

УДК 517.518.3 + 517.518.85

В.П. Денисюк

МЕТОД ПОКРАЩЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФУР'Є ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ПО ОРТОГОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЯХ

The aim of this paper is to develop and study the method for improving the convergence of Fourier series based on orthogonal functions systems. This method application allows us obtaining uniformly convergent series for smooth functions. Another goal is to develop and study the method of improving the convergence of interpolating polynomials, based on systems of orthogonal functions, which in many cases allows us to reduce an interpolation error by such polynomials. In addition, we develop the method of phantom functions and phantom nodes, whose characteristic feature is an approximation of a given function on the part of the orthogonality interval. We examine the developed methods using the test example in cases of both Fourier series and, respectively, trigonometric interpolating polynomials. The research results demonstrate high efficiency of the proposed methods. Finally, we establish the following behavior – in some cases the phantom nodes method leads to abnormal decrease of interpolation errors because the proposed method of phantom nodes does not completely fit into the modern theory of approximations, it requires further theoretical investigations.

Вступ

У багатьох задачах науки та техніки часто виникає питання подання деякої, достатньо “хорошої” у тому чи іншому розумінні, функції, заданої на відрізку $[\alpha, \beta]$ рівномірно збіжним рядом Фур'є по деякій повній системі функцій, ортогональних на відрізку $[a, b]$ з деякою вагою [1]. Оскільки відрізок задання досліджуваної функції $[\alpha, \beta]$, як правило, не збігається з відрізком $[a, b]$, то лінійною заміною змінних відрізків $[\alpha, \beta]$ відображають на відрізок ортогональності $[a, b]$ вибраної системи функцій. Цей випадок добре досліджено в теорії апроксимації.

Проте в багатьох випадках отримуваний при цьому ряд Фур'є збігається рівномірно лише на проміжку $[a_1, b_1] \in (a, b)$ [2]; така ситуація пояснюється властивостями вибраної системи ортогональних функцій із заданою вагою функцією.

Так, якщо функція $f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, має неперервну похідну третього порядку, то її ряд Фур'є по багаточленах Чебишева другого роду збігається рівномірно на будь-якому проміжку $[-1+h, 1-h]$, $0 < h < 1$ [3]. Іншим прикладом може стати система тригонометричних функцій, оскільки при розкладі гладкої функції $f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, в тригонометричний ряд Фур'є, цю функцію необхідно продовжувати періодичним чином на всю числову вісь. Зрозуміло, що при такому продовженні в загальному випадку в періодичної функції та її похідних виникають на-

віть розриви першого роду, типу стрибка у точках a, b , і рівномірна збіжність ряду забезпечується на будь-якому відрізку $[a_1, b_1] \in (a, b)$.

Постановка задачі

Метою статті є розроблення та дослідження методу покращення збіжності рядів Фур'є по повних системах ортогональних функцій, а також дискретного варіанта запропонованого методу покращення збіжності рядів Фур'є.

Метод покращення збіжності рядів Фур'є по ортогональних системах функцій

Можна запропонувати загальний метод отримання рівномірно збіжних рядів Фур'є по системах ортогональних на відрізку $[a, b]$ функцій для розглянутих вище випадків. Він полягає в тому, що функцію $f(x)$, задану на відрізку $[\alpha, \beta]$, лінійною заміною змінних відображають на відрізок $[a+p, b-q]$, $0 < p, q < \frac{b-a}{2}$; на відрізках же $[a, a+p]$ та $(b-q, b]$ функцію $f(x)$ добудовують деякими функціями $\varphi_1(x)$, $x \in [a, a+p]$, та $\varphi_2(x)$, $x \in (b-q, b]$, які вибирають таким чином, щоб зберегти ту “хорошу” властивість вихідної функції $f(x)$, завдяки якій забезпечується рівномірна збіжність ряду Фур'є. Інакше кажучи, в ряд Фур'є на відрізку $[a, b]$ розкладається тепер функція $F(x)$, яка має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in [a, a+p); \\ f(x), & x \in [a+p, b-q]; \\ \varphi_2(x), & x \in (b-q, b]. \end{cases}$$

У багатьох випадках параметри p і q можна покласти рівними, тобто $p = q = h$; тоді рівномірна збіжність до функції $f(x)$ забезпечується на відрізку $[a+h, b-h]$; а порушення рівномірної збіжності на краях відрізка $[a, b]$ будуть стосуватися лише функцій $\varphi_1(x)$, $x \in [a, a+h]$, та $\varphi_2(x)$, $x \in (b-h, b]$.

Надалі функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ будемо називати фантомними функціями, а метод продовження функції $f(x)$ функціями $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ — методом фантомних функцій.

Часто “хороша” властивість функції $f(x)$, яка забезпечує рівномірну збіжність ряду Фур’є по певних системах ортогональних функцій, полягає в тому, що ця функція має бути неперивною та мати неперервні похідні певних порядків. У таких випадках у ролі фантомних функцій доцільно вибирати інтерполяційні багаточлени Ерміта, завдяки яким можна забезпечити необхідну гладкість функції $F(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Розглянемо застосування методу фантомних функцій детальніше; при цьому, не втрачаючи загальності, обмежимося для визначеності лише розглядом добре досліджених тригонометричних рядів Фур’є [4].

Нехай $f(x)$ — кусково-диференційовна функція, задана на скінченному відрізку $[0, 2\pi]$. Як відомо, такі функції можуть мати скінченну кількість розривів як самої функції, так і її похідних. Припустимо, що функції $f, f', \dots, f^{(k-1)}$ є неперервними на $(0, 2\pi)$, виключаючи точки $\xi_\mu, (\mu = 1, 2, \dots, m)$, де всі ці функції мають стрибки, відповідно, рівні $\delta_\mu^{(0)}, \delta_\mu^{(1)}, \dots, \delta_\mu^{(k-1)}$. До цих точок необхідно додати і точку $\xi_0 = 0$, якщо різниці

$$\delta_0^{(0)} = f(0+0) - f(2\pi-0);$$

$$\delta_0^{(1)} = f'(0+0) - f'(2\pi-0);$$

...

$$\delta_0^{(k-1)} = f^{(k-1)}(0+0) - f^{(k-1)}(2\pi-0)$$

відмінні від нуля, оскільки при періодичному продовженні функції в цій точці виникають розриви. Припустимо також, що всюди (за винятком точок $\xi_\mu, (\mu = 1, 2, \dots, m)$), існує похідна $f^{(k)}$, яка на $[-\pi, \pi]$ є функцією обмеженої варіації. Позначимо

$$A_n^{(i)} = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^m \delta_\mu^{(i)} \sin n\xi_\mu;$$

$$B_n^{(i)} = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^m \delta_\mu^{(i)} \cos n\xi_\mu.$$

Тоді для коефіцієнтів Фур’є a_n і b_n , що обчислюються за формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

мають місце формули (відповідно, при k непарному і k парному):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A_n^{(0)}}{n} - \frac{B_n^{(1)}}{n^2} - \frac{A_n^{(2)}}{n^3} + \frac{B_n^{(3)}}{n^4} + \\ &+ \dots \left\{ \begin{aligned} &+ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \\ &+ (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right); \end{aligned} \right. \\ b_n &= \frac{B_n^{(0)}}{n} + \frac{A_n^{(1)}}{n^2} - \frac{B_n^{(2)}}{n^3} - \frac{A_n^{(3)}}{n^4} + \\ &+ \dots \left\{ \begin{aligned} &+ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \\ &+ (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right). \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Ці формули нескладно отримати, інтегруючи вирази для коефіцієнтів Фур’є частинами $(k-1)$ -разів та подаючи отримувані інтеграли Стильєса через інтеграли Рімана.

Із поданих формул випливає, що наявність розривів як самої функції, так і її похідних, знижує порядок спадання коефіцієнтів Фур’є і, відповідно, погіршує апроксимативні властивості рядів Фур’є. Зокрема, зрозуміло, що ряд Фур’є

збігається рівномірно до функції $f(x)$, лише якщо $A_n^{(0)}$ та $B_n^{(0)}$ дорівнюють нулю.

Проте, як ми вже згадували, навіть якщо функція $f(x)$, задана на відрізку $[0, 2\pi]$, є неперервною та має неперервні похідні до $k-1$ -го порядку включно на цьому проміжку, то при періодичному продовженні з періодом 2π на всю числову вісь у загальному випадку виникають розриви першого роду типу стрибка як у самої функції, так і її похідних. Зрозуміло, що в такому разі ряд Фур'є не може збігатися рівномірно на цьому відрізку.

Для отримання рівномірно збіжного ряду Фур'є функції $f(x)$ на відрізку $[0, 2\pi]$ застосуємо поданий вище метод фантомних функцій.

Лінійною заміною змінної відобразимо функцію $f(x)$, $x \in [0, 2\pi]$, на відрізок $x \in \left[\frac{\alpha}{2}, 2\pi - \frac{\alpha}{2} \right]$, $0 < \alpha < 2\pi$; а на проміжках $\left[0, \frac{\alpha}{2} \right]$ та $\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}, 2\pi \right)$ функцію довизначають таким чином, щоб при періодичному продовженні зберігалася неперервність самої функції та її похідних до певного порядку. Цього нескладно досягти, використовуючи інтерполяційні багаточлени Ерміта. Таким чином, від розгляду функції $f(x)$, $x \in [0, 2\pi]$, ми перейшли до розгляду функції

$$F(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in \left[0, \frac{\alpha}{2} \right]; \\ f(x), & x \in \left[\frac{\alpha}{2}, 2\pi - \frac{\alpha}{2} \right]; \\ \varphi_2(x), & x \in \left(2\pi - \frac{\alpha}{2}, 2\pi \right]. \end{cases}$$

яка, після періодичного продовження з періодом 2π на всю числову вісь, є неперервною та має неперервні похідні певних порядків.

Тут доцільно зробити таке зауваження. Оскільки періодичну функцію з періодом 2π можна розглядати на будь-якому відрізку довжиною 2π , після заміни змінної $t = x - \frac{\alpha}{2}$ перейдемо до розгляду функції

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, 2\pi - \alpha]; \\ \varphi(t), & t \in (2\pi - \alpha, 2\pi]. \end{cases}$$

Доцільність такого переходу пояснюється тим, що тепер замість двох фантомних функцій $\varphi_1(x)$, $x \in \left[0, \frac{\alpha}{2} \right]$, та $\varphi_2(x)$, $x \in \left(2\pi - \frac{\alpha}{2}, 2\pi \right]$, ми маємо справу лише з однією фантомною функцією $\varphi(t)$, $t \in (2\pi - \alpha, 2\pi]$.

Для ілюстрації наведеного вище розглянемо приклад.

Приклад. На відрізку $[0, 2\pi]$ розглянемо неперервну функцію

$$f(x) = x - \pi, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$S(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Тут у чистому вигляді спостерігається роль розривів функції, які утворюються в точках 0 та 2π при періодичному продовженні функції $f(x)$. Зокрема, наявність цих розривів призводить до того, що коефіцієнти Фур'є цієї функції мають порядок спадання $O\left(\frac{1}{n}\right)$, а ряд не збігається рівномірно.

Для отримання рівномірно збіжного ряду застосуємо запропонований метод фантомних функцій. Задамо параметр α , $(0 < \alpha < 2\pi)$ і відобразимо функцію $f(x)$ на відрізок $[0, 2\pi - \alpha]$. Це нескладно зробити лінійною заміною змінної x на змінну t таким чином:

$$t = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} x.$$

Побудуємо функцію $\lambda(t)$ так:

$$\lambda(t) = f(0) + \frac{f(2\pi) - f(0)}{\alpha} (2\pi - t),$$

$$t \in (2\pi - \alpha, 2\pi).$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(t, \alpha) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, 2\pi - \alpha]; \\ \lambda(t), & t \in (2\pi - \alpha, 2\pi]. \end{cases}$$

Продовжимо функцію $\varphi(t, \alpha)$, $t \in [0, 2\pi]$, з періодом 2π на всю числову вісь. Легко бачити, що отримана періодична функція є неперервною і справджує умову Ліпшиця рівномірної збіжності на будь-якому відрізку числової осі (як кусково-диференційовна функція). От-

же, її ряд Фур'є збігається рівномірно, а на відрізку $[0, 2\pi - \alpha]$ збігається рівномірно до функції $f(t)$, оскільки $\varphi(t, \alpha) \equiv f(t)$, $t \in [0, 2\pi - \alpha]$. Ряд Фур'є функції $\varphi(t, \alpha)$ має вигляд

$$S(t, \alpha) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin n \left(t + \frac{\alpha}{2} \right)}{n} \frac{2\pi}{(2\pi - \alpha)} \frac{\sin \left(n \frac{\alpha}{2} \right)}{n \frac{\alpha}{2}} \right].$$

Легко бачити, що запровадження фантомної функції $\lambda(t)$ з метою усунення розривів привело до того, що коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$ домножуються на лінійний множник

$$\sigma(n, \alpha) = \frac{2\pi}{(2\pi - \alpha)} \frac{\sin \left(n \frac{\alpha}{2} \right)}{n \frac{\alpha}{2}}.$$

Зрозуміло, що введення такого множника в ряд Фур'є веде до того, що коефіцієнти Фур'є набувають тепер порядку спадання $O(n^{-2})$. Отже, за ознакою Ваєрштраса ряд збігається рівномірно на всьому відрізку $[0, 2\pi]$. Зауважимо, що детальніший лінійний метод підсумовування рядів Фур'є із множником $\sigma(k, \alpha)$ розглядається в [5].

Таким чином, усунення розривів функції запропонованим методом дало змогу отримати рівномірно збіжний ряд Фур'є, який на відрізку $[0, 2\pi - \alpha]$ збігається до функції $f(t)$.

У випадку, коли функція $f(x) \in C_{[0, 2\pi]}^{k-1}$, отриманий результат можна значно підсилити забезпеченням неперервності похідних вищих порядків. Побудуємо функцію $\lambda(t)$, $t \in (2\pi - \alpha, 2\pi)$, виходячи з умов

$$\lambda(2\pi - \alpha) = f(2\pi); \lambda(2\pi) = f(0);$$

$$\lambda'(2\pi - \alpha) = f'(2\pi); \lambda'(2\pi) = f'(0);$$

...

$$\lambda^{(k-1)}(2\pi - \alpha) = f^{(k-1)}(2\pi); \lambda^{(k-1)}(2\pi) = f^{(k-1)}(0).$$

Як ми вже казали, таку функцію нескладно побудувати, використовуючи інтерполяційний багаточлен Ерміта. Розглядаючи тепер функцію

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, 2\pi - \alpha], \\ \lambda(t), & t \in (2\pi - \alpha, 2\pi), \end{cases}$$

і продовжуючи її періодичним чином з періодом 2π на всю числову вісь, легко бачити, що сама функція та її похідні до $k-1$ -го порядку включно є неперервними на всій числовій осі. Отже, розриви можуть мати лише похідні k -го порядку. Згідно з формулами (1), коефіцієнти Фур'є a_n , b_n в цьому випадку мають порядок спадання $O(n^{-(k+1)})$.

Метод фантомних вузлів покращення збіжності інтерполяційних тригонометричних багаточленів

Розглянемо функцію

$$f(t) = t + 1, t \in [0, 2\pi].$$

Продискретизуємо функцію $f(t)$ з кроком

$$h_k = \frac{2\pi(i-1)}{N}, \text{ поклавши, наприклад, } N = 9.$$

Обчисливши значення функції, які в нашому випадку будуть дорівнювати 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, побудуємо тригонометричний інтерполяційний багаточлен. Тут доцільно зробити таке зауваження. Власне кажучи, інтерполяційний тригонометричний багаточлен $T_N(t)$ інтерполює функцію $f(t)$ в $N+1$ -точках, заданих на відрізку 2π . Справа в тому, що в точці 2π значення цього багаточлена є визначеним і, внаслідок періодичності, $T_N(2\pi) = T_N(0)$. Тому інтерполяцію багаточленом $T_N(t)$ ми будемо розглядати лише на відрізку інтерполяції $2\pi - h$, вказуючи кожен раз цей відрізок. Невскладно обчислити, що нормована похибка інтерполяції $\varepsilon(t)$, яка обчислюється за формулою

$$\varepsilon(t) = \frac{f(t) - T_N(t)}{|f_N - f_1|}, \text{ дорівнює } 165.$$

Проаналізуємо поданий результат. Перш за все, зрозуміло, що не варто казати про неперервність функції, заданої дискретно. Проте мова може йти про величину поділеної різниці $\frac{f(2\pi - h) - f(2\pi)}{h}$; чим ця величина буде більшою, тим більшою буде величина нормованої похибки інтерполяції в околах точок 0 і $2\pi - h$.

Зрозуміло, що тригонометричний інтерполяційний багаточлен має такі ж вади, що й розглянуті раніше ряди Фур'є; і в цьому випадку запропонуємо метод покращення збіжності, який будемо називати методом фантомних вузлів.

Цей метод полягає в наступному. Додамо до послідовності вузлів інтерполяції з правого боку парну кількість фантомних вузлів; значення в цих фантомних точках будемо задавати, виходячи з міркувань усунення великих значень поділених різниць в околах точок 0 і $2\pi - h$.

Зрозуміло, що додавання $2k$ ($k = 1, 2, \dots$) фантомних вузлів збільшує кількість інтерполяційних вузлів на відрізку $[0, 2\pi]$, і, відповідно, зменшує крок h інтерполяційної сітки, який тепер стає рівним $h_k = \frac{2\pi(i-1)}{N+2k}$. Оскільки кількість значень інтерпольованої функції не змінюється, то зменшення кроку інтерполяційної сітки призводить до зменшення відрізка інтерполяції, який стає рівним Nh_k . На відрізку $[2\pi - Nh_k, 2\pi]$ побудуємо функцію $\varphi(t)$, яка справджує умови

$$\varphi(t) = \begin{cases} f_N, & t = Nh_k; \\ f_1, & t = 2\pi. \end{cases}$$

Обчислюючи значення цієї функції у фантомних вузлах $t_{N+1}, t_{N+2}, \dots, t_{N+2k-1}$, знайдемо потрібні значення у цих вузлах. Можна очікувати, що внаслідок додавання фантомних вузлів буде зменшено похибку інтерполяції на відрізку інтерполяції $[0, 2\pi - Nh_k]$.

Зауважимо, що парна кількість точок вибирається лише для того, щоб загальна кількість вузлів інтерполяції була непарною, оскільки тригонометрична інтерполяція непарної кількості точок є зручнішою. На нашу думку, зручно додавати невелику кількість фантомних вузлів, тобто покладати $k = 1, 2$.

При побудові функції $\varphi(t)$ можна вимагати, щоб її похідні певного порядку теж набували певних значень у точках Nh_k і 2π ; для знаходження цих значень можна використовувати поділені різниці інтерпольованої функції або точні значення похідних інтерпольованої функції $f(t)$, якщо вони відомі. Зазначимо, що значення у фантомних вузлах можна вибирати, виходячи і з інших міркувань, уникаючи тим самим необхідності будувати функцію $\varphi(t)$.

Легко бачити, що метод фантомних вузлів фактично є дискретним варіантом методу покращення збіжності рядів Фур'є, розглянутого нами раніше.

Проілюструємо дієвість запропонованого методу фантомних вузлів, продовжуючи розгляд функції $f(t) = t + 1$, $t \in [0, 2\pi]$.

До дев'яти вузлів інтерполяції додамо два фантомні вузли; крок інтерполяційної сітки тепер становить $h = \frac{2\pi}{11}$. Значення у фантомних

вузлах обчислимо з використанням значень інтерпольованої функції та її перших поділених різниць; отже, значення інтерпольованої послідовності мають такий вигляд:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 7.053, 2.947.

Наведемо графік інтерполяційного багаточлена, побудованого по 11-ти точках (рис. 1), та графік нормованої похибки інтерполяції на відрізку інтерполяції $[0, 2\pi - 3h]$ (рис. 2).

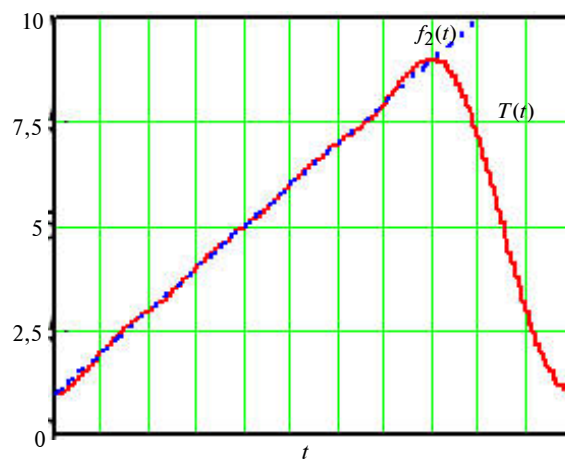


Рис. 1. Графік багаточлена $T(t)$ та функції $f(t)$ на відрізку $[0, 2\pi]$

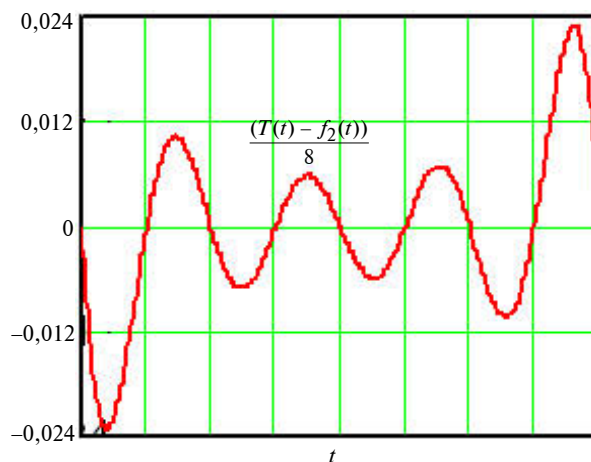


Рис. 2. Графік нормованої похибки інтерполяції з двома фантомними вузлами на відрізку інтерполяції $[0, 2\pi - 3h]$; похибка зменшилася у 6,875 разів

Додамо тепер чотири фантомних точки; крок інтерполяційної сітки тепер становить $\frac{2\pi}{13}$. Як і раніше, значення у фантомних вузлах обчислимо з використанням значень інтерпольованої функції та її перших поділених різниць; отже, значення інтерпольованої послідовності мають такий вигляд:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 8.4, 6.3, 3.7, 1.6.

Подемо графік інтерполяційного багаточлена, побудованого по 13-ти точках (рис. 3), та графік нормованої похибки інтерполяції на відрізьку інтерполяції $[0, 2\pi - 3h]$ (рис. 4).

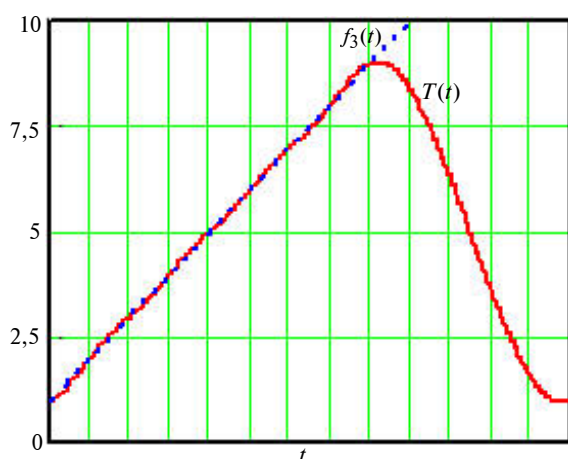


Рис. 3. Графік багаточлена $T(t)$ та функції $f(t)$ на відрізьку $[0, 2\pi]$; відрізьку інтерполяції $[0, 2\pi - 5h]$

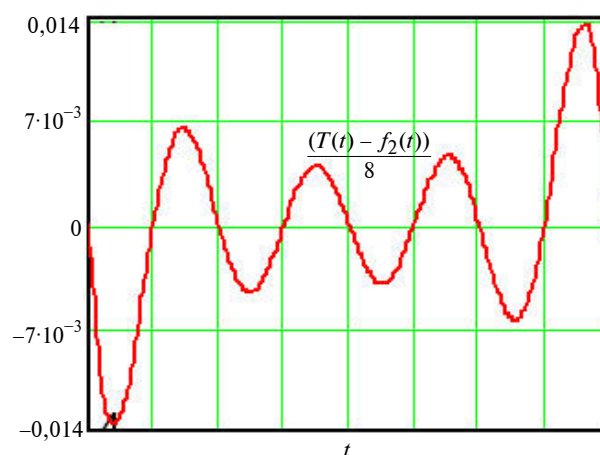


Рис. 4. Графік нормованої похибки інтерполяції з чотирма фантомними вузлами на відрізьку інтерполяції $[0, 2\pi - 5h]$; похибка зменшилася у 11,786 разу

Результати аналогічних обчислень для функції $f(t) = t + 1$ наведено в табл. 1 і 2.

Аналізуючи дані з табл. 1, 2, можна висунути гіпотезу про те, що при підібраних значеннях фантомних точок ми отримуємо тригонометричні багаточлени найкращого наближення в просторі $C_{[0, 2\pi - \alpha]}$. Проте довести цей факт, використовуючи відомі результати теорії наближень, доволі складно. Це пояснюється тим, що в теорії наближень не вдалося знайти результати щодо багаточленів найкращого на-

Таблиця 1. Відношення похибок інтерполяції без фантомних вузлів до похибок інтерполяції з двома фантомними вузлами

Кількість інтерполяційних точок N	Тип вибору фантомних точок			
	Лінійна інтерполяція значень f_N і f_0	Інтерполяція f_N і f_0 із врахуванням перших поділених різниць	Інтерполяція f_N і f_0 із врахуванням перших і других поділених різниць	Значення підібрані
5	2,5	6,8	7	34,5
9	3	6,9	8	36,7
13	3	8	8	35,5

Таблиця 2. Відношення похибок інтерполяції без фантомних вузлів до похибок інтерполяції з чотирма фантомними вузлами

Кількість інтерполяційних точок N	Тип вибору фантомних точок			
	Лінійна інтерполяція значень f_N і f_0	Інтерполяція f_N і f_0 із врахуванням перших поділених різниць	Інтерполяція f_N і f_0 із врахуванням перших і других поділених різниць	Значення підібрані
5	3	9,5	27	95
9	4,5	11,8	27	434
13	4,8	13	35	533

ближення на частині відрізка $[0, 2\pi]$. Так, відомий критерій Чебишева для багаточлена найкращого наближення розглядає цей багаточлен на відрізку $[0, 2\pi]$; ми ж розглядаємо наближення на частині цього відрізка, тобто на відрізку $[0, 2\pi - \alpha]$.

Висновки

Запропоновано метод покращення збіжності рядів Фур'є по системах функцій, ортогональних на відрізку, застосування якого дає можливість для гладких функцій отримувати рівномірно збіжні ряди. Запропоновано також метод

фантомних вузлів покращення збіжності інтерполяційних багаточленів по системах ортогональних функцій, застосування якого в багатьох випадках дає змогу значно зменшити похибки інтерполяції цими багаточленами. Наведено результати розрахунків на тестовому прикладі з використанням запропонованих методів для тригонометричних рядів Фур'є. Ці розрахунки ілюструють високу ефективність цих методів.

Безсумнівно, запропонований метод фантомних вузлів вимагає подальших теоретичних досліджень, оскільки не вкладається у сучасну теорію наближень.

1. Денисюк В.П. Сплайни та сигнали. — К.: ЗАТ “ВІПОЛ”, 2007. — 228 с.
2. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1984. — 344 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. — М.: Физматгиз, 1965. — 464 с.
4. Денисюк В.П. О некоторых методах улучшения сходимости тригонометрических рядов Фурье и интерпо-

ляционных тригонометрических многочленов // J. of Qafqaz University, Math. and Comp. Sci., no. 33, 2012. — Режим доступа: <http://journal.qu.edu.az>

5. Денисюк В.П. Метод лінійного підсумовування тригонометричних рядів Фур'є // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. — 2012. — № 4. — С. 48–54.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
12 березня 2013 року