *якщо* $\rho>1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збіжний*;

2) *якщо* $\rho<1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *розбіжний.*

Теорема 21.2.13 (***гранична логарифмічна ознака збіжності числового ряду***)**.** *Нехай числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *складено з додатних членів, та нехай існує числова границя*

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha. \qquad (21.2.40)$$

Тоді:

1) *якщо* $\alpha > 1,$ *то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збіжний*;

2) *якщо* $\alpha < 1,$ *то ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *розбіжний.*

Завдання для самостійної роботи **21.2.3.** *Довести* **теорему 21.2.12** *та* **теорему 21.2.13**.

Завдання для самостійної роботи **21.2.4.** *Довести, що за умови*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1$$

додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *може бути як збіжним, так і розбіжним.*

Завдання для самостійної роботи **21.12.5.** *Довести, що за умови*

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$$

додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *може бути як збіжним, так і розбіжним.*

Завдання для самостійної роботи **21.2.6.** *Довести, що з існування числової границі* (21.2.39) *випливає існування числової границі* (21.2.40) *і навпаки, та при цьому* $\rho = \alpha$.

Приклад **21.2.8.** Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots . \qquad (21.2.41)$$

Розв'язання. Числовий ряд (21.2.41) є додатним. Знайдемо відношення загального члена ряду a_n до наступного члена ряду a_{n+1}:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} : \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1}, \ n \in N.$$

Після цього легко обчислити границі

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 \quad \text{та} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Отже, для заданого ряду граничні ознаки Коші та Даламбера не дають визначеної відповіді про його поведінку (збіжність або розбіжність). Натомість числове значення границі (21.2.39) відмінне від одиниці.

Справді,

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Таким чином, за граничною ознакою Раабе числовий ряд (21.2.41) розбігається.

***Відповідь*:** ряд (21.2.41) розбігається.

***Приклад* 21.2.9.** Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}} = e^{-1} + e^{-\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{3}} + \cdots . \qquad (21.2.42)$$

Розв'язання. Насамперед помічаємо, що числовий ряд (21.2.42) містить тільки додатні члени. Після цього можна повторити міркування з попереднього прикладу, а саме, знову почнемо дослідження заданого ряду з обчислення відношення загального члена ряду a_n до наступного члена ряду a_{n+1}:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}, \ n \in N.$$

Легко помітити, що застосування граничних ознак Коші та Даламбера в черговий раз приводить до невизначеного випадку, однак за граничною логарифмічною ознакою (**теорема 21.2.13**) маємо:

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = +\infty > 1.$$

Отже, за висновком **теореми 21.2.13** даний ряд є збіжним.

***Відповідь*:** ряд (21.2.42) збігається.

Якщо, числова послідовність членів невід'ємного ряду $a_n \geq 0,\ n \in N,$ є значеннями в цілих точках деякої незростаючої дійсної функції $f = f(x)$, визначеної на півосі $[1;\ +\infty\ )$, тобто

$$a_n = f(x)|_{x=n}\ ,\ \ n \in N,$$

то за теоремою про середнє для визначених інтегралів справджуються нерівності

$$a_{n+1} = \min_{x\in[n\ ;n+1]} f(x) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \max_{x\in[n\ ;n+1]} f(x) = a_n\ . \quad (21.2.43)$$

Отож ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, складений із чисел

$$b_n \coloneqq \int_n^{n+1} f(x)dx,\ \ n \in N,$$

мажорується числовим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ й одночасно сам є мажоруючим рядом числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Таким чином, згідно з мажорантною ознакою збіжності (**теорема 21.2.2**) числові ряди $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ або обидва є збіжними, або обидва є розбіжними, причому часткові суми $s_n^b,\ n \in N$, другого ряду утворюють неспадну числову послідовність інтегралів по відрізках $[1; n+1]$:

$$s_n^b = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx, \quad n \in N,$$

яка є збіжною тоді й лише тоді, коли невласний інтеграл першого роду від функції f по півосі $[1; +\infty)$ збігається.

Отже, за цими міркуваннями справедливе таке твердження:

Теорема 21.2.14 (***інтегральна ознака Коші−Маклорена***). *Якщо невід'ємний числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ складено зі значень в цілих точках деякої незростаючої дійсної функції f, визначеної на півосі $[1; +\infty)$, тобто*

$$a_n = f(x)|_{x=n}, \quad n \in N, \tag{21.2.44}$$

то він збігається тоді й лише тоді, коли є збіжним невласний інтеграл від цієї функції, обчислений в межах від 1 до $+\infty$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx < +\infty. \tag{21.2.45}$$

***Завдання для самостійної роботи* 21.2.7.** *Довести, що за умов* **теореми 21.2.14** *для суми $s = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ збіжного числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ справджується оцінка*

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \le s \le a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx. \tag{21.2.46}$$

***Приклад* 21.2.10.** Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n} = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \cdots \ . \tag{21.2.47}$$

Розв'язання. Не важко помітити, що числовий ряд (21.2.47) є додатним та справедлива еквівалентність

$$a_n = \frac{1}{n\ln n} \sim \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = a_{n+1}\,, \quad n \to +\infty.$$

Отже, ознаки Даламбера та Коші непридатні для дослідження збіжності заданого ряду. Таким же неплідним буде і застосування логарифмічної ознаки або ознаки Раабе. Справді,

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+1)}{\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 0 + 1 = 1.$$

Зрештою, щоб дослідити збіжність заданого числового ряду, застосуємо ознаку Коші−Маклорена.

Легко з'ясувати, що члени ряду a_n, $n \in N$, є значеннями спадної неперервної функції $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$, $x \geq 2$, обчисленими у натуральних точках $n \geq 2$. Знайдемо значення невласного інтеграла вказаної функції f по проміжку $[2\,;\,+\infty\,)$:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \ln\ln x - \ln\ln 2 = +\infty. \tag{21.2.48}$$

Оскільки невласний інтеграл (21.2.48) є розбіжним, то, за другим висновком інтегральної ознаки Коші−Маклорена, досліджуваний ряд теж розбігається.

***Відповідь*:** ряд (21.2.47) розбігається.

Звичайно, думка сумлінного дослідника замарена прискіпливим бажанням знайти настільки “повільно” збіжний чи, відповідно, розбіжний ряди, щоб із ними можна було порівнювати поведінку будь-якого іншого невід’ємного числового ряду.

Перш за все чітко означимо поняття ряду, що є повільніший за даний чи то збіжний, чи то розбіжний числовий ряд.

Означення* 21.2.1.** 1. Ч*исловий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *називають* ***збіжним повільніше *за збіжний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (*або говорять, що ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ***збігається повільніше*** *за ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$), *якщо числова послідовність залишків* $r_n^a,\ n \in N,$ *ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *є нескінченно малою послідовністю більшого порядку за послідовність залишків* $r_n^b,\ n \in N,$ *ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, *тобто*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{r_n^a}{r_n^b} = 0. \qquad (21.2.49)$$

2. *Невід’ємний числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *називають* ***розбіжним повільніше*** *за невід’ємний розбіжний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (*або говорять, що ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ***розбігається повільніше*** *за ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$), *якщо послідовність часткових сум* $s_n^a,\ n \in N,$ *ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *є нескінченно великою послідовністю більшого порядку за послідовність часткових* $s_n^b,\ n \in N,$ *ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, *тобто*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n^b}{s_n^a} = 0. \qquad (21.2.50)$$

Звісно, найпростіше порівнювати між собою порядки збіжності чи розбіжності геометричних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},\ a \neq 0.$

Справді, якщо $|q_1| < |q_2| < 1$, то за формулами (21.1.8)−(21.1.9) суми n членів геометричної прогресії легко встановити, що ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a{q_2}^{n-1}$

збігається повільніше за збіжний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a{q_1}^{n-1}$, а за умови $q_1 > q_2 \geq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a{q_2}^{n-1}$ розбігається повільніше за розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a{q_1}^{n-1}$.

Повернемося до питання про існування взірцевих (еталонних) для порівняння числових рядів.

Нехай $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ – довільний додатний збіжний числовий ряд. Означимо новий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ таким чином:

$$b_n := \sqrt{r_{n-1}^a} - \sqrt{r_n^a}\,,\ n \in N,$$

де, як і до цього, за r_n^a позначено n-й залишок ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Тоді n-м залишком ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ буде число $r_n^b = \sqrt{r_n^a}$, а тому

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{r_n^a}{r_n^b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{r_n^a}{\sqrt{r_n^a}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{r_n^a} = 0.$$

Отже, числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ збігається повільніше за ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Навпаки, нехай $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ – довільний додатний розбіжний числовий ряд. Складемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, члени якого означені за правилом

$$b_n := \sqrt{s_n^a} - \sqrt{s_{n-1}^a},\ \ n \geq 2,\ \ b_1 := \sqrt{s_1^a},$$

де $s_n^a = \sum_{k=1}^{n} a_k -$ це n-та часткова сума ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Тоді, напевно,

$s_n^b = \sqrt{s_n^a},\ n \in N$, за чим маємо:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n^b}{s_n^a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{s_n^a}}{s_n^a} = 0.$$

Отже, числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ розбігається повільніше за ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Таким чином, універсальних еталонних збіжних чи розбіжних додатних числових рядів не існує, а саме, доведено таку теорему:

Теорема 21.2.15 (***про відсутність універсальних еталонних рядів***).

1. *Для будь-якого додатного числового ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *знайдеться додатний числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *, що збігається повільніше.*

2. *Для будь-якого розбіжного додатного числового ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *знайдеться додатний числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *, який розбігається повільніше.*

Завдання для самостійної роботи **21.1.9** (***ознака Коші для монотонного ряду***). *Довести, що якщо члени додатного числового ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *утворюють спадну послідовність, то числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *є збіжним тоді й лише тоді, коли збігається ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$.

Завдання для самостійної роботи **21.2.9** (***ознака Куммера збіжності числового ряду***). *Нехай* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n}$ $-$ *довільний додатний розбіжний числовий ряд. Довести, що числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$*:*

1) *збігається, якщо послідовність, складена з чисел*

$$c_n := b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}\,,\ n \in N,$$

обмежена знизу деяким додатним числом, тобто

$$\exists\, \delta > 0:\ c_n \geq \delta,\ n \in N;$$

2) *розбігається, якщо числа* c_n , $n \in N$, *утворюють недодатну числову послідовність, тобто*

$$c_n \leq 0,\ n \in N.$$

Завдання для самостійної роботи **21.2.10** (***ознака Бертрана збіжності числового ряду***). *Нехай* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ $-$ *додатний числовий ряд, та нехай існує числова границя*

$$\beta := \lim_{n\to+\infty}\left(\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\right).$$

Довести, що числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$:

1) *збігається, якщо* $\beta > 1$;

2) *розбігається, якщо* $\beta < 1$.

***Завдання для самостійної роботи* 21.2.11 (*ознака Гауса збіжності числового ряду*).** *Нехай* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *− додатний числовий ряд, послідовні відношення членів якого можна подати у вигляді*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \gamma + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}, \quad |\theta_n| \le c < +\infty, \quad n \in N.$$

Довести, що числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$:

1) *збігається, якщо* $\gamma > 1$ *або* $\gamma = 1, \ \mu > 1$;

2) *розбігається, якщо* $\gamma < 1$ *або* $\gamma = 1, \ \mu \le 1$.

***Завдання для самостійної роботи* 21.2.12 (*узагальнена ознака Коші збіжності числового ряду*).** *Нехай* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *− невід'ємний числовий ряд, та нехай існує верхня границя*

$$r := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}\,. \tag{21.2.51}$$

Довести, що числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$:

1) *збігається, якщо* $r < 1$;

2) *розбігається, якщо* $r > 1$.

***Завдання для самостійної роботи* 21.2.13 (*узагальнена ознака Даламбера збіжності числового ряду*).** *Нехай* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *– додатний числовий ряд, та нехай існує верхня границя*

$$r := \overline{\lim_{n\to\infty}} \ \frac{a_{n+1}}{a_n}. \qquad (21.2.52)$$

Довести, що тоді числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$:

1) *збігається, якщо* $r < 1$;

2) *розбігається, якщо* $r > 1$.

***Завдання для самостійної роботи* 21.2.14 (*ознака Жаме збіжності числового ряду*).** *Довести, що*:

1) *якщо члени невід'ємного числового ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *задовольняють нерівності*

$$\frac{n}{lnn}\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \geq \gamma > 1, \ \ n \in N,$$

то ряд збігається;

2) *якщо виконані нерівності*

$$\frac{n}{lnn}\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \leq 1, \ \ n \in N,$$

то числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *розбігається.*

Завдання для самоперевірки

Дослідити на збіжність ряди:

21.2.1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)!!}{4^n \cdot n!}$.

21.2.2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} arcsin\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

21.2.3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n(n+1)}$.

21.2.4. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{(2n-1)!!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})\cdot\ldots\cdot(1+\sqrt{2n-1})}$.

21.2.5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}e^n$.

21.2.6. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{arctg(n!)}{(n+1)ln^2(n+2)}$.

21.2.7. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^{lnn}}$.

21.2.8. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln((n+1)!)}$.

Завдання для самоперевірки **21.2.9.** Чи буде збіжним числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$, якщо збігається додатний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$?

Завдання для самоперевірки **21.2.10.** Довести, що значення суми $\zeta(\alpha)$ збіжного ряду Рімана–Діріхле лежить у інтервалі $\left(\frac{1}{\alpha-1};\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$, $\alpha > 1$.

***Вказівка*:** скористатися нерівностями (21.2.46).

Відповіді на завдання для самоперевірки

21.2.1. Ряд збіжний.

21.2.2. Ряд розбіжний.

21.2.3. Ряд збіжний.

21.2.4. Ряд збіжний.

21.2.5. Ряд розбіжний.

21.2.6. Ряд збіжний.

21.2.7. Ряд збіжний.

21.2.8. Ряд розбіжний.

21.2.9. Так.

21.3. Деякі властивості невід'ємних числових рядів

***Означення* 21.3.1.** *Нехай натуральні числа* n_k, $k \epsilon N$, *утворюють деяку строго зростаючу послідовність, тобто*

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots \ .$$

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, *члени якого складені за правилами*

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + a_{n_{k-1}+3} + \cdots + a_{n_k} \ , \ k \epsilon N,$$

називають ***рядом***, ***отриманим групуванням членів*** *числового ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Наприклад, якщо $b_k = 2k$, $k \epsilon N$, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ буде отриманий з ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ групуванням послідовних пар його членів, тобто

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots \ .$$

Звісно, постає питання чи змінює групування членів ряду його збіжність та чи змінює його суму (якщо згрупований ряд збігається).

У випадку невід'ємного числового ряду відповідь отримати досить просто.

Справді, як це було зазначено, часткові суми s_n^a , $n \in N$, невід'ємного числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ складають монотонно неспадну числову послідовність, яка збігається до його суми s тоді й лише тоді, коли до цього числа s збігається і будь-яка її підпослідовність $s_{n_k}^a$, $k \epsilon N$. Проте n_k-та часткова сума ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ є k-ю частковою сумою згрупованого ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, тобто

$$s_k^b = \sum_{i=1}^{k} b_i = \sum_{i=1}^{n_k} a_i = s_{n_k}^a, \quad k \epsilon N.$$

Тому

$$s = \lim_{n \to +\infty} s_n^a = \lim_{k \to +\infty} s_{n_k}^a = \lim_{k \to +\infty} s_k^b \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n .$$

Отже, доведено твердження:

Теорема 21.3.1 (*про збіжність згрупованого ряду*). *Будь-яке групування членів невід'ємного числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ не змінює ні його збіжності, ні значення його суми s.*

Поставимо ще таке запитання: а чи змінює перестановка членів невід'ємного числового ряду його збіжність та суму?

***Означення* 21.3.2.** *Нехай відображення $\pi: N \leftrightarrow N$ є бієкцією, тобто взаємно однозначною відповідністю між усіма натуральними числами. Тоді числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\pi(n)} = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + \cdots$$

називають ***рядом, отриманим перестановкою членів*** *ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Наприклад, якщо перестановка π змінює місцями між собою послідовні парні та непарні натуральні числа, себто

$$\pi: 2k-1 \leftrightarrow 2k,\ 2k \leftrightarrow 2k-1,\ k\epsilon N,$$

то отримаємо такий переставлений ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = a_2 + a_1 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2k} + a_{2k-1} + \cdots .$$

Знайдемо відношення між частковими сумами вихідного ряду та переставленого ряду за довільної перестановки π.

Нехай m_n – це найбільше число серед перестановки перших n натуральних чисел, тобто

$$m_n \coloneqq max\{\pi(1);\ \pi(2);\ \pi(3); \dots\ \pi(n)\},\ n \in N.$$

Тоді для часткових сум числових рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ будуть виконані нерівності

$$s_n^b = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)} = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)} \leq$$

$$\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_n} = s_{m_n}^a,\ \ n \in N \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad s_n^b \leq s_{m_n}^a,\ \ n \in N,$$

за якими можна стверджувати, що зі збіжністі числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ випливає й збіжність переставленого ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, а також сума s^a першого ряду не менша суми s^b переставленого ряду, а саме:

$$0 \leq s^b \leq s^a. \tag{21.3.1}$$

У свою чергу, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ – це ряд, утворений (оберненою) перестановкою членів числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Тому за попередніми міркуваннями збіжність ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ забезпечує і збіжність переставленого з нього ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, причому для їх сум виконується нерівність

$$0 \leq s^a \leq s^b. \tag{21.3.2}$$

Із нерівностей (21.3.1)−(21.3.2) випливає, що $s^a = s^b$.

Отже, перший ряд збігається тоді й лише тоді, коли збігається і другий, та числові значення їх сум однакові, себто справджується така теорема:

Теорема 21.3.2 (***про збіжність переставленого ряду***). *Будь-яка перестановка членів невід'ємного числового ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *не змінює ні його збіжності, ні значення його суми* s.

Тепер розглянемо питання про добуток числових рядів.

Якщо перемножити дві числові суми, що містять скінчену кількість доданків, наприклад суму $\sum_{i=1}^{k} a_i$ з k доданків та суму $\sum_{j=1}^{n} b_j$ з n доданків, то одержимо суму з $n \cdot k$ доданків усіх можливих попарних добутків $a_i b_j$. Наприклад, якщо кількість доданків у сумах однакова (а саме, $n + 1$ доданок), то їх добуток можна упорядкувати таким чином

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \cdots + a_n b_n\ . \tag{21.3.3}$$

Зрозуміло, що у випадку скінченної кількості доданків не має значення як їх упорядковувати, що не можна наперед стверджувати для довільних числових рядів, тобто у випадку нескінченної кількості доданків в обох сумах, що перемножуються. Хіба що твердження **теореми 21.3.2** дає підстави очікувати незалежності значення добутку числових рядів від способу упорядкування його (ряду-добутку) членів, якщо ці ряди невід'ємні.

Для зручності запису будемо змінювати індекс членів ряду за множиною невід'ємних цілих чисел $Z_+ = N \cup \{0\}$.

Означення* 21.3.3.** 1. ***Добутком *двох числових* ***рядів*** $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ *та* $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ *називають ряд, складений з усіх можливих попарних добутків* $a_i b_j$ *членів цих рядів, які* (*попарні добутки*) *упорядковані тим чи іншим способом, тобто*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} b_j = \sum_{i,j=0}^{+\infty} a_i b_j . \qquad (21.3.4)$$

2. ***Добутком Коші*** *двох числових* ***рядів*** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *називають ряд, складений з усіх можливих попарних добутків* $a_i b_j$ *членів цих рядів, які упорядковані за правилом* (21.3.3), *тобто*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} b_j = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} . \qquad (21.3.5)$$

Добуток (21.3.4) потрібно розуміти таким чином: нехай задані дві певні перестановки $i = i(n),\ n \in Z_+$, та $j = j(n),\ n \in Z_+$, множини невід'ємних цілих чисел $Z_+ = N \cup \{0\}$, тоді n-м членом числового ряду (21.3.4) є число

$$c_n = a_{i(n)} b_{j(n)}, \quad n \in Z_+.$$

Це означає, що

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} b_j = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{i(n)} b_{j(n)} . \qquad (21.3.6)$$

Певна річ, що різним парам перестановок $i = i(\cdot)$ та $j = j(\cdot)$ відповідають добутки (21.3.6), які відрізняються за способом упорядкування своїх членів.

Теорема 21.3.3 (***про добуток невід'ємних рядів***). 1. *Якщо обидва невід'ємні числові ряди* $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ *та* $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ *є збіжними, причому збігаються відповідно до сум* s^a *та* s^b, *то і будь-який їхній добуток* (21.3.6) *теж збігається, та його сума* s^c *є добутком сум цих рядів, тобто*

$$s^c = s^a \cdot s^b. \qquad (21.3.7)$$

2. *Якщо хоч один із невід'ємних числових рядів* $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ *чи* $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ *розбігається, а другий має хоч один додатний член, то й будь-який їх добуток* (21.3.6) *теж розбігається.*

Доведення.1. Нехай $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{i(n)} b_{j(n)}$ – довільний добуток збіжних невід'ємних числових рядів $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ та $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$, та нехай числа

$$s_n^c = \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} a_{i(k)} b_{j(k)}\ , \quad n \in Z_+,$$

утворюють послідовність його часткових сум. Введемо позначення

$$m(n) \coloneqq \max_{0 \le k \le n} \{\, i(k)\, , j(k)\ \}, \quad n \in Z_+.$$

Тоді для часткових сум ряду-добутку (21.3.6) справедлива оцінка

$$0 \le s_n^c = \sum_{k=0}^{n} a_{i(k)} b_{j(k)} \le \sum_{i=0}^{m(n)} a_i \cdot \sum_{j=0}^{m(n)} b_j = s_{m(n)}^a \cdot s_{m(n)}^b\ . \qquad (21.3.8)$$

Тому зі збіжності числових рядів $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ та $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ випливає, що послідовності їх часткових сум $s_n^a,\ n \in Z_+$, та $s_n^b,\ n \in Z_+$, та будь-які їх підпослідовності $s_{m(n)}^a,\ n \in Z_+$, та $s_{m(n)}^b,\ n \in Z_+$, а також їх (підпослідовностей) добуток є обмеженими, за чим маємо обмеженість послідовності сум $s_n^c,\ n \in Z_+$, та збіжність ряду (21.3.6).

За **теоремами 21.3.1, 21.3.2** сума невід'ємного ряду (21.3.6) не залежить від способу групування та упорядкування його членів. Отже, можна згрупувати та упорядкувати члени ряду-добутку (21.3.6) так, щоб його n-та часткова сума $s_n^c,\ n \in Z_+$, була рівною добутку n-х часткових сум рядів $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ та $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$, а саме:

$$s_n^c = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0) +$$

$$+(a_0 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_0) + \cdots +$$

$$+(a_0 b_n + a_1 b_n + \cdots + a_{n-1} b_n + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 + a_n b_0) =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j = s_n^a \cdot s_n^b, \ \ n \in Z_+. \qquad (21.3.9)$$

Обчисливши границю першого та останнього виразу у рівності (21.3.9) за умови, що $n \to +\infty$, отримаємо рівність (21.3.7).

2. Нехай, наприклад, числовий ряд $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ розбігається, а доданок з номером n_0 другого ряду додатний. Це означає, що

$$\lim_{n \to +\infty} s_n^a = +\infty, \ \ b_{n_0} > 0.$$

Тоді часткові суми ряду-добутку, сформованого за правилом (21.3.9), задовольняють умову

$$s_n^c = s_n^a \cdot s_n^b > s_n^a \cdot b_{n_0}, \quad n > n_0.$$

Отже, за теоремою про границю добутку числових послідовностей за умови, коли $n \to +\infty$, отримаємо, що послідовність часткових сум ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ розбігається до $+\infty$, тобто, такий ряд-добуток є розбіжним. Тож за **теоремами 21.3.1** та **21.3.2** і всі інші можливі добутки (21.3.6) будуть розбіжними.

Теорему доведено.

Завдання для самоперевірки **21.3.1.** Чи може добуток двох невід'ємних розбіжних числових рядів бути збіжним?

Завдання для самоперевірки **21.3.2.** Чи може добуток двох невід'ємних збіжних числових рядів бути розбіжним?

Завдання для самоперевірки **21.3.3.** Нехай невід'ємні числові ряди $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ є збіжними. Довести, що

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = 0.$$

***Завдання для самоперевірки* 21.3.4.** Знайти суму невід'ємного числового ряду

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2^n} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^{n-1}} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 2^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdot 2^0}\right).$$

***Завдання для самоперевірки* 21.3.5.** Нехай числові ряди $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ є додатними. Довести, що за збіжністю рядів $\sum_{n=0}^{+\infty} {a_n}^2$ та $\sum_{n=0}^{+\infty} {b_n}^2$ маємо збіжність числового ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ та виконана нерівність

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n\right)^2 \le \sum_{n=0}^{+\infty} {a_n}^2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} {b_n}^2.$$

Вказівка: скористатися нерівністю Коші-Шварца.

***Відповідь на завдання для самоперевірки* 21.3.4:** $s = 2$.

21.4. Збіжність та властивості знакозмінних числових рядів

Звісно, найбільший інтерес викликає запитання: які з властивостей знакосталих рядів можна поширити і на числові ряди зі членами змінних знаків, а які з властивостей суттєво зміняться та через які причини.

Назвемо (для простоти термінології) ряди зі членами, що набувають числових значень різних знаків, ***знакозмінними рядами***, а ряди зі членами постійного знака – ***знакосталими***.

Розглянемо, наприклад, знакозмінний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots, \qquad (21.4.1)$$

який можна отримати з гармонічного ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots ,$$

змінивши у ньому знаки членів ряду з парним індексом.

Із границі (21.2.16) ***прикладу* 21.2.4** випливає, що

$$s_n^b = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n , \ \ n \in N,$$

де $\varepsilon_n \to 0, \ n \to +\infty$. Тоді

$$s_{2n}^a = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= (\ln 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}) - (\ln n + \gamma + \varepsilon_n) = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n , \ n \in N.$$

Отже,

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n}^a = \lim_{n\to+\infty} (ln2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) = \ln 2,$$

а значить,

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n-1}^a = \lim_{n\to+\infty} \left(s_{2n}^a + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2 + 0 = \ln 2.$$

Таким чином, числовий ряд (21.4.1) збігається до суми $s^a = ln2$, тобто

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2. \qquad (21.4.2)$$

Переставивши члени ряду (21.4.1), отримаємо інший числовий ряд, наприклад,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots . \quad (21.4.3)$$

Тоді

$$s_{3n}^{c} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + + \ \ldots + \frac{1}{2n}\right) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + + \ \ldots + \frac{1}{4n}) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ \ldots + \frac{1}{2n}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}) - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma + \varepsilon_{n}) = \frac{1}{2}(\ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_{n}),\ n \in N.$$

Отже,

$$\lim_{n\to+\infty} s_{3n}^{c} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} (\ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_{n}) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Звідси маємо:

$$\lim_{n\to+\infty} s_{3n-1}^{c} = \lim_{n\to+\infty} (s_{3n}^{a} + \frac{1}{4n}) = \frac{1}{2}\ln 2,$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_{3n-2}^{c} = \lim_{n\to+\infty} (s_{3n}^{a} + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n}) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Зрештою,

$$\lim_{n\to+\infty} s_{3n}^{c} = \lim_{n\to+\infty} s_{3n-1}^{c} = \lim_{n\to+\infty} s_{3n-2}^{c} = \frac{1}{2}\ln 2,$$

що рівносильно існуванню границі

$$\lim_{n\to+\infty} s_{n}^{c} = \frac{1}{2}\ln 2 .$$

Таким чином, переставлений з ряду (21.4.1) числовий ряд (21.4.3) збігається до іншої суми, а саме:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Напевно, у випадку ряду зі членами змінних знаків висновок **теореми 21.3.2** про збереження суми переставленого ряду не є правильним.

Можна зрозуміти чому так відбувається. У випадку невід'ємного ряду його збіжність можлива тільки при досить високій "швидкості" прямування величини членів ряду (яка однакова з їх абсолютною величиною) до нуля. Наприклад, якщо додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ мінорується числовим рядом $\varepsilon \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{nlnn}$, $(\varepsilon > 0)$, то він розбігається. Тоді як абсолютні величини збіжного числового ряду із членами різних знаків можуть прямувати до нуля як завгодно "повільно".

Справді, нехай невід'ємні числа a_n, $n \in N$, утворюють довільну нескінченно малу послідовність. Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \cdots + a_n - a_n + \cdots \qquad (21.4.4)$$

буде збіжним, тому що

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n}^b = \lim_{n\to+\infty} (a_1 - a_1 + \cdots . + a_n - a_n) = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n-1}^b = \lim_{n\to+\infty} (s_{2n}^b + a_n) = 0 + \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ збігається (до суми нуль), але при цьому абсолютні величини його членів $|b_{2n}| = |b_{2n-1}| = a_n$, $n \in N$, можуть прямувати (за $n \to +\infty$) до нуля "дуже і дуже повільно "!

Іншим типом таких рядів, схожих до тільки-но наведеного, слугують ряди Лейбніца.

***Означення* 21.4.1.** *Нехай невід'ємні числа* a_n, $n \in Z_+$, *утворюють незростаючу нескінченно малу послідовність, тобто* $a_n \downarrow 0$, $n \in Z_+$. *Тоді ряди вигляду*

$$\pm \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \tag{21.4.5}$$

називають ***рядами Лейбніца***.

Теорема 21.4.1 (***ознака Лейбніца***). *Нехай* $a_n \downarrow 0,\ n \in Z_+$.

Тоді:

1) *ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *збігається*;

2) *сума такого ряду не перевищує величини першого його члена, тобто*

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \le a_0\ . \tag{21.4.6}$$

Доведення. Нехай виконані умови теореми. Перш за все легко помітити, що часткові суми з парними номерами такого ряду (21.4.6) складають неспадну послідовність невід'ємних чисел. Справді, всі доданки згрупованої попарно суми

$$s_{2n} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n-2} - a_{2n-1} =$$

$$= (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1})$$

є невід'ємними, тому що $a_n \downarrow 0,\ n \in Z_+$, а отже, справедливі нерівності

$$a_{2n-2} \ge a_{2n-1},\quad n \in N.$$

До того ж, вказані часткові суми $s_{2n},\ n \in Z_+$, обмежені своїм першим доданком:

$$s_{2n} = a_0 - (a_1 - a_2) - \cdots - (a_{2n-3} - a_{2n-2}) - a_{2n-1} \le a_0\ ,\ \ n \in Z_+.$$

Тож послідовність часткових сум $s_{2n}\ ,\ n \in Z_+$, є збіжною, а саме:

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s \le a_0\ .$$

Це спричиняє збіжність послідовності часткових сум s_{2n+1}, $n \in Z_+$, до тієї самої границі. Справді,

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}(s_{2n} + a_{2n+1}) = s + 0 = s \le a_0 .$$

Таким чином, ряд Лейбніца (21.4.6) є збіжним, а його сума не перевищує числа a_0.

Теорему доведено.

Безпосереднім наслідком ознаки Лейбніца є таке корисне твердження:

Наслідок 21.4.1. *Нехай числовий ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ є рядом Лейбніца. Тоді будь-який його залишковий ряд $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k$ теж є рядом Лейбніца та справджується нерівність*

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k\right| \le |a_{n+1}|.$$

Розглянутий ряд (21.4.1), звичайно, є рядом Лейбніца.

Якщо невід'ємні числа a_n, $n \in N$, утворюють нескінченно малу послідовність, яка є монотонною, то числовий ряд (21.4.4) теж є рядом Лейбніца, що має суму 0. Наприклад, таким є ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-1} + \cdots = 0, \quad (21.4.7)$$

який побудований за строго спадною послідовністю дробів $a_n = \frac{1}{2n-1}$, $n \in N$. Що цікаво, перестановкою членів цього ряду можна отримати й ненульову суму переставленого ряду.

Завдання для самоперевірки **21.4.1.** Довести, що числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = 1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n-1} + \cdots ,$$

утворений перестановкою членів ряду (21.4.7) збігається до суми $s = \frac{1}{2} \ln 2$, тобто

$$1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n-1} + \cdots = \frac{1}{2} \ln 2. \quad (21.4.8)$$

Будь-який ряд Лейбніца (21.4.5) можна подати у вигляді

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n , \quad (21.4.9)$$

де невід'ємні числа $a_n,\ n \in Z_+,$ як це було домовлено, утворюють монотонну нескінченно малу послідовність, а з послідовності чисел $b_n = (-1)^n,\ n \in Z_+,$ можна скласти числовий ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, всі часткові суми $s_n^b,\ n \in Z_+,$ якого є обмеженими одним і тим самим числом, а саме:

$$\left| s_n^b \right| \leq 1,\ \ n \in Z_+.$$

Звичайно, наполегливий дослідник поставить собі запитання: а чи не досить цих умов для збіжності числового ряду вигляду (21.4.9)? Норвезький математик Нільс Генріх Абель та німецький математик Йоганн Петер Густав Лежен Діріхле першими розв'язали цю цікаву задачу.

Передусім розглянемо перетворення (тотожність), яке запропонував Абель для сум членів ряду (21.4.9). Для зручності запровадимо позначення

$$B_n^k \coloneqq b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_k ,\ \ k \geq n,\ n \in Z_+,$$

$$B_n^{n-1} \coloneqq 0,\ \ n \in Z_+,$$

за якими маємо

$$s_n^b = B_0^n, \quad n \in Z_+,$$

$$b_i = B_n^i - B_n^{i-1}, \quad n \in Z_+, \quad n \le i.$$

Після чого будь-яку різницю часткових сум ряду (21.4.9) можна подати у вигляді

$$s_{n+k} - s_n = \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\, b_i = \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i \left(B_{n+1}^i - B_{n+1}^{i-1}\right) =$$

$$= a_{n+1}(B_{n+1}^{n+1} - B_{n+1}^{n}) + a_{n+2}(B_{n+1}^{n+2} - B_{n+1}^{n+1}) + \cdots + a_{n+k}\left(B_{n+1}^{n+k} - B_{n+1}^{n+k-1`}\right) =$$

$$= (a_{n+1} - a_{n+2})B_{n+1}^{n+1} + \cdots + (a_{n+k-1} - a_{n+k})B_{n+1}^{n+k-1} + a_{n+k}B_{n+1}^{n+k} =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{n+k-1}(a_i - a_{i+1})B_{n+1}^i + a_{n+k}B_{n+1}^{n+k}, \quad n \in Z_+.$$

Остаточно перетворення Абеля сум попарних добутків набуде вигляду:

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\, b_i = \sum_{i=n+1}^{n+k-1}(a_i - a_{i+1})B_{n+1}^i + a_{n+k}B_{n+1}^{n+k}, \quad n \in Z_+. \qquad (21.4.10)$$

Теорема 21.4.2 (***ознака Діріхле збіжності числового ряду***). *Нехай*:

1) *послідовність дійсних чисел* $a_n, \ n \in Z_+,$ *є монотонною*;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$;

3) *послідовність часткових сум* $s_n^b, \ n \in Z_+,$ *числового ряду* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *обмежена*, *тобто*

$$\exists c > 0\colon \ \forall n \in Z_+ \quad \left|s_n^b\right| \le c. \qquad (21.4.11)$$

Тоді числовий ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, b_n$ *є збіжним.*

Доведення. Нехай виконано умови 1)–3). Тоді за третьою умовою теореми отримаємо, що множина всіх сум $B_n^k, \ k \ge n, \ n \in Z_+,$ теж є обмеженою. Справді,

$$\left|B_n^k\right| = \left|(B_0^{n-1} + B_n^k) - B_0^{n-1}\right| = \left|s_k^b - s_{n-1}^b\right| \le \left|s_k^b\right| + \left|s_{n-1}^b\right| = 2c,$$

$$k \ge n,\ n \in Z_+.$$

Тому перетворення Абеля сум послідовних членів ряду (21.4.9) приводить до оцінки

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\, b_i\right| \le \sum_{i=n+1}^{n+k-1} |a_i - a_{i+1}|\left|B_{n+1}^i\right| + |a_{n+k}|\left|B_{n+1}^{n+k}\right| \le$$

$$\le 2c\left(\sum_{i=n+1}^{n+k-1} |a_i - a_{i+1}| + |a_{n+k}|\right), \quad k \in Z_+,\ n \in Z_+. \qquad (21.4.12)$$

Перша умова теореми, тобто умова монотонності послідовності чисел $a_n,\ n \in Z_+,$ гарантує зберігання знака різниць $a_i - a_{i+1},\ i \in Z_+,$ що дозволяє спростити суми

$$\sum_{i=n+1}^{n+k-1} |a_i - a_{i+1}| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+k-1} (a_i - a_{i+1})\right| = |a_{n+1} - a_{n+k}|,$$

що, у свою чергу, спрощує оцінку (21.4.12) до вигляду

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\, b_i\right| \le 2c(|a_{n+1} - a_{n+k}| + |a_{n+k}|) \le 2c(|a_{n+1}| + 2|a_{n+k}|),$$

$$k,\ n \in Z_+. \quad (21.4.13)$$

Таким чином, за другою умовою теореми зі зростанням номера $n \in Z_+$ числа a_n стають як завгодно близькими до нуля, а саме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in Z_+ :\ \ \forall\, n > n_0 \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{6c}. \qquad (21.4.14)$$

Отже, за наслідками тверджень (21.4.13) та (21.4.14) отримаємо, що

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in Z_+ :\ \forall\, n > n_0\ \ \forall k \in Z_+ \quad \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\, b_i\right| < \varepsilon,$$

тобто, справджується критерій Коші збіжності числового ряду (21.4.9).

Що і треба було довести.

Теорема 21.4.3 (***ознака Абеля збіжності числового ряду***).

Нехай:

1) *послідовність дійсних чисел* $a_n,\ n \in Z_+,$ *є монотонною*;

2) *послідовність чисел* $a_n,\ n \in Z_+,$ *є обмеженою, а саме*:

$$\exists c > 0:\ \forall n \in Z_+\ |a_n| \le c;$$

3) *числовий ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *збігається.*

Тоді числовий ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, b_n$ *теж є збіжним.*

Доведення. Нехай виконані умови 1)–3). Тоді послідовність дійсний чисел $a_n,\ n \in Z_+,$ збігається до деякого числа $a \in R,$ а тому числові послідовності $(a_n - a),\ n \in Z_+,$ та $b_n,\ n \in Z_+,$ задовольняють всі три умови попередньої **теореми 21.4.2**, за висновком якої має бути збіжним числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - a)\, b_n\ ,$$

а отже, буде збіжним і ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, b_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - a)\, b_n + a\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\ ,$$

який є сумою двох збіжних рядів.

Що і треба було довести.

***Приклад* 21.4.1.** Довести, що за умови $\varepsilon > 0$ числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\alpha n}{n^{\varepsilon}} \tag{21.4.15}$$

буде збіжним.

Доведення. Якщо $\alpha = m\pi,\ m \in Z,$ то всі члени ряду (21.4.15) дорівнюють нулю, а отже, ряд збігається.

Нехай $\alpha \ne m\pi,\ m \in Z,$ позначимо

$$a_n := \frac{1}{n^{\varepsilon}}, \quad b_n \coloneqq \sin\alpha n, \ \ n \in N.$$

Тоді числові послідовності $\left\{ a_n := \frac{1}{n^{\varepsilon}} \middle| \ n \in N \right\}$ та $\{ b_n \coloneqq \sin\alpha n \mid n \in N\}$ є такими, що задовольняють умови 1)–3) ознаки Діріхле.

Справді, по-перше, послідовність $\{ a_n \mid n \in N\}$ строго монотонно спадає до нуля.

По-друге, не важко пересвідчитися, що часткові суми $s_n^b, n \in N$, обмежені: спростивши часткові суми

$$s_n^b = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{1}{2sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} (2\sin\frac{\alpha}{2}\sin k\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} (\cos(2k-1)\frac{\alpha}{2} - \cos(2k+1)\frac{\alpha}{2}) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} (\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2} + \cos\frac{5\alpha}{2} - \cos\frac{7\alpha}{2} +$$

$$+ \cdots + \cos(2k-1)\frac{\alpha}{2} - \cos(2k+1)\frac{\alpha}{2}) = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos(2k+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

отримаємо

$$\left|s_n^b\right| = \left|\frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos(2k+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \le \frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\cos(2k+1)\frac{\alpha}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}, \ \ n \in N.$$

Отже, за висновком **теореми 21.4.2** числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\alpha n}{n^{\varepsilon}}$$

збігається.

Що і потрібно було довести.

***Завдання для самоперевірки* 21.4.2.** Довести, що за умови $\varepsilon > 0$ та $\alpha \neq 2k\pi,\ k\epsilon Z,$ числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\alpha n}{n^{\varepsilon}} \tag{21.4.16}$$

буде збіжним.

***Завдання для самоперевірки* 21.4.3.** Нехай послідовність чисел $a_n,\ n \in N$, є монотонною нескінченно малою послідовністю. Довести, що за умови $\alpha \neq 2k\pi,\ k\epsilon N,$ числові ряди

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\alpha n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\alpha n \tag{21.4.17}$$

разом є збіжними.

Слід зауважити, що ***умова монотонності*** послідовності чисел $a_n,\ n \in Z_+$, в умовах **теорем 21.4.1−21.4.3** ***є суттєвою***.

Переконаємося у цьому, розглянувши такий контрприклад.

***Приклад* 21.4.2.** Довести, що числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}-(-1)^n} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} + \cdots \tag{21.4.18}$$

буде розбіжним.

Доведення. Перепишемо члени ряду у вигляді

$$(-1)^{n-1}a_n = (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+1}+(-1)^n}{(\sqrt{n+1}-(-1)^n)(\sqrt{n+1}+(-1)^n)} = (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+1}+(-1)^n}{n}.$$

Після цього ряд (21.4.18) можна подати як різницю двох числових рядів

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n},$$

причому перший ряд є рядом Лейбніца, а тому збігається, другий – гармонічний, розбігається.

Отже, за теоремою про збіжність суми числових рядів вказаний ряд (21.4.18) є розбіжним.

Що і треба було довести.

Хоч послідовність чисел $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-(-1)^n}$, $n \in N$, є нескінченно малою числовою послідовністю, проте не є монотонною, тому умови ознаки Лейбніца для знакопереміжного ряду (21.4.18) не були виконані, що і приводить до розбіжності ряду.

Ще раз зазначимо, що достатні умови збіжності, які накладаються на знакозмінний ряд в ознаках Лейбніца та Абеля−Діріхле, допускають як завгодно малий порядок малості послідовності абсолютних величин членів ряду, тоді як у випадку невід'ємних рядів не так. Наприклад, гармонічний ряд не може мажорувати ряд, що збігається. Отже, порядок малості послідовності членів збіжного невід'ємного ряду має бути принаймні більшим від порядку малості послідовності членів гармонічного ряду.

Легко припустити, що якщо деякий числовий ряд утворений із збіжного невід'ємного ряду зміною знаків перед членами останнього, то такий ряд повинен збігатися, причому не повільніше за невід'ємний.

Це твердження може бути строго сформульоване й доведене. До того ж, доведення стає зовсім простим, якщо помітити, що будь-який числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ можна розвинути у різницю двох невід'ємних рядів, члени яких, складені з невід'ємних та з від'ємних членів ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Уведемо відповідні позначення та будемо називати ***невід'ємною*** чи ***від'ємною частиною члена ряду*** a_n відповідно числа

$$u_n := \left[\begin{array}{ll} a_n, & a_n \geq 0; \\ 0, & a_n < 0, \end{array}\right. \quad v_n := \left[\begin{array}{ll} 0, & a_n \geq 0\,; \\ -a_n, & a_n < 0. \end{array}\right. \qquad (21.4.19)$$

У такому разі

$$a_n = u_n - v_n, \quad |a_n| = u_n + v_n, \;\; n \in N, \qquad (21.4.20)$$

причому

$$0 \leq u_n \leq |a_n|, \;\; 0 \leq v_n \leq |a_n|, \;\; n \in N. \qquad (21.4.21)$$

Теорема 21.4.4 (***ознака збіжності ряду у термінах модулів його членів***). *Нехай збігається ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$, *складений з абсолютних величин членів числового ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *є збіжним, а його сума становить різницю сум теж збіжних рядів, складених відповідно з невід'ємних та від'ємних частин його членів, і справджується нерівність*

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|.$$

Формальною мовою це означає, що

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| < +\infty \;\Rightarrow \begin{cases} \left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| < +\infty; \\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{n=1}^{+\infty} v_n\,. \end{cases} \qquad (21.4.22)$$

Доведення. Нехай збігається невід'ємний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|. \qquad (21.4.23)$$

Позаяк з нерівностей (21.4.21) випливає, що збіжний ряд (21.4.23) мажорує невід'ємні ряди $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, то ці ряди збігаються, тож є збіжною і їх різниця

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - v_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \ .$$

Зокрема, нерівності для часткових сум

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|a_k|\,, \ \ n \in N,$$

спричиняють нерівність для сум рядів (21.4.22).

Теорему доведено.

Означення* 21.4.2.** 1. *Числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *називають* ***абсолютно збіжним *та кажуть, що він* ***збігається абсолютно****, якщо збігається ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$, *складений із абсолютних величин його членів.*

2. *Збіжний числовий ряд називають* ***умовно збіжним*** *та кажуть, що він* ***збігається умовно****, якщо ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$*, складений з абсолютних величин його членів, є розбіжним, а сам ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збігається.*

***Приклад* 21.4.3.** Дослідити: умовно чи абсолютно збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\alpha n}{n^{\varepsilon}}\,, \quad \varepsilon > 0, \ \alpha \ne k\pi, \ k\epsilon Z. \qquad (21.4.24)$$

Розв'язання. Збіжність числового ряду (21.4.24) було встановлено раніше (***приклад* 21.4.1**).

Якщо $\varepsilon > 1$, то невід'ємний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ мажорується збіжним рядом Рімана−Діріхле $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}}$, що обумовлює абсолютну збіжність заданого ряду (21.4.24).

Нехай $0 < \varepsilon \le 1$. Оскільки справедлива нерівність

$$|a_n| = \frac{|\sin\alpha n|}{n^{\varepsilon}} \ge \frac{\sin^2\alpha n}{n^{\varepsilon}}, \ \ n \in N,$$

то невід'ємний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ мажорує числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha n}{n^\varepsilon}$, який є розбіжним як різниця розбіжного та збіжного числових рядів, а саме:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha n}{n^\varepsilon}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\varepsilon}-\ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2\alpha n}{n^\varepsilon}\,.$$

Таким чином, за мажорантною ознакою порівняння збіжності числових рядів ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ теж є розбіжним.

Отже, за умови $0<\varepsilon\le 1$ числовий ряд (21.4.24) збігається умовно.

Відповідь**:** ряд (21.4.24) збігається умовно, якщо $0<\varepsilon\le 1$, та збігається абсолютно, коли $\varepsilon>1$.

Приклад **21.4.4.** Дослідити на умовну та абсолютну збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\sqrt{n+1}}\,. \tag{21.4.25}$$

Розв'язання. Можна помітити, що

$$\frac{\pi n^2}{n+1}\sim\pi n\,,\quad n\to+\infty,$$

тому значення чисел $\cos\frac{\pi n^2}{n+1},\ n\in N,$ близькі до чисел $(-1)^n$. Залишається лише знайти точний вираз перших чисел через другі, здогадавшись зсунути аргумент косинуса на πn, а саме:

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1}=\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}-\pi n+\pi n\right)=(-1)^n\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}-\pi n\right)=$$

$$=(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right),\ n\in N.$$

Після чого ряд (21.4.25) можна подати у вигляді $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, b_n$, причому множина чисел $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)$, $n \in N$, утворює монотонну обмежену послідовність, а числовий ряд, складений із членів $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $n \in N$, є рядом Лейбніца, що зумовлює його збіжність.

Отже, за ознакою Абеля (**теорема 21.4.3**) числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, b_n$ теж збігається.

Зрозуміло, що невід'ємний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|$ є розбіжним, що доводиться так само, як і в попередньому прикладі:

$$|c_n| = \left|\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right| \geq \frac{\cos^2\frac{\pi n^2}{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} + \frac{\cos\frac{2\pi n^2}{n+1}}{2\sqrt{n+1}},\ \ n \in N.$$

Таким чином, досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ збігається умовно.

Відповідь**:** ряд (21.4.25) є умовно збіжним.

Завдання для самостійної роботи **21.4.1.** *Нехай* $\{a_n\, |n \in N\}$ *− це монотонна нескінченно мала числова послідовність, така, що складений з неї ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *розбігається. Довести, що тоді ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{\pi n^2}{n+1}$$

збігається умовно.

Теорема 21.4.5 (*про абсолютну та умовну збіжність числових рядів*).

1. *Числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збігається абсолютно тоді й лише тоді, коли збігаються обидва невід'ємні ряди* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *, які складені відповідно з невід'ємних та від'ємних частин його членів.*

2. *Якщо числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збігається умовно, то обидва невід'ємні ряди* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *, складені відповідно з невід'ємних та від'ємних частин його членів, є розбіжними.*

Доведення. 1. За доведенням **теореми 21.4.4** умова збіжності ряду $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ є достатньою для збіжності рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ (що зумовлює збіжність ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$).

Навпаки, якщо ряди $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ збігаються, то, певна річ, збігається й сума цих рядів та

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \, .$$

Отже, перше твердження теореми доведено.

2. Друге твердження теореми доведемо від супротивного. Припустимо, що ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ є збіжним, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ – розбіжним, та при цьому хоч один із рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ чи $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ збігається. Наприклад, нехай збіжним, за припущенням, буде ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Тоді буде збіжним і другий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, який є різницею збіжних рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, а саме:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \, .$$

У такому разі буде збіжною також і сума рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, тобто збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \, ,$$

що неможливо відповідно до вимоги умовної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Отже, припущення збіжності хоч одного з рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ чи $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ викликає суперечність.

Теорему доведено.

***Завдання для самостійної роботи* 21.4.2.** *Довести, що коли числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - v_n)$ *збігається умовно, то існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Таким чином, абсолютна збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ рівносильна обопільній збіжності невід'ємних рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, і чинності рівності

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{n=1}^{+\infty} v_n\ . \qquad (21.4.26)$$

Зрозуміло, що будь-які групування чи перестановка членів ряду у лівій частині виразу (1.136), приводить до того ж групування чи тієї ж самої перестановки членів обох рядів, записаних у правій частині рівності (21.4.26). Проте такі перетворення невід'ємних рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ не змінюють значення їх суми, отже, не змінює своєї суми після цих перетворень і ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. У підсумку доведено таку теорему:

Теорема 21.4.6 (*про групування та перестановку членів абсолютно збіжного ряду*). *Якщо числовий ряд збігається абсолютно, то будь-яке групування чи перестановка його членів не приводить до зміни значення суми ряду.*

Звісно, **теорема 21.4.6** дає змогу довести твердження про добуток знакозмінних числових рядів, подібне до **теореми 21.3.13**. Справді, потрібно тільки в умові згаданої теореми замінити невід'ємні ряди на знакозмінні числові ряди, що абсолютно збігаються, та "трішечки" підправити оцінку (21.3.8) частинної суми s_n^c ряду-добутку.

Теорема 21.4.7 (***про добуток знакозмінних рядів***). *Якщо обидва знакозмінні числові ряди* $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ *та* $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ *є абсолютно збіжними і збігаються відповідно до сум* s^a *та* s^b, *то й будь-який їх добуток теж збігається абсолютно, а його сума* s^c *є добутком сум цих рядів*:

$$s^c = s^a \cdot s^b. \qquad (21.4.27)$$

Доведення. Нехай знакозмінні числові ряди $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ та $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ є абсолютно збіжними, що за означенням рівносильно збіжності до відповідних сум невід'ємних рядів, складених із модулів членів рядів $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ та $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$:

$$s^{|a|} = \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| < +\infty, \quad s^{|b|} = \sum_{j=0}^{+\infty} |b_j| < +\infty.$$

Нехай ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{i(n)} b_{j(n)} \qquad (21.4.28)$$

є довільним добутком заданих числових рядів $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ та $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$. Як і раніше, введемо позначення

$$m(n) \coloneqq \max_{0 \le k \le n} \{\, i(k)\,, j(k)\ \}, \quad n \in Z_+.$$

З огляду на це, для часткових сум числового ряду, складеного з модулів членів ряду-добутку (21.4.26), справджується оцінка

$$s_n^{|c|} = \sum_{k=0}^{n} \left|a_{i(k)} b_{j(k)}\right| \le \sum_{i=0}^{m(n)} |a_i| \cdot \sum_{j=0}^{m(n)} |b_j| = s_{m(n)}^{|a|} \cdot s_{m(n)}^{|b|} \le$$

$$\le s^{|a|} \cdot s^{|b|} < +\infty, \ \ n \in Z_+,$$

яка зумовлює абсолютну збіжність ряду (21.4.28).

Отже, за висновком **теореми 21.4.4** сума ряду (21.4.28) не залежить від групування та упорядкування його членів. Зрештою, як це було зроблено і під час доведення **теореми 21.3.3**, згрупуємо та упорядкуємо члени ряду-добутку так, щоб його n-та часткова сума s_n^c, $n \in Z_+$, була рівною добутку n-х часткових сум рядів $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ та $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$:

$$s_n^c = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_1 + a_1b_0) +$$

$$+(a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0) + \cdots +$$

$$+(a_0b_n + a_1b_n + \cdots + a_{n-1}b_n + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \cdots + a_nb_1 + a_nb_0) =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n} a_ib_j = s_n^a \cdot s_n^b, \;\; n \in Z_+. \qquad (21.4.29)$$

Обчисливши границю лівої та правої частини рівності (21.4.29) за умови, коли $n \to +\infty$, отримаємо твердження (21.4.27).

Теорему доведено.

Зрозуміло, що розглянуті числові ряди (21.4.1), (21.4.3), (21.4.7) та (21.4.8) є умовно збіжними рядами, інакше їх сума не залежала б від перестановок їх членів. Закономірно постає питання, наскільки потужною може бути множина сум числових рядів, отриманих від переставляння членів того чи іншого умовно збіжного числового ряду. Відповідь на нього отримаємо з наступної теореми.

Теорема 21.4.8 (*теорема Рімана про суму умовно збіжного ряду*). *Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігається умовно, то яке б не було дійсне число $s \in R$ або $s = +\infty$ чи $s = -\infty$, то знайдеться така перестановка членів ряду, що переставлений ряд буде збігатися до суми s.*

Доведення. Нехай числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ є умовно збіжним. Запишемо його у вигляді

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(u_n' - v_n'),$$

де u_n' − це невід'ємна частина члена ряду a_n, а v_n' − від'ємна. Причому, за висновком **теореми 21.4.5**, ряди, складені з цих невід'ємних чисел, розбігаються:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n' = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} v_n' = +\infty. \tag{21.4.30}$$

До того ж, з необхідної умови збіжності ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ випливає, що

$$|a_n| = (u_n' + v_n') \to 0, \quad n \to +\infty,$$

а це можливо лише за умови

$$u_n' \to 0, \quad v_n' \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Вилучимо з кожного ряду (21.4.30) нульові доданки, зберігши упорядкування членів ряду, що залишились. Отримаємо відповідно два нові вже додатні ряди $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ такі, що

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = +\infty, \tag{21.4.31}$$

та

$$u_n \to 0, \quad v_n \to 0, \quad n \to +\infty, \tag{21.4.32}$$

причому кожен член ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ однаковий тільки одним з елементів однієї з двох числових послідовностей $\{u_n \mid n \in N\}$ чи $\{v_n \mid n \in N\}$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $s = +\infty$. Відповідно до умови (21.4.31) знайдеться таке число $k_1 \in N$, що

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_i - v_1 \geq 1.$$

Позаяк залишковий ряд $\sum_{i=k_1+1}^{+\infty} u_i$ теж має суму $+\infty$, то, у свою чергу, знайдеться наступне число $k_2 \in N$ таке, що

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_i - v_1 + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} u_i - v_2 \geq 2.$$

Продовжуючи цей процес і надалі, можна побудувати таку послідовність натуральних чисел $k_n,\ n \in N,$ для кожного елемента якої справедлива умова

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_i - v_1 + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} u_i - v_2 + \cdots + \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} u_i - v_n \geq n.$$

Тож ряд, складений запропонованим способом з елементів послідовностей $\{u_n\ |n \in N\}$ та $\{v_n\ |n \in N\}$, себто числовий ряд

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_i - v_1 + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} u_i - v_2 + \cdots + \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} u_i - v_n + \cdots, \quad (21.4.33)$$

містить рівно по одному разу кожен член вихідного ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ та розбігається до суми $s = +\infty$.

Зрештою, доповнивши ряд (21.4.33) вилученими нульовими членами первісного ряду, одержимо такий переставлений ряд з ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, який має бажану суму $s = +\infty$.

Розглянемо тепер випадок, коли $s \geq 0$. Побудуємо алгоритм упорядкування членів ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, подібний до попереднього.

Знайдемо найменше число $k_1 \in N$ таке, щоб виконувалась нерівність

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_i > s.$$

Оскільки число $k_1 \in N$ найменше з можливих, то це означає, що справедливі нерівності

$$\sum_{i=1}^{k_1-1} u_i \leq s, \quad \sum_{i=1}^{k_1} u_i - s \leq u_{k_1}.$$

На другому кроці шукаємо найменше число $m_1 \in N$ таке, щоб справджувалась умова

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_i - \sum_{i=1}^{m_1} v_i \leq s$$

Знову-таки, позаяк число $m_1 \in N$ найменше з можливих, то виконуються нерівності

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_i - \sum_{i=1}^{m_1-1} v_i > s, \quad s - \left(\sum_{i=1}^{k_1} u_i - \sum_{i=1}^{m_1} v_i\right) < v_{m_1}.$$

Тож побудована пара натуральних чисел (k_1, m_1) така, що виконані умови

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_i - \sum_{i=1}^{m_1} v_i \leq s < \sum_{i=1}^{k_1} u_i$$

та

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_i - s \leq u_{k_1}, \quad s - \left(\sum_{i=1}^{k_1} u_i - \sum_{i=1}^{m_1} v_i\right) < v_{m_1}.$$

Так само знаходимо другу пару натуральних чисел (k_2, m_2), для якої справджуються нерівності

$$s < \sum_{i=1}^{k_1} u_i - \sum_{i=1}^{m_1} v_i + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} u_i \,,$$

$$\sum_{i=1}^{k_1} u_i - \sum_{i=1}^{m_1} v_i + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} u_i - \sum_{i=m_1+1}^{m_2} v_i \leq s$$

разом з нерівностями

$$\left(\sum_{i=1}^{k_1} u_i - \sum_{i=1}^{m_1} v_i + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} u_i\right) - s \leq u_{k_2},$$

$$s - \left(\sum_{i=1}^{k_1} u_i - \sum_{i=1}^{m_1} v_i + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} u_i - \sum_{i=m_1+1}^{m_2} v_i\right) < v_{m_2}.$$

Продовжуючи діяти й далі подібним чином, отримаємо нескінченну послідовність пар натуральних чисел $(k_n\,,\ m_n)$, $n \in N$, з відповідними до вказаних вище властивостями щодо сум членів рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Для спрощення запису вказаних нерівностей введемо позначення

$$s_n^u \coloneqq \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} u_i \,, \quad s_n^v \coloneqq \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} v_i \,, \quad n \in N. \qquad (21.4.34)$$

Тоді, за позначеннями (21.4.34), побудована послідовність пар натуральних чисел $(k_n\,,\ m_n)$, $n \in N$, буде такою, що

$$s_1^u - s_1^v + \cdots + s_n^u - s_n^v \le s < s_1^u - s_1^v + \cdots + s_n^u\ , \ \ n \in N, \qquad (21.4.35)$$

$$(s_1^u - s_1^v + \cdots + s_n^u) - s \le u_{k_n}, \ \ n \in N, \qquad (21.4.36)$$

$$s - \ (s_1^u - s_1^v + \cdots + s_n^u - s_n^v) < v_{m_n}, \ \ n \in N. \qquad (21.4.37)$$

Само собою, збіжність рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ спричиняє умову

$$u_{k_n} \to 0, \ \ v_{m_n} \to 0, \ \ n \to +\infty,$$

тож ряд

$$s_1^u - s_1^v + \cdots + s_n^u - s_n^v + \cdots =$$

$$= \sum_{i=1}^{k_1} u_i - \sum_{i=1}^{m_1} v_i + \cdots + \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} u_i - \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} v_i + \cdots \qquad (21.4.38)$$

збігається до заданої суми $s \ge 0$.

Зрозуміло, що знайдений числовий ряд (21.4.38) є шуканим рядом, отриманий перестановкою вихідного ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Нехай $s < 0$. Розглянемо числовий ряд $(-\sum_{n=1}^{+\infty} a_n)$, члени якого, за доведеним вище, можна переставити так, щоб переставлений ряд $\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} a_{i(n)}\right)$ збігався до додатного числа $(-s) > 0$. Однак це якраз і означає, що ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{i(n)}$, отриманий тією самою перестановкою членів вихідного ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, що й попередній ряд $\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} a_{i(n)}\right)$, буде збігатися до від'ємного числа $s < 0$.

Теорему доведено.

***Завдання для самостійної роботи* 21.4.3.** *Довести, що коли числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігається умовно, то його члени можна переставити так, щоб послідовність його часткових сум була обмежена, але на мала границі.*

Із твердження Рімана можна зробити на висновок, що у випадку, коли числові ряди $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ не є абсолютно збіжними, то в загальній ситуації про результат їх множення не можна стверджувати щось напевно.

Розглянемо найпростіший приклад. Нехай задано збіжний до суми нуль числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots , \qquad (21.4.39)$$

та розбіжний до суми $+\infty$ невід'ємний ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots . \qquad (21.4.40)$$

Зрозуміло, що одним із добутків цих рядів буде ряд (21.4.7):

$$1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-1} + \cdots = 0,$$

тоді як інший добуток цих самих рядів матиме вигляд (21.4.8):

$$1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n-1} + \cdots = \frac{1}{2} ln2.$$

Добуток Коші заданих рядів (21.4.39) і (21.4.40) буде давати ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_i b_{n-k} = \ a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0) + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} + \cdots ,$$

сума якого знову дає число нуль.

Справді, маємо

$$s_{2n+1}^c = 1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n+1}, \ n \in Z_+,$$

$$s_{2n}^c = s_{2n+1}^c + \frac{1}{2n-1}, \ \ n \in N,$$

що зумовлює

$$s^c = \lim_{n\to+\infty} s_n^c = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1}^c = \lim_{n\to+\infty} s_{2n}^c = 0.$$

Теорема Рімана (**теорема 21.4.8**) свідчить про те, що добуток рядів (21.4.39) та (21.4.40) може набувати будь-якого скінченного дійсного чи нескінченного значення, залежно від упорядкування його членів.

Розглянемо ще один повчальний приклад.

***Приклад* 21.4.5.** Довести, що квадрат у сенсі Коші збіжного ряду

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots \qquad (21.4.41)$$

є розбіжним числовим рядом.

Доведення. Легко помітити, що заданий ряд збігається умовно. Справді, по-перше, ряд (21.4.41) є рядом Лейбніца, а отже, він збігається. По-друге, ряд, складений з модулів ряду (21.4.41), є розбіжним рядом Рімана−Діріхле з показником степеня $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Квадрат ряду, а саме добуток за Коші ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ на самого себе, обчислюють за правилом

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(-1)^{n-k}}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \right).$$

Оцінимо модуль n-го члена ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$:

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = 1, \quad n \in Z_+. \qquad (21.4.42)$$

З нерівності (21.4.42) випливає, що не виконується необхідна умова збіжності ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, тобто

$$\lim_{n\to+\infty} c_n \neq 0.$$

Отже, ряд $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)^2$ розбіжний.

Що і потрібно було довести.

***Завдання для самостійної роботи* 21.4.4.** *Довести, що числові ряди*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

розбігаються, але їх добуток Коші збіжний.

***Завдання для самостійної роботи* 21.4.5 (*теорема Мартенса*).** *Довести, що за умови збіжності числового ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ до деякої суми $a \in R$ та абсолютної збіжності числового ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ до деякої суми $b \in R$ їх ряд-добуток Коші збігається до суми $s = ab$.*

***Завдання для самостійної роботи* 21.4.6 (*теорема Абеля*).** *Довести, що за умов збіжності числових рядів* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *та* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *відповідно до сум* $a \in R$ *і* $b \in R$ *та збіжності їх ряду-добутку Коші до суми* s *випливає рівність*

$$s = ab.$$

***Завдання для самоперевірки* 21.4.2.** Нехай монотонна послідовність невід'ємних чисел $a_n,\ n \in N,$ є нескінченно малою. Довести, що тоді ряд

$$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 + a_6 - a_7 - a_8 + \cdots$$

є збіжним.

***Вказівка*:** застосувати ознаку Діріхле до послідовності $\{a_n\ |n \in N\}$ та ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \cdots\ .$$

***Завдання для самоперевірки* 21.4.3.** Нехай числова послідовність $\{c_n\ |n \in N\}$ є обмеженою. Довести, що тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n - c_{n+1}}{\sqrt{n}}$$

є збіжним.

***Вказівка*:** застосувати ознаку Діріхле до числової послідовності $\left\{a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ |n \in N\right\}$ та до ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n - c_{n+1})$.

***Завдання для самоперевірки* 21.4.4.** Довести, що збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{arctg(\ln n) - arctg(\ln(n+1))}{\sqrt{n}}\ .$$

***Вказівка*:** розглянути послідовність $\{c_n = arctg(\ln n) \,|n \in N\}$, та застосувати висновок попереднього завдання.

***Завдання для самоперевірки* 21.4.5.** Нехай будь-яка перестановка

$i = i(n),\ n \in N,$ натурального ряду чисел приводить числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ до збіжного ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{i(n)}$. Довести, що тоді ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігається абсолютно.

***Вказівка*:** якщо хоч один ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{i(n)}$ є збіжним, то тоді ряди $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, складені з невід'ємних та від'ємних частин членів ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, або обидва збігаються, або обидва розбігаються; показати, що за теоремою Рімана останнє припущення приводить до суперечності.

***Завдання для самоперевірки* 21.4.6.** Нехай додатна числова послідовність $\{\, a_n \mid\ n \in N\}$ монотонно спадає до нуля, також покладемо

$$b_n := \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ ,\ \ c_n := \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\ ,\ \ \ n \in N.$$

Довести, що тоді числові ряди $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$ та $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n c_n$ збігаються.

***Вказівка*:** показати, що послідовності, складені із чисел $b_n,\ n \in N$, та відповідно із чисел $c_n,\ n \in N,$ є монотонно спадними.

***Завдання для самоперевірки* 21.4.7.** Дослідити на умовну та абсолютну збіжність числові ряди

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi \sqrt[k]{n^k+1}\right), \qquad (21.4.43)$$

якщо $k \in N,\ k \geq 2.$

Відповідь: ряд (21.4.43) збіжний умовно, якщо $k = 2$, та збігається абсолютно, коли $k > 2$.

Вказівка: показати, що

$$\sin\left(\pi\sqrt[k]{n^k+1}\right) = (-1)^n \sin\left(\pi(\sqrt[k]{n^k+1} - n)\right).$$

Завдання для самоперевірки **21.4.8.** Нехай числові ряди $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ збігаються абсолютно. Довести існування границі

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + a_{n-2}b_2 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n\right) = 0.$$

Вказівка: згрупувати абсолютно збіжний ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ за членами $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, $n \in Z_+$, та застосувати необхідну умову збіжності числового ряду $\sum_{i=0}^{+\infty} c_n$.

Завдання для самоперевірки **21.4.9.** Довести існування границі

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{arctg(n+1) - arctgn}{\ln^2 2} + \frac{arctgn - arctg(n-1)}{2\ln^2 3} + \cdots + \frac{arctg1}{(n+1)\ln^2(n+2)}\right) = 0.$$

Вказівка: розглянути ряди

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(arctg(n+1) - arctgn),$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+2)}$$

та застосувати висновок попереднього завдання.

Завдання для самоперевірки

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність числові ряди:

21.4.10. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{arctg(n+1)}}$.

21.4.11. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\ln(n+1)}}$.

21.4.12. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{\ln^3(n+1)}}$.

21.4.13. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-n)^{n-1}}{(2n)!}$.

21.4.14. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n+2}}$.

21.4.15. $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\pi+\frac{\pi}{4})arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

21.4.10. Ряд розбігається.

21.4.11. Ряд збігається умовно.

21.4.12. Ряд збігається абсолютно.

21.4.13. Ряд збігається абсолютно.

21.4.14. Ряд розбігається.

21.4.15. Ряд збігається умовно.

21.5. Нескінченні числові добутки

Означення 21.5.1. ***Нескінченним числовим добутком*** *називають формальний вираз*

$$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n = a_1\cdot a_2\cdot \ldots \cdot a_n\cdot \ldots \quad . \qquad (21.5.1)$$

Це означає, що розглядають дві числові послідовності, а саме, послідовність ***членів (елементів) добутку*** $\{a_n \in R \mid n \in N\}$ *та послідовність* ***часткових (частинних) добутків*** $\{p_n \in R \mid n \in N\}$, *де*

$$p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n\,, \quad n \in N. \tag{21.5.2}$$

Причому, якщо існує границя

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k\,, \tag{21.5.3}$$

то її називають ***значенням добутку*** (21. 5.1) *та позначають*

$$p = \prod_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \ldots\ .$$

Якщо послідовність часткових добутків $\{p_n \in R \mid n \in N\}$ *збігається до числа, відмінного від нуля, тобто, границя* (21.5.3) *є скінченною та не нульовою, то нескінченний добуток* (21. 5.1) *називають* ***збіжним*** *та кажуть, що добуток* ***збігається***. *Інакше нескінчений добуток називають* ***розбіжним***.

Залежність

$$a_n = f(n), \;\; n \in N,$$

називають ***загальним членом добутку*** *або його* ***n-м членом***.

Одразу стає зрозуміло, що коли серед елементів послідовності $\{a_n \in R \mid n \in N\}$ є хоч один раз число нуль або нескінченна кількість від'ємних чисел, то нескінчений добуток (21.5.1) буде розбіжним. Тож, вилучаючи ці тривіальні випадки, будемо розглядати нескінченні добутки тільки з додатними членами, тобто ***вважатимемо, що***

$$\forall n \in N\colon \;\; a_n > 0. \tag{21.5.4}$$

***Приклад* 21.5.1.** Знайти значення добутку та зробити висновок про його збіжність:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right). \qquad (21.5.5)$$

Розв'язання. Перепишемо загальний член добутку у зручнішому вигляді

$$a_n = 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}, \quad n \in N,$$

тоді

$$p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot \ldots \cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n} = n+1, \ n \in N.$$

Отже,

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty.$$

***Відповідь*:** нескінченний числовий добуток (21.5.5) розбігається до значення $p = +\infty$.

***Приклад* 21.5.2.** Знайти значення добутку та зробити висновок про його збіжність:

$$\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = \prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+x^{2^n}\right) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots, \quad x > -1. \qquad (21.5.6)$$

Розв'язання. Перш за все спростимо вираз n-го часткового добутку. Якщо $x \neq 1$, то одночасно домноживши і розділивши первісний вигляд p_n на множник $1-x$, маємо:

$$p_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots.\left(1+x^{2^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)}{1-x}(1+x^2)(1+x^4)\dots.\left(1+x^{2^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1-x}(1+x^4)\dots.\left(1+x^{2^{n-1}}\right) = \dots = \frac{1+x^{2^n}}{1-x}, \quad n \in N.$$

Коли $x = 1$, то

$$p_n = 2^n, \quad n \in N.$$

Отже,

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1; \\ \\ +\infty, \quad x \geq 1. \end{array}\right.$$

Відповідь: добуток (21.5.6) збігається до значення $p = \frac{1}{1-x}$, якщо $|x| < 1$, та розбігається до значення $p = +\infty$, коли $x \geq 1$.

Перепишемо вираз (21.5.2), застосувавши до членів n-го частинного добутку p_n основну логарифмічну тотожність, матимемо:

$$p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = e^{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}, \quad n \in N,$$

а це зумовлює рівності

$$p_n = e^{s_n^b}, \quad s_n^b = \ln p_n, \quad n \in N, \qquad (21.5.7)$$

у яких $s_n^b = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k$ – це n-та часткова сума числового ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n + \dots \quad . \qquad (21.5.8)$$

Оскільки показникова та логарифмічна функції неперервні, то за умови, що $n \to +\infty$, границя лівої частини рівностей (21. 5.7) існує тоді й лише тоді, коли існує границя правої частини.

Числовий ряд (21.5.8) будемо називати ***логарифмічним рядом, спорідненим*** з нескінченним добутком (21.5.1).

Таким чином, справджується така теорема:

Теорема 21.5.1 (*про поєднування збіжностей нескінченного добутку та спорідненого логарифмічного ряду*).

1. *Нескінченний добуток є збіжним тоді й лише тоді, коли збігається споріднений з ним логарифмічний ряд. Причому, якщо нескінченний добуток збігається до значення* $p > 0$, *а споріднений логарифмічний ряд має суму* $b \in R$, *то справедливі рівності* $b = lnp$ *та* $p = e^b$, *тобто*

$$0 < \prod_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \ln a_n\right| < +\infty, \qquad (21.5.9)$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n = p, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln a_n = b \quad \Leftrightarrow \quad p = e^b, \; b = lnp. \qquad (21.5.10)$$

2. *Нескінченний добуток розбігається до значення нуль тоді й лише тоді, коли споріднений логарифмічний ряд розбігається до значення* $-\infty$, *тобто*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln a_n = -\infty. \qquad (21.5.11)$$

3. *Нескінченний добуток розбігається до значення* $+\infty$ *тоді й лише тоді, коли споріднений логарифмічний ряд розбігається також до значення* $+\infty$, *тобто*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln a_n = +\infty\,. \qquad (21.5.12)$$

***Приклад* 21.5.3.** Дослідити на збіжність нескінченний числовий добуток

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \sqrt[n]{n}\,.$$

Розв'язання. Легко помітити, що споріднений логарифмічний ряд

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln a_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln n$$

є додатним та мажорантним до гармонічного ряду, який, як було доведено, розбігається до суми $+\infty$. Тому споріднений логарифмічний ряд, а отже, згідно з **теоремою 21.5.1** і досліджуваний нескінченний добуток теж розбігаються до значення $+\infty$.

***Відповідь*:** добуток (21.5.12) розбігається до значення $+\infty$.

Отже, **теорема 21.5.1** встановлює взаємно однозначну відповідність між збіжністю нескінченного числового добутку та спорідненого логарифмічного ряду, а це, безперечно, дає змогу легко переформулювати теореми про збіжність числових рядів на випадок нескінченних добутків.

Введемо, наприклад, за аналогією з рядами поняття n-го ***залишкового добутку*** $\prod_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ та, у випадку його збіжності, поняття n-го ***залишку*** $\rho_n := \prod_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Тоді остання теорема та **теорема 21.1.4** відразу зумовлюють таке твердження:

Теорема 21.5.2 (*про умову збіжності нескінченного добутку в термінах його залишкових добутків*). Нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігається тоді й лише тоді, коли всі його залишкові добутки є збіжними та існує границя послідовності його залишків $\rho_n = \prod_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, $n \in N$:

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n = 1. \qquad (21.5.13)$$

Відповідно, за **наслідком 21.1.1** маємо таке твердження:

Наслідок 21.5.1. *Збіжність* (*чи розбіжність*) *нескінченного числового добутку не зміниться, якщо до нього приєднати чи вилучити з нього скінченну кількість додатних числових множників.*

За таким самим принципом переформульовується й теорема про необхідну умову збіжності нескінченного числового добутку.

Теорема 21.5.3 (***про необхідну умову збіжності нескінченного добутку***). *Якщо нескінчений числовий добуток* $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збігається, то за умови* $n \to +\infty$ *його загальний член прямує до одиниці*:

$$0 < \prod_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \implies \lim_{n \to +\infty} a_n = 1. \qquad (21.5.14)$$

Отже, для збіжності нескінченного числового добутку (21.5.4) необхідно вимагати, щоб зі зростанням числа $n \in N$ загальний член добутку a_n був як завгодно близьким до одиниці, іншими словами, відрізнявся від числа один на нескінченно малу величину. Це означає, що

$$\forall n \in N: \ a_n = 1 + u_n, \ \lim_{n \to +\infty} u_n = 0. \qquad (21.5.15)$$

Тому є певний сенс сформулювати ознаки збіжності нескінченного добутку, поданого у вигляді

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + u_n), \quad u_n > -1, \ n \in N. \qquad (21.5.16)$$

Теорема 21.5.4 (***перша ознака збіжності нескінченного добутку***).

1. *Нехай елементи числової послідовності* $\{u_n \mid n \in N\}$ *зберігають свій знак, а саме*: *або* $\forall\, n \in N$: $u_n \geq 0$ *або* $\forall\, n \in N$: $-1 < u_n \leq 0$. *Тоді для*

збіжності нескінченного добутку (21.5.16) *необхідно і достатньо, щоб збігався* ***споріднений числовий ряд***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \ , \qquad (21.5.17)$$

тобто

$$0 < \prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n) < +\infty \ \Leftrightarrow \ \left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right| < +\infty. \qquad (21.5.18)$$

2. *Нескінченний добуток* (21.5.16) *розбігається до значення нуль тоді й лише тоді, коли споріднений ряд* (121.5.17) *збігається до значення* -1:

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -1. \qquad (21.5.19)$$

3. *Нескінченний добуток* (21.5.16) *розбігається до значення* $+\infty$ *тоді й лише тоді, коли споріднений* числовий *ряд* (21.5.17) *теж розбігається до значення* $+\infty$:

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = +\infty. \qquad (21.5.20)$$

Доведення. По-перше, зрозуміло, шо споріднений логарифмічний ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ln a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+u_n) \qquad (21.5.21)$$

може бути збіжним лише за умови, що

$$u_n \to 0, \quad n \to +\infty,$$

яка спричиняє еквівалентність

$$\ln(1+u_n) \sim u_n \ , \ \ n \to +\infty,$$

причому умови теореми зумовлюють знакосталість числових рядів (21.5.17) та (21.5.21).

Отож із граничної ознаки порівняння збіжності числових рядів випливає, що збіжність ряду (21.5.21) рівносильна збіжності ряду (21.5.17), а отже, і збіжності добутку (21.5.16).

Друге та третє твердження теореми є безпосереднім переформулюванням відповідних тверджень **теореми 21.5.1**.

Теорему доведено.

***Приклад* 21.5.4.** Дослідити на збіжність нескінченний добуток

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right), \quad \alpha > 0. \qquad (21.5.22)$$

Розв'язання. Склавши споріднений числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},$$

помічаємо, що останній є рядом Рімана−Діріхле, умови збіжності якого вже добре відомі, а саме: цей ряд є збіжним тоді й лише тоді, коли його параметр $\alpha > 1$. Залишається тільки скористатися першим твердженням **теореми 21.5.4**.

***Відповідь*:** добуток (21.5.22) є збіжним лише за умови $\alpha > 1$.

Теорема 21.5.5 (*друга ознака збіжності нескінченного добутку*).

Нехай числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n,$$

що споріднений до нескінченого добутку

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n),$$

є збіжним.

У такому разі цей добуток збігається тоді й лише тоді, коли збігається числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2. \qquad (21.5.23)$$

Доведення. Нехай числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ є збіжним, тоді за необхідною умовою його збіжності

$$u_n \to 0\,, \;\; n \to +\infty\,.$$

Тож за формулою Тейлора складеною для логарифмічної функції $\ln(1+x)\,,\; x > -1,$ маємо:

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \mathrm{o}(u_n^2), \;\; n \to +\infty\,,$$

що спричиняє еквівалентність,

$$u_n - \ln(1+u_n) \sim \frac{1}{2}u_n^2\,, \quad n \to +\infty\,.$$

Таким чином, за граничною ознакою збіжності числових рядів вказаний ряд (21.5.23) збігається тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - \ln(1+u_n)\,). \qquad (21.5.24)$$

Отже, збіжність ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} ln(1+u_n)$, який є сумою збіжного ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ та ряду (21.5.24), повністю визначається збіжністю числового ряду (21.5.23), звідки, в свою чергу, з **теореми 21.5.1** випливає висновок даної теореми.

Теорему доведено.

Поняття абсолютної та умовної збіжності нескінчених добутків вводиться теж за аналогією з числовими рядами.

***Означення* 21.5.2.** *Нескінчений числовий добуток*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$$

називають відповідно ***абсолютно збіжним*** *чи* ***умовно збіжним****, якщо таким є споріднений логарифмічний ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln a_n.$$

Теорема 21.5.6 (***ознака абсолютної збіжності нескінченного добутку***)**.** *Нескінченний числовий добуток*

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n)$$

збігається абсолютно тоді й лише тоді, коли збігається абсолютно споріднений логарифмічний ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+u_n)$$

чи споріднений числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n,$$

або невід'ємний ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+|u_n|).$$

Доведення. Зрозуміло, що коли хоч один з цих рядів є збіжним, то

$$u_n \to 0, \ \ n \to +\infty.$$

Як наслідок маємо еквівалентності

$$\ln(1+|u_n|) \sim |u_n| \sim \ |ln(1+u_n)|, \ \ \ n \to +\infty,$$

за якими та за **означенням 21.5.2**, отримаємо висновок теореми.

Теорему доведено.

Приклад **21.5.5.** Дослідити на абсолютну та умовну збіжність нескінченний числовий добуток

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n) \ = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right). \qquad (21.5.25)$$

Розв'язання. Споріднений до ряду (21.5.25) числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

є рядом Лейбніца, а отже, збігається.

Додатний ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

є збіжним рядом Рімана–Діріхле з показником степеня $\alpha = 2$.

Таким чином, за **теоремою 21.5.5** нескінченний добуток (21.5.25) теж збігається, проте ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

є розбіжним.

Отже, досліджуваний добуток збігається умовно.

***Відповідь*:** добуток (21.5.25) збігається умовно.

Звісно, **теорема 21.4.6** про групування та перестановку членів абсолютно збіжного ряду зумовлює відповідне твердження про нескінченний добуток.

Теорема 21.5.7 (***про групування та перестановку членів нескінченного добутку***)**.** *Якщо нескінченний числовий добуток збігається абсолютно, то будь-яке групування чи перестановка його членів не змінює ні збіжності добутку, ні його числового значення.*

Завдання для самостійної роботи **21.5.1.** *Довести формулу Валліса* (John Wallis) для числового добутку:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2}. \qquad (21.5.26)$$

***Завдання для самостійної роботи* 21.5.2 (*Ойлер*).** *Нехай*

$$\{p_n \mid n \in N\} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; \dots\}$$

є послідовністю всіх простих чисел, упорядкованих за їх зростанням. Довести, що для всіх $\alpha > 1$ *справджується тотожність*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^{\alpha}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

тобто

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7}} \cdot \dots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \cdots .$$

Завдання для самоперевірки

Знайти числові значення нескінченних добутків:

21.5.1. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

21.5.2. $\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+n-2}{n^2+n}$.

21.5.3. $\prod_{n=1}^{+\infty} cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (***добуток Вієтта***).

21.5.4. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1+\frac{2n}{n^2-n+1}\right)$.

21.5.5. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

21.5.1. $\frac{1}{2}$.

21.5.2. $\frac{1}{3}$.

21.5.3. $\frac{2}{\pi}$.

21.5.4. $\frac{2}{3}$.

21.5.5. 2.

Завдання для самоперевірки

Дослідити збіжність нескінченних добутків:

21.5.6. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+2^{-n(x^2+1)}\right)$.

21.5.7. $\prod_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n^2]{\ln(n+1)}$.

21.5.8. $\prod_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{\ln(n+1)}}$.

21.5.9. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(nsin\frac{1}{n}\right)^2$.

21.5.10. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(n\ln(\frac{n+1}{n})\right)^3$.

21.5.11. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(n(e^{\frac{1}{n}}-1)\right)^4$.

21.5.12. $\prod_{n=1}^{+\infty}cos\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

21.5.6. Добуток збігається.

21.5.7. Добуток збігається.

21.5.8. Добуток розбігається.

21.5.9. Добуток збігається.

21.5.10. Добуток розбігається.

21.5.11. Добуток розбігається.

21.5.12. Добуток збігається.

Завдання для самоперевірки

Дослідити нескінченні добутки на абсолютну та умовну збіжність:

21.5.13. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\sin\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

21.5.14. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)$.

21.5.15. $\prod_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}}$.

21.5.16. $\prod_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{(-1)^n}{\ln^2(n+2)}}$.

21.5.17. $\prod_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

21.5.18. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}\right)$.

21.5.19. $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^4}}\right)$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

21.5.13. Добуток збігається умовно.

21.5.14. Добуток збігається умовно.

21.5.15. Добуток збігається умовно.

21.5.16. Добуток збігається абсолютно.

21.5.17. Добуток розбігається.

21.5.18. Добуток розбігається.

21.5.19. Добуток збігається абсолютно.

Розділ 22. Функціональні ряди

22.1. Найважливіші означення та загальні властивості

Перші приклади функціональних рядів з’явилися у роботах видатних математиків, звісно, раніше побудови їх загальної теорії, розвинення якої відбувалось одночасно із закладанням основ інтегро-диференціального числення.

Так, ще в 1668 році у дослідженні “Логарифмотехніка” (Logarithmotechnia, Londini) німецький математик Нікола Кауфман (відомий як Меркатор, Mercator) опублікував розвинення логарифма у степеневий ряд, а саме,

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots .$$

На його дослідження відгукнувся інший член Лондонського королівського товариства Джон Валліс, який в часописі “Philosophical Transactions” (1668) запровадив інше логарифмічне розвинення:

$$\ln\frac{1}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots .$$

У тому ж році шотландський математик і астроном Джеймс Грегорі в “Геометричних нарисах” запропонував ще одне функціональне розвинення:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Він же до 1672 року отримав ще й такі важливі функціональні ряди, як

$$x = \mathrm{tg}x - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x - \cdots ;$$

$$\text{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

тощо.

Майже в той самий час Ісаак Ньютон отримав розвинення у степеневий ряд функції $(1 + x)^\alpha$.

Звісно, ці досягнення були тільки першими цеглинками, закладеними у теорію функціональних рядів, та й записані вище вони вже у сучасній термінології, бо на момент їх першого опублікування ще не було введено у математичний світогляд ні таких позначень, ні чіткого поняття ряду, ні поняття функції.

Наприклад, всім зараз відомий термін «функція» вперше ввів і почав свідомо використовувати у своїх наукових працях тільки Готфрід Вільгельм Лейбніц, а розвинув – Леонард Ойлер.

Теорія дійсних функціональних рядів у своєму сучасному вигляді була створена багатьма математиками протягом XVIII-XIX ст.

Ознайомимося з основними поняттями цієї теорії.

***Означення* 22.1.1.** *Нехай на деякій множині* $A \subset R$ *визначена послідовність дійсних функцій* $u_n = u_n(x)$, $n \in N$. *Тоді ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \;\; x \in A, \tag{22.1.1}$$

який за кожного фіксованого значення змінної $x \in A$ *є звичайним числовим рядом, називають* ***функціональним рядом****, заданим на множині* A.

Множину D *всіх точок* $x_0 \in A$*, для яких відповідний числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$$

є збіжним, називають ***областю збіжності*** *функціонального ряду* (22.1.1), *тобто*

$$\begin{cases} x_0 \in D & \Longrightarrow \quad \left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)\right| < +\infty; \\ x_0 \notin D & \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0) - \text{ розбіжний.} \end{cases} \tag{22.1.2}$$

Аналогічно, множину D_a *всіх точок* $x_0 \in A$, *для яких відповідний числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$$

збігається абсолютно, називають ***областю абсолютної збіжності*** *функціонального ряду* (22.1.1), *тобто*

$$\begin{cases} x_0 \in D_a & \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x_0)| < +\infty; \\ x_0 \notin D_a & \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x_0)| - \text{розбіжний.} \end{cases} \tag{22.1.3}$$

Функцію f, означену на області збіжності D ряду (22.1.1) *за правилом*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \quad x \in D, \tag{22.1.4}$$

називають ***сумою функціонального ряду****.*

Поняття загального члена, частинної суми, залишкового ряду, n*-го залишку функціонального ряду, та суми, різниці й добутку функціональних рядів тощо, вводять так само, як і у випадку числових рядів. Наприклад, сумою функціональних рядів* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$, *означених на множинах* $A \subset R$ *та* $B \subset R$ *відповідно, називають означений на перетині цих множин* $A \cap B$ *ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\big(u_n(x) + v_n(x)\big), \quad x \in A \cap B.$$

Зрозуміло, що в задачах на знаходження області збіжності чи області абсолютної збіжності функціональних рядів застосовують відповідні теореми про збіжність, доведені для звичайних числових рядів.

***Приклад* 22.1.1.** Знайти область збіжності D та область абсолютної збіжності D_a функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{1+x^n}. \qquad (22.1.5)$$

Розв'язання. Заданий ряд визначений на всій множині дійсних чисел, окрім точки $x = -1$.

Звісно, що за умови $n \to +\infty$ поведінка загального члена ряду

$$u_n(x) = \frac{(2x)^n}{1+x^n}, \quad x \neq -1,$$

залежить від значень границь степеневих виразів x^n та $(2x)^n$. Тож природно розглянути такі випадки:

1) якщо $|x| < \frac{1}{2}$, то

$$x^n \to 0, \quad n \to +\infty,$$

$$(2x)^n \to 0, \quad n \to +\infty,$$

як наслідок

$$|u_n(x)| \sim |2x|^n, \quad n \to +\infty, \quad |2x| < 1,$$

а отже, за порівнянням збіжності цього ряду зі збіжністю геометричного числового ряду функціональний ряд (22.1.5) є абсолютно збіжним;

2) якщо $x = \frac{1}{2}$, то

$$u_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1+2^{-n}}\to 1\neq 0,\ \ n\to+\infty,$$

а тому в цій точці ряд (22.1.5) розбігається за невиконанням необхідної умови збіжності числового ряду;

3) якщо $x=-\frac{1}{2}$, то

$$\left|u_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{1+2^{-n}}\to 1\neq 0,\ \ n\to+\infty,$$

а тому у цьому випадку ряд (22.1.5) теж розбігається за невиконанням необхідної умови збіжності числового ряду;

4) якщо $\frac{1}{2}<|x|<1$, то

$$x^n\to 0,\quad n\to+\infty,$$

$$|(2x)^n|\to+\infty,\ \ n\to+\infty,$$

отже,

$$|u_n(x)|\ \to+\infty,\quad n\to+\infty,$$

а тому ряд (22.1.5) знову таки є розбіжним;

5) якщо $x=1$, то

$$u_n(1)=\frac{2^n}{1+1}=2^{n-1}\to+\infty,\ \ n\to+\infty,$$

тож ряд (22.1.5) і в цьому випадку буде розбіжним;

6) якщо $1<|x|$, то

$$\frac{1}{x^n}\to 0,\quad n\to+\infty,$$

що спричиняє

$$|u_n(x)|=\frac{2^n}{\left|\frac{1}{x^n}+1\right|}\to+\infty,\ \ n\to+\infty,$$

отже, ряд теж розбіжний.

Остаточно робимо висновок, що досліджуваний функціональний ряд збігається, причому абсолютно, лише за умови $|x| < \frac{1}{2}$.

***Відповідь*:** $D = D_a = (-\frac{1}{2}\ ;\ +\frac{1}{2})$.

Теореми про властивості числових рядів тривіальним чином зумовлюють відповідні твердження щодо функціональних рядів.

Теорема 22.1.1 (*про найпростіші властивості функціональних рядів*).

1. *Якщо* D *– область збіжності функціонального ряду* (22.1.1), *то для кожної точки* $x \in D$ *цієї множини існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0, \tag{22.1.6}$$

і для будь-якої точки поза множиною D *ця границя або не існує, або не дорівнює нулю, тобто*

$$x \notin D \implies \left[\begin{array}{l} \nexists \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x); \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) \neq 0. \end{array} \right.$$

2. *Функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *збігається на множині* D *тоді й лише тоді, коли на ній збігаються всі функціональні залишкові ряди* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, $n \in N$, *причому, якщо вони збіжні до відповідних своїх сум* $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, $n \in N$, *то у кожній точці множини* D *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{22.1.7}$$

3. *Якщо функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *збігається на множині* D, *а функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ *на цій множині розбіжний, то їх ряд-сума* $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(u_n(x)+v_n(x)\big)$ *теж є розбіжним у кожній точці множини* D.

4. *Якщо* D_1 *– область збіжності функціонального ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, *а* D_2 *– область збіжності функціонального ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$, *то сума цих рядів збігається на перетині* $D_1 \cap D_2$. *Це означає, що перетин* $D_1 \cap D_2$ *є підмножиною області* D *збіжності ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(u_n(x)+v_n(x)\big)$, *причому*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\big(u_n(x)+v_n(x)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x), \quad x \in D_1 \cap D_2. \quad (22.1.8)$$

5. *Збіжність функціонального ряду* (22.1.1) *не зміниться, якщо його домножити на довільне число* $a \neq 0$ *чи якщо додати до нього або вилучити з нього будь-яку скінченну кількість членів, визначених на його області збіжності* D. *У такому випадку відповідно зміниться тільки його сума.*

6. *На області* D_a *абсолютної збіжності функціонального ряду* (22.1.1) *довільне групування чи перестановка його членів не змінює суми ряду.*

7. *Якщо функціональні ряди* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ *абсолютно збігаються, відповідно, на областях* D_a^u *і* D_a^v, *то на перетині* $D_a^u \cap D_a^v$ *сума їх ряду-добутку не залежить від способу упорядкування його членів та дорівнює добутку сум цих рядів.*

Звісно, що задача знаходження області збіжності функціонального ряду є тільки прелюдією до більш змістовних задач, наприклад до задачі про обчислення функції, що є сумою ряду, чи задачі про встановлення властивостей цієї функції за відповідними властивостями членів її функціонального розвинення тощо.

Перш за все слід згадати, що деяка функція f є сумою функціонального ряду (22.1.1), якщо вона визначена на області збіжності D цього ряду та в кожній точці $x \in D$ справджується збіжність

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x), \qquad (22.1.9)$$

де $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) -$ n-та часткова сума ряду у точці x, а це формальною означає

$$\forall x \in D \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon; x) \in N: (n > n_0 \ \Rightarrow \ |f(x) - s_n(x)| < \varepsilon\,). \qquad (22.1.10)$$

Звичайно, умову збіжності ряду (22.1.1) на множині D можна сформулювати і в термінах збіжності функціональної послідовності залишків $r_n(x),\ n \in N,$ а саме:

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right| < +\infty, \ \ x \in D \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0,\ x \in D \quad \Leftrightarrow \qquad (22.1.11)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon; x) \in N: (n > n_0 \ \Rightarrow \ |r_n(x)| < \varepsilon\,). \qquad (22.1.12)$$

Єдине, що впадає в око при порівнянні умов (22.1.10) та (22.1.12) із відповідними умовами збіжності числових рядів, є те, що вибір вказаного числа n_0 залежить не тільки від числа $\varepsilon > 0$, але залежить ще й від заданої точки $x \in D$. Це означає, що в загальному випадку швидкість збіжності функціонального ряду (22.1.1) до своєї суми f залежить від точок x множини D і може суттєво різнитись від однієї точки до іншої. Чи може це впливати на властивості суми функціонального ряду?

Розглянемо приклади.

Мабуть, найпростішим та добре відомим прикладом функціонального ряду є геометричний ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots . \qquad (22.1.13)$$

З висновків попереднього розділу випливає, що ряд (22.1.13) збігається на інтервалі $(-1;\ +1)$, розбігається поза ним, а його сумою є функція

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1;\ +1). \qquad (22.1.14)$$

Можна помітити, що всі члени ряду (22.1.13) та його сума (22.1.14) є неперервними на області збіжності ряду $D = (-1;\ +1)$. Напевно, можна зробити припущення, що саме неперервність членів функціонального ряду приводить до неперервності його суми. Мало того, всі члени ряду (22.1.13) та його сума (22.1.14) на області збіжності ряду $D = (-1;\ +1)$ мають неперервні похідні, а тому можна ще й перевірити чи не справджується для ряду (22.1.13) ***формула почленного диференціювання***, себто чи виконана тотожність

$$f(x)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = u_0'(x) + u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots , \quad x \in D. \quad (22.1.15)$$

Знайдемо суму ряду (22.1.15)

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k'(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (x^k)' =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} - \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)x^n(1-x) + x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1;\ +1),$$

де враховано, що похідна скінченної кількості доданків дорівнює сумі їх похідних, і що на інтервалі $x \in (-1;\ +1)$ існують границі

$$\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (n+1)x^n = 0.$$

Обчислити похідну функції f ще легше:

$$f(x)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1;\ +1).$$

Таким чином,

$$f(x)' = \ g(x), \ \ x \in (-1;\ +1).$$

Отже, на області збіжності ряду (22.1.13) справджується тотожність (22.1.15), тобто похідна суми ряду дорівнює суми похідних його членів.

Розглянемо приклад іншого функціонального ряду. Нехай

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2(1-x^2)^n = x^2 + x^2(1-x^2) + x^2(1-x^2)^2 + \cdots \ . \tag{22.1.16}$$

Легко помітити, що при кожному фіксованому значенні змінної $x \in R$ функціональний ряд (22.1.16) теж є геометричним рядом з першим членом $a = x^2$ та знаменником $q = 1 - x^2$. Тож цей геометричний ряд збігається лише за умови

$$|q| < 1 \ \Leftrightarrow \quad |1-x^2| < 1 \ \ \Leftrightarrow \quad x \in (-1;\ +1),$$

причому до суми

$$f(x) = \left[\begin{array}{l} \quad\quad 0\,, \quad x = 0; \\ \frac{x^2}{1-(1-x^2)}\,, \ \ 0 < |x| < 1, \end{array}\right. = \quad \left[\begin{array}{ll} 0\,, & \quad x = 0; \\ 1\,, & 0 < |x| < 1. \end{array}\right. \tag{22.1.17}$$

Таким чином, хоч ряд (22.1.16) теж складений з неперервних та диференційованих на його області збіжності $D = (-1;\ +1)$ функцій, проте сума ряду (22.1.17) має розрив посередині інтервалу збіжності, а саме, у точці $x = 0$.

Така "дивна" поведінка сум функціонального ряду вимагає прискіпливішого дослідження цієї проблеми та з'ясування причин отриманого парадоксу.

Звернемо увагу на те, що, по-перше, поняття неперервності функції f у деякій точці $x \in D$ не є чисто "точковою" її характеристикою, а визначається поведінкою функції на множинах, які називають околами точки x; по-друге, як було відзначено вище, швидкості збігу функціонального ряду до своєї суми у кожній точці цих околів можуть сильно різнитись одна від одної.

Знайдемо залишки функціональних рядів (22.1.13) та (22.1.16) і дослідимо їх поведінку на околах точок області D.

Залишок ряду (22.1.13) має вигляд

$$r_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} x^k = \frac{x^n}{1-x}, \quad x \in (-1;\ +1), \quad n \in N. \qquad (22.1.18)$$

Нехай, наприклад, x_0 – довільна точка правої половини інтервалу $(-1;\ +1)$, тобто $x \in (0;\ +1)$. Виберемо число $\varepsilon > 0$ так, щоб ε-окіл $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ лежав строго всередині інтервалу $(0;\ +1)$; для цього досить, щоб $\varepsilon < 1 - x_0$ та $\varepsilon < x_0$. Тоді для всіх точок вибраного ε-околу точки x_0 виконана нерівність

$$|r_n(x)| \le \frac{(x_0+\varepsilon)^n}{x_0-\varepsilon}, \quad x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon).$$

Це означає, що на всьому ε-околі токи x_0 послідовність залишків функціонального ряду (22.1.13) збігається до нуля не повільніше, ніж є фіксована числова послідовність, складена з чисел $a_n = \frac{(x_0+\varepsilon)^n}{x_0-\varepsilon}$, $n \in N$. Почасти тому можна сказати, що для кожної точки x_0 з правої половини інтервала $(-1;\ +1)$ знайдеться її ε-окіл, в якому, у певному розумінні, ряд (22.1.13) збігається рівномірно. Так само можна довести, що ту саму властивість мають й інші точки області збіжності ряду (22.1.13).

Розглянемо тепер залишки другого функціонального ряду (22.1.16) та дослідимо їх в околах точки $x_0 = 0$:

$$r_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} x^2(1-x^2)^k = (1-x^2)^n\,,\ \ x \in (-1;\ +1),\ \ \ n \in N. \tag{22.1.19}$$

Легко помітити, що з наближенням точки x до точки $x_0 = 0$ збіжність послідовності залишків до нуля як завгодно сильно уповільнюється, а саме, не можна вказати таке натуральне число n_0, щоб за $n \in N$, більших за нього, для всіх точок x з ε-околу токи $x_0 = 0$ залишки $r_n(x)$ ставали як завгодно малими через те, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$

$$\sup_{x \in (-\varepsilon;\ +\varepsilon)} |r_n(x)| = 1 \nrightarrow 0\,,\ \ \ n \to +\infty. \tag{22.1.20}$$

Відтак можна сказати, що на околах точки $x_0 = 0$ залишки (22.1.19) збігаються до нуля нерівномірно.

Напевно, така відмінність у поведінці залишків функціонального ряду (22.1.16) і приводить до появи розриву суми цього ряду в точці $x_0 = 0$.

З огляду на це виникає необхідність в означенні й дослідженні нового типу збіжності функціональних послідовностей та функціональних рядів на множинах їх збіжності, яку слід назвати рівномірною збіжністю, та яка вперше була розглянута видатним німецьким математиком Карлом Теодором Вільгельмом Вейєрштрассом у 1841 році.

Завдання для самоперевірки

Знайти область збіжності D функціонального ряду:

22.1.1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x+x^n}{1+x^{2n}}$.

22.1.2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(1+x^2)^n}$.

22.1.3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n^2+x^2}$.

22.1.4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x^2}$.

22.1.5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+x^n}{1+(2x)^{2n}}$.

22.1.6. Знайти суму функціонального ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

22.1.1. $D = (-\infty;\ -1) \cup \{0\} \cup (+1\ ;\ +\infty)$.

22.1.2. $D = \emptyset$.

22.1.3. $D = R$.

22.1.4. $D = [0\ ;\ +\infty)$.

22.1.5. $D = \left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup (+\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ +\infty)$.

22.1.6. $f(x) = \left[\begin{array}{cc} 0\ , & x = 0; \\ 1 + x^2, & 0 < |x| < 1. \end{array}\right.$

22.2. Рівномірна збіжність послідовностей функцій

Нехай на множині $A \subset R$ визначена послідовність дійсних функцій (функціональна послідовність)

$$\{\, s_n(x),\ \ x \in A \mid n \in N\} \qquad (22.2.1)$$

та деяка функція f.

Означення* 22.2.1.** *Кажуть, що послідовність функцій* (22.2.1) ***збігається поточково *на множині* A *до функції* f *за* $n \to +\infty$, *якщо у кожній точці* $x \in A$ *існує границя*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x), \tag{22.2.2}$$

тобто

$$\forall x \in A \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon; x) \in N: \ \ (n > n_0 \implies |f(x) - s_n(x)| < \varepsilon). \tag{22.2.3}$$

Означення* 22.2.2.** *Кажуть, що послідовність функцій* (22.2.1) ***збігається рівномірно *на множині* A *до функції* f *за* $n \to +\infty$ *та позначають*

$$s_n \rightrightarrows f, \ \ n \to +\infty, \ \ x \in A,$$

якщо існує границя числової послідовності

$$\omega_n = \sup_{x\in A}|f(x) - s_n(x)| \to 0, \quad n \to +\infty, \tag{22.2.4}$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \ (\ n > n_0 \implies \forall x \in A \ \ |f(x) - s_n(x)| < \varepsilon). \tag{22.2.5}$$

По-перше, зрозуміло, що за умови поточкової збіжності на множині A послідовності функцій (22.2.1) при кожному фіксованому значенні $x \in A$ ця послідовність стає тією чи іншою звичайною числовою послідовністю, для якої застосовні всі відповідні теореми, доведені для числових послідовностей, наприклад, теореми про однозначність границі, про границю суми, різниці, добутку та частки послідовностей, критерії існування границі тощо.

По-друге, легко помітити, що за рівномірною збіжністю послідовності до граничної функції f на множині $A \subset R$ маємо її поточкову збіжність до тієї ж функції на тій же множині. Тож у якомусь розумінні, поточкова збіжність функціональних послідовностей є “слабшою” за рівномірну.

По-третє, слід встановити, чи зберігаються функціональні характеристики границі, такі як неперервність, диференційованість, тощо за того чи іншого типу збіжності функціональних послідовностей. Наприклад, чи є на всій множині A гранична функція послідовності неперервних на цій множині функцій теж неперервною?

Як було показано вище, за поточкової збіжності відповідь на останнє запитання є негативною.

Справді, всі часткові суми s_n ряду (22.1.16) є неперервними (як суми скінченної кількості неперервних доданків) у будь-якому ε-околі точки $x_0 = 0$, поза тим сума (22.1.17) цього функціонального ряду має розрив першого роду у нулі, причому

$$\omega_n = \sup_{x \in (-\varepsilon;\, +\varepsilon)} |f(x) - s_n(x)| = \sup_{x \in (-\varepsilon;\, +\varepsilon)} |r_n(x)| = 1 \nrightarrow 0, \quad n \to +\infty.$$

Отже, послідовність часткових сум s_n збігається до суми ряду (22.1.16) на околах точки $x_0 = 0$ поточково, але нерівномірно.

Теорема 22.2.1 (***про неперервність границі послідовності функцій***). *Нехай на деякому δ-околі точки x_0 задана та рівномірно збігається на ньому послідовність функцій* (22.2.1), *неперервних у точці x_0. Тоді гранична функція f теж неперервна у цій точці.*

Доведення. За означенням рівномірної збіжності (**означення 22.2.2**) для довільного числа $\varepsilon > 0,$ яке менше за вказане число $\delta,$ знайдеться таке число $n_0 \in N$, що

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon) \quad |f(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (22.2.6)$$

За умовою теореми всі функції послідовності (22.2.1), у тому числі й зазначена функція s_{n_0}, є неперервними на δ-околі точки x_0. У такому разі знайдеться настільки мале число $\delta_0 > 0$ (менше за δ), що

$$|x - x_0| < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \left|s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (22.2.7)$$

Отже, за умовами (22.2.6) та (22.2.7) матимемо:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0: \ (\ |x - x_0| < \delta_0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| =$$

$$= \left|\left(f(x) - s_{n_0}(x)\right) + \left(s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)\right) + \left(s_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|f(x) - s_{n_0}(x)\right| + \left|s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)\right| + \left|s_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon),$$

тобто гранична функція f є неперервною у точці x_0.

Теорему доведено.

Ті ж самі міркування можна застосувати для доведення односторонньої неперервності в точці x_0 функції, яка є границею рівномірно збіжної на околах цієї точки функціональної послідовності, чи коли точка x_0 є довільною граничною точкою множини A, на замиканні якої функціональна послідовність рівномірно збігається. Наприклад, справедливе таке твердження.

Теорема 22.2.2 (***про неперервність границі послідовності функцій, рівномірно збіжної на відрізку***). *Нехай на деякому відрізку* $[a\,;b] \subset R$ *задана та рівномірно збігається на ньому послідовність неперервних функцій* (22.2.1). *Тоді на відрізку* $[a\,;b]$ *гранична функція* f *є неперервною.*

Завдання для самостійної роботи **22.2.1.** *Довести щойно сформульовану* **теорему 22.2.2**.

Теорема 22.2.3 (***про інтегрування границі послідовності функцій, рівномірно збіжної на відрізку***). *Нехай на деякому відрізку* $[a\,;b] \subset R$ *задана та рівномірно збігається на ньому послідовність функцій* $\{f_n \mid n \in N\}$. *Тоді, якщо всі функції цієї послідовності є інтегрованими на відрізку* $[a\,;b]$, *то гранична функція* f *теж є інтегрованою на ньому та*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx, \tag{22.2.8}$$

або те саме, що

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \tag{22.2.9}$$

Доведення. Згадаймо, що функція f є інтегрованою на відрізку $[a\,;b]$ тоді й лише тоді, коли для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке розбиття

$$\lambda = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k : \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b\}$$

цього відрізка, що

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i(\lambda, f)\,\Delta x_i < \varepsilon, \tag{22.2.10}$$

де $\omega_i(\lambda, f)$ – це коливання функції f на i-му підвідрізку $[x_{i-1}\,; x_i] \subset [a\,;b]$ завдовжки $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, себто

$$\omega_i(\lambda, f) = \sup_{x\in[x_{i-1}\,;x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1}\,;x_i]} f(x) = \sup_{x',x''\in[x_{i-1}\,;x_i]} |f(x') - f(x'')|.$$

За умови рівномірної збіжності на відрізку $[a\,;b]$ послідовності функцій $\{f_n\,|n \in N\}$ до граничної функції f для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число $n_0 \in N$, що

$$n \geq n_0 \implies \forall x \in [a\,;b] \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \qquad (22.2.11)$$

Через це варіації функції f по довільних відрізках $[x_{i-1}\,;x_i] \subset [a\,;b]$ можуть перевищувати відповідні варіації функцій f_n, у тому числі й варіації функції f_{n_0}, на величину, не більше за $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Справді, за нерівністю (22.2.11) матимемо

$$\sup_{x\in[x_{i-1}\,;x_i]} f(x) \leq \sup_{x\in[x_{i-1}\,;x_i]} f_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

$$\inf_{x\in[x_{i-1}\,;x_i]} f(x) \geq \inf_{x\in[x_{i-1}\,;x_i]} f_{n_0}(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Згідно із цим

$$\omega_i(\lambda, f) = \sup_{x\in[x_{i-1}\,;x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1}\,;x_i]} f(x) \leq$$

$$\leq \left(\sup_{x\in[x_{i-1}\,;x_i]} f_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\right) - \left(\inf_{x\in[x_{i-1}\,;x_i]} f_{n_0}(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\right) =$$

$$= \omega_i\big(\lambda, f_{n_0}\big) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, k. \qquad (22.2.12)$$

Позаяк всі функції послідовності $\{f_n\,|n \in N\}$ інтегровані на відрізку $[a\,;b]$, то функція f_{n_0} теж є такою, а отже, для довільного числа $\varepsilon > 0$

знайдеться розбиття $\lambda = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ відрізка $[a\,;b]$ таке, що

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i(\lambda f_{n_0})\, \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i(\lambda, f)\,\Delta x_i \quad \le \quad \sum_{i=1}^{k}\left(\omega_i\left(\lambda, f_{n_0}\right) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)\Delta x_i \quad =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \omega_i(\lambda, f_{n_0})\,\Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{k}\Delta x_i \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon,$$

себто гранична функція f задовольняє умову (22.2.11), що забезпечує її інтегрованість на відрізку $[a\,;b]$.

Доведемо справедливість рівності (22.2.8).

Справді, за рівномірною збіжністю на відрізку $[a\,;b]$ послідовності $\{f_n\,|n \in N\}$ до граничної функції f випливає, що

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \ \le \ \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \ \le$$

$$\le \ (b-a)\cdot \sup_{x\in[a\,;b]}|f(x) - f_n(x)| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Теорему доведено.

Завдання для самостійної роботи **22.2.2 (*критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності*).** *Довести, що послідовність функцій* $\{f_n\,|n \in N\}$ *рівномірно збігається на множині* $A \subset R$ *до деякої* (*можливо, невідомої*) *функції* f *тоді й лише тоді, коли*

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$:

$$(k \in N,\ n > n_0 \ \Longrightarrow\ \forall x \in A \ \ |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon), \qquad (22.2.13)$$

тобто

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \quad \sup_{n>n_0,\ k\in N,\ x\in A}|f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon\,.$$

Теорема 22.2.4 (***про рівномірну збіжність добутку функції на функціональну послідовність***). *Нехай послідовність функцій* $\{s_n \mid n \in N\}$ *рівномірно збігається на деякій множині* $A \subset R$, *а функція* g *є обмеженою на ній. Тоді послідовність* $\{gs_n \mid n \in N\}$ *теж рівномірно збіжна на* A, *причому, якщо* f *– це гранична функція послідовності* $\{s_n \mid n \in N\}$, *то*

$$\lim_{n \to +\infty} gs_n = gf. \qquad (22.2.14)$$

Завдання для самостійної роботи **22.2.3.** *Довести* **теорему 22.2.4**.

Завдання для самоперевірки

Дослідити на рівномірну збіжність послідовність $\{f_n \mid n \in N\}$ на вказаній множині A:

22.2.7. $f_n(x) = x^n$, $A = [0\,;1]$.

22.2.8. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $A = [0\,;1]$.

22.2.9. $f_n(x) = xne^{-n^2x^2}$, $A = [0\,;\,+\infty\,)$.

22.2.10. $f_n(x) = xne^{-n^2x^2}$, $A = [1\,;\,+\infty\,)$.

22.2.11. $f_n(x) = narctg\frac{x^2}{n}$, $A = [1\,;\,+\infty\,)$.

22.2.12. $f_n(x) = \frac{1}{3n^2 - 2nx + x^2}$, $A = (\,-\infty\,;\,+\infty)$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

22.2.7. Послідовність збігається нерівномірно.

22.2.8. Послідовність збігається рівномірно.

22.2.9. Послідовність збігається нерівномірно.

22.2.10. Послідовність збігається рівномірно.

22.2.11. Послідовність збігається нерівномірно.

22.2.12. Послідовність збігається рівномірно.

22.3. Рівномірна збіжність функціональних рядів

Означення **22.3.1.** *Функціональний* ***ряд*** $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *називають* ***рівномірно збіжним*** *на множині* $A \subset R$, *якщо послідовність його часткових сум* $\{s_n \mid n \in N\}$ *збігається до його суми* f *рівномірно на цій множині*:

$$s_n \rightrightarrows f, \quad n \to +\infty, \quad x \in A. \qquad (22.3.1)$$

Теореми про найпростіші властивості функціональних рядів та щойно приведене означення рівномірної їх збіжності, певна річ, зумовлюють відповідні твердження щодо властивостей рівномірно збіжних рядів.

Теорема 22.3.1 (*про найпростіші властивості рівномірно збіжних функціональних рядів*).

1. *Якщо функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *є рівномірно збіжним на множині* $A \subset R$, *то послідовність його членів на цій множині рівномірно збігається до нульової функції, тобто*

$$u_n \rightrightarrows 0, \quad n \to +\infty, \quad x \in A. \qquad (22.3.2)$$

2. *Функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *збігається рівномірно на множині* $A \subset R$ *тоді й лише тоді, коли на ній рівномірно збігаються всі залишкові ряди*

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, $n \in N$, *та функціональна послідовність, складена із його залишків* $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, $n \in N$, *рівномірно збігається на множини* A *до нульової функції, тобто*

$$r_n \rightrightarrows 0, \quad n \to +\infty, \quad x \in A. \qquad (22.3.3)$$

3. *Якщо функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *збігається рівномірно на множинах* A_1 *та* A_2, *то він збігається рівномірно і на сукупності цих множин* $A_1 \cup A_2$, *та навпаки.*

4. *Якщо функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *збігається рівномірно на множині* A_1 *і функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ *збігається рівномірно на множині* A_2, *то сума цих рядів збігається рівномірно на перетині цих множин* $A_1 \cap A_2$.

5. *Рівномірна збіжність функціонального ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *не зміниться, якщо його помножити або розділити на довільне число* $a \neq 0$ *чи якщо додати до нього або вилучити з нього будь-яку скінченну кількість членів, визначених на множині його рівномірної збіжності* A. *У цьому випадку відповідно чином зміниться лише його сума.*

***Завдання для самостійної роботи* 22.3.1.** *Довести* **теорему 22.3.1**.

***Завдання для самостійної роботи* 22.3.2.** *Нехай функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *збігається рівномірно на множині* $A \subset R$, *а функція* $g = g(x)$ *є обмеженою на ній. Довести, що тоді функціональний ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g(x)\, u_n(x)$$

теж рівномірно збігається на множині A *та*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g(x)\, u_n(x) = g(x) \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \quad x \in A.$$

Наслідок 22.3.1. *Функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *збігається рівномірно на множині* $A \subset R$ *тоді й лише тоді, коли на ній рівномірно збігаються до нульової функції послідовність його залишків* $\{r_n \,|n \in N\}$*, тобто*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N\colon \; (\, n > n_0 \; \Longrightarrow \; \forall x \in A \;\; |r_n(x)| < \varepsilon \,), \qquad (22.3.4)$$

або, що те саме,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N\colon \; \left(n > n_0 \; \Longrightarrow \; \sup_{x \in A} |r_n(x)| < \varepsilon \right), \qquad (22.3.5)$$

або ще

$$\omega_n = \sup_{x \in A} |r_n(x)| \to 0, \;\; n \to +\infty. \qquad (22.3.6)$$

Теорема 22.3.2 (***ознака рівномірної збіжності функціонального ряду в термінах його залишків***). *Якщо послідовність* $\{|r_n| \,|n \in N\}$*, складена з модулів залишків функціонального ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$*, мажорується на множині* $A \subset R$ *нескінченно малою числовою послідовністю* $\{\rho_n \,|n \in N\} \subset R$*, тобто*

$$\{\rho_n \,|n \in N\}\colon \left(\forall n \in N \quad \forall x \in A \;\; |r_n(x)| \le \rho_n \,, \;\; \lim_{n \to \infty} \rho_n = 0 \right), \qquad (22.3.7)$$

то функціональний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *збігається на множині* A *рівномірно.*

Доведення. Покладемо

$$\omega_n := \sup_{x \in A} |r_n(x)|, \quad n \in N.$$

Тоді за умовою (22.3.7) матимемо

$$0 \le \omega_n \le \rho_n \,, \quad n \in N,$$

разом з

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n = 0.$$

Тож за теоремою про три границі для числових послідовностей випливає:

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|r_n(x)| = 0.$$

Відтак виконано умову (22.3.6), а отже, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ рівномірно збіжний на множині A.

Теорему доведено.

***Приклад* 22.3.1.** Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}+1} \qquad (22.3.8)$$

на множині $A = [0\,;1]$.

Розв'язання. Певно, що для будь-якого фіксованого значення аргумента $x \in [0\,;1]$ числовий ряд, отриманий із функціонального ряду (22.3.8), є рядом Лейбніца, через що для його залишків справедлива оцінка

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{\sqrt{k}+1}\right| \le \left|\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}+1}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}+1}, \quad x \in [0\,;1], \;\; n \in N.$$

Звідси,

$$\omega_n := \sup_{x\in[0\,;1]} |r_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{n}+1} := \rho_n, \quad n \in N,$$

причому

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1} = 0.$$

Тож за **теоремою 22.3.2** функціональний ряд (22.3.8) рівномірно збігається на вказаному відрізку $[0\,;1]$.

***Відповідь*:** ряд (2.42) є рівномірно збіжним на множині A.

Теорема 22.3.3 (***ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду***). *Якщо ряд, складений з модулів членів функціонального ряду* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$*, мажорується на множині* $A \subset R$ *збіжним числовим рядом* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$*, тобто*

$$\begin{cases} \forall n \in N \quad \forall x \in A \quad |u_n(x)| \leq a_n; \\ \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty\,, \end{cases} \tag{22.3.9}$$

то функціональний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *збігається на множині A рівномірно.*

Доведення. За умови (22.3.9) послідовність модулів залишків функціонального ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ мажорується нескінченно малою послідовністю залишків $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, $n \in N$, збіжного числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, а саме:

$$\forall n \in N \quad \forall x \in A \quad |r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \rho_n \to 0, \;\; n \to +\infty.$$

Отже, за висновком **теореми 22.3.2** функціональний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ на множині A збігається рівномірно.

Теорему доведено.

***Приклад* 22.3.2.** Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2+1} \tag{22.3.10}$$

на множині $A = [-1\,;1]$.

Розв'язання. Легко помітити, що на вказаному відрізку $[-1\,;1]$ виконані нерівності

$$\forall n \in N \quad |u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2} = a_n,$$

причому числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ є збіжним рядом Рімана–Діріхле параметра $\alpha = 2 > 1$. Тож за ознакою Вейєрштрасса (**теорема 22.3.3**) ряд (22.3.10) збігається рівномірно.

***Відповідь*:** на відрізку $[-1\,;1]$ заданий ряд збігається рівномірно.

***Завдання для самоперевірки* 22.3.1.** Довести, що в усіх точках поза відрізком $[-1\,;1]$ функціональний ряд (22.3.10) розбігається, себто множина $A = [-1\,;1]$ є областю збіжності ряду (22.3.10).

***Приклад* 22.3.3.** Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-n|x|} \qquad (22.3.11)$$

на множині $A = R$.

Розв'язання. Легко помітити, що всі члени ряду, а відтак і всі його часткові суми, є парними функціями на R, почасти тому досить дослідити вказаний ряд тільки, наприклад, на правій половині числової осі, а саме, на множині $R_+ = [0\,;\,+\infty)$.

Певно, що за $x = 0$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = 0$ є збіжним.

Нехай $x > 0$. Тоді відома нерівність

$$e^y > y^2, \quad y > 0,$$

спричиняє нерівність

$$e^{-y} < \frac{1}{y^2}, \quad y > 0, \qquad (22.3.12)$$

за якою випливає, що

$$\forall n \in N \quad \forall x \in (0\,;\,+\infty)$$

$$0 < u_n(x) = x^2 e^{-nx} < \frac{x^2}{(nx)^2} = \frac{1}{n^2} = a_n.$$

Таким чином, додатний функціональний ряд (22.3.11) мажорується на множині $(0\,;\,+\infty)$ збіжним числовим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, а отже, за ознакою Вейєрштрасса **(теорема 22.3.3)** ряд (22.3.11) збігається рівномірно на цій множині, що обумовлює рівномірну збіжність досліджуваного ряду на всій дійсній числовій осі.

***Відповідь*:** ряд (22.3.11) збігається на множині $A = R$ рівномірно.

***Приклад* 22.3.4.** Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} xne^{-n^2x^2} \qquad (22.3.13)$$

на множині $A = [0\,;\,+\infty\,)$.

***Розв'язання*.** Підставивши у вираз (22.3.13) значення $x = 0$, отримаємо збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = 0$.

Якщо $x > 0$, то за нерівністю (22.3.12) маємо

$$0 < u_n(x) = xne^{-n^2x^2} < \frac{xn}{(n^2x^2)^2} = \frac{1}{n^3x^3}\,, \quad n \in N.$$

Отже, у цьому випадку додатний ряд (22.3.13) мажорується збіжним додатним рядом $\frac{1}{x^3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, що забезпечує збіжність ряду (22.3.13).

Щоб перевірити, чи є ця збіжність рівномірною, дослідимо поведінку функцій u_n, $n \in N$, на множині $(0\,;\,+\infty)$, знайшовши їх похідні:

$$u_n'(x) = (n - 2n^3x^2)e^{-n^2x^2} = n(1 - 2n^2x^2)e^{-n^2x^2}, \ \ x \in (0\,;\,+\infty).$$

Помічаємо, що кожна похідна u_n' на інтервалі $(0\,;\,+\infty)$ змінює знак свого числового значення у єдиній точці $x_n = \frac{1}{n\sqrt{2}}$, причому з плюса на мінус, а тому у цій точці функція u_n набуває свого найбільшого значення. Власне,

$$u_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \max_{x\in(0\,;\,+\infty)} u_n(x) = \sup_{x\in(0\,;\,+\infty)} |u_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{2e}}, \ \ n \in N.$$

Таким чином,

$$\sup_{x\in(0\,;\,+\infty)} |u_n(x)| \nrightarrow 0\,, \ \ n \to +\infty.$$

Отож, функціональна послідовність $\{u_n \mid n \in N\}$, складена із членів ряду (22.3.13), збігається до нульової функції на інтервалі $(0\,;\,+\infty)$ нерівномірно, а отже, не виконується необхідна умова (22.3.2) рівномірної збіжності функціонального ряду на цій множині, що свідчить про нерівномірну збіжність ряду (22.3.13).

***Відповідь*:** ряд (22.3.13) на вказаній множині є збіжним, але не рівномірно.

Критерій Коші рівномірної збіжності послідовності функцій легко може бути переформульованим у відповідне твердження щодо рівномірної збіжності функціональних рядів.

Теорема 22.3.4 (***критерій Коші рівномірної збіжності функціональних рядів***)**.** *Функціональний ряд на множині $A \subset R$ збігається рівномірно тоді й лише тоді, коли*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \left(k \in N, n > n_0\ \Rightarrow\ \forall x \in A\ \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} u_i(x)\right| < \varepsilon\right), \tag{22.3.14}$$

або, що те саме,

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \sup_{n > n_0,\ k \in N,\ x \in A} \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} u_i(x)\right| < \varepsilon. \tag{22.3.15}$$

***Завдання для самостійної роботи* 22.3.2.** *Довести* **теорему 22.3.4**.

Подібним способом, яким були отримані ознаки Абеля та Діріхле про збіжність числових рядів, можна довести твердження і щодо рівномірної збіжності функціональних рядів. Звісно, в основі доведення очікуваних теорем лежить перетворення Абеля сум попарних добутків та критерій Коші рівномірної збіжності функціональних рядів.

Теорема 22.3.5 (*ознака Діріхле−Харді рівномірної збіжності функціональних рядів*). *Нехай на множині $A \subset R$ задані послідовності функцій $\{a_n \mid n \in Z_+\}$ та $\{b_n \mid n \in Z_+\}$ такі, що*:

1) *для будь-якого $x \in A$ послідовність чисел $a_n(x)$, $n \in Z_+$, є монотонною*;

2) *послідовність функцій $\{a_n \mid n \in Z_+\}$ на множині A рівномірно збігається до нульової функції*:

$$a_n \rightrightarrows 0, \quad n \to +\infty,\ x \in A; \tag{22.3.16}$$

3) *послідовність часткових сум $\{\, s_n^b \mid n \in Z_+\}$ числового ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x)$ рівномірно обмежена на множині A*:

$$\exists\, c > 0 : \ \forall\ n \in Z_+ \ \ \forall x \in A \quad \left|s_n^b(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\,(x)\right| \le c, \qquad (22.3.17)$$

чи те саме:

$$\exists\, c > 0 : \sup_{n\in Z_+,\ x\in A} \left|s_n^b(x)\right| = \sup_{n\in Z_+,\ x\in A} \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\,(x)\right| \le c. \qquad (22.3.18)$$

Тоді функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\, b_n(x) \qquad (22.3.19)$$

рівномірно збігається на множині $A \subset R$.

Доведення. Доведення цієї теореми мало чим відрізняється від доведення відповідного твердження у випадку звичайних числових рядів. Справді, перетворення Абеля для сум послідовних членів функціонального ряду (22.3.19) має вигляд

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i(x)\, b_i(x) = \sum_{i=n+1}^{n+k-1}\big(a_i(x) - a_{i+1}(x)\big)B_{n+1}^{i}(x) + a_{n+k}(x)B_{n+1}^{n+k}(x),$$
$$n \in Z_+,\ x \in A, \qquad (22.3.20)$$

де $\quad B_n^k \coloneqq b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_k = s_k^b - s_n^b, \quad k \ge n,\ \ n \in Z_+,\ \ x \in A,$

$$B_n^{n-1} \coloneqq 0,\ \ n \in Z_+,\ \ x \in A.$$

Відповідно до умови (22.3.18) маємо

$$\sup_{n\in Z_+,\ k\ge n,\ x\in A} \left|B_n^k(x)\right| = \sup_{n\in Z_+,\ k\ge n,\ x\in A} \left|s_k^b(x) - s_n^b(x)\right| \le 2c. \qquad (22.3.21)$$

За (22.3.20)–(22.3.21) отримаємо оцінку

$$\sup_{k\in N,\ x\in A} \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i(x)\, b_i(x)\right| \le$$

$$\le 2c \cdot \sup_{k\in N,\ x\in A} \left(\left|\sum_{i=n+1}^{n+k-1}\big(a_i(x) - a_{i+1}(x)\big)\right| + |a_{n+k}(x)|\right) =$$

$$= 2c \cdot \sup_{k\in N,\ x\in A} \left(|a_{n+1}(x) - a_{n+k}(x)| + |a_{n+k}(x)|\right) \le$$

$$\leq 6c \cdot \sup_{k \in N,\ x \in A} |a_{n+k}(x)|. \qquad (22.3.22)$$

З умови рівномірної збіжності послідовності функцій $\{a_n \,|n \in Z_+\}$ до нульової функції випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N\colon \sup_{n > n_0,\ x \in A} |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6c}. \qquad (22.3.23)$$

Зрештою, за (22.3.22)−(22.3.23) справедливе твердження

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N\colon \sup_{n > n_0,\ k \in N,\ x \in A} \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i(x)\, b_i(x)\right| < \varepsilon,$$

себто ряд (22.3.19) задовольняє критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду на множині $A \subset R$.

Отже, функціональний ряд (22.3.19) рівномірно збігається на множині A.

***Теорему доведено*.**

Теорема 22.3.6 (***ознака Абеля−Харді рівномірної збіжності функціональних рядів***). *Нехай на множині* $A \subset R$ *задані послідовності функцій* $\{a_n \,|n \in Z_+\}$ *та* $\{b_n \mid n \in Z_+\}$ *такі, що*:

1) *для будь-якого* $x \in A$ *послідовність чисел* $a_n(x)$, $n \in Z_+$, *є монотонною*;

2) *послідовність функцій* $\{a_n \mid n \in Z_+\}$ *на множині* A *рівномірно обмежена*:

$$\exists\, c > 0 :\ \forall n \in Z_+ \ \forall x \in A \ \ |a_n(x)| \leq c, \qquad (22.3.24)$$

чи те саме:

$$\exists\, c > 0 : \sup_{n \in Z_+,\ x \in A} |a_n(x)| \le c; \qquad (22.3.25)$$

3) *функціональний ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x)$ *рівномірно збігається на множині* $A \subset R$.

Тоді функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\, b_n(x)$$

теж рівномірно збігається на множині $A \subset R$.

Доведення. Нехай виконуються вказані умови 1)–3). Так само, як і за доведення попередньої теореми, запишемо перетворення Абеля (22.3.20) для сум послідовних членів функціонального ряду (22.3.19):

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i(x)\, b_i(x) = \sum_{i=n+1}^{n+k-1} \big(a_i(x) - a_{i+1}(x)\big) B_{n+1}^{i}(x) + a_{n+k}(x) B_{n+1}^{n+k}(x),$$

$$n \in Z_+, \quad x \in A,$$

де як і раніше

$$B_n^k := b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_k = s_k^b - s_n^b, \ \ k \ge n,\ n \in Z_+, \ \ x \in A,$$

$$B_n^{n-1} := 0,\ n \in Z_+, \ \ x \in A.$$

З умови (22.3.25) випливає, що

$$\exists\, c > 0 : \sup_{n \in Z_+,\ x \in A} |a_n(x)| \le c,$$

звідки

$$\sup_{k \in N,\ x \in A} \big(|a_{n+1}(x) - a_{n+k}(x)| + |a_{n+k}(x)|\big) \le 3c. \qquad (22.3.26)$$

За умовою рівномірної збіжності функціонального ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x)$ справедливе твердження

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \sup_{n \in Z_+,\ k \geq n,\ x \in A} \left| B_n^k(x) \right| = < \frac{\varepsilon}{3c}. \quad (22.3.27)$$

Тож за останніми нерівностями (22.3.26)–(22.3.27) матимемо:

$$\sup_{k \in N,\ x \in A} \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i(x)\, b_i(x) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3c} \sup_{k \in N,\ x \in A} \left(\left| \sum_{i=n+1}^{n+k-1} \big(a_i(x) - a_{i+1}(x)\big) \right| + |a_{n+k}(x)| \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3c} \sup_{k \in N,\ x \in A} \left(|a_{n+1}(x) - a_{n+k}(x)| + |a_{n+k}(x)| \right) \leq \frac{\varepsilon}{3c}\, 3c = \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \sup_{n > n_0,\ k \in N,\ x \in A} \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i(x)\, b_i(x) \right| < \varepsilon.$$

Це означає, що ряд (22.3.19) задовольняє критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду на множині $A \subset R$.

Таким чином, функціональний ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ рівномірно збігається на множині A.

Теорему доведено.

***Приклад* 22.3.5.** Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{4} + x\right)}{\sqrt{n + x^2}}, \quad x \in R. \quad (22.3.28)$$

Розв'язання. Подамо ряд (22.3.28) у вигляді (22.3.19), поклавши

$$b_n(x) := \cos\left(\frac{n\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{4} + x\right), \quad n \in N,$$

$$a_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n + x^2}}, \quad n \in N.$$

Можна помітити, що часткові суми функціонального ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ рівномірно обмежені на множині дійсних чисел R. Справді,

$$\left|s_n^b(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{4} + x\right)\right)\right| =$$

$$= 2|\sin x| \left|\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{4}\right| \le 2(1+\sqrt{2}\,), \quad n \in N, \quad x \in R.$$

Разом з тим помічаємо, що

$$a_n(x) \downarrow 0, \quad n \to +\infty, \quad x \in R,$$

і справедливі нерівності

$$0 \le a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \in N, \quad x \in R.$$

З огляду на це, послідовність невід'ємних функцій $\{a_n \mid n \in N\}$ мажорується на множині R збіжною до нуля числовою послідовністю $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \mid n \in N\right\}$, тому

$$a_n \rightrightarrows 0, \quad n \to +\infty, \quad x \in R.$$

Отже, за ознакою Діріхле−Харді (**теорема 22.3.5**) функціональний ряд (22.3.28) рівномірно збігається на всій числовій осі.

***Відповідь*:** ряд (22.3.28) рівномірно збіжний на множині R.

***Приклад* 22.3.6.** Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{2n+x^2}{n+2x^2}\right) \frac{\sin x \cdot \sin 2nx}{2n+1}, \quad x \in R. \quad (22.3.29)$$

Розв'язання. Перепишемо ряд (22.3.29) у вигляді

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)\, b_n(x),$$

позначивши

$$a_n(x) := \ln\left(\frac{2n+x^2}{n+2x^2}\right), \quad n \in N,$$

$$b_n(x) := \frac{\sin x \cdot \sin 2nx}{2n+1}, \quad n \in N.$$

Перетворивши загальний елемент послідовності $\{a_n\ | n \in N\}$ до вигляду

$$a_n(x) := \ln\left(2 - \frac{3x^2}{n+2x^2}\right), \quad n \in N, \quad x \in R,$$

помічаємо, що ця послідовність є рівномірно обмеженою на множині R:

$$|a_n(x)| \leq \ln 2, \quad n \in N, \quad x \in R.$$

Разом з тим, за фіксації довільного числа $x \in R$ вказана числова послідовність $\{a_n(x) \mid n \in N\}$ монотонно зростає.

Отже, функціональний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ задовольняє перші дві умови ознаки Абеля−Харді (**теорема 22.3.6**).

У свою чергу, функціональний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ теж подамо у вигляді суми (22.3.19):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(x) b_n'(x),$$

поклавши

$$a_n'(x) := \frac{1}{2n+1}, \quad n \in N, \quad x \in R,$$

$$b_n'(x) := \sin x \cdot \sin 2nx, \quad n \in N, \quad x \in R.$$

Позаяк елементи монотонної послідовності $\{a'_n(x) \mid n \in N\}$ не залежать від чисел $x \in R$, то прямування цієї послідовності до нульової функції є рівномірним на множині R.

До того ж, часткові суми ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} b'_n(x)$ рівномірно обмежені на множині дійсних чисел. Справді,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b'_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}(\sin x \cdot \sin 2nx)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\cos(2n-1)x - \cos(2n+1)x)\right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |\cos x - \cos(2n+1)x| \leq 1, \quad n \in N, \quad x \in R.$$

Тож за ознакою Діріхле−Харді функціональний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ рівномірно збігається на множині R.

У такому разі, досліджуваний функціональний ряд (22.3.29) задовольняє і третю умову ознаки Абеля−Харді, а отже, він також є рівномірно збіжним на множині дійсних чисел R.

***Відповідь*:** ряд (22.3.29) рівномірно збігається на множині R.

***Завдання для самостійної роботи* 22.3.3.** *Нехай ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, *складений з монотонних на відрізку* $[a\,;b]$ *функцій, є абсолютно збіжним на кінцях цього відрізка. Довести, що тоді цей ряд збігається абсолютно та рівномірно на відрізку* $[a\,;b]$.

***Завдання для самостійної роботи* 22.3.4.** *Нехай ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$ *мажорується на множині* $A \subset R$ *функціональним рядом* $\sum_{n=1}^{+\infty}|v_n(x)|$, *рівномірно збіжним на ній. Довести, що тоді ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *збігається абсолютно та рівномірно на множині* $A \subset R$.

***Завдання для самостійної роботи* 22.3.5.** *Нехай числовий ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *є збіжним. Довести, що тоді функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-nx}$ *збігається рівномірно на множині* R_+, *а ряди* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n cosnx$ *та* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n sinnx$ *збігаються рівномірно на будь-яких відрізках, що не містять точок послідовності* $\{x_n = 2n\pi \mid n \in Z\}$.

***Завдання для самостійної роботи* 22.3.6.** *Нехай ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$ *збігається рівномірно на множині* $A \subset R$. *Довести, що тоді ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *теж збігається рівномірно на цій множині.*

Завдання для самоперевірки

Дослідити на рівномірну збіжність функціональні ряди на вказаній множині:

22.3.1. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}(1+x^2)}$, $x \in R$.

22.3.2. $\sum_{n=1}^{+\infty} arctg\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^3$, $x \in [1;+\infty)$.

22.3.3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{arctgnx}{2+\ln^2(n+x)} \sin\frac{\sqrt{x}}{n}$, $x \in [1;+\infty)$.

22.3.4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [0\,;1]$.

22.3.5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos^2 nx}$, $x \in R$.

22.3.6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{2n^2+x^2}}$, $x \in R$.

22.3.7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^2+x^2}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in [0\,;1]$.

22.3.8. $\sum_{n=1}^{+\infty} ln\left(1 + \frac{1}{x^2 n^2}\right)$, $x \in [1;+\infty)$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

22.3.1. Збігається рівномірно.

22.3.2. Збігається нерівномірно.

22.3.3. Збігається рівномірно.

22.3.4. Збігається нерівномірно.

22.3.5. Збігається рівномірно.

22.3.6. Збігається рівномірно.

22.3.7. Збігається рівномірно.

22.3.8. Збігається рівномірно.

Завдання для самоперевірки **22.3.9.** Чи слідує за абсолютною та рівномірною збіжністю на множині $A \subset R$ ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ рівномірна збіжність на цій множині функціонального ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$?

Вказівка**:** розглянути приклад функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n (1-x), \;\; x \in [0\,;1].$$

22.4. Деякі властивості рівномірно збіжних рядів

Нехай множина $A \subset R$ така, що кожна її точка $x \in A$ є граничною. Прикладами подібних множин можуть бути відрізок, інтервал, сегмент, їх об'єднання тощо. Для такої множини є коректним поняття неперервності функції на ній, себто неперервність у кожній точці множини. Тоді можна сформулювати таке твердження.

Теорема 22.4.1 (*про неперервність суми функціонального ряду*). *Сума f рівномірно збіжного на множині $A \subset R$ функціонального ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, члени якого є неперервними на цій множині функціями, також є неперервною на ній, тобто*

$$\forall x_0 \in A\colon \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0). \qquad (22.4.1)$$

Доведення. Нехай x_0 – довільна точка множини $A \subset R$. Позаяк всі члени ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ є неперервними у цій точці, то такою буде й будь-яка часткова сума $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n \in N$. Але функціональна послідовність, складена з сум s_n, $n \in N$, рівномірно збігається на множині A до суми ряду f:

$$s_n \rightrightarrows f, \quad n \to +\infty, \quad x \in A.$$

Тоді за **теоремою 22.2.1** гранична функція f теж є неперервною у точці x_0.

Теорему доведено.

Зауважимо, що твердження (22.4.1) можна записати ще у вигляді

$$\forall x_0 \in A\colon \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x). \qquad (22.4.12)$$

Теорема 22.4.2 (***про почленне інтегрування функціонального ряду***). *Нехай функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, $x \in [a\,;b]$, *складений з інтегрованих на відрізку* $[a\,;b]$ *функцій* u_n, *рівномірно збігається на ньому до суми* f. *Тоді за будь-якої фіксованої точки* $x_0 \in [a\,;b]$ *також буде рівномірно збігатися на відрізку* $[a\,;b]$ *функціональний ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt, \quad x \in [a\,;b], \tag{22.4.3}$$

та справедлива рівність

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt, \quad x \in [a\,;b], \tag{22.4.4}$$

тобто

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt, \quad x \in [a\,;b]. \tag{22.4.5}$$

Доведення. Нехай точки x та x_0 лежать на відрізку $[a\,;b] \subset R$. Тоді інтегрованість функцій $u_n, n \in N$, на відрізку $[a\,;b]$ зумовлює інтегрованість їх сум $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n \in N$, як на цьому відрізку, так і на довільному відрізку $[x\,;x_0] \subset [a\,;b]$.

Аналогічно з рівномірної збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ на відрізку $[a\,;b]$ випливає і його рівномірна збіжність на довільному підвідрізку $[x\,;x_0] \subset [a\,;b]$, тобто послідовність інтегрованих функцій $\{s_n \mid n \in N\}$ рівномірно збігається на ньому до суми f функціонального ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Тож за висновком **теореми 22.2.3** сума f даного функціонального ряду також є інтегрованою функцією та виконується рівність (22.4.4).

До того ж, за рівномірною збіжністю функціонального ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ на відрізку $[a\,;b]$ маємо

$$\sup_{x \in [a\,;b]} \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right| =$$

$$= \sup_{x\in[a\,;b]} \left|\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(t) - f(t)\right)dt\right| \leq$$

$$= (b-a) \sup_{x\in[a\,;b]} |s_n(x) - f(x)| \to 0,\ \ n \to +\infty.$$

Отже, функціональний ряд (22.4.3) збігається на відрізку $[a\,;b]$ рівномірно.

Теорему доведено.

Звісно, неперервність членів функціонального ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ на відрізку $[a\,;b] \subset R$ обумовлює їх інтегрованість на ньому. За чим та за вище доведеним справджується таке твердження:

Наслідок 22.4.1. *Нехай функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, $x \in [a\,;b]$, *члени якого є неперервними на відрізку* $[a\,;b] \subset R$, *рівномірно збігається на ньому до суми* f. *Тоді числовий ряд, утворений інтегруванням по цьому відрізку членів функціонального ряду, є збіжним, та виконується рівність*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx, \tag{22.4.6}$$

тобто

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx. \tag{22.4.7}$$

***Приклад* 22.4.1 (*Меркатор, 1668*).** Знайти суму f функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\quad x \in (-1;+1]. \tag{22.4.8}$$

Розв'язання. Нехай x – довільна точка інтервалу $(-1\,;+1)$. Тоді знайдеться настільки мале додатне число $\varepsilon \in (0\,;+1)$, що точка x потрапить у відрізок $[-1+\varepsilon\,;1-\varepsilon]$, на якому функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} \qquad (22.4.9)$$

збігається рівномірно, тому що функціональний ряд, складений з модулів його членів, мажорується на відрізку $[-1+\varepsilon\,;1-\varepsilon]$ збіжним числовим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\varepsilon)^{n-1}$ (геометричний ряд!). Тож функціональний ряд (22.4.9) допускає своє почленне інтегрування на довільному підвідрізку $[0\,;x] \subset [-1+\varepsilon\,;1-\varepsilon]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x(-t)^{n-1}dt =$$

$$= \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-t)^{n-1}\right)dt = \int_0^x\frac{1}{1+t}dt = \ln(1+x), \quad x \in (-1\,;+1).$$

На відрізку $[0\,;1]$ функціональний ряд (22.4.8) збігається рівномірно за ознакою Абеля–Харді (**теорема 22.3.6**).

Справді, за кожного фіксованого значення числа $x \in [0\,;1]$ числові послідовності $\{a_n(x) = x^n \,|n \in N\}$ є монотонними, а функціональна послідовність $\{a_n \,|n \in N\}$ є рівно обмеженою на $[0\,;1]$. До того ж, функціональний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\,(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ не залежить від змінної x, що обумовлює його рівномірну збіжність на відрізку $[0\,;1]$.

Крім того, всі члени рівномірно збіжного ряду (22.4.8) є неперервними функціями на $[0\,;1]$, через це його сума f теж є неперервною функцією на відрізку $[0\,;1]$, а отже, й у його кінцевій точці $x=1$, що дає можливість знайти значення функції f у цій точці:

$$f(1) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \ln(1+x) = \ln(1+x)\Big|_{x\,=\,1} = ln2.$$

Відповідь: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x), \quad x \in (-1;+1]$, причому

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Теорема 22.4.3 (***про почленне диференціювання функціонального ряду***)**.** *Нехай*:

1) *функціональний ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), x \in [a\,; b], \tag{22.4.10}$$

складений із неперервно диференційованих на відрізку $[a\,; b]$ *функцій* u_n, *збігається хоча б в одній точці відрізка* $x_0 \in [a\,; b]$;

2) *ряд, складений із похідних членів функціонального ряду* (22.4.10), *тобто функціональний ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n{}'(x), x \in [a\,; b], \tag{22.4.11}$$

збігається на відрізку $[a\,; b]$ *рівномірно.*

Тоді вихідний функціональний ряд (22.4.10) *теж збігається на цьому відрізку* $[a\,; b]$ *рівномірно до своєї суми* f, *яка є неперервно диференціййованою на відрізку* $[a\,; b]$ *функцією, та справджується тотожність*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n{}'(x), \quad x \in [a\,; b], \tag{22.4.12}$$

тобто

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n{}'(x), \quad x \in [a\,; b]. \tag{22.4.13}$$

Доведення. З умов теореми випливає, що ряд (22.4.11), складений із неперервних на відрізку $[a\,;b]$ членів $u_n{}'$, рівномірно збігається до деякої суми g:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n{}'(x),\quad x\in[a\,;b].$$

Тож за висновками **теорем 22.4.1−22.4.2** вказана функція g теж неперервна у точках відрізка $[a\,;b]$, і на ньому рівномірно збігається ряд

$$\int_{x_0}^{x}g(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{x_0}^{x}u_n{}'(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\big(u_n(x)-u_n(x_0)\big).\quad (22.4.14)$$

Отже, вихідний функціональний ряд (22.4.10), який є сумою рівномірно збіжних на відрізку $[a;b]$ рядів, а саме ряду (22.4.11) та ряду $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$, теж рівномірно збігається на цьому відрізку до деякої суми f:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\big(u_n(x)-u_n(x_0)\big)+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0),\ \ x\in[a\,;b],$$

тобто,

$$f(x)=\int_{x_0}^{x}g(t)dt+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0),\ \ x\in[a\,;b].$$

Ця тотожністю зумовлює диференційованість функції f у точках відрізка $[a\,;b]$, причому

$$f'(x)=\left(\int_{x_0}^{x}g(t)dt\right)'+\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)\Big)'=$$

$$=g(x)+0=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n{}'(x),\quad x\in[a\,;b],$$

тобто

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\Big)'=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n{}'(x),\quad x\in[a\,;b].$$

Теорему доведено.

Приклад **22.4.2.** Знайти суму f функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}, \quad x \in (0; +\infty). \tag{22.4.15}$$

Розв'язання. Нехай x – довільна точка інтервалу $(0\,; +\infty)$. Тоді знайдеться настільки мале додатне число $\varepsilon > 0$, що точка x потрапить у проміжок $[\varepsilon;+\infty)$, на якому функціональний ряд (22.4.15) мажорується додатним збіжним (у чому не важко переконатися, наприклад, за ознакою Даламбера!) числовим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n\varepsilon}$, що обумовлює рівномірну збіжність досліджуваного ряду (22.4.15).

Окрім того, функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}, \tag{22.4.16}$$

який складений з первісних функцій членів попереднього ряду (себто $u_n(x) = v_n{}'(x)$, $x \in (0; +\infty)$), є геометричним рядом і збігається до суми

$$g(x) = \frac{-e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x-1}, \quad x \in (0; +\infty).$$

Тож до ряду (22.4.16) на проміжку $[\varepsilon;+\infty)$ застосовна теорема про почленне диференціювання функціонального ряду (**теорема 22.4.3**), за висновком якої маємо:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-nx})' =$$

$$= -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\right)' = -\left(\frac{1}{e^x-1}\right)' = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}\,. \tag{22.4.17}$$

Відповідь: ряд (22.4.15) збігається до суми $f(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$, $x \in (0; +\infty)$.

Завдання для самоперевірки

Знайти суму функціонального f ряду на вказаній множині:

22.4.1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in R$.

22.4.2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n(n+1)}$, $x \in [-1\,;+1]$.

22.4.3. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$, $x \in (-1\,;+1)$.

22.4.4. $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$, $x \in (-1\,;+1)$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

22.4.1. $f(x) = arctgx$, $x \in R$.

22.4.2. $f(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$, $x \in [-1\,;+1]$.

22.4.3. $f(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$, $x \in (-1\,;+1)$.

22.4.4. $f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$, $x \in (-1\,;+1)$.

***Завдання для самоперевірки* 22.4.5.** Довести, що у кожній точці $x \in R$ функція $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ має неперервну похідну.

***Завдання для самоперевірки* 22.4.6.** Довести, що на проміжку $(0\,;+\infty)$ функція $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x}$ має похідні всіх порядків.

Розділ 23. Степеневі ряди

23.1. Множина збіжності степеневого ряду

***Означення* 23.1.1**. *Функціональний ряд, що має вигляд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots \ , \qquad (23.1.1)$$

називають ***степеневим рядом*** *із* ***центром ряду*** *в точці* $x = x_0$ *та з* ***коефіцієнтами*** $c_n \in R,\ n \in Z_+$; *також вважають, що він у центрі завжди є збіжним до суми* c_0.

Найпростішим прикладом нескінченного (із нескінченною кількістю ненульових членів) степеневого ряду є, мабуть, геометричний ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \ , \qquad (23.1.2)$$

який, як відомо, збігається на інтервалі $(-1\,;+1)$. Центром цього степеневого ряду є точка $x_0 = 0$, а всі коефіцієнти ряду дорівнюють одиниці:

$$c_n = 1, \quad n \in Z_+.$$

Довільний степеневий ряд (23.1.1) можна звести до степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \qquad (23.1.3)$$

із центром у точці $x_0 = 0$, виконавши заміну змінної величини $x - x_0$ на змінну x. Отож, є сенс спочатку вивчати степеневі ряди простішого вигляду (23.1.3), а потім переносити отримані результати на загальний випадок.

Теорема 23.1.1 (***перша теорема Абеля для степеневих рядів***)**.** *Нехай у деякій точці* $x_0 \neq 0$ *послідовність* $\{c_n {x_0}^n \mid n \in Z_+\}$ *членів степеневого ряду* (23.1.3) *є обмеженою. Тоді в усіх точках* $x \in R$*, для яких виконана нерівність*

$$|x| < |x_0|, \tag{23.1.4}$$

степеневий ряд (23.1.3) *збігається, причому абсолютно.*

Доведення. За умовою теореми знайдеться таке число $c > 0$, що

$$\forall n \in Z_+ \quad |c_n {x_0}^n| \leq c.$$

У такому разі

$$\forall n \in Z_+ \quad |c_n x^n| = |c_n {x_0}^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq c \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \quad x \in R.$$

Отже, за умови (23.1.4) ряд, складений з модулів членів степеневого ряду (23.1.3), обчислених у точці x, мажорується збіжним геометричним рядом

$$c \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \qquad \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1,$$

через що степеневий ряд (23.1.3) у вибраній точці x є абсолютно збіжним.

Теорему доведено.

Теорема 23.1.2. 1. *Якщо степеневий ряд* (23.1.3) *у деякій точці* $x_0 \neq 0$ *є збіжним, то він абсолютно збігається в усіх точках* $x \in R$*, для яких виконана нерівність* (23.1.4):

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} c_n {x_0}^n\right| < +\infty, \ x_0 \neq 0 \implies \forall x \in (-|x_0|; |x_0|) \ \ \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n||x|^n < +\infty.$$

2. *Якщо степеневий ряд* (23.1.3) *у деякій точці* $x_0 \neq 0$ *є розбіжним, то він розбігається в усіх точках* $x \in R$*, для яких виконана нерівність*

$$|x| > |x_0|. \tag{23.1.5}$$

Доведення. Якщо степеневий ряд (23.1.3) у деякій точці $x_0 \neq 0$ є збіжним, то послідовність членів отриманого числового ряду утворюють збіжну (до нуля), а отже, й обмежену числову послідовність. Тож перше твердження даної теореми випливає за висновком **теореми 23.1.1**.

Нехай степеневий ряд (23.1.3) у деякій точці $x_0 \neq 0$ є розбіжним. Припустимо, що у деякій точці $x \in R$ степеневий ряд (23.1.3) є збіжним і при цьому виконана нерівність (23.1.5). Тоді за висновком попереднього твердження цієї теореми степеневий ряд має бути збіжним й у точці x_0, а це суперечить початковій умові. Отже, збіжність степеневого ряду (23.1.3) у точці x, для якої виконана умова (23.1.5), неможлива.

Теорему доведено.

Позначимо

$$\rho := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\,, \tag{23.1.6}$$

і покладемо

$$r := \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}\,, \tag{23.1.7}$$

причому останнє будемо розуміти як

$$r := \left[\begin{array}{ll} 0, & \rho = +\infty; \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty; \\ +\infty, & \rho = 0. \end{array}\right.$$

Означення* 23.1.2**. *Число* $r \in [0\,; +\infty]$ *називають* ***радіусом збіжності *степеневого ряду.*

Теорема 23.1.3 (***теорема Коші−Адамара***).

1. *Якщо* $r = 0$, *то степеневий ряд* (23.1.3) *збігається тільки у своєму центрі, тобто у точці* $x_0 = 0$.

2. *Якщо* $0 < r < +\infty$, *то степеневий ряд* (23.1.3) *збігається, причому абсолютно, у будь-якій точці* x, *яка лежить ближче до його центра за число* r, *та розбігається у точках* x, *які лежать далі за* r:

$$|x| < r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n x^n| < +\infty,$$

$$|x| > r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \ - \text{розбіжний.}$$

3. *Якщо* $r = +\infty$, *то степеневий ряд* (23.1.3) *збігається абсолютно у будь-якій точці* $x \in R$.

Доведення. 1. Нехай $r = 0$, тобто

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty.$$

Тоді знайдеться така підпослідовність $\{c_{n_k} \mid k \in N\}$ послідовності коефіцієнтів степеневого ряду (23.1.3), що

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} = +\infty.$$

Отже, яке б не було число $x \neq x_0 = 0$, то для додатного числа $\varepsilon = \frac{1}{|x|}$ знайдеться таке натуральне число $k_0 \in N$, що

$$\forall\, k > k_0 \quad \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \varepsilon = \frac{1}{|x|} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall k > k_0 \quad |c_{n_k}| > \frac{1}{|x|^{n_k}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k > k_0 \quad |c_{n_k} x^{n_k}| > 1,$$

за чим маємо, що $c_n x^n \nrightarrow 0,\ n \to +\infty,$ тобто не виконується необхідна умова збіжності числового ряду. За довільністю вибору числа $x \neq 0$ випливає що степеневий ряд (23.1.3) розбігається на всій дійсній числовій осі, крім точки $x \neq x_0 = 0$.

2. Нехай $0 < r < +\infty$, що зумовлює $0 < \rho < +\infty$.

Якщо фіксоване число $x \neq 0$ таке, що $|x| < r$, тобто $|x|\rho < 1$, то знайдеться таке дійсне число q, яке лежить між цими числами $|x|\rho$ та 1. Тоді

$$|x|\rho < q < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho < \frac{q}{|x|},\ q \in (0;1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{q}{|x|}, \quad q \in (0;1).$$

У такому разі знайдеться таке натуральне число $n_0 \in N$, що

$$\forall n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{q}{|x|} \ \Leftrightarrow\ \forall n \geq n_0 \quad |c_n x^n| < q^n.$$

Тож числовий ряд $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |c_n x^n|$ мажорується збіжним геометричним рядом $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n$, $q \in (0;1)$, а отже, теж збігається.

Таким чином, якщо фіксоване число $x \neq 0$ таке, що $|x| < r$, то степеневий ряд збігається, причому абсолютно.

Нехай фіксоване число $x \in R$ таке, що $|x| > r = \frac{1}{\rho}$, тоді

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|x|}.$$

За цим випливає існування такої підпослідовності $\{c_{n_k} \mid k \in N\}$ послідовності коефіцієнтів степеневого ряду (23.1.3), що

$$\forall k > k_0 \quad \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \frac{1}{|x|} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k > k_0 \quad |c_{n_k} x^{n_k}| > 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |c_n x^n| \nrightarrow 0, \; n \to +\infty \quad \Leftrightarrow \quad c_n x^n \nrightarrow 0, \; n \to +\infty.$$

Отже, якщо фіксоване число x таке, що $|x| > r$, то степеневий ряд (23.1.3) розбігається.

3. Нехай $r = +\infty$, тобто $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. Тоді яке б не було фіксоване число $x \neq 0$, то знайдеться таке натуральне число $n_0 \in N$, що

$$\forall\, n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|x|} \;\Leftrightarrow\; \forall\, n \geq n_0 \quad |c_n x^n| < \frac{1}{2^n}.$$

Тому числовий ряд $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |c_n x^n|$ мажорується збіжним геометричним рядом $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, що зумовлює абсолютну збіжність ряду (23.1.3).

Отже, у випадку, коли $r = +\infty$, степеневий ряд (23.1.3) абсолютно збігається у всіх дійсних точках числової осі.

Теорему доведено.

***Завдання для самостійної роботи* 23.1.1.** *Нехай D – це множина збіжності степеневого ряду* (23.1.3), *тобто*

$$D := \{x \in R : \; |\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n| < +\infty \}.$$

Довести, що тоді його радіус збіжності можна означити як

$$r := \sup_{x \in D} |x| \,. \tag{23.1.8}$$

Наслідок 23.1.1. 1. *Якщо $r = 0$, то степеневий ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n$ збігається тільки у своєму центрі, тобто у точці x_0.*

2. *Якщо* $0 < r < +\infty$, *то степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n$ *збігається, причому абсолютно, у будь-якій точці* x, *яка лежить ближче до його центру за число* r, *та розбігається у точках* x, *які лежать далі за* r:

$$|x - x_0| < r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n (x - x_0)^n| < +\infty;$$

$$|x - x_0| > r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n \ - \text{розбіжний.}$$

3. *Якщо* $r = +\infty$, *то степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n$ *збігається абсолютно у будь-якій точці* $x \in R$.

Таким чином, у випадку $0 < r < +\infty$ множиною D збіжності степеневого ряду (23.1.1) є інтервал

$$(x_0 - r\,;\ x_0 + r), \tag{23.1.9}$$

до якого може бути приєднано одну чи обидві його кінцеві точки $x_0 \pm r$. У випадку $r = 0$ множина D стискається до єдиної точки x_0, що є центром степеневого ряду. А коли $r = +\infty$, то $D = R$.

Слід зауважити, якщо існують скінченні чи нескінченні границі числових послідовностей $\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \mid n \in Z_+\right\}$ та $\left\{\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \mid n \in Z_+\right\}$, то радіус збіжності степеневого ряду можна обчислити за простішими від (23.1.7) формулами:

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{23.1.10}$$

***Приклад* 23.1.1.** Знайти множину збіжності D степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,(x + 1)^n. \tag{23.1.11}$$

Розв'язання. Знаходимо центр x_0 та коефіцієнти c_n степеневого ряду:

$$x_0 = -1, \quad c_n = n!, \quad n \in Z_+.$$

Обчислюємо за формулами (23.1.10) радіус збіжності:

$$r = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Отже, за висновком **наслідку 23.1.1** степеневий рід (23.1.11) збігається тільки у своєму центрі, точці $x_0 = -1$.

***Відповідь*:** $D = \{-1\}$.

***Приклад* 23.1.2.** Знайти множину збіжності D степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}. \qquad (23.1.12)$$

Розв'язання. Повторимо дії, застосовані у попередньому прикладі. Знаходимо центр x_0 та коефіцієнти c_n степеневого ряду:

$$x_0 = 0, \quad c_n = \frac{1}{n!}, \quad n \in Z_+.$$

Обчислюємо за формулами (23.1.10) радіус збіжності:

$$r = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty.$$

Отже, за висновком **теореми 23.1.3** степеневий рід (23.1.12) збігається на всій множині дійсних чисел R.

***Відповідь*:** $D = R$.

***Приклад* 23.1.3.** Знайти множину збіжності D степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n+1}}. \qquad (23.1.13)$$

Розв'язання. Перепишемо степеневий ряд (23.1.13) у канонічному вигляді (23.1.1):

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n+1}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(x-x_0)^n,$$

за яким знаходимо центр і коефіцієнти степеневого ряду

$$x_0=\frac{1}{2},\quad c_n=\frac{2^n}{\sqrt{n+1}},\quad n\in Z_+.$$

Після цього знаходимо його радіус збіжності:

$$r=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n+1}}\frac{\sqrt{n+2}}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{2}\,.$$

Отже, степеневий ряд (23.1.13) доказово збігається абсолютно на інтервалі

$$(x_0-r\,;\,x_0+r)=(\,0\,;\,1\,).\qquad(23.1.14)$$

У лівій крайній точці $x_1=0$ інтервалу збіжності (23.1.14) степеневий ряд (3. 23.1.13) набуває вигляду

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2x_1-1)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\,,$$

і є рядом Лейбніца, який, звісно, збігається.

У правій крайній точці $x_2=1$ інтервалу збіжності (23.1.14) степеневий ряд (23.1.13) є числовим рядом Рімана–Діріхле:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2x_2-1)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

з показником степеня $\alpha=\frac{1}{2}<1$, через що розбігається.

Отже, за висновком **наслідку 23.1.1** степеневий ряд (23.1.13) збігається лише у точках проміжку [0 ; 1).

***Відповідь*:** $D=[0\,;1)$.

***Приклад* 23.1.4.** Знайти множину збіжності D степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} x^{2n}. \qquad (23.1.15)$$

Розв'язання. Знаходимо центр та коефіцієнти заданого степеневого ряду (23.1.15):

$$x_0 = 0, \ \ c_0 = c_{2n-1} = 0, \ \ n \in N,$$

$$c_{2n} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}, \quad n \in N,$$

з чого робимо висновок, що границя (23.1.10) не існує. У такому разі для обчислення радіуса збіжності можна застосувати формули (23.1.6)−(23.1.7). Але можна й уникнути процесу знаходження верхньої границі числової послідовності $\left\{\sqrt[n]{|c_n|} \mid n \in Z_+\right\}$, виконавши у степеневому ряді (23.1.15) заміну змінної $t = x^2 \geq 0$. Як результат, отримаємо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n' t^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} t^n, \quad t \geq 0, \qquad (23.1.16)$$

із центром $t_0 = 0$ та коефіцієнтами

$$c_0' = 0, \quad c_n' = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}, \quad n \in N.$$

Після цього легко знайти радіус збіжності новоутвореного ряду (23.1.16):

$$r' = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n'|}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} = \frac{1}{e}.$$

Дослідимо на збіжність ряд (23.1.16) у точці $t = \frac{1}{e}$. Підставивши значення $t = \frac{1}{e}$ у цей ряд , одержимо числовий ряд

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} t^n\right)\Bigg|_{t=\frac{1}{e}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}\frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad (23.1.17)$$

із членами $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} e^{-n},\ n \in N.$ Помічаємо, що

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} e^{-n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-n\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)-n\right)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^0 \neq 0.$$

Це означає, що числовий ряд (23.1.17) є розбіжним.

Тож степеневий ряд (23.1.16) збігається тільки у точках

$$0 \le t < \frac{1}{e} \iff x^2 < \frac{1}{e} \iff x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\ ;\ +\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

Отже, множиною збіжності вихідного ряду (23.1.15) є інтервал $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\ ;\ +\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Відповідь: $D = \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\ ;\ +\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Завдання для самостійної роботи **23.1.2.** *Нехай степеневий ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ має радіус збіжності r. Довести, що тоді степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{kn},$$

де $k \in N$ – фіксоване число, має радіус збіжності $r' = \sqrt[k]{r}$.

Завдання для самоперевірки

Знайти множину збіжності D степеневого ряду:

23.1.1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-3x)^n}{\sqrt{n^2-n+1}}$.

23.1.2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{(n+1)^n}}$.

23.1.3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{n}x\right)^n$.

23.1.4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\cos\frac{1}{2^n}(x-2)^n$.

23.1.5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}(1-x)^{2n}$.

23.1.6. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n+(-2)^n}{\sqrt{n^3+1}}(x+1)^n$.

23.1.7. $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n\, x^{n^3}$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

23.1.1. $D = (0; +\frac{2}{3}]$.

23.1.2. $D = R$.

23.1.3. $D = \{0\}$.

23.1.4. $D = (-2\,;\ +6)$.

23.1.5. $D = \left(1-\sqrt{2}\,;\ 1+\sqrt{2}\right)$.

23.1.6. $D = \left[-\frac{5}{4}\,; -\frac{3}{4}\right]$.

23.1.7. $D = (-1\,;\ +1)$.

23.2. Властивості степеневих рядів

Перш за все з'ясуємо питання про множини рівномірної збіжності степеневих рядів.

Нехай степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \tag{23.2.1}$$

має радіус збіжності відмінний від нуля, тобто $r > 0$. Припустимо, що деякий непустий відрізок $[a\,; b]$ міститься у інтервалі збіжності зазначеного степеневого ряду (23.2.1):

$$[a\,; b] \subset (-\,r\,;\ +r\,).$$

Позначимо

$$x_0 := \max_{x \in [a\,;b]} |x|\ .$$

Тоді, напевно,

$$[a\,; b] \subset [-x_0\,; +x_0] \subset (-\,r\,;\ +r\,), \tag{23.2.2}$$

і в точці $x_0 \in (-\,r\,;\ +r\,)$ степеневий ряд (23.2.1) є абсолютно збіжним. При цьому всі точки x відрізка $[a\,; b]$ задовольняють нерівність

$$|c_n x^n| = |c_n||x^n| \le |c_n||{x_0}^n| = |c_n {x_0}^n|, \tag{23.2.3}$$

а отже, за ознакою Вейєрштрасса степеневий ряд (23.2.1) на цьому відрізку збігається рівномірно.

Таким чином, степеневий ряд (23.2.1) збігається рівномірно на будь-якому відрізку $[a\,; b]$, що цілком міститься в його інтервалі збіжності (23.2.2).

Зрозуміло, що цей результат нітрохи не зміниться від зсуву центра степеневого ряду в іншу точку, відмінну від нульової. Мало того, це твердження можна поширити і на той випадок, коли степеневий ряд збігається ще й у крайніх точках інтервалу (23.2.2).

Теорема 23.2.1 (***друга теорема Абеля для степеневих рядів***). *Нехай степеневий ряд* (23.2.1) *збігається у кінцевій точці* $x = -r$ *чи* $x = +r$ *інтервалу збіжності* (23.2.2). *Тоді цей степеневий ряд збігається рівномірно на довільному відрізку* $[a\,;b]$, *який міститься в об'єднанні інтервалу збіжності* (23.2.2) *із цією кінцевою точкою.*

Доведення. Досить довести теорему лише для відрізків $[0\,;+r]$ чи $[-r\,;0]$ залежно від того, на якому кінці інтервалу (23.2.2) степеневий ряд є збіжним.

Нехай ряд (23.2.1) збігається у точці $x = -r$. Тоді на відрізку $[-r\,;0]$ степеневий ряд можна подати у вигляді ряду

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (-r)^n \frac{x^n}{(-r)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (-r)^n \left|\frac{x}{r}\right|^n, \qquad (23.2.4)$$

який рівномірно збігається на цьому відрізку за ознакою Абеля−Харді.

Аналогічно, якщо ряд (23.2.1) збігається у точці $x = +r$, то на відрізку $[0\,;+r]$ маємо

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n \frac{x^n}{r^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n \left|\frac{x}{r}\right|^n, \qquad (23.2.5)$$

а отже, ряд (23.2.1) рівномірно збігається на $[0\,;+r]$ з тих самих причин.

Теорему доведено.

Слід зауважити, що члени степеневого ряду є неперервними функціями на всій множині дійсних чисел, і, як наслідок, на довільному її непустому відрізку $[a\,;b] \subset R$. Отже, за **теоремами 23.1.2**, **22.4.1** та **22.4.2** можна прийти до такого загального висновку:

Теорема 23.2.2 (***про рівномірну збіжність, неперервність суми та почленне інтегрування степеневого ряду***)**.** *На кожному непустому відрізку, що цілком міститься у множині D збіжності степеневого ряду* (23.1.1) *чи* (23.2.1)*, цей степеневий ряд є таким, що*

1) *збігається рівномірно*;

2) *його сума f є неперервною функцією на відрізку*;

3) *допускає почленне інтегрування по відрізку.*

Залишилося з'ясувати питання про можливість почленного диференціювання степеневого ряду.

Після почленного диференціювання загального степеневого ряду (23.1.1) отримаємо степеневий ряд такого вигляду

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(c_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n(x-x_0)^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(n+1)(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n(x-x_0)^n, \qquad (23.2.6)$$

де $c'_n = c_{n+1}(n+1),\ n \in Z_+,$ − це коефіцієнти новоутвореного степеневого ряду.

Відтак можна помітити, що радіуси збіжності степеневих рядів (23.1.1) та (23.2.6) однакові.

Справді, нехай $r \geq 0$ – радіус збіжності вихідного степеневого ряду (23.1.1), себто

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}\,.$$

Аналогічно, радіусом збіжності новоутвореного ряду буде границя

$$r' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n'|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{n+1}(n+1)|}} =$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{n+1}|}} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \cdot \frac{1}{1} = r.$$

Отже, доведено таку властивість степеневого ряду:

Лема 23.2.1. *Почленне диференціювання степеневого ряду не змінює його радіуса збіжності.*

Теорема 23.2.3 (*про почленне диференціювання степеневого ряду*). *Якщо степеневий ряд* (23.1.1) *має ненульовий радіус збіжності, то*

1) *такий степеневий ряд допускає почленне диференціювання на своєму інтервалі збіжності, тобто*

$$r > 0, \qquad x \in (x_0 - r;\, x_0 + r) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n (x - x_0)^{n-1}; \qquad (23.2.7)$$

2) *функція f, до якої збігається ряд* (23.1.1), *має на його інтервалі збіжності похідні всіх порядків, тобто*

$$r > 0,\ \ f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n,\ \ \ x \in (x_0 - r;\ x_0 + r)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall k \epsilon N\ \ \exists\, f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+k}(n+1)(n+2)\dots(n+k)(x - x_0)^n. \tag{23.2.8}$$

Доведення. Доведення першого твердження теореми не втратить своєї загальності, якщо замість ряду (23.1.1) розглядати степеневий ряд (23.2.1) із центром у точці $x_0 = 0$.

Нехай x – довільна точка інтервалу збіжності степеневого ряду (23.2.1), що означає справедливість нерівності $|x| < r$.

Тоді знайдеться такий відрізок $[r - \varepsilon\,; r + \varepsilon]$ інтервалу збіжності ряду (23.2.1), який містить вибрану точку x, наприклад, це буде так за умови, що

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\big|r - |x|\big|,$$

де величина $\big|r - |x|\big|$ – це відстань від точки x до найближчого кінця інтервалу збіжності степеневого ряду.

За висновками **леми 23.2.1** та **теореми 23.2.1** випливає, що степеневий ряд, отриманий почленним диференціюванням ряду (23.2.1), збігається на відрізку $[r - \varepsilon\,; r + \varepsilon]$ рівномірно. Окрім того, степеневий ряд (23.2.1) обов'язково є збіжним у своєму ценрі $x_0 = 0$. Отже, за **теоремою 22.4.3** справджується висновок про те, що степеневий ряд (23.2.1) допускає своє почленне диференціювання у точці x.

Перше твердження теореми доведено.

Друге твердження теореми є безпосереднім наслідком першого.

Справді, степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(n+1)(x - x_0)^n, \tag{23.2.9}$$

отриманий почленним диференціюванням ряду (23.1.1), має той самий радіус збіжності $r > 0$, що і вихідний ряд (23.1.1), а тому цей ряд (23.2.9) теж можна почленно диференціювати на інтервалі $(x_0 - r;\ x_0 + r)$, що означає можливість повторного диференціювання ряду (23.1.1). Після чого так само отриманий ряд допускає повторення процедури диференціювання ще раз, і так далі.

Отже, після k-го диференціювання вихідного ряду (23.1.1) матимемо ряд

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n\right) =$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} c_n n(n-1)\ldots(n-k+1)(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+k}(n+1)(n+2)\ldots(n+k)(x - x_0)^n,$$

де $x \in (x_0 - r;\ x_0 + r)$, а функція f – це сума ряду (23.1.1).

Теорему доведено.

***Приклад* 23.2.1.** Знайти суму f степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \qquad (23.2.10)$$

Розв'язання. Радіус збіжності степеневого ряду (23.2.10) дорівнює числу $r = +\infty$ (***приклад* 23.1.2**), тож його сума f має похідні всіх порядків у довільних точках дійсної осі R.

Обчислимо першу похідну функції f за формулою (23.2.9):

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}(n+1)x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x), \quad x \in R.$$

До того ж, $f(0) = 1$.

Отже, функція f є роз'яком задачи Коші

$$\begin{cases} f'(x) = f(x),\ x \in R; \\ f(0) = 1, \end{cases} \tag{23.2.11}$$

яку і залишилося ров'язати:

$$(23.2.11) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{df(x)}{dx} = f(x),\ x \in R; \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{df(x)}{f(x)} = dx,\ x \in R; \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^x \frac{df(t)}{f(t)} = \int_0^x dt,\ x \in R; \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow lnf(x) = x,\ x \in R, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^x,\ x \in R.$$

Відповідь: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,\ x \in R.$

***Завдання для самостійної роботи* 23.2.1.** *Нехай степеневий ряд* (23.1.1) *має радіус збіжності* $r > 0$*, а числова послідовність* $\{a_n\ |n \in Z_+\}$ *збігається до границі* $a \neq 0$. *Довести, що тоді степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n c_n (x - x_0)^n$$

має радіус збіжності $|a| \cdot r$.

23.3. Розвинення функцій у степеневі ряди

Нехай степеневий ряд (23.1.1) з радіусом збіжності $r > 0$ збігається на своєму інтервалі збіжності до деякої суми f, тобто

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n, \qquad x \in (x_0 - r;\ x_0 + r). \qquad (23.3.1)$$

Тоді з **теореми 23.2.3** випливає, що функція f має у всіх точках інтервалу збіжності $(x_0 - r;\ x_0 + r)$ похідні будь-якого порядку $k \epsilon N$. Отже, після диференціювання (23.3.1) k разів у точці x_0 отримаємо:

$$f^{(k)}(x_0) = 0 + \cdots + 0 + k!\, c_k + 0 + \cdots, \quad k \epsilon N, \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k \epsilon N. \qquad (23.3.2)$$

Якщо покласти

$$f^{(0)}(x) := f(x), \qquad x \in (x_0 - r;\ x_0 + r), \qquad (23.3.3)$$

то формула (23.3.2) поширюється і на індекс $k = 0$. У підсумку, тотожність (23.3.1) можна переписати у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \qquad x \in (x_0 - r;\ x_0 + r). \qquad (23.3.4)$$

Означення* 23.3.1.** *Ряд* (23.3.4) *називають* ***рядом Тейлора *функції f в околі точки $x = x_0$. Якщо $x_0 = 0$, то ряд* (23.3.4) *набуває вигляду*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad |x| < r, \qquad (23.3.5)$$

та у цьому випадку його ще називають ***рядом Маклорена****.*

Таким чином, попередні міркування можуть бути оформлені у таке твердження:

Теорема 23.3.1 (***про суму степеневого ряду***). *Будь-який степеневий ряд з додатним радіусом збіжності є рядом Тейлора−Маклорена своєї суми в околі точки, яка є центром степеневого ряду.*

Наслідок 23.3.1. *Якщо функція f розкладається у степеневий ряд з центром у точці $x = x_0$, то такий степеневий ряд є рядом Тейлора-Маклорена функції f в околі цієї точки, і таке розвинення функції f у степеневий ряд є єдиним.*

Доведення. Першу половину твердження вже було доведено вище, а єдиність розвинення функції f у степеневий ряд зумовлюється формулами (23.3.2)−(23.3.3), які однозначно задають величину його коефіцієнтів.

Твердження доведено.

Звичайно, постає запитання: які функції можуть бути розвинені у ряди Тейлора−Маклорена?

Необхідну умову можливості такого розвинення функції f у деякому околі певної точки $x = x_0$ отримати досить просто. Справді, якщо функція f розкладається у степеневий ряд із центром $x = x_0$, то за **теоремою 23.2.3** така функція у цьому околі повинна мати похідні всіх порядків.

Але така умова не є достатньою, про що свідчить приклад функції

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{array} \right. \qquad (23.3.6)$$

За означенням (23.3.6) функції f, $f(0) = 0$, а отже,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{y\to\infty} ye^{-y^2} =$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{(y)'}{\left(e^{y^2}\right)'} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0 .$$

Аналогічно доводиться, що для всіх $k\epsilon N$ похідна $f^{(k)}(0) = 0$, тож ряд Маклорена функції f у будь-якому околі точки $x_0 = 0$ має вигляд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(0\cdot x^n)\equiv 0,$$

попри те його сума не дорівнює значенням цієї функції у точках околу за умови $x\neq 0$.

Теорема 23.3.1 (***про необхідні й достатні умови розвинення функції у ряд Тейлора-Маклорена***). *Функція f розкладається у ряд Тейлора−Маклорена в деякому околі $(x_0-r;\ x_0+r)$ точки $x=x_0$, де $r>0$, якщо вона на цьому околі має похідні всіх порядків та залишковий член $R_n=R_n(x,x_0)$ її формулі Тейлора*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x,x_0)\qquad(23.3.7)$$

прямує до нуля за $n\to+\infty$ у кожній точці $x\in(x_0-r;\ x_0+r)$, тобто

$$\forall x\in(x_0-r;\ x_0+r):\ \lim_{n\to+\infty}R_n(x,x_0)=0.\qquad(23.3.8)$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція f розкладається на інтервалі $(x_0-r;\ x_0+r)$ у ряд Тейлора−Маклорена, тоді за **теоремою 23.2.3** така функція у цьому околі повинна мати похідні всіх порядків і за всіх $n\in N$ справедлива формула Тейлора (23.3.7).

Подамо ряд Тейлора−Маклорена функції f у вигляді двох сум:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=$$

$$=s_n(x)+r_n(x),\quad n\in N,\qquad(23.3.9)$$

де $s_n(x)$ – це n-та часткова сума, та $r_n(x)$ − n-й залишок степеневого ряду (23.3.9). Ряд (23.3.9) збігається у кожній точці інтервалу до суми f, тож

$$\forall x\in(x_0-r;\ x_0+r):\ \lim_{n\to+\infty}r_n(x)=0.\qquad(23.3.10)$$

Порівнюючи подання функції f у вигляді суми (23.3.9) з формулою Тейлора (23.3.7) цієї функції, встановлюємо, що

$$\forall x \in (x_0 - r;\ x_0 + r): \quad R_n(x, x_0) = r_n(x). \qquad (23.3.11)$$

Отже, за (23.3.10) та (23.3.11) маємо (23.3.8).

Необхідність умов доведена.

Достатність. Нехай функція f, яка на інтервалі $(x_0 - r;\ x_0 + r)$ має похідні всіх порядків, задовольняє умову (23.3.8), і нехай

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad n \in N,$$

є n-ю частковою сумою ряду Тейлора−Маклорена (23.3.9). Відтак за формулою Тейлора (23.3.7) цієї функції та умовою (23.3.8) у кожній точці x інтервалу $(x_0 - r;\ x_0 + r)$ маємо

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(f(x) - R_n(x, x_0)\right) =$$

$$= f(x) - \lim_{n\to+\infty} R_n(x, x_0) = f(x) - 0 = f(x),$$

тобто ряд Тейлора−Маклорена (23.3.9) збігається до суми f.

Теорему доведено.

Теорема 23.3.2 (***про достатні умови розвинення функції у ряд Тейлора−Маклорена***). *Нехай функція* f *у деякому околі* $(x_0 - r;\ x_0 + r)$ *точки* $x = x_0$, *де* $r > 0$, *має похідні всіх порядків та знайдеться таке число* $c > 0$, *що виконані нерівності*

$$\forall n \in Z_+ \quad \forall x \in (x_0 - r;\ x_0 + r) \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \le c^n. \qquad (23.3.12)$$

Тоді функція f *на цьому околі розкладається в ряд Тейлора−Маклорена.*

Доведення. Запишемо залишковий член формули Тейлора для функції f на інтервалі $(x_0 - r;\ x_0 + r)$ у формі Лагранжа:

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!}(x - x_0)^n, \quad n \in N,$$

де τ – це деяка точка, що лежить між точками x та x_0. Тоді за умовою (23.3.12) матимемо нерівність

$$\forall n \in N \quad \forall x \in (x_0 - r;\ x_0 + r): \quad |R_n(x, x_0)| < \frac{c^n r^n}{n!}, \qquad (23.3.13)$$

притому неважко переконатись (наприклад, за ознакою Даламбера), що додатний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c^n r^n}{n!}$$

є збіжним, а отже, його загальний член прямує до нуля, коли $n \to +\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{c^n r^n}{n!} = 0. \qquad (23.3.14)$$

За твердженнями (23.3.13) та (23.3.14) випливає умова (23.3.8) попередньої теореми, яка (**теорема 23.3.1**) стверджує, що функція f допускає своє розвинення у ряд Тейлора−Маклорена (23.3.9) на вказаному інтервалі.

Теорему доведено.

Наслідок 23.3.2. *Нехай функція f у деякому околі $(x_0 - r;\ x_0 + r)$ точки $x = x_0$, де $r > 0$, має похідні всіх порядків, які є рівномірно обмеженими на цьому околі, тобто знайдеться таке число $c > 0$, що виконуються нерівності*

$$\forall n \in Z_+ \quad \forall x \in (x_0 - r;\ x_0 + r) \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \le c. \qquad (23.3.15)$$

Тоді функція f на цьому околі розкладається у ряд Тейлора−Маклорена.

Доведення. Без втрати загальності можна вважати, що в умові (23.3.15) вибране число c не менше від одиниці, себто, $c \geq 1$. У такому разі за нерівністю (23.3.15) маємо нерівність (23.3.14), а саме:

$$\forall n \in Z_+ \quad \forall x \in (x_0 - r;\ x_0 + r) \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq c \leq c^n.$$

Отже, виконані всі умови щойно доведеної **теореми 23.3.2**, за якою справджується висновок цього наслідку.

Твердження доведено.

Теорема 23.3.3 (***про таблицю розвинень основних елементарних функцій у ряд Тейлора−Маклорена***)**.** *Справджуються наступні розвинення основних елементарних функцій у ряд Маклорена з відповідним радіусом збіжності* $r > 0$:

1. $$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad r = +\infty. \quad (23.3.16)$$

2. $$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad r = +\infty. \quad (23.3.17)$$

3. $$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad r = +\infty. \quad (23.3.18)$$

4. $$chx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots, \qquad r = +\infty. \quad (23.3.19)$$

5. $$shx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad r = +\infty. \quad (23.3.20)$$

6. $$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \cdots, r = 1,$$
$$\alpha \notin Z_+. \quad (23.3.21)$$

7. а) $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad r = 1. \quad (23.3.22)$$

б) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \; = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \,,\; r = 1.$ (23.3.23)

8. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,\; r = 1.$ (23.3.24)

9. $arctgx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,\; r = 1.$ (23.3.25)

10. $arcctgx = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots,\; r = 1.$ (23.3.26)

Доведення. 1. Розвинення (23.3.16) було встановлено під час розв'язання ***прикладу*** **23.2.1**.

2. Знайдемо похідні функції $f = cosx$ на множині R:

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right),\quad k \in Z_+,\quad x \in R. \qquad (23.3.27)$$

Похідні цієї функції є рівномірно обмеженими на всій дійсній осі R:

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \le 1,\quad k \in Z_+,\quad x \in R\,.$$

Тож, за **наслідком 23.3.2,** ця функція розкладається у ряд Маклорена з радіусом збіжності $r = +\infty$:

$$cosx = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \;= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos\left(0+\frac{k\pi}{2}\right)}{k!}x^k = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad x \in R,$$

де враховано, що

$$\cos\frac{k\pi}{2} = \left[\begin{array}{ll} (-1)^n,\; k = 2n, & n \in Z_+; \\ 0\,,\; k = 2n+1, & n \in Z_+. \end{array}\right.$$

Таким чином, розвинення (23.3.17) встановлено.

3. Розвинення (23.3.18) доводиться аналогічно до попереднього.

4. Ряд (23.3.16) є абсолютно збіжним на всій дійсній числовій осі, а отже, у будь-якій точці $x \in R$ допускає лінійні операції над собою, тож

$$chx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^k}{2}\frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

тому що

$$\frac{1+(-1)^k}{2} = \left[\begin{array}{ll} 1, & k = 2n, \quad n \in Z_+; \\ 0, & k = 2n+1, \ n \in Z_+. \end{array}\right.$$

Отже, розвинення (23.3.19) доведено.

5. Розвинення (23.3.20) доводять аналогічно до розвинення (23.3.19).

6. Введемо позначення

$$c_0(\alpha) := 1, \quad c_n(\alpha) := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n \in N.$$

Можна помітити, що

$$nc_n(\alpha) + (n+1)c_{n+1}(\alpha) =$$

$$= n\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} + (n+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\big(n + (\alpha-n)\big) = \alpha c_n(\alpha), \quad n \in N,$$

тобто

$$nc_n(\alpha) + (n+1)c_{n+1}(\alpha) = \alpha c_n(\alpha), \quad n \in N. \qquad (23.3.28)$$

Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду (23.3.21):

$$r = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n(\alpha)}{c_{n+1}(\alpha)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1, \quad \alpha \notin Z_+.$$

Нехай

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\alpha)x^n, \quad x \in (-1;\ +1), \quad \alpha \notin Z_+.$$

Тоді степеневий ряд (23.3.21) можна почленно диференціювати на інтервалі його збіжності $(-1;\ +1)$. Тож, застосовуючи тотожність (23.3.28), отримаємо:

$$(1+x)f'(x) = (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(\alpha)nx^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(\alpha)nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(\alpha)nx^n =$$

$$= c_1(\alpha) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n+1}(\alpha)(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(\alpha)nx^n =$$

$$= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_{n+1}(\alpha)(n+1) + c_n(\alpha)n)x^n =$$

$$= \alpha + \alpha\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(\alpha)x^n = \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\alpha)x^n = \alpha f(x), \quad x \in (-1;\ +1).$$

Отже, сума f ряду (23.3.21) є розв'зком такої задачи Коші:

$$\begin{cases} (1+x)f'(x) = \alpha f(x), \quad x \in (-1;\ +1); \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{df(x)}{f(x)} = \alpha\dfrac{dx}{1+x}, \quad |x| < 1; \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^x \dfrac{df(t)}{f(t)} = \alpha\int_0^x \dfrac{dt}{1+t}, \quad |x| < 1; \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ln f(x) = \alpha\ln(1+x),\ |x| < 1, \quad \Leftrightarrow\ f(x) = (1+x)^\alpha\ ,\ |x| < 1.$$

Таким чином,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\alpha)x^n, \quad x \in (-1;\ +1), \quad \alpha \notin Z_+\ .$$

Розвинення (23.3.21) доведено.

7. Розвинення (23.3.22) є формулою суми геометричного ряду, яка була отримана безпосередньо за означенням суми числового ряду.

Розвинення (23.3.23) можна отримати, замінивши у попередньому розвинені (23.3.22) змінну $x \in (-1;\ +1)$ на змінну $(-x) \in (-1;\ +1)$.

Також розвинення (23.3.23) є частковим випадком доведеного розвинення (23.3.21) за значення параметра $\alpha = -1$.

8. Розвинення (23.3.24) є відомим розвиненням Меркатора і було доведене у ***прикладі*** **22.4.1**.

9. Після підстановки у розвинення (23.3.23) замість числа $x \in (-1;\ +1)$ його квадрата $x^2 \in [0;+1)$ матимемо розвинення

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots,\ |x| < 1, \quad (23.3.29)$$

яке можна почленно інтегрувати на інтервалі збіжності $(-1;\ +1)$, а отже,

$$arctgx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Тож розвинення (23.3.25) доведено.

10. Розвинення (23.3.26) є безпосереднім наслідком попереднього розвинення (23.3.25) та тотожності

$$arcctgx = \frac{\pi}{2} - arctgx, \quad x \in R.$$

Теорему доведено.

Щойно доведена теорема дозволяє розвивати складніші елементарні функції у степеневі ряди на проміжках дійсної числової осі R.

Якщо виникає потреба розвинення функції f не у ряд Маклорена, а у степеневий ряд з деяким центром $x_0 \neq 0$, то тоді можна у функції f зробити заміну змінної $x - x_0 = t$, після чого, отримавши нову функцію

$$g(t) := f(t + x_0),$$

розкласти її у ряд Маклорена

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n, \quad |t| < r,$$

скориставшись табличними розвиненнями (23.3.16)–(23.3.26) чи іншими відомими розвиненнями, та наостанок повернутися назад до змінної x

$$f(x) = g(x - x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < r. \quad (23.3.30)$$

Задля кращого усвідомлення складемо табличку методів, які були застосовані для розвинення елементарних функцій у степеневі ряди під час доведення **теореми 23.3.3**, або таких, які можуть бути застосовані при розвиненні функцій у ряди в інших задачах.

Деякі методи розвинення функцій у степеневі ряди

1. ***Метод безпосереднього розвинення*** полягає у безпосередньому обчисленні похідних функції f у центрі x_0 степеневого ряду, знаходженні радіуса збіжності цього ряду та застосуванні **теорем 23.3.1−23.3.2**. Такими засобами, наприклад, були встановлені табличні розвинення (23.3.17), (23.3.18).

2. ***Метод лінійних перетворень*** полягає у застосуванні до табличних чи інших відомих розвинень лінійних операцій над степеневими рядами та знаходженні перетину інтервалів збіжності цих рядів. Таким методом, наприклад, були знайдені табличні розвинення (23.3.19), (23.3.20) і (23.3.26).

3. ***Метод підстановки*** полягає у виконанні в табличних чи інших відомих розвиненнях заміни змінної x на деяку її фіксовану степінь x^k, $k \epsilon N$, або навіть на деякий поліном змінної x. Таким способом, наприклад, були встановлені табличне розвинення (23.3.23) і розвинення (23.3.29). Лінійний зсув змінної розвинення теж можна віднести до цього методу.

4. ***Метод добутку розвинень*** полягає в обчисленні добутку степеневих рядів табличних чи інших відомих розвинень. Таким чином, наприклад, можна знайти розвинення функції $f = (1 + x^2)cosx,\ x \in R,$ а саме:

$$(1 + x^2)cosx = (1 + x^2)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n-2)!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\right)x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\left(1 - \frac{1}{(2n-1)2n}\right)x^{2n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n^2-2n-1)}{(2n)!}x^{2n}, \quad x \in R.$$

Звичайно, у щойно наведеному розвиненні перший ряд мав всього два ненульових члени, через що його було легко перемножити на другий степеневий ряд. У загальному випадку степеневих рядів, рядів з нескінченною кількістю ненульових членів, інколи можна скористатися формулою Коші добутку числових рядів.

5. ***Метод почленного інтегрування*** полягає, звісно, у почленному інтегруванні табличних чи інших відомих розвинень. Такими перетвореннями, наприклад, були отримані табличні розвинення (23.3.24) і (23.3.25).

6. ***Метод почленного диференціювання*** полягає у почленному інтегруванні табличних чи інших відомих розвинень. Таким методом, наприклад, можна знайти розвинення функції $f = \frac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$.

Справді,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n, \quad |x| < 1. \quad (23.3.31)$$

Той самий метод демонструє інший приклад:

$$xcosx + sinx = (xsinx)' =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+2) x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R.$$

7. ***Метод складання диференціального рівняння*** полягає у складанні та розв’язанні диференціального рівняння відносно суми степеневого ряду шуканого розвинення. Такими засобами, наприклад, були встановлені табличні розвинення (23.3.16) і (23.3.21).

8. ***Метод невизначених коефіцієнтів*** полягає у підстановці в деяке алгебраїчне чи диференціальне рівняння, складеного відносно функції розвинення, її степеневого ряду, записаного у його загальній формі із невідомими коефіцієнтами c_n, $n \in Z_+$. Після цього всі члени такого рівняння розписують у степеневі ряди із спільним центром x_0, зводять подібні члени, та прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях $(x - x_0)^n$, $n \in Z_+$, у лівій і правій частинах рівняння, отримуючи систему рівнянь для невідомих коефіцієнтів шуканого розвинення.

Застосуємо, наприклад, цей метод до встановлення декількох перших членів розвинення функції $f = tgx$ у ряд Маклорена.

Покладемо

$$\mathrm{tg}x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

та підставимо цей ряд у тотожність

$$\sin x = \cos x \cdot \mathrm{tg}x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n \in Z,$$

у якій інші тригонометричні функції теж розвинемо у ряди Маклорена:

$$\sin x = \cos x \cdot \mathrm{tg}x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots =$$

$$= \; c_0 + c_1 x + \left(c_2 - \frac{c_0}{2!}\right)x^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2!}\right)x^3 + \left(c_4 - \frac{c_2}{2!} + \frac{c_4}{4!}\right)x^4 +$$

$$+ \left(c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!}\right)x^5 + \cdots \; .$$

З можливості лише єдиного розвинення функції у степеневий ряд випливає, що коефіцієнти за однакових степенів x^n, $n \in Z_+$, лівої і правої частини останнього рівняння повинні буди однаковими. Прирівнявши їх, отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} c_0 = 0; \\ c_1 = 1; \\ c_2 - \frac{c_0}{2!} = 0; \\ c_3 - \frac{c_1}{2!} = -\frac{1}{3!}; \\ c_4 - \frac{c_2}{2!} + \frac{c_0}{4!} = 0; \\ c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!} = \frac{1}{5!}; \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 0; \\ c_1 = 1; \\ c_2 = 0; \\ c_3 = +\frac{1}{3}; \\ c_4 = 0; \\ c_5 = +\frac{2}{15}; \\ \dots . \end{cases}$$

Отже,

$$tgx = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \ .$$

***Приклад* 23.3.1.** Розвинути у степеневий ряд із центром у точці $x_0 = 1$ функцію

$$f = \frac{10-4x}{x^2-7x+12} . \quad (23.3.32)$$

Розв'язання. Перш за все спростимо вираз функції (23.3.32), розклавши її на елементарні дроби, і після цього виконаємо заміну $x - 1 = t$, змістивши центр розвинення у точку $t_0 = 0$:

$$f(x) = \frac{10-4x}{x^2-7x+12} = \frac{2(x-4)-6(x-3)}{(x-3)(x-4)} = \frac{2}{x-3} - \frac{6}{x-4} = \frac{2}{t-2} - \frac{6}{t-3} := g(t).$$

Розкладаємо функцію $g = g(t)$ у ряд Маклорена, застосувавши табличне розвинення (23.3.22):

$$g(t) = \frac{2}{t-2} - \frac{6}{t-3} = \frac{2}{-2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} - \frac{6}{-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right) t^n, \quad \left|\frac{t}{2}\right| < 1, \quad \left|\frac{t}{3}\right| < 1.$$

Остаточно маємо:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right) t^n, \quad |t| < 2.$$

Залишається в останньому розвиненні виконати зворотній зсув $t = x - 1$:

$$f(x) = g(x-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right) (x-1)^n, \quad |x-1| < 2.$$

***Відповідь*:** $\frac{10-4x}{x^2-7x+12} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right) (x-1)^n, \;\; x \in (-1\,;\,+3).$

Завдання для самостійної роботи

Довести, що справджуються розвинення:

23.3.1. $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{a^{2n+1}(2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \;\; a > 0.$ (23.3.33)

23.3.2. $arcsin\frac{x}{a} = \frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{a^{2n+1}(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < a, \;\; a > 0.$ (23.3.34)

23.3.3. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{a^{2n+1}(2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \quad a > 0.$ (23.3.35)

23.3.4. $\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) =$

$= \ln a + \frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{a^{2n+1}(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < a, \;\; a > 0.$ (23.3.36)

23.3.5. $\sqrt{a^2+x^2} =$

$= a + \frac{x^2}{2a} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{a^{2n-1}(2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \;\; a > 0.$ **(**23.3.37)

23.3.6. $\ln\frac{a+x}{a-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}, \quad |x| < a, \;\; a > 0.$ (23.3.38)

Завдання для самоперевірки

Розвинути функцію f у ряд Маклорена і знайти радіус його збіжності r:

23.3.1. $f = arcsinx + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

23.3.2. $f = \frac{1}{2} \cdot \left(arcsinx + x\sqrt{1-x^2}\right)$.

23.3.3. $f = \frac{1}{(2-x^3)^2}$.

23.3.4. $f = 1 - e^{-x}(1+x)$.

23.3.5. $f = \frac{1}{1+x+x^2}$.

23.3.6. $f = \frac{x}{(1+x)(x^2-1)}$.

23.3.7. $f = \frac{1}{(1-x)(x^2+1)}$.

23.3.8. $f = \sin x \cdot \sin 3x$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

23.3.1. $f = 2x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!(2n+2)}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad r = 1,$

вказівка: $f = (x \cdot arcsinx)'$.

23.3.2. $f = x^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad r = 1,$

вказівка: $f' = \sqrt{1-x^2}$.

23.3.3. $f = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^{3n}}{2^{n+2}}, \quad r = 2,$

вказівка: застосувати розвинення (23.3.31).

23.3.4. $f=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n, \quad r=+\infty,$

вказівка: $f(x)=\int_0^x te^{-t}dt.$

23.3.5. $f=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}-\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1}, \quad r=1,$

вказівка: $f=\frac{1-x}{1-x^3}$.

23.3.6. $f=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)-1}{4}x^n, \quad r=1.$

23.3.7. $f=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{4n}-\sum_{n=0}^{+\infty}x^{4n+1}, \quad r=1,$

вказівка: $f=\frac{1+x}{1-x^4}$.

23.3.8. $f=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^{2n-1}(1-2^{2n})}{(2n)!}x^{2n}, \quad r=+\infty,$

вказівка: $f=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x).$

23.4. Приклади застосування степеневих рядів

1. ***Обчислення сум числових рядів.***

Нехай задано деякий числовий ряд, який збігається до невідомої його суми $s\in R$, а саме:

$$s=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n=c_0+c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots \ . \qquad (23.4.1)$$

Складемо ряд Маклорена з коефіцієнтів, які є членами числового ряду (23.4.1), і нехай цей степеневий ряд збігається до деякої функції f та має радіус збіжності не менший за одиницю:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n, \quad |x|<r, \quad r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}\geq 1. \qquad (23.4.2)$$

Якщо степеневий ряд (23.4.2) є збіжним у точці x =1, то за другою теоремою Абеля він збігається рівномірно на відрізку $[0\,; +1]$, в усіх точках якого його сума f є неперервною функцією.

Отже,

$$f(1) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = s,$$

через що маємо:

$$s = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n. \tag{23.4.3}$$

***Приклад* 23.4.1.** Знайти суму s числового ряду

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} = \cdots\ . \tag{23.4.4}$$

Розв'язання. Легко перевірити, що числовий ряд (23.4.4) є рядом Лейбніца, і тому його сума s – це скінченне число. Складемо за коефіцієнтами $c_{3n+1} := a_n$, $c_{3n} = c_{3n+2} := 0$, $n \in Z_+$, відповідний ряд Маклорена

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}, \tag{23.4.5}$$

й обчислимо його радіус збіжності:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} = 1.$$

У точці x =1 ряд (23.4.5) є однаковим з рядом (23.4.4), що зумовлює його збіжність. Отже, чинна формула (23.4.3):

$$s = \lim_{x\to 1-0} f(x),$$

де f – це сума ряду (23.4.5).

Степеневий ряд (23.4.5) на інтервалі його збіжності $(-1\,;\,+1)$ можна почленно інтегрувати та диференціювати, тому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{3n} dt =$$

$$= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{3n}\right) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^3} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \quad |x| < 1.$$

Таким чином,

$$s = \lim_{x\to 1-0} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

***Відповідь*:** $s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

2. *Наближене обчислення значень функцій.*

***Приклад* 23.4.2.** Обчислити з точністю до $\delta = 10^{-3}$ значення $ln3$.

***Розв'язання*.** За розвиненням (23.3.38) маємо:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1. \qquad (23.4.6)$$

Звідси випливає, що

$$\ln 3 = \ln \frac{1+x}{1-x}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}. \qquad (23.4.7)$$

Якщо вибрати за наближення числа $ln3$ n-ту часткову суму s_n числового ряду (23.4.7), себто

$$\ln 3 \approx s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)2^{2k}}, \quad n \in N,$$

то абсолютна похибка такого наближення становитиме

$$\Delta_n = |s - s_n| = |r_n|, \quad n \in N, \tag{23.4.8}$$

де r_n – це n-й залишок цього ряду.

Оцінимо зверху величину Δ_n, підібравши для залишкового ряду такий мажоруючий його ряд, щоб той збігався до відомої суми, наприклад,

$$\Delta_n = |r_n| = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2n+1)2^{2n}} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{(2n+1)2^{2n}} \cdot \frac{4}{3} := \delta_n, \quad n \in N.$$

Залишається розв'язати нерівність

$$\delta_n \leq \delta = 10^{-3},$$

що легко можна зробити, застосувавши метод перебору:

$$\delta_1 = \frac{1}{(2+1)2^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{9} \nleq \frac{1}{1000};$$

$$\delta_2 = \frac{1}{(4+1)2^4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{60} \nleq \frac{1}{1000};$$

$$\delta_3 = \frac{1}{(6+1)2^6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{7 \cdot 16 \cdot 3} \nleq \frac{1}{1000};$$

$$\delta_4 = \frac{1}{(8+1)2^8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{9 \cdot 64 \cdot 3} < \frac{1}{9 \cdot 180} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n \geq 4.$$

Отже, шуканим наближенням буде

$$\ln 3 \approx s_4 = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{80} + \frac{1}{448} \approx 1.098,$$

причому абсолютна похибка наближення Δ_4 буде меншою від 10^{-3}.

Відповідь: $\ln 3 = 1.098 \pm 10^{-3}$.

3. ***Наближене обчислення визначених інтегралів.***

Приклад **23.4.3.** Обчислити з точністю до $\delta = 10^{-3}$ значення інтегралу

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \,.$$

Розв'язання. За розвиненням (23.3.16) випливає, що

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots, \quad x \in R. \quad (23.4.9)$$

Тож, інтегруючи почленно степеневий ряд (23.4.9) на відрізку $[0\,;+1]$, отримаємо

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \,. \quad (23.4.10)$$

Вибираємо як наближене значення інтеграла n-ту часткову суму s_n ряду (23.4.10), який, напевно, є рядом Лейбніца:

$$I \approx s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}, \quad n \in N,$$

та оцінюємо абсолютну похибку наближення:

$$\Delta_n = |r_n| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \right| \le \frac{1}{n!(2n+1)}, \quad n \in N.$$

де враховано, що абсолютна величина сум залишкових рядів Лейбніца не перевищує модулів їх перших членів.

Таким чином, для досягнення заданої точності наближення достатньо, щоб виконувалася нерівність

$$\Delta_n \le \frac{1}{n!(2n+1)} \le \delta = 10^{-3},$$

яку найкраще розв'язати методом перебору чисел $n \in N$:

$$\Delta_1 \leq \frac{1}{1!(2+1)} = \frac{1}{3} \nleq \frac{1}{1000};$$

$$\Delta_2 \leq \frac{1}{2!(4+1)} = \frac{1}{2\cdot 5} \nleq \frac{1}{1000};$$

$$\Delta_3 \leq \frac{1}{3!(6+1)} = \frac{1}{6\cdot 7} \nleq \frac{1}{1000};$$

$$\Delta_4 \leq \frac{1}{4!(8+1)} = \frac{1}{24\cdot 9} \nleq \frac{1}{1000};$$

$$\Delta_5 \leq \frac{1}{5!(10+1)} = \frac{1}{120\cdot 11} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n \geq 5.$$

Отже, шуканим наближенням буде

$$I \approx s_5 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0.747\ .$$

Відповідь: $I = 0.747 \pm 10^{-3}$.

4. *Розв'язання диференціальних рівнянь степеневими рядами.*

***Приклад* 23.4.4.** Знайти у класі функцій, які в околі точки $x_0 = 0$ допускають розвинення у ряд Маклорена, розв'язок диференціального рівняння

$$x^2 y'' - 2y = \frac{4x^3}{1+x} - \frac{x^4}{(1+x)^2} \qquad (23.4.11)$$

за початкової умови

$$y(0) = y'(0) = 0. \qquad (23.4.12)$$

Розв'язання. Припустимо, що розв'язок $y = y(x)$ поставленої задачі Коші (23.4.11)–(23.4.12) в деякому околі точки $x_0 = 0$ можна розвинути в ряд Маклорена з додатним радіусом збіжності r, тобто

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad |x| < r, \quad r > 0. \qquad (23.4.13)$$

У такому разі

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}, \quad |x| < r. \qquad (23.4.14)$$

Підставивши вирази (23.4.13) і (23.4.14) у вихідне рівняння (23.4.11), матимемо тотожність

$$x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{4x^3}{1+x} - \frac{x^4}{(1+x)^2}, \quad |x| < r. \; (23.4.15)$$

Права частина рівності (23.4.15) допускає розвинення у ряд Маклорена з радіусом збіжності $r = 1$. А саме, застосувавши табличне розвинення

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n, \quad |x| < 1,$$

та розвинення

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n x^{n-1}, \quad |x| < 1,$$

отримаємо:

$$\frac{4x^3}{1+x} - \frac{x^4}{(1+x)^2} = 4x^3 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + x^4 \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 4x^{n+3} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n x^{n+3} =$$

$$= +\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n-1}(n+1)x^n, \quad |x| < 1.$$

Отже, рівняння (23.4.11) набуває вигляду

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 2c_n x^n = \sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n-1}(n+1)x^n \iff$$

$$\iff -2c_0 - 2c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-2)(n+1)c_n x^n =$$

$$= \sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n-1}(n+1)x^n \iff$$

$$\iff \quad -2c_0 - 2c_1 x + 0 \cdot x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty}(n-2)(n+1)c_n x^n =$$

$$= 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n-1}(n+1)x^n, \quad |x| < 1. \quad (23.4.16)$$

Числа c_0 та c_1 знаходимо за формулами коефіцієнтів ряду Маклорена і за початковими умовами (23.4.12):

$$c_0 = y(0) = 0,$$

$$c_1 = y'(0) = 0.$$

Число $c_2 := c$ може бути вибране довільним. Для інших невідомих величин $c_n,\ n \geq 3,$ складаємо рівняння, прирівнявши коефіцієнти у правій і лівій частинах тотожності (23.4.16) за однакових степенів $x^n,\ n \geq 3$:

$$(n-2)(n+1)c_n = (-1)^{n-1}(n+1)\,,\ n \geq 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Зрештою, маємо:

$$y(x) = cx^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-2} x^n = cx^2 + x^2 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-2} x^{n-2} =$$

$$= cx^2 + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = cx^2 + x^2 \ln(1+x), \quad |x| < 1. \quad (23.4.17)$$

Відповідь: $y(x) = cx^2 + x^2\ln(1+x), \quad c \in R, \quad |x| < 1.$

5. ***Обчислення точних значень визначених інтегралів.***

Приклад **23.4.5.** Знайти точне значення визначеного інтеграла

$$I = \int_0^1 \frac{x\ln x}{1-x} dx\ . \qquad (23.4.18)$$

Розв'язання. Насамперед, зазначимо, що підінтегральна елементарна функція

$$f(x) = \frac{x\ln x}{1-x}$$

є визначеною на інтервалі $(0; 1)$, на кінцях якого має скінчені границі:

$$f(x+0)=0,\ \ f(1-0)=-1. \qquad (23.4.19)$$

Отже, якщо доозначити функцію f на кінцях відрізка інтегрування $[0;1]$ відповідно до границь (23.4.19), то вказана функція стає неперервною на ньому, й інтеграл (23.4.18) можна вважати звичайним визначеним інтегралом від неперервної функції.

Розкладемо функцію $xlnx$ у степеневий ряд із центром у точці $x=1$, скориставшись стандартним розвиненням (23.3.24):

$$x\ln x=\big(1-(1-x)\big)\ln\big(1-(1-x)\big)=-\big(1-(1-x)\big)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x)^n}{n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(1-x)^{n+1}}{n}-\frac{(1-x)^n}{n}\right)=-(1-x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(1-x)^{n+1}}{n}-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right)=$$

$$=-(1-x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)},\quad x\in[0;2]. \qquad (23.4.20)$$

Підставимо це розвинення функції $xlnx$ у шуканий інтеграл і почленно проінтегруємо утворений степеневий ряд:

$$\int_0^1\frac{x\ln x}{1-x}dx=-\int_0^1 dx+\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x)^n}{n(n+1)}dx=$$

$$=-1+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{(1-x)^n}{n(n+1)}dx=-1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{1^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}. \qquad (23.4.21)$$

Суму першого числового ряду останньої формули (23.4.21) було знайдено у ***прикладі* 21.1.2**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=1.$$

Другий ряд у різниці (23.4.21) є рядом Рімана−Діріхле з показником степеня $\alpha = 2$, його сума теж є добре відомою і вперше була знайдена Ойлером:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (23.4.22)$$

(Формулу (23.4.22) буде доведено згодом.)

За (23.4.22)−(23.4.22) остаточно маємо

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{1-x} dx = 1 - \frac{\pi^2}{6}. \qquad (23.4.23)$$

Відповідь **:** $I = 1 - \frac{\pi^2}{6}$.

Як відомо, кожна змістовна теорія, яка дає відповідь на одні задачі, одночасно породжує інші, що потребують побудови нової теорії.

Так, наприклад, у теорії дійсних рядів залишається незрозумілим, чому функція $f = \frac{1}{1+x^2}$, яка має похідні будь-якого порядку на всій дійсній числовій осі, розкладається у ряд Маклорена лише радіуса збіжності $r = 1$, а тим часом експонента $g = e^x$, в якої всі похідні зростають на нескінченності швидше за відповідні похідні функції f, має нескінченний радіус збіжності розвинення у ряд Маклорена.

Ба більше, чому вже згадувана функція

$$h = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0; \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$$

взагалі не має розвинення у ряд Маклорена в жодному околі нуля?

Відповіді на ці запитання можна знайти в теорії функції комплексної змінної.

Звісно, потребує дослідження і питання про отриману неєдиність розв'язку задачі Коші (23.4.11)−(23.4.12), відповідь на яке можна знайти у курсах теорії звичайних диференціальних рівнянь.

***Завдання для самостійної роботи* 23.4.1.** *Довести границі* (23.4.19).

***Завдання для самостійної роботи* 23.4.2.** *Довести, що степеневий ряд* (23.4.20) *збігається у кінцевих точках відрізка* $[0; 2]$.

***Завдання для самоперевірки* 23.4.1.** Довести рівність

$$\ln(k+1) = \ln k + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}, \quad k \in N. \quad (23.4.18)$$

Порада: підставити у розвинення (23.4.6) значення $x = \frac{1}{2k+1}$.

Завдання для самоперевірки

Знайти суму s числового ряду:

23.4.2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)5^n}{n!}$.

23.4.3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$.

23.4.4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

23.4.5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

Обчислити з точністю до $\delta = 10^{-3}$ значення функції:

23.4.6. $\ln 1.2$.

23.4.7. $\sqrt[3]{130}$.

23.4.8. $\ln 5$.

23.4.9. $arcsin\frac{1}{3}$.

Обчислити з точністю до $\delta = 10^{-3}$ значення інтеграла:

23.4.10. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctgx}{x} dx.$

23.4.11. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$

23.4.12. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 + x^3}\, dx.$

23.4.13. $\int_0^{\frac{1}{10}} \sqrt{x} e^x\, dx.$

Розв'язати у степеневих рядах рівняння:

23.4.14. $y' - y = x^2, \quad y(0) = -2.$

23.4.15. $(1 - x)y' + y = 1 + x, \quad y(0) = 0.$

Відповіді на завдання для самоперевірки

23.4.2. $s = 6e^5.$

23.4.3. $s = 2e.$

23.4.4. $s = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}$.

23.4.5. $s = 2\ln\frac{e}{2}$.

23.4.6. 0.182 .

23.4.7. 5.066 .

23.4.8. 1.609 .

23.4.9. 0.340 .

23.4.10. 0.488 .

23.4.11. 0.493 .

23.4.12. 0.251 .

23.4.13. 0.025 .

23.4.14. $y = -2 - 2x - x^2, \quad x \in R.$

23.4.15. $y = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n, \quad x \in [-1\,;+1].$

23.5. Степеневі ряди комплексної змінної. Формула Ойлера

Теореми і приклади останніх двох підрозділів **23.3** та **23.4** свідчать про те, що степеневі ряди є зручним інструментом задання нескінченно диференційованих функцій, який, до того ж, дозволяє обчислювати їх значення з довільною точністю. Наприклад, степеневий ряд (23.3.16) повністю визначає функцію $f = e^x$, яку було названо експонентою дійсної змінної. Скористаємось цим методом, методом подання функції у вигляді степеневого ряду, для означення експоненти комплексної змінної. З таким наміром згадаємо основні властивості комплексних чисел та операцій над ними, після чого ескізно побудуємо теорію степеневих рядів комплексної змінної, яку в повному обсязі, звичайно, слід шукати у курсах теорії функції комплексної змінної.

Поле комплексних чисел $C = \{z = (x, y) = x + iy \,| x \in R, y \in R\}$ можна трактувати як евклідів простір R^2, на якому додатково означено операцію множення елементів цього простору за правилом

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

і введені позначення уявної одиниці $i := (0,1)$, модуля комплексного числа $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$, дійсної та уявної частини комплексного числа $Rez := x$ та $Imz := y$, спряженого до z комплексного числа $\bar{z} := (x, -y)$, та ще ототожнюються числа $(x, 0) \in C$ з дійсними числами $x \in R$, тобто

$$(x, 0) := x, \quad x \in R.$$

Окрім того, скалярний добуток (z_1, z_2) і норма $\|z\|$ векторів евклідового простору R^2 пов’язані з добутком і модулем комплексних чисел співвідношеннями

$$(z_1, z_2) = Rez_1\overline{z_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2; \qquad (23.5.1)$$

$$\|z\| = \sqrt{(z, z)} = \sqrt{Rez\bar{z}} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \, . \qquad (23.5.2)$$

З огляду на це, природно означити поняття збіжності й границі послідовності комплексних чисел $\{z_n = (x_n, y_n) = x_n + iy_n \,| n \in N\}$ так само, як було означено збіжність і границю послідовності векторів в евклідовому просторі R^2.

Означення* 23.5.1.** *Число* $z = x + iy \in C$ *називають* ***границею послідовності комплексних чисел $\{z_n = x_n + iy_n \,| n \in N\} \subset C$ *і говорять,* *що **послідовність*** $\{z_n | n \in N\}$ ***збігається** до комплексного числа* z, *якщо* $|z_n - z| \to 0$, *коли* $n \to +\infty$, *що рівносильно збіжності послідовностей координат* $\{x_n \,| n \in N\}$ *та* $\{y_n \,| n \in N\}$ *векторів* $z_n = (x_n, y_n)$ *відповідно до координат* x *та* y *вектора* $z = (x, y)$:

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \overset{def}{\Longleftrightarrow} \; |z_n - z| \to 0,\; n \to +\infty \;\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x; \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y. \end{cases} \qquad (23.5.3)$$

Подібним чином можна узагальнити означення числового ряду на випадок, коли він складається з комплекних чисел.

***Означення* 23.5.2.** *Нехай задано деяку послідовність* $\{z_n \in C | \; n \in N\}$ *комплексних чисел. Тоді формальну нескінчену суму*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots \;, \qquad (23.5.4)$$

*складену з елементів цієї послідовності, називають **рядом із комплексними членами**. Якщо знайдеться таке комплексне число* $s = a + ib \in C$, *до якого збігається послідовність* $\{s_n := \sum_{k=1}^{n} z_k \,| n \in N\}$ ***часткових сум** ряду* (23.5.4), *себто*

$$s = a + ib = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k + i \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k \;, \qquad (23.5.5)$$

то це число $s \in C$ *називають **сумою ряду*** (23.5.4) *й говорять, що ряд є **збіжним,** позначаючи* $s = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$. *Інакше ряд* (23.5.4) *називають **розбіжним***.

З означення (23.5.2) випливає, що ряд із комплексними членами (23.5.4) збігається до деякої суми $s = a + ib \in C$ тоді й лише тоді, коли дійсні числові ряди, складені з дійсних та уявних частин членів ряду (23.5.4), збігаються відповідно до дійсної та уявної частини суми $s = a + ib$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = a, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = b, \tag{23.5.6}$$

тобто

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \,. \tag{23.5.7}$$

Окрім того, утворені дійсні числові ряди

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} Re z_n \,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} Im z_n \tag{23.5.8}$$

називають відповідно ***дійсною*** та ***уявною частинами ряду*** (23.5.4).

Отже, для ряду із комплексними членами (23.5.4) справджуються всі ті теореми, які водночас є чинними для його дісної та уявної частин.

Наприклад, якщо ряд із комплексними членами (23.5.4) збігається, то

$$z_n \to 0, \;\; n \to +\infty, \tag{23.5.9}$$

що рівносильно умовам

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0; \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0\,. \end{cases} \tag{23.5.10}$$

Або ще, ряд із комплексними членами (23.5.4) збігається тоді й лише тоді, коли збігаються всі його залишкові ряди $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k$, $n \in N$, причому $r_n \to 0$, $n \to +\infty$, тощо.

Означення* 23.5.3.** 1. *Ряд із комплексними членами* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *називають* ***абсолютно збіжним *та говорять, що він* ***збігається абсолютно****, якщо збігається ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$, *складений з абсолютних величин його членів.*

2. *Збіжний ряд із комплексними членами називають* ***умовно збіжним*** *та говорять, що він* ***збігається умовно****, якщо ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|$*, складений з абсолютних величин його членів, є розбіжним.*

На множині комплексних чисел справджуються нерівності

$$max\{|x|,|y|\} \le |z| \le |x| + |y|, \quad z = x + iy \in C, \tag{23.5.11}$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \quad z_1 \in C, \ z_2 \in C, \tag{23.5.12}$$

які зумовлюють наступне твердження.

Теорема 23.5.1 (*про умови абсолютної збіжності ряду з комплексними членами*). *Ряд із комплексними членами* (23.5.4) *збігається абсолютно тоді й лише тоді, коли водночас є абсолютно збіжними його дійсна й уявна частини*:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n| < +\infty \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty}|x_n| < +\infty\,; \\ \sum_{n=1}^{+\infty}|y_n| < +\infty. \end{cases} \tag{32.5.13}$$

Збіжний ряд із комплексними членами (23.5.4) *збігається умовно тоді й лише тоді, коли хоч один із двох збіжних рядів* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *чи* $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ *збігається умовно.*

Означення* 23.5.4. *Степеневим рядом комплексної змінної *називають ряд вигляду*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots \,. \tag{23.5.14}$$

Комплексні числа c_n, $n \in Z_+$, *називають* ***коефіцієнтами степеневого ряду*** (23.5.14), *а точку* z_0 *– його центром.*

Доведення формул (21.1.8)−(21.1.89) суми n членів геометричної прогресії опиралося тільки на властивості арифметичних операцій на множині дійсних чисел R, які залишаються чинними і на множині комплексних чисел C, а тому ці формули зберігають свій вигляд і на множині C:

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \left[\begin{array}{ll} \frac{1-z^n}{1-z}, & z \neq 1; \\ n, & z = 1. \end{array} \right. \qquad (23.5.15)$$

З формули (23.5.15) негайно випливає, що геометричний ряд комплексної змінної

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \qquad (23.5.16)$$

збігається, причому абсолютно, тоді й лише тоді, коли $|z| < 1$, себто збігається тільки в точках комплексної площини, що містяться в середині одиничного круга з центром у початку координат. Саме подібне твердження слугувало базою доведення першої теореми Абеля (**теорема 23.1.1**) та теореми Коші−Адамара (**теорема 23.1.3**) для степеневих рядів дійсної змінної, які, таким чином, справджуються і для степеневих рядів комплексної змінної.

Теорема 23.5.2 (***перша теорема Абеля для степеневих рядів комплексної змінної***). *Нехай в деякій точці* $z_0 \neq 0$ *послідовність* $\{c_n {z_0}^n \mid n \in Z_+\}$ *членів степеневого ряду*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \qquad (23.5.17)$$

є обмеженою. Тоді в усіх точках $x \in R$*, для яких виконана нерівність*

$$|z| < |z_0|, \tag{23.5.18}$$

степеневий ряд (23.5.17) *збігається, причому абсолютно.*

Теорема 23.5.3 (***теорема Коші−Адамара для степеневих рядів комплексної змінної***)**.** *Нехай*

$$\rho := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\,, \tag{23.5.19}$$

$$r := \left[\begin{array}{ll} 0\,, & \rho = +\infty; \\ \frac{1}{\rho}\,, & 0 < \rho < +\infty; \\ +\infty, & \rho = 0. \end{array}\right. \tag{23.5.20}$$

Тоді:

1. *Якщо* $r = 0$*, то степеневий ряд* (23.5.17) *збігається тільки у своєму центрі, тобто у точці* $z_0 = 0$.

2. *Якщо* $0 < r < +\infty$*, то степеневий ряд* (23.5.17) *збігається, причому абсолютно, у будь-якій точці* z*, яка лежить ближче до його центра за число* r*, та розбігається у точках* x*, які лежать далі за* r:

$$|z| < r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n x^n| < +\infty,$$

$$|z| > r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \ - \text{розбіжний}.$$

3. *Якщо* $r = +\infty$*, то степеневий ряд* (23.5.17) *збігається абсолютно у будь-якій точці* $z \in C$.

Означення* 23.5.6. *Експонентою комплексної змінної (*чи* ***комплексною експонентою***) *називають функцію, подану степеневим рядом*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\ , \quad z \in C. \qquad (23.5.21)$$

Радіус збіжності степеневого ряду (23.5.21) дорівнює числу $r = +\infty$ (***приклад* 23.1.2**), тож його сума $f = e^z$ є визначеною на всій множині комплексних чисел. Причому у точках дійсної осі $z = x \in R$ комплексна експонента однакова з дійсною експонентою $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,\ x \in R$, а отже, має ті самі властивості, що й остання:

$$1) \quad \forall x \in R\ \ \forall y \in R\colon\ e^x e^y = e^{x+y}; \qquad (23.5.22)$$

$$2) \quad e^x|_{x=0} = 1, \quad e^x|_{x=1} = e; \qquad (23.5.23)$$

$$3) \quad f = e^x\ - \text{неперервна функція на } R. \qquad (23.5.24)$$

Варто наголосити, що умови (23.5.22)−(23.5.2) повністю визначають експоненційну функцію дійсної змінної. Це означає, що накладання на функцію дійсної змінної вказаних умов дає ще один спосіб чинного означення дійсної експоненти.

Перевіримо, чи має властивості 1)−3) комплексна експонента, означена степеневим рядом (23.5.21).

Почнемо з першої властивості. Степеневий ряд (23.5.21) абсолютно збігається у будь-якій точці множини комплексних чисел, через що члени добутку двох таких рядів, обчислених у двох точках $z_1 \in C$ та $z_2 \in C$, можна переставляти та групувати довільним способом. Наприклад, можна упорядковувати цей добуток у вигляді добутку Коші, після чого матимемо:

$$\forall z_1 \in C\ \ \forall z_2 \in C\colon\ \ e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{z_1}^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{z_2}^n}{n!} =$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{{z_1}^k}{k!}\frac{{z_2}^{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}{z_1}^k{z_2}^{n-k}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,{z_1}^k{z_2}^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=e^{z_1+z_2}. \quad (23.5.25)$$

Тож першу властивість доведено.

Другу властивість комплексної експоненти перевіряють безпосереднім обчисленням:

$$e^z|_{z=0}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{0^n}{n!}=1\,; \quad e^z|_{z=1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e. \quad (23.5.26)$$

Нарешті, перевіримо умову неперервності експоненти комплексної змінної. Функція f комплексної змінної неперервна в деякій точці $z\in C$ (яка, звісно, належить її області визначення $\mathcal{D}(f)$ та є граничною точкою цієї області), якщо модуль приросту функції f у точці z прямує до нуля, коли приріст аргумента Δz теж прямує до нуля:

$$|f(z+\Delta z)-f(z)|\to 0,\ \ \Delta z\to 0\,. \quad (23.5.27)$$

Виберемо довільну точку $z\in C$ та перевіримо чи задовольняє умову (23.5.27) у цій точці функція $f=e^z$:

$$\left|e^{z+\Delta z}-e^z\right|=|e^z|\cdot\left|e^{\Delta z}-1\right|=|e^z|\cdot\left|-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Delta z^n}{n!}\right|=$$

$$=|e^z|\cdot\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Delta z^n}{n!}\right|=|\Delta z||e^z|\cdot\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Delta z^{n-1}}{n!}\right|\le|\Delta z|\cdot|e^z|\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\Delta z|^{n-1}}{n!}. \quad (23.5.28)$$

Якщо $\Delta z\to 0$, то можна вважати, що $|\Delta z\ |\le 1$, тоді стає справедливою нерівність

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\Delta z|^{n-1}}{n!}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1^{n-1}}{n!}<\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e,$$

за якою (та за нерівністю (23.5.28)) випливає, що

$$\left|e^{z+\Delta z}-e^z\right|<|\Delta z|\cdot|e^{z+1}|\to 0,\quad \Delta z\to 0.$$

Отже, функція $f = e^z$ неперервна на всій комплексній множині C.

Обчислимо комплексну експоненту в точці $z = ix,\ x \in R,$ яка лежить на уявній осі комплексної площини:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i^2)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i^2)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R. \qquad (23.5.29)$$

Таке подання функції $f = e^{ix}$, $x \in R$, у вигляді степеневих рядів (23.5.29), з урахуванням розвинень (23.3.17)–(23.3.18), спричиняє видатну тотожність

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in R, \qquad (23.5.30)$$

яку називають ***формулою Ойлера***.

Якщо записати тотожність (23.5.30) у рівносильному вигляді

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \quad x \in R, \qquad (23.5.31)$$

та розв’язати систему двох рівнянь (23.5.30)–(23.5.31) відносно тригонометричних функцій, то, навпаки, отримаємо подання функцій $\cos x$ та $\sin x$ через комплексну експоненту:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \ \ x \in R; \\ \sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \ \ x \in R. \end{cases} \qquad (23.5.32)$$

Встановлена формула Ойлера (23.5.30) дозволяє знайти дійсну та уявну частини комплексної експоненти (23.5.21):

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

тобто

$$Re(e^z) = e^x \cos y, \quad Im(e^z) = e^x \sin y. \qquad (23.5.33)$$

Окрім того, тотожності (23.5.32) дають природний спосіб означити тригонометричні функції комплексної змінної у термінах комплексної експоненти:

$$\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad z \in C, \qquad (23.5.34)$$

та, відповідно,

$$\mathrm{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}, \quad \mathrm{ctg} z := \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}. \qquad (23.5.35)$$

Можна перевірити (застосувавши для цього розвинення (23.5.21)), що таке означення функцій $\cos z$ та $\sin z$ рівносильне їх заданню засобами розвинення цих функцій у степеневі ряди подібні до (23.3.17)−(23.3.18):

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in C. \qquad (23.5.36)$$

У свою чергу, за співвідношеннями (23.5.34)−(23.5.35) легко отримати формули, які пов'язують між собою тригонометричні та гіперболічні функції та які пояснюють, чому ці функції мають схожі між собою властивості:

$$\cos ix = \frac{e^{i^2 x}+e^{-i^2 x}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = chx, \quad x \in R, \qquad (23.5.37)$$

$$\sin ix = \frac{e^{i^2 x}-e^{-i^2 x}}{2i} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2i} = ishx, \quad x \in R, \qquad (23.5.38)$$

$$\mathrm{tg} ix = \frac{\sin ix}{\cos ix} = \frac{ishx}{chx} = ithx, \quad x \in R, \qquad (23.5.39)$$

$$\mathrm{ctg} ix = \frac{\cos ix}{\sin ix} = \frac{chx}{ishx} = -icthx, \quad x \in R. \qquad (23.5.40)$$

Якщо до комплексного числа $z \in C$, поданого у тригонометричній формі,

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

застосувати формулу Ойлера (23.5.30), то матимемо ***показникову форму комплексного числа***:

$$z = |z|e^{i\varphi}, \qquad (23.5.41)$$

де $|z|$ – це модуль комплексного числа z, а φ – його аргумент.

Властивості, щойно доведені для експоненти комплексної змінної, зумовлюють прості правила виконання операцій множення та ділення комплексних чисел, записаних у показниковій формі:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad (23.5.42)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0, \qquad (23.5.43)$$

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}, \quad n \in Z_+, \qquad (23.5.44)$$

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{|z|^n}e^{-in\varphi}, \quad n \in N, \; z \neq 0. \qquad (23.5.44)$$

Похідна функції комплексного аргумента означається так само, як і для функцій дійсного аргумента:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \qquad (23.5.45)$$

Природно очікувати, що

$$(e^z)' = e^z, \quad z \in C. \qquad (23.5.46)$$

Справді, за формулами (23.5.45) та (23.5.28) маємо:

$$(e^z)' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Delta z^{n-1}}{n!}}{\Delta z} e^z =$$

$$= e^z \lim_{\Delta z \to 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta z^n}{(n+1)!} \right) = e^z \lim_{\Delta z \to 0} \left(1 + \Delta z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta z^n}{(n+2)!} \right). \qquad (23.5.47)$$

Сума степеневого ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta z^n}{(n+2)!}$ у крузі $|\Delta z| \le 1$ допускає оцінку

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta z^n}{(n+2)!} \right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1,$$

тож доданок $\Delta z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta z^n}{(n+2)!}$ прямує до нуля, коли $\Delta z \to 0$. Таким чином, границя (23.5.47) дорівнює значенню e^z за кожного фіксованого комплексного числа $z \in C$.

***Завдання для самостійної роботи* 23.5.1.** *Довести, що геометричний ряд* (23.5.16) *розбігається, коли* $|z| \ge 1$.

***Завдання для самоперевірки* 23.5.1.** Який найменший додатний період функції $f = \cos z$, $z \in C$?

***Завдання для самоперевірки* 23.5.2.** Яке значення має тригонометрична функція $f = \cos z$ в точці $z = i$?

***Завдання для самоперевірки* 23.5.3.** Яке значення має тригонометрична функції $f = \operatorname{tg} z$ в точці $z = i$?

***Завдання для самоперевірки* 23.5.4.** Яке значення має тригонометрична функція $f = \sin z$ в точці $z = 1 + i$?

***Завдання для самоперевірки* 23.5.5.** Яке значення має похідна функції $f = e^z$ в точці $z = i$?

***Завдання для самоперевірки* 23.5.6.** Яка алгебраїчна форма комплексного добутку $e^{1+i} \cdot e^{1-i}$?

***Завдання для самоперевірки* 23.5.7.** Яка сума функціонального ряду

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n!}, \quad x \in R \text{ ?} \tag{23.5.48}$$

Вказівка: покласти $z := \cos x + i \sin x$, після чого подати ряд (23.5.48) у вигляді

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n!} = Re \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad x \in R.$$

Відповіді на завдання для самоперевірки

23.5.1. 2π.

23.5.2. $ch1$.

23.5.3. $ith1$.

23.5.4. $\sin 1\, ch1 + i \cos 1 sh1$.

23.5.5. $\cos 1 + i \sin 1$.

23.5.6. e^2.

23.5.7. $e^{\cos x} \cos(\sin x)$, $x \in R$.

Розділ 24. Ряди Фур'є

Нехай $C^w([a;b])$ $-$ це клас (множина) всіх функцій f, які розкладаються у абсолютно збіжний степеневий ряд на відрізку $[a;b] \subset R$ із центром у ньому:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(x-x_0)^n,\ \ x \in [a;b],\ \ x_0 \in (a;b). \qquad (24.1.1)$$

Якщо деякі функції f і g є елементами цього класу, то і довільна їх лінійна комбінація теж належить йому:

$$f,\ g \in C^w([a;b]) \ \Rightarrow\ \forall \alpha, \beta \in R:\ (\alpha f + \beta g) \in C^w([a;b]), \qquad (24.1.2)$$

себто клас $C^w([a;b])$ є лінійним функціональним простором, а набір степеневих функцій

$$\varphi_n(x) := (x-x_0)^n,\ \ \ x \in [a;b],\ \ n \in Z_+, \qquad (24.1.3)$$

є базисом (базою) цього простору. Отже, природним чином виникають запитання: чи можна у просторі $C^w([a;b])$ означити якось скалярний добуток? Чи можна у цьому просторі побудувати ортонормований базис так само, як це було зроблено в евклідовому просторі R^n? Як у ньому можна ввести поняття норми? Тощо.

Між тим, якщо справджується розвинення (24.1.1), то степеневий ряд збігається до функції f рівномірно на відрізку $[a;b]$:

$$\sup_{x\in[a;b]} |f(x) - P_n(x)| \to 0,\ \ n \to +\infty, \qquad (24.1.4)$$

де позначено $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\,(x-x_0)^k,\ x \in [a;b]$. Якщо додатково ввести позначення

$$\|f\|_C := \sup_{x\in[a;b]} |f(x)| \qquad (24.1.5)$$

та назвати число $\|f\|_C$ ***рівномірною нормою функції*** f на проміжку $[a;b]$, то умову (24.1.4) можна подати у вигляді

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in N\colon\ (n > n_0\ \Rightarrow\ \|f - P_n\|_C < \varepsilon). \qquad (24.1.6)$$

Легко перевірити, що таким способом введене поняття норми функції має такі самим властивості, що й норма елементів евклідового простору R^n, тож величину $\|f - P_n\|_C$ можна трактувати як відстань між функціями f і P_n. Тож твердження (24.1.6) означає, що за рівномірною нормою елементи простору $C^w([a;b])$ як завгодно точно можна наближати степеневими поліномами P_n. Знову-таки, виникає запитання: а які ще функції можна рівномірно наближати як завгодно точно степеневими поліномами?

До того ж, розвинення функції f за степеневими функціями (24.1.3) має локальний характер, себто ряд (24.1.1) є швидкозбіжним тільки в околі його центра $x_0 \in (a;b)$. Якщо відрізок $[a;b]$ є досить широким, то біля крайніх його точок степеневий ряд (24.1.1) може збігатися дуже повільно. Найперше це стосується періодичних функцій, які, як правило, означені на всій дійсній числовій осі R. Природно припустити, що розвинення періодичних функцій періоду $T = 2l > 0$ буде швидше збігатися, якщо його здійснювати не за степеневими поліномами (24.1.3), а краще вибрати за базу розвинення тригонометричні функції того самого періоду:

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \ \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \ \sin\frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \ \sin\frac{n\pi x}{l}, \dots \ . \qquad (24.1.7)$$

Чи так це насправді?

Саме такі та близькі до них питання розглянемо у цьому розділі.

24.1. Системи ортогональних функцій

Означення* 24.1.1.** 1. ***Функцію f *називають* ***кусково-неперервною*** *на відрізку* $[a;b] \subset R$, *якщо знайдеться таке розбиття цього відрізка*

$$\lambda = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}, \qquad (24.1.8)$$

що на сукупності всіх інтервалів $\bigcup_{k=1}^{n}(x_{k-1}, x_k)$ *ця функція є неперервною і в точках* x_k *має скінченні односторонні границі*:

$$f(a+0) \in R, \;\; f(b-0) \in R, \;\;\; f(x_k \pm 0) \in R, \;\; k = \overline{1, n-1}.$$

Клас *всіх* ***кусково-неперервних*** *на відрізку* $[a;b] \subset R$ ***функцій*** *позначимо символом* $\boldsymbol{C_{pw}}([\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}])$. *Кусково-неперервну на відрізку* $[a;b] \subset R$ ***функцію*** f *називають* ***кусково-гладкою*** *на ньому, якщо її похідна* f' *є кусково-неперервною. Кусково-неперервну чи кусково-гладку на відрізку* $[a;b] \subset R$ ***функцію*** f *називають* ***усередненою***, *якщо у кожній точці* x_k *з розбиття* λ *її значення дорівнює середньому арифметичному правої та лівої границі функції у цій точці*:

$$\frac{f(a+0)+f(b-0)}{2} = f(a) = f(b), \;\; \frac{f(x_k+0)+f(x_k-0)}{2} = f(x_k), \;\; k = \overline{1, n-1}. \;\; (24.1.9)$$

Клас *всіх* ***усереднених кусково-неперервних*** *на відрізку* $[a;b] \subset R$ ***функцій*** *позначимо символом* $\boldsymbol{C_{apw}}([\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}])$, *а* ***клас*** *всіх* ***усереднених кусково-гладких*** *на відрізку* $[a;b] \subset R$ ***функцій*** *позначимо символом* $\boldsymbol{C^1_{apw}}([\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}])$.

2. ***Функцію*** f *називають* ***абсолютно інтегрованою*** *на відрізку* $[a;b] \subset R$, *якщо знайдеться таке розбиття цього відрізка*

$$\lambda = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n: -\infty \le a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \le +\infty\}, \;\; (24.1.10)$$

що на будь-якому відрізку $[\alpha\ \beta]$, *який міститься у сукупності цих інтервалів* $\bigcup_{k=1}^{n}(x_{k-1}, x_k)$ *функція* f *є інтегрованою у сенсі Рімана, та збігаються інтеграли*

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)|dx < +\infty, \quad k = \overline{1,n}\,. \tag{24.1.11}$$

Притому вважають, що

$$\int_a^b|f(x)|dx := \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)|dx\,. \tag{24.1.12}$$

Клас *всіх* ***абсолютно інтегрованих*** *на відрізку* $[a;b] \subset R$ ***функцій*** *позначимо символом* $\boldsymbol{R_a}([\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}])$. *Множину всіх функцій, квадрат яких є абсолютно інтегрованим на відрізку* $[a;b] \subset R$, *називають* ***класом квадратично інтегрованих функцій*** *і позначають символом* $\boldsymbol{L^2}([\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}])$.

3. *Функцію* χ_A *називають* ***індикаторною функцією множини*** $A \subset R$, *якщо*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x\in A; \\ 0, & x\notin A. \end{cases} \tag{24.1.13}$$

Функцію

$$h_{\lambda,\vec{c}}(x) := \sum_{k=1}^{n} c_k\chi_{(x_{k-1};\,x_k]}(x) \tag{24.1.14}$$

називають ***східчастою функцією*** *відрізка* $[a;b]$, *утвореною за його розбиттям* (24.1.8) *і вектором значень* $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. ***Клас східчастих функцій*** *відрізка* $[a;b]$, *утвореними за всіма можливими його розбиттями* λ *і векторами значень* $\vec{c}$, *позначимо символом* $\boldsymbol{C_{sw}}([\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}])$.

Всі щойно означені простори функцій є лінійними просторами, та справедливі такі їх включення:

$$C([a,b]) \subset C_{pw}([a;b]) \subset R([a,b]) \subset L_2([a;b]) \subset R_a([a;b]); \tag{24.1.15}$$

$$C_{sw}([a;b]) \subset C_{pw}([a;b]); \quad C_{apw}([a;b]) \subset C_{pw}([a;b]). \tag{24.1.16}$$

***Означення* 24.1.2.** *Лінійний простір L називають **евклідовим простором**, якщо будь-якій парі його елементів f і g поставлено у відповідність число $(f,g) \in R$ таким чином, що справджуються аксіоми*:

1) $\forall\{f,g\} \subset L$: $(f,g)=(g,f)$; (24.1.17)

2) $\forall\{f_1,f_2,g\} \subset L$ $\forall\{\alpha,\beta\} \subset R$:

$$(\alpha f_1+\beta f_2,g)=\alpha(f_1,g)+\beta(f_2,g) \qquad (24.1.18)$$

3) $\forall f \in L$: $f \neq 0 \Rightarrow (f,f)>0$; (24.1.19)

4) $\forall f \in L$: $(f,f)=0 \Leftrightarrow f=0$. (24.1.20)

*За такими правилами утворене відображення $L \times L \to R$ називають **скалярним добутком** евклідового простору L, а число (f,g) – скалярним добутком його елементів f та g.*

Теорема 24.1.1 (*про нерівність Коші−Шварца*). *На всякому евклідовому просторі L справджуються нерівність*

$$(f,g)^2 \leq (f,f)(g,g), \qquad (24.1.21)$$

*яку називають **нерівністю Коші−Шварца.***

Доведення. За аксіомами 3)−4) скалярного добутку для всіх дійсних чисел $t \in R$ та для довільних фіксованих елементів f і g простору L виконується нерівність

$$(tf-g,tf-g) \geq 0,$$

яку, за аксіомою 2), можна переписати у вигляді

$$t^2(f,f)-2t(f,g)+(g,g) \geq 0, \ \ t \in R.$$

Тож квадратний тричлен

$$P_2(t) := t^2(f,f) - 2t(f,g) + (g,g)$$

набуває на всій множині дійсних чисел R тільки невід'ємних значень, а це можливо тоді й лише тоді, коли його дискримінант

$$\Delta = (f,g)^2 - (f,f)(g,g)$$

є недодатним числом, тобто

$$(f,g)^2 - (f,f)(g,g) \le 0 \;\Leftrightarrow\; (f,g)^2 \le (f,f)(g,g).$$

Теорему доведено.

Означення* 24.1.3.** *Лінійний простір* L *називають* ***нормованим простором*, якщо будь-якому його елементу* f *поставлено у відповідність число* $\|f\| \in R$ *таким чином, що справджуються аксіоми*:

1) $\forall f \in L\ \forall \alpha \in R$: $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$; (24.1.22)

2) $\forall \{f,g\} \subset L$: $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$; (24.1.23)

3) $\forall f \in L$: $f \ne 0 \;\Rightarrow\; \|f\| > 0$; (24.1.24)

4) $\forall f \in L$: $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$. (24.1.25)

За такими правилами утворене відображення $L \to R_+$ *називають* ***нормою*** *простору L, а число* $\|f\|$ *– нормою його елемента* $f \in L$.

Теорема 24.1.2 (*про нормованість евклідового простору*). *Усякий евклідів простір L стає нормованим, якщо на ньому означити норму*

$$\|f\| := \sqrt{(f,f)}, \quad f \in L, \tag{24.1.26}$$

яку називають його ***властивою нормою*** *або його* ***середньоквадратичною нормою***.

Доведення. Аксіоми 3)−4) для норми є простими наслідками відповідних аксіомам 3)−4) скалярного добутку та формули (24.1.26). Те саме справедливе і для першої аксіоми (24.1.22), яка безпосередньо випливає з другої аксіоми для скалярного добутку евклідового простору та формули (24.1.26):

$$\|\alpha f\| = \sqrt{(\alpha f, \alpha f)} = \sqrt{\alpha^2 (f, \alpha f)} = |\alpha| \cdot \|f\|.$$

Залишається довести лише нерівність (24.1.23), яка є наслідком нерівності Коші−Шварца.

Справді, нерівність (24.1.21) у термінах заданої норми набуває вигляду

$$\forall \{f, g\} \subset L: \ \ |(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|, \tag{24.1.27}$$

тож за означенням норми і за другою аксіомою скалярного добутку маємо:

$$\|f + g\| = \sqrt{(f + g, f + g)} = \sqrt{(f, f) + 2(f, g) + (g, g)} \leq$$

$$\leq \ \sqrt{(f, f) + 2|(f, g)| + (g, g)} = \sqrt{\|f\|^2 + 2|(f, g)| + \|g\|^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\|f\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2} = \|f\| + \|g\|.$$

Теорему доведено.

Означення **24.1.4.** 1. ***Пару елементів*** $\{f, g\} \subset L$ *лінійного простору називають* ***ортогональною*** *і позначають* $f \perp g$, *якщо скалярний добуток цих елементів дорівнює нулюї*:

$$f \perp g \ \overset{def}{\Longleftrightarrow} \ (f, g) = 0. \tag{24.1.28}$$

2. *Послідовність елементів функціонального евклідового простору* $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n, \ldots\} \subset L$ *називають* ***ортогональною системою функцій*** (***о.с.ф.***)*, якщо будь-яка пара її елементів є ортогональною*:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n, \ldots\} - \text{о.с.ф.} \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\{i, j\} \subset N,\ i \neq j \ \Rightarrow\ \varphi_i \perp \varphi_j). \quad (24.1.29)$$

3. ***Елемент*** $f \in L$ *евклідового простору називають* ***нормованим*** (*за властивою нормою*)*, якщо норма* f *дорівнює одиниці*:

$$f - \textit{нормований} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \|f\| = 1. \quad (24.1.30)$$

4. *Ортогоналізована система функцій евклідового простору* L *називають* ***ортонормованою системою функцій*** (***о.н.с.ф.***)*, якщо будь-який її елемент є нормованим*:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n, \ldots\} - \text{о.н.с.ф.} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (\varphi_i, \varphi_j) = 0, & i \neq j,\ \{i, j\} \subset N; \\ \|\varphi_i\| = 1, & i \in N. \end{cases} \quad (24.1.31)$$

Означення **24.1.5.** *Нехай* $\{f, g\} \subset C_{apw}([a; b])$*, тоді покладемо*

$$(f, g) := \int_a^b f(x)\, g(x) dx; \quad (24.1.32)$$

$$\|f\| := \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}\,. \quad (24.1.33)$$

Теорема 24.1.3 (*про скалярний добуток та норму на просторі функцій* $\boldsymbol{C_{apw}([a; b])}$**).** *Відображення, задане на парах елементів простору* $C_{apw}([a; b])$ *формулою* (24.1.32), *є скалярним добутком цього простору. Відповідно, відображення, задане на просторі* $C_{apw}([a; b])$ *формулою* (24.1.33), *є скалярним властивою нормою цього простору.*

Доведення. Будь-які функції f, g простору $C_{apw}([a;b])$ є інтегрованими, тож і їх добуток є інтегрованою функцією на відрізку $[a;b] \subset R$; тому скалярний добуток, заданий формулою (24.1.32), буде означеним для всіх пар функцій $\{f, g\} \subset C_{apw}([a;b])$. Залишається перевірити аксіоми означення скалярного добутку.

Перша аксіома (означення скалярного добутку) справджується унаслідок властивості комутативності операції множення на множині дійсних чисел.

Справедливість другої аксіоми **означення 24.1.2** зумовлюється властивістю лінійності визначеного інтеграла.

Якщо інтеграл по відрізку $[a;b]$ від невід'ємної функції $f^2 \in C_{apw}([a;b])$ дорівнює нулю, то її значенням теж є число нуль у всіх точках її неперервності цього проміжку, через що ліва $f^2(x_k - 0)$ та права $f^2(x_k + 0)$ границі цієї функції мають значення нуль у кожній точці розриву x_k:

$$f^2(x_k - 0) = f^2(x_k + 0) \;\Leftrightarrow\; f(x_k \pm 0) = 0,$$

що спричиняє значення нуль їх середньо арифметичного числа:

$$\frac{f(x_k+0)+f(x_k-0)}{2} = 0.$$

Отож з рівності

$$\|f\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_a^b f^2(x)\,dx = 0$$

випливає, що функція f набуває нульового значення у всіх точках відрізка. Обернене твердження є очевидним: інтеграл нульової функції є нулем. Справедливість четвертої аксіоми означення скалярного добутку встановлена.

Перевіримо третю аксіому. Нехай хоча б у одній точці $x \in [a;b]$ функція $f \in C_{apw}([a;b])$ приймає не нульове значення, це означає, що $f^2(x) > 0$. Тоді знайдеться такий лівий або правий окіл цієї точки (незалежно від того, чи є x точкою розриву, чи ні), на якому функція f^2 є неперервною і додатною, а це зумовлює додатність значення інтеграла від цієї функції:

$$(\exists x \in [a;b]\colon\ f(x) \neq 0)\ \Rightarrow\ \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} > 0.$$

Отже, відображення, означене за формулюю (24.1.32), задовольняє всі аксіоми означення скалярного добутку на лінійному просторі $C_{apw}([a;b])$, з чого, згідно з **теоремою 24.1.2**, випливає, що формула (24.1.33) задає властиву норму на цьому просторі.

Теорему доведено.

Легко перевірити, що **теорема 24.1.3** справедлива і на просторі східчастих функцій $C_{sw}([a;b])$, проте для інших просторів $C_{pw}([a;b])$, $R([a;b])$, $L_2([a;b])$ і $R_a([a;b])$, строго кажучи, це не так.

Наприклад, на просторі кусково-неперервних функцій інтеграл від квадрата f^2 функції $f \in C_{pw}([a;b])$ дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли у всіх точках її неперервності відрізка $[a;b]$ функція f набуває значення нуль, натомість у точках її розриву функція може набувати значення, відмінні від нуля. Тож третя і четверта аксіоми зазначених означень скалярного добутку та норми на цьому просторі не є чинними. Однак можна ввести додаткове означення нульової функції $f = 0$ на цьому просторі як такої, що набуває значення нуль в усіх точках її неперервності відрізка $[a;b]$. Після такої домовленості лінійний простір $C_{pw}([a;b])$ стає евклідовим та нормованим. Таке саме зауваження стосується просторів $R([a;b])$ та $L^2([a;b])$. Цього не можна сказати про простір абсолютно інтегрованих функцій $R_a([a;b])$, бо може бути так, що добуток двох елементів цього простору f та g не є інтегрованою функцією, тобто

$$f \in R_a([a;b]),\ g \in R_a([a;b]) \ \ \nRightarrow \ \ fg \in R_a([a;b]).$$

Отже, добуток (24.1.32) є означеним не для всіх функцій f і g цього простору, але, якщо цей добуток існує, з метою спрощення термінології, все одно його будемо називати скалярним добутком.

***Завдання для самостійної роботи* 24.1.1.** *Довести, що формули* (24.1.32)−(24.1.33) *задають скалярний добуток і норму на просторі східчастих функцій* $C_{sw}([a;b])$.

Наведемо приклади ортонормованих або ортогональних систем функцій за умови, що скалярний добуток функцій означений та властива їх норма означені формулами (24.1.32)−(24.1.33).

***Приклад* 24.1.1.** Перевірити, що функціональна послідовність

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \dots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \dots \qquad (24.1.34)$$

утворює ортогональну систему функцій на відрізку $[-l,l],\ l > 0$. Цю систему називають ***тригонометричною о.с.ф***.

Розв'язання. Нехай $\{k,n\} \subset N$ і $k \neq n$, тоді

$$\left(\cos\frac{k\pi x}{l}, \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\, \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(k-n)\pi x}{l} - \cos\frac{(k+n)\pi x}{l}\right)dx = \frac{l}{2}\left(\frac{\sin\frac{(k-n)\pi x}{l}}{k-n} - \frac{\sin\frac{(k+n)\pi x}{l}}{k+n}\right)\Bigg|_{-l}^{l} = 0.$$

(24.1.35)

Так само обчислюються добутки

$$\left(sin\frac{k\pi x}{l}, sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} sin\frac{k\pi x}{l}\, sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0; \qquad (24.1.36)$$

$$\left(\cos\frac{k\pi x}{l}, sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l} sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0. \qquad (24.1.37)$$

Знайдемо добутки одиничної функції з усіма іншими функціями заданої системи (24.1.34):

$$\left(1, \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{l}{n\pi} sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0; \qquad (24.1.38)$$

$$\left(1, sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0. \qquad (24.1.39)$$

Отже, всі можливі добутки двох різних функцій вказаної системи дорівнюють нулю, тож система є ортогональною.

***Приклад* 24.1.2.** Перевірити, що функціональна послідовність

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$$

(24.1.40)

утворює ортонормовану систему функцій на відрізку $[-l, l]$, $l > 0$. Цю систему називають ***тригонометричною о.н.с.ф***.

Розв'язання. Знайдемо норми ортогональної системи функцій (24.1.39):

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-l}^{l} 1^2\ dx} = \sqrt{2l}, \qquad (24.1.41)$$

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}\,dx} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)\Big|_{-l}^{l}} = \sqrt{l}\,,\quad n \in N. \qquad (24.1.42)$$

Так само маємо

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx} = \sqrt{l}\,,\quad n \in N. \qquad (24.1.43)$$

Тож поділивши кожен елемент ортогональної системи функцій (24.1.39) на його норму, отримаємо ортонормовану систему функцій (24.1.40).

***Приклад* 24.1.3.** Перевірити, що за умови $b - a := 2l > 0$ послідовність (24.1.40) утворює ортонормовану систему функцій на відрізку $[a, b]$.

Розв'язання. Нехай число $T \neq 0$ є періодом функції f на множині R:

$$\forall x \in R:\ f(x+T) = f(x). \qquad (24.1.44)$$

Тоді, якщо функція f є інтегрованою на відрізку $[0, T]$, то вона є інтегрованою на всіх відрізках $[a, b] \subset R$, і справджуються тотожності

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,\ \ a \in R,\ b \in R; \qquad (24.1.45)$$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx,\ \ a \in R. \qquad (24.1.46)$$

Якщо $b - a = 2l = T -$ це період функції f, то остання тотожність набуває вигляду

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-l}^{l} f(x)dx,\ \ a \in R. \qquad (24.1.47)$$

Позаяк всі функції системи (24.1.40) мають період $T = 2l$, то із тотожності (24.1.47) та інтегральних рівностей (24.1.35)−(24.1.39), (24.1.41)−(24.1.43) випливає, що система функцій (24.1.40) − це о.н.с.ф. вказаного відрізка $[a, b]$.

***Завдання для самостійної роботи* 24.1.2.** *Нехай число* $T \neq 0$ *є періодом функції* f *на множині* R *і ця функція є інтегрованою на відрізку* $[0, T]$. *Довести, що тоді справджуються тотожності* (24.1.45)−(24.1.46).

***Завдання для самостійної роботи* 24.1.3.** *Перевірити, що функціональна послідовність*

$$\varphi_n(x) := \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \qquad (24.1.48)$$

утворює ортогональну систему функцій на відрізку $[0, l]$, *і що послідовність*

$$\varphi_0(x) := \frac{1}{\sqrt{l}}, \ \ \varphi_n(x) := \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (24.1.49)$$

є ортонормованою системою функцій на ньому.

***Завдання для самостійної роботи* 24.1.4.** *Перевірити, що функціональна послідовність*

$$\varphi_n(x) := \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (24.1.50)$$

утворює ортогональну систему функцій на відрізку $[0, l]$, *і що послідовність*

$$\varphi_n(x) := \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (24.1.51)$$

є ортонормованою системою функцій на ньому.

Приклад **24.1.4.** Перевірити, що функціональна послідовність

$$\varphi_n(x) := \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24.1.52)$$

утворює ортонормовану систему функцій на відрізку $[-1, 1]$. Елементи цієї системи називають ***поліномами Лежандра***.

Розв'язання. Для спрощення запису введемо позначення

$$c_n := \sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{1}{2^n \cdot n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Нехай $n > k \geq 0$, тоді

$$(\varphi_n, \varphi_k) = c_n c_k \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n \cdot \frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^k dx =$$

$$= c_n c_k \int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^k d\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^n\right) =$$

$$= c_n c_k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^n \frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^k \bigg|_{-1}^{1} -$$

$$-c_n c_k \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^n \frac{d^{k+}}{dx^{k+1}}(1-x^2)^k dx =$$

$$= 0 - c_n c_k \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^n \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(1-x^2)^k dx = \dots =$$

$$= c_n c_k (-1)^n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}(1-x^2)^k dx = 0, \qquad (24.1.53)$$

тому що порядок похідної $\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}$ більший за показник степеня полінома $(1-x^2)^k$, а саме $k+n > 2k$, що зумовлює тотожність

$$\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}(1-x^2)^k = 0, \ \ x \in [-1, 1].$$

Окрім того, похідна $\frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^n$ за всіх значень $k < n$ містить множник $1-x^2$, який зануляється у точках $x = \pm 1$.

Отже, всі елементи системи функцій (24.1.52) є взаємно ортогональними.

Обчислимо квадрат норми вказаних функцій. Для цього досить у рівності (24.1.53) покласти $k = n$, виконати тригонометричну заміну під знаком інтеграла й скористатися інтегральними формулами Валліса:

$$\|\varphi_n\|^2 = (\varphi_n, \varphi_n) = {c_n}^2 (-1)^n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (1-x^2)^n dx =$$

$$= {c_n}^2 \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n dx =$$

$$= {c_n}^2 (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \, dx = \left| {x=\sin t \atop dx=\cos t dt} \right| = {c_n}^2 (2n)!\, 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \, dt =$$

$$= \frac{2n+1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^n \cdot n!}\right)^2 \cdot (2n)! \cdot 2 \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \, .$$

Таким чином, вказана система функцій є ортонормованою.

***Завдання для самостійної роботи* 24.1.5.** *Довести, що система функцій*

$$\varphi_n(x) := sign(\sin(2^{n+1} \pi x)), \; x \in [0, 1], \; n = 0, 1, 2, \dots \, , \qquad (24.1.54)$$

яку називають ***системою Радемахера****, є о.н.с.ф. на відрізку* $[0, 1]$. *Накреслити графіки функцій Радемахера за значення* $n = 0, 1, 2, 3$.

З'ясуємо, як пов'язані між собою поняття ортогональності й поняття лінійної незалежності системи функцій з евклідового простору L.

Означення* 24.1.6.** 1. ***Функції $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n\} \subset L$ *називають* ***лінійно залежними****, якщо знайдеться така їх нетривіальна лінійна комбінація, норма якої дорівнює нулю, тобто*

$$\exists\, \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\} \subset R: \begin{cases} |c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| \neq 0; \\ \|c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n\| = 0. \end{cases} \qquad (24.1.55)$$

Інакше ***функції*** $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \dots,\ \varphi_n\} \subset L$ *називають* ***лінійно незалежними***; *це означає, що*

$$\begin{cases} \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\} \subset R; \\ \|c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n\| = 0; \end{cases} \Rightarrow\ c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0. \qquad (24.1.56)$$

2. *Послідовність функцій* $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n, \dots\} \subset L$ *називають* ***лінійно незалежною системою функцій*** (***л.н.с.ф.***), *якщо будь-яка її скінчена підмножина* $\{\varphi_{k_1},\ \varphi_{k_2},\ \varphi_{k_3}, \dots,\ \varphi_{k_n}\}$, $n \geq 2$, *складається з лінійно незалежних функцій.*

3. *Лінійні комбінації вигляду*

$$c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n := P_n\,,\ n \geq 0, \qquad (24.1.57)$$

називають ***поліномами степеня не вище*** $n \in Z_+$, *породжені системою функцій* $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \dots\} \subset L$. *Якщо ця система є тригонометричною о.с.ф.* (24.1.34)*, то її поліномами степеня не вище* $n \in Z_+$ *називають функції вигляду*

$$P_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right),\ n \in Z_+. \qquad (24.1.58)$$

Приклад **24.1.5.** Перевірити, що система степеневих функцій

$$\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \dots,\ \varphi_n, \dots\} = \{1,\ x,\ x^2, \dots,\ x^n, \dots\} \qquad (24.1.59)$$

є лінійно незалежною на будь-якому відрізку $[a; b] \subset R,\ a < b$.

Розв'язання. Нехай $\{\varphi_{k_1},\ \varphi_{k_2},\ \varphi_{k_3}, \dots,\ \varphi_{k_n}\}$, $n \geq 2$, − це довільний набір елементів системи (24.1.59), складемо будь-яку їх лінійну комбінацію

$$P := c_1\varphi_{k_1} + c_2\varphi_{k_2} + c_3\varphi_{k_3} + \dots c_n\varphi_{k_n}\,,$$

тобто

$$P(x) = c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} + c_3 x^{k_3} + \dots + c_n x^{k_n}, \;\; x \in [a; b]. \quad (24.1.60)$$

Можна вважати, що індекси функцій цього набору утворюють зростаючу числову послідовність: $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n$, тож $P(x)$ – це поліном степеня не вище $k_n \in N$. Якщо $\|P\| = 0$, то це означає, що

$$c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} + c_3 x^{k_3} + \dots + c_n x^{k_n} \equiv 0, \;\; x \in [a; b]. \quad (24.1.61)$$

За основною теоремою алгебри випливає, що поліном (24.1.60) може набувати значення нуль не більше ніж у k_n точках відрізка $[a; b]$, тому тотожність (24.1.61) може справджуватись на вказаному відрізку тоді й лише тоді, коли всі коефіцієнти полінома $P(x)$ є нулями:

$$c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0.$$

Отже, будь-яка підмножина $\{\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}, \varphi_{k_3}, \dots, \varphi_{k_n}\}$ системи (24.1.59) складається із лінійно незалежних функцій, що доводить лінійну незалежність цієї системи.

Завдання для самостійної роботи **24.5.6.** *Довести, що лінійно незалежна система функцій* $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\} \subset L$ *евклідового простору L не містить нульової функції*:

$$\nexists n \in Z_+: \;\; \|\varphi_n\| = 0.$$

Теорема 24.1.4 (*про лінійну незалежність ортогональної системи функцій*). 1. *Якщо* $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\} \subset L$ $-$ *ортогональна система функцій евклідового простору L, яка не містить нульової функції, то ця система функцій є лінійно незалежною.*

2. *Якщо* $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n, \dots\} \subset L\ -$ *лінійно незалежна система функцій евклідового простору* L, *то знайдеться така послідовність її поліномів*

$$\{P_0,\ P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_n,\ \dots\} \subset L\ ,$$

яка утворює ортонормовану систему функцій цього простору.

Доведення. 1. Нехай $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n, \dots\} \subset L\ -$ ортогональна система функцій евклідового простору L, яка не містить нульової функції, себто $\|\varphi_n\| > 0,\ \ n \in Z_+$; виберемо довільну її підмножину елементів $\{\varphi_{k_1},\ \varphi_{k_2},\ \varphi_{k_3}, \dots,\ \varphi_{k_n}\},\ n \geq 2,$ та складемо будь-яку їх лінійну комбінацію:

$$l_n := c_1\varphi_{k_1} + c_2\varphi_{k_2} + c_3\varphi_{k_3} + \cdots c_n\varphi_{k_n}. \tag{24.1.62}$$

Якщо припустити, що норма l_n дорівнює нулю, то матимемо:

$$\|l_n\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(c_1\varphi_{k_1} + c_2\varphi_{k_2} + \cdots + c_n\varphi_{k_n},\ \ c_1\varphi_{k_1} + c_2\varphi_{k_2} + \cdots + c_n\varphi_{k_n}\right) = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ 2\sum\nolimits_{1\leq i<j\leq n} c_{n_i}\, c_{n_j}\left(\varphi_{k_i}, \varphi_{k_j}\right) + \sum\nolimits_{i=1}^{n} {c_i}^2\left(\varphi_{k_i}, \varphi_{k_i}\right) = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ 2\sum\nolimits_{1\leq i<j\leq n} c_{n_i}\, c_{n_j}\cdot 0 + \sum\nolimits_{i=1}^{n} {c_i}^2\left\|\varphi_{k_i}\right\|^2 = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ \sum\nolimits_{i=1}^{n} {c_i}^2\left\|\varphi_{k_i}\right\|^2 = 0\ \Leftrightarrow\ \ c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Отож функції $\varphi_{k_1},\ \varphi_{k_2},\ \varphi_{k_3},\ \dots,\ \varphi_{k_n}$ є лінійно незалежними, а отже, за умовою (21.1.56) ортогональна система функцій

$$\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n, \dots\} \subset L$$

є лінійно незалежною.

2. Нехай $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n, \dots\} \subset L\ -$ лінійно незалежна система функцій евклідового простору L; тоді будь-яка її підмножина елементів

$\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n\}$, $n \in Z_+$, складається із незалежних функцій і не містить функції з нульовою нормою.

Покладемо $P_0 := \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}$. Очевидно, що $\|P_0\| = 1$. Далі підберемо коефіцієнт $\alpha \in R$ полінома

$$f_1 = \varphi_1 + \alpha P_0$$

так, щоб він став ортогональним поліному P_0 (це те саме, що ортогональність до φ_0):

$$f_1 \perp P_0 \iff (\varphi_1 + \alpha P_0,\ P_0) = 0 \iff$$

$$\iff (\varphi_0, P_0) + \alpha(P_0, P_0) = 0 \iff (\varphi_0, P_0) + \alpha = 0 \iff \alpha = -(\varphi_0, P_0).$$

Після цього як поліном P_1 вибираємо функцію

$$P_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{\varphi_1 - (\varphi_0, P_0)P_0}{\|\varphi_1 - (\varphi_0, P_0)P_0\|}.$$

Знаменник цього дробу

$$\|\varphi_1 - (\varphi_0, P_0)P_0\| = \left\|\varphi_1 - \frac{(\varphi_0, P_0)}{\|\varphi_0\|}\varphi_0\right\|$$

не є нулем через те, що функції φ_0 та φ_1 лінійно незалежні.

Далі повторюємо цей процес, за яким було знайдено поліноми P_0 та P_1. Загалом, якщо ортонормовані поліноми $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ були вже побудовані, то наступний за ними поліном f_n, який був би ортогональним до них, шукаємо у вигляді

$$f_n := \varphi_n + \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{n-1} P_{n-1}. \qquad (24.1.63)$$

У такому разі умова ортогональності породжує лінійну систему відносно невідомих коефіцієнтів $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{n-1}$:

$$\begin{cases} f_n \perp P_0; \\ f_n \perp P_1; \\ \quad\dots \\ f_n \perp P_{n-1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\varphi_n + \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{n-1} P_{n-1},\ P_0\ ) = 0; \\ (\varphi_n + \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{n-1} P_{n-1},\ P_1\ ) = 0; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\ (\varphi_n + \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{n-1} P_{n-1}, P_{n-1}\ ) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\varphi_n,\ P_0) + \alpha_0 + 0 + \dots + 0 = 0; \\ (\varphi_n,\ P_1) + 0 + \alpha_1 + \dots + 0 = 0; \\ \qquad\qquad \dots \\ (\varphi_n, P_{n-1}) + 0 + 0 + \dots + \alpha_{n-1} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -(\varphi_n, P_0\ ); \\ \alpha_1 = -(\varphi_n, P_1\ ); \\ \qquad \dots \\ \alpha_{n-1} = -(\varphi_n, P_{n-1}\ ), \end{cases}$$

з розв'язку якої маємо функцію

$$f_n = \varphi_n - (\varphi_n, P_0\ )P_0 - (\varphi_n, P_1\ )P_1 - \dots + \alpha - (\varphi_n, P_{n-1}\ )_{n-1} P_{n-1}\ ,$$

яка є лінійною комбінацією лінійно незалежних функцій $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n$, а отже, її норма $\|f_n\|$ не може бути нулем. Тож за наступний нормований поліном вибираємо функцію

$$P_n := \frac{f_n}{\|f_n\|}\ .$$

Діючи так само і надалі, утворимо всю систему ортонормованих поліномів $\{P_0,\ P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_n,\ \dots\} \subset L$, породжених лінійно незалежною системою функцій $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n, \dots\} \subset L$.

Теорему доведено.

Спосіб, у який була побудована система ортогональних поліномів за доведення останньої **теореми 24.1.4**, називають ***методом ортогоналізації Грама–Шмідта***.

Завдання для самоперевірки **24.1.1.** Що можна сказати про функції f та g залежно від того, до якого класу функцій вони належать, якщо

$$(f, g) = \|f\| \cdot \|g\|\ ?$$

***Завдання для самоперевірки* 24.1.2.** До якого класу функцій належать елементи тригонометричної о.с.ф. (24.1.34)?

***Завдання для самоперевірки* 24.1.3.** До якого класу функцій належать поліноми Лежандра (24.1.52)?

***Завдання для самоперевірки* 24.1.4.** До якого класу функцій належать поліноми Радемахера (24.1.54)?

***Завдання для самоперевірки* 24.1.5.** Чи може лінійно незалежна система функцій містити нульову функцію?

***Завдання для самоперевірки* 24.1.6.** Чи можуть всі коефіцієнти $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ полінома (24.1.63) бути нулями? Якщо так, то що це означає?

24.2. Загальні ряди Фур'є

Нехай на евклідовому просторі $L = L([a,b])$ функцій, означених на відрізку $[a,b]$, задано ортогональну систему функцій

$$\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n, \dots\} \subset L, \tag{24.2.1}$$

яка не містить нульової функції. Якщо функцію $f \in L$ можна подати у вигляді ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, \varphi_n(x),\ \ x \in [a,b], \tag{24.2.2}$$

який збігається у кожній точці відрізка $[a,b]$, то говорять, що ***функція*** $f \in L$ ***розкладається за системою ортогональних функцій*** (24.2.1), а числа $c_n,\ n \in Z_+,$ називають ***коефіцієнтами*** цього ***розвинення***. Як було зазначено вище (***означення* 22.2.1**), такий тип збіжності функціонального ряду (24.2.2) називають його поточковою збіжністю.

Поряд з поточковою збіжністю природно означити в евклідових просторах поняття збіжності за властивою нормою цього простору чи за іншими нормами, означеними у цьому просторі.

Означення* 24.2.1.** 1. *Нехай* f і g *є елементами евклідового простору* L, *на якому означена деяка норма його елементів* $\|\cdot\|$. *Тоді норму різниці цих елементів називають* ***відхиленням f *від* g *чи їх* ***метрикою*** *відносно вказаної норми* $\|\cdot\|$.

Якщо $\|\cdot\|$ − *це властива норма евклідового простору* L, *то породжене їм відхилення називають* ***середньоквадратичним відхиленням*** *або* ***властивою метрикою***.

2. *Кажуть, що послідовність функцій* $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\} \subset L$ *евклідового простору* L ***збігається*** *до функції* $\varphi \in L$ *цього простору* ***за*** *деякою його* ***нормою*** $\|\cdot\|$ *або* ***за*** *відповідною їй* ***метрикою***, *якщо*

$$\|\varphi_n - \varphi\| \to 0, \quad n \to +\infty. \qquad (24.2.3)$$

Якщо $\|\cdot\|$ − *це властива норма евклідового простору* L, *то породжену нею збіжність називають* ***збіжністю в середньоквадратичному*** *і позначають як*

$$\varphi_n \xrightarrow{\text{с.к.}} \varphi, \quad n \to +\infty.$$

3. *Кажуть, що ряд* (24.2.2) *збігається до вказаної функції* $f \in L$ *за деякою нормою* $\|\cdot\|$ *евклідового простору* L, *якщо*

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k - f\right\| \to 0, \quad n \to +\infty. \qquad (24.2.4)$$

Якщо $\|\cdot\|$ − *це властива норма евклідового простору* L, *то породжену нею збіжність функціонального ряду* (24.2.2) *називають* ***збіжністю ряду в середньоквадратичному*** *і позначають як* $f \overset{\text{с.к.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,\varphi_n$.

Завдання для самостійної роботи* 24.2.1.** *Довести, що збіжність послідовності функцій* $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n, \dots\}$ *за рівномірною нормою* (24.1.5) *рівносильна рівномірній збіжності цієї послідовності на відрізку* $[a, b]$. *У такому разі відхилення* (*метрику*) *функції* f *від* g *природно назвати* ***рівномірним відхиленням (***метрикою***).

Нехай система ортогональних функцій (24.2.1) складається з неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій, і нехай ряд (24.2.2) збігається до функції f рівномірно на цьому відрізку. За таких умов функція f теж є неперервною і добуток цього ряду на будь-яку функцію φ_n, $n \in Z_+$, ортогональної системи функцій (24.2.1) можна почленно інтегрувати, що зумовлює рівності:

$$(f, \varphi_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (\varphi_n, \varphi_k) = 0 + \dots + c_n(\varphi_n, \varphi_n) + 0 + \dots = c_n \|\varphi_n\|^2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, \quad n \in Z_+. \qquad (24.2.5)$$

Якщо система функцій (24.2.1) є ортонормованою, то формули (24.2.5) набувають простішого вигляду:

$$c_n = (f, \varphi_n), \quad n \in Z_+. \qquad (24.2.6)$$

***Означення* 24.2.2.** *Нехай в евклідовому просторі L задано ортогональну систему функцій* (24.2.1). *Тоді кожній функції* f, *що є елементом цього простору, можна поставити у відповідність ряд вигляду*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x), \qquad (24.2.7)$$

коефіцієнти c_n, $n \in Z_+$, *якого обчислені за формулами* (24.2.5), *і такий ряд називають* ***рядом Фур'є функції*** f ***за ортогональною системою функцій*** (24.2.1) *та позначають*

$$f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x). \qquad (24.2.8)$$

Якщо система функцій (24.2.1) *є ортонормованою, то ряд* (24.2.7) *називають* ***рядом Фур'є функції*** f ***за ортнорнормованою системою функцій****, коли його коефіцієнти обчислені за формулами* (24.2.6).

Зауваження.**24.2.1.** Якщо ортогональна система функцій (24.2.1) евклідового простору L не є ортонормованою, то з неї легко утворити ортонормовану, помноживши кожен її елемент на число, обернене до норми цього елемента, тобто система функцій

$$\left\{\psi_n := \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} \mid n \in Z_+\right\} \tag{24.2.9}$$

буде тоді ортонормованою системою функцій того ж евклідового простору L. Насправді ряди Фур'є функції $f \in L$ за цими двома системами функцій (24.2.1) та (24.2.9) евклідового простору L є однаковими, бо і в тому, і в іншому разі загальний член ряду Фур'є є одним і тим же:

$$\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}\varphi_n = \left(f, \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\right)\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} = (f,\psi_n)\psi_n\ ,\ n \in Z_+. \tag{24.2.10}$$

Отже, якщо елементи двох ортогональних систем евклідового простору L відрізняються лише числовими множниками, то ряд Фур'є, побудований для функції $f \in L$ за цими двома системами, буде один і той самий.

Теорема 24.2.1 (*про найменше відхилення функції від поліномів, породжених о.с.ф.*). *Серед усіх поліномів*

$$c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n := P_n \tag{24.2.11}$$

степеня не вище $n \geq 0$*, породжених ортонормованою системою функцій* (24.2.1) *евклідового простору L, найменше відхилення від функції* $f \in L$ *має* *той, який є n-ю часткововою сумою її розвинення у ряд Фур'є за цією системою ортонормованих функцій.*

Доведення. Обчислимо квадрат відхилення заданої функції $f \in L$ від довільного полінома P_n степеня не вище $n \geq 0$, породженого ортогональною системою функцій (24.2.1) евклідового простору L:

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k\|^2 = (f - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k\,,\ f - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} c_k(f,\varphi_k) + (\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k\,,\ \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} c_k(f,\varphi_k) + \sum_{k=0}^{n} {c_k}^2\|\varphi_k\|^2. \qquad (24.2.12)$$

Додавши вираз $-\sum_{k=0}^{n}(f,\varphi_k)^2 + \sum_{k=0}^{n}(f,\varphi_k)^2$ до правої частини тотожності (24.2.12) і підставивши значення норм $\|\varphi_k\|^2$=1, $k = \overline{0,n}$, перепишемо цю тотожність у вигляді

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n}(f,\varphi_k)^2 + \sum_{k=0}^{n}\big(c_k - (f,\varphi_k)\big)^2. \qquad (24.2.13)$$

Звідси випливає, що для довільного полінома $P_n = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k$ справедлива нерівність

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n}(f,\varphi_k)^2. \qquad (24.2.14)$$

До того ж вираз, утворений в правій частині рівності (24.2.13), звісно, набуває найменшого значення тоді, коли

$$c_k = (f,\varphi_k),\ \ k = 0, 1, 2, \dots, n\ ,$$

а отже, числа c_k є коефіцієнтами ряду Фур'є функції $f \in L$ за вказаною системою ортонормованих функцій.

Теорему доведено.

Наслідок 24.2.1. 1. *Для коефіцієнтів* $c_n, n \in Z_+,$ *ряду Фур'є функції* $f \in L$ *за* <u>*ортонормованою*</u> *системою функцій* (24.2.1) *евклідового простору* L *справджується тотожність*

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} {c_k}^2, \quad n \in Z_+. \quad (24.2.15)$$

2. *Для коефіцієнтів* c_n, $n \in Z_+$, *ряду Фур'є функції* $f \in L$ *за ортогональною системою функцій* (24.2.1) *евклідового простору* L *справджується тотожність*

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} {c_k}^2 \|\varphi_k\|^2, \quad n \in Z_+. \quad 24.2.16)$$

Доведення. 1. Для доведення тотожності (24.2.15) досить за формулою (24.2.6) підставити у праву частину рівності (24.2.13) значення скалярних добутків $(f, \varphi_k) = c_k$ за всіх $k = \overline{0, n}$.

2. Якщо у праву частину рівності (24.2.12) підставити за формулою (24.2.5) значення скалярних добутків $(f, \varphi_k) = c_k \|\varphi_k\|^2$, $k = \overline{0, n}$, то матимемо

$$\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} c_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=0}^{n} {c_k}^2 \|\varphi_k\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} {c_k}^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=0}^{n} {c_k}^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} {c_k}^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Твердження доведене.

Наслідок 24.2.2. 1. *Для коефіцієнтів* $c_n, n \in Z_+,$ *ряду Фур'є функції* $f \in L$ *за* <u>*ортонормованою*</u> *системою функцій* (24.2.1) *евклідового простору* L *справджуються нерівності*

$$\sum_{k=0}^{n} {c_k}^2 \le \|f\|^2, \quad n \in Z_+. \quad (24.2.17)$$

2. *Для коефіцієнтів* c_n, $n \in Z_+$, *ряду Фур'є функції* $f \in L$ *за ортогональною системою функцій* (24.2.1) *евклідового простору* L *справджуються нерівності*

$$\sum_{k=0}^{n} c_k{}^2 \, \|\varphi_k\|^2 \le \|f\|^2, \quad n \in Z_+. \qquad (24.2.18)$$

Доведення. Тотожності (24.2.15) зумовлюють нерівності

$$\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k{}^2 \, \|\varphi_k\|^2 \ge 0, \;\; n \in Z_+,$$

з яких випливають зазначені у теоремі нерівності (24.2.17).

Аналогічно за тотожностями (24.2.16) доводять нерівності (24.2.18).

Твердження доведене.

Теорема 24.2.2 (***про нерівність Бесселя***). *Для коефіцієнтів* c_n, $n \in Z_+$, *ряду Фур'є функції* $f \in L$ *за* *<u>ортонормованою</u>* *системою функцій* (24.2.1) *евклідового простору L справджується нерівність*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n{}^2 \le \|f\|^2 \qquad (24.2.19)$$

та існує границя

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = 0. \qquad (24.2.20)$$

Якщо ж система функцій (24.2.1) *є лише ортогональною, то попередня нерівність і границя набувають вигляду*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n{}^2 \, \|\varphi_n\|^2 \le \|f\|^2, \qquad (24.2.21)$$

$$\lim_{n \to +\infty} c_n \|\varphi_n\| = 0. \qquad (24.2.22)$$

Нерівності (24.2.19)−(24.2.20) *називають* ***нерівностями Бесселя***.

Доведення. Якщо у нерівності (24.2.17) перейти до границі за умови, що $n \to +\infty$, то матимемо першу нерівність (24.2.19), яка, у свою чергу, зумовлює збіжність числового ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} {c_n}^2$. Звідси за необхідною умовою збіжності ряду випливає, що його загальний член ${c_n}^2$ прямує до нуля, коли $n \to +\infty$, а отже, справедлива границя (24.2.20).

Так само друга нерівність (24.2.21) і відповідна границя (24.2.22) є наслідками нерівності (24.2.18).

Теорему доведено.

Означення* 24.2.3. *Систему функцій $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\} \subset L$ *називають* ***замкненою*** *у евклідовому просторі L, якщо будь-яку функцію* $f \in L$ *цього простору можна як завгодно точно наблизити поліномами, породженими цією системою, тобто*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x): \quad \|P_n - f\| < \varepsilon. \qquad (24.2.23)$$

Теорема 24.2.3 (*про рівність Парсеваля*). *Якщо ортонормована система функцій* $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\} \subset L$ *є замкненою в евклідовому просторі L, то ряд Фур'є* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n$ *за цією системою функцій, породжений будь-якою функцією* $f \in L$, *збігається в середньоквадратичному до неї*:

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k - f\right\| \to 0, \quad n \to +\infty, \qquad (24.2.24)$$

та справджується рівність

$$\sum_{n=0}^{+\infty} {c_n}^2 = \|f\|^2, \qquad (24.2.25)$$

яку називають ***рівністю Парсеваля***.

Доведення. Нехай за функцією f евклідового простору L та за ортонормованою системою функцій $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n, \dots\} \subset L$ цього простору утворений ряд Фур'є

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n\,,\ c_n = (f, \varphi_n\,),\ \ n \in Z_+. \qquad (24.2.26)$$

Якщо ортонормована система функцій $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n, \dots\} \subset L$ є замкненою в евклідовому просторі L, то для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий поліном $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$, породжений цією системою, що відхилення функції f від P_n буде меншим за це число:

$$\|P_n - f\| < \varepsilon. \qquad (24.2.27)$$

Однак за **теоремою 24.2.1** відхилення часткової суми $s_n := \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k$ від функції f для всіх $m \geq n$ може бути лише меншим за (24.2.27), тож

$$\forall m \geq n:\ \ \|s_m - f\| \leq \|P_n - f\| < \varepsilon\,, \qquad (24.2.28)$$

а це, звісно, означає, що ряд Фур'є (24.2.26) збігається до функції f у середньоквадратичному. До того ж, тотожність (24.2.15) та нерівність (24.2.28), у свою чергу, спричиняють нерівність

$$\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} {c_k}^2 = \|s_n - f\|^2 < \varepsilon^2,$$

за якою випливає збіжність додатного ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} {c_n}^2$ до суми $\|f\|^2$.

Теорему доведено.

***Завдання для самостійної роботи* 24.2.2.** *Довести, що у разі, коли ортогональна система функцій* $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n, \dots\} \subset L$ *є замкненою в евклідовому просторі L, рівність Парсеваля* (24.2.25) *набуває вигляду*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} {c_n}^2 \|\varphi_n\|^2 = \|f\|^2. \qquad (24.2.29)$$

Означення* 24.2.4. *Систему функцій $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\} \subset L$ *називають* ***повною*** *в евклідовому просторі L, якщо з ортогональності функції* $f \in L$ *всім елементам* φ_n, $n \in Z_+$, *цієї системи випливає, що функція* f *є нульовою*:

$$(\forall n \in Z_+: \ (f, \varphi_n) = 0) \ \Rightarrow \ \|f\| = 0. \qquad (24.2.30)$$

Теорема 24.2.4 (*про повноту замкненої системи функцій евклідового простору*). *Усяка замкнена система функцій* $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$ *евклідового простору L є одночасно повною у ньому.*

Доведення. Якщо система функцій $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\} \subset L$ є замкненою в евклідовому просторі L, то, як було зазначено, для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий поліном $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$, породжений цією системою, що відхилення функції f від P_n буде меншим за це число:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k: \quad \|P_n - f\| < \varepsilon. \qquad (24.2.31)$$

Між тим, якщо функція $f \in L$ ортогональна всім елементам системи функцій $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$, то вона буде ортогональною і вказаному поліному P_n:

$$(f, P_n) = 0,$$

з чого, разом з (24.2.31), випливає нерівність

$$\|f\|^2 = (f, f) = (f, f - P_n) \leq \|f\| \cdot \|P_n - f\| < \varepsilon \|P_n - f\|,$$

яка спричиняє наслідок:

$$\|f\| = 0.$$

Отже, зазначена у теоремі система функцій є повною.

Теорему доведено.

***Завдання для самоперевірки* 24.2.1.** Нехай $\{\varphi_0, \ \varphi_1, \ \dots, \ \varphi_n, \dots\} \subset L$ – ортонормована система функцій евклідового простору $L = L([a,b])$ і ряд Фур'є за цією системою деякої функції $f: [a,b] \to R$ має вигляд

$$f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n}} .$$

Чи належить функція f евклідовому простору L?

Вказівка: перевірити нерівність Бесселя для коефіцієнтів $c_n, \ n \in Z_+,$ ряду Фур'є функції f.

24.3. Тригонометричні ряди Фур'є

Ряди Фур'є функції f, побудовані за тригонометричною ортогональною на відрізку $[-l, l]$ системою функцій (24.1.34), записують у вигляді

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{24.3.1}$$

і називають ***тригонометричними рядами Фур'є***. Звісно, коефіцієнти цього ряду обчислюють за формулами

$$a_n = \frac{1}{\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2}\left(f, \cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\,, \quad n \in N; \tag{24.3.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2}\left(f, \sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\,, \quad n \in N; \tag{24.3.3}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\|1\|^2}(f, 1) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx\,. \tag{24.3.4}$$

Формулу (24.3.4) записують у спрощеному вигляді

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \tag{24.3.5}$$

у такому разі вона стає узгодженою із формулою (24.3.2) за значення $n = 0$.

Як було заначено, тригонометрична система функцій (24.1.34) є ортогональною на всіх відрізках $[a, b]$ довжини $b - a = 2l > 0$. Тож природно, що ряд Фур'є за всіма такими системами має той самий вигляд (24.3.1), але у формулах обчислення його коефіцієнтів (24.3.2)–(24.3.5) інтегрування буде відбуватися вже за відповідним відрізком $[a, b]$.

Можна помітити, що тригонометричний ряд Фур'є (24.3.1) є означеним для будь-якої абсолютно інтегрованої функції на відрізку $[a, b]$ функції f. Справді, для довільних $n \in Z_+$ справедливі такі оцінки інтегралів, що наяві у формулах (24.3.2)–(24.3.4):

$$f \in R_a([a; b]) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)| \left|\cos\frac{n\pi x}{l}\right| dx \le \int_a^b |f(x)| dx < +\infty; \\ \left|\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)| \left|\sin\frac{n\pi x}{l}\right| dx \le \int_a^b |f(x)| dx < +\infty. \end{cases} \qquad (24.3.6)$$

Окрім того, у разі $l = \pi$ та $[a, b] = [-\pi, \pi]$ вказані формули (24.3.1)–(24.3.4) набувають значно простішого вигляду:

$$f \in R_a([-\pi, \pi]) \Rightarrow \quad f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx); \qquad (24.3.7)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \;\; n \in Z_+; \qquad (24.3.8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \;\; n \in N. \qquad (24.3.9)$$

Якщо деяка функція $g = g(t)$ є абсолютно інтегрованою на відрізку $[a, b]$, то функція $f(x) := g\left(\frac{\pi}{l}(x - \frac{a+b}{2})\right)$, яка отримана з функції g лінійним перетворенням її аргумента $t = \frac{\pi}{l}(x - \frac{a+b}{2})$, де $b - a = 2l$, буде абсолютно інтегрованою вже на відрізку $[-\pi, \pi]$, та навпаки:

$$g = g(t) \in R_a([a;b]) \Leftrightarrow f(x) = g\left(\frac{\pi}{l}(x - \frac{a+b}{2})\right) \in R_a([-\pi,\pi]) \,. \quad (24.3.10)$$

Тож з метою спрощення викладок надалі розглядатимемо функціональні простори та ортогональні системи функцій на них лише ті, які задані на симетричному відрізку $[-\pi,\pi]$, і, відповідно, на яких скалярний добуток заданий формулою

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx. \quad (24.3.11)$$

Оскільки клас $L^2([-\pi,\pi])$ квадратично інтегрованих функцій на відрізку $[-\pi,\pi]$, на якому означений скалярний добуток його елементів формулою (24.3.11), є евклідовим простором, то відповідно до **теореми 24.2.2** послідовність коефіцієнтів ряду Фур'є (24.3.7) будь-якого його елемента $f \in L^2([-\pi,\pi])$ збігається до нуля:

$$f \in L^2([-\pi,\pi]) \Rightarrow \begin{cases} a_n \to 0, & n \to +\infty; \\ b_n \to 0, & n \to +\infty. \end{cases} \quad (24.3.12)$$

Насправді клас функцій, для яких справджується твердження (24.3.12), можна розширити до класу $R_a([-\pi,\pi])$ всіх абсолютно інтегрованих функцій на відрізку $[-\pi,\pi]$, хоча останній клас, як було зазначено, не є евклідовим простором зі скалярним добутком (24.3.11).

Теорема 24.3.1 (*Рімана*). *Якщо функція f є абсолютно інтегрованою на скінченному чи на нескінченному відрізку $[a;b]$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, то*

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\cos tx dx = 0, \quad (24.3.13)$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x)\sin tx\, dx = 0. \quad (24.3.14)$$

Доведення. Доведемо, наприклад, першу рівність (24.3.13).

Нехай функція f є абсолютно інтегрованою на скінченному чи на нескінченному відрізку $[a;b]$, тоді за оцінками (24.3.6) випливає, що за кожного фіксованого $t \in R$ функція $g(x) := f(x)\cos tx$ теж є абсолютно інтегрованою на цьому проміжку.

Згідно з означенням абсолютно інтегрованої функції (**означення 24.1.1**) для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться така сукупність $A := \bigcup_{i=1}^{m}[a_i;b_i]$ скінченних відрізків $[a_i;b_i]$, $i = \overline{1,m}$, проміжку $[a;b]$, які не мають спільних точок, на кожному з яких функція g є інтегрованою за Ріманом, та таких, що виконується нерівність

$$\left|\int_{[a;b]\backslash A} f(x)\cos tx dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (24.3.15)$$

У свою чергу, якщо функція f є інтегрованою за Ріманом на всіх відрізках $[a_i;b_i] \subset R$, $i = \overline{1,m}$, то для кожного з них знайдеться таке його розбиття

$$\lambda_i = \{x_0 = a_i, x_1, x_2, \dots, x_n : a_i = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b_i\},$$

за якого справджується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2m},$$

де позначено

$$m_k := \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x); \quad M_k := \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x); \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1}.$$

За цими розбиттями λ_i і за векторами значень

$$\vec{c}_i = \left(\frac{M_1+m_1}{2}, \frac{M_2+m_2}{2}, \dots, \frac{M_n+m_n}{2}\right)$$

побудуємо східчасті функції кожного з відрізків $[a_i;b_i] \subset R$:

$$h_i(x) := \sum_{k=1}^{n}\frac{M_k+m_k}{2}\chi_{(x_{k-1};\,x_k]}(x),$$

добутки яких на множник $\cos tx$ наближають інтеграл функції g по відповідному відрізку з точністю до вибраного числа $\frac{\varepsilon}{2m} > 0$:

$$\left|\int_{a_i}^{b_i} g(x)\,dx - \int_{a_i}^{b_i} h_i(x)\cos tx\,dx\right| \le \int_{a_i}^{b_i} |f(x) - h_i(x)||\cos tx|\,dx \le$$

$$\le \int_{a_i}^{b_i} |f(x) - h_i(x)| dx \le \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left|f(x) - \frac{M_k + m_k}{2}\right| \quad dx \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\left|\frac{M_k}{2} - \frac{f(x)}{2}\right| + \left|\frac{f(x)}{2} - \frac{m_k}{2}\right|\right) dx \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2m}\,. \tag{24.3.16}$$

У такому разі добуток функції $\cos tx$ на східчасту функцію об'єднання $A := \bigcup_{i=1}^{m} [a_i; b_i]$ вказаних відрізків, яка є сумою всіх східчастих функцій h_i,

$$h(x) := \sum_{i=1}^{m} h_i(x),$$

буде наближати інтеграл функції g по множині $A \subset [a; b]$ з точністю до вибраного числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\left|\int_A \ g(x)dx - \int_A \ h(x)\cos tx\,dx\right| \le$$

$$\le \ \sum_{i=1}^{m} \left|\int_{a_i}^{b_i} g(x)dx - \int_{a_i}^{b_i} h_i(x)\cos tx\,dx\right| \ < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

З погляду на це, справедлива оцінка

$$\left|\int_a^b f(x)\cos txdx - \int_A \ h(x)\cos tx\,dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_{[a;b]\setminus A} f(x)\cos txdx\right| + \left|\int_A \ f(x)\cos txdx - \int_A \ h(x)\cos tx\,dx\right| < \varepsilon\,. \tag{24.3.17}$$

Залишається тільки помітити, що кожен доданок суми

$$\int_A \ h(x)\cos tx\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{a_i}^{b_i} h_i(x)\cos tx\,dx$$

прямує до нуля, якщо $t \to \infty$:

$$\left|\int_{a_i}^{b_i} h_i(x)\cos tx\,dx\right| = \frac{1}{|t|}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k+m_k}{2}(\sin x_k - \sin x_{k-1})\right| \le$$

$$\le \frac{1}{|t|}\left|\sum_{k=1}^{n}(M_k+m_k)\right| \le \frac{2nc}{|t|} \to 0, \quad t \to \infty, \qquad (24.3.18)$$

де позначено $c := \sup_{x\in A}|f(x)|$.

Твердження (24.3.17)−(24.3.18) зумовлюють границю (24.3.13). Аналогічно доводиться і друга границя (24.3.14).

Теорему доведено.

Наслідок 23.4.1. *Якщо функція f є абсолютно інтегрованою на відрізку* $[-\pi,\pi]$, *то послідовності коефіцієнтів її ряду Фур'є* (24.3.7) *за системою тригонометричних функцій збігаються до нуля*:

$$\begin{cases} f \in R_a([-\pi,\pi]), \\ f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n \to 0, \ n \to +\infty; \\ b_n \to 0, \ n \to +\infty. \end{cases} \qquad (24.3.19)$$

Доведення. Границі (24.3.19) є наслідком щойно доведеної теореми та означення границі функції за Гейне.

Твердження доведене.

Під час доведення **теореми 24.3.1** було встановлено, що для будь-якої інтегрованої на відрізку $[a;b]$ функції f можна вказати таку східчасту функцію h, яка наближає інтеграл вказаної функції f по цьому відрізку із точністю до як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$. Позаяк це твердження може бути корисним під час доведення інших теорем, варто сформулювати його у вигляді окремої леми.

Лема 24.3.1. *Якщо* f *є інтегрованою на відрізку* $[a;b]$ *функцією, то для довільного додатного числа* $\varepsilon > 0$ *знайдеться така східчаста функція* h*, за якої справджуються нерівності*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b h(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x) - h(x)|dx < \varepsilon. \qquad (24.3.20)$$

Щоб визначити умови поточкової збіжності ряду Фур'є (24.3.7) до функції, яка його породжує, знайдемо спрощену форму його n-ї часткової суми s_n, за яку покладемо вираз

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Із цією метою спочатку дослідимо тригонометричний поліном, який називають ***ядром Діріхле*** та зазвичай позначають символом D_n:

$$D_n(x) := \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \dots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{(2k+1)x}{2} - \sin\frac{(2k-1)x}{2}\right)\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \ne 2m\pi; \\ \frac{1}{2} + n, & x = 2m\pi. \end{array}\right. \qquad (24.3.21)$$

Теорема 24.3.2 (*про властивості ядра Діріхле*). *Ядро Діріхле є парною нескінченно диференційованою* 2π*-періодичною функцією на* R*, яка задовольняє умову нормування*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(x)\,dx = 1. \qquad (24.3.22)$$

Доведення. Позаяк ядро Діріхле є сумою

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx,$$

кожен доданок якої є парною нескінченно диференційованою на множині R та 2π-періодичною функцією, то такі властивості має також ядро Діріхле.

Умову нормування теж легко перевірити:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\|1\|^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(1, \cos kx) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi + 0 + \cdots + 0 = 1.$$

Теорему доведено.

***Означення* 24.3.1.** *Нехай функція f означена на відрізку $[a,b] \subset R$ завдовжки $b - a = 2l > 0$, тоді $2l$-**періодичним продовженням функції** f називають функцію, яка означена у точках поза проміжку $(a,b]$ за правилом*

$$f(x + 2nl) := f(x)\,, \;\; x \in (a,b], \;\; n \in Z. \qquad (24.3.23)$$

*Якщо $f \in R_a([a;b])$, то $2l$-періодичне продовження функції f називають $2l$-**періодичною абсолютно інтегрованою функцією**. Коли $f \in C_{apw}([a;b])$, $2l$-періодичне продовження функції f називають $2l$-**періодичною усередненою кусково неперервною функцією** тощо. Зазвичай, функцію f та її $2l$-періодичне продовження позначають одним і тим самим символом.*

Теорема 24.3.3 (***про подання часткової суми ряду Фур'є у термінах ядра Діріхле***). *Нехай f є 2π-періодичною абсолютно інтегрованою функцією, тоді часткові суми її тригонометричного ряду Фур'є можна подати у вигляді*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) D_n(t)\,dt, \;\; n \in Z_+, \qquad (24.3.24)$$

або

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x + t) + f(x - t)) D_n(t)\,dt, \; n \in Z_+. \qquad (24.3.25)$$

Доведення. Якщо f є 2π-періодичною абсолютно інтегрованою функцією, то такими будуть і всі її добутки на 2π-періодичні поліноми, отож є визначеними такі перетворення:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos k\tau\, d\tau + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin k\tau\, d\tau\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kx \cos k\tau + \sin kx \sin k\tau)\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-\tau)\right) d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) D_n(x-\tau)\, d\tau =$$

$$= \left|\begin{matrix}\tau = x - t\\ d\tau = -dt\end{matrix}\right| = -\frac{1}{\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt.$$

Отже, перша з двох формул (24.3.24)– (24.3.25) справедлива. Щоб довести другу формулу, розіб'ємо останній інтеграл на два, відповідно по відрізках інтегрування $[-\pi, 0]$ і $[0, \pi]$, виконаємо у першому інтегралі заміну $\tau = -t$ та врахуємо парність ядра Діріхле:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t) D_n(t)\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x+\tau) D_n(-\tau)\, d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\tau) D_n(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t)\, dt.$$

Теорему доведено.

Теорема 24.3.4 (*принцип локалізації Рімана*). *Значення суми і збіжність тригонометричного ряду Фур'є* 2π*-періодичної абсолютно інтегрованої функції* f *у точці* $x \in R$ *залежить тільки від поведінки цієї* *функції в довільному нескінченно малому околі* $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta > 0$, *точки* x, *а саме*:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = c \;\;\Leftrightarrow\;\; \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt = c. \quad (24.3.26)$$

Доведення. Якщо f є 2π-періодичною абсолютно інтегрованою функцію, то функція $g_x(t) := \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$ буде абсолютно інтегрованою на відрізку $[\delta, \pi]$ за довільного додатного числа $0 < \delta < \pi$. Оскільки на цьому відрізку справджується нерівність

$$\left|\frac{g_x(t)}{\sin\frac{t}{2}}\right| \le \frac{|g_x(t)|}{\sin\frac{\delta}{2}}, \quad t \in [\delta, \pi],$$

то функція $\frac{g_x(t)}{\sin\frac{t}{2}}$ теж буде абсолютно інтегрованою на відрізку $[\delta, \pi]$, тоді за **теоремою 24.3.1** випливає, що

$$\alpha_n(x) := \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{g_x(t)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\frac{(2n+1)t}{2} \to 0, \; n \to +\infty. \quad (24.3.27)$$

Тож часткові суми $s_n(x)$ ряду Фур'є функції f у точці $x \in R$ можна подати у вигляді суми

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{g_x(t)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{g_x(t)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt + \alpha_n(x), \quad (24.3.28)$$

в якій доданок $\alpha_n(x)$ є нескінченно малою величиною, коли $n \to +\infty$. Звідси і випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

Зауважимо, що коли точка $x \in R$ є точкою неперервності чи точкою розриву першого роду функції f, то функція

$$g_x(t) := \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}, \quad (24.3.29)$$

яка була означена при доведенні **теореми 24.3.4**, у точці $t = 0$ має праву границю $g_x(+0)$, а саме:

$$g_x(+0) = \left[\begin{array}{ll} f(x), & x - \text{точка неперервності;} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x - \text{точка рориву першого роду.} \end{array}\right. \quad (24.3.30)$$

Теорема 24.3.5 (***ознака Діні***). *Якщо $x \in R$ є точкою неперервності чи точкою розриву першого роду 2π-періодичної абсолютно інтегрованої функції f і за деякого нескінченно малого числа $\delta \in (0, \pi)$ збігається інтеграл*

$$\int_0^\delta \frac{|g_x(t) - g_x(+0)|}{t} dt < +\infty, \quad (24.3.31)$$

то тригонометричний ряд Фур'є у цій точці збігається до суми $g_x(+0)$.

Доведення. Будуємо доведення майже так само, як і в останній теоремі. Розглянемо різницю часткової суми $s_n(x)$ ряду Фур'є функції f у точці $x \in R$ і числа $g_x(+0) \in R$:

$$s_n(x) - g_x(+0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g_x(t) D_n(t)\, dt - g_x(+0) \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{g_x(t) - g_x(+0)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\frac{(2n+1)t}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \dots dt + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \dots dt. \quad (24.3.32)$$

Позаяк функція

$$h_x(t) := \frac{g_x(t) - g_x(+0)}{\sin\frac{t}{2}} \quad (24.3.33)$$

є абсолютно інтегрованою на довільному відрізку $[\delta, \pi]$, до другий доданок у сумі (24.3.32) прямує до нуля, коли $n \to +\infty$:

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{g_x(t) - g_x(+0)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\frac{(2n+1)t}{2} dt \to 0, \quad n \to +\infty. \quad (24.3.34)$$

Відповідно, на проміжку (0, δ] справедлива нерівність $\sin\frac{t}{2} > \frac{t}{\pi}$, яка, обумовлює нерівність

$$|h_x(t)| = \frac{|g_x(t) - g_x(+0)|}{\sin\frac{t}{2}} \le \pi\,\frac{|g_x(t) - g_x(+0)|}{t}. \qquad (24.3.35)$$

Тож нерівності (24.3.31) та (24.3.35) гарантують абсолютну збіжність функції $h_x(t)$ на проміжку (0, δ], а отже, за **теоремою 24.3.1** і перший доданок у сумі (24.3.32) прямує до нуля, коли $n \to +\infty$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{g_x(t) - g_x(+0)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} h_x(t) \sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Теорему доведено.

***Означення* 24.3.2.** 1. *Кажуть, що функція f задовольняє **умову Гельдера−Ліпшица** з показником $\alpha \in (0,1]$ **на проміжку** $[a, b]$ (чи, відповідно, на (a, b), чи на $(a, b]$ або $[a, b)$), якщо знайдеться така стала $c > 0$, за якої для всіх точок x та y цього проміжку справджується нерівність*

$$|f(x) - f(y)| \le c|x - y|^{\alpha}. \qquad (24.3.36)$$

2. *Кажуть, що функція f задовольняє **умову Гельдера−Ліпшица** з показником $\alpha \in (0,1]$ **у точці** $x \in R$, якщо у цій точці функція має ліву та праву границі $f(x \pm 0) \in R$ і знайдуться такі стала $c > 0$ та число $\delta > 0$, за яких для всіх точок $t \in (0, \delta)$ справджуються нерівності*

$$|f(x + t) - f(x + 0)| \le ct^{\alpha}, \quad |f(x - t) - f(x - 0)| \le ct^{\alpha}. \qquad (24.3.37)$$

3. *Якщо у точці $x \in R$ функція f має ліву та праву границі $f(x \pm 0) \in R$, то лівою $f'(x - 0)$ та правою $f'(x + 0)$ похідною функції у цій точці називають границі*

$$f'(x-0) := \lim_{t\to+0} \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\,, \qquad (24.3.38)$$

$$f'(x+0) := \lim_{t\to+0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\,. \qquad (24.3.39)$$

Теорема 24.3.6 (*про умову Гельдера−Ліпшица*).

1. *Якщо функція f має неперервну похідну на відрізку $[a,b] \subset R$, то ця функція задовольняє на ньому умову Гельдера−Ліпшица з показником $\alpha = 1$.*

2. *Якщо функція f має неперервну похідну на інтервалі (a,b) та існують границі $f'(a+0) \in R$ та $f'(b-0) \in R$, то ця функція задовольняє на ньому умову Гельдера−Ліпшица з показником $\alpha = 1$.*

3. *Якщо функція f має скінченну ліву $f'(x-0) \in R$ та праву $f'(x+0) \in R$ похідні у точці $x \in R$, то функція f задовольняє у цій точці умову Гельдера−Ліпшица з показником $\alpha = 1$.*

Доведення. 1. Якщо функція f має неперервну на відрізку $[a,b] \subset R$ похідну f', то ця похідна обмежена на ньому:

$$\exists c > 0:\ (|f'(\tau)| \le c,\ \tau \in [a,b]). \qquad (24.3.40)$$

Між тим, за довільних різних точок x та y цього відрізка, наприклад коли $a \le x < y \le b$, функція f задовольняє умови теореми Лагранжа про кінцевий приріст функції f на відрізку $[x,y]$, за якою маємо:

$$\exists \tau \in [a,b]:\ \ |f(x)-f(y)| = |f'(\tau)||x-y| \le c|x-y|. \quad (24.3.40)$$

Отже, функція f задовольняє на відрізку $[a,b] \subset R$ умову Гельдера−Ліпшица з показником $\alpha = 1$.

2. Якщо функція f має неперервну похідну на інтервалі (a,b) та існують границі $f(a+0) \in R$ та $f(b-0) \in R$, то доозначена функція

$$f^*(x) := \left[\begin{array}{ll} f(x), & x \in (a,b); \\ f(a+0), & x=a; \\ f(b-0), & x=b \end{array}\right.$$

задовольняє на відрізку $[a, b]$ умовам першого пункту цієї теореми, згідно з висновком якого на вказаному відрізку для утвореної функції f^* справджуються умови Гельдера–Ліпшица з показником $\alpha = 1$, а це означає, що таке твердження буде чинними і для функції f на інтервалі (a, b).

3. Нехай у деякій точці $x \in R$ існують скінченні границі (24.3.38)–(24.3.38).

Тоді на деякому околі $(0, \delta)$ обидві функції

$$\varphi_x^+(t) := \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}, \quad \varphi_x^-(t) := \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t} \qquad (24.3.41)$$

будуть обмеженими, себто справедливе твердження:

$$\exists c > 0\colon\ \forall t \in (0, \delta) \quad |\varphi_x^+(t)| \le c,\ \ |\varphi_x^-(t)| \le c \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \exists c > 0\colon\ \forall t \in (0, \delta) \quad \left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right| \le c,\quad \left|\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right| \le c \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists c > 0\colon \forall t \in (0, \delta)\ \ |f(x+t) - f(x+0)| \le ct,\ \ |f(x-t) - f(x-0)| \le ct,$$

що й потрібно було довести.

Теорему доведено.

Завдання для самостійної роботи **24.3.1.** *Нехай* 2π*-періодична функція* f *задовольняє на відрізку* $[-\pi, \pi]$ *умову Гельдера–Ліпшица з показником* $\alpha \in (0,1]$. *Довести, що тоді функція* f *є неперервною та обмеженою на всій множині дійсних чисел* R.

***Завдання для самостійної роботи* 24.3.2.** *Нехай функція f має скінченну похідну у точці $x \in R$. Довести, що тоді функція f у цій точці є неперервною та задовольняє умову Гельдера−Ліпшица з показником $\alpha = 1$.*

***Завдання для самостійної роботи* 24.3.3.** *Довести, що неперервна функція $f(x) = |x - x_0|^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, у точці x_0 задовольняє умову Гельдера−Ліпшица з показником α, проте не має у цій точці похідної.*

***Завдання для самостійної роботи* 24.3.4.** *Нехай 2π-періодична функція f задовольняє умову Гельдера−Ліпшица з деяким показником $\alpha \in (0,1]$ на проміжку $[-\pi, \pi]$. Довести, що тоді функція f задовольняє умову Гельдера−Ліпшица із вказаним показником α на будь-якому непорожньому відрізку $[a; b] \subset R$.*

Теорема 24.3.7 (*про розвинення функції у ряд Фур'є у деякій точці*). *Якщо 2π-періодична функція f у точці $x \in R$ задовольняє умову Гельдера−Ліпшица з деяким показником $\alpha \in (0,1]$, то тригонометричний ряд Фур'є функції f у цій точці збігається до суми $g_x(+0)$:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (24.3.42)$$

Доведення. Якщо на деякому проміжку $(0, \delta)$, $\delta > 0$, справджуються нерівності (24.3.37), то тоді

$$\int_0^\delta \frac{|g_x(t)-g_x(+0)|}{t} dt = \int_0^\delta \frac{|f(x+t)-f(x+0)+f(x-t)-f(x-0)|}{2t} dt \leq$$

$$\leq \int_0^\delta \frac{|f(x+t)-f(x+0)|+|f(x-t)-f(x-0)|}{2t} dt \leq c\int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\alpha}} < +\infty. \quad (24.3.43)$$

У такому разі виконана умова (24.3.31) ознаки Діні збіжності у точці $x \in R$ тригонометричного ряду Фур'є функції f (**теорема 24.3.5**), яка спричиняє твердження даної теореми.

Теорему доведено.

Наслідок 24.3.2. *Якщо* 2π*-періодична абсолютно інтегрована функція* f *у точці* $x \in R$ *має похідну* $f'(x) \in R$, *то тригонометричний ряд Фур'є функції* f *у цій точці збігається до суми* $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x). \qquad (24.3.44)$$

Доведення. Якщо 2π-періодична абсолютно інтегрована функція f у точці $x \in R$ має похідну $f'(x) \in R$, то тоді функція f є неперервною у точці x, що зумовлює рівність $g_x(+0) = f(x)$, а також існують її ліва та права похідні

$$f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x) \in R.$$

Тож за **теоремою 24.3.7** справедлива рівність (24.3.44).

Твердження доведене.

Наслідок 24.3.3. *Якщо* 2π*-періодична функція* f *є усередненою і кусково-гладкою на відрізку* $[-\pi, \pi]$, *то її тригонометричний ряд Фур'є збігається до суми* f *на всій множині* R:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x), \; x \in R. \qquad (24.3.45)$$

Доведення. Сформульоване твердження безпосередньо випливає з означення усередненої кусково-гладкої функції та з попереднього наслідку.

Твердження доведене.

***Завдання для самоперевірки* 24.3.1.** Чи може тригонометричний ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos n(x-1) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos n \cos nx + \sin n \sin nx)$$

бути тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_a([-\pi, \pi])$?

***Вказівка*:** скористатися теоремою Рімана (**теорема 24.3.1**).

***Завдання для самоперевірки* 24.3.2.** Нехай за функцією $f \in R_a([-\pi, \pi])$ побудований тригонометричний ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Чи може хоча б одна із послідовностей його коефіцієнтів $\{a_n | \ n \in N\}$ чи $\{b_n | \ n \in N\}$ бути періодичною?

***Завдання для самоперевірки* 24.3.3.** Нехай 2π-періодична функція f задовольняє умову Гельдера–Ліпшица з деяким показником $\alpha \in (0,1]$ на проміжку $[-\pi, \pi]$. Чи може функція f мати розриви першого роду?

24.4. Збіжність тригонометричного ряду Фур'є у розумінні Чезаро

***Означення* 24.4.1.** *Нехай часткові суми тригонометричного ряду Фур'є* 2π*-періодичної абсолютно інтегрованої функції* f*, як і перед цим, означені формулою*

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \qquad (24.4.1)$$

Тоді середнє арифметичне

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n}, \quad n \in N, \qquad (24.4.2)$$

часткових сум s_k, $k = \overline{0, n-1}$, *називають* n*-ю частковою* ***сумою Чезаро*** *зазначеного ряду Фур'є. Якщо у точці* $x \in R$ *існує границя послідовності часткових сум Чезаро*

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(x) = f(x), \qquad (24.4.3)$$

то кажуть, що тригонометричний ***ряд*** *Фур'є функції* f ***збігається*** *до цієї функції* ***у розумінні Чезаро****.*

Зазначимо, по-перше, що з умови звичайної збіжності ряду Фур'є до функції f випливає і збіжність цього ряду у розумінні Чезаро до неї, проте не навпаки. По-друге, n-та часткова сума Чезаро (24.4.2) є тригонометричним поліномом степеня не вище n. По-третє, суми Чезаро (24.4.2) можна подати у зручному інтегральному вигляді, який дозволяє досліджувати збіжність послідовності, складеної з них. Для цього спочатку знайдемо скорочений вираз середнього арифметичного перших n ядер Діріхле, який зазвичай називають ***ядром Феєра***:

$$F_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1-\cos nx}{n\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\left(\sin\frac{nx}{2}\right)^2}{2n\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}, \text{ якщо } x \neq 2m\pi.$$

$$F_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}+k\right) = \frac{n}{2}, \text{ якщо } x = 2m\pi.$$

Записавши ці два випадки разом, матимемо:

$$F_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\sin\frac{nx}{2}\right)^2}{2n\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}, & x \neq 2m\pi; \\ \frac{n}{2}, & x = 2m\pi. \end{cases} \qquad (24.4.4)$$

Властивості ядер Діріхле, а саме: парність, нескінченна диференційованість, нормованість зумовлюють такі самі властивості ядер Феєра, зокрема

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F_n(x)\,dx = 1, \ \ n \in N. \qquad (24.4.5)$$

До того ж, ядра Феєра набувають лише додатних значень.

Теорема 24.4.1 (***про подання сум Чезаро у термінах ядра Феєра***)**.** *Нехай* f *є* 2π*-періодичною абсолютно інтегрованою функцією, тоді часткові суми Чезаро її тригонометричного ряду Фур'є можна подати у вигляді*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,dt\,, \ \ n \in N, \qquad (24.4.6)$$

або

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))F_n(t)\,dt\,, \ \ n \in N. \qquad (24.4.7)$$

Доведення. За означеннями суми Чезаро та ядра Феєра та з **теореми 24.3.3** випливає перша формула (24.4.6):

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,dt\,, \ \ n \in N.$$

Другу формулу (24.4.7) доводять так само, як і формулу (24.3.25) у вказаній **теоремі 24.3.3**.

Теорему доведено.

Теорема 24.4.2 (*теорема Феєра*). *Нехай f є 2π-періодичною неперервною функцією, тоді послідовність часткових сум Чезаро її тригонометричного ряду Фур'є рівномірно збігається до функції f на всій множині дійсних чисел*:

$$\sup_{x\in R}|\sigma_n(x)-f(x)|\to 0,\quad n\to+\infty. \tag{24.4.8}$$

Доведення. Якщо f є 2π-періодичною неперервною функцію на множині R, то тоді функція f на ній є обмеженою та рівномірно неперервною. Тож для як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке додатне число $\delta>0$, за якого на всій множині R з нерівності $|x'-x''|<\delta$ випливає нерівність

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{24.4.9}$$

і виконується умова

$$\sup_{x\in R}|f(x)|:=\mathrm{c}<+\infty\ . \tag{24.4.10}$$

До того ж, якщо $\delta\in(0,\pi)$, то умова нормування (24.4.5) зумовлює нерівність

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta F_n(t)\,dt\le\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_n(t)\,dt=\frac{1}{2}\,,$$

а з виразу для ядра Феєра (24.4.4) випливають нерівності

$$F_n(t)\le\frac{1}{2n\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2},\ \ t\in[\delta,\pi].$$

У такому разі для модуля різниці між частковою сумою Чезаро σ_n та функції f справедлива оцінка

$$|\sigma_n(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(f(x+t)+f(x-t))F_n(t)\,dt-f(x)\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F_n(t)\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))F_n(t)\,dt\right|\le$$

$$\leq \varepsilon \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} F_n(t)\,dt + 4c\int_{\delta}^{\pi} F_n(t)\,dt \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{2} + \frac{2c}{n\pi\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}. \qquad (24.4.11)$$

Якщо вибрати натуральне число $n_0 \in N$, яке б було більшим за величину $\frac{4c}{\pi\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}$, то другий доданок у останній сумі виразу (24.4.11) стане меншим за число $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$n_0 > \frac{4c}{\pi\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2c}{n\pi\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (24.4.12)$$

З нерівностей (24.4.11) та (24.4.12) випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in N: \;\; (x \in R, n > n_0 \;\; \Rightarrow \;\; |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,).$$

Отже, послідовність часткових сум Чезаро тригонометричного ряду Фур’є вказаної функції f рівномірно збігається до цієї функції на всій множині дійсних чисел R.

Теорему доведено.

Наслідок 24.4.1. *Якщо f є 2π-періодичною неперервною функцією, то за будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться тригонометричний поліном $T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_n \cos kx + \beta_n \sin kx)$, значення якого у всіх дійсних точках $x \in R$ різниться від значень функції f менше ніж на вказане число $\varepsilon > 0$:*

$$\sup_{x\in R}|T_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (24.4.13)$$

Доведення. Позаяк частинні суми Чезаро тригонометричного ряду Фур’є функції f є тригонометричними поліномами, то існування зазначеного у твердженні цього наслідку полінома випливає з теореми Феєра, тобто як поліном $T_n(x)$ можна покласти суму Чезаро $\sigma_n(x)$, яка задовольняє вказану умову (24.4.13).

Твердження доведене.

Теорема 24.4.2 (*терема Вейєрштрасса про рівномірні наближення неперервної функції тригонометричними поліномами*). *Якщо* f *є усередненою неперервною функцією на відрізку* $[a,b]$ *завдовжки* $b-a=2l>0$*, то за будь-якого як завгодно малого додатного числа* $\varepsilon>0$ *знайдеться* $2l$*-періодичний тригонометричний поліном*

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_n\cos\frac{k\pi x}{l}+\beta_n\sin\frac{k\pi x}{l}\right) \qquad (24.4.14)$$

та знайдуться поліноми будь-яких більших за число $2l$ *періодів, значення яких у всіх точках* $x\in[a,b]$ *різняться від значень* $f(x)$ *менше ніж на вказане число* $\varepsilon>0$:

$$\sup_{x\in[a,b]}|T_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \qquad (24.4.15)$$

Якщо ж неперервна функція не є усередненою на відрізку $[a,b]$*, себто*

$$f(a)\neq f(b), \qquad (24.4.16)$$

то знайдеться тригонометричний поліном будь-якого більшого за $2l>0$ *періоду, який спричиняє нерівність* (24.4.15).

Доведення. Нехай f є усередненою неперервною функцією на вказаному відрізку $[a,b]$. Тоді функція

$$g(x):=f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\pi}x\right)=f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{l}{\pi}x\right)$$

є усередненою неперервною функцією на відрізку $[-\pi,\pi]$, 2π-періодичне продовження g^* якої на множину R є неперервною функцією. Тож за попереднім наслідком за будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться 2π-періодичний тригонометричний поліном

$$T_n^*(x) = \frac{\alpha_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^* \cos kx + \beta_k^* \sin kx),$$

який задовольняє нерівність

$$\sup_{x\in R}|T_n^*(x) - g^*(x)| < \varepsilon,$$

з якої, у свою чергу, випливає нерівність

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|T_n^*(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Позаяк $f(x) = g\left(\frac{\pi}{l}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)$, $x \in [a, b]$, то $2l$-періодичний тригонометричний поліном

$$T_n(x) = T_n^*\left(\frac{\pi}{l}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right),$$

має вигляд (24.4.14) та зумовлює нерівність (24.4.15). Перше твердження теореми доведене.

Якщо ж неперервна на відрізку $[a, b]$ функція f не є усередненою на ньому, то за довільно вибраного додатного числа $\delta > 0$ функцію f можна доозначити на довший відрізок $[a, b + \delta]$ так, щоб утворена функція була неперервною та усередненою. Справді, для цього досить покласти

$$f^*(x) = \left[\begin{array}{ll} f(x), & x\in[a,b]; \\ f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\delta}(x-b), & x\in[b,b+\delta]. \end{array}\right. \qquad (24.4.17)$$

За вище доведеним, знайдеться тригонометричний поліном T_n додатного періоду $2l + \delta$, який рівномірно наближає функцію f^* на подовженому відрізку $[a, b + \delta]$ з точністю до вибраного числа $\varepsilon > 0$, а отже, це твердження буде справджуватися і на вужчому відрізку $[a, b]$.

Твердження доведене.

Теорема 24.4.3 (***терема Вейєрштрасса про рівномірні наближення неперервної функції степеневими поліномами***). *Якщо f є неперервною функцією на відрізку $[a, b] \subset R$, то за як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться степеневий поліном $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, значення якого у всіх точках $x \in [a, b]$ різниться від значень $f(x)$ менше ніж на вказане число $\varepsilon > 0$:*

$$\sup_{x\in[a,b]} |P_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{24.4.18}$$

Доведення. За щойно доведеною **теоремою 24.4.2** для будь-якої неперервної на відрізку $[a, b] \subset R$ функції f та для як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться тригонометричний поліном T_m, який рівномірно по відрізку наближає вказану функцію f з точністю до величини $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$\sup_{x\in[a,b]} |T_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Між тим, будь-який тригонометричний поліном T_m є аналітичною функцією на відрізку $[a, b]$, тобто функцією, яка розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний на цьому відрізку степеневий ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Тож для вибраного числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ знайдеться така часткова його сума

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k x^k,$$

що задовольняє умову

$$\sup_{x\in[a,b]} |P_n(x) - T_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

У такому разі справджується нерівність

$$\sup_{x\in[a,b]} |P_n(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} |T_m(x) - f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |P_n(x) - T_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорему доведено.

Наслідок 24.4.2. *Функція f є неперервною на відрізку $[a,b] \subset R$ тоді й лише тоді, коли вона є границею рівномірно збіжної на цьому відрізку послідовності степеневих поліномів.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо функція f є неперервною на відрізку $[a,b] \subset R$, то попередня **теорема 24.4.3** гарантує існування за кожного числа $\varepsilon_n := \frac{1}{n} > 0,\ n \in N,$ степеневого полінома P_n, який задовольняє умову

$$\sup_{x\in[a,b]} |P_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}, \quad n \in N.$$

Тоді послідовність $\{P_n : n \in N\}$ таким способом вибраних степеневих поліномів рівномірно збігається до функції f на відрізку $[a,b] \subset R$:

$$P_n \rightrightarrows f,\ \ n \to +\infty,\ \ x \in [a,b]. \qquad (24.4.19)$$

Достатність. Якщо для послідовності степеневих поліномів виконана умова (24.4.19), то за теоремою про неперервність граничної функції рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій функція f теж буде неперервною на відрізку збіжності $[a,b]$.

Твердження доведене.

Теорема 24.4.4 (***про середньоквадратичні наближення інтегрованої функції тригонометричними поліномами***). *Якщо* f *є інтегрованою функцією на відрізку* $[a,b]$ *завдовжки* $b-a=2l>0$*, то за будь-якого як завгодно малого додатного числа* $\varepsilon>0$ *знайдеться* $2l$*-періодичний тригонометричний поліном* T_n*, норма якого різниться від норми функції* f *менше ніж на вказане число* $\varepsilon>0$:

$$\|T_n-f\|<\varepsilon. \tag{24.4.20}$$

Доведення. За **лемою 24.3.1** для як завгодно малого числа $\gamma>0$ знайдеться таке розбиття

$$\lambda=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\colon\ a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$$

відрізка $[a,b]$ і така, побудована за цим розбиттям, східчаста функція

$$h(x)=\sum_{k=1}^{m}c_k\chi_{(x_{k-1};\,x_k]}(x),\ \ x\in[a;b],$$

яка задовольняє умову (24.3.20):

$$\int_a^b|f(x)-h(x)|dx<\gamma, \tag{24.4.21}$$

що зумовлює нерівність

$$\|h-f\|^{\mathbf{2}}=\int_a^b|f(x)-h(x)|^2dx\le 2c\int_a^b|f(x)-h(x)|dx<2c\gamma,$$

де позначено $c:=\sup\limits_{x\in[a,b]}\{|f(x)|,|h(x)|\}<+\infty$. Тож поклавши $\gamma=\frac{\varepsilon^2}{18c}$, матимемо нерівність

$$\|h-f\|<\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{3}}. \tag{24.4.22}$$

У свою чергу, можна східчасту функцію h наблизити деякою усередненою неперервною функцією g так, щоб виконувалась нерівність

$$\int_a^b|g(x)-h(x)|dx<\gamma=\frac{\varepsilon^2}{18c},$$

яка зумовлює відповідну нерівність

$$\|h-g\|<\frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{24.4.23}$$

Для цього досить вибрати достатньо мале число $\delta>0$ та на всіх відрізках $[x_k-\delta,x_k]$, $k=\overline{1,m-1}$, замінити функцію h на лінійну функцію, яка змінюється від значення c_k до значення c_{k+1}, а на відрізку $[a,a+\delta]$ − від значення c_m до значення c_1:

$$g(x):=\left[\begin{array}{ll} c_{k+1}+\frac{c_{k+1}-c_k}{\delta}(x-x_k), & x\in[x_k-\delta,x_k],\ \ k=\overline{1,m-1};\\ c_m+\frac{c_m-c_1}{\delta}(x-a), & x\in[a,a+\delta];\\ h(x) & \text{у інших точках відрізка } [a,b]. \end{array}\right.$$

Унаслідок цього справедлива нерівність

$$\int_a^b|g(x)-h(x)|dx\le 2c\delta m,$$

за якою, поклавши $\delta<\min\left\{\frac{\varepsilon^2}{18mc}\,,\min\limits_{k=1,2,\dots,m}\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right\}$, отримаємо бажану нерівність (24.4.23).

Нарешті, за **теоремою 24.4.2**, можна вказати такий $2l$-періодичний тригонометричний поліном T_n, який задовольняє умову

$$\sup_{x\in[a,b]}|T_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon^2}{18c(b-a)}\,,$$

що спричиняє, відповідно, нерівності

$$\int_a^b|g(x)-T_n(x)|dx<\frac{\varepsilon^2}{18mc}\,,$$

$$\|T_n-g\|<\frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{24.4.24}$$

Остаточно за нерівностями (24.4.22)– (24.4.24) маємо:

$$\|T_n-f\|=\|(T_n-g)+(g-h)+(h-f)\|<$$

$$< \|T_n - g\| + \|g - h\| + \|h - f\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\ .$$

Теорему доведено.

Наслідок 24.4.3. *Функціональна послідовність*

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}, \dots,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\ \ \dots \tag{24.4.25}$$

утворює замкнену ортонормовану систему функцій на евклідовому просторі $R([a;b])$ *функцій, інтегрованих на відрізку* $[a,b]$ *завдовжки* $b - a = 2l > 0$.

Доведення. Ортонормованість системи функцій (24.4.25) була перевірена у ***прикладі*** **24.1.1**, а її замкненість випливає з теореми **24.4.4**.

Твердження доведене.

Наслідок 24.4.4. *Якщо* f *є інтегрованою функцією на відрізку* $[a,b]$ *завдовжки* $b - a = 2l > 0$, *то її тригонометричний ряд Фур'є*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{24.4.26}$$

на відрізку $[a,b]$ *збігається в середньоквадратичному до функції* f, *а для коефіцієнтів цього ряду справджується рівність Парсеваля*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l}\int_a^b f^2(x)dx. \tag{24.4.27}$$

Якщо ж відрізком інтегрованості функції f *є симетричний відрізок* $[-\pi,\pi]$, *то рівність Парсеваля набуває вигляду*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{24.4.28}$$

Доведення. Якщо деяка ортонормована система функцій $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n, \dots\} \subset L$ є замкненою в евклідовому просторі L, то згідно з **теоремою 24.2.3** ряд Фур'є

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, \varphi_n, \tag{24.4.29}$$

довільної функції f із евклідового простору L збігається в середньоквадратичному до неї та справедлива рівність Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{+\infty} {c_n}^2 = \|f\|^2. \tag{24.4.30}$$

У разі замкненої ортонормованої тригонометричної системи функцій (24.4.25) коефіцієнти ряду Фур'є функції $f \in L = R([a;b])$ та її норма набувають вигляду

$$c_0 = (f, \varphi_0) = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2l}}\right) = \sqrt{\frac{l}{2}} \cdot \frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx = \sqrt{\frac{l}{2}} \cdot a_0,$$

$$c_n' = \left(f, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}\right) = \sqrt{l} \cdot \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \sqrt{l} \cdot a_n,$$

$$c_n'' = \left(f, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \sqrt{l} \cdot \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \sqrt{l} \cdot b_n,$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\,,$$

а отже, підставивши їх у рівність (24.4.30), матимемо:

$$l\frac{a_0^2}{2} + l\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \int_a^b f^2(x)dx \iff (24.4.27).$$

Твердження доведене.

Завдання для самоперевірки **24.4.1.** Чи утворює функціональна послідовність (24.4.25) повну ортонормовану систему функцій на евклідовому просторі $R([a;b])$?

Завдання для самоперевірки **24.4.2.** Чи утворює функціональна послідовність (24.1.52) поліномів Лежандра замкнену ортонормовану систему функцій на евклідовому просторі $C([-1,1])$?

Завдання для самоперевірки **24.4.3.** Чи буде система поліномів Лежандра (24.1.52) повною в евклідовому просторі $C([-1,1])$?

Завдання для самоперевірки **24.4.4.** Нехай дві функції f і g із евклідового простору $C([a;b])$ мають однакові розвинення у тригонометричний ряд Фур'є періоду $b-a=2l>0$:

$$a_0(f)=a_0(g),\ a_n(f)=a_n(g),\ b_n(f)=b_n(g),\quad n\in N. \qquad (24.4.31)$$

Чи можна стверджувати, що значення вказаних функцій f і g однакові на відрізку $[a;b]$?

Завдання для самоперевірки **24.4.5.** Нехай дві функції f і g із евклідового простору $R([a;b])$ задовольняють умову (24.4.31). Чи можна стверджувати, що функції f і g набувають на відрізку $[a;b]$ однакових значень?

Завдання для самоперевірки **24.4.6.** Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2},\ 0<\alpha<\pi. \qquad (24.4.32)$$

Вказівка: записати рівність Парсеваля для коефіцієнтів ряду Фур'є функції

$$f(x):=\left[\begin{array}{ll}1, & |x|<\alpha;\\ 0, & \alpha\le|x|\le\pi.\end{array}\right. \qquad (24.4.33)$$

Відповіді на завдання для самоперевірки

24.4.1. Так.

24.4.2. Так.

24.4.3. Так.

24.4.4. Так.

24.4.5. Ні.

24.4.6. $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$.

24.5. Рівномірна збіжність, почленні інтегрування і диференціювання тригонометричного ряду Фур'є

Теорема 24.5.1 (***про зв'язок між коефіцієнтами рядів Фур'є функції та її похідної*** **).** *Якщо*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (24.5.1)$$

є рядом Фур'є 2π*-періодичної неперервної функції* f*, а ряд*

$$\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx) \qquad (24.5.2)$$

є *рядом Фур'є її похідної* f'*, яка є інтегрованою на відрізку* $[-\pi,\pi]$ *функцією, то для коефіцієнтів вказаних рядів справедливі рівності*

$$a_0'=0,\ \ a_n=-\frac{b_n'}{n},\ \ b_n=\frac{a_n'}{n},\ \ \ n\in N, \qquad (24.5.3)$$

тобто
$$f'\sim\sum_{n=1}^{+\infty}(n\,b_n\cos nx-na_n\sin nx). \qquad (24.5.4)$$

Доведення. Якщо деякі неперервні на відрізку $[a;b]\subset R$ функції u та v мають на ньому інтегровані похідні u' та v', то справджується формула інтегрування частинами:

$$\begin{cases} u\in C([a;b]), v\in C([a;b]) \\ u'\in R([a;b]), v'\in R([a;b]) \end{cases} \Rightarrow \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (24.5.5)$$

Тож, застосовуючи на відрізку $[-\pi,\pi]$ вказану формулу (24.5.5), а також враховуючи умову $f(\pi)=f(-\pi)$, отримаємо рівності

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = f(\pi)-f(-\pi) = 0, \quad (24.5.6)$$

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,df(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n,\quad n\in N, \quad (24.5.7)$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,df(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x)\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -na_n,\quad n\in N, \quad (24.5.8)$$

з яких випливають рівності (24.5.3) і (24.5.4).

Теорему доведено.

Наслідок 24.5.1. *Якщо*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

є рядом Фур'є 2π*-періодичної* $k-1$ *разів неперервно диференційованої функції* f*, а ряд*

$$\frac{a_0^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^{(k)}\cos nx + b_n^{(k)}\sin nx\right) \quad (24.5.9)$$

− це ряд Фур'є її похідної k-го порядку $f^{(k)}$, яка є інтегрованою на відрізку $[-\pi,\pi]$ функією, то для коефіцієнтів вказаних рядів справедливі нерівності

$$|a_n|+|b_n| \le \frac{\left|a_n^{(k)}\right|+\left|b_n^{(k)}\right|}{n^k}, \quad n\in N, \tag{24.5.10}$$

Доведення. Це твердження є результатом застосування k разів щойно доведеної теореми **24.5.1**.

Твердження доведене.

Теорема 24.5.2 (***про рівномірну збіжність тригонометричного ряду Фур'є***)**.** *Якщо 2π-періодична неперервна функція f має інтегровану на відрізку $[-\pi,\pi]$ похідну f', то тригонометричний ряд Фур'є функції f на множині R рівномірно та абсолютно збігається до суми f, тобто*

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n\cos nx|+|b_n\sin nx|) \ \text{ рівномірно збіжний на } R, \tag{24.5.11}$$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x),\ \ x\in R. \tag{24.5.12}$$

Доведення. Зрозуміло, що ряд (24.5.11) мажорується на множині R додатним числовим рядом

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|), \tag{24.5.13}$$

який, у свою чергу, мажорується сумою двох збіжних числових рядів $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left({a'_n}^2+{b'_n}^2\right)$ і $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Справді, співвідношення (24.5.3) спричиняють нерівності

$$|a_n|+|b_n|=\frac{|b'_n|}{n}+\frac{|a'_n|}{n}\le\frac{1}{2}\left({b'_n}^2+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2}\left({a'_n}^2+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{{a'_n}^2+{b'_n}^2}{2}+\frac{1}{n^2},\ n\in N.$$

Залишається тільки сказати, що збіжність першого ряду зумовлена рівністю Парсеваля, складеної за коефіцієнтами ряду Фур'є функції $f' \in R([-\pi,\pi])$, а саме:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left({a'_n}^2 + {b'_n}^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} {f'}^2(x)dx,$$

тоді як другий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ є збіжним рядом Рімана−Діріхле за показника степеня $\alpha = 2$.

Отже, з теореми Вейєрштрасса про рівномірну збіжність функціональних рядів випливає рівномірна збіжність на множині R ряду (24.5.11), яка, у свою чергу, зумовлює рівномірну збіжність тригонометричного ряду Фур'є функції f.

Теорему доведено.

Наслідок 24.5.2. *Якщо 2π-періодична неперервна функція f має кусково-неперервну на відрізку $[-\pi,\pi]$ похідну f', то тригонометричний ряд Фур'є функції f на множині R рівномірно та абсолютно збігається до суми f.*

Доведення. Досить зауважити, що кусково-неперервна на відрізку $[-\pi,\pi]$ функція f' є інтегрованою на ньому, та зробити посилання на **теорему 24.5.2**.

Твердження доведене.

Завдання для самостійної роботи **24.5.1.** *Довести, що на довільному відрізку $[a;b] \subset R$, на якому 2π-періодична кусково-гладка функція f не має точок розриву, тригонометричний ряд Фур'є цієї функції рівномірно та абсолютно збігається до суми f.*

Теорема 24.5.3 (***про почленне інтегрування тригонометричного ряду Фур'є***)**.** *Якщо* 2π*-періодична функція* f *є інтегрованою на відрізку* $[-\pi,\pi]$, *то ряд, отриманий почленним інтегруванням тригонометричного ряду Фур'є* (24.5.12) *функції* f *по довільному відрізку* $[0,x]$, $x\in R$, *рівномірно та абсолютно збігається до суми* $\int_0^x f(t)dt$:

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{b_n}{n}(1-\cos nx)+\frac{a_n}{n}\sin nx\right),\quad x\in R. \quad (24.5.14)$$

Доведення. Можна помітити, що функція

$$g(x):=\int_0^x\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt,\quad x\in R, \quad (24.5.15)$$

є 2π-періодичною неперервною функцією, яка має інтегровану на відрізку $[-\pi,\pi]$ похідну

$$g'(x)=f(x)-\frac{a_0}{2},\quad x\in R.$$

Тож за **теоремою 24.5.2** ряд Фур'є функції g рівномірно та абсолютно збігається до неї на всій множині R:

$$g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx),\quad x\in R, \quad (24.5.16)$$

До того ж, коефіцієнти останнього ряду (24.5.16) пов'язані з коефіцієнтами ряду Фур'є її похідної g' співвідношеннями (24.5.3):

$$g'\sim\frac{\alpha_0'}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n'\cos nx+\beta_n'\sin nx)\Rightarrow\alpha_0'=0,\ \alpha_n=-\frac{\beta_n'}{n},\beta_n=\frac{\alpha_n'}{n},n\in N. \quad (24.5.17)$$

Позаяк ряд Фур'є суми функцій дорівнює сумі рядів Фур'є цих функцій і тригонометричним рядом Фур'є сталої величини є ця стала, то можна зробити висновок, що всі коефіцієнти, окрім першого, тригонометричних рядів Фур'є функцій g' і f є однаковими:

$$a_n = \alpha_n', \;\; b_n = \beta_n', \;\; n \in N. \qquad (24.5.18)$$

Тож за (24.5.17)–(24.5.18) випливає:

$$\alpha_n = -\frac{\beta_n'}{n} = -\frac{b_n}{n}, \quad \beta_n = \frac{\alpha_n'}{n} = \frac{a_n}{n}, \;\; n \in N. \qquad (24.5.19)$$

Знайдемо коефіцієнт $\frac{\alpha_0}{2}$ розвинення (24.5.16):

$$g(x) = 0 \iff \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = 0 \iff \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_n'}{n} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} = 0 \iff \frac{\alpha_0}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} = 0. \qquad (24.5.20)$$

Зрештою, за (24.5.15)–(24.5.16) та за (24.5.19)–(24.5.20) матимемо:

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + g(x) = \frac{a_0 x}{2} + \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) =$$

$$= \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx\right) =$$

$$= \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{b_n}{n}(1 - \cos nx) + \frac{a_n}{n} \sin nx\right), \quad x \in R.$$

Теорему доведено.

***Завдання для самостійної роботи* 24.5.2.** *Довести, що за умов* **теореми 24.5.3** *для залишку ряду Фур'є функції f справедлива оцінка*

$$\sup_{x \in R} |s_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}, \quad n \in N,$$

у якій, як і до того, $s_n(x)$ – це n-та часткова сума ряду Фур'є, та

$$\varepsilon_n \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Теорема 24.5.4 (***про почленне диференціювання тригонометричного ряду Фур'є***). *Якщо 2π-періодична неперервно диференційована функція f має* *інтегровану на відрізку* $[-\pi,\pi]$ *другу похідну* f'', *то ряд отриманий почленним диференціюванням тригонометричного ряду Фур'є* (24.5.12) *функції* f *рівномірно та абсолютно збігається на множині* R *до суми* f':

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(nb_n \cos nx - na_n \sin nx), \quad x \in R. \qquad (24.5.21)$$

Доведення. **Теорема 24.5.2** зумовлює рівномірну та абсолютну збіжність на множині R тригонометричного ряду Фур'є функції f' до суми f':

$$f'(x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n' \cos nx + b_n' \sin nx), \; x \in R. \qquad 24.5.22)$$

Окрім того, за **теоремою 24.5.1** справджуються рівності

$$a_0' = 0, \;\; a_n' = nb_n, \;\; b_n' = -na_n, \quad n \in N, \qquad (24.5.23)$$

які приводять до рівності (24.5.21).

Теорему доведено.

Наслідок 24.5.3. *Якщо* 2π*-періодична* $k \geq 1$ *разів неперервно диференційована функція* f *має інтегровану на відрізку* $[-\pi,\pi]$ *похідну* $(k+1)$*-го порядку* $f^{(k)}$, *то ряд, отриманий* k *разів почленним диференціюванням тригонометричного ряду Фур'є* (24.5.12) *функції* f *рівномірно та абсолютно збігається на множині* R *до суми* $f^{(k)}$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \left(a_n \cos\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right)\right), \quad x \in R.$$

(24.5.24)

Доведення. Для доведення формули (24.5.24) досить k раз застосувати до функції f та її похідних **теорему 24 .5.4**, заздалегідь переписавши рівність (24.5.21) у вигляді

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(a_n\cos\left(nx+\frac{\pi}{2}\right)+b_n\sin\left(nx+\frac{\pi}{2}\right)\right),\quad x\in R.$$

Твердження доведене.

***Завдання для самостійної роботи* 24.5.3.** *Довести, що за умов* **теореми 24.5.4** *для залишку ряду Фур'є функції* f *справедлива оцінка*

$$\sup_{x\in R}|s_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon_n}{n^{k+\frac{1}{2}}},\quad n\in N,$$

в якій $s_n(x)$ – це n-та часткова сума ряду Фур'є, та $\varepsilon_n\to 0,\ n\to+\infty$.

***Завдання для самоперевірки* 24.5.1.** Чи справджується розвинення

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in(0;2\pi)? \qquad (24.5.25)$$

***Завдання для самоперевірки* 24.5.2.** Чи збігається тригонометричний ряд Фур'є (24.5.25) рівномірно на проміжку $(0;2\pi)$?

***Завдання для самоперевірки* 24.5.3.** Чи збігається тригонометричний ряд Фур'є (24.5.25) абсолютно на проміжку $(0;2\pi)$?

***Завдання для самоперевірки* 24.5.4.** Який вигляд має рівність Парсеваля для коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є (24.5.25)?

Завдання для самоперевірки **24.5.5.** Якого вигляду набуває рівність (24.5.25) у точці $x = \frac{\pi}{2}$?

Завдання для самоперевірки **24.5.6.** Чому дорівнює сума тригонометричного ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in (0; 2\pi)? \qquad (24.5.26)$$

***Вказівка*:** почленно зінтегрувати розвинення (24.5.25).

Завдання для самоперевірки **24.5.7**. Чому дорівнює сума тригонометричного ряду (24.5.26) у точці $x = \pi$?

Завдання для самоперевірки **24.5.8**. Легко перевірити, що справедливе розвинення

$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (-\pi; \pi). \qquad (24.5.27)$$

Яке розвинення у тригонометричний ряд Фур'є на проміжку $(-\pi; \pi)$ має функція $f = x^3$?

***Вказівка*:** двічі почленно зінтегрувати розвинення (24.5.27).

Відповіді на завдання для самоперевірки

24.5.1. Так.

24.5.2. Так.

24.5.3. Ні.

24.5.4. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

24.5.5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$ (***ряд Лейбніца***).

24.5.6. $\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}$, $x\in(0;2\pi)$.

24.5.7. $-\frac{\pi^2}{12}$.

24.5.8. $2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{6-\pi^2n^2}{n^3}\sin nx,\quad x\in(-\pi;\pi)$.

24.6. Комплексна форма тригонометричного ряду Фур'є

Нехай f є абсолютно інтегрованою функцією на стандартному відрізку $[-\pi,\pi]$, тоді є означеним її 2π-періодичний ряд Фур'є, який після застосування формул (23.5.34), що пов'язують тригонометричні функції із комплексною експонентою, зводиться до вигляду

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)=$$

$$=c_0e^{-i0x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right)=$$

$$=c_0e^{-i0x}+\sum_{n=1}^{+\infty}c_ne^{inx}+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}e^{-inx}=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx},\qquad(24.6.1)$$

в якому для коефіцієнтів останнього ряду запроваджено такі позначення

$$c_0:=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-i0x}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx\,\Big|_{n=0},$$

$$c_n:=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin nx)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx\,\Big|_{n\in N},$$

$$c_{-n} := \frac{a_n + ib_n}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-n)x}\,dx\,\Big|_{-n\in N}.$$

Останні три формули можна записати у єдиному вигляді

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \quad n \in Z.$$

Зрештою, 2π-періодичний ряд Фур'є абсолютно інтегрованої функції f набуває вигляду, який називають ***комплексною формою ряду Фур'є***:

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in R, \tag{24.6.2}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \; n \in Z. \tag{24.6.3}$$

До того ж, збіжність ряду (24.6.2) до функції f у деякій точці $x \in [-\pi, \pi]$ розуміють як збіжність до його головного значення:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \iff f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ikx}, \tag{24.6.4}$$

а інтеграл від комплексно значної функції у виразах (24.6.3) розуміють як комплексну суму інтегралів дійсної та уявної частин функції:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin dx. \tag{24.6.5}$$

Відображення $x \to \frac{\pi x}{l}$, $x \in R$, перетворює відрізок $[-l, l]$ у відрізок $[-\pi, \pi]$, тож у разі, коли функція f є абсолютно інтегрованою на симетричному відрізку $[-l, l]$, комплексна форма її $2l$-періодичного ряду Фур'є набуває вигляду

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \quad x \in R, \tag{24.6.6}$$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{l}}\,dx, \quad n \in Z. \tag{24.6.7}$$

Якщо коефіцієнти ряду (24.6.6) подати у показниковій формі

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\overline{a_n + \imath b_n}\right) = \rho_n e^{-i\varphi_n},\ n \in Z,$$

та позначити $\omega_n := \frac{n\pi}{l}$, $n \in Z$, то, наприклад, $2l$-періодичну усереднену кусково-гладку функцію f можна подати у вигляді її комплексного ряду Фур'є:

$$f\,(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho_n e^{i(\omega_n x - \varphi_n)},\ \ x \in R. \tag{24.6.8}$$

Члени останнього ряду (24.6.8) у теорії коливань (чи сигналів) називають ***гармоніками*** чи гармонічними коливаннями, числа ρ_n, ω_n, φ_n – відповідно ***амплітудами***, ***частотами*** і ***фазами*** цих ***гармонік***. У такому разі сигнал f взаємно однозначно задається своїми множинами всіх амплітуд, всіх частот і всіх фаз, які, відповідно, називають ***амплітудним***, ***частотним*** і ***фазовим спектрами*** сигналу, а залежності $\rho_n = \rho_n(\omega_n)$, $n \in Z$, і $\varphi_n = \varphi_n(\omega_n)$, $n \in Z$, називають ***амплітудно-частотним*** та ***фазочастотним спектрами***. Якщо ж сигнал f подано у дійсній формі ряду Фур'є

$$f\,(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),\ x \in R,$$

то амплітудно-частотний та фазочастотний спектри часто означають спрощеним способом:

$$\rho_n := \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,,\ \ \varphi_n := arctg\frac{b_n}{a_n},\ \ n \in Z_+. \tag{24.6.9}$$

Завдання для самоперевірки **24.6.1.** Якою є комплексна та дійсна форми розвинення у 2π-періодичний тригонометричний ряд Фур'є функції

$$f\,(x) = \frac{\alpha \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}\,,\ \ x \in R,\ \ |\alpha| < 1? \tag{24.6.10}$$

***Вказівка*:** покласти $z := e^{ix}$, $\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \frac{z^2-1}{2iz}$, після чого розкласти отриманий із (24.6.10) дріб на елементарні дроби, які можна розвинути у геометричні ряди за степенями $z^n = e^{inx}$ або $\frac{1}{z^n} = e^{-inx}$.

***Завдання для самоперевірки* 24.6.2.** Яке розвинення у 2π-періодичний тригонометричний ряд Фур'є має функція

$$f\,(x) = \frac{1}{2}\ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2),\quad x \in R\,,\quad |\alpha| < 1? \qquad (24.6.11)$$

***Вказівка*:** почленно зінтегрувати розвинення функції (24.6.10), отримане у попередньому питанні.

***Завдання для самоперевірки* 24.6.3.** Якщо ряд $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ – це розвинення у ряд Фур'є 2π-періодичної функції f, абсолютно інтегрованої на своєму періоді, то яке розвинення у комплексний ряд Фур'є має, утворена з неї, функція

$$g(x) := f(x + \alpha),\ x \in R, \qquad (24.6.12)$$

де $\alpha \in R$ – фіксована стала?

***Завдання для самоперевірки* 24.6.4.** За умов попереднього питання, яке розвинення у комплексний ряд Фур'є має функція

$$g(x) := e^{ikx} f(x),\quad x \in R, \qquad (24.6.13)$$

де $k \in Z$ – фіксоване ціле число?

Завдання для самоперевірки **24.6.5.** Нехай 2π-періодична $k-1$ разів неперервно диференційована функція f та її похідна k-го порядку $f^{(k)}$, яка інтегрована на відрізку $[-\pi, \pi]$, мають розвинення у комплексний ряд Фур'є відповідно:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n^{(k)} e^{inx}, \quad x \in R. \qquad (24.6.14)$$

Якою формулою пов'язані між собою коефіцієнти цих рядів c_n та $c_n^{(k)}$?

Відповіді на завдання для самоперевірки

24.6.1. $f(x) = \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \left(e^{inx} - e^{-inx}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \sin nx, \quad x \in R.$

24.6.2. $f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \frac{\cos nx}{n}, \; x \in R.$

24.6.3. $g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (c_n e^{in\alpha}) e^{inx}, \; x \in R.$

24.6.4. $g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_{n-k} e^{inx}, \; x \in R.$

24.6.5. $c_n^{(k)} = (in)^k c_n, \quad n \in Z.$

24.7. Тригонометричні ряди Фур'є для парних та непарних функцій. Приклади розвинень функцій у ряди Фур'є

Нехай функція f є парною та абсолютно інтегрованою на відрізку $[-\pi, \pi]$:

$$f \in R_a([-\pi, \pi]), \quad f(x) = f(-x), \quad x \in [-\pi, \pi]. \qquad (24.7.1)$$

Тоді за будь-якого числа $n \in N$ добуток $f(x)\cos nx$ є парною функцією на цьому відрізку, а добуток $f(x)\sin nx$ − непарною, а відтак формули (24.3.7)−(24.3.9) ряду Фур'є та його коефіцієнтів спрощуються до вигляду

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n \in Z_+; \qquad (24.7.2)$$

$$b_n = 0, \ \ n \in N; \qquad (24.7.3)$$

$$f \sim \ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx, \qquad (24.7.4)$$

Навпаки, якщо функція f є непарною та абсолютно інтегрованою на відрізку $[-\pi, \pi]$, то за будь-якого числа $n \in N$ добуток $f\,(x)\cos nx$ є непарною функцією, а добуток $f\,(x)\sin nx$ − парною, тож формули (24.3.7)−(24.3.9) набудуть такого вигляду:

$$a_n = 0, \quad n \in Z_+; \qquad (24.7.5)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \in N; \qquad (24.7.6)$$

$$f \sim \ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx\ . \qquad (24.7.7)$$

Отже, ряд Фур’є парної на симетричному відрізку функції f складається тільки із косинусів, а непарної – із синусів, тож за умов розвинення функції у ряд Фур’є у першому випадку кажуть, що функція f розкладається у ***ряд Фур’є за косинусами***, а у другому − у ***ряд Фур’є за синусами***.

Розглянемо загальний випадок: нехай функція f означена на довільному відрізку $[a, b]$ довжини $b - a = 2l > 0$, і задовольняє на ньому достатні умови її розвинення у ряд Фур’є. Припустимо, наприклад, що на вказаному відрізку функція f є неперервною та кусково-гладкою. Тоді, звісно, коефіцієнти її розвинення у $2l$-періодичний ряд Фур’є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in (a, b), \ (24.7.8)$$

будуть однозначно визначатися за формулами

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n \in Z_+, \qquad (24.7.9)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n \in Z_+. \qquad (24.7.10)$$

Проте розширивши відрізок $[a, b]$ і доозначивши функцію f на відповідній частині нового відрізка, зберігши умови розвинення утвореної функції у ряд Фур'є на ньому, матимемо розвинення цієї функції у ряд Фур'є більшого періоду $T_0 = 2l_0 > 2l$, яке у внутрішніх точках первинного відрізка $[a, b]$ буде збігатися до функції f.

Наприклад, якщо $[a, b] = [0, l_0]$, то доозначивши функцію f на відрізок $[-l_0, 0]$ парним чином,

$$f(x) = f(-x), \ \ x \in [-l_0, 0], \qquad (24.7.11)$$

матимемо розвинення функції f у її ряд Фур'є за косинусами:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l_0}, \ \ x \in [0, l_0], \qquad (24.7.12)$$

$$a_n = \frac{2}{l_0}\int_0^{l_0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l_0}dx, \quad n \in Z_+. \qquad (24.7.13)$$

Якщо ж доозначити вказану функцію f на проміжок $(-l_0, 0)$ непарним чином,

$$f(x) = -f(-x), \ \ x \in (-l_0, 0), \qquad (24.7.14)$$

тоді матимемо розвинення функції f у її ряд Фур'є за синусами:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l_0}, \ \ x \in (-l_0, 0), \qquad (24.7.15)$$

$$b_n = \frac{2}{l_0}\int_0^{l_0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l_0}dx, \quad n \in Z_+. \qquad (24.7.16)$$

Звісно, у крайніх точках $x = 0$ і $x = l_0$ первинного відрізка $[0, l_0]$ таким способом отриманий тригонометричний ряд Фур'є (24.7.15) збігається до значення

$$\frac{f(+0)+f(-0)}{2} = \frac{f(-l_0+0)+f(l_0-0)}{2} = 0.$$

***Приклад* 24.7.1.** Знайти розвинення функції

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0,2\pi], \tag{24.7.17}$$

у її 2π-періодичний тригонометричний ряд Фур'є і визначити тип його збіжності. За допомогою знайденого розвинення обчислити суми числових рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ та $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Розв'язання. Обчислимо коефіцієнти тригонометричного ряду Фур'є функції f за формулами (24.7.9)–(24.7.10), поклавши $[a,b] = [0,2\pi]$, $l = \pi$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8}{3}\,\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x\cos nx}{n^2} + \frac{2\sin nx}{n^3}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}, \quad n \in N.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2x\sin nx}{n^2} + \frac{2\cos nx}{n^3}\right)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}, \quad n \in N.$$

У такому разі тригонометричний ряд (24.7.8) набуває вигляду

$$x^2 = \frac{4}{3}\,\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx\right), \quad x \in (0, 2\pi). \tag{24.7.18}$$

У крайніх точках $x = 0$ та $x = 2\pi$ вказаного відрізка $[0,2\pi]$ отриманий тригонометричний ряд Фур'є збігається до значення

$$\frac{f(+0)+f(2\pi-0)}{2} = 2\pi^2.$$

Тож підставивши у праву частину ряду (24.7.17) значення $x = 0$, отримаємо рівність

$$2\pi^2 = \frac{4}{3}\,\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \iff \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Так само, після підстановки у рівність (24.7.17) значення $x = \pi$, маємо

$$\pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \iff \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Зрештою, додавши до ряду $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, матимемо

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} \iff \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Позаяк задана функція f є неперервно диференційованою на відрізку $[0,2\pi]$, то на інтервалі $(0,2\pi)$ ряд (24.7.17) збігається до неї рівномірно.

***Відповідь*:** $x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx\right)$, $x \in (0,2\pi)$, де збіжність ряду є рівномірною; до того ж справджуються рівності

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{24.7.19}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \tag{24.7.20}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{24.7.21}$$

***Приклад* 24.7.2.** Знайти розвинення функції

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi,\pi], \tag{24.7.22}$$

у її 2π-періодичний тригонометричний ряд Фур'є.

***Розв'язання*.** Вказана функція f є усередненою парною неперервно диференційованою функцією на симетричному відрізку $[-\pi,\pi]$, а отже, її тригонометричний ряд Фур'є збігається до функції f рівномірно на всьому заданому проміжку $[-\pi,\pi]$. Вигляд та коефіцієнти її ряду Фур'є визначаються формулами (24.7.2)–(24.7.4), за якими маємо:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x\cos nx}{n^2} + \frac{2\sin nx}{n^3}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad n \in N;$$

$$x^2 = \frac{1}{3}\,\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi]. \qquad (24.7.23)$$

Відповідь: $x^2 = \frac{1}{3}\,\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$, $x \in [-\pi, \pi]$, де ряд збігається рівномірно.

***Приклад* 24.7.3.** Знайти розвинення функції

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0, \pi], \qquad (24.7.24)$$

у її тригонометричний ряд Фур'є за синусами.

Розв'язання. Подовжимо задану функцію f на відрізок $[-\pi, 0]$, доозначивши її на цьому відрізку непарним чином. Тоді за формулами (24.7.5)–(24.7.7) матимемо:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2\cos nx}{n} + \frac{2x\sin nx}{n^2} + \frac{2\cos nx}{n^3}\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{2\pi(-1)^n}{n} + 4\,\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^3}, \quad n \in N.$$

Помітивши, що другий доданок в останній сумі можна спростити до виразу

$$4\,\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^3} = \left[\begin{array}{ll} 0\,, & n = 2k, \quad k \in N; \\ \dfrac{-8}{\pi(2k-1)^3}\,, & n = 2k-1, \quad k \in N, \end{array}\right.$$

можна подати шуканий тригонометричний ряд у вигляді

$$x^2 = 2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n} - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}, \quad x \in [0, \pi).$$

Відповідь: $x^2 = 2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n} - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$, $x \in [0, \pi)$.

***Приклад* 24.7.4.** Знайти розвинення функції

$$f(x) = (1-x)\cos\pi x, \quad x \in [-1,1], \tag{24.7.25}$$

у її тригонометричний ряд Фур'є за періодом $2l = 2$.

Розв'язання. Задану функцію передусім розкладемо у різницю двох функцій:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \tag{24.7.26}$$

де $f_1(x) = \cos\pi x,\ f_2(x) = x\cos\pi x, \quad x \in [-1,1]$.

Можна помітити, що перша функція f_1 – одна із тригонометричної ортогональної системи функцій відрізка $[-l,l] = [-1,1]$, тож її розвинення у ряд Фур'є за цією системою є однаковим із функцією f_1:

$$f_1(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos n\pi x + \beta_n \sin n\pi x) = \cos\pi x, \quad x \in R.$$

Друга ж функція, f_2, є непарною неперервно диференційованою функцією на проміжку $[-1,1]$, тож її розвинення можна знайти за формулами (24.7.15)–(24.7.16), в яких $l_0 = 1$:

$$n \geq 2 \ \Rightarrow\ b_n = 2\int_0^1 x\cos\pi x \sin n\pi x\, dx =$$

$$= \int_0^1 x\cos\pi x \sin n\pi x\, dx = \int_0^1 x\,(\sin(n+1)\pi x + \sin(n-1)\pi x)dx =$$

$$= -x\left(\frac{\cos(n+1)\pi x}{\pi(n+1)} + \frac{\cos(n-1)\pi x}{\pi(n-1)}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{\sin(n+1)\pi x}{\pi^2(n+1)^2} + \frac{\sin(n-1)\pi x}{\pi^2(n-1)^2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2(-1)^n n}{\pi(n^2-1)},$$

$$b_1 = 2\int_0^1 x\cos^2\pi x\, dx = \int_0^1 x(1+\cos 2\pi x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{x\sin 2\pi x}{2\pi} + \frac{\cos^2 2\pi x}{4\pi^2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\sin\pi x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n n \sin n\pi x}{n^2-1}, \quad x \in (-1,1).$$

Отже, різниця функцій (24.7.26) матиме розвинення

$$f_1(x) - f_2(x) = \cos \pi x - \frac{1}{2}\sin \pi x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n \sin n\pi x}{n^2-1}, \quad x \in (-1,1).$$

Відповідь: $(1-x)\cos \pi x = \cos \pi x - \frac{1}{2}\sin \pi x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n \sin n\pi x}{n^2-1}$, $x \in (-1,1)$, збіжність ряду є рівномірною на внутрішніх відрізках цього інтервалу.

***Приклад* 24.7.5.** Подати у комплексній формі розвинення функції

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{24.7.27}$$

у її 2π-періодичний тригонометричний ряд Фур'є.

Розв'язання. Щоб отримати шукане розвинення, досить до рівності (24.7.23) застосувати формули (23.5.34), які пов'язують тригонометричні функції із комплексною експонентою:

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}e^{-inx} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx} + 2\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi^2 + 2\sum_{n\in Z, n\neq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Відповідь: $x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 2\sum_{n\in Z, n\neq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}, \quad x \in [-\pi, \pi]$.

***Приклад* 24.7.6.** Знайти розвинення функції

$$f(x) = \cos \alpha x, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad \alpha \notin Z, \tag{24.7.28}$$

у її 2π-періодичний тригонометричний ряд Фур'є.

Розв'язання. Задана функція f є усередненою парною неперервно диференційованою функцією на симетричному відрізку $[-\pi,\pi]$, тож її тригонометричний ряд Фур'є збігається до функції f рівномірно на всьому заданому проміжку $[-\pi,\pi]$. Вигляд і коефіцієнти ряду Фур'є визначають формулами (24.7.2)–(24.7.4), за якими маємо:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\,dx=\frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right|_0^{\pi}=\frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(\alpha-n)x+\cos(\alpha+n)x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n}+\frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha-n}+\frac{1}{\alpha+n}\right),\quad n\in N.$$

Відповідно,

$$\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha-n}+\frac{1}{\alpha+n}\right)\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

(24.7.29)

Відповідь: $\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha-n}+\frac{1}{\alpha+n}\right)\cos nx,$

$x\in[-\pi,\pi]$, причому ряд збігається рівномірно.

Наслідок 24.7.1. *За будь-якого* $\alpha\notin Z$ *справджуються розвинення*:

1) $$\frac{\pi\cos\alpha x}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha-n}+\frac{1}{\alpha+n}\right)\cos nx,\ x\in[-\pi,\pi];\quad(24.7.30)$$

2) $$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha-n}+\frac{1}{\alpha+n}\right);\quad(24.7.31)$$

3) $$ctgt=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t-\pi n}+\frac{1}{t+\pi n}\right),\quad t\neq n\pi,\ n\in Z.\quad(24.7.32)$$

Доведення. 1. Розвинення (24.7.30) є елементарним наслідком доведеної вище формули (24.7.29).

2. Якщо підставити у попереднє розвинення (24.7.30) значення $x = 0$, то матимемо розвинення (24.7.31).

3. Розвинення (24.7.32) є наслідком розвинення (24.7.30) за значення аргумента $x = \pi$ і введеного позначення $t = \alpha\pi$.

Твердження доведене.

***Завдання для самоперевірки* 24.7.1.** Чи є повною ортогональна система тригонометричних функцій (24.1.48) в евклідовому просторі неперервних функцій на відрізку $[0, l]$?

***Завдання для самоперевірки* 24.7. 2.** Чи є повною ортогональна система тригонометричних функцій (24.1.50) в евклідовому просторі неперервних функцій на відрізку $[0, l]$?

***Завдання для самоперевірки* 24.7.3.** Чи існує відмінна від сталої неперервна функція на відрізку $[a, b]$, $b - a = 2l > 0$, яка була б ортогональною всім елементам тригонометричної системи функцій (24.1.34)?

***Завдання для самоперевірки* 24.7.4.** Чи існує відмінна від сталої неперервна функція на відрізку $[a, b]$, $b - a = 2l > 0$, яка була б ортогональною всім степеневим функціям $1, x, x^2, \ldots, x^n$, ... ?

***Завдання для самоперевірки* 24.7.5.** Чи існує відмінна від сталої неперервна функція на відрізку $[a, b]$, $b - a = 2l > 0$, $2l$-періодичний ряд Фур'є якої містить лише один доданок?

***Завдання для самоперевірки* 24.7.6.** Скільки доданків містить $2l$-періодичний ряд Фур'є функції, яка є сталою величиною на відрізку $[a, b]$, $b - a = 2l > 0$?

Завдання для самоперевірки **24.7.7.** Чи можна функцію, яка є сталою величиною на відрізку $[a, b]$, $b - a = 2l > 0$, розвинути на ньому у $2l$-періодичний ряд Фур'є за синусами?

Завдання для самоперевірки **24.7.8.** Як пов'язані між собою коефіцієнти 2π-періодичних рядів Фур'є функцій f та g, абсолютно інтегрованих на відрізку $[-\pi, \pi]$, якщо

$$f(-x) = g(x),\ x \in [-\pi, \pi]? \qquad (24.7.33)$$

Завдання для самоперевірки **24.7.9.** Як пов'язані між собою коефіцієнти 2π-періодичних рядів Фур'є функцій f та g, абсолютно інтегрованих на відрізку $[-\pi, \pi]$, якщо

$$f(-x) = -g(x),\ \ x \in [-\pi, \pi]? \qquad (24.7.34)$$

Завдання для самоперевірки **24.7.10.** Які властивості мають коефіцієнти 2π-періодичного ряду Фур'є функції f, абсолютно інтегрованої на відрізку $[-\pi, \pi]$, якщо

$$f(x - \pi) = f(x),\ \ x \in [0, \pi]? \qquad (24.7.35)$$

Завдання для самоперевірки **24.7.11.** Які властивості мають коефіцієнти 2π-періодичного ряду Фур'є функції f, абсолютно інтегрованої на відрізку $[-\pi, \pi]$, якщо

$$f(x - \pi) = -f(x),\ x \in [0, \pi]? \qquad (24.7.36)$$

Завдання для самоперевірки **24.7.12.** Як пов'язані між собою коефіцієнти рядів Фур'є 2π-періодичних функцій f та g, абсолютно інтегрованих на відрізку $[-\pi, \pi]$, якщо

$$g(x) = f(x + \alpha), \quad x \in R, \tag{24.7.37}$$

де α – це дійсна стала?

Відповіді на завдання для самоперевірки

24.7.1. Так.

24.7.2. Так.

24.7.3. Ні.

24.7.4. Ні.

24.7.5. Так.

24.7.6. Один доданок.

24.7.7. Ні.

24.7.8. $\begin{cases} a_n(f) = a_n(g), & n \in Z_+; \\ b_n(f) = -b_n(g), & n \in N. \end{cases}$

24.7.9. $\begin{cases} a_n(f) = -a_n(g), & n \in Z_+; \\ b_n(f) = b_n(g), & n \in N. \end{cases}$

24.7.10. $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0, \quad n \in N.$

24.7.11. $a_0 = a_{2n} = b_{2n} = 0, \quad n \in N.$

24.7.12. $\begin{cases} a_n(g) = a_n(f)\cos n\alpha + b_n(f)\sin n\alpha, & n \in Z_+; \\ b_n(g) = b_n(f)\cos n\alpha - a_n(f)\sin n\alpha, & n \in N. \end{cases}$

Розділ 25. Інтеграли, залежні від параметрів

Інтегралами, залежними від параметрів, називають власні чи невласні інтеграли вигляду

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt. \qquad (25.0.1)$$

Якщо за кожного значення параметра $x \in [a;b] \subset R$ функція

$$h_x(t) := f(t,x), \;\; t \in [\alpha,\beta], \qquad (25.0.2)$$

є інтегрованою на відрізку $[\alpha,\beta] \subset \bar{R} = R \cup \{\pm\infty\}$, то інтеграл (25.0.1) визначає деяку функцію

$$g(x) := \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt \qquad (25.0.3)$$

змінної x, задану на проміжку $[a;b] \subset R$. Відтак постають питання про властивості функції g залежно від властивостей підінтегральної функції f, такі як наприклад, про її інтегрованість, про її неперервність, про існування її границі в тих чи інших точках тощо.

Насправді деякі властивості інтегралів, залежних від параметрів, уже було розглянуто у **розд. 9** та **18**. Так, у **розд. 9** було досліджено інтеграли вигляду

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt, \;\; x \in [a;b], \qquad (25.0.4)$$

які називають (**означення 9.1.1**) визначеними інтегралами зі змінною верхньою межею. Наприклад, було доведено, що у разі неперервності підінтегральної функції f на відрізку $[a;b]$ функція F є її первісною на цьому проміжку:

$$F'(x) = f(x), \;\; x \in [a;b].$$

Можна помітити, що останній інтеграл (25.0.4) легко зводиться до інтеграла вигляду (25.0.1) завдяки заміні змінної $t = a + \frac{x-a}{\beta-\alpha}(\tau - \alpha)$:

$$\int_a^x f(t)dt = \int_\alpha^\beta f\left(a + \frac{x-a}{\beta-\alpha}(\tau - \alpha)\right)\frac{x-a}{\beta-\alpha}d\tau := \int_\alpha^\beta f^*(\tau, x)d\tau. \quad (25.0.5)$$

Наприклад, таку добре відому в теорії ймовірностей функцію

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt, \quad x \in R, \quad (25.0.6)$$

яку називають ***інтегралом Лапласа***, можна подати у вигляді

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{\frac{-x^2t^2}{2}}xdt, \quad x \in R. \quad (25.0.7)$$

Між тим, застосувавши стандартне розвинення експоненти у ряд Тейлора−Маклорена, інтеграл Лапласа (25.0.6)−(25.0.7) можна переписати у вигляді степеневого ряду

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}, \; x \in R, \quad (25.0.8)$$

тож можна очікувати багато спільних рис та аналогій у теоріях функціональних рядів та інтегралів, залежних від параметрів.

У **розд. 18** (підрозд. 18.3) були розглянуті питання щодо деяких властивостей інтеграла вигляду

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t, x)dt, \quad x \in [a; b], \quad (25.0.9)$$

який теж можна звести до інтеграла вигляду (25.0.1), якщо у ньому застосувати заміну змінної $t = \varphi(x) + \frac{\psi(x)-\varphi(x)}{\beta-\alpha}(\tau - \alpha)$:

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t,x)dt = \int_{\alpha}^{\boldsymbol{\beta}} f\left(\varphi(x) + \frac{\psi(x)-\varphi(x)}{\beta-\alpha}(\tau-\alpha)\right)\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{\beta-\alpha}d\tau :=$$

$$:= \int_{\alpha}^{\beta} f^{**}(\tau,x)d\tau. \qquad (25.0.10)$$

Нарешті, невласні інтеграли можна розглядати як границю за параметром інтегралів того самого вигляду (25.0.1), наприклад:

$$\int_{a}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{\alpha}^{\boldsymbol{\beta}} f^{*}(\tau,x)d\tau, \qquad (25.0.11)$$

де, як і раніше, позначено $f^{*}(\tau,x) := f\left(a + \frac{x-a}{\beta-\alpha}(\tau-\alpha)\right)\frac{x-a}{\beta-\alpha}$.

З огляду на це, надалі у більшості випадків теореми будуть сформульовані тільки відносно власних чи невласних інтегралів загального вигляду (25.0.1).

25.1. Визначені інтеграли, залежні від параметрів

Теорема 25.1.1 (***про неперервність інтегралів залежних від параметра***)**.** 1. *Якщо функція* $f = f(t,x)$ *є неперервною на прямокутнику* $\Pi = [\alpha,\beta] \times [a;b]$, *то тоді функція* g, *визначена інтегралом*

$$g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt,$$

є неперервною на відрізку $[a;b]$, *тобто*

$$\forall x_0 \in [a;b]\colon\ \lim_{x\to x_0} \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{x\to x_0} f(t,x)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x_0)dt. \quad (25.1.1)$$

2. *Якщо функції φ і ψ є неперервними на відрізку $[a;b]$ та на ньому задовольняють нерівність $\varphi \le \psi$, а функція $f = f(t,x)$ є неперервною на циліндричній множині*

$$C_t([a;b],\varphi,\psi) = \{(t,x) \in R^2\colon\ x \in [a;b],\ \varphi(x) \le t \le \psi(x)\},$$

то тоді функція g, визначена інтегралом

$$g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t,x)dt,$$

є неперервною на відрізку $[a;b]$.

Доведення. Перше і друге твердження теореми є спрощеними варіантами доведених **теорем 18.3.1** та **18.3.2**, в яких параметр x змінювався на довільному компакті евклідового простору R^m.

Теорему доведено.

Послідовність функцій $\{f_n \mid n \in N\}$, означених на відрізку $[\alpha,\beta]$ дійсної числової осі, можна розглядати як функцію двох змінних $f = f(t,x)$, яка означена на декартовому добутку $[\alpha,\beta] \times N$. У такому розумінні послідовність інтегралів

$$\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(t,n)dt, \quad n \in N,$$

є інтегралом, залежним від параметра $n \in N$. З огляду на це **теорему 22.2.3** про інтегрування функціональної послідовності, рівномірно збіжної на відрізку, можна узагальнити і на той випадок, коли параметр x змінюється за точками довільної підмножини дійсних чисел. Звісно, у такому разі запроваджуються міркування, цілком аналогічні до згаданого випадку.

Нехай функція $f = f(t, x)$ означена на множині $[\alpha, \beta] \times A$, де $A \subset R$, а функція $\varphi = \varphi(t)$ – на відрізку $[\alpha, \beta]$, і нехай x_0 – це гранична точка вказаної множини $A \subset R$.

Означення* 25.1.1.** *Говорять, що набір функцій* $f = f(t, x)$**,** $x \in A$, ***збігається рівномірно (***одностайно***) *на відрізку* $[\alpha, \beta]$ *до функції* $h = h(t)$, *коли* x *прямує до* x_0, *і це позначають як*:

$$f(t, x) \underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} h(t), \quad x \longrightarrow x_0, \tag{25.1.2}$$

якщо справджується умова

$$\sup_{t \in [\alpha,\beta]} |f(t, x) - h(t)| \longrightarrow 0, \quad x \longrightarrow x_0, \tag{25.1.3}$$

або, що те саме,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \left(x \in \dot{B}(x_0, \delta) \cap A \;\Rightarrow\; \sup_{t \in [\alpha,\beta]} |f(t, x) - h(t)| < \varepsilon \right). \tag{25.1.4}$$

Наслідок 25.1.1. *Набір функцій* $f = f(t, x)$**,** $x \in A$, *збігається рівномірно на відрізку* $[\alpha, \beta]$ *до функції* $h = h(t)$ *за* x, *що прямує до граничної точки* x_0 *множини* A, *тоді й лише тоді, коли за будь-якої збіжної до цієї точки послідовності* $\{x_n : n \in N\} \subset A \backslash \{x_0\}$ *відповідна послідовність функцій*

$$h_{x_n}(t) := f(t, x), \quad t \in [\alpha, \beta], \;\; n \in N,$$

рівномірно збігається на відрізку $[\alpha, \beta]$ *до вказаної функції* $h = h(t)$:

$$f(t, x) \underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} h(t), \;\; x \longrightarrow x_0 \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \{x_n : n \in N\} \subset A \backslash \{x_0\} \\ x_n \longrightarrow x_0, \; n \to +\infty \end{cases} \Rightarrow\; h_{x_n}(t) = f(t, x_n) \underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} h(t), \quad n \to +\infty \right).$$

***Доведення*.** Введемо позначення

$$\Delta(x) := \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f(t,x) - h(t)|, \quad x \in A.$$

Тоді за **означенням 25.1.1** маємо:

$$f(t,x) \underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} h(t), \;\; x \longrightarrow x_0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \Delta(x) \longrightarrow 0, \;\; x \longrightarrow x_0.$$

Як відомо,

$$\Delta(x) \longrightarrow 0,\; x \longrightarrow x_0 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \{x_n : n \in N\} \subset A \backslash \{x_0\} \\ x_n \longrightarrow x_0,\; n \to +\infty \end{cases} \Rightarrow \Delta(x_n) \longrightarrow 0,\; n \to +\infty \right).$$

У свою чергу,

$$\Delta(x_n) \longrightarrow 0,\; n \to +\infty \;\; \Leftrightarrow \;\; f(t,x_n) \underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} h(t), \;\; n \to +\infty.$$

Твердження доведене.

Теорема 25.1.2 (***критерій Коші рівномірної збіжності набору функцій***)**.** *Набір функцій* $f = f(t,x)$**,** $x \in A$, *збігається рівномірно на відрізку* $[\alpha,\beta]$ *до деякої функції* $\varphi = \varphi(t)$ *за* x, *що прямує до граничної точки* x_0, *тоді й лише тоді, коли для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке число* $\delta > 0$, *за якого для будь-яких точок* x *та* y *з перетину виколотого* δ*-околу точки* x_0 *із множиною* A *і для всіх значень аргумента* $t \in [\alpha,\beta]$ *модуль різниці значень функції* $f(t,x)$ *та* $f(t,y)$ *буде меншим за вибране число* $\varepsilon >$ 0:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \colon \left(x, y \in \dot{B}(x_0,\delta) \cap A \;\Rightarrow\; \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f(t,x) - f(t,y)| < \varepsilon \right). \tag{25.1.5}$$

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що вказаний набір функцій $f = f(t,x)$**,** $x \in A$, збігається рівномірно на відрізку $[\alpha,\beta]$ до деякої функції

$h = h(t)$, коли x прямує до граничної точки x_0 множини A. У такому разі згідно **означення 25.1.1** для довільного числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta > 0$, що для будь-яких точок x і y з виколотого δ-околу $\dot{B}(x_0, \delta)$ справджуються нерівності

$$\begin{cases} \sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |f(t,x) - h(t)| < \frac{\varepsilon}{2}; \\ \sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |f(t,y) - h(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \end{cases} \qquad (25.1.6)$$

за якими маємо:

$$\sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f(t,x) - f(t,y)| \le$$

$$\le \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f(t,x) - h(t)| + \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f(t,y) - h(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, необхідність умови (25.1.5) доведено.

Достатність. Нехай справджується умова (25.1.5). Тоді для довільного фіксованого числа $t \in [\alpha, \beta]$ буде чинним твердження

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \left(x, y \in \dot{B}(x_0, \delta) \cap A \ \Rightarrow\ |f(t,x) - f(t,y)| < \varepsilon\right), \quad (25.1.7)$$

яке за критерієм Коші для функції $\varphi_t(y) := f(t,y)$, $y \in A$, свідчить про існування границі

$$\lim_{y\to x_0} \varphi_t(y) = \lim_{y\to x_0} f(t,y) = h(t) \in R. \qquad (25.1.8)$$

Тож перейшовши за кожного значення $t \in [\alpha, \beta]$ в останній нерівності умови (25.1.5) до границі, коли $y \to x_0$, отримаємо твердження (25.1.4) **означення 25.1.1** рівномірної збіжності набору функцій $f = f(t,x)$, $x \in A$.

Теорему доведено.

Теорема 25.1.3 (***про інтегрування границі набору функцій, рівномірно збіжного на відрізку***). *Нехай набір функцій* $f = f(t, x)$, $x \in A$, *збігається рівномірно на відрізку* $[\alpha, \beta]$ *до деякої функції* $h = h(t)$ *за* x, *що прямує до граничної точки* x_0 *множини* $A \subset R$. *Тоді, якщо за будь-якого значення параметра* $x \in A$ *функція* $h_x(t) := f(t, x)$, $t \in [\alpha, \beta]$, *є інтегрованою на відрізку* $[\alpha, \beta] \subset R$, *то гранична функція* φ *теж є інтегрованою на ньому та*

$$\lim_{x \to x_0} \int_\alpha^\beta f(t, x)dt = \int_\alpha^{\boldsymbol{\beta}} \lim_{x \to x_0} f(t, x)dt = \int_\alpha^\beta h(t)dt. \qquad (25.1.9)$$

Доведення. Нехай

$$f(t, x) \underset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} h(t), \quad x \longrightarrow x_0,$$

що за **означенням 25.1.1** рівносильно твердженню

$$\sup_{t \in [\alpha,\beta]} |f(t, x) - h(t)| \longrightarrow 0, \quad x \longrightarrow x_0,$$

та нехай за будь-якого фіксованого значення параметра $x \in A$ функція $h_x = f(\cdot, x)$ є інтегрованою на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Виберемо довільну послідовність $\{ x_n : n \in N\}$ значень параметра із множини $A \backslash \{x_0\}$ таку, що збігається до граничної точки x_0:

$$\begin{cases} \{ x_n : \ n \in N\} \subset A \backslash \{x_0\}, \\ x \longrightarrow x_0, \qquad n \to +\infty. \end{cases}$$

Після цього утворимо послідовність інтегрованих на відрізку $[\alpha, \beta] \subset R$ функцій $h_{x_n}(t) := f(t, \ x_n)$, $n \in N$, яка, певна річ, буде задовольняти умову

$$\underset{t \in [\alpha,\beta]}{sup} \left| h_{x_n}(t) - h(t) \right| = \underset{t \in [\alpha,\beta]}{sup} |f(t, \ x_n) - h(t)| \longrightarrow 0, \ \ n \to +\infty.$$

Це означає, що послідовність функцій h_{x_n}, $n \in N$, інтегрованих на відрізку $[\alpha, \beta]$, рівномірно збігається до функції h, тож **за теоремою 22.2.3** гранична функція h теж є інтегрованою та справджується рівність

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{\beta} h_{x_n}(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(t,\, x_n)dt = \int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt,$$

яка зумовлює границю (25.1.9).

Теорему доведено.

Зазначимо, що щойно доведена теорема є узагальненням **теореми 25.1.1**. Справді, якщо функція $f = f(t,x)$ є неперервною на прямокутнику $\Pi = [\alpha,\beta]\times[a;b]$, то, по-перше, кожна точка x_0 відрізка $[a;b]$ є його граничною точкою, і, по-друге, унаслідок рівномірної неперервності функції f на вказаному компакті Π набір функцій $f = f(t,x)$, $x\in[a;b]$, рівномірно збігається до функції $h_{x_0} = h_{x_0}(t)$, коли параметр x прямує до точки x_0, тож остання **теорема 25.1.3** зумовлює рівність (25.1.1).

Теорема 25.1.4 (***про інтегрування інтегралів, залежних від параметра***)**.** *Якщо функція* $f = f(t,x)$ *є неперервною на прямокутнику* $\Pi = [\alpha,\beta]\times[a;b]$*, то тоді функція* g*, визначена інтегралом*

$$g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt,$$

є інтегрованою на відрізку $[a;b]$ *і справджується рівність*

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} dt\int_a^b f(t,x)dx, \qquad (25.1.10)$$

або, що є тим самим,

$$\int_a^b dx\int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt = \int_{\alpha}^{\beta} dt\int_a^b f(t,x)dx. \qquad (25.1.11)$$

Доведення. Кожен з інтегралів, що стоять у лівій і правій частинах рівності (25.1.11), дорівнює подвоєному інтегралу по компакту $\Pi = [\alpha,\beta]\times$

$[a; b]$ неперервної на ньому функції двох змінних $f = f(t, x)$, що обумовлює рівність цих інтегралів між собою.

Теорему доведено.

Теорема 25.1.5 (***про диференціювання інтеграла, залежного від параметра***). *Якщо функція $f = f(t, x)$ є неперервною на прямокутнику $\Pi = [\alpha, \beta] \times [a; b]$ і має неперервну на ньому частинну похідну $\frac{\partial f}{\partial x}$, то тоді функція g, яка визначена інтегралом*

$$g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x) dt,$$

має неперервну похідну g' на відрізку $[a; b]$ і справджується рівність

$$g'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt, \qquad (25.1.12)$$

або, що є тим самим, рівність

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha}^{\beta} f(t, x) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt, \qquad (25.1.13)$$

*яку називають **правилом** (формулою) **Лейбніца**.*

Доведення. За кожного фіксованого значення $t \in [\alpha, \beta]$ функцію f можна вважати функцією, залежною лише від змінної x, і яка за цією змінною має неперервну похідну на проміжку $[a; b]$. Тож до такої функції на кожному відрізку $[x, x + \Delta x] \subset [a; b]$ застосовна теорема Лагранжа про кінцевий приріст, за якою маємо:

$$f(t, x + \Delta x) - f(t, x) = \Delta x \cdot \frac{\partial f(t,x+\theta\Delta x)}{\partial x}, \quad \theta = \theta(t, x) \in (0; 1).$$

Тоді приріст функції g за тим самим відрізком можна подати у вигляді

$$\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x) =$$

$$= \int_\alpha^\beta \big(f(t, x + \Delta x) - f(t, x)\big) dt = \Delta x \cdot \int_\alpha^\beta \frac{\partial f(t, x+\theta\Delta x)}{\partial x} dt. \qquad (25.1.14)$$

Щоб довести рівність (25.1.12), оцінимо модуль різниці між виразом $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$ і правою частиною вказаної рівності:

$$\left|\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} - \int_\alpha^\beta \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt\right| = \left|\int_\alpha^\beta \frac{\partial f(t,x+\theta\Delta x)}{\partial x} dt - \int_\alpha^\beta \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt\right| \le$$

$$\le \int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial f(t,x+\theta\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| dt \le (\beta - \alpha) \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \left|\frac{\partial f(t,x+\theta\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|. \quad (25.1.15)$$

Рівномірна неперервність похідної $\frac{\partial f}{\partial x}$ на компакті П тягне за собою існування границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \left|\frac{\partial f(t,\ x+\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,\ x)}{\partial x}\right| = 0,$$

яка, позаяк величина $\theta = \theta(t, x)$ є обмеженою, зумовлює границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \left|\frac{\partial f(t,\ x+\theta\Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,\ x)}{\partial x}\right| = 0. \qquad (25.1.16)$$

Разом твердження (25.1.15) і (25.1.16) спричиняють границю (25.1.12), тоді як неперервність похідної g' є наслідком неперервності на відрізку $[a; b]$ інтеграла $\int_\alpha^\beta \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt$, неперервність якого, у свою чергу, випливає з **теореми 25.1.1**.

Теорему доведено.

Наслідок 25.1.2. *Якщо функція* $f = f(t, x)$ *є неперервною на прямокутнику* $\Pi = [\alpha, \beta] \times [a; b]$ *і має неперервну на ньому частинну похідну* $\frac{\partial f}{\partial x}$, *а функції* $\varphi = \varphi(x)$ *та* $\psi = \psi(x)$ *є неперервно* *диференційованими на відрізку* $[a;b]$, *то тоді функція* g, *визначена інтегралом*

$$g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t,x)dt, \tag{25.1.17}$$

має неперервну похідну g' *на цьому відрізку і справджується рівність*

$$g'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt + f(\psi(x),x)\psi'(x) - f(\varphi(x),x)\varphi'(x). \tag{25.1.18}$$

Доведення. Якщо подати інтеграл (25.1.17) у вигляді складної функції

$$F(x,u,v) := \int_u^v f(t,x)dt\,,\ \ u = \varphi(x),\ \ v = \psi(x),\ \ x \in [a;b],$$

то за правилом диференціювання складної функції матимемо:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}F(x,u,v) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_{u = \varphi(x),\, v = \psi(x)} =$$

$$= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt + f(\psi(x),x)\psi'(x) - f(\varphi(x),x)\varphi'(x).$$

Твердження доведене.

***Приклад* 25.1.1.** Інтеграл

$$J_0(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\cos t)dt, \quad x \in R, \tag{25.1.19}$$

називають ***функцією Бесселя*** нульового порядку. Чи задовольняє ця функція диференціальне рівняння

$$xJ_0{}''(x) + J_0{}'(x) + xJ_0(x) = 0\ ? \tag{25.1.20}$$

Розв'язання. Функція, яка стоїть під знаком інтеграла (25.1.19), є неперервною на будь-якому прямокутнику $\Pi = [\alpha,\beta] \times [a;b] \subset R^2$ і має на ньому неперервну частинну похідну за змінною $x \in [a; b]$. Тож за **теоремою 25.1.5** на довільному відрізку $[a; b] \subset R$ функція J_0 має неперервну похідну:

$$J_0{}'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d}{dx}(\cos(x\cos t))dt = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\cos t)\cos t\, dt. \quad (25.1.21)$$

Так само доводять існування другої похідної функції J_0:

$$J_0{}''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos t)\cos^2 t\, dt. \quad (25.1.22)$$

Залишається лише перевірити справедливість тотожності

$$J_0{}'(x) = -x\big(J_0(x) + J_0{}''(x)\big), \quad x \in R. \quad (25.1.23)$$

Для цього запровадимо інтегрування частинами у виразі (25.1.21):

$$J_0{}'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\cos t)\cos t\, dt = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\cos t)d(\sin t) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sin t\sin(x\cos t)\Big|_0^\pi - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos t)\sin^2 t\, dt =$$

$$= 0 - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos t)(1-\cos^2 t)dt = -x\big(J_0(x) + J_0{}''(x)\big), \quad x \in R.$$

Отже, тотожність (25.1.23) − правильна, тож функція J_0 є розв'язком вказаного рівняння (25.1.20).

***Відповідь*:** функція J_0 на всій множині R задовольняє рівняння (25.1.20).

***Приклад* 25.1.2.** Обчислити інтеграл

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{lnx}dx, \quad (25.1.24)$$

якщо $0 < \alpha < \beta < +\infty$.

Розв'язання. Позаяк існує границя

$$\lim_{x \to +0} \frac{x^\beta - x^\alpha}{lnx} = \lim_{x \to +0} \frac{\left(x^\beta - x^\alpha\right)'}{(lnx)'} = \lim_{x \to +0}\left(\beta x^\beta - \alpha x^\alpha\right) = 0,$$

то підінтегральна функція

$$g(x) := \left[\begin{array}{l} \frac{x^{\beta}-x^{\alpha}}{\ln x}, \ x \in (0,1]; \\ \quad 0, \quad x = 0, \end{array}\right.$$

є неперервною на відрізку інтегрування $[0;1]$, а відтак шуканий інтеграл (25.1.24) можна подати у вигляді

$$I(\alpha,\beta) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^{\beta}-x^{\alpha}}{\ln x} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} dx \int_{\alpha}^{\beta} x^t \, dt. \qquad (25.1.25)$$

За будь-якого $\varepsilon \in (0;1)$ функція $f(t,x) = x^t$ є неперервною на прямокутнику $\Pi = [\alpha,\beta] \times [0,\ 1-\varepsilon]$, тож застосувавши до останнього інтеграла у виразі (25.1.25) **теорему 25.1.4**, матимемо:

$$I(\alpha,\beta) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\alpha}^{\beta} dt \int_0^{1-\varepsilon} x^t dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(1-\varepsilon)^{t+1} dt}{t+1}. \qquad (25.1.26)$$

У свою чергу, підінтегральна функція $h(t,\varepsilon) := \frac{(1-\varepsilon)^{t+1}}{t+1}$ у виразі (25.1.26) є неперервною на прямокутнику $\Pi_0 = [\alpha,\beta] \times [0;1]$, тоді за **теоремою 25.1.1** отримаємо

$$I(\alpha,\beta) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(1-\varepsilon)^{t+1} dt}{t+1} = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(1-\varepsilon)^{t+1} dt}{t+1} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{t+1} = ln \frac{\beta+1}{\alpha+1}.$$

***Відповідь*:** $I(\alpha,\beta) = ln \frac{\beta+1}{\alpha+1}$.

***Приклад* 25.1.3.** Обчислити інтеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln \frac{1+\alpha \cos t}{1-\alpha \cos t} \frac{dt}{\cos t}, \qquad (25.1.27)$$

якщо $|\alpha| < 1$.

Розв'язання. Для довільного значення $\alpha \in (-1,+1)$ знайдеться таке додатне число $\delta > 0$, за якого число α міститься у відрізку $[-1+\delta, 1-\delta]$.

Тоді підінтегральна функція $f(t,\alpha) = \frac{dt}{\cos t} \ln \frac{1+\alpha\cos t}{1-\alpha\cos t}$ у виразі (25.1.27) буде неперервною на прямокутнику $\Pi = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [-1+\delta, 1-\delta]$. Справді, зазначену функцію можна подати у вигляді добутку

$$f(t,\alpha) = \alpha \cdot \frac{1}{z} \ln \frac{1+z}{1-z}\Big|_{z = \alpha\cos t}, \qquad (25.1.28)$$

в якому другий множник розкладається у рівномірно збіжний на відрізку $[-1+\delta, 1-\delta]$ степеневий ряд

$$\frac{1}{z} \ln \frac{1+z}{1-z} = 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \cdots + \frac{z^{2n}}{2n+1} + \cdots, \quad z \in [-1+\delta, 1-\delta],$$

із неперервною сумою. Позаяк внутрішня функція $z = \alpha\cos t$ вказаного множника є неперервною функцію двох змінних на прямокутнику П, то цей множник, а отже й весь добуток (25.1.28), є неперервною функцією на П.

Знайдемо частинну похідну за параметром α підінтегральної функції f:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 t}, \quad (t,\alpha) \in \Pi. \qquad (25.1.29)$$

Легко бачити, що ця похідна теж є неперервною функцією на прямокутнику П, тож до шуканого інтеграла (25.1.27) можна застосувати **теорему 25.1.5** про диференціювання інтеграла за параметром:

$$I'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 t} dt = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \qquad (25.1.30)$$

і до того ж $I(0) = 0$.

Отже, маємо

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi arcsin\alpha, \quad |\alpha| < 1.$$

Відповідь: $I(\alpha) = \pi arcsin\alpha, \ \ |\alpha| < 1.$

Завдання для самоперевірки **25.1.1.** Чи є неперервною на множині R функція, задана інтегралом

$$g(x) := \int_0^1 sign(t - x)dt, \quad x \in R? \tag{25.1.31}$$

Завдання для самоперевірки **25.1.2.** Нехай $f \in C([0;1])$. Чи є неперервною на множині R функція, задана інтегралом

$$g(x) := \int_0^1 f(t) sign(t - x)dt, \quad x \in R? \tag{25.1.32}$$

Завдання для самоперевірки **25.1.3.** Чи задовольняють функції, задані рівностями (25.1.31) та (25.1.32), умовам **теореми 25.1.1** (***про неперервність інтегралів, залежних від параметра***)?

Завдання для самоперевірки **25.1.4.** Що можна сказати про необхідність і достатність умов **теореми 25.1.1** з огляду на попередні завдання для самоперевірки 25.1.1–25.1.3?

Завдання для самоперевірки **25.1.5.** Нехай $f \in C([0;1])$. Якою є множина неперервності функції, що задана інтегралом

$$g(x) := \int_0^1 \frac{f(t)}{x + t\sqrt{t}} dt, \quad x \in R? \tag{25.1.33}$$

Завдання для самоперевірки **25.1.6.** Якому значенню дорівнює границя

$$\lim_{x \to 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + t^2} dt? \tag{25.1.34}$$

Завдання для самоперевірки **25.1.7.** Якою є похідна функції g, що означена інтегралом

$$g(x) := \int_0^1 \frac{\ln(1 + xt)}{t} dt, \quad x > 0? \tag{25.1.35}$$

Завдання для самоперевірки **25.1.8.** Якою є похідна функції g, що означена інтегралом

$$g(x) := \int_0^x \frac{\ln(1+xt)}{t} dt, \quad x > 0? \qquad (25.1.36)$$

Відповіді на завдання для самоперевірки

25.1.1. Так.

25.1.2. Так.

25.1.3. Ні.

25.1.4. Умови **теореми 25.1.1** є достатніми, але не необхідними.

25.1.5. $R\backslash\{0\}$.

25.1.6. 1.

25.1.7. $g'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad x > 0.$

25.1.8. $g'(x) = \frac{2\ln(1+x^2)}{x}, \quad x > 0.$

25.2. Невласні інтеграли, залежні від параметрів

Означення **25.2.1.** *Нехай на декартовому добутку* $[\alpha, \beta] \times A$ *означена інтегрована на проміжку* $[\alpha, \beta] \subset \bar{R}$ *функція* $f = f(t, x)$, *причому за деяких чи за всіх значень параметра* $x \in A$ *інтеграл*

$$\int_\alpha^\beta f(t, x) dt$$

існує у невласному розумінні. Тоді на множині A *буде означена функція*

$$g(x) := \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt, \qquad (25.2.1)$$

яку називають ***невласним інтегралом, залежним від параметра*** $x \in A$.

Надалі, маючи за мету спрощення викладок, будемо вважати, що за всіх значень параметра підінтегральна функція у виразі (25.2.1) має не більше однієї особливої точки на проміжку $[\alpha, \beta] \subset \bar{R}$, а саме, будемо вважати, що за будь-якого числа $\gamma \in (\alpha, \beta)$ усі функції

$$h_x(t) := f(t,x), \quad t \in [\alpha, \beta], \qquad (25.2.2)$$

є обмеженими на відрізку $[\alpha, \gamma]$, та чи точка $\beta = +\infty$, чи точка $\beta \in R$ і при цьому за деяких значень параметра (можливо – за всіх) функція h_x не має скінченної границі у цій точці β. Тобто єдиною особливою точкою функції h_x не проміжку $[\alpha, \beta] \subset \bar{R}$ може бути тільки точка β.

Означення* 25.2.2**. *Кажуть, що інтеграл* (25.2.1) *на множині A* ***збігається рівномірно*, якщо*

$$\sup_{x \in A} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt - \int_{\alpha}^{\gamma} f(t,x)dt \right| = \sup_{x \in A} \left| \int_{\gamma}^{\beta} f(t,x)dt \right| \longrightarrow 0, \quad \gamma \to \beta - 0, \qquad (25.2.3)$$

або, що є те саме,

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(t,x)dt \underset{A}{\rightrightarrows} \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt, \quad \gamma \to \beta - 0, \qquad (25.2.4)$$

чи

$$\int_{\gamma}^{\beta} f(t,x)dt \underset{A}{\rightrightarrows} 0, \quad \gamma \to \beta - 0. \qquad (25.2.5)$$

Варто зазначити, що на відміну від попереднього **підрозділу 25.1**, у якому розглядався набір функцій $h_x(t) = f(t, x)$, заіндексованих параметром $x \in A$, та у відповідних теоремах якого запроваджувалися умови рівномірної збіжності цього набору функцій за параметром x відносно відрізка зміни аргумента t, то в **означені 25.2.1** йде мова про набори функцій

$$w_\gamma(x) := \int_\alpha^\gamma f(t, x)dt,$$

заіндексованих змінною $\gamma \in (\alpha, \beta)$, і, отже, про їх рівномірну збіжність за цим аргументом γ відносно множини A, на якій змінюється параметр x.

Теорема 25.2.1 (***критерій Коші рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметрів***)**.** *Інтеграл* (25.2.1) *на множині* A *збігається рівномірно тоді й лише тоді, коли для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке число* $\gamma_\varepsilon \in (\alpha, \beta)$, *за якого для будь-яких точок* γ' *і* γ'' *із проміжку* $(\gamma_\varepsilon, \beta)$ *та для всіх значень параметра* $x \in A$ *модуль інтеграла* $\int_{\gamma'}^{\gamma''} f(t, x)dt$ *буде меншим за вибране число* $\varepsilon > 0$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \gamma_\varepsilon > 0\colon \left(\gamma', \gamma'' \in (\gamma_\varepsilon, \beta) \ \Rightarrow \ \sup_{x \in A} \left| \int_{\gamma'}^{\gamma''} f(t, x)dt \right| < \varepsilon \right). \quad (25.2.6)$$

Доведення. Розглянемо набір функцій

$$q_\gamma(x) := \int_\gamma^\beta f(t, x)dt, \quad \gamma \in (\alpha, \beta). \quad (25.2.7)$$

У термінах набору функцій (25.2.7) умова (25.2.5) рівномірної збіжності невласного інтеграла (25.2.1) означає, що

$$q_\gamma(x) \underset{A}{\rightrightarrows} 0, \quad \gamma \to \beta - 0. \quad (25.2.8)$$

У свою чергу, згідно з критерієм Коші (**теорема 25.1.2**), твердження (25.2.8) рівносильне тому, що

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \gamma_\varepsilon > 0\colon \left(\gamma', \gamma'' \in (\gamma_\varepsilon, \beta)\ \Rightarrow \sup_{x\in A} \left| q_{\gamma''}(x) - q_{\gamma'}(x) \right| < \varepsilon \ \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \gamma_\varepsilon > 0\colon \left(\gamma', \gamma'' \in (\gamma_\varepsilon, \beta)\ \Rightarrow \sup_{x\in A} \left| \int_{\gamma'}^{\gamma''} f(t,x)dt \right| < \varepsilon \right).$$

Теорему доведено.

Теорема 25.2.2 (***ознака Вейєрштрасса збіжності невласного інтеграла, залежного від параметрів***)**.** *Якщо для всіх значень параметра* $x \in A$, *по-перше, за будь-якого числа* $\gamma \in (\alpha, \beta)$ *функція* $h_x(t) = f(t,x)$ *є інтегрованою на відрізку* $[\alpha, \gamma]$ *і, по-друге, на проміжку* $[\alpha,\ \ \beta)$ *справедлива нерівність*

$$|f(t,x)| \le \varphi(t),\ \ x \in A,\ \ t \in [\alpha,\ \ \beta), \tag{25.2.9}$$

та до того ж функція φ *є інтегрованою на проміжку* $[\alpha, \beta]$, *то невласний інтеграл* (25.2.1) *є рівномірно збіжним на множині* A:

$$\begin{cases} \sup\limits_{x\in A}|f(t,x)| \le \varphi(t),\ t \in [\alpha,\beta); \\ \forall\, \gamma \in (\alpha,\beta)\colon h_x \in R\big([[\alpha,\gamma]]\big); \\ \int_\alpha^\beta \varphi(t)dt < +\infty\,; \end{cases} \Rightarrow\ \int_\alpha^\beta f(t,x)dt \text{ збігається рівномірно на } A.$$

Доведення. З критерію Коші інтегрованості функції φ на проміжку $[\alpha, \beta]$ випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \gamma_\varepsilon > 0\colon \left(\gamma', \gamma'' \in (\gamma_\varepsilon, \beta)\ \Rightarrow \sup_{x\in A} \left| \int_{\gamma'}^{\gamma''} \varphi(t)dt \right| < \varepsilon \right), \tag{25.2.10}$$

після чого нерівність

$$\sup_{x\in A}|f(t,x)| \le \varphi(t),\ \ t \in [\alpha,\beta),$$

та умова (25.2.10) спричиняють твердження:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \gamma_\varepsilon > 0\colon$$

$$\left(\gamma', \gamma'' \in (\gamma_\varepsilon, \beta) \ \Rightarrow \sup_{x \in A} \left|\int_{\gamma'}^{\gamma''} f(t,x)dt\right| \le \sup_{x \in A} \left|\int_{\gamma'}^{\gamma''} \varphi(t)dt\right| < \varepsilon\right),$$

яке обумовлює рівномірну збіжність на множині A вказаного невласного інтеграла (25.2.1).

Теорему доведено.

Насправді, щойно доведені **теореми 25.2.1** та **25.2.2** є точними аналогами критерію Коші та ознаки Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціональних рядів. Справді, за **наслідком 25.1.1** невласний інтеграл (25.2.1) є рівномірно збіжним на множині A тоді й лише тоді, коли за довільної послідовності чисел

$$\{\gamma_n : n \in N\} \subset (\alpha, \beta), \tag{25.2.11}$$

збіжної до числа $\beta \in \bar{R}$, відповідна послідовність функцій

$$w_{\gamma_n}(x) = \int_\alpha^\gamma f(t,x)dt, \ \ n \in N, \tag{25.2.12}$$

рівномірно на множині A збігається до функції

$$g(x) = \int_\alpha^\beta f(t,x)dt,$$

тобто

$$\int_\alpha^\gamma f(t,x)dt \underset{A}{\rightrightarrows} \int_\alpha^\beta f(t,x)dt, \ \ \gamma \to \beta - 0, \ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \ \left(\begin{cases} \{\gamma_n : \ n \in N\} \subset (\alpha, \beta); \\ \gamma_n \to \beta, \ n \to +\infty; \end{cases} \ \Rightarrow \ \ w_{\gamma_n}(x) \underset{A}{\rightrightarrows} g(x), \ \ n \to +\infty \right). \tag{25.2.13}$$

Причому функцію w можна подати у вигляді певного функціонального ряду, а функції w_{γ_n} – як його часткові суми:

$$g(x) = \int_\alpha^{\gamma_1} f(t,x)dt + \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{\gamma_{n-1}}^{\gamma_n} f(t,x)dt := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x), \tag{25.2.14}$$

$$w_{\gamma_n}(x) = \int_{\alpha}^{\gamma_1} f(t,x)dt + \sum_{k=2}^{n} \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} f(t,x)dt := \sum_{k=1}^{n} a_k(x). \quad (25.2.15)$$

Отже, буде справедливим таке твердження:

Наслідок 25.2.1. *Невласний інтеграл* (25.2.1) *є рівномірно збіжним на множині A тоді й лише тоді, коли за будь-якої послідовності* (25.2.11), *збіжної до числа $\beta \in \bar{R}$, функціональний ряд* (25.2.14), *побудований за цією послідовністю, рівномірно збігається на множині A до своєї суми $w(x)$.*

Тож умова **теореми 25.2.2**

$$\sup_{x \in A} |f(t,x)| \le \varphi(t), \;\; t \in [\alpha, \beta), \quad (25.2.16)$$

для членів вказаного функціонального ряду (25.2.14) набуває вигляду

$$\sup_{x \in A} |a_n(x)| \le \int_{\gamma_{n-1}}^{\gamma_n} \varphi(t)dt := b_n \in R_+, \quad \gamma_0 = \alpha, \;\; n \in N, \quad (25.2.17)$$

причому числовий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ є збіжним, а отже, за ознакою Веєрштрасса для функціональних рядів, функціональний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ рівномірно збігається на множині A. Звідси, згідно з **наслідком 25.2.1** випливає твердження **теореми 25.2.2**. Подібним способом доводять і **теорему 25.2.1**.

Звісно, можна застосувати цей спосіб також для доведення наступних теорем про неперервність, інтегрування і диференціювання за параметром x невласного інтеграла (25.2.1), залежного від параметра.

Теорема 25.2.3 (*про неперервність невласних інтегралів, залежних від параметра*). *Якщо функція $f = f(t,x)$ є неперервною на декартовому добутку* $\Pi = [\alpha, \beta) \times [a; b]$, *то тоді функція g, яка визначена рівномірно збіжним на відрізку $[a; b] \subset R$ невласним інтегралом*

$$g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt,$$

є неперервною на цьому відрізку, тобто

$$\forall x_0 \in [a;b]\colon \lim_{x \to x_0} \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{x \to x_0} f(t,x)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x_0)dt. \quad (25.2.18)$$

Доведення. Нехай $\{\gamma_n\colon n \in N\} \subset (\alpha, \beta)$ – це довільна числова послідовність, яка збігається до числа $\beta \in \bar{R}$, і нехай невласний інтеграл (25.2.1) збігається рівномірно на відрізку $[a;b] \subset R$. Тоді за **наслідком 25.2.1** функціональний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$, складений за формулами (25.2.14), теж буде рівномірно збіжним на цьому відрізку до суми

$$g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt. \quad (25.2.19)$$

Якщо задана функція $f = f(t,x)$ є неперервною на декартовому добутку $\Pi = [\alpha, \beta) \times [a;b]$, то за **теоремою 25.1.1** про неперервність визначеного інтеграла, залежного від параметра, кожен член

$$a_n(x) = \int_{\gamma_{n-1}}^{\gamma_n} f(t,x)dt \quad (25.2.20)$$

вказаного функціонального ряду є неперервною функцією на відрізку $[a;b]$. Тож за теоремою про неперервність суми функціонального ряду сума $w(x)$ ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ також є неперервною на відрізку $[a;b]$.

Теорему доведено.

Теорема 25.2.4 (***про інтегрування невласного інтеграла, залежного від параметра***). *Якщо функція* $f = f(t,x)$ *є неперервною на декартовому добутку* $\Pi = [\alpha, \beta) \times [a;b]$, *то тоді функція* g, *яка визначена рівномірно збіжним на відрізку* $[a;b] \subset R$ *невласним інтегралом*

$$g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt,$$

є інтегрованою на відрізку $[a;b]$ *і справджується рівність*

$$\int_a^b g(x)dx = \int_\alpha^\beta dt \int_a^b f(t,x)dx, \qquad (25.2.21)$$

або, що є те саме,

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(t,x)dt = \int_\alpha^\beta dt \int_a^b f(t,x)dx. \qquad (25.2.22)$$

Доведення. Насамперед зазначимо, що за висновком попередньої **теореми 25.2.3** функція g є неперервною на відрізку $[a;b]$, а отже, інтеграл (25.1.21) є визначеним. Далі запровадимо такі самі міркування, як і у згаданій теоремі.

Нехай $\{\gamma_n : n \in N\} \subset (\alpha, \beta)$ – це довільна числова послідовність, яка збігається до числа $\beta \in \bar{R}$, і нехай невласний інтеграл (25.2.1) збігається рівномірно на відрізку $[a;b] \subset R$. Тоді за **наслідком 25.2.1** функціональний ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$, складений за формулами (25.2.14), теж рівномірно збігається на цьому відрізку до суми (25.2.19) і всі його члени є неперервними на $[a;b]$ функціями. Тож за теоремою про інтегрування рівномірно збіжного функціонального ряду маємо:

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(t,x)dt = \int_a^b g(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b a_n(x)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b dx \int_{\gamma_{n-1}}^{\gamma_n} f(t,x)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b dx \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} f(t,x)dt. \qquad (25.2.23)$$

Кожен з інтегралів, що стоїть під знаком останньої суми у виразі (25.2.23), згідно з **теоремою 25.1.4** допускає зміну порядку інтегрування на компакті $\Pi_k = [\gamma_{k-1}, \gamma_k] \times [a;b]$:

$$\int_a^b dx \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} f(t,x)dt = \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} dt \int_a^b f(t,x)dx, \quad k \in N,$$

що разом із (25.2.23) обумовлює рівність

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(t,x)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{k-1}}^{\gamma_k} dt \int_a^b f(t,x)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^{\gamma_k} dt \int_a^b f(t,x)dx = \int_\alpha^\beta dt \int_a^b f(t,x)dx.$$

Теорему доведено.

Теорема 25.2.5 (***про диференціювання невласного інтеграла, залежного від параметра***). *Якщо функція $f = f(t,x)$ є неперервною на декартовому добутку $\Pi = [\alpha,\beta) \times [a;b]$ і має неперервну на ньому частинну похідну $\frac{\partial f}{\partial x}$, інтеграл якої*

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt \tag{25.2.24}$$

рівномірно збігається на відрізку $[a;b] \subset R$, то тоді функція g, визначена збіжним за будь-якого значення $x \in [a;b]$ невласним інтегралом

$$g(x) = \int_\alpha^\beta f(t,x)dt,$$

має неперервну похідну g' на відрізку $[a;b]$ і справджується рівність

$$g'(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt, \tag{25.2.25}$$

або, що те саме,

$$\frac{d}{dx} \int_\alpha^\beta f(t,x)dt = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt. \tag{25.2.26}$$

*яку називають **правилом** (формулою) **Лейбніця** для невласних інтегралів, залежних від параметрів.*

Доведення. Діємо так само, як і у попередніх двох теоремах. Покладемо $\gamma_0 = \alpha$, і нехай $\{\gamma_n : n \in N\} \subset (\alpha,\beta)$ – це довільна числова послідовність, яка збігається до числа $\beta \in \bar{R}$; та нехай невласний інтеграл (25.2.1) збігається у кожній точці відрізка $[a;b] \subset R$, а невласний інтеграл (25.2.25) збігається на ньому рівномірно. Тоді, складений за формулами (25.2.14), функціональний ряд збігається на цьому відрізку до суми $g(x)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\gamma_{n-1}}^{\gamma_n} f(t,x)dt = g(x)\,, \qquad (25.2.27)$$

а інший ряд, складений так само,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\gamma_{n-1}}^{\gamma_n} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt \qquad (25.2.28)$$

збігається на цьому відрізку рівномірно. Згідно з **теоремою 25.1.5** про диференціювання визначених інтегралів, залежних від параметра, для кожного члена ряду (25.2.28) справедлива рівність

$$\int_{\gamma_{n-1}}^{\gamma_n} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{d}{dx} \int_{\gamma_{n-1}}^{\gamma_n} f(t,x)dt = a_n{}'(x), \quad n \in N,$$

за якою випливає рівномірна збіжність на вказаному відрізку $[a;b] \subset R$ функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n{}'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt, \quad x \in [a;b]. \qquad (25.2.29)$$

Тоді, за теоремою про почленне диференціювання функціонального ряду, ряд (25.2.27) рівномірно збігається на відрізку $[a;b]$ до суми, яка має на ньому неперервну похідну:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n{}'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt, \quad x \in [a;b].$$

Теорему доведено.

Теорема 25.2.6 (***про перехід до границі у невласному інтегралі, залежному від параметра***)**.** *Нехай набір функцій $f = f(t,x)$, $x \in A$, за будь-якого числа $\gamma \in [\alpha,\beta)$ збігається рівномірно на відрізку $[\alpha,\gamma]$ до деякої* *функції* $h = h(t),\ t \in [\alpha, \beta)$, *за* x, *що прямує до граничної точки* x_0 *множини* $A \subset R$. *Тоді, якщо функція* g *є визначеною рівномірно збіжним на множині* A *невласним інтегралом*

$$g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt, \tag{25.2.30}$$

то гранична функція h *є інтегрованою на проміжку* $[\alpha, \beta] \subset \bar{R}$ *та існує скінченна границя*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt, \tag{25.2.31}$$

або, що те саме,

$$\lim_{x \to x_0} \int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{x \to x_0} f(t,x)dt. \tag{25.2.32}$$

Доведення. Якщо невласний інтеграл (25.1.30) є рівномірно збіжним на множині A, то за критерієм Коші (**теорема 25.2.1**) для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\gamma_\varepsilon > 0$, за якого для будь-яких значень $\gamma', \gamma'' \in (\gamma_\varepsilon, \beta)$ справджується нерівність

$$\sup_{x \in A} \left| \int_{\gamma'}^{\gamma''} f(t,x)dt \right| < \varepsilon. \tag{25.2.33}$$

За умовою теореми набір функцій $f = f(t,x),\ x \in A$, рівномірно збігається на кожному з відрізків $[\alpha, \gamma']$ і $[\alpha, \gamma'']$, тож з **теореми 25.1.3** випливає існування границь визначених інтегралів

$$\lim_{x \to x_0} \int_{\alpha}^{\gamma'} f(t,x)dt = \int_{\alpha}^{\gamma'} h(t)dt,$$

$$\lim_{x \to x_0} \int_{\alpha}^{\gamma''} f(t,x)dt = \int_{\alpha}^{\gamma''} h(t)dt,$$

які обумовлюють чинність границі

$$\lim_{x\to x_0}\int_{\gamma'}^{\gamma''} f(t,x)dt = \lim_{x\to x_0}\int_{\alpha}^{\gamma''} f(t,x)dt - \lim_{x\to x_0}\int_{\alpha}^{\gamma'} f(t,x)dt = \int_{\gamma'}^{\gamma''} h(t)dt. \tag{25.2.34}$$

Границя (25.1.34) разом з нерівністю (25.1.33) спричиняють нерівність

$$\sup_{x\in A}\left|\int_{\gamma'}^{\gamma''} h(t)dt\right| \le \varepsilon.$$

Отже, гранична функція $h = h(t)$ задовольняє умови критерію Коші інтегрованості функції на проміжку $[\alpha,\beta] \subset \bar{R}$, що доводить збіжність інтеграла із правої частини рівності (25.2.31).

Щоб довести границю (25.2.31)–(25.2.32), виберемо довільне число $\gamma \in (\alpha,\beta)$ й оцінимо модуль різниці між $g(x)$ та $\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt$:

$$\left|g(x) - \int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt\right| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} f(t,x)dt - \int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt\right| \le$$

$$\le \left|\int_{\alpha}^{\gamma} f(t,x)dt - \int_{\alpha}^{\gamma} h(t)dt\right| + \left|\int_{\gamma}^{\beta} f(t,x)dt\right| + \left|\int_{\gamma}^{\beta} h(t)dt\right| \le$$

$$\le \left|\int_{\alpha}^{\gamma} f(t,x)dt - \int_{\alpha}^{\gamma} h(t)dt\right| + \sup_{x\in A}\left|\int_{\gamma}^{\beta} f(t,x)dt\right| + \left|\int_{\gamma}^{\beta} h(t)dt\right|. \tag{25.2.35}$$

Позаяк невласний інтеграл (25.2.30) є рівномірно збіжним на множині A і, до того ж, інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt$ є збіжним, то для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\gamma > 0$, за якого справджуються нерівності

$$\sup_{x\in A}\left|\int_{\gamma}^{\beta} f(t,x)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\int_{\gamma}^{\beta} h(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{25.2.36}$$

Оскільки на відрізку $[\alpha,\gamma]$ набір функцій $f = f(t,x)$, $x \in A$, збігається рівномірно до функції h, коли x прямує до граничної точки x_0 множини A, то для вибраного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх точок $x \in \dot{B}(x_0,\delta) \cap A$ виконується нерівність

$$\left|\int_{\alpha}^{\gamma} f(t,x)dt - \int_{\alpha}^{\gamma} h(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \qquad (25.2.37)$$

Разом (25.2.35), (25.2.36) і (25.2.37) зумовлюють твердження

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon \left(x \in \dot{B}(x_0,\delta) \cap A \ \Rightarrow\ \left|g(x) - \int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt\right| < \varepsilon\right),$$

яке доводить існування границі (25.2.31)−(25.2.32).

Теорему доведено.

Вельми поширеним є випадок, коли особливою точкою підінтегральної функції та граничною точкою множини зміни параметра є та чи інша нескінченно віддалена точка дійсної числової осі, найчастіше – це точка $+\infty$. Тож варто у такому разі сформулювати останню теорему окремо.

Наслідок 25.2.2. *Нехай набір функцій* $f = f(t,x)$, $x \in [a,+\infty)$, *за будь-якого числа* $\gamma \in [\beta,+\infty)$ *збігається рівномірно на відрізку* $[\beta,\gamma]$ *до деякої функції* $h = h(t)$, $t \in [\beta,+\infty)$, *за* x, *що прямує до точки* $+\infty$. *Тоді, якщо функція* g *є визначеною рівномірно збіжним на множині* A *невласним інтегралом*

$$g(x) = \int_{\beta}^{+\infty} f(t,x)dt, \qquad (25.2.38)$$

то гранична функція h *є інтегрованою на проміжку* $[\beta,+\infty)$ *та існує скінченна границя*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \int_{\beta}^{+\infty} h(t)dt, \qquad (25.2.39)$$

або, що те саме,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\beta}^{+\infty} f(t,x)dt = \int_{\beta}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f(t,x)dt. \qquad (25.2.40)$$

Теорема 25.2.7 (***про інтегрування по нескінченному проміжку невласного інтеграла, залежного від параметра***)**.** *Якщо*

1) *підінтегральна функція* $f = f(t, x)$ *є неперервною на декартовому добутку* $\Pi = [\beta, +\infty) \times [a, +\infty)$;

2) *для довільного числа* $b \in (a, +\infty)$ *невласний інтеграл*

$$\int_{\beta}^{+\infty} f(t, x)dt \tag{25.2.41}$$

збігається рівномірно на відрізку $[a; b]$;

3) *для довільного числа* $\gamma \in (\beta, +\infty)$ *невласний інтеграл*

$$\int_{a}^{+\infty} f(t, x)dx \tag{25.2.42}$$

збігається рівномірно на відрізку $[\beta, \gamma]$;

4) *за будь-яких* $x \in [a, +\infty)$ *та* $t \in [\beta, +\infty)$ *є збіжними інтеграли*

$$\int_{\beta}^{+\infty} |f(t, x)|dt, \quad \int_{a}^{+\infty} |f(t, x)|dx; \tag{25.2.43}$$

5) *хоча б один із двох інтегралів*

$$\int_{\beta}^{+\infty} dt \int_{a}^{+\infty} |f(t, x)|dx, \tag{25.2.44}$$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} dx \int_{\beta}^{+\infty} |f(t, x)|dt \tag{25.2.45}$$

є збіжним, то тоді справджується рівність

$$\int_{a}^{+\infty} dx \int_{\beta}^{+\infty} f(t, x)dt = \int_{\beta}^{+\infty} dt \int_{a}^{+\infty} f(t, x)dx, \tag{25.2.46}$$

в якій обидва інтеграли є збіжними.

Доведення. Перші чотири умови теореми, накладені на функцію f, відносно її змінних t чи x є цілком однакові, відтак не має значення, який із двох інтегралів (25.2.44) чи (25.2.45) збігається. Нехай, наприклад, є збіжним інтеграл (25.2.44), що зумовлює збіжність інтеграла

$$I_1 = \int_\beta^{+\infty} dt \int_a^{+\infty} f(t,x)dx. \tag{25.2.47}$$

Доведемо, що тоді збігається й другий інтеграл з рівності (25.2.45)

$$I_2 = \int_a^{+\infty} dx \int_\beta^{+\infty} f(t,x)dt \tag{25.2.48}$$

та є справедливою сама ця рівність.

Відповідно до означення невласного інтеграла збіжність останнього інтеграла (25.2.48) рівносильна існуванню границі

$$I_2 = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b dx \int_\beta^{+\infty} f(t,x)dt. \tag{25.2.49}$$

Умови 1), 2) і т**еорема 25.2.4** гарантують можливість зміни порядку інтегрування в інтегралі, що стоїть під знаком границі (25.2.49):

$$I_2 = \lim_{b\to+\infty} \int_\beta^{+\infty} dt \int_a^b f(t,x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_\beta^{+\infty} \Phi(t,b)dt, \tag{25.2.50}$$

де позначено $\Phi(t,b) := \int_a^b f(t,x)dx$, $(t,b) \in \Pi' = [\beta,+\infty) \times [a,+\infty)$.

На декартовому добутку Π' справджується нерівність

$$|\Phi(t,b)| \le \varphi(t) := \int_a^{+\infty} |f(t,x)|dx,$$

до того ж умова 4) гарантує збіжність інтеграла

$$\int_\beta^{+\infty} \varphi(t)dt < +\infty.$$

Тож за ознакою Вейєрштрасса матимемо рівномірну збіжність на проміжку $[a,+\infty)$ невласного інтеграла

$$g(b) := \int_\beta^{+\infty} \Phi(t,b)dt,$$

залежного від параметра b.

У свою чергу, за умовою 3) для довільного числа $\gamma \in (\beta, +\infty)$ невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(t,x)dx$ збігається рівномірно на відрізку $[\beta, \gamma]$, що зумовлює існування границі

$$\sup_{t\in[\beta,\gamma]} \left|\Phi(t,b) - \int_a^{+\infty} f(t,x)dx\right| = \sup_{t\in[\beta,\gamma]} \left|\int_b^{+\infty} f(t,x)dx\right| \longrightarrow 0, \quad b \to +\infty.$$

Тоді за **наслідком 25.2.2** з теореми про перехід до границі у невласному інтегралі, залежному від параметра, випливає, що існує скінченна границя

$$\lim_{b\longrightarrow+\infty} \int_\beta^{+\infty} \Phi(t,b)dt = \int_\beta^{+\infty} \lim_{b\longrightarrow+\infty} \Phi(t,b)dt = \int_\beta^{+\infty} dt \int_a^{+\infty} f(t,x)dx = I_1,$$

яка разом з границею (25.2.50) спричиняє рівність (25.2.46).

Теорему доведено.

Наостанок доведемо ще дві зручні ознаки рівномірної збіжності невласних інтегралів, залежних від параметра, на кшталт ознак Діріхле й Абеля рівномірної збіжності функціональних рядів. Для цього згадаємо другу теорему про середнє для визначених інтегралів, яка до того пропонувалася у вигляді завдання самостійної роботи.

Теорема 25.2.8 (***друга теорема про середнє для визначених інтегралів***). *Нехай на відрізку $[a;b] \subset R$ означені монотонна функція f та інтегрована на ньому функція g. Тоді на цьому відрізку знайдеться така точка $x \in [a;b]$, за якої справджується рівність*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^x g(t)dt + f(b)\int_x^b g(t)dt. \qquad (25.2.51)$$

Доведення. 1. Розглянемо спочатку випадок, коли монотонна функція f набуває значення тільки одного знака і не є сталою.

Нехай, наприклад, функція f є монотонно неспадною на відрізку $[a;b] \subset R$ і набуває на ньому лише невід'ємних значень. Побудуємо довільне розбиття відрізка $[a;b]$

$$\lambda = \{x_i \in [a;b], i = \overline{0,n}: \ \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\},$$

і подамо інтеграл

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

у вигляді суми

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(x_i)\big)g(x)dx = \sigma_1 + \sigma_2 \,. \tag{25.2.52}$$

Позаяк функція g є інтегрованою на відрізку $[a;b]$, то вона є на ньому обмеженою:

$$\exists c > 0: \quad \sup_{x\in[a;b]} |g(x)| \le c.$$

Відтак для другого доданка правої частини суми (25.2.52) буде чинною оцінка

$$|\sigma_2| \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)||g(x)|dx \le c \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i, \tag{25.2.53}$$

в якій $\omega_i = \sup\limits_{x,y\,\in[x_{i-1};x_i]} |f(x) - f(y)|$ – це коливання функції f на відрізку $[x_{i-1};x_i]$ довжини $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Як відомо, монотонна функція на відрізку є інтегрованою на ньому, тож послідовність сум (25.2.53) збігається до значення нуль, коли діаметр $|\lambda|$ розбиття λ прямує до нуля:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \to 0, \quad |\lambda| \to +0.$$

Звідси маємо

$$I = \lim_{|\lambda| \to +0} \sigma_1 = \lim_{|\lambda| \to +0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx.$$

Розглянемо функції

$$h(x) := \int_x^b g(t)dt, \quad x \in [a;b],$$

$$w(x) := f(b)h(x) = f(b) \int_x^b g(t)dt, \quad x \in [a;b].$$

Оскільки функція g є інтегрованою на відрізку $[a;b]$, то утворені функції h і w будуть неперервними на ньому, а отже, набувають на цьому відрізку свого найменшого та найбільшого значень:

$$m := \min_{x \in [a;b]} h(x), \quad M := \max_{x \in [a;b]} h(x),$$

$$c_1 := \min_{x \in [a;b]} w(x) = mf(b), \quad c_2 := \max_{x \in [a;b]} w(x) = M f(b).$$

Перепишемо суму σ_1 у термінах функції h:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\big(g(x_{i-1}) - g(x_i)\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) + g(a)f(a).$$

Позаяк функція f є неспадною і невід'ємною на заданому відрізку, то в останній сумі всі множники $f(x_i) - f(x_{i-1})$ і $f(a)$ є невід'ємними, через те за будь-якого розбиття λ для суми σ_1 справедливі оцінки

$$\sigma_1 \le \sum_{i=1}^{n} M\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) + Mf(a) = Mf(b) = c_2;$$

$$\sigma_1 \ge \sum_{i=1}^{n} m\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) + mf(a) = mf(b) = c_1,$$

тож значення інтеграла I лежить у відрізку $[c_1, c_2] \subset R$. Між тим, неперервна функція w набуває всіх проміжних значень на тому самому відрізку $[c_1, c_2]$, а отже, знайдеться така точка $x \in [a; b]$, за якої $w(x) = I$, тобто

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_x^b g(t)dt. \qquad (25.2.54)$$

Так само можна довести, що у разі невід'ємної незростаючої на відрізку $[a; b]$ функції f та інтегрованої на ньому функції g знайдеться така точка $x \in [a; b]$, за якої

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^x g(t)dt. \qquad (25.2.55)$$

Якщо ж функція f є монотонно неспадною на відрізку $[a; b] \subset R$ і набуває на ньому лише недодатних значень, то тоді $(-f)$ є монотонно незростаючою невід'ємною функцією на $[a; b]$, через те і за таких умов справджується рівність (25.2.55).

Так само, якщо функція f є монотонно незростаючою на відрізку $[a; b]$ та набуває на ньому лише недодатних значень, то тоді $(-f)$ є монотонно неспадною невід'ємною функцією на $[a; b]$, а отже, ці функції задовольняють попередню рівність (25.2.54).

2. Розглянемо тепер випадок, коли функція f є монотонною, але на кінцях відрізка $[a; b]$ набуває числових значень різних знаків, а функція g, як і раніше, є інтегрованою. Нехай, скажімо, функція f є монотонно неспадною на заданому відрізку $[a; b] \subset R$ та $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Тоді означимо функцію

$$\varphi(x) := f(x) - f(b), \quad x \in [a; b],$$

яка є монотонно неспадною на відрізку $[a; b]$ і набуває на ньому лише від'ємних значень, а відтак задовольняє рівність (25.2.55):

$$\int_a^b \varphi(x)g(x)dx = \varphi(a)\int_a^x g(t)dt \iff$$

$$\iff \int_a^b \big(f(x) - f(b)\big)g(x)dx = \big(f(a) - f(b)\big)\int_a^x g(t)dt \iff$$

$$\iff \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^x g(x)dx + f(b)\left(\int_a^b g(x)dx - \int_a^x g(x)dx\right) \iff$$

$$\iff \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^x g(t)dt + f(b)\int_x^b g(t)dt.$$

А це означає, що у такому разі справджується рівність (25.2.51).

Подібним чином рівність (25.2.54) зумовлює ту ж саму рівність (25.2.51), якщо функція f є монотонно незростаючою і набуває на кінцях заданого відрізка $[a; b]$ значень різних знаків.

3. Якщо монотонна функція f є сталою величиною на вказаному відрізку, то рівність (25.2.51) є рівносильною властивості адитивності визначеного інтеграла.

4. Якщо монотонна функція f не є сталою величиною на відрізку $[a; b]$, то у такому разі знайдеться така стала $c \in R$, за якої монотонна функція $f + \text{c}$ набуває на кінцях цього відрізка числових значень різних знаків, а отже, задовольняє рівність (25.2.51):

$$\int_a^b (f(x) + \text{c})g(x)dx = (f(a) + \text{c})\int_a^x g(t)dt + (f(b) + \text{c})\int_x^b g(t)dt \iff$$

$$\iff \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^x g(t)dt + f(b)\int_x^b g(t)dt +$$

$$+\text{c}\left(\int_a^x g(t)dt + \int_x^b g(t)dt - \int_a^b g(x)dx\right) \iff$$

$$\iff \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^x g(t)dt + f(b)\int_x^b g(t)dt.$$

Отже, в усіх випадках, зазначених в умовах теореми, справджується рівність (25.2.51).

Теорему доведено.

Теорема 25.2.9 (***ознака Діріхле рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметра***). *Нехай на декартовому добутку* $[\alpha, \beta) \times A$ *означені функції* $f = f(t, x)$ *і* $g = g(t, x)$ *такі, що*:

1) *за кожного значення параметра* $x \in A$ *функція* $h_x(t) := f(t, x)$ *є монотонною*;

2) *набір функцій* $h_x(t)$, $x \in A$, *рівномірно збігається до нуля, коли* t *прямує до особливої точки* β:

$$\sup_{x \in A} |h_x(t)| = \sup_{x \in A} |f(t, x)| \to 0, \quad t \to \beta - 0; \qquad (25.2.56)$$

3) *за будь-яких чисел* $\gamma \in (\alpha, \beta)$ *і* $x \in A$ *існує та є рівнообмеженим інтеграл* $\int_{\alpha}^{\gamma} g(t, x)dt$:

$$\exists c > 0: \sup_{x \in A, \gamma \in (\alpha, \beta)} \left|\int_{\alpha}^{\gamma} g(t, x)dt\right| \le c. \qquad (25.2.57)$$

Тоді на множині $A \subset R$ *є рівномірно збіжним невласний інтеграл*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t, x)g(t, x)dt. \qquad (25.2.58)$$

Доведення. Покажемо, що інтеграл (25.2.58) задовольняє умови критерію Коші рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметра.

Нехай $\alpha < \gamma' < \gamma'' < \beta$. За попередньою **теоремою 25.2.8** для довільних чисел $\gamma', \gamma'' \in (\alpha, \beta)$ та $x \in A$ знайдеться така точка $\tau = \tau(\gamma', \gamma'', x) \in [\gamma', \gamma'']$, що є чинною рівність

$$\int_{\gamma'}^{\gamma''} f(t,x)g(t,x)dt = f(\gamma',x)\int_{\gamma'}^{\tau} g(t,x)dt + f(\gamma'',x)\int_{\tau}^{\gamma''} g(t,x)dt. \tag{25.2.59}$$

Третя умова теореми зумовлює нерівність

$$\sup_{(\gamma',x)\in[\alpha,\,\beta)\times A} \left|\int_{\gamma'}^{\tau} g(t,x)dt\right| \le \sup_{(\gamma',x)\in[\alpha,\,\beta)\times A} \left|\int_{\alpha}^{\tau} g(t,x)dt - \int_{\alpha}^{\gamma'} g(t,x)dt\right| \le$$

$$\le \sup_{(\gamma',x)\in[\alpha,\,\beta)\times A} \left|\int_{\alpha}^{\tau} g(t,x)dt\right| + \sup_{(\gamma',x)\in[\alpha,\,\beta)\times A} \left|\int_{\alpha}^{\gamma'} g(t,x)dt\right| \le 2\text{c}. \tag{25.2.60}$$

Так само доводять нерівність

$$\sup_{(\gamma'',x)\in[\alpha,\,\beta)\times A} \left|\int_{\tau}^{\gamma''} g(t,x)dt\right| \le 2\text{c}. \tag{25.2.61}$$

Виберемо довільне як завгодно мале число $\varepsilon > 0$. Тоді за другою умовою теореми знайдеться таке число $\gamma_\varepsilon \in (\alpha,\beta)$**,** за якого для будь-яких значень змінної $t \in (\gamma_\varepsilon,\beta)$ справджується нерівність

$$\sup_{x\in A} |f(t,x)| < \frac{\varepsilon}{4\text{c}}. \tag{25.2.62}$$

Тож для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\gamma_\varepsilon \in (\alpha,\beta)$, за якого для будь-яких значень $\gamma',\gamma'' \in (\gamma_\varepsilon,\beta)$ справджується нерівність

$$\sup_{x\in A} \left|\int_{\gamma'}^{\gamma''} f(t,x)g(t,x)dt\right| \le$$

$$\le \sup_{x\in A} |f(\gamma',x)| \sup_{(\gamma',x)\in[\alpha,\,\beta)\times A} \left|\int_{\gamma'}^{\tau} g(t,x)dt\right| +$$

$$+ \sup_{x\in A} |f(\gamma'',x)| \sup_{(\gamma'',x)\in[\alpha,\,\beta)\times A} \left|\int_{\tau}^{\gamma''} g(t,x)dt\right| \le \frac{\varepsilon}{4\text{c}}\cdot 2\text{c} + \frac{\varepsilon}{4\text{c}}\cdot 2\text{c} = \varepsilon. \tag{25.2.63}$$

Отже, за критерієм Коші інтеграл (25.2.58) рівномірно збігається на множині $A \subset R$.

Теорему доведено.

Теорема 25.2.10 (***ознака Абеля рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметра***). *Нехай на декартовому добутку* $[\alpha, \beta) \times A$ *означені функції* $f = f(t, x)$ *і* $g = g(t, x)$ *такі, що*:

1) *за кожного значення параметра* $x \in A$ *функція* $h_x(t) := f(t, x)$ *є монотонною*;

2) *набір функцій* $h_x = h_x(t)$ *є рівномірно обмеженим на множині* A:

$$\exists c > 0: \sup_{(t,x)\in[\alpha,\, \beta)\times A} |h_x(t)| = \sup_{(t,x)\in[\alpha,\, \beta)\times A} |f(t, x)| \le c; \qquad (25.2.64)$$

3) *за будь-яких значень параметра* $x \in A$ *існує та є рівномірно збіжним на множині* $A \subset R$ *невласний інтеграл*

$$\int_\alpha^\beta g(t, x)dt. \qquad (25.2.65)$$

Тоді на множині A є рівномірно збіжним невласний інтеграл (25.2.58).

Доведення. За третьою умовою теореми для довільного додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\gamma_\varepsilon \in (\alpha, \beta)$**,** за якого для будь-яких значень $\gamma', \gamma'' \in (\gamma_\varepsilon, \beta)$ справджується нерівність

$$\sup_{x\in A} \left|\int_{\gamma'}^{\gamma''} g(t, x)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2c}, \qquad (25.2.66)$$

в якій число c – це стала з умови (25.2.64). У такому разі та ж сама рівність (25.2.59) з попередньої теореми спричиняє нерівність

$$\sup_{x\in A} \left|\int_{\gamma'}^{\gamma''} f(t, x)g(t, x)dt\right| \le$$

$$\le \sup_{x\in A} |f(\gamma', x)| \sup_{(\gamma',x)\in[\alpha,\, \beta)\times A} \left|\int_{\gamma'}^{\tau} g(t, x)dt\right| +$$

$$+ \sup_{x\in A} |f(\gamma'', x)| \sup_{(\gamma'',x)\in[\alpha,\, \beta)\times A} \left|\int_{\tau}^{\gamma''} g(t, x)dt\right| \le c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon, \qquad (25.2.67)$$

яка, згідно з критерієм Коші свідчить про рівномірну збіжність на множині $A \subset R$ невласного інтеграла (25.2.58).

Теорему доведено.

Приклад* 25.2.1.** Обчислити ***інтеграл Ойлера−Пуассона

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx. \qquad (25.2.68)$$

Розв'язання. Виконавши за довільного числа $t > 0$ у невласному інтегралі (25.2.68) заміну змінної $x \to tx$, матимемо:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\, tdx. \qquad (25.2.69)$$

Помножимо рівність (25.2.69) на множник e^{-t^2}, після чого проінтегруємо отриману рівність за змінною t у межах від 0 до $+\infty$:

$$I \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\, tdx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad I^2 = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^2(x^2+1)}\, tdx. \qquad (25.2.70)$$

Доведемо, що повторний інтеграл (25.2.70) допускає зміну порядку інтегрування.

По-перше, підінтегральна функція $f(t,x) := te^{-t^2(x^2+1)}$ є неперервною на декартовому добутку $\Pi = [0,+\infty) \times [0,+\infty)$.

По-друге, згідно з ознакою Вейєрштрасса для довільного числа $b \in (0,+\infty)$ невласний інтеграл $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ збігається рівномірно на відрізку $[0;b]$, бо справджується нерівність

$$\sup_{x\in[0;b]} f(t,x) = te^{-t^2(x^2+1)} \le \varphi_1(t) := te^{-t^2}, \quad t \in [0,+\infty),$$

і є збіжним невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \varphi_1(t)dt = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = \frac{1}{2} < +\infty.$$

По-третє, згідно з ознакою Вейєрштрасса для довільного числа $\gamma \in (0,+\infty)$ невласний інтеграл $\int_0^{+\infty} f(t,x)dx$ збігається рівномірно на відрізку $[0;\gamma]$, бо справджується нерівність

$$\sup_{t\in[0;\,\gamma]} f(t,x) = te^{-t^2(x^2+1)} < \varphi_2(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad t \in [0,+\infty),$$

і є збіжним невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \varphi_2(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} < +\infty.$$

По-четверте, за будь-яких $x \in [0,+\infty)$ та $t \in [0,+\infty)$ є збіжними інтеграли

$$\int_0^{+\infty}|f(t,x)|dt = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt, \quad \int_0^{+\infty}|f(t,x)|dx = \int_0^{+\infty} f(t,x)dx.$$

Наостанок зауважимо, що збігається повторний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(t,x)dt = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} te^{-t^2(x^2+1)}dt =$$

$$= -\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^2(x^2+1)} \frac{d\left(t^2(x^2+1)\right)}{2(x^2+1)} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2(x^2+1)} = \frac{\pi}{4}. \quad (25.2.71)$$

Тож виконані всі умови **теореми 25.2.7**, а отже, повторний інтеграл (25.2.70) є збіжним і дорівнює інтегралу (25.2.71). Таким чином,

$$I^2 = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

***Відповідь*:** $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$ (25.2.72)

Наслідок 25.2.3. *Справджуються рівності*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}; \qquad (25.2.73)$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha > 0; \qquad (25.2.74)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1. \qquad (25.2.75)$$

Завдання для самостійної роботи **25.2.1.** *Довести правильність рівностей* (25.2.73)–(25.2.75).

У наступних прикладах будуть застосовані стандартні інтеграли

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos\beta t\,dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \alpha > 0;$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin\beta t\,dt = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \alpha > 0.$$

Приклад **25.2.2.** Обчислити ***інтеграл Діріхле***

$$I_\alpha = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\alpha t}{t}\,dt, \quad \alpha \in R. \qquad (25.2.76)$$

Розв'язання. Якщо $\alpha = 0$, то $I_\alpha = 0$. Нехай $\alpha > 0$, тоді невласний інтеграл (25.2.76) є збіжним за ознакою Діріхле для невласних інтегралів. Справді, множник $\frac{1}{t}$ монотонно спадає на проміжку $(0, +\infty)$, а інтеграли від другого множника $\sin\alpha t$ по всім відрізках $[0, \gamma]$ є обмеженими:

$$\left|\int_{0}^{\gamma} \sin\alpha t\,dt\right| = \left|\frac{1-\cos\alpha\gamma}{\alpha}\right| \le \frac{2}{\alpha}, \quad \gamma \in (0, +\infty). \qquad (25.2.77)$$

Утворимо допоміжний інтеграл

$$g_x(\alpha) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin \alpha t}{t} dt, \quad x > 0. \tag{25.2.78}$$

Так само за ознакою Діріхле легко довести, що за будь-якого фіксованого $x > 0$ невласний інтеграл (25.2.78) збігається. Більше того, невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos \alpha t \, dt, \tag{25.2.79}$$

отриманий формальним диференціюванням за параметром α інтеграла (25.2.77), збігається рівномірно за цим параметром на проміжку $[0, +\infty)$. Справді, маємо

$$\sup_{\alpha \in [0,+\infty)} |e^{-tx} \cos \alpha t| \le \varphi(t) := e^{-tx},$$

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \, dt = \frac{1}{x} < +\infty,$$

тож за ознакою Вейєрштрасса невласний інтеграл, залежний від параметра α, збігається рівномірно.

У такому разі за **теоремою 25.2.5** про диференціювання невласного інтеграла, залежного від параметра, справджується формула Лейбніца:

$$\frac{d}{d\alpha} g_x(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(e^{-tx} \frac{\sin \alpha t}{t} \right) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos \alpha t \, dt = \frac{x}{x^2 + \alpha^2}, \quad \alpha \in [0, +\infty), \tag{25.2.80}$$

до того ж

$$g_x(0) = 0, \quad x > 0. \tag{25.2.81}$$

Розв'язком задачі Коші (25.2.80)–(25.2.81) за кожного фіксованого значення $x > 0$ є функція

$$g_x(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{x}{x^2 + \tau^2} d\tau = arctg \frac{\alpha}{x}, \quad \alpha \in [0, +\infty), \; x > 0.$$

Отже,

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin \alpha t}{t}dt = arctg\frac{\alpha}{x}, \quad \alpha \in [0,+\infty), \ \ x > 0. \qquad (25.2.82)$$

Зрештою, за кожного фіксованого значення $\alpha > 0$ розглянемо функцію

$$w_\alpha(x) := \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin \alpha t}{t}dt, \quad x \in [0;1]. \qquad (25.2.83)$$

Підінтегральну функцію виразу (25.2.82)

$$f_\alpha(t,x) := e^{-tx}\frac{\sin \alpha t}{t}, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times [0;1],$$

складає добуток неперервної на проміжку $[0,+\infty)$ функції $\frac{\sin \alpha t}{t}$ на функцію e^{-tx}, що є неперервною на множині $\Pi = [0,+\infty) \times [0;1]$, тож за кожного значення $\alpha > 0$ функція f_α теж є неперервною на декартовому добутку П. Окрім того, за будь-якого $x \in [0;1]$ множник $\frac{e^{-tx}}{t}$ є монотонно спадною функцією на проміжку $[0,+\infty)$ й

$$\sup_{x\in[0;1]} \left|\frac{e^{-tx}}{t}\right| = \frac{1}{t} \to 0, \quad t \to +\infty,$$

а також справджується нерівність (25.2.77). Тож за ознакою Діріхле (**теорема 25.2.9**) невласний інтеграл (25.2.83) рівномірно збігається за параметром x на відрізку $[0;1]$. Тоді за **теоремою 25.2.3** про неперервність невласного інтеграла, залежного від параметра, вказана функція w_α є неперервною на відрізку $[0;1]$. Отже, існує її границя за x, що прямує справа до точки нуль, а відтак, з одного боку,

$$\lim_{x\to+0} w_\alpha(x) = w_\alpha(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin \alpha t}{t}dt = I_\alpha, \ \ \alpha > 0, \qquad (25.2.84)$$

із другого боку,

$$\lim_{x\to+0} w_\alpha(x) = \lim_{x\to+0}\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin \alpha t}{t}dt = \lim_{x\to+0} arctg\frac{\alpha}{x} = \frac{\pi}{2}, \ \ \alpha > 0. \ (25.2.85)$$

Порівнявши ці дві границі (25.2.84)−(25.2.85), матимемо:

$$I_\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha > 0.$$

Позаяк шуканий інтеграл (25.2.76) є непарною функцією за параметром $\alpha \in R$, то

$$I_{-\alpha} = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha > 0.$$

Остаточно маємо:

$$I_\alpha = \frac{\pi}{2} sign\alpha, \ \ \alpha \in R.$$

***Відповідь*:** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \frac{\pi}{2} sign\alpha, \ \ \alpha \in R.$ (25.2.86)

Приклад* 25.2.3.** Обчислити ***інтеграли Френеля

$$I_s = \int_0^{+\infty} \sin \alpha^2 \, d\alpha, \tag{25.2.87}$$

$$I_c = \int_0^{+\infty} \cos \alpha^2 \, d\alpha. \tag{25.2.88}$$

Розв'язання. Запровадимо в інтегралі (25.2.87) змінну $t = \alpha^2$:

$$I_s = \int_0^{+\infty} \sin \alpha^2 \, d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt. \tag{25.2.89}$$

За зразком попереднього ***прикладу* 25.2.3** введемо у вираз (25.2.89) інтегруючий множник $e^{-t\beta^2}$, утворивши невласний інтеграл, залежний від параметра $\beta \in [0; 1]$,

$$w(\beta) := \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t\beta^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt. \tag{25.2.90}$$

Повторюючи міркування вказаного прикладу, застосовані для функції (25.2.83), можна довести неперервність функції $w = w(\beta)$ на вибраному відрізку $[0; 1]$, тож

$$I_s = \lim_{\beta\to+0} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t\beta^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \lim_{\beta\to+0} w(\beta) = w(0). \qquad (25.2.91)$$

Згідно з формулою (25.2.74) множник $\frac{1}{\sqrt{t}}$ в останньому інтегралі можна записати у формі

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx, \quad t > 0,$$

після чого інтеграл (25.2.90) набуде вигляду

$$w(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t(x^2+\beta^2)} \sin t\,dx. \qquad (25.2.92)$$

За зразком ***прикладу* 25.2.1** можна довести, що інтеграл (25.2.92) допускає зміну порядку інтегрування, а отже,

$$w(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t(x^2+\beta^2)} \sin t\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(x^2+\beta^2)^2}. \qquad (25.2.93)$$

Знову таки, за ознакою Вейєрштрасса (**теорема 25.2.2**) невласний інтеграл (25.2.93) збігається на відрізку $[0; 1]$ рівномірно, тож у ньому можна перейти до границі під знаком інтеграла:

$$w(0) = \lim_{\beta\to+0} w(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \lim_{\beta\to+0}\frac{dx}{1+(x^2+\beta^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}.$$

Залишається лише обчислити невласний інтеграл

$$I := \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}. \qquad (25.2.94)$$

Зазначимо, що його можна переписати у вигляді

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^4}\frac{dx}{x^2} = -\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^4} d\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}. \qquad (25.2.95)$$

У такому разі за формулами (25.2.94)−(25.2.95) матимемо

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} + \int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} .$$

Отже,

$$I_s = w(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

Так само обчислюють

$$I_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

Відповідь: $$I_s = \int_0^{+\infty} \sin\alpha^2 \, d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} ; \qquad (25.2.96)$$

$$I_c = \int_0^{+\infty} \cos\alpha^2 \, d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} . \qquad (25.2.97)$$

Завдання для самостійної роботи **25.2.2.** *Довести, що функція* (25.2.90) *є неперервною за змінною β на будь-якому відрізку* $[0; b]$, $b > 0$.

Завдання для самостійної роботи **25.2.3.** *Довести, що невласний повторний інтеграл* (25.2.92) *допускає зміну порядку інтегрування.*

Завдання для самостійної роботи **25.2.4.** *Довести, що невласний інтеграл* (25.2.93), *залежний від параметра β, збігається рівномірно на будь-якому відрізку* $[0; b]$, $b > 0$.

Приклад **25.2.4.** Обчислити ***інтеграл Лапласа***

$$I_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2} \cos xt \, dt, \quad x \in R, \; \alpha > 0. \qquad (25.2.98)$$

Розв'язання. За будь-якого фіксованого значення $\alpha > 0$ функції

$$f_\alpha(t,x) := e^{-\alpha t^2}\cos xt,\;\; \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(t,x) = xe^{-\alpha t^2}\sin xt \qquad (25.2.99)$$

є неперервними на множині $[0,+\infty) \times R$. Окрім того, невласні інтеграли

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\cos xt\, dt \quad \text{і} \quad \int_0^{+\infty} te^{-\alpha t^2}\sin xt\, dt \qquad (25.2.100)$$

за ознакою Вейєрштрасса (**теорема 25.2.2**) збігаються рівномірно за параметром x на всій числовій осі R. Тож за **теоремою 25.2.5** про диференціювання невласного інтеграла, залежного від параметра, маємо:

$$\frac{d}{dx} I_\alpha(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-\alpha t^2}\sin xt\, dt, \quad x \in R. \qquad (25.2.101)$$

Застосуємо до інтеграла (25.2.101) формулу інтегрування частинами:

$$\int_0^{+\infty} te^{-\alpha t^2}\sin xt\, dt = -\frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty} \sin xt\, d\left(e^{-\alpha t^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha t^2}\sin xt \,\Big|_0^{+\infty} + \frac{x}{2\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\cos xt\, dt = -0 + \frac{x}{2\alpha} I_\alpha(x), \quad x \in R.$$

За формулою (25.2.74) маємо значення функції I_α у точці $x = 0$:

$$I_\alpha(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Отже, неперервно-диференційована на множині R функція I_α задовольняє таку задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} I_\alpha(x) = -\frac{x}{2\alpha} I_\alpha(x); \\ I_\alpha(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}; \\ x \in R, \quad \alpha > 0, \end{cases} \qquad (25.2.102)$$

що має розв'язок $I_\alpha(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \;\; x \in R, \;\; \alpha > 0.$

Відповідь: $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\cos xt\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \;\; x \in R, \;\; \alpha > 0. \qquad (25.2.103)$

***Завдання для самостійної роботи* 25.2.5.** *Довести, що невласні інтеграли* (25.2.100), *залежні від параметра* $x \in R$, *збігаються рівномірно на всій числовій осі* R.

***Завдання для самостійної роботи* 25.2.6.** *Знайти розв'язок* $I_\alpha = I_\alpha(x)$ *задачі Коші* (25.2.102).

Приклад* 25.2.5.** Обчислити ***інтеграл Фруллані

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(\beta\, t) - f(\alpha\, t)}{t} dt, \quad \beta > \alpha > 0. \tag{25.2.104}$$

якщо монотонна на проміжку $[0, +\infty)$ функція f має на ньому неперервну похідну f' та існує скінчена границя

$$f(+\infty) := \lim_{t \to +\infty} f(\,t). \tag{25.2.105}$$

Розв'язання. Нехай, наприклад, функція f є незростаючою, тоді

$$\sup_{x \in [\alpha,\beta]} \left| \int_\gamma^{+\infty} f'\,(\,tx) dt \right| = \sup_{x \in [\alpha,\beta]} \left| \frac{f(+\infty) - f(x\,\gamma)}{x} \right| = \frac{f(\alpha\,\gamma) - f(+\infty)}{\alpha} \to 0, \;\; \gamma \to +\infty.$$

Отже, невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} f'\,(\,tx) dt, \tag{25.2.106}$$

залежний від параметра x, рівномірно збігається на відрізку $[\alpha, \beta]$, а відтак за **теоремою 25.2.4** справджується рівність

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\beta\, t) - f(\alpha\, t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} dt \int_\alpha^\beta f'\,(\,tx) dx = \int_\alpha^\beta dx \int_0^{+\infty} f'\,(\,tx) dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{f(+\infty) - f(0)}{x} dx = \big(f(+\infty) - f(0)\big) \ln\frac{\beta}{\alpha}\,.$$

***Відповідь*:** $\int_0^{+\infty} \frac{f(\beta\, t) - f(\alpha\, t)}{t} dt = \big(f(+\infty) - f(0)\big) \ln\frac{\beta}{\alpha}, \;\; \beta > \alpha > 0.$

(25.2.107)

***Завдання для самостійної роботи* 25.2.7.** *Довести рівномірну збіжність невласного інтеграла* (25.2.104), *якщо неперервно диференційована на проміжку* $[0,+\infty)$ *функція* f *монотонно не спадає на ньому та має скінченну границю* (25.2.105).

***Завдання для самоперевірки* 25.2.1.** Легко перевірити (зробіть це самостійно!), що невласний інтеграл

$$g(x)=\int_0^{+\infty} xe^{-xt}dt,\quad x\geq 0, \tag{25.2.108}$$

збігається за кожного значення параметра $x\geq 0$, а його підінтегральна функція, а саме $f(t,x)=xe^{xt}$, є неперервною на множині $[0,+\infty)\times[0;1]$. Чи буде неперервною на відрізку $[0;1]$ функція g, яка означена інтегральною рівністю (25.2.108)?

***Завдання для самоперевірки* 25.2.2.** Чи збігається невласний інтеграл (25.2.108), залежний від параметра $x\in[0;1]$, на відрізку зміни його параметра $[0;1]$?

***Завдання для самоперевірки* 25.2.3.** Чи збігається невласний інтеграл

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}dt,\quad x\in R, \tag{25.2.109}$$

залежний від параметра x, на множині R?

***Завдання для самоперевірки* 25.2.4.** Чи збігається невласний інтеграл

(25.2.109), залежний від параметра x, на множині $(-\infty; -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty)$ за довільного значення $\varepsilon > 0$?

***Завдання для самоперевірки* 25.2.5.** У якій точці функція g, що означена інтегральною рівністю (25.2.109), має розрив?

***Завдання для самоперевірки* 25.2.6.** Чи допустима в інтегралі

$$\int_0^1 dx \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} dt \qquad (25.2.110)$$

зміна порядку інтегруванні?

***Завдання для самоперевірки* 25.2.7.** Чи є функція g, що означена інтегральною рівністю

$$g(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+(x+t)^2} dt, \quad x \in R, \qquad (25.2.111)$$

неперервно диференційованою на множині R?

Відповіді на завдання для самоперевірки

25.2.1. Ні, функція g має розрив першого роду в точці $x = 0$.

25.2.2. Ні.

25.2.3. Ні.

25.2.4. Так.

25.2.5. У точці $x = 0$.

25.2.6. Ні.

25.2.7. Так.

Розділ 26. Інтеграли Ойлера

26.1. Гамма-функція: означення та основні властивості

Означення* 26.1.1. *Гамма-функцією, *означеною на проміжку* $(0,+\infty)$, *називають невласний інтеграл*

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^{1} t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt,\ \ x \in (0,+\infty).$$

(26.1.1)

Теорема 26.1.1 (*про найпростіші властивості гамма-функції*). *Гамма-функція є додатною неперервною опуклою донизу функцією на проміжку* $(0,+\infty)$, *яка має на ньому неперервні похідні будь-якого порядку, набуває значення один у точці* $x = 1$ *і задовольняє тотожність*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0, \qquad (26.1.2),$$

яку називають ***тотожністю Ойлера−Гауса*** *для гамма-функції.*

Доведення. Розглянемо інтеграл

$$I_n(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln^n t dt =$$

$$= \int_0^{1} t^{x-1}e^{-t}\, ln^n t dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln^n t\, dt, \quad n \in Z_+, \qquad (26.1.3)$$

отриманий формальним диференціюванням n разів за параметром x невласного інтеграла (26.1.1) і який має дві особливі точки 0 та $+\infty$.

На довільному відрізку $[a;b] \subset (0,+\infty)$ перший доданок у сумі невласних інтегралів (26.1.3) мажорується збіжним інтегралом

$$\int_0^{1} t^{a-1}\ln^n t dt < +\infty,$$

а другий доданок, завдяки нерівності $lnt < t$, – збіжним інтегралом

$$\int_1^{+\infty} t^{b+n-1} e^{-t}\, dt < +\infty.$$

Тож, за ознакою Вейєрштрасса, інтеграли I_n, $n \in Z_+$, рівномірно збігаються на будь-якому відрізку $[a; b] \subset (0, +\infty)$, причому всі підінтегральні функції

$$f_n(t) := t^{x-1} e^{-t} \ln^n t, \quad t \in [a; b],$$

є неперервними. Отже, кожен із інтегралів I_n, $n \in Z_+$, допускає диференціювання за параметром у будь-якій точці $x \in (0, +\infty)$, а відтак гамма-функція має неперервну похідну довільного порядку на проміжку її визначення $(0, +\infty)$:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln^n t dt, \quad x \in (0, +\infty). \qquad (26.1.4)$$

Підінтегральні функції f_0 та f_2 за всіх значень аргумента $t \in (0, +\infty)$ та фіксованих $x > 0$ набувають лише додатних числових значень, тож гамма-функція та її друга похідна є додатними функціями на проміжку $(0, +\infty)$, що обумовлює опуклість вниз гамма-функції на всьому зазначеному проміжку.

Зрозуміло, що

$$\Gamma(1) := \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1. \qquad (26.1.5)$$

Врешті-решт застосуємо до функції $\Gamma(x+1)$, $x > 0$, формулу інтегрування частинами:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x d(-e^{-t}) = -e^{-t} t^x \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt =$$

$$= x\, \Gamma(x), \ x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (26.1.2).$$

Теорему доведено.

Наслідок 26.1.1. *Гамма-функція* Γ *має на проміжку* $(0, +\infty)$ *єдиний локальний екстремум, який є найменшим її значенням, а також справедливі такі рівності*:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in Z_+, \tag{26.1.6}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n \in Z_+, \tag{26.1.7}$$

$$\lim_{x\to+0} \Gamma(x) = \lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty. \tag{26.1.8}$$

Доведення. Доведемо спочатку рівності (26.1.6)–(26.1.7). Застосовуючи тотожність Ойлера–Гауса n разів, матимемо

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-2) = \cdots = n(n-1)\cdot \ldots \cdot 1 \cdot \Gamma(n) = n!.$$

Щоб обчислити значення інтеграла

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt,$$

запровадимо у ньому заміну змінної $t^{\frac{1}{2}} = \tau$, яка зводить його до інтеграла Ойлера–Пуассона (25.2.72):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \tag{26.1.9}$$

Після цього за тотожністю Ойлера–Гауса отримаємо

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) = \cdots =$$

$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Отже, формули (26.1.6)–(26.1.7) є чинними.

Як було доведено (**теорема 26.1.1**), друга похідна Γ'' набуває на проміжку $(0, +\infty)$ лише додатних значень, що зумовлює строге зростання на ньому першої похідної Γ'. Між тим гамма-функція Γ набуває у точках $x = 1$ та $x = 2$ однакових значень:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1. \tag{26.1.10}$$

Тоді за теоремою Ролля знайдеться така точка $x_0 \in (0; 1)$, в якій $\Gamma'(x_0) = 0$, а це означає, що у цій точці похідна Γ' змінює свій знак з мінуса на плюс. Тож на проміжку $(0,\ x_0]$ гамма-функція Γ є строго спадною, а на проміжку $[x_0, +\infty)$ – строго зростаючою. Отже, у цій точці x_0 функція Γ має єдиний екстремум, а саме локальний мінімум $\Gamma(x_0) = \Gamma_{min}$, що є найменшим значенням цієї функції на проміжку $(0, +\infty)$:

$$\min_{x\in(0,+\infty)} \Gamma(x) = \Gamma(x_0) \in (0; 1). \tag{26.1.11}$$

Позаяк функція Γ строго зростає на проміжку $[x_0, +\infty)$ і є необмеженою на ньому (про це свідчить щойно доведена рівність (26.1.6)), тоді існує границя

$$\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty.$$

За тотожністю Ойлера–Гауса (26.1.2) маємо формулу

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x},\ x > 0, \tag{26.1.12}$$

яка разом із неперервністю функції Γ зумовлює еквівалентність

$$\Gamma(x) \sim \frac{\Gamma(x+1)}{x},\quad x \to +0, \tag{26.1.13}$$

і спричиняє границю

$$\lim_{x\to+0} \Gamma(x) = +\infty.$$

Твердження доведене.

Означення* 26.1.2.** *Додатну функцію* f *називають* ***логарифмічно опуклою вниз *на проміжку* $(a,b) \subset R$, *якщо такою на ньому є функція* lnf.

***Завдання для самостійної роботи* 26.1.1.** *Довести, що добуток логарифмічно опуклих вниз функцій є логарифмічно опуклою вниз функцією.*

Теорема 26.1.2 (*про логарифмічну опуклість гамма-функції*). *Гамма-функція на проміжку* $(0,+\infty)$ *є логарифмічно опуклою вниз функцією.*

***Доведення*.** Із **теореми 26.1.1** та з нерівності Коші для невласних інтегралів випливає, що

$$\left(\Gamma'(x)\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t dt\right)^2 =$$

$$= \left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)\left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\ln t\right)dt\right)^2 <$$

$$< \int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)^2 dt \cdot \int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\ln t\right)^2 dt = \Gamma(x)\Gamma''(x), \quad x > 0,$$

тобто справджується нерівність

$$\Gamma(x)\Gamma''(x) - \left(\Gamma'(x)\right)^2 > 0, \quad x > 0, \tag{26.1.14}$$

яка, у свою чергу, спричиняє нерівність

$$(\ln\Gamma)'' = \frac{\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2}{\Gamma^2} > 0, \quad x > 0, \tag{26.1.15}$$

що зумовлює логарифмічну опуклість донизу функції Г на вказаному проміжку $(0,+\infty)$.

***Теорему доведено*.**

Зауважимо, по-перше, що тотожність Ойлера–Гауса (26.1.2) дає змогу подати значення функції Г у будь-якій точці додатної числової осі $(0, +\infty)$ через її значення у точках проміжку $(0; 1]$:

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x\Gamma(x), \quad x \in (0; 1]. \quad (26.1.16)$$

По-друге, тотожність Ойлера–Гауса дозволяє доозначити гамма-функцію на всіх інтервалах $(-n, -n+1)$, $n \in N$, від'ємної півосі дійсних чисел $(-\infty, 0)$, а саме за правилом

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}, \quad x \in (-n, -n+1), \quad n \in N. \quad (26.1.17)$$

У такому разі функція Г стає означеною у всіх точках числової осі R окрім множини цілих недодатних чисел $Z_- := \{0, -1, -2, \dots, -n, \dots\}$. Таким способом означену функцію Г за правилами (26.1.16)–(26.1.17) називають ***узагальненою гамма-функцією***.

Теорема 26.1.3 (*теорема Артіна*). *Якщо функція f така, що*:

1) *є логарифмічно опуклою вниз на проміжку* $(0, +\infty)$;

2) *задовольняє на проміжку* $(0, +\infty)$ *тотожність Ойлера–Гауса* (26.1.2);

3) $f(1) = 1$,

то функція f є гамма-функцією:

$$\forall x \in (0, +\infty): \ f(x) = \Gamma(x). \quad (26.1.18)$$

Доведення. Якщо функція f задовольняє на проміжку $(0, +\infty)$ тотожність Ойлера–Гауса та умову $f(1) = 1$, то для будь-якого натурального числа $n \in N$ справедлива рівність

$$lnf(n) = (n-1)!\,, \quad n \in N. \quad (26.1.19)$$

Якщо ж функція f є логарифмічно опукла вниз на проміжку $(0,+\infty)$, то функція нахилу функції lnf, а саме

$$g_{x_0}(x)=\frac{\ln f(x)-\ln f(x_0)}{x-x_0},\quad x\in(0,+\infty)\backslash\{x_0\},$$

складена відносно довільної точки $x_0\in(0,+\infty)$, монотонно зростає на вказаному проміжку. Отже, для довільного натурального числа $x_0=n$ функція

$$g_n(x)=\frac{\ln f(x)-\ln f(n)}{x-n}=\frac{\ln f(x)-\ln\big((n-1)!\big)}{x-n},\quad x\in(0,+\infty)\backslash\{n\},\quad (26.1.20)$$

теж є зростаючою на своїй області визначення.

Та сама тотожність Ойлера–Гауса (26.1.2) вказує на достатність доведення рівності (26.1.18) лише для точок проміжку $(0;1]$. Тож нехай $x\in(0;1]$, тоді за будь-якого натурального числа $n\in N$ справджуються нерівності

$$n-1<x+n\leq n+1,$$

які обумовлюють нерівності

$$g_n(n-1)<g_n(x+n)\leq g_n(n+1)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\ln\big((n-2)!\big)-\ln\big((n-1)!\big)}{(n-1)-n}<\frac{\ln f(x+n)-\ln\big((n-1)!\big)}{(x+n)-n}\leq\frac{\ln(n!)-\ln\big((n-1)!\big)}{(n+1)-n}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(n-1)<\frac{\ln f(x+n)-\ln\big((n-1)!\big)}{x}\leq\ln n\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (n-1)^x(n-1)!<f(x+n)\leq n^x(n-1)!\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (n-1)^x(n-1)!<x(x+1)\ldots(x+n-1)f(x)\leq n^x(n-1)!\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}<f(x)\leq\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\cdot\frac{(n-1)^x}{n^x}\cdot\frac{x+n}{n}<f(x)\leq\frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\cdot\frac{x+n}{n}\ .\quad (26.1.21)$$

У свою чергу, останні з нерівностей (26.1.21) спричиняють нерівності

$$\frac{n}{x+n}f(x) \le \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} < \frac{(n-1)^x}{n^x} \cdot \frac{n}{x+n}f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n}{x+n}f(x) \le \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} < f(x). \tag{26.1.22}$$

Якщо $n \to +\infty$, то вирази, що стоять у лівій та правій частинах нерівності (26.1.22), прямують до значення $f(x)$, через те існує границя

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = f(x), \quad x \in (0;1]. \tag{26.1.23}$$

Отже, якщо функція задовольняє умови 1)$-$3), то вона однозначно визначається на проміжку $(0;1]$ границею (26.1.23). Позаяк гамма-функція Γ теж задовольняє умови 1)$-$3), то її значення у кожній точці $x \in (0;1]$ такі самі, які має функція f:

$$\forall x \in (0;1]:\ f(x) = \Gamma(x),$$

звідки випливає твердження (26.1.18).

Теорему доведено.

Теорема 26.1.4 (***про формули Ойлера і Вейєрштрасса для гамма-функції***)**.** *На всій області визначення* $R\backslash Z_-$ *узагальненої гамма-функції є справедливими* ***формула Ойлера***

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}, \quad x \in R\backslash Z_-, \tag{26.1.24}$$

та ***формула Вейєрштрасса***

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}, \quad x \in R\backslash Z_-, \tag{26.1.25}$$

в якій число γ *– це стала Ойлера*:

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right). \qquad (26.1.26)$$

Доведення. Насамперед зауважимо, що на всій множині $R\backslash Z_-$ гамма-функція Г задовольняє функціональне рівняння (тотожність Ойлера−Гауса)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ \ x \in R\backslash Z_- . \qquad (26.1.27)$$

По-друге, будь-яка функція, що задовольняє умову (26.1.27), повністю і однозначно визначається на множині $R\backslash Z_-$ своїми значеннями на проміжку $(0; 1]$. Тобто якщо дві функції набувають однакових значень у кожній точці проміжку $(0; 1]$, то вони набувають однакових значень у всіх точках вказаної множини $R\backslash Z_-$.

За кожного значення параметра $x \in R\backslash Z_-$ складемо числову послідовність

$$\Gamma_n(x) := \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)},\ \ \ n \in N, \qquad (26.1.28)$$

яка, як можна помітити, задовольняє співвідношення

$$\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x)\frac{n}{x+n+1},\ \ \ n \in N. \qquad (26.1.29)$$

Із цього випливає, що, за $n \to +\infty$, границя послідовності $\{\Gamma_n(x): n \in N\}$ існує тоді й лише тоді, коли існує границя послідовності $\{\Gamma_n(x+1): n \in N\}$, і до того ж, якщо границя першої послідовності у точці $x \in R\backslash Z_-$ дорівнює числу $f(x)$, себто

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\Gamma_n(x),\ \ \ x \in R\backslash Z_- , \qquad (26.1.30)$$

то справедливе таке співвідношення границь:

$$f(x+1) = xf(x),\ \ \ x \in R\backslash Z_- , \qquad (26.1.31)$$

яке є рівносильним функціональному рівнянню (26.1.27).

Оскільки, як було доведено у **теоремі 26.1.3**, на проміжку $(0;1]$ границя (26.1.30) існує, а саме, послідовність $\{\Gamma_n(x): n \in N\}$ за кожного фіксованого значення $x \in (0;1]$ збігається до величини $\Gamma(x)$, то зі щойно наведених міркувань випливає, що і за всіх інших значень параметра $x \in R\backslash Z_-$ також існує границя (26.1.30) та набуває значення $f(x) = \Gamma(x)$. Отже, формулу Ойлера (26.1.24) доведено.

Зрештою, перепишемо послідовність (26.1.28) в іншому вигляді:

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{n^x}{\left(\frac{x}{1}+1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{x}{n}+1\right)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{e^{x\ln n}}{\left(\frac{x}{1}+1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{x}{n}+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\frac{e^{x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}}{\left(\frac{x}{1}+1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{x}{n}+1\right)} = \frac{1}{x}\cdot e^{-x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}},\ n \in N.$$

За щойно доведеним, за кожного фіксованого значення $x \in R\backslash Z_-$ існує границя

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\Gamma_n(x) = \frac{1}{x}\lim_{n\to+\infty}e^{-x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)}\cdot\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}} = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}.$$

Теорему доведено.

Теорема 26.1.5 (***про формулу Лежандра подвоєння аргумента***)**.** *На всьому проміжку визначення* $(0,+\infty)$ *гамма-функції є справедливою* ***формула Лежандра***

$$2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(x), \quad x > 0, \qquad (26.1.32)$$

яку ще називають ***формулою подвоєння аргумента*** *гамма-функції.*

Доведення. Покажемо, що функція f, означена на проміжку $(0,+\infty)$ за правилом

$$f(x) := \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right), \quad x > 0, \tag{26.1.33}$$

задовольняє умови теореми Артіна (**теорема 26.1.3**), а отже, є гамма-функцією.

По-перше,

$$f(1) = \frac{2^{1-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = 1. \tag{26.1.34}$$

По-друге,

$$f(x+1) = \frac{2^{x}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{2^{x}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) = xf(x), \quad x > 0. \tag{26.1.35}$$

Зрештою, функція lnf є сумою логарифмічно опуклих вниз функцій і сталої величини:

$$lnf(x) = -ln\sqrt{\pi} + (x-1)ln2 + ln\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + ln\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right), \quad x > 0, \tag{26.1.36}$$

що зумовлює логарифмічну опуклість вниз функції f на проміжку $(0,+\infty)$.

Отже, за **теоремою 26.1.3** маємо

$$f(x) = \Gamma(x), \ x > 0, \quad \Leftrightarrow \quad (26.1.32).$$

Теорему доведено.

Теорема 26.1.6 (***про формулу Стірлінга для гамма-функції***)**.** *На всьому проміжку визначення* $(0,+\infty)$ *гамма-функції* Γ *є справедливою* ***формула Стірлінга***:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\frac{\theta}{12x}}, \quad x > 0, \tag{26.1.37}$$

де $\theta = \theta(x)$ – це деяка величина з інтервалу $(0, +1)$.

Доведення. Аби скористатися методом доведення, що був застосований у попередніх теоремах, насамперед зробимо декілька допоміжних кроків.

На першому кроці означимо додатну функцію

$$g(x) := \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1, \quad x > 0, \tag{26.1.38}$$

яку за стандартним розвиненням

$$\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad |x| \in (0; 1), \tag{26.1.39}$$

подамо у вигляді функціонального ряду

$$g(x) = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2x+1}}\ln\frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2x+1)^{2n}}, \quad x > 0. \tag{26.1.40}$$

Тож функція g на всьому проміжку $(0, +\infty)$ задовольняє оцінку

$$0 < g(x) < \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2x+1)^{2n}} = \frac{1}{12x(x+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right), \quad x > 0. \tag{26.1.41}$$

На другому кроці складемо функцію

$$\mu(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} g(x + n), \quad x > 0,$$

яка, у свою чергу, задовольняє оцінку

$$0 < \mu(x) < \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{12x}, \quad x > 0. \tag{26.1.42}$$

Тож для кожного числа $x > 0$ знайдеться такий множник $\theta = \theta(x) \in (0; 1)$, за якого

$$\mu(x) = \frac{\theta}{12x}, \quad x > 0. \tag{26.1.43}$$

Окрім того, функції g та μ пов'язані співвідношенням

$$\mu(x+1)-\mu(x)=-g(x), \quad x>0. \qquad (26.1.44)$$

Також зазначимо, що у будь-який точці $x>0$ до ряду (26.1.40) двічі можна застосувати почленне диференціювання, після чого матимемо

$$\mu''^{(x)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8n(2n+1)}{(2n+1)(2x+1)^{2n+2}}>0, \;\; x>0. \qquad (26.1.45)$$

Нарешті, утворимо додатну функцію

$$f(x):=x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)}, \;\; x>0, \qquad (26.1.46)$$

і покажемо, що функція $\frac{f}{f(1)}$ задовольняє умови **теореми 26.1.3**.

Справді, по-перше, за всіх $x>0$ маємо

$$f(x+1)=(x+1)^{x+\frac{1}{2}}e^{-x-1+\mu(x+1)}=(x+1)^{x+\frac{1}{2}}e^{-x-1}e^{\mu(x)}e^{\mu(x+1)-\mu(x)}=$$

$$=f(x)(x+1)^{x+\frac{1}{2}}e^{-1}x^{-x+\frac{1}{2}}e^{-g(x)}=f(x)(x+1)^{x+\frac{1}{2}}e^{-1}x^{-x+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}e^{1}=$$

$$=xf(x).$$

По-друге, легко переконатися, що друга похідна функції lnf є додатною:

$$\left(\ln f(x)\right)''=\left(-x+\mu(x)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x\right)''=\mu''(x)+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}>0, \; x>0.$$

Відтак функція f є логарифмічно опуклою вниз на проміжку $(0,+\infty)$, тож вказана функція $\frac{f}{f(1)}$ задовольняє всі три умови **теореми 26.1.3**, а отже,

$$\frac{f(x)}{f(1)}=\Gamma(x), \quad x>0. \qquad (26.1.47)$$

Підставимо знайдений вираз функції Γ у формулу Лежандра (26.1.32):

$$2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(x) \iff 2^{x-1}\frac{1}{f(1)}\,f\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{f(1)}\,f\left(\frac{x+1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\frac{f(x)}{f(1)} \iff$$

$$\Leftrightarrow\ f(1)=\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{f(x)}f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x+1}{2}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ f(1)=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}e^{\mu\left(\frac{x}{2}\right)+\mu\left(\frac{x+1}{2}\right)-\mu(x)}. \qquad (26.1.48)$$

З рівності (26.1.43) випливає, що $\mu(x)\to+0,\ x\to+\infty$, тож перейшовши у виразі (26.1.48) до границі, коли $x\to+\infty$, матимемо

$$f(1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}e^{\mu\left(\frac{x}{2}\right)+\mu\left(\frac{x+1}{2}\right)-\mu(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \qquad (26.1.49)$$

Зрештою, рівності (26.1.43), (26.1.47) та (26.1.49) спричиняють бажану формулу

$$\Gamma(x)=\frac{f(x)}{f(1)}=\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)}=\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\frac{\theta}{12x}},\ x>0,\ 0<\theta<1.$$

Теорему доведено.

Наслідок 26.1.2. *За будь-якого натурального числа $n\in N$ справедлива рівність*

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}e^{\frac{\theta}{12n}},\ \ \theta=\theta(n)\in(0;1), \qquad (26.1.50)$$

*яку називають **формулою Стірлінга для n-факторіала**.*

Доведення. З формули (26.1.37) випливає

$$n!=n\cdot(n-1)!=n\Gamma(n)=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}e^{\frac{\theta}{12n}},\ \theta=\theta(n)\in(0;1).$$

Твердження доведене.

Завдання для самоперевірки **26.1.1.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2}\, dt, \quad n \in N? \qquad (26.1.51)$$

Вказівка: запровадити в заданому інтегралі змінну $\tau = \sqrt{t}$.

Завдання для самоперевірки **26.1.2.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(\ln\frac{1}{t}\right)^x dt, \quad x > -1? \qquad (26.1.52)$$

Вказівка**:** запровадити в заданому інтегралі змінну $\tau = ln\frac{1}{t}$.

Завдання для самоперевірки **26.1.3.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^x}\, dt, \quad x > 0? \qquad (26.1.53)$$

Вказівка: запровадити в заданому інтегралі заміну змінної $\tau = t^x$.

Завдання для самоперевірки **26.1.4.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{n+1}} e^{-\frac{x}{2t^2}}\, dt, \quad n \in N? \qquad (26.1.54)$$

Вказівка: запровадити в заданому інтегралі заміну змінної $\tau = \frac{x}{2t^2}$.

Завдання для самоперевірки **26.1.5.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^t} e^{xt}\, dt, \quad x > 0? \qquad (26.1.55)$$

Вказівка: запровадити в заданому інтегралі заміну змінної $\tau = e^t$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

26.1.1. $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$.

26.1.2. $\Gamma(x+1)$.

26.1.3. $\Gamma\left(\frac{1}{x}+1\right)$.

26.1.4. $2^{\frac{n}{2}-1}x^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$.

26.1.5. $\Gamma(x)$.

26.2. Бета-функція: означення та основні властивості

Означення* 26.2.1. *Бета-функцією *називають функцію, що означена на множині* $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ *рівністю*

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \quad x>0,\ y>0. \qquad (26.2.1)$$

***Завдання для самостійної роботи* 26.2.1.** *Довести, що бета-функцію B можна подати у вигляді*

$$B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x+y}}\,d\tau, \quad x>0,\ y>0. \qquad (26.2.2)$$

Вказівка: запровадити в інтегралі (26.2.1) змінну $t = \frac{\tau}{1-\tau}$.

***Завдання для самостійної роботи* 26.2.2.** *Довести, що бета-функцію B можна подати у вигляді*

$$B(x,y)=\int_0^1 \frac{\tau^{x-1}+\tau^{y-1}}{(1+\tau)^{x+y}}\,d\tau,\quad x>0,\ y>0. \qquad (26.2.3)$$

Вказівка: розкласти інтеграл (26.2.2) у суму двох інтегралів по проміжках $[0;1]$ і $[1,+\infty)$, після чого запровадити у другому інтегралі змінну $u=\frac{1}{\tau}$.

Теорема 26.2.1 (*про найпростіші властивості гамма-функції*). *Бета-функція є додатною неперервною функцією на множині* $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, *яка на цій множині задовольняє тотожності*:

1) $$B(x,y)=B(y,x),\quad x>0,\ y>0; \qquad (26.2.4)$$

2) $$B(x,1)=\frac{1}{x},\ \ B(1,y)=\frac{1}{y},\ x>0,\ y>0; \qquad (26.2.5)$$

3) $$B(x,y+1)=\frac{y}{x+y}B(x,y),\quad x>0,\ y>0; \qquad (26.2.6)$$

$$B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y),\quad x>0,\ y>0. \qquad (26.2.7)$$

Доведення. Для довільної точки (x,y) області $\mathcal{D}:=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ знайдуться такі числа α і β, що

$$0<\alpha<x,\quad 0<\beta<y.$$

За ознакою Вейєрштрасса на множині $[\alpha,+\infty)\times[\beta,+\infty)$ невласний інтеграл

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,$$

що має особливості у точках $t = 0$ та $t = 1$, рівномірно збігається, а підінтегральна функція $f(t, x, y) := t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ є неперервною, тому функція B у вказаній точці $(x, y) \in \mathcal{D}$ теж неперервна.

Зафіксуємо довільну точку $(x, y) \in \mathcal{D}$ і запровадимо в інтегралі (26.2.1) змінну $t = 1 - \tau$, тоді матимемо рівність (26.2.4):

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \int_0^1 (1-\tau)^{x-1}\tau^{y-1}\, dt = B(y, x).$$

Обчисливши інтеграли

$$B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$$

$$B(1, y) = B(y, 1) = \frac{1}{y}, \quad y > 0,$$

отримаємо тотожності (26.1.5).

Щоб одержати останні тотожності (26.2.6)–(26.2.7), застосуємо до інтеграла функції $B(x, y+1)$ формулу інтегрування частинами:

$$B(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y}\, dt = \int_0^1 t^{x+y-1}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{y} dt =$$

$$= \frac{t^{x+y}}{x+y}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{y}\Bigg|_0^1 - \frac{y}{x+y}\int_0^1 t^{x+y}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{y-1}\left(\frac{1}{-t^2}\right) dt =$$

$$= 0 + \frac{y}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \frac{y}{x+y} B(x, y).$$

Звідси, згідно з (26.2.4) маємо

$$B(x+1, y) = B(y, x+1) = \frac{x}{x+y} B(y, x) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

Теорему доведено.

***Завдання для самостійної роботи* 26.2.3.** *Довести, що*:

1) $$B(x,n)=\frac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)},\quad x>0,\ n\in N; \tag{26.2.8}$$

2) $$B(k,n)=\frac{(k-1)!(n-1)!}{(k+n-1)!},\quad k\in N,\ n\in N. \tag{26.2.9}$$

***Завдання для самостійної роботи* 26.2.4.** *Довести, що за будь-якого фіксованого значення параметра* $y>0$ *функція* $f_y(x):=B(x,y)$ *є логарифмічно опуклою вниз на проміжку* $(0,+\infty)$.

***Вказівка*:** скористатися нерівністю Коші−Шварца для невласних інтегралів.

Теорема 26.2.2 (*про подання бета-функції у термінах гамма-функцій*). *На множині* $\mathcal{D}=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ *справджуються тотожність*

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad x>0,\ y>0. \tag{26.2.10}$$

Доведення. Зафіксуємо довільне значення $y>0$ й означимо функцію

$$f(x):=\frac{1}{\Gamma(y)}\cdot B(x,y)\Gamma(x+y),\quad x\in(0,+\infty).$$

Доведемо, що так означена функція задовольняє умови **теореми 26.1.3**.

Справді, по-перше,

$$f(1)=\frac{1}{\Gamma(y)}\cdot B(1,y)\Gamma(1+y)=\frac{1}{\Gamma(y)}\cdot\frac{1}{y}\cdot y\Gamma(y)=1.$$

По-друге, маємо

$$f(x+1)=\frac{1}{\Gamma(y)}\cdot B(x+1,y)\Gamma(x+y+1)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(y)}\cdot\frac{x}{x+y}B(x,y)\cdot(x+y)\Gamma(x+y)=xf(x),\quad x\in(0,+\infty).$$

Зрештою, утворена функція f є добутком логарифмічно опуклих донизу на множині $(0,+\infty)$ функцій

$$f_y(x) := B(x,y),\ x \in (0,+\infty),\ \text{і}\ \Gamma_y(x) := \frac{1}{\Gamma(y)} \cdot \Gamma(x+y),\ x \in (0,+\infty).$$

Тому на вказаній множині функція f є логарифмічно опуклою донизу.

Отже, всі три умови **теореми 26.1.3** для функції f виконані, тож функція f є гамма-функцією:

$$f(x) = \Gamma(x), \quad x > 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\Gamma(y)} B(x,y)\Gamma(x+y) = \Gamma(x),\ x > 0,$$

звідки випливає тотожність (26.1.10).

Теорему доведено.

Теорема 26.2.3 (***про формулу доповнення для функцій Ойлера***). С*правджуються тотожності*

$$B(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}, \quad 0 < x < 1; \qquad (26.2.11)$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}, \quad x \notin Z, \qquad (26.2.12)$$

останню з яких називають ***формулою доповнення для гамма-функції***.

Доведення. Зафіксуємо довільне значення $x \in (0;1)$ і подамо функцію $B(x,1-x)$ у вигляді інтеграла (26.2.3):

$$B(x,y)\Big|_{y=1-x} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dt\Big|_{y=1-x} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{-x}}{1+t}dt. \qquad (26.2.13)$$

За відомою формулою n-ї часткової суми геометричного ряду

$$1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^n t^n = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$$

отримаємо зручний вираз для дробу $\frac{1}{1+t}$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}, \ n \in N, \ t \neq -1. \qquad (26.2.14)$$

Підставивши вираз (26.2.14) у інтеграл (26.2.13), матимемо

$$\forall x \in (0;1): \quad B(x, 1-x) =$$

$$= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}(t^{x-1}+t^{-x})}{1+t}\,dt + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 (t^{x+k-1} + t^{k-x})\,dt =$$

$$= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}(t^{x-1}+t^{-x})}{1+t}\,dt + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{k-x+1}\right). \qquad (26.2.15)$$

Перший доданок у сумі (26.2.15) задовольняє оцінку

$$\left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}(t^{x-1}+t^{-x})}{1+t}\,dt\right| \leq \int_0^1 (t^{x+n} + t^{n-x+1})\,dt = \frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{n-x+1},$$

а другий – це n-та частинна сума ряду (24.7.31), а саме

$$\frac{\pi}{\sin x\pi} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right), \quad x \notin Z.$$

Тож перейшовши до границі у рівності (26.1.15), коли $n \to +\infty$, матимемо

$$B(x, 1-x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right) = \frac{\pi}{\sin x\pi}, \quad x \in (0;1).$$

Звідки згідно із формулою (26.2.9) випливає

$$\frac{\pi}{\sin x\pi} = B(x, 1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma\big(x+(1-x)\big)} = \Gamma(x)\Gamma(1-x), \quad x \in (0;1), \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin x\pi = \pi, \quad x \in (0;1). \qquad (26.2.16)$$

Зрештою, можна помітити, що ліва частина рівності (26.2.16) є періодичною функцією з періодом $T = 1$. Справді, якщо

$$\varphi(x) := \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin x\pi, \quad x \notin Z,$$

то за тотожністю Ойлера–Гауса для гамма-функції маємо

$$\varphi(x+1) = \Gamma(x+1)\Gamma(-x)\sin(x+1)\pi =$$

$$= x\Gamma(x)\frac{\Gamma(1-x)}{-x}(-\sin x\pi) = \varphi(x), \quad x \notin Z,$$

тож тотожність (26.2.12) справджується на всій числовій осі R окрім її цілих точок $x = n \in Z$.

Теорему доведено.

Тотожності (26.1.11)−(26.1.12) дають ще один спосіб обчислення значення гамма-функції у точці $x = \frac{1}{2}$:

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \iff \begin{cases} B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi; \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \end{cases} \qquad (26.2.17)$$

***Завдання для самостійної роботи* 26.2.5.** *Довести, що*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{\pi}{\cos x\pi}, \qquad \left(x+\frac{1}{2}\right) \notin Z\,. \qquad (26.2.18)$$

***Завдання для самостійної роботи* 26.2.6.** *Довести, що*

$$\sin x\pi = x\pi \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right), \quad x \in R. \qquad (26.2.19)$$

***Вказівка*:** записати формулу доповнення для гамма-функції у вигляді

$$-x\Gamma(x)\Gamma(-x)\sin x\pi = \pi$$

і скористатися формулою Вейєрштрасса (26.1.25).

***Приклад* 26.2.1.** У термінах гамм-функції обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x-1}\varphi \cos^{y-1}\varphi d\varphi, \quad x > 0,\ y > 0. \qquad (26.2.20)$$

Розв'язання. Запровадимо в інтегралі (26.1.20) змінну $t = \sin^2\varphi$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x-1}\varphi \cos^{y-1}\varphi d\varphi = \begin{vmatrix} t = \sin^2\varphi\,, \\ dt = 2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi, \\ d\varphi = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{x}{2}-1}(1-t)^{\frac{y}{2}-1}\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{y}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right)},\ x > 0,\ y > 0.$$

***Відповідь*:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x-1}\varphi \cos^{y-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{y}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right)},\ x > 0,\ y > 0.$ (26.2.21)

***Приклад* 26.2.2.** Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^x\varphi d\varphi, \quad x \in (-1;+1). \qquad (26.2.22)$$

***Розв'язання*.** Запишемо інтеграл (26.2.22) у вигляді

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(1+x)-1}\varphi \cos^{(1-x)-1}\varphi d\varphi$$

і застосуємо отриманий результат (26.2.21) та формулу доповнення для гамма-функції:

$$I = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(1+x)+(1-x)}{2}\right)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)\pi} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\frac{x\pi}{2}}\,.$$

***Відповідь*:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^x\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\frac{x\pi}{2}},\quad x \in (-1;+1).$ (26.2.23)

Приклад* 26.2.3.** Довести ***формулу Лежандра подвоєння аргумента гамма-функції

$$\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\Gamma(2x),\quad x>0. \qquad (26.1.24)$$

Розв'язання. Подамо бета-функцію $B(x,x)$ у вигляді інтеграла

$$B(x,x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\,dt=\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right)^{x-1}dt=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right)^{x-1}dt,\quad x>0,$$

і запровадимо у ньому змінну $\frac{1}{2}-t=\frac{1}{2}\sqrt{\tau}$:

$$B(x,x)=\frac{2}{2^{2x}}\int_0^1\tau^{-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{x-1}\,d\tau=\frac{2}{2^{2x}}B\left(\frac{1}{2},x\right),\quad x>0. \qquad (26.1.25)$$

Після цього до обох частин отриманої рівності (26.1.25) застосуємо формулу (26.2.9), що поєднує гамма і бета-функції:

$$(26.1.25)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}=\frac{2}{2^{2x}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)},\quad x>0,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\Gamma(2x),\quad x>0.$$

Твердження доведене.

***Завдання для самоперевірки* 25.2.1.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$I_1(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt,\ x\in(0;1)? \qquad (26.1.26)$$

***Вказівка*:** підставити у формулу (26.2.2) значення $y=1-x$ і скористатися **теоремою 26.2.3**.

***Завдання для самоперевірки* 25.2.2.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$I_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}\ln t}{1+t}\,dt,\ x \in (0;1)? \qquad (26.1.27)$$

***Вказівка*:** довести, що $\frac{d}{dx} I_1(x) = I_2(x)$.

***Завдання для самоперевірки* 25.2.3.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{1+t^3}\,dt\ ? \qquad (26.1.28)$$

***Вказівка*:** запровадити у заданому інтегралі заміну $\tau = t^3$ і скористатися відповіддю на попереднє питання.

***Завдання для самоперевірки* 25.2.4.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{1-t}{t}}\frac{dt}{(t-2)^2}\ ? \qquad (26.1.29)$$

***Вказівка*:** запровадити у заданому інтегралі змінну $\tau = \frac{t}{2-t}$ і скористатися **теоремами 26.2.2** і **26.2.3**.

***Завдання для самоперевірки* 25.2.5.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t^y}\,dt, \quad 0 < x < y\ ? \qquad (26.1.30)$$

Відповіді на завдання для самоперевірки

25.2.1. $\dfrac{\pi}{\sin x\pi}$, $\quad 0 < x < 1.$

25.2.2. $-\dfrac{\pi^2 \cos x\pi}{\sin^2 x\pi}$, $\quad 0 < x < 1.$

25.2.3. $\dfrac{2\pi^2}{27}$.

25.2.4. $\dfrac{\pi}{3^{\frac{3}{2}}2^{\frac{1}{3}}}$.

25.2.5. $\dfrac{\pi}{\mathrm{y}\sin\frac{x\pi}{y}}$.

Розділ 27. Інтеграл і перетворення Фур'є

27.1. Інтеграл Фур'є

У **розділі 27** було доведено, що функцію f, яка є абсолютно інтегрованою на відрізку $[-l, l]$ скінченної довжини $2l > 0$ і, наприклад, є на ньому усередненою кусково-гладкою функцією, можна розвинути у ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [-l, l], \qquad (27.1.1)$$

із коефіцієнтами

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n \in Z_+, \qquad (27.1.2)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n \in N. \qquad (27.1.3)$$

Сума ряду (27.1.1) є $2l$-періодичною функцією, тож якщо функція f теж має період $2l$, то розвинення функції f у її ряд Фур'є можна подовжити на всю числову вісь R. Відтак виникає запитання: а чи не можна утворити розвинення функції f на всій множині R, подібне до розвинення (27.1.1), і у разі неперіодичної функції f, та який вигляд може мати таке розвинення?

Деякі умови і риси такого розвинення стають відразу зрозумілими. По-перше, аби напевно існували інтеграли (27.1.2–27.1.3) по множині R, функція f повинна бути абсолютно інтегрованою на всій дійсній прямій:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty. \qquad (27.1.4)$$

По-друге, частотний спектр ряду Фур'є (24.3.1) має вигляд

$$\frac{\pi}{l},\ \frac{2\pi}{l},\ \frac{3\pi}{l},\ \dots,\ \frac{n\pi}{l},\ \frac{(n+1)\pi}{l},\ \dots \qquad (27.1.5)$$

із кроком переходу між двома послідовними частотами

$$\Delta = \Delta(l) := \frac{(n+1)\pi}{l} - \frac{n\pi}{l} = \frac{\pi}{l}\,. \qquad (27.1.6)$$

Якщо ж відрізок $[-l, l]$ розвинення у ряд Фур'є розширяти до інтервалу $(-\infty, +\infty)$, спрямовуючи l до нескінченності, то величина $\Delta = \Delta(l)$ буде ставати нескінченно малою:

$$\Delta = \Delta(l) \to 0, \quad l \to +\infty. \qquad (27.1.7)$$

Отже, частотний спектр розвинення (27.1.1) із дискретного стає неперервним, тож варто очікувати, що у такому разі ряд (27.1.1) перейде у деякий інтеграл. Аби зрозуміти, у який саме, виконаємо у рівності (27.1.1) формальний перехід до границі, коли $l \to +\infty$, за вказаної умови (27.1.4) й у припущенні, що функція f є усередненою кусково-гладкою функцією на відрізках $[-l, l]$.

Підставивши у ряд (27.1.1) вирази коефіцієнтів a_n і b_n за їх формулами (27.1.2)–(27.1.3), перепишемо його у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt \; +$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt\cdot\,\cos\frac{n\pi x}{l} + \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\right) =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt \; + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi(x-t)}{l}dt =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt \; + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} g_l(u)\Delta u_n, \qquad (27.1.8)$$

у якому за функцію g_l та прирости Δu_n відповідно позначено

$$g_l(u) := \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos u(x-t)\,dt, \quad u \geq 0;$$

$$\Delta u_n := \Delta(l) = \frac{\pi}{l}\,, \quad n \in N.$$

Перший доданок суми (27.1.8) задовольняє оцінку

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\,\right| \le \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,dt\cdot\frac{1}{l} \le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt\cdot\frac{1}{l}\,,$$

за якою матимемо

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt \to 0, \quad l \to +\infty. \qquad (27.1.9)$$

Другий доданок виразу (27.1.8) є інтегральною сумою

$$\sigma(g_l,\lambda,\xi) := \sum_{n=1}^{+\infty} g_l(u)\Delta u_n,$$

складеної для функції g_l і проміжку інтегрування $[0,+\infty)$ за його розбиттям

$$\lambda = \left\{0,\ \frac{\pi}{l},\ \frac{2\pi}{l},\ \frac{3\pi}{l},\ \dots\ ,\ \frac{n\pi}{l},\ \dots\ \right\}$$

і узгодженим з ним набором точок

$$\xi = \left\{\frac{\pi}{l},\ \frac{2\pi}{l},\ \frac{3\pi}{l},\ \dots\ ,\ \frac{n\pi}{l},\ \dots\ \right\}.$$

Тож можна очікувати, що

$$\lim_{l\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} g_l(u)\Delta u_n = \lim_{|\lambda|\to+0}\sigma(g_l,\lambda,\xi) = \int_0^{+\infty} g_l(u)\,du =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt\right)du = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} du\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt.$$

(27.1.10)

Отже, за певних умов справджується розвинення

$$f(\,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} du\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt, \quad x\in R, \qquad (27.1.11)$$

яке може бути переписане у вигляді

$$\forall x\in R:\quad f(\,x) =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt\cos ux + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt\sin ux\right)du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad f(x) = \int_0^{+\infty} (a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)du, \;\; x \in R, \qquad (27.1.12)$$

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\, dt, \qquad (27.1.13)$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\, dt. \qquad (27.1.14)$$

Означення* 27.1.1.** *Формулу* (27.1.11) *чи рівносильну їй сукупність формул* (27.1.12)−(27.1.14) *називають* ***інтегральною формулою Фур'є *функції f, а кожну із правих частин формули* (27.1.11) *або формули* (27.1.12) *називають* ***інтегралом Фур'є*** *цієї функції, при цьому збіжність невласних інтегралів* (27.1.13)−(27.1.14*) означають у розумінні їх головного значення.*

Теорема 27.1.1 (*про властивості коефіцієнтів інтеграла Фур'є*). *Якщо функція f є абсолютно інтегрованою на множині R, то коефіцієнти її інтеграла Фур'є, означені за формулами* (27.1.12)−(27.1.14), *є неперервними обмеженими функціями змінної $u \in R$ на всій числовій осі R і задовольняють умови*

$$a(u) \to 0, \quad u \to \infty, \qquad (27.1.15)$$

$$b(u) \to 0, \quad u \to \infty. \qquad (27.1.16)$$

Доведення. Для будь-якого значення $u \in R$ знайдеться такий відрізок $[\alpha, \beta] \subset R$ числової осі, що $u \in (\alpha, \beta)$. На множині $R \times [\alpha, \beta]$ підінтегральна функція $f(t)\cos ut$ є неперервною за змінними t, u, та є справедливою така оцінка інтеграла (27.1.12):

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\, dt\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty, \qquad (27.1.17)$$

так що інтеграл (27.1.12) за ознакою Вейєрштрасса є рівномірно збіжним на вказаному відрізку, а отже, функція $a = a(u)$ є неперервною на інтервалі (α, β), який містить довільно вибрану точку $u \in R$. Тож функція $a = a(u)$ неперервна у всіх точках множини R.

Так само доводять неперервність на множині R другого коефіцієнта $b = b(u), u \in R$.

Обмеженість на множині R функції $a = a(u)$ є наслідком оцінки (27.1.17), аналогічно доводиться обмеженість і другої функції $b = b(u)$.

Границі (27.1.15)–(27.1.16), звісно, випливають з теореми Рімана (**теорема 24.3.1**).

Теорему доведено.

За доведеною теоремою безпосередньо випливає таке твердження.

Наслідок 27.1.1. *Якщо функція f є абсолютно інтегрованою на множині R, то за будь-якого значення параметра $x \in R$ функція*

$$w_x(u) := a(u)\cos ux + b(u)\sin ux = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt, \quad u \in R, \tag{27.1.18}$$

є парною обмеженою та неперервною функцією на множині R.

Теорема 27.1.2 (***ознака Діні збіжності інтеграла Фур'є***). *Якщо справджуються умови*:

1) *функція f є абсолютно інтегрованою на множині R*;

2) *точка* $x \in R$ *і стала* $c \in R$ *такі, що в деякому околі нуля є означеною функція*

$$g_x(t) - c = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - c\ ; \tag{27.1.19}$$

3) *знайдеться таке* $\delta > 0$, *що*

$$\int_0^\delta \frac{|g_x(t)-c|}{t} dt < +\infty, \tag{27.1.20}$$

тоді у цій точці $x \in R$ *інтеграл Фур'є функції* f *збігається до значення* c:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(x-t)\, dt = c. \tag{27.1.21}$$

Доведення. За вказаного числа $x \in R$ і за всіх значень $\gamma > 0$ означимо інтеграл

$$I(\gamma) := \frac{1}{\pi}\int_0^\gamma w_x(u)du = \frac{1}{\pi}\int_0^\gamma du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(x-t)\, dt, \quad \gamma > 0. \tag{27.1.22}$$

За ознакою Вейєрштрасса внутрішній інтеграл повторного інтегралу (27.1.22) рівномірно збігається за параметром u на будь-якому відрізку $[0,\gamma]$, а його підінтегральна функція є неперервною на множині $R \times [0,\gamma]$, тож за теоремою про інтегрування невласного інтеграла, залежного від параметра (**теорема 25.2.4**), у повторному інтегралі можна змінити порядок інтегрування:

$$I(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^\gamma f(t)\cos u(x-t)\, du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\gamma(x-t)}{x-t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+x)\frac{\sin\gamma t}{t} dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} \ldots + \int_0^{+\infty} \ldots\right) = \left|\begin{matrix}\text{заміна у першому}\\ \text{інтегралі: } t \to -t\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(f(t-x)+f(t+x)\big)\frac{\sin\gamma t}{t} dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} g_x(t)\frac{\sin\gamma t}{t} dt. \tag{27.1.23}$$

У ***прикладі* 25.2.3** був обчислений інтеграл Діріхле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\gamma t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma > 0,$$

який обумовлює рівність

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin \gamma t}{t} dt, \quad \gamma > 0, \tag{27.1.24}$$

тож різницю між інтегралом $I(\gamma)$ і сталою $c \in R$ можна подати у вигляді

$$I(\gamma) - c = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} g_x(t) \frac{\sin \gamma t}{t} dt - c \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin \gamma t}{t} dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} (g_x(t) - c) \frac{\sin \gamma t}{t} dt, \quad \gamma > 0. \tag{27.1.25}$$

Залишається лише довести, що невласний інтеграл (27.1.25) прямує до нуля, коли $\gamma \to +\infty$. Для цього за числом $\delta > 0$ вказаним в умові (27.1.20), розіб'ємо інтеграл (27.1.25) на три доданки:

$$I(\gamma) - c = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} (g_x(t) - c) \frac{\sin \gamma t}{t} dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_\delta^{+\infty} \frac{g_x(t)}{t} \sin \gamma t dt + \frac{2c}{\pi}\int_\delta^{+\infty} \frac{\sin \gamma t}{t} dt, \quad \gamma > 0. \tag{27.1.26}$$

Позаяк функція g_c є абсолютно інтегрованою на вказаному відрізку $[0, \delta]$, а функція $\frac{g_x(t)}{t} = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}$ – на проміжку $[\delta, +\infty)$, то за теоремою Рімана перші два доданки суми (27.1.26) прямують до нуля, коли $\gamma \to +\infty$. До того ж, маємо

$$\int_\delta^{+\infty} \frac{\sin \gamma t}{t} dt = \left| \begin{matrix} \text{заміна:} \\ \gamma t \to t \end{matrix} \right| = \int_{\gamma\delta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \to 0, \quad \gamma \to +\infty, \tag{27.1.27}$$

а отже, і третій доданок у сумі (27.1.26) прямують до нуля, коли $\gamma \to +\infty$.

Таким чином, справедлива границя

$$c = \lim_{\gamma \to +\infty} I(\gamma) = \lim_{\gamma \to +\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\gamma} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(x-t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(x-t)\, dt.$$

Теорему доведено.

Теорема 27.1.3 (***ознака Ліпшица збіжності інтеграла Фур'є***). *Нехай функція f є абсолютно інтегрованою на множині R. Тоді*:

1) *якщо функція f на деякому околі $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, точки $x \in R$ задовольняє умову Гельдера–Ліпшица з якимось показником $\alpha \in (0,1]$, то справедлива інтегральна формула Фур'є*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt; \qquad (27.1.28)$$

2) *якщо функція f у точці $x \in R$ задовольняє умову Гельдера–Ліпшица з якимось показником $\alpha \in (0,1]$, то її інтеграл Фур'є у цій точці збігається до значення $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$*:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt. \qquad (27.1.29)$$

Доведення. Якщо абсолютно інтегрована функція f задовольняє у деякій точці $x \in R$ умову Гельдера–Ліпшиця з якимось показником $\alpha \in (0,1]$, то у **теоремі 24.3.7** було доведено, що у такому разі знайдеться число $\delta > 0$, за якого справедлива нерівність

$$\int_0^{\delta} \frac{|g_x(t)-g_x(+0)|}{t}\,dt < +\infty, \qquad (27.1.30)$$

в якій позначено

$$g_x(+0) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (27.1.31)$$

Якщо ж абсолютно інтегрована функція f задовольняє на всьому околі $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, точки $x \in R$ умову Гельдера–Ліпшица з якимось показником $\alpha \in (0,1]$, то, до того ж, функція f є неперервною на цьому околі, а отже,

$$g_x(+0) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x). \qquad (27.1.32)$$

Таким чином, твердження цієї теореми є наслідком **теорем 27.1.2** і **24.3.7**.

Теорему доведено.

Наслідок 27.1.2. *Якщо абсолютно інтегрована на множині R функція f у точці $x \in R$ має*:

1) *скінченну похідну $f'(x) \in R$, то інтеграл Фур'є функції f у цій точці збігається до значення $f(x)$*;

2) *скінчену ліву $f'(x-0) \in R$ та праву $f'(x+0) \in R$ похідні, то інтеграл Фур'є функції f у цій точці збігається до значення $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, яке є однаковим зі значенням $f(x)$, у разі неперервності функції f у цій точці.*

Доведення. Якщо функція f у деякій точці $x \in R$ має скінченну похідну $f'(x) \in R$, то у цій точці функція f неперервна та існують скінченні ліва $f'(x-0) \in R$ і права $f'(x+0) \in R$ похідні. Отже (**теорема 24.3.6**), у вказаній точці є чинною умова Гельдера–Ліпшица з показником $\alpha = 1$, і до того ж,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x). \tag{27.1.33}$$

Таким чином, перше твердження наслідку випливає із другого твердження доведеної вище **теореми 27.1.3**.

Так само, друге твердження – це також наслідок **теореми 24.3.6** і твердження 2) **теореми 27.1.3**, проте у цьому разі рівність (27.1.33) не є обов'язковою.

Твердження доведене.

Припустімо, функція f є абсолютно інтегрованою на множині R і в деякій точці $x \in R$ функція f задовольняє інтегральну формулу Фур'є (27.1.11). Тоді, як було доведено (**наслідок 27.1.1**), підінтегральна функція виразу (27.1.11)

$$w_x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(x-t)\, dt, \quad u \in R, \tag{27.1.34}$$

є парною обмеженою і неперервною функцією на множині R. Тож інтегральну формулу Фур'є функції f можна подати у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x)\, dt. \tag{27.1.35}$$

Так само, функція

$$v_x(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt, \quad u \in R, \tag{27.1.36}$$

є непарною обмеженою і неперервною функцією на множині R. Відтак є означеним у розумінні головного значення невласний інтеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt =$$

$$= \lim_{\gamma \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt = 0. \tag{27.1.37}$$

Якщо додати до рівності (27.1.35) інтеграл (27.1.37), помножений на уявне число i, то одержимо формулу

$$f(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x)\, dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\cos u(t-x) + i \sin u(t-x)\right) dt,$$

яку записують у спрощеному вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iu(t-x)}\, dt \tag{27.1.38}$$

чи у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iut}\,dt\right)e^{-iux}du. \qquad (27.1.39)$$

Отримані рівності (27.1.38)−(27.1.39) називають ***інтегральною формулою Фур'є у комплексній формі***.

Якщо ж у деякій точці $x \in R$ функція f задовольняє інтегральну формулу Фур'є (27.1.12)−(27.1.14) і, до того ж, є парною, то підінтегральна функція інтеграла (27.1.14) є непарною, тож

$$b(u) = 0, \qquad (27.1.40)$$

натомість підінтегральна функція інтеграла (27.1.13) є парною, а отже, інтеграл (27.1.13) можна переписати як

$$a(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt. \qquad (27.1.41)$$

Після цього інтегральна формула Фур'є набуває вигляду

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(u)\cos ux\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt\right)\cos ux\,du.$$

(27.1.42)

Так само, якщо функція f є непарною, то матимемо

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(u)\sin ux\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt\right)\sin ux\,du.$$

(27.1.43)

Рівності (27.1.42), (27.1.43) називають, відповідно, ***інтегральною формулою Фур'є парної*** та ***непарної функції***.

***Приклад* 27.1.1.** Розвинути в інтеграл Фур'є функцію

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}, \quad x \in R, \ \alpha > 0. \qquad (27.1.44)$$

Розв'язання. На множині R задана функція f є абсолютно інтегрованою неперервно диференційованою парною функцією, тож у кожній точці $x \in R$ справджується інтегральна формула Фур'є (27.1.42). Обчисливши коефіцієнт

$$a(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos ut \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + u^2},$$

отримаємо інтегральну формулу

$$e^{-\alpha|x|} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + u^2} \cos ux \, du, \quad x \in R, \qquad (27.1.45)$$

яку ще переписують як інтеграл, залежний від параметра $x \in R$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ux}{\alpha^2 + u^2} du = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha|x|}, \quad x \in R, \qquad (27.1.46)$$

і називають ***інтегралом Лапласа***.

Відповідь: $e^{-\alpha|x|} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + u^2} \cos ux \, du, \quad x \in R.$

Завдання для самостійної роботи **27.1.1.** *Довести, що*

$$\int_0^{+\infty} \frac{u \sin ux}{\alpha^2 + u^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha x}, \quad x > 0, \ \alpha > 0. \qquad (27.1.47)$$

Вказівка: розвинути у інтеграл Фур'є функцію

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} sign x, \quad x \in R, \ \alpha > 0.$$

Зауважимо, що підінтегральна функція у формулі (27.1.35) є парною за змінною u, тож формулу можна переписати у рівносильному вигляді, змінивши знак в аргументі косинуса:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(x - t) \, dt, \qquad (27.1.48)$$

а отже, зміниться цей знак і у формулах (27.1.38)–(27.1.39):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iu(x-t)}\,dt; \qquad (27.1.49)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}\,dt\right)e^{iux}du. \qquad (27.1.50)$$

***Завдання для самоперевірки* 27.1.1.** Яке розвинення у дійсний інтеграл Фур'є має функція

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} signx, & |x| \le 1; \\ 0, & |x| > 1? \end{array}\right. \qquad (27.1.51)$$

***Завдання для самоперевірки* 27.1.2.** Якого значення набуває дійсний інтеграл Фур'є функції (27.1.51) у точках $x = \pm 1$?

***Завдання для самоперевірки* 27.1.3.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t}dt\ ? \qquad (27.1.52)$$

***Вказівка*:** записати розвинення функції (27.1.51) у дійсний інтеграл Фур'є у точці $x = \frac{1}{2}$ та запровадити в отриманому інтегралі змінну $u = 2t$.

***Завдання для самоперевірки* 27.1.4.** Яке розвинення у комплексний інтеграл Фур'є має функція (27.1.51)?

***Завдання для самоперевірки* 27.1.5.** Яке розвинення у дійсний інтеграл Фур'є має функція

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} \sin x, & |x| \le \pi; \\ 0, & |x| > \pi? \end{array}\right. \qquad (27.1.53)$$

***Завдання для самоперевірки* 27.1.6.** Якому значенню дорівнює невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \pi u}{1-u^2}du\ ? \qquad (27.1.54)$$

***Вказівка*:** записати розвинення функції (27.1.53) у дійсний інтеграл Фур'є у точці $x = \pi$.

***Завдання для самоперевірки* 27.1.7.** Яке розвинення у дійсний інтеграл Фур'є має функція

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}\cos\beta x,\ \ x \in R,\ \ \alpha > 0,\ \ \beta \in R? \qquad (27.1.55)$$

Відповіді на завдання для самоперевірки

27.1.1. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u}\sin ux\,du,\quad x \neq \pm 1.$

27.1.2. $\frac{1}{2}$.

27.1.3. $\frac{\pi}{4}$.

27.1.4. $f(x) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos u}{u}e^{-iux}du,\quad x \neq \pm 1.$

27.1.5. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\pi u}{1-u^2}\sin ux\,du,\quad x \in R.$

27.1.6. 0.

27.1.7. $e^{-\alpha|x|}\cos\beta x = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^2+(u-\beta)^2} + \frac{1}{\alpha^2+(u+\beta)^2}\right)\cos ux\,du,\ \ x \in R.$

27.2. Перетворення Фур'є

У формулах (27.1.38)−(27.1.39) виникли інтеграли від комплексно значних функцій дійсного аргумента. Аби коректно означити такі інтеграли, можна повторити всю ту довгу процедуру із застосуванням границь інтегральних сум подібну до тієї, яка була використана у разі означення інтегралів Рімана та невласних інтегралів. Можна передбачити, що таким чином отримані інтеграли комплексно значних функцій дійсного аргумента мали б такі самі властивості, що й останні: лінійність, адитивність, нерівність для модуля інтеграла тощо. Щоб «город не городити», оберемо шлях найменших зусиль. Якщо функція f дійсного аргумента може набувати комплексних значень, то її інтегралом по деякому проміжку $[\alpha, \beta] \subset \bar{R}$ будемо називати інтеграл

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt := \int_\alpha^\beta Ref(t)dt + i\int_\alpha^\beta Imf(t)dt. \quad (27.2.1)$$

Зрозуміло, що інтеграл, означений за формулою (27.2.1), теж матиме властивості лінійності й адитивності, а оцінку модуля інтеграла можна записати у менш строгому вигляді:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt\right| \le \int_\alpha^\beta |Ref(t)|dt + \int_\alpha^\beta |Imf(t)|dt \le 2\int_\alpha^\beta |f(t)|dt. \quad (27.2.2)$$

***Означення* 27.2.1.** *Нехай на множині R означена функція $f: R \to C$. Тоді її **перетворенням Фур'є** називають інтеграл*

$$\hat{f}(x) = F[f] := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos xt\,dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt, \quad x \in R, \quad (27.2.3)$$

а інший інтеграл

$$\check{f}(x) = F^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos xt\,dt - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt, \quad x \in R, \quad (27.2.4)$$

*називають **оберненим перетворенням Фур'є** функції f. Притому всі інтеграли у формулах* (27.2.3)–(27.2.4) *розуміють у їх головному значенні*:

$$\hat{f}(x) = \lim_{\gamma \to +\infty} \int_{-\gamma}^{+\gamma} f(t) e^{ixt} dt,$$

$$\check{f}(x) = \lim_{\gamma \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Зауважимо, що заради симетрії формул у деяких підручниках їх автори означають пряме й обернене перетворення Фур'є у вигляді

$$\hat{f}(x) = F[f] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt}\, dt, \quad x \in R, \tag{27.2.5}$$

$$\check{f}(x) = F^{-1}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt, \quad x \in R, \tag{27.2.6}$$

або у формулах (27.2.5)−(27.2.6) міняють інтеграли місцями. Звісно, це істотно не впливає на теорію перетворення Фур'є і має лише «декоративний» характер. У цьому підручнику, де не зазначено інше, застосовано перший варіант означення, а саме формули (27.2.3)−(27.2.4).

Теорема 27.2.1 (***про визначеність перетворення Фур'є***)**.** *Якщо функція дійсного значення $f\colon R \to R$ є абсолютно інтегрованою на множині R, її пряме* (*та обернене*) *перетворення Фур'є є визначеною обмеженою і неперервною функцією на множині R, для якої чинні границі*

$$\lim_{x \to +\infty} \hat{f}(x) = \lim_{x \to -\infty} \hat{f}(x) = 0. \tag{27.2.7}$$

Доведення. За твердженням **теореми 27.1.1** і її **наслідку 27.1.1** функції

$$a(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos tx\, dt, \quad x \in R,$$

і $$b(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin tx\, dt, \; x \in R,$$

є визначеними обмеженими і неперервними функціями на множині R, які задовольняють границі

$$\lim_{|x|\to+\infty} a(x) = \lim_{|x|\to+\infty} b(x) = 0. \qquad (27.2.8)$$

Тож буде такою самою і їх лінійна комбінація

$$\hat{f}(x) = \pi a(x) + i\pi b(x), \quad x \in R. \qquad (27.2.9)$$

Так само доводять твердження теореми відносно функції

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2} a(x) - i\frac{1}{2} b(x), \quad x \in R. \qquad (27.2.10)$$

Теорему доведено.

***Завдання для самостійної роботи* 27.2.1.** *Нехай функція $f: R \to R$ є неперервною на дійсній числовій осі R та існують скінченні границі на її кінцях*:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty) \in R, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = f(-\infty) \in R.$$

Довести, що тоді функція f рівномірно неперервна на множині R.

***Завдання для самостійної роботи* 27.2.2.** *Довести, що за умов* **теореми 27.2.1** *функції $\hat{f}$ і $\check{f}$ рівномірно неперервні на множині R.*

Теорема 27.2.2 (*про лінійність перетворення Фур'є*). *Якщо функції дійсного значення $f: R \to R$ і $g: R \to R$ є абсолютно інтегрованими на множині R, то за будь-яких сталих $\alpha \in R$ та $\beta \in R$ означене перетворення*

Фур'є (*пряме та обернене*) *лінійної комбінації* $\alpha f + \beta g$ *і справджуються формули*

$$F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g], \qquad (27.2.11)$$

$$F^{-1}[\alpha f + \beta g] = \alpha F^{-1}[f] + \beta F^{-1}[g]. \qquad (27.2.12)$$

Доведення. Твердження теореми є безпосереднім наслідком попередньої **теореми 27.2.1**, **означення 27.2.1** та властивості лінійності невласних інтегралів.

Теорему доведено.

Теорема 27.2.3 (***про похідну перетворення Фур'є***)**.** *Якщо функція дійсного значення* $f: R \to R$ *за деякого натурального числа* $n \in N$ *задовольняє умову*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |t|^n)|f(t)|dt < +\infty, \qquad (27.2.13)$$

то її перетворення Фур'є (*пряме чи обернене*) *має на множині* R *похідні до* n*-го порядку включно*, *які обчислюють за формулами*

$$\left(\hat{f}\right)^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (it)^k f(t) e^{ixt} dt, \;\; x \in R, \;\; k = \overline{1, n}, \qquad (27.2.14)$$

$$\left(\check{f}\right)^{(k)}(x) = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} (it)^k f(t) e^{-ixt} dt, \;\; x \in R, \;\; k = \overline{1, n}, \qquad (27.2.15)$$

і для кожної з яких справедливе твердження **теореми 27.1.1**, *зокрема*,

$$\left(\hat{f}\right)^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t) dt, \quad k = \overline{1, n}, \qquad (27.2.16)$$

$$\left(\check{f}\right)^{(k)}(0) = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t) dt, \quad k = \overline{1, n}. \qquad (27.2.17)$$

Доведення. Якщо справджується нерівність (27.2.13), то за будь-якої точки $x \in R$ всі невласні інтеграли (27.2.14), залежні від параметра x, мажоруються на відрізку $[x-\varepsilon, x+\varepsilon\,]$, $\varepsilon > 0$, інтегралом (27.2.13):

$$\forall\, k = \overline{1,n} \quad \forall x \in R:$$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(it)^k f(t)e^{ixt}dt\right| = \left|i^k\right|\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\cos xt\,dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\sin xt\,dt\right| \le$$

$$\le 2\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|t|^n)|f(t)|dt, \tag{27.2.18}$$

тож за ознакою Вейєрштрасса всі ці інтеграли рівномірно збігаються на вибраному відрізку $[x-\varepsilon, x+\varepsilon\,]$, а їх підінтегральні функції є неперервними на декартовому добутку $(-\infty, +\infty) \times [x-\varepsilon, x+\varepsilon\,]$. Отже, для кожного з інтегралів (27.2.14) справджується **теорема 25.2.5** про диференціювання невласного інтеграла, залежного від параметра, застосувавши яку n разів у вибраній точці x одержимо формули (27.2.14).

До того ж, кожна функція $t^k f(t)$, $k = \overline{1,n}$, задовольняє умови **теореми 27.2.1**, тож для кожної похідної $\left(\hat{f}\right)^{(k)}$справедливі висновки цієї теореми.

Так само доводять твердження теореми відносно $\check{f}$, що є оберненим перетворенням Фур'є функції f.

Теорему доведено.

Теорема 27.2.4 (***про перетворення Фур'є похідної заданої функції***). *Нехай функція* $f\colon R \to R$ *і число* $n \in N$ *такі, що*:

1) *функція* f *є* $n-1$ *раз неперервно диференційованою на множині* R *і має на ній похідну* $f^{(n)}$;

2) *сама функція f та її похідні $f^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, є абсолютно інтегрованими на множині R*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f^{(k)}(t) \right| dt < +\infty, \quad k = \overline{0, n}; \qquad (27.2.19)$$

3) *функція f та її похідні $f^{(k)}$, $k = \overline{1, n-1}$, є нескінченно малими величинами на кінцях числової осі R*:

$$\lim_{x \to +\infty} f^{(k)}(t) = \lim_{x \to -\infty} f^{(k)}(t) = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \qquad (27.2.20)$$

Тоді є визначеним перетворення Фур'є (пряме та обернене) похідної n-го порядку $f^{(n)}$ функції f і справджуються рівності

$$F\left[f^{(n)}\right] = \left(\frac{x}{i}\right)^n F[f];$$

$$F^{-1}\left[f^{(n)}\right] = (ix)^n F^{-1}[f],$$

або *ті самі рівності, записані в іншій символіці*,

$$\widehat{f^{(n)}}(x) = \left(\frac{x}{i}\right)^n \hat{f}(x), \quad x \in R; \qquad (27.2.21)$$

$$\widetilde{f^{(n)}}(x) = (ix)^n \check{f}(x), \quad x \in R. \qquad (27.2.22)$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $n = 1$. Позаяк за умовою (27.2.19) функція f та її похідна f' є абсолютно інтегрованими на множині R, то згідно з **теоремою 27.2.1** перетворення Фур'є $\hat{f}$ і $\widehat{f'}$ цих функцій будуть визначеними. Тож, застосувавши до $\widehat{f'}$ формулу інтегрування частинами, матимемо

$$\widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{ixt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} df(t) =$$

$$= e^{ixt} f(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - ix \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t) dt = \frac{x}{i} \hat{f}(x), \; x \in R. \qquad (27.2.23)$$

Після цього за індукцією отримаємо формулу (27.2.21).

Так само доводять твердження теореми відносно оберненого перетворення Фур'є $\check{f}$ функції f.

Теорему доведено.

Наслідок 27.2.1. *За умов* **теореми 27.2.4** *справедливі границі*

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \hat{f}(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \hat{f}(x) = 0; \qquad (27.2.24)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \check{f}(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \check{f}(x) = 0. \qquad (27.2.25)$$

Доведення. За **теоремою 27.2.1** перетворення абсолютно інтегрованої функції $f^{(n)}$ є нескінченно малою величиною на кінцях числової осі R, тож за рівністю (27.2.21) маємо границю

$$\lim_{|x|\to+\infty} \widehat{f^{(n)}}(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{x}{i}\right)^n \hat{f}(x) = 0, \qquad (27.2.26)$$

яка, у свою чергу, зумовлює границю (27.2.24).

Такі самі міркування доводять границю (27.2.25).

Твердження доведене.

Означення* 27.2.2.** *Нехай є визначеними функції $f: R \to R$ та $g: R \to R$, тоді їх* ***згорткою $f * g$ *називають інтеграл*

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt, \quad x \in R. \qquad (27.2.27)$$

Теорема 27.2.5 (*про комутативність згортки*). *Нехай функції $f: R \to R$ та $g: R \to R$ є такими, що*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt < +\infty. \qquad (27.2.28)$$

Тоді згортка $f * g$ є абсолютно інтегрованою на множині R функцією і справедлива рівність

$$(f * g)(x) = (g * f)(x), \ \ x \in R. \qquad (27.2.29)–$$

Доведення. Абсолютна інтегрованість згортки $f * g$ є наслідком нерівності Коші−Шварца для невласних інтегралів.

Запровадивши в інтегралі (27.2.27) змінну $x - t = \tau$, отримаємо тотожність (27.2.29):

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau = (g * f)(x), x \in R.$$

Теорему доведено.

***Завдання для самостійної роботи* 27.2.3.** *Нехай $L_b^1(R)$ − це евклідів простір обмежених і абсолютно інтегрованих на множині R функцій. Довести, що*:

1) $f \in L_b^1(R),\ g \in L_b^1(R) \ \Rightarrow \ (f * g) \in L_b^1(R)$;

2) $f \in L_b^1(R),\ g \in L_b^1(R) \ \Rightarrow \ f * g = g * f$;

3) $f \in L_b^1(R),\ g \in L_b^1(R),\ h \in L_b^1(R) \ \Rightarrow \ (f * g) * h = f * (g * h)$.

Теорема 27.2.6 (*про перетворення Фур'є згортки*). *Нехай абсолютно інтегровані на множині R функції $f: R \to R$ і $g: R \to R$ задовольняють нерівності* (27.2.28), *тоді для їх перетворень Фур'є $\hat{f}$ і $\hat{g}$ справедлива рівність*

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}, \qquad (27.2.30)$$

тобто $$F[f * g] = F[f] \cdot F[g] \tag{27.2.31}$$

Доведення. Якщо функції $f: R \to R$ та $g: R \to R$ є абсолютно інтегрованими на множині R і задовольняють нерівності (27.2.28), то справджуються всі умови **теореми 25.2.7** про інтегрування по нескінченному проміжку невласного інтеграла, залежного від параметра, за висновком якої матимемо:

$$(\widehat{f * g})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) e^{ixt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) e^{ixt} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) e^{ixt} dt \right) g(\tau) d\tau = \left| \begin{matrix} \text{заміна:} \\ t - \tau = \omega \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{ix(\tau+\omega)} d\omega \right) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{ix\omega} d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{ix\tau} d\tau =$$

$$= \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x), \quad x \in R.$$

Теорему доведено.

***Завдання для самостійної роботи* 27.2.4.** *Довести, що*:

1) $f \in L_b^1(R),\ g \in L_b^1(R) \ \Rightarrow \ F[f * g] = F[f] \cdot F[g]$;

2) $f \in L_b^1(R), g \in L_b^1(R), h \in L_b^1(R) \ \Rightarrow \ F[f * g * h] = F[f] \cdot F[g] \cdot F[h]$.

Теорема 27.2.7 (*про границю послідовності перетворень Фур'є функцій*). *Нехай абсолютно інтегровані на множині R функції* $f: R \to R$ *та* $f_n: R \to R,\ n \in N$, *задовольняють умові*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)| dt \to 0, \ \ n \to +\infty, \tag{27.2.32}$$

тоді послідовність перетворень Фур'є функцій $f_n,\ n \in N$, *рівномірно збігається на множині R до перетворення Фур'є функції* f:

$$\hat{f}_n \underset{R}{\rightrightarrows} \hat{f}, \quad n \to +\infty. \tag{27.2.33}$$

Доведення. На множині N справедлива оцінка

$$\sup_{x\in R}\left|\hat{f}_n - \hat{f}\right| = \sup_{x\in R}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\big(f_n(t) - f(t)\big)e^{ixt}dt\right| \le 2\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t) - f(t)|dt,$$

яка разом з умовою (27.2.32) спричиняє твердження теореми.

Теорему доведено.

Теорема 27.2.8 (***про взаємну оберненість перетворень Фур'є***). *Якщо усереднена кусково-гладка функція $f: R \to R$ є абсолютно інтегрованою на множині R, то справедливі формули*

$$F^{-1}\big[F[f]\big] = f, \; x \in R, \tag{27.2.34}$$

$$F\big[F^{-1}[f]\big] = f, \; x \in R. \tag{27.2.35}$$

Доведення. За умов теореми абсолютно інтегрована на множині R функція f у кожній точці $x \in R$ має скінченні ліву $f'(x-0) \in R$ та праву $f'(x+0) \in R$ похідні та є усередненою, себто

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x), \; x \in R.$$

У такому разі у кожній точці множини R справедливі інтегральні формули Фур'є у комплексній формі (27.1.39) та (27.1.50), які є рівносильними вказаним тотожностям (27.2.34) та (27.2.35).

Теорему доведено.

Зауважимо, що неперервна на множині R функція є усередненою на ній, тож висновок щойно доведеної **теореми 27.2.8** залишиться чинним, якщо умову усередненості на множині R , накладену на функцію f, замінити на умову неперервності функції f на цій множині.

***Приклад* 27.2.1.** Нехай $\hat{f}$ – це перетворення Фур'є абсолютно інтегрованої на множині R функції $f: R \to R$, а $\hat{g}$ − перетворення Фур'є функції

$$g(t) \coloneqq f(t-\alpha),\ t \in R, \tag{27.2.36}$$

за деякої сталої $\alpha \in R$. Довести справедливість формули

$$\hat{g}(x) = e^{i\alpha x}\hat{f}(x),\ x \in R. \tag{27.2.37}$$

Розв'язання. Легко перевірити, що за будь-якого значення $\alpha \in R$ абсолютна інтегрованість функції f на множині R зумовлює абсолютну інтегрованість функції g на цій множині. Тоді за означенням перетворення Фур'є функцій f і g маємо

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{ixt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\alpha)e^{ixt}dt = \left|\begin{matrix}\text{заміна:}\\ t-\alpha=\tau\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{ix(\alpha+\tau)}d\tau = e^{i\alpha x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{ix\tau}d\tau = e^{i\alpha x}\hat{f}(x),\ x \in R.$$

***Відповідь*:** за вказаних умов формула (27.2.37) правдива.

***Приклад* 27.2.2.** Нехай $\hat{f}$ – це перетворення Фур'є абсолютно інтегрованої на множині R функції $f: R \to R$, а $\hat{g}$ − перетворення Фур'є функції

$$g(t) \coloneqq f(\beta t),\ \ t \in R, \tag{27.2.38}$$

за деякої сталої $\beta > 0$. Довести справедливість формули

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{\beta}\hat{f}\left(\frac{x}{\beta}\right),\ \ x \in R. \tag{27.2.39}$$

Розв'язання. За будь-якого значення $\beta > 0$ абсолютна інтегрованість функції f на множині R зумовлює абсолютну інтегрованість функції g на цій множині, тож за означенням перетворення Фур'є функцій f і g маємо

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{ixt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\beta t)e^{ixt}dt = \left|\begin{matrix}\text{заміна:}\\ \beta t = \tau\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{\frac{ix\tau}{\beta}}\frac{d\tau}{\beta} = \frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{i\left(\frac{x}{\beta}\right)\tau}d\tau = \frac{1}{\beta}\hat{f}\left(\frac{x}{\beta}\right),\ x \in R.$$

***Відповідь*:** за вказаних умов формула (27.2.39) правдива.

Після доведеної **теореми 27.2.8** стає цілком зрозуміло, що перетворення Фур'є слід розглядати на множині комплексно значних функцій, ширшій за множину функцій дійсного значення. Власне, вже інтегральна формула Фур'є, записана у комплексній формі (27.1.38) чи (27.1.50), прямо вказувала на таку необхідність, тож для спрощення доведення **теореми 27.2.1− 27.2.8** були сформульовані лише для функцій дійсного значення $f\colon R \to R$, однак ці теореми легко можуть бути перенесені на випадок комплексно значних функцій.

Справді, якщо комплексно значну функцію $f\colon R \to C$ розкласти на її дійсну та уявну частини

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t),\quad t \in R,$$

то за означенням інтеграла від такої функції (27.2.1) матимемо

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\big(f_1(t) + if_2(t)\big)e^{ixt}\,dt = \widehat{f_1}(x) + i\widehat{f_2}(x),\ x \in R, \quad (27.2.40)$$

себто перетворення Фур'є функції f розкладається у комплексну суму перетворень Фур'є функцій дійсного значення $f_1\colon R \to R$ та $f_2\colon R \to R$. Отже, якщо накласти на дійсну $f_1 = Ref$ та уявну $f_2 = Imf$ частини функції f такі самі умови, що були сформульовані у **теоремах 2.7.1–2.7.8**, то твердження цих теорем буде справджуватися і для комплексно значної функції f. Наприклад, якщо функції f_1, f_2 та g задовольняють умови **теореми 27.2.6**, то за всіх $x \in R$ маємо

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f_1(t) + if_2(t)\big) g(x-t)dt = (f_1 * g)(x) + i(f_2 * g)(x),$$

звідки за **теоремою 27.2.6** матимемо

$$F[f * g] = F[f_1 * g] + iF[f_2 * g] = F[f_1] \cdot F[g] + iF[f_2] \cdot F[g] =$$
$$= (F[f_1] + iF[f_2]) \cdot F[g] = F[f] \cdot F[g], \qquad (27.2.41)$$

Отже, одну із функцій у формулі (27.2.31) можна замінити на комплексно значну функцію, після чого, діючи за зразком (27.2.41), можна на таку функцію замінити і другу функцію у рівності (27.2.31).

Між тим, якщо функція дійсного значення $f: R \to R$ є або парною, або непарною на дійсній осі R, то її перетворення Фур'є, пряме й обернене, набувають простішого вигляду. Так, якщо f – функція парна, то другий доданок у сумах (27.2.3)–(27.2.4) буде рівний нулю, а перший можна подати як подвоєний інтеграл по півосі $[0, +\infty)$, тож

$$\hat{f}(x) = F[f] = 2\int_0^{+\infty} f(t) \cos xt\, dt,\ x \in R, \qquad (27.2.42)$$

$$\check{f}(x) = F^{-1}[f] = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t) \cos xt\, dt,\ x \in R. \qquad (27.2.43)$$

У такому разі означення прямого та оберненого перетворень Фур'є дещо видозмінюють, записуючи їх у вигляді

$$\hat{f}_c(x) = F_c[f] := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t) \cos xt\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(x),\ x \in R, \qquad (27.2.44)$$

$$\check{f}_c(x) = F_c{}^{-1}[f] := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t) \cos xt\, dt = \sqrt{2\pi}\, \check{f}(x),\ x \in R, \qquad (27.2.45)$$

і називають, відповідно, прямим та оберненим ***косинус-перетворенням Фур'є*** функції f.

Так само, якщо f – непарна функція, то її пряме та обернене перетворення Фур'є набувають вигляду

$$\hat{f}(x) = F[f] = 2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt,\ x \in R, \qquad (27.2.46)$$

$$\check{f}(x) = F^{-1}[f] = -\frac{i}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt,\ x \in R, \qquad (27.2.47)$$

відповідно пряме та обернене ***синус-перетворення Фур'є*** означають за формулами

$$\hat{f}_s(x) = F_s[f] := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\hat{f}(x)\,,\ x \in R, \qquad (27.2.48)$$

$$\check{f}_s(x) = F_s^{-1}[f] := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt = i\sqrt{2\pi}\check{f}(x)\,,\ x \in R. \quad (27.2.49)$$

***Приклад* 27.2.3**. Функцію дійсного значення $h: R \to R$, означену за формулою

$$h(t) := \left[\begin{array}{l} 1,\ t \geq 0; \\ 0,\ t < 0, \end{array}\right. \qquad (27.2.50)$$

називають ***функцією Хевісайда***. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(\,t) = \frac{h(t-\beta)-h(t+\beta)}{2},\ \ \beta > 0\,. \qquad (27.2.51)$$

Розв'язання. Задана функція f є абсолютно інтегрованою на множині R, тож її перетворення Фур'є є визначеним, його обчислюють за формулою (27.2.3):

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}\,dt = \int_{-\beta}^{\beta}\frac{e^{ixt}}{2}dt = \frac{e^{ixt}}{2ix}\bigg|_{-\beta}^{\beta} = \frac{e^{i\alpha t}-e^{-i\beta t}}{ix} = \frac{\sin\beta x}{x},\ \ x \neq 0;$$

$$\hat{f}(0) = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{dt}{2} = \beta, \quad x = 0.$$

Відповідь: $\hat{f}(x) = \left[\begin{array}{ll} \frac{\sin \beta x}{x}, & x \neq 0; \\ \beta, & x = 0. \end{array}\right.$ (27.2.52)

Зауважимо, що позаяк функція (27.2.51) є парною, то у ***прикладі* 27.2.3** можна було скористатися також формулою (27.2.42):

$$\hat{f}(x) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t) \cos xt\, dt = \int_{0}^{\beta} \cos xt\, dt = \frac{\sin xt}{x}\Big|_{0}^{\beta} = \frac{\sin \beta x}{x}, \ x \neq 0;$$

$$\hat{f}(0) = \int_{0}^{\beta} dt = \beta, \quad x = 0.$$

***Приклад* 27.2.4.** Знайти перетворення Фур'є функції

$$g(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}, \quad t \in R. \tag{27.2.53}$$

Розв'язання. Легко перевірити, що функція (27.2.53) є абсолютно інтегрованою на множині R:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt = 2\int_{0}^{+\infty} d\left(\frac{-1}{1+t^2}\right) = \frac{-2}{1+t^2}\Big|_{0}^{+\infty} = 2 < +\infty.$$

До того ж, під час інтегрування було помічено, що

$$g(t) = f'(t), \ f(t) = -\frac{1}{1+t^2}, \quad t \in R,$$

і, звісно, парна функція f також є абсолютно інтегрованою на множині R функцією, яка задовольняє всі вимоги **теореми 27.2.4** про перетворення Фур'є похідної заданої функції. Тоді згідно з висновком вказаної теореми маємо:

$$\hat{g}(x) = \widehat{f'}(x) = -ix\hat{f}(x), \ x \in R, \tag{27.2.54}$$

тож застосувавши формулу (27.2.42) перетворення Фур'є парної функції та скориставшись формулою (27.1.46) інтеграла Лапласа, матимемо

$$\hat{f}(x) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos xt\,dt = -2\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2}dt = (-2)\cdot\frac{\pi}{2}e^{-|x|} = -\pi e^{-|x|}.$$

Зрештою, за формулою (27.2.54) отримаємо

$$\hat{g}(x) = F\left[\frac{2t}{(1+t^2)^2}\right] = ix\pi e^{-|x|},\ x \in R. \tag{27.2.55}$$

***Відповідь*:** $\hat{g}(x) = ix\pi e^{-|x|},\ x \in R.$

Позаяк функція (27.2.53) є непарною, то її перетворення Фур'є можна знайти за формулою (27.2.46):

$$\hat{g}(x) = 2i\int_0^{+\infty} g(t)\sin xt\,dt = 2i\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\sin xt\,dt,\ x \in R, \tag{27.2.56}$$

тож порівнюючи отримані вирази (27.2.55) і (27.2.56), знайдемо ще один невласний інтеграл, залежний від параметра:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\sin xt}{(1+t^2)^2}dt = \frac{x\pi}{4}e^{-|x|},\ x \in R. \tag{27.2.57}$$

***Приклад* 27.2.5.** Знайти перетворення Фур'є $\hat{f}$ функції

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}},\ t \in R, \tag{27.2.58}$$

яку називають ***густиною стандартного нормального*** (***гаусового***) ***розподілу*** випадкової величини. Саму функцію $\hat{f}$ називають ***характеристичною функцією*** стандартного гаусового розподілу.

Розв'язання. Як було доведено вище, справджується рівність (25.2.75):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1.$$

Отже, функція f є парною абсолютно інтегрованою на множині R функцією, тож за формулою (27.2.42) маємо

$$\hat{f}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\cos xt\,dt,\ \ x \in R. \qquad (27.2.59)$$

Легко перевірити, що невласний інтеграл (27.2.59) задовольняє всі умови **теореми 25.2.5** про диференціювання невласного інтеграла, залежного від параметра, застосувавши яку, після інтегрування частинами одержимо

$$\frac{d}{dx}\hat{f}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}(-t\sin xt)dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\sin xt\, d\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sin xt\,\Big|_{0}^{+\infty} - x\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\cos xt\,dt = -x\hat{f}(x),\ \ \ x \in R.$$

До того ж,

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1.$$

Отже, шукана функція $\hat{f}$ визначається диференціальною задачею Коші

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\hat{f}(x) = -x\hat{f}(x),\ x \in R; \\ \qquad\qquad \hat{f}(0) = 1, \end{cases}$$

єдиним розв'язком якої є функція

$$\hat{f}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in R. \qquad (27.2.60)$$

***Відповідь*:** $\hat{f}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in R.$

***Приклад* 27.2.6.** Перетворення Фур'є $\hat{g}$ функції

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}, \ t \in R, \tag{27.2.61}$$

у теорії ймовірностей називають ***характеристичною функцією*** випадкової величини, що має ***нормальний розподіл з параметрами*** $a \in R$ і $\sigma > 0$. Знайти характеристичну функцію $\hat{g}$.

Розв'язання. Можна помітити, що задана функція g і функція (27.2.58) пов'язані між собою рівністю

$$g(t) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{t-a}{\sigma}\right), \ \ t \in R,$$

тож застосувавши послідовно лінійність перетворення Фур'є, правило (27.2.39) і правило (27.2.37), в якому покладено $\frac{1}{\beta} = \sigma$, матимемо

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot e^{i\alpha x} \cdot \sigma \hat{f}(\sigma x) = e^{i\alpha x - \frac{\sigma^2 x^2}{2}}, \ \ x \in R. \tag{27.2.62}$$

***Відповідь*:** $\hat{g}(x) = e^{i\alpha x - \frac{\sigma^2 x^2}{2}}, \ \ x \in R.$

***Приклад* 27.2.7.** Знайти абсолютно інтегровану неперервно диференційовану на множині $(0, +\infty)$ функцію $f: (0, +\infty) \to R$, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$\int_0^{+\infty} f(t) \sin xt \, dt = e^{-x}, \ \ x > 0. \tag{27.2.63}$$

Розв'язання. Доозначимо функцію f на від'ємну піввісь $(-\infty, 0)$, подовживши на ній функцію f непарним чином і поклавши $f(0) = 0$:

$$f_R(t) := \begin{cases} +f(t), & t \in (0, +\infty); \\ 0, & t = 0; \\ -f(t), & t \in (-\infty, 0). \end{cases} \tag{27.2.64}$$

Щойно утворена функція f_R є абсолютно інтегрованою неперервно диференційованою усередненою непарною на множині R, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$2i\int_0^{+\infty} f_R(t)\sin xt\,dt = 2ie^{-x},\quad x \in R, \qquad (27.2.65)$$

яке згідно з формулою (27.2.46) рівносильне рівності

$$\widehat{f_R}(x) = F[f_R] = 2ie^{-x},\ x \in R.$$

Отже, за **теоремою 27.2.8** і формулою (27.2.47) матимемо

$$f_R(t) = F^{-1}\big[F[f_R]\big] = -\frac{i}{\pi}\int_0^{+\infty}\widehat{f_R}(x)\sin xt\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin xt\,dx = \frac{2t}{\pi(1+t^2)},\quad t \in R\ .$$

Якщо $t > 0$, то $f(t) = f_R(t)$, тож шукана функція має вигляд

$$f(t) = \frac{2t}{\pi(1+t^2)},\quad t > 0.$$

***Відповідь*:** $f(t) = \frac{2t}{\pi(1+t^2)},\quad t \in (0,+\infty).$

***Приклад* 27.2.8.** Знайти функцію $u: R \times (0,+\infty) \to R$, якщо:

1) функція u неперервно диференційована на множині $R \times (0,+\infty)$;

2) за кожного фіксованого значення $t \geq 0$ справедливі границі

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = \lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0;$$

3) за кожного фіксованого значення $t > 0$ існує похідна $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, і всі функції u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ є абсолютно інтегрованими за змінною $x \in R$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)| dx < \infty, \ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right| dx < \infty, \ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \right| dx < \infty;$$

4) задана абсолютно інтегрована на множині R функція $f: R \to R$ така, що

$$u(x,0) = f(x), \ x \in R; \qquad (27.2.66)$$

5) справджується рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in R, \qquad (27.2.67)$$

яке називають ***рівнянням теплопровідності*** з початковою умовою (27.2.66).

Розв'язання. Складемо рівняння відносно функції

$$\hat{u}(\tau,t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\tau} u(x,t) dx, \ \tau \in R, \ t \geq 0,$$

що є перетворенням Фур'є за змінною $x \in R$ шуканої функції u. Для цього помножимо обидві частини рівняння (27.2.67) на вираз $e^{ix\tau}$ і зінтегруємо отриману рівність за змінною x у межах від $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\tau} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) dx, \ \tau \in R, \ t > 0. \quad (27.2.68)$$

За кожного фіксованого значення $\tau \in R$ невласний інтеграл з лівої частини рівняння (27.2.68) рівномірно збігається за параметром t на інтервалі $(0, +\infty)$ (ознака Вейєрштрасса), а його підінтегральна функція є неперервною за змінними x, t на множині $R \times (0, +\infty)$, а отже, за формулою Лейбніца для невласних інтегралів (25.2.26) матимемо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\tau} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\tau} u(x,t) dx = \frac{d}{dt} \hat{u}(\tau,t), \ \tau \in R, \ t > 0.$$

Так само, застосувавши до інтеграла із правої частини рівняння (27.2.68) **теорему 27.2.4** про перетворення Фур'є похідної, за формулою (27.2.23) одержимо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)dx = -\tau^2 \hat{u}(\tau,t),\ \ \tau \in R,\ \ t > 0.$$

Отже, рівняння (27.2.68) є рівносильним рівнянню

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(\tau,t) = -\tau^2 \hat{u}(\tau,t),\ \ \tau \in R,\ \ t > 0. \qquad (27.2.69)$$

До того ж, за умовою (27.2.66) маємо

$$\hat{u}(\tau,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\tau} f(x)dx = \hat{f}\,(\tau),\ \ \ \tau \in R. \qquad (27.2.70)$$

У такому разі за кожного фіксованого значення $\tau \in R$ функція $\hat{u}$ визначається диференціальною задачею Коші (27.2.69)–(27.2.70):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{u}(\tau,t) = -\tau^2 \hat{u}(\tau,t),\ \ \tau \in R,\ \ t > 0; \\ \quad \hat{u}(\tau,0) = \hat{f}(\tau)\,, \qquad\qquad \tau \in R, \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок

$$\hat{u}(\tau,t) = e^{-\tau^2 t}\hat{f}(\tau),\ \ \tau \in R,\ \ t \geq 0. \qquad (27.2.71)$$

Якщо парна за змінною $\tau \in R$ функція $\hat{g}(\tau,t) = F[g] = e^{-\tau^2 t}$ є перетворенням Фур'є деякої функції $g = g(x,t)$, $t > 0$, $x \in R$, то відновити невідому функцію g можна, послідовно застосувавши формули (27.2.34), (27.2.43) та формулу інтеграла Лапласа (25.2.101):

$$g(x,t) = F^{-1}\big[F[g]\big] = F^{-1}[\hat{g}] = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{g}(\tau,t)\cos x\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2 t}\cos x\tau\, d\tau = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},\ \ t > 0,\ \ x \in R,$$

тож за **теоремою 27.2.6** про перетворення Фур'є згортки у підсумку маємо

$$u(x,t) = (f * g)(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(x-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4t}} f(\tau) d\tau, \ x \in R, \ t > 0. \qquad (27.2.72)$$

Відповідь: $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4t}} f(\tau) d\tau, \ x \in R, \ t > 0.$

***Завдання для самостійної роботи* 27.2.5.** *Довести, що для невласного інтеграла, який міститься у правій частині рівняння* (27.2.68), *є чинним висновок* **теореми 27.2.4**.

***Завдання для самостійної роботи* 27.2.6.** *Нехай* $\hat{f}$ *– це перетворення Фур'є абсолютно інтегрованої на множині* R *функції* $f: R \to R$, *тоді як функція* $\hat{g}$ *– перетворення Фур'є функції*

$$g(t) := e^{i\alpha t} f(t), \quad t \in R, \qquad (27.2.73)$$

за деякої сталої $\alpha \in R$. *Довести, що*

$$\hat{g}(x) = \hat{f}(x+\alpha), \quad x \in R. \qquad (27.2.74)$$

***Завдання для самостійної роботи* 27.2.7.** *Нехай* $\hat{f}$ *– це перетворення Фур'є абсолютно інтегрованої на множині* R *функції* $f: R \to R$, *а функція* $\hat{g}$ *є перетворенням Фур'є функції*

$$g(t) := f(-t), \quad t \in R, \qquad (27.2.75)$$

за деякої сталої $\alpha \in R$. *Довести, що*

$$\hat{g}(x) = \overline{\hat{f}(x)}, \quad x \in R, \qquad (27.2.76)$$

де символом $\overline{\hat{f}(x)}$ позначено комплексно спряжений вираз до функції $\hat{f}(x)$.

Завдання для самоперевірки **27.2.1.** Знайти перетворення Фур'є комплексно значної функції

$$f(\,t) = e^{i\alpha t}\,\frac{h(t-\beta)-h(t+\beta)}{2}, \quad \beta > 0, \quad \alpha \in R. \qquad (27.2.77)$$

Завдання для самоперевірки **27.2.2.** Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(t) = \left[\begin{array}{ll} \cos t, & |t| \le \pi; \\ 0, & |t| > \pi. \end{array}\right. \qquad (27.2.78)$$

***Вказівка*:** подати задану функцію у вигляді

$$f(t) = e^{it}\,\frac{h(t-\pi)-h(t+\pi)}{2} + e^{-it}\,\frac{h(t-\pi)-h(t+\pi)}{2}, \quad t \in R,$$

і скористатися відповіддю попереднього питання.

Завдання для самоперевірки **27.2.3.** Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(t) = \left[\begin{array}{ll} \cos t, & |t| \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{2}. \end{array}\right. \qquad (27.2.79)$$

Завдання для самоперевірки **27.2.4.** Знайти перетворення Фур'є функції

$$g(t) = \left[\begin{array}{ll} \sin t, & |t| \le \pi; \\ 0, & |t| > \pi. \end{array}\right. \qquad (27.2.80)$$

Завдання для самоперевірки **27.2.5.** Функції f та g, означені за формулами (27.2.78) та (27.2.80), задовольняють рівність

$$f(t) = g'(t), \quad t \ne \pm\pi. \qquad (27.2.81)$$

Чи можна до перетворення Фур'є функції g застосувати **теорему 27.2.4** про перетворення Фур'є похідної заданої функції?

Завдання для самоперевірки **27.2.6.** Функції f та g, означені за формулами (27.2.78) та (27.2.80), задовольняють рівність

$$g(t) = -f'(t), \quad t \neq \pm\pi. \qquad (27.2.82)$$

Чи можна до перетворення Фур’є функції g застосувати **теорему 27.2.4** про перетворення Фур’є похідної заданої функції? Чому?

***Завдання для самоперевірки* 27.2.7.** Знайти перетворення Фур’є функції

$$f(\,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos \alpha t, \; t \in R, \; \alpha \in R. \qquad (27.2.83)$$

***Вказівка*:** подати задану функцію у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{e^{\alpha i t}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{e^{-\alpha i t}}{2}, \quad t \in R,$$

і скористатися відповіддю ***прикладу* 27.2.5** та твердженням ***завдання для самостійної роботи* 27.2.6**.

***Завдання для самоперевірки* 27.2.8.** Знайти перетворення Фур’є функції

$$g(\,t) = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in R. \qquad (27.2.84)$$

***Вказівка*:** подати задану функцію у вигляді

$$g(\,t) = f'(t), \quad t \in R,$$

де функція f – це густина стандартного нормального (гаусівського) розподілу із ***прикладу* 27.2.5**.

***Завдання для самоперевірки* 27.2.9.** Знайти синус-перетворення Фур’є функції g, яка означена формулою (27.2.80).

Відповіді на завдання для самоперевірки

27.2.1. $\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin\beta(x+\alpha)}{x+\alpha}, & x \neq -\alpha; \\ \beta, & x = -\alpha. \end{cases}$

27.2.2. $\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{2x\sin\pi x}{1-x^2}, & x \neq \pm 1; \\ \pi, & x = \pm 1. \end{cases}$

27.2.3. $\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{2\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x^2}, & x \neq \pm 1; \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm 1. \end{cases}$

27.2.4. $\hat{g}(x) = \begin{cases} \frac{2i\sin\pi x}{1-x^2}, & x \neq \pm 1; \\ \pm i\pi, & x = \pm 1. \end{cases}$

27.2.5. Так. Отже, $\hat{f}(x) = \frac{x}{i}\hat{g}(x),\ x \in R.$

27.2.6. Ні. Порушена умова неперервності функції $-f$ на множині R, а саме: функція $-f$ має розриви у точках $t = \pm\pi$.

27.2.7. $\hat{f}(x) = e^{-\frac{x^2+\alpha^2}{2}} ch\alpha x,\ \ x \in R.$

27.2.8. $\hat{f}(x) = \frac{x}{i} e^{-\frac{x^2}{2}},\ \ x \in R.$

27.2.9. $\hat{g}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\pi x}{1-x^2}, & x \neq \pm 1; \\ \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & x = \pm 1. \end{cases}$

Література

1. Артин Эмиль. Введение в теорию гамма-функций / Эмиль Артин. – Изд. 2-е. – М. : Кн. дом «Либроком», 2009. – 40 с.

2. Бугров Я. С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, Физ.-мат. л-ра, 1984. – 432 с.

3. Бугров Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного : учеб. для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, Физ.-мат. л-ра, 1985. – 464 с.

4. Вища математика : Підручник. У 2-х кн. Кн. 2. Спеціальні розділи / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін. ; за ред. Г. Л. Кулініча. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. –368 с.

5. Дороговцев А. Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении : учеб. для вузов / А. Я. Дороговцев. – Изд. 2-е. – Киев : Факт, 2004. – 560 с.

6. Ильин В. А. Основы математического анализа : учеб. для вузов. В 2 ч. Ч. I. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 7-е изд. – М. : Физматлит, 2005. – 648 с.

7. Ильин В. А. Основы математического анализа : учеб. для вузов. В 2 ч. Ч. II. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 4-е изд. – М. : Физматлит, 2002. – 464 с.

8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : учеб. для студ. ун-тов и вузов. В 3 т. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1988. – 712 с.

9. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : учеб. для студ. ун-тов и вузов. В 3 т. Т. 2 / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1988. – 576 с.

10. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : учеб. для студ. ун-тов и вузов. В 3 т. Т. 3 / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1988. – 352 с.

11. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа : учеб. для вузов / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука, Физ.-мат. л-ра, 1989. − 736 с.

12. Кудрявцев Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. − М. : Наука, Физ.-мат. л-ра, 1986. – 528 с.

13. Кудрявцев Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – СПб., 1994. – 496 с.

14. Ляшко И. И. Справочное пособие по математическому анализу. Введение в анализ, производная, интеграл / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. − Изд. 2-е, перераб. и доп. – Киев : Вища шк., 1984. – 456 с.

15. Ляшко И. И. Справочное пособие по математическому анализу. Ряды, функции векторного аргумента, кратные и криволинейные интегралы / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. − Изд. 2-е, перераб. и доп. – Киев : Вища шк., 1986. –567 с.

16. Математический анализ : Сб. задач / А. Я. Дороговцев – Киев : Вища шк. Голов. изд-во, 1987. – 408 с.

17. Никольский С. М. Курс математического анализа : учеб. для вузов. В 2 т. Т. 1 / С. М. Никольский. – Изд. 2-е, испр. и доп. − М. : Наука, Физ.-мат. л-ра, 1975. − 432 с.

18. Никольский С. М. Курс математического анализа : учеб. для вузов. В 2 т. Т. 2 / С. М. Никольский. − Изд. 2-е, испр. и доп. − М. : Наука, Физ.-мат. л-ра, 1975. – 408 с.

19. Овчинников П. П. Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – Київ : Техніка, 2007. − 600 с.

20. Овчинников П. П. Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 2. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Теорія ймовірностей. Числові методи / П. П. Овчинников, В. М. Михайленко. – Київ : Техніка, 2004. − 792 с.

21. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х ч. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа : учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. ; под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. − 2-е изд., испр. и доп. − М. : Наука, Физ.-мат. л-ра, 1986. − 464 с.

22. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х ч. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа : учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. ; под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. − 2-е изд., испр. и доп. − М. : Наука, Физ.-мат. л-ра, 1986. – 368 с.

23. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов и др. ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. − М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. л-ры, 1986. – 528 с.

24. Сборник задач по математическому анализу: Предел. Непрерывность. Дифференцируемость : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов и др. ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. − М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. л-ры, 1984. – 592 с.

25. Сборник задач по математическому анализу: Функции нескольких переменных : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов и др. ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. − М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. л-ры, 1994. – 528 с.

26. Тер-Крикоров А. М. Курс математического анализа : учеб. пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. Н. Шабунин. – М. : Наука, Физ.-мат. л-ра, 1988. – 816 с.

27. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. пособие для ун-тов. В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, Физ.-мат. л-ра, 1970. – 608 с.

28. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. пособие для ун-тов. В 3 т. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, Физ.-мат. л-ра, 1970. – 800 с.

Інформаційні ресурси

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2005. – 648 с. – Режим доступу : http://library.kpi.ua:8991/F/V467KL684MQGAPRA4I9MDIFGD2VHBNMNQBARSIJGRU6SKIP181-01757?func=full-set-set&set_number=797795&set_entry=000003&format=999

2. Дубовик В. П. Вища математика. Зб. задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2005. – 648 с. – Режим доступу : http://library.kpi.ua:8991/F/V467KL684MQGAPRA4I9MDIFGD2VHBNMNQBARSIJGRU6SKIP181-02049?func=full-set-set&set_number=797796&set_entry=000018&format=999

3. Грималюк В. П. Вища математика : навч. посіб. У 2 ч. Ч.1 / В. П. Грималюк, М. М. Кухарчук, В. В. Ясінський. – Київ : Віпол, 2004. – 376 с. – Режим доступу : http://library.kpi.ua:8991/F/V467KL684MQGAPRA4I9MDIFGD2VHBNMNQBARSIJGRU6SKIP181-02550?func=full-set-set&set_number=797798&set_entry=000004&format=999

4. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння : консп. лекцій (І курс, ІІ семестр) / Уклад. : В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 144 с. – Режим доступу : http://matan.kpi.ua/uk/files.html

5. Диференціальне числення функцій кількох змінних. Визначені інтеграли. Диференціальні рівняння : практикум (І курс, ІІ семестр) / Уклад. : І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. – Київ : НТУУ «КПІ», 2011. – 184 с. – Режим доступу : http://matan.kpi.ua/uk/files.html

6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для студ. втузов. В 2-х ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. –М. : Высш. шк., 1999. – Ч. 1. – 304 с. – Режим доступа : http://library.kpi.ua:8991/F/V467KL684MQGAPRA4I9MDIFGD2VHBNMNQBARSIJGRU6SKIP181-03906?func=full-set-set&set_number=797805&set_entry=000005&format=999

7. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х ч. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа : Учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. ; под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1993. – 480 с. – Режим доступа : http://library.kpi.ua:8991/F/V467KL684MQGAPRA4I9MDIFGD2VHBNMNQBARSIJGRU6SKIP181-00457?func=full-set-set&set_number=797807&set_entry=000002&format=999

8. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие. – 22-е изд., перераб. – СПб. : Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с. – Режим доступа :
http://library.kpi.ua:8991/F/V467KL684MQGAPRA4I9MDIFGD2VHBNMNQBARSIJGRU6SKIP181-00665?func=full-set-set&set_number=797808&set_entry=000004&format=999

9. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. для студ. инж.-техн. спец. вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Ростов н/Д. : Феникс, 1997. – 189 с. – Режим доступа :
http://library.kpi.ua:8991/F/V467KL684MQGAPRA4I9MDIFGD2VHBNMNQBARSIJGRU6SKIP181-00544?func=full-set-set&set_number=817703&set_entry=000008&format=999

10. Бугров Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Ростов н/Д. : Феникс, 1997. – 512 с. – Режим доступа :
http://library.kpi.ua:8991/F/V467KL684MQGAPRA4I9MDIFGD2VHBNMNQBARSIJGRU6SKIP181-00687?func=full-set-set&set_number=817704&set_entry=000005&format=999

11. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов. В 2-х т. / Н. С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2002. – Т. 2. – 544 с. – Режим доступа :
http://library.kpi.ua:8991/F/V467KL684MQGAPRA4I9MDIFGD2VHBNMNQBARSIJGRU6SKIP181-01000?func=full-set-set&set_number=817706&set_entry=000010&format=999

12. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов. В 2-х т. / Н. С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2002. – Т.1. – 416 с. – Режим доступа :
http://library.kpi.ua:8991/F/V467KL684MQGAPRA4I9MDIFGD2VHBNMNQBARSIJGRU6SKIP181-01428?func=full-set-set&set_number=817709&set_entry=000009&format=999

Предметний покажчик