



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

М.Є. Дудкін, О.Ю. Дюженкова, І.В. Степахно

Вступ до математичного аналізу.
Диференціальне числення функції однієї змінної

Збірник задач

Рекомендовано Методичною радою НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
як навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей

Київ
НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
2021

Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Збірник задач. / М.Є. Дудкін, О.Ю. Дюженкова, І.В. Степахно. – К.: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 65 с. – Бібліогр.: – електронне видання.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» (протокол № 8 від 24.06.2021р.) за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол № 5 від 26.05.2021р.)

Укладачі: *Дудкін Микола Євгенович,
доктор фіз.– мат. наук, проф.,
Дюженкова Ольга Юріївна,
кандидат фіз.– мат. наук, доц.,
Степахно Ірина Василівна,
кандидат фіз.– мат. наук, доц.*

Відповідальний
редактор: *Волков Андрій Вікторович,
кандидат фіз.– мат. наук, доц.*

Рецензент: *Гречко Андрій Леонідович,
кандидат фіз.– мат. наук, доц.*

Збірник містить велику кількість завдань різного рівня складності, необхідних для глибокого засвоєння студентами матеріалу розділів «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної».

Методичний посібник призначений для студентів інженерних спеціальностей НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» і може бути використаний на практичних заняттях, для виконання домашніх робіт, а також для самостійного опрацювання матеріалу студентами заочної форми навчання.

Вступ

Загальний курс вищої математики є фундаментальним курсом для студентів інженерних спеціальностей. В умовах зменшення аудиторних годин на вивчення математики актуальним є питання про підвищення рівня математичної підготовки студентів. Математичні методи дослідження використовуються в усіх областях людської діяльності, тому вища математика має не тільки важливе загальноосвітнє значення, але і створює необхідну базу для професійної підготовки майбутніх фахівців.

Більшу частину курсу вищої математики складає математичний аналіз, предметом вивчення якого є функція, а основним методом її дослідження – граничний перехід. У розділі «Вступ до математичного аналізу» розглядаються множини та операції над ними, множина комплексних чисел, поняття функції дійсної змінної та її властивості. Детально вивчається поняття границі функції, нескінченно малі та нескінченно великі величини, способи розкриття невизначеностей, важливі границі та їх застосування, неперервність і точки розриву функції. При розв’язанні багатьох задач математики, фізики, хімії, біології, економіки фахівцям доводиться використовувати математичні моделі, в яких реальні процеси описуються певними функціями. Оскільки для дослідження функцій часто застосовується похідна, то для майбутніх інженерів необхідне детальне вивчення розділу «Диференціальне числення функції однієї змінної». Важливо, щоб при вивченні похідної функції студенти зрозуміли суть цього поняття, для чого необхідно звернути увагу на геометричний та фізичний зміст похідної. Спочатку доцільно навести задачі, які приводять до поняття похідної, повторити правила та формули диференціювання, розглянути похідну неявно та параметрично заданої функції, логарифмічне диференціювання і похідні вищих порядків. Велику увагу потрібно приділити поняттю диференціала, який надалі застосовується в інтегральному численні функції. Для мотивації вивчення вищої математики та реалізації її професійної спрямованості велике значення має застосування похідної для дослідження функції та розв’язання задач практичного змісту.

Збірник задач складено з урахуванням досвіду викладання математики студентам інженерних спеціальностей. Техніка обчислення границь та диференціювання функцій відпрацьовується за допомогою великої кількості завдань різного рівня складності – від найпростіших типових задач до більш складних, що вимагають глибокого розуміння матеріалу та творчого мислення.

Запропонований посібник містить завдання на опрацювання всіх основних математичних понять та алгоритмів, пов’язаних із теорією границь та диференціальним численням функції. До всіх задач наведені відповіді, що дозволяє студентам перевіряти правильність власних розв’язків та контролювати рівень своїх знань.

Збірник задач зручно використовувати на практичних заняттях, для виконання домашніх робіт, а також для самостійного опрацювання матеріалу студентами заочної форми навчання. Для кращого опанування матеріалу наприкінці посібника наведено список рекомендованої літератури.

Вступ до математичного аналізу
Розділ I. Множини. Комплексні числа

1. Множини та операції над ними

1.1. Записати множину, перелічивши її елементи:

- 1) $A = \{n \in \mathbb{N} : n - \text{натуральні числа, кратні 3 і менші 20}\};$
- 2) $B = \{n \in \mathbb{N} : n - \text{прості числа, менші 15}\};$
- 3) $C = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + 2x - 8 = 0\};$ 4) $D = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x - 4 \leq 0\};$
- 5) $E = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 8x + 15 = 0\};$ 6) $G = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 16 = 0\};$
- 7) $K = \{x \in \mathbb{Z} : 1/9 \leq 3^x < 12\};$ 8) $M = \{x \in \mathbb{Z} : x + 1/x \leq 2, x > 0\}.$

1.2. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин :

- 1) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$ і $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\};$
- 2) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x > 0\}$ і $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 > 0\};$
- 3) $A = (1; 3)$ і $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\};$
- 4) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x+3} \geq 0\right\}$ і $B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+5}{x-1} < 0\right\}.$

1.3. Нехай задано множини $A = \{1; 2; 3; 4\}$ і $B = \{3; 4; 5\}$. Знайти $A \times B$.

1.4. Записати всі підмножини даної множини:

- 1) $A = \{1; 2; 3\};$ 2) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 5 < 0\}.$

1.5. Скільки підмножин має множина, яка містить n елементів?

1.6. Вказати, які з даних множин є скінченними, а які – нескінченними:

- 1) множина цілих чисел, що діляться на 5;
- 2) множина всіх коренів заданого многочлена;
- 3) множина додатних раціональних чисел;
- 4) множина всіх тварин на Землі.

1.7. Зобразити на координатній площині такі множини:

- 1) $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 2 = 0\};$ 2) $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4\};$
- 3) $C = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y)(x + y) = 0\};$ 4) $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y\};$
- 5) $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x + y^2 - 2y + 5 \leq 0\}.$

1.8. Іспит з математики складали 50 студентів, серед яких не отримали «відмінно» 42, а склали іспит 46 осіб. Скільки студентів склали іспит на «добре» та «задовільно»?

1.9. У класі навчається 12 хлопців (множина A) та 15 дівчат (множина B). Серед 10 учнів, які захоплюються спортом (множина C), 3 дівчат. Описати множини $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $B \setminus C$. Зобразити ці множини та визначити їхню кількість елементів.

1.10. Серед даних чисел знайти раціональні і записати їх у вигляді звичайних дробів:

- 1) 3,025; 2) 1,(78); 3) 3,12(3); 4) 1,010010001...;
 5) 1,268(48); 6) $\sqrt{7}$; 7) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

1.11. Вказати два ірраціональні числа, для яких:

- 1) сума є числом раціональним;
 2) добуток є числом ірраціональним.

1.12. Довести, що:

- 1) не існує раціонального числа r такого, що $r^2 = 3$;
 2) сума та різниця раціонального числа a та ірраціонального числа b є ірраціональними числами;
 3) число $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ є ірраціональним;
 4) добуток ab і частка $\frac{a}{b}$, де $0 \neq a \in Q$, а $b \notin Q$ є ірраціональними числами.

2. Комплексні числа

2.1. Знайти дійсні та уявні частини комплексних чисел:

- 1) $1+i$; 2) $\sqrt{2}-1$; 3) 0; 4) $7-3i$; 5) $2-7i$; 6) 3; 7) $1-i$;
 8) i ; 9) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 10) $-2i$; 11) $-3-i$; 12) $n+i \cdot e$.

2.2. Розкласти на комплексні множники:

- 1) a^2+b^2 ; 2) $a+b$; 3) $4m^2+9n^2$; 4) a^2+4 ;
 5) $a+2$; 6) $a+1$; 7) a^2+4b^2 ; 8) c^2+1 .

2.3. Знайдіть комплексні числа, спряжені з даними:

- 1) i ; 2) -2 ; 3) 1; 4) $1-i$; 5) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; 6) $-i$; 7) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 8) 2; 9) $2i$; 10) $\frac{1}{i}$; 11) $\frac{1}{1+i}$; 12) $\frac{1+3i}{3-2i}$; 13) $\frac{i}{1-i}$.

2.4. Визначити дійсні x і y , якщо:

- 1) $2+5xi-3yi=14i+3x-5y$; 2) $\frac{bi}{x}+iy-2=7i-\frac{10}{x}+y$;

$$3) \frac{i}{x} + \frac{i}{y} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{5i}{y}; \quad 4) aix + biy - a = i - a^2x - b^2y;$$

$$5) (1-2i)x + (3-5i)y = 1-3i; \quad 6) (4-i)x + (2+5i)y = 8+9i;$$

$$7) (3+i)x - (1-2i)y = 7.$$

2.5. Знайти суму, різницю комплексних чисел $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 4 + 3i$ в алгебраїчній формі. Знайти спряжене число до $z_1 = 3 - 4i$, обчислити їх добуток та частку.

2.6. Виконати вказані дії над комплексними числами.

$$1) (-3+5i) + (4-8i); \quad 2) (1-2i)(3+2i).$$

2.7. Знайти суму комплексних чисел:

$$\begin{aligned} 1) (3+6i) + (-1-5i); \quad 2) (9-5i) + (-2-i); \quad 3) (2+3i) + (6+3i); \\ 4) (7-3i) + (-9+3i); \quad 5) (6+5i) + (4+6i); \quad 6) (-3+5i) + (4-8i); \\ 7) (3+2i) + (-1-5i); \quad 8) (2+3i) + (6-3i); \quad 9) (10-3i) + (-10+3i); \\ 10) (2-8i) + (5-i). \end{aligned}$$

2.8. Знайти різницю комплексних чисел:

$$\begin{aligned} 1) (7+4i) - (1+i); \quad 2) (-5+9i) - (6+i); \quad 3) (6+7i) - (6-5i); \\ 4) (0,3+3i) - (-0,8+1,5i); \quad 5) (1+i) + (2-3i) - (3+4i); \\ 6) (-4-6i) - (-6+4i); \quad 7) (2-8i) - (5-i); \quad 8) (5+4i) - (2-3i); \\ 9) (3-6i) - (1-i); \quad 10) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right) - \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}i\right). \end{aligned}$$

2.9. Знайти добуток комплексних чисел:

$$\begin{aligned} 1) (4-3i)(8+2i); \quad 2) (\sqrt{2}-4i)(\sqrt{3}-\sqrt{5}i); \quad 3) 8i \cdot 3i \cdot \sqrt{3}; \\ 4) (2-i)(-6); \quad 5) \left(\frac{1}{2} - \frac{3i}{4}\right) \left(2 + 1\frac{1}{3}i\right); \quad 6) 2i \cdot 3i; \\ 7) 4i \cdot 2i\sqrt{2}; \quad 8) (-3+4i)2i; \quad 9) (-3-7i)(-3i); \\ 10) (\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i); \quad 11) (0,5+0,2i)(2+3i). \end{aligned}$$

2.10. Знайти добуток наступних спряжених комплексних чисел:

$$\begin{aligned} 1) (3+5i)(3-5i); \quad 2) (2+i)(2-i); \quad 3) (4+\sqrt{3}i)(4-\sqrt{3}i); \\ 4) (\sqrt{x}+\sqrt{yi})(\sqrt{x}-\sqrt{yi}); \quad 5) (5+i)(5-i); \quad 6) (1-i)(1+i); \\ 7) (m-ni)(m+ni); \quad 8) (\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b}); \quad 9) (0,5+0,2i)(0,5-0,2i); \end{aligned}$$

10) $(5 + \sqrt{3}i)(5 - \sqrt{3}i)$; 11) $(c + di)(c - di)$; 12) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\right)$.

2.11. Знайти частку комплексних чисел:

1) $4i : 2$; 2) $\frac{3}{5i}$; 3) $8i : 4$; 4) $6i : 2i$;

5) $\frac{3+i}{i}$; 6) $\frac{1-i}{1+i}$; 7) $\frac{a}{a+bi}$;

8) $\frac{\sqrt{a}}{a+2i\sqrt{a}}$; 9) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; 10) $\frac{2+5i}{3-2i}$;

11) $\frac{5+6i}{4+8i}$; 12) $\frac{1+i \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1-i \cdot \operatorname{tg} \alpha}$; 13) $\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{6}}{-1+i\sqrt{3}}$.

2.12. Записати в алгебраїчній формі комплексне число

$$z = 5i^{23} + 2i^{18} - 4i^{16} + 3i^9.$$

2.13. Піднести до степеня комплексні числа:

1) $(\sqrt{3}+i)^4$; 2) $(\sqrt{3}-2i)^3$; 3) $(1+i)^2$; 4) $(3+2i)^2$;

5) $(1+2ai)^2$; 6) $(a+5bi)^2$; 7) $(2+i\sqrt{3})^3$; 8) $(3-i\sqrt{3})^3$;

9) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 10) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 11) $(1+i)^4$; 12) $(a+bi)^6$.

2.14. Знайти $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{15}$ і визначити дійсну та уявну частини цього числа.

2.15. Знайти модуль та аргумент комплексного числа:

1) $-5-7i$; 2) $2+3i$; 3) $4+0i$; 4) $5i$;

5) $1-\sqrt{3}i$; 6) $-1-i$; 7) $6-8i$.

2.16. Зобразити на площині комплексні числа:

1) 1; 2) -1; 3) i ; 4) $-i$; 5) $1-i$;

6) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $2+2\sqrt{3}i$; 8) $-4-3i$.

2.17. Записати в тригонометричній формі числа:

1) -1; 2) $-i$; 3) $1+i$; 4) $-\sqrt{3}+i$; 5) $2-2\sqrt{3}i$;

6) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $4+3i$.

2.18. Знайти геометричне місце точок, яке визначається такими умовами:

1) $|z| < 1$; 2) $|z| \leq 1$; 3) $|z| > 1$; 4) $|z| \geq 1$; 5) $1 < |z| < 2$;

6) $|z+2i| < 3$; 7) $|z-2-i| > 2$; 8) $|z-3i| \leq 5$; 9) $|z| \geq 3$.

2.19. Записати комплексні числа в алгебраїчній формі:

- 1) $\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$; 2) $(1-i)^4 + (1+i)^4$; 3) $\frac{12+5i}{(2+3i)^2}$;
4) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 5) $\sqrt{5}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$; 6) $3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

2.20. Записати комплексні числа $z_1 = 1+i$, $z_2 = -2+2\sqrt{3}i$ в тригонометричній формі, обчислити їх добуток і частку.

2.21. Піднести до степеня комплексні числа:

- 1) $(-0,5 + 0,5\sqrt{3}i)^{10}$; 2) $\left(\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^6$; 3) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^6$;
4) $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 5) $\left(\frac{5+6i}{6-5i}\right)^8$; 6) $(-2+2i)^5$.

2.22. Знайти значення кореня із комплексного числа та побудувати їх геометричне зображення:

- 1) $\sqrt[4]{-4}$; 2) $\sqrt[3]{8}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt[4]{1-i}$;
5) $\sqrt[4]{-1+i}$; 6) $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$; 7) $\sqrt[3]{-27}$; 8) $\sqrt[3]{2-2i}$.

3. Загальні відомості про комплексні числа

3.1. Виконати арифметичні дії над комплексними числами z_1 і z_2 , якщо:

- 1) $z_1 = -i$, $z_2 = 1+i$; 2) $z_1 = 4-3i$, $z_2 = 4+3i$;
3) $z_1 = 2+2i$, $z_2 = 4-2i$; 4) $z_1 = 3-4i$, $z_2 = -1+5i$;
5) $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5-4i$; 6) $z_1 = -4+i$, $z_2 = -2+3i$.

3.2. Знайти спряжене число до:

- 1) суми чисел $z_1 = 2-i$, $z_2 = 3+4i$;
2) різниці чисел $z_1 = 5-3i$, $z_2 = 1+2i$;
3) добутку чисел $z_1 = 3-2i$, $z_2 = 4+i$.

3.3. Записати в алгебраїчній формі числа:

- 1) $(2+2i)(2-i)$; 2) $\frac{2-i}{1+i}$; 3) $\frac{1}{1+4i} + \frac{1}{4-i}$.

3.4. Визначити дійсну та уявну частини комплексного числа:

- 1) $z = \frac{2-i}{2+i}$; 2) $z = \frac{(1-i)^2}{1+i} + i^5$; 3) $z = (2+3i)^3$; 4) $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^9$.

3.5. Знайти модуль і аргумент комплексних чисел:

1) i ; 2) -3 ; 3) $1+i$; 4) $\frac{1-i}{1+i}$;

5) $-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$; 6) $z = (-4 + 3i)^3$;

7) $(1+i)^8(1+\sqrt{3}i)^{-6}$; 8) $1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$.

3.6. Записати в тригонометричній формі числа:

1) -8 ; 2) i ; 3) $1 - \sqrt{3}i$; 4) $-3 - 3i$; 5) $-3 + 2i$.

3.7. Зобразити числа на комплексній площині і записати їх в тригонометричній та показниковій формах:

1) $z = -4$; 2) $z = 1 - i$; 3) $z = i^5$; 4) $z = (1 - i)^2$;

5) $z = -1 + \sqrt{3}i$; 6) $z = 4\sqrt{3} + 4i$; 7) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$; 8) $z = \sqrt{3} - i$.

3.8. Виконати дії множення і ділення над комплексними числами z_1 і z_2 у тригонометричній формі:

1) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = i$; 2) $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$;

3) $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$; 4) $z_1 = -4 + 4\sqrt{3}i$, $z_2 = 1 + i$.

3.9. Знайти добуток комплексних чисел у тригонометричній формі:

$$z_1 = 5 \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right); \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9} \right).$$

3.10. Знайти $z_1 z_2$ та $\frac{z_1}{z_2}$, якщо:

1) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$, $z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$;

2) $z_1 = 4e^{\frac{\pi}{3}i}$, $z_2 = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$.

3.11. Знайти $\frac{a}{b}$, якщо $a = 12(\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ)$, $b = 3(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)$.

3.12. Знайти a^3 якщо $a = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$.

3.13. Знайти z^5 та $\sqrt[3]{z}$, якщо $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

3.14. Обчислити, користуючись формулою Муавра:

1) $(1+i)^8$; 2) $(1-i)^{26}$; 3) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^{12}$; 4) $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right)^{16}$;

$$\begin{array}{lll}
 5) \frac{4i}{(1+i)^6}; & 6) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^{100} \cdot i^{103}; & 7) \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i} \right)^{20}; \\
 8) \left(\frac{2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} \right)^{12}; & 9) (-1-i\sqrt{3})^5; & 10) \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{12}.
 \end{array}$$

3.15. Знайти всі значення кореня:

$$\begin{array}{llll}
 1) \sqrt{5+12i}; & 2) \sqrt[4]{i}; & 3) \sqrt[4]{-16}; & 4) \sqrt{2-2\sqrt{3}i}; \\
 5) \sqrt[3]{-2+2i}; & 6) \sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}; & 7) \sqrt[3]{4\sqrt{3}+4i}.
 \end{array}$$

3.16. Розв'язати рівняння:

$$\begin{array}{llll}
 1) z^2 + 1 = 0; & 2) z^2 + 2z + 5 = 0; & 3) 4z^2 - 2z + 1 = 0; & 4) z^3 + 1 = 0; \\
 5) z^4 + i = 0; & 6) z^3 + 27i = 0; & 7) z^5 - 32i = 0.
 \end{array}$$

3.17. Розв'язати рівняння $z^4 = -16$ і дати геометричну інтерпретацію.

3.18. Розкласти на множники многочлени:

$$1) z^4 - 1; \quad 2) z^3 + 8; \quad 3) z^2 - 4z + 5 = 0; \quad 4) z^3 - i.$$

3.19. Розв'язати рівняння $(4+i)z^2 - (35-21i)z + 18 - 174i = 0$.

3.20. Зобразити множину точок комплексної площини, яка визначається такими умовами:

$$\begin{array}{llll}
 1) \operatorname{Re} z < 2; & 2) -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1; & 3) |z| \leq 4; & 4) |z| > 1; \\
 5) |z-1| < 3; & 6) |z-1+i| \leq 0; & 7) \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1; \\
 8) \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1; & 9) \operatorname{Re}(z^2 - z) = 0.
 \end{array}$$

3.21. Довести тотожності:

$$\begin{array}{ll}
 1) (z_1 + z_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2); \\
 2) |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| = \left| z_1 + \sqrt{z_1^2 - z_2^2} \right| + \left| z_1 - \sqrt{z_1^2 - z_2^2} \right|; \\
 3) (1 - z_1 z_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 = (1 + z_1 z_2)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2.
 \end{array}$$

Розділ II. Функція однієї змінної. Границя функції

1. Властивості функції

1.1. Знайти область визначення функції:

$$\begin{array}{ll}
 1) y = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}; & 2) y = \sqrt{x^2 - 6x + 5};
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
3) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}; & 4) y = \frac{2-x}{\sqrt{8-2x-x^2}}; \\
5) y = \log_2(1-x); & 6) y = \frac{\arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{1-x^2}}{\ln(1+x)}; \\
7) y = \sqrt{x-1}; & 8) y = \log_3(x+2); \\
9) y = \frac{x+3}{x-1}; & 10) y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \arcsin 2x; \\
11) y = \frac{1}{x^2+1}; & 12) y = \ln(3x-1) + 2\ln(x+1); \\
13) y = \frac{\sqrt{2-x}}{\log_2 x}; & 14) y = \arccos \frac{x}{2}; \\
15) y = \arccos \frac{2x}{1+x}; & 16) y = \sin x + \frac{e^x}{\sqrt{|x|-2}}.
\end{array}$$

1.2. Знайти область визначення функції та побудувати її графік:

$$\begin{array}{ll}
1) y = \sqrt{4-x^2}; & 2) y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}; \\
3) y = \sqrt[3]{x+2}; & 4) y = 4/(1+\sqrt{x^2-4}); \\
5) y = 1 - \sqrt{2\cos 2x}; & 6) y = (\sqrt{\cos x - 1/2})^2 + 1/2.
\end{array}$$

1.3. Дано функцію $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Знайти $f(-2)$, $f(0)$, $f(a)$, $f(x^2)$, $(f(x))^2$.

Чи існує $f(-1)$, $f(1)$?

1.4. Задано функцію $f(x) = x^2 - 4$. Знайти значення $f(0)$, $f(3)$, $f(a)$.

1.5. Для функції $\varphi(t) = ta^{-t}$ знайти значення $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$, $\varphi(-a)$.

1.6. Дано функції $y = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$, $z = \operatorname{tg} x$. Виразити y як функцію змінної x .

1.7. Подати складні функції за допомогою ланцюжків основних елементарних функцій:

$$1) y = \sqrt{\cos 2x}; \quad 2) y = e^{\operatorname{tg}^2 x}; \quad 3) y = \arcsin\left(\frac{x}{x-1}\right)^3.$$

1.8. Знайти множину значень функцій:

$$1) y = \sin^2 x - \cos^2 x; \quad 2) y = -x^2 - 5x + 6;$$

$$\begin{array}{ll} 3) y = 1 - |x|; & 4) y = \frac{2-x}{x+3}; \\ 5) y = \frac{x}{x^2+1}; & 6) y = \lg \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}; \\ 7) y = \sqrt{\sin x - 1}; & 8) y = \frac{1}{2 + \cos 3x}. \end{array}$$

1.9. Визначити, яка із заданих функцій парна чи непарна:

$$\begin{array}{ll} 1) y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2 \sin x; & 2) y = 2^x + 2^{-x}; \\ 3) y = x^2 + 5x; & 4) y = x \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1}. \end{array}$$

1.10. Дослідити функції на парність і непарність:

$$\begin{array}{ll} 1) y = \frac{x+3}{x-1}; & 2) y = x^3 + x; \\ 3) y = x^6 + x; & 4) y = |x| \cdot \cos x; \\ 5) y = 7x; & 6) y = 2x + 1; \\ 7) y = x^2 \sin x; & 8) y = \sqrt[3]{x} + x; \\ 9) y = \ln \frac{x+1}{x-1}; & 10) y = 3^x + 3^{-x}. \end{array}$$

1.11. Знайти функцію, обернену до даної:

$$\begin{array}{lll} 1) y = x, & 2) y = x^2 - 2x; & 3) y = 10^{x+1}; \\ 4) y = \log_x 2; & 5) y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1; & 6) y = 3x + 1; \\ 7) y = e^{4x}; & 8) y = \frac{x}{2}; & 9) y = x^2 + 1; \\ 10) y = \frac{1}{x+2}; & 11) y = 2 + \arctg \frac{x}{3}. \end{array}$$

1.12. Які з функцій будуть періодичними? Визначити період.

$$\begin{array}{ll} 1) y = \frac{x-1}{|x-1|}; & 2) y = \sec 2x; \\ 3) y = 1 + \operatorname{tg} \left(\frac{5x}{6} + 1 \right); & 4) y = \sin \left(\frac{x}{3} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{4} \right); \\ 5) y = \sin^4 x - \cos^4 x; & 6) y = 2^{\sin 2x} \cdot 2^{\cos 2x}; \\ 7) y = \log_2 \sin^2 x; & 8) y = |\sin x|. \end{array}$$

1.13. Знайти основні періоди функцій:

1) $y = \cos 3x$; 2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$;

3) $y = \cos \frac{x}{2}$; 4) $y = \operatorname{ctg} 3x$.

1.14. Дослідити функцію $y = \sin x^2$ на періодичність.

1.15. Показати, що рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ на проміжку $[1, 2]$ має дійсний корінь, і знайти його значення з точністю до 0,1.

1.16. Визначити, чи обмежена функція $y = \operatorname{arccctg} \frac{x^2 + 1}{2x} + 2^{\sin x} - x^2$ на відріжку $[1, 5]$? Чи досягає вона найменшого і найбільшого значення на цьому проміжку?

1.17. Вказати, при яких значеннях x аналітичні вирази мають дійсні значення:

1) $\frac{1}{x^2 - 4x + 3}$; 2) $\sqrt{x^2 - 4}$;

3) $\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$; 4) $\frac{x}{\ln(x + 3)}$.

2. Границя послідовності

2.1. Записати перші п'ять членів послідовності, заданої формулою загального члена

1) $x_n = \frac{3n - 1}{2n + 5}$; 2) $x_n = \frac{2n - 1}{n^2}$;

3) $x_n = \frac{3^n}{(n + 1)!}$; 4) $x_n = \frac{n + (-1)^n n}{n}$.

2.2. Записати формулу загального члена послідовностей:

1) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$; 2) $-1, 0, -1, 0, -1, \dots$; 3) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$;

4) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$; 5) $1, -1, 1, -1, 1, \dots$; 6) $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \frac{5}{2^5}, \dots$;

7) $2, 5, 8, 11, 14, \dots$; 8) $0, \frac{7}{2}, 13, \frac{63}{2}, 62, \dots$.

2.3. Довести за означенням, що границею послідовності з загальним членом $x_n = \frac{3n + 1}{n + 5}$ є число 3.

2.4. Довести, що при $n \rightarrow \infty$ послідовність $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{n}, \dots$ має границю число 2.

2.5. Довести, що при $n \rightarrow \infty$ послідовність $\frac{7}{3}, \frac{10}{5}, \frac{13}{7}, \dots, \frac{3n+4}{2n+1}, \dots$ має границю число 1,5.

2.6. За означенням границі показати, що послідовність $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n+1}{2n+3}, \dots$ має границю $\frac{1}{2}$, а послідовність $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{10}, \dots, \frac{2n+1}{3n+1}, \dots$ має границю $\frac{2}{3}$.

2.7. Показати, що границею послідовності з загальним членом $x_n = \frac{2n+5}{n+8}$ є число 2.

2.8. Знайти границі послідовностей:

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3^n} \right);$ | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n};$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{5n^2};$ | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(3n+1)}{n^3+1};$ |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4n+3}{n^2+1};$ | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+6n+7}{2-n^2-3n^3};$ |
| 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+3n^2-5}{4-2n+6n^2};$ | 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5-6n^3+1}{3n^2+5n};$ |
| 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+6}{n^2-3n+4};$ | 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+4}{2n^3-n+1};$ |
| 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-4n+6}{3+5n+7n^2};$ | 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2};$ |

2.9. Обчислити границі послідовностей:

- | | |
|--|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2+1}};$ | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+n}}{\sqrt{n^2+2}};$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}+2}{2n-\sqrt{n}+3};$ | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}+3}{n+\sqrt[3]{n}};$ |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2\sqrt[3]{n}+3}{\sqrt{n}+4\sqrt[3]{n}};$ | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^4+n^2}-\sqrt{n}};$ |

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2+n} - \sqrt{1+n}); \quad 8) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2-1} - \sqrt{3n^2+1});$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+2)! - n!}; \quad 10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n+2)!}{(n+3)!};$$

$$11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{5^n}}; \quad 12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{3n^2+2};$$

$$13) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right).$$

2.10. Знайти границі послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n+1}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{3n+3}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{4n};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{bn}; \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{2n+5}; \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{4n+2}.$$

2.11. Знайти границі таких послідовностей:

$$1) \left\{ \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right\}; \quad 2) \left\{ \frac{4^n - 1}{4^n + 1} \right\};$$

$$3) \left\{ \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+\dots+n} \right\}; \quad 4) \left\{ \left(\frac{n^2+1}{n^2+2} \right)^{3n^2-2} \right\}.$$

2.12. Вказати, які з наступних послідовностей $\{x_n\}$ є нескінченно великими або нескінченно малими:

$$1) x_n = 2^n; \quad 2) x_n = 1 + (-1)^n; \quad 3) x_n = 1000000;$$

$$4) x_n = \frac{1}{3n+8}; \quad 5) x_n = n^2 \cos n; \quad 6) x_n = \frac{\sin n}{n}.$$

2.13. Довести, що задані послідовності $\{x_n\}$ розбіжні:

$$1) \left\{ \frac{1}{\sin n} \right\}; \quad 2) \{\cos n^2\}; \quad 3) \left\{ \frac{n+9}{81} \right\}; \quad 4) \left\{ \frac{\pi}{2} \sqrt{n} \right\}.$$

3. Границя функції

3.1. Користуючись означенням границі, довести:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 5) = 4; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 1}{2x + 6} = 2;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{x+3} = 3;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty;$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 9} = \infty.$$

3.2. Обчислити границі функцій:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x-1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} (2x+5);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}}{1+\sqrt{2-x}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{3x-6};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x^2+x-12};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+x-6}{x^2+x-2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4+2x^3-3}{x^3+x-2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+1}{x^2-2x-3};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-1}{x^4-1};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{12+x}-3}{1-\sqrt{x+4}};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{2-\sqrt{x^2+4}};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}.$$

3.3. Знайти границі :

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x-3}{4x^2-x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3+6x^2-5}{3x^4-5x^3+6x-13};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-4x^2-3x}{5x^2-8x+7};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4+3x^2-7x-5}{10x^4-2x^3+5x^2-11};$$

- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2-3x+4};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-3x+1}{x^2+4};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-x^2+2x}{x^3+x^2+4};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3+1}{x^2+2} - 2x \right);$
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x});$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x^2+3x-1};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-x+5}{2x-3};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x+4}{x^2+x};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2-4}}{2x+3};$
- 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+2} + \sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^5+3} - \sqrt{x^4+4}};$
- 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+5} - \sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2+3} + x};$
- 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^5+2} - \sqrt[3]{x^4-3}}{\sqrt[3]{x^9+1}};$
- 17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3+3} - \sqrt{x^3-3});$
- 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x-2}).$

3.4. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 7x};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 4x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 3x};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x};$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{1 - \cos 4x};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin 2x \operatorname{ctg}^2 3x);$
- 12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 7x;$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 3x};$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x - \cos^5 x};$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2};$
- 17) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x};$
- 18) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 5x}{1 - \cos 4x};$
- 19) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(x - \pi/2)^2};$
- 20) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \operatorname{tg} x.$

3.5. Обчислити границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+2x}\right)^x$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+5}\right)^{2x+5}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^x$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+1}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{3x+2}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+2}\right)^{4x-3}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{1-x^2}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{4}{x}}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 1} (7x-6)^{\frac{1}{x-1}}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{4x}{2-x}}$.

3.6. Показати, що виконуються рівності:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-1}{x-3} - \frac{4x}{x^2-9}\right) = \frac{2}{3}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{4}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{\frac{x}{2}} = e^2$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^2}{x^2+2}\right)^{3x^2-2} = e^{-3}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin 2x}} = \sqrt{e}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{x \operatorname{tg} 7x} = \frac{1}{7}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{\arcsin 3x} = \frac{4}{3}$.

3.7. Знайти границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x}-1}{x^2}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x+3}{2^x-3}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+ax+b} - \sqrt{x^2+cx+d}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-10^x}{1+10^{x+1}}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4}{1-2x^4} - 2^{\frac{1}{x}}\right)$;

- 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-10^x}{2+10^{x+1}};$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+9}{x^2+3x+5} \right)^{6x};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{1+\ln x}};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+mx)}{x};$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - x}{\ln(x+1)};$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x};$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}};$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)};$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)};$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)};$
- 20) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1};$
- 21) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}};$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \sqrt{1+x} \right)^{\frac{2}{x}};$
- 23) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (tg x)^{tg^2 x};$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x};$
- 25) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}};$
- 26) $\lim_{x \rightarrow 1} 2^{\frac{3x}{x+2}};$
- 27) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{2x}{x+3}};$
- 28) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x+3} \right)^{\frac{2x+5}{x+1}};$
- 29) $\lim_{x \rightarrow 3} 2^{\frac{x-3}{2}};$
- 30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{3x-1}{x+2}};$
- 31) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}};$
- 32) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \operatorname{tg} x)^{\frac{6}{x}};$
- 33) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + 5 \ln x)^{\frac{1}{\ln x}};$
- 34) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}};$
- 35) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-2)(\ln(2x-1) - \ln(2x+1));$
- 36) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2-3)(\ln(x^2+4) - \ln(x^2-1)).$

3.8. Знайти односторонні границі:

- 1) лівосторонню границю функції $y = \frac{4x}{x-5}$ при $x \rightarrow 5$;
- 2) лівосторонню границю функції $y = 2^{\frac{2}{x-3}} + 1$ при $x \rightarrow 3$.

3) правосторонню границю функції $y = e^{\frac{1}{x-1}}$ при $x \rightarrow 1$.

3.9. Користуючись властивостями нескінченно великих, знайти границі:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 4)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)$.

3.10. Користуючись властивостями нескінченно малих, знайти границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x + 4}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 3x + 2}$.

3.11. Порівняти нескінченно малі:

1) $\alpha = 2x^2 + x^3$ та $\beta = 3x^2 + x^5$ при $x \rightarrow 0$;

2) $\alpha = t \cdot \operatorname{tg}^2 t$ та $\beta = t \sin t$ при $t \rightarrow 0$.

3.12. Визначити порядок нескінченно малої $\alpha(x) = 1 - \cos x$ у порівнянні з нескінченно малою x .

3.13. Визначити порядок нескінченно малої $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$ у порівнянні з нескінченно малою x .

3.14. Порівняти нескінченно малі $\alpha = \ln(1 + x \sin x)$ та $\beta = \operatorname{tg} x^2$ при $x \rightarrow 0$.

3.15. Порівняти нескінченно малі $\alpha = a^x - 1$ та $\beta = x \ln a$ при $x \rightarrow 0$.

3.16. Порівняти нескінченно малі $\alpha = 3x^3 + x$ і $\beta = x^4 - x^3 + 2x^2$ при $x \rightarrow 0$.

3.17. Порівняти нескінченно малі $\alpha = t \ln(1+t)$ та $\beta = t \sin t$ при $t \rightarrow 0$.

3.18. Визначити порядок нескінченно малої $y = xe^x$ у порівнянні з нескінченно малою x .

3.19. Визначити порядок нескінченно малої $y = \sqrt{\sin 2x}$ у порівнянні з нескінченно малою x .

3.20. Порівняти нескінченно малі $\alpha = x^2 \sin^2 x$ та $\beta = x \operatorname{tg} x$, якщо $x \rightarrow 0$.

3.21. Знайти границі, використовуючи властивості нескінченно малих:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{\operatorname{tg} 2x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\ln^2(1+3x)}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(1-x)}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-4x)}{e^{2x} - 1}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{1+x^2} - 1}$.

3.22. Знайти границі:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}}$;

- 3) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi/2 - x) \operatorname{tg} x$;
- 5) $\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{\sin \alpha}{1 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}}$;
- 6) $\lim_{z \rightarrow \pi} (1 - z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$;
- 7) $\lim_{y \rightarrow \alpha} \sin \frac{y - \alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2\alpha}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\sqrt{3}/2 - \cos x}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \right)}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x} \right)$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha + x) - \cos(\alpha - x)}{x}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha + x) - \sin(\alpha - x)}{\operatorname{tg}(\alpha + x) - \operatorname{tg}(\alpha - x)}$;
- 15) $\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\alpha^2 - \beta^2}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos 2x}}{\sin^2 x}$;
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}$;
- 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2(x/2)}$;
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$;
- 20) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1 + x} \right)^x$;
- 21) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x+1}{x}}$;
- 22) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{kx}{x} \right)^{mx}$;
- 23) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$;
- 24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$;
- 25) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$;
- 26) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x$;
- 27) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$;
- 28) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$;
- 29) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$;
- 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + kx)}{x}$;
- 31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\alpha + x) - \ln \alpha}{x}$;
- 32) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$;

$$33) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h};$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x};$$

$$35) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1};$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2};$$

$$37) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$38) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x};$$

$$39) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x};$$

$$40) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right).$$

4. Неперервність функції

4.1. Дослідити на неперервність функцію $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

4.2. Дослідити на неперервність функцію $y = \frac{|x|}{x}$.

4.3. Дослідити на неперервність функцію $y = \frac{|x - 3|}{x - 3}$.

4.4. Дослідити функцію $y = \frac{1}{(x + 1)(x - 4)}$ на неперервність.

4.5. Довести, що при $x = 5$ функція $y = \frac{x}{5 - x}$ має розрив.

4.6. Дослідити функцію $y = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ на неперервність.

4.7. Знайти точки розриву функції $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$.

4.8. З'ясувати характер точок розриву функції $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x - 5}$.

4.9. З'ясувати характер точок розриву функції $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6}$.

4.10. Дослідити на неперервність функцію $y = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$.

4.11. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ і з'ясувати характер точок розриву.

4.12. З'ясувати характер розриву функції $y = \frac{\sin x}{x}$ у точці $x = 0$.

4.13. Дослідити функцію $y = \arctg \frac{1}{x - 2}$ на неперервність.

4.14. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

4.15. Знайти точки розриву функції $y = \frac{2^{\frac{1}{x-2}} - 1}{2^{\frac{1}{x-2}} + 1}$ та дослідити їх характер.

4.16. Дослідити функцію $y = 4^{\frac{2}{x-3}}$ на неперервність.

4.17. З'ясувати характер розриву функції $y = \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{1-x}}}$ при $x = 1$.

4.18. Дослідити на неперервність функції:

$$1) f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{якщо } x < 2, \\ 2-x, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

4.19. Дослідити функцію $f(x)$ на неперервність і побудувати її графік, якщо:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ 5-x, & x > 2. \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \leq -1, \\ 2x^2-1, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

4.20. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{якщо } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & \text{якщо } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4.21. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{tg} x, & \text{якщо } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ \cos x, & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, & \text{якщо } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

4.22. При якому значенні a функція $f(x) = \begin{cases} x-a, & \text{якщо } x < 1, \\ 2x+1, & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases}$ буде

неперервною при $x \in (-\infty, +\infty)$?

4.23. Користуючись означенням, довести неперервність функцій в області їх визначення:

$$1) f(x) = 3x^2 + 2x + 1; \quad 2) f(x) = x^n; \quad 3) f(x) = \sin x.$$

4.24. Чи має рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$ хоча б один корінь на відрізку $[0; 2]$?

Розділ III. Диференціальне числення функції однієї змінної

1. Похідна функції. Диференціювання функцій

1.1. Знайти похідну функції:

- 1) $y = 3x^2 - \frac{x^4}{4} + 2x$;
- 2) $y = x^3 - \frac{4}{x^3} + \sqrt{x}$;
- 3) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{2}$;
- 4) $y = 2x + \frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x\sqrt{x}}$;
- 5) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{8}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$;
- 6) $y = \ln x^2 + 3^{2x} - \sin 1$;
- 7) $y = \arcsin x + \arccos x$;
- 8) $y = \sin^2 t + \cos^2 t$.

1.2. Знайти похідну функції:

- 1) $y = x \cos x$;
- 2) $y = e^t \sin t$;
- 3) $y = \sin t \cos t$;
- 4) $y = (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$;
- 5) $y = x^3 \operatorname{ctg} x$;
- 6) $y = 5^x \operatorname{tg} x$;
- 7) $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$;
- 8) $y = e^x (\sin x + \cos x)$;
- 9) $y = (1 - x^2) \arcsin x$;
- 10) $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

1.3. Знайти похідну функції:

- 1) $y = \frac{x^2}{1 - x}$;
- 2) $y = \frac{x}{x^2 + 4}$;
- 3) $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$;
- 4) $y = \frac{2x - 1}{3x + 4}$;
- 5) $y = \frac{5x}{2 - x^2}$;
- 6) $y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x - 1}$;
- 7) $y = \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$;
- 8) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$;
- 9) $y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} + 4}$;
- 10) $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$;
- 11) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;
- 12) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$;
- 13) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos 2x}$;
- 14) $y = \frac{\arcsin x}{1 - x^2}$;
- 15) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$;
- 16) $y = \frac{\ln x - 2}{3^x}$;
- 17) $y = \frac{x^2 + 1}{\ln x}$;
- 18) $y = \frac{e^x}{\operatorname{tg} x + 1}$.

1.4. Знайти похідну функції:

- 1) $y = (2 + 3x)^4$;
- 2) $y = (x^4 - 6x + 2)^5$;
- 3) $y = \frac{1}{(ax + b)^n}$;
- 4) $y = \sqrt{1 - x^3}$;
- 5) $y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 1}$;
- 6) $y = \sqrt{(x + 1)(x - 5)}$;

7) $y = \left(x^2 - \frac{1}{x^3} + 4\sqrt{x} \right)^3$; 8) $y = (3x - 9\sqrt[3]{x} + 1)^4$; 9) $y = 6\sqrt{x^5 + 5x^4 - \frac{5}{x}}$;
 10) $y = \cos(4x - 2)$; 11) $y = \operatorname{tg} x^2$; 12) $y = \ln(1 - x^4)$;
 13) $y = \sin^3 x$; 14) $y = \ln^5 x$; 15) $y = \operatorname{arcctg} \frac{x}{2}$;
 16) $y = e^{-2x}$; 17) $y = e^{\sqrt[3]{x^2}}$; 18) $y = 3^{\sqrt{x}+1}$; 19) $y = 4^{1-x^2}$;
 20) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$; 21) $y = \ln \cos x$; 22) $y = \sin \sqrt[5]{x}$;
 23) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 24) $y = \arcsin \frac{1}{x}$; 25) $y = \frac{1}{\arcsin x}$;
 26) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{9x^2 - 1}$; 27) $y = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$; 28) $y = \arccos(\ln x)$;
 29) $y = \operatorname{tg}^2 \sqrt{1+e^x}$; 30) $y = \left(e^{\cos x} + \sin^2 \frac{x}{2} \right)^3$.

1.5. Знайти похідну функції:

1) $y = e^{-x} \sqrt{2x-1}$; 2) $y = \operatorname{ctg}(x-2)^3$; 3) $y = \sin^5(\ln x)$;
 4) $y = \ln \sin \sqrt{x}$; 5) $y = \ln^4(\cos x)$; 6) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{2x+1}{4}$;
 7) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; 8) $y = \ln(\sqrt{1+e^x} - 1)$; 9) $y = \lg(\sqrt{3+x} + \sqrt{2-x})$;
 10) $y = \arccos \sqrt{1-2^x}$; 11) $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}-1})$; 12) $y = \left(3^{\sin x} + \ln \frac{1}{x} \right)^2$;
 13) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}$; 14) $y = \cos \sqrt{x} + 2^{\sqrt{x}}$; 15) $y = \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
 16) $y = x \arcsin \sqrt{x}$; 17) $y = x^2 \sqrt{1-x^2}$; 18) $y = e^{\sin x} \operatorname{tg} x$;
 19) $y = 3^x \sin x^3$; 20) $y = 2^x \cdot \ln \frac{x^2}{2}$; 21) $y = \sin 2x \cos \frac{x}{2}$;
 22) $y = \cos 3x \cdot e^{\sin 3x}$; 23) $y = 2^{\sqrt{1-x}} \arccos \sqrt{x}$; 24) $y = \sqrt{1+4x^2} \operatorname{arcctg} 2x$;
 25) $y = 4^{\ln x} \cdot \sin \frac{1}{x}$; 26) $y = (1-x)^3 \cdot e^{2x-x^2}$; 27) $y = 5^{\sqrt{x}} \operatorname{arctg}^2(1-x)$.

1.6. Знайти похідну функції:

1) $y = \frac{x+2}{\sqrt{3-4x^2}}$; 2) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$; 3) $y = \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$;
 4) $y = \frac{x^2-1}{\sqrt{x+4}}$; 5) $y = \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+x+1}}$; 6) $y = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x-2}}$;

$$\begin{array}{lll}
7) y = \frac{\cos x}{\sin^4 x + 1}; & 8) y = \frac{\sin^2 x}{\cos x + 1}; & 9) y = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x}; \\
10) y = \frac{\operatorname{tg}(x^3 + 1)}{e^{2x+1}}; & 11) y = \frac{x \arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}; & 12) y = \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2x+1}}; \\
13) y = \frac{\cos 2x}{\sqrt{3x^2 + 2}}; & 14) y = \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sqrt{x^2 - 4}}; & 15) y = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\sqrt{1+x^2}}; \\
16) y = \frac{\sqrt{1-4x}}{2^x + x^2}; & 17) y = \frac{x^2 + 1}{x} \sqrt{x^2 - 1}; & 18) \frac{\sqrt{1-2x^3}}{e^x - \cos x}; \\
19) y = \ln \frac{1+x}{1-x}; & 20) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}; & 21) y = \ln \frac{x^2}{2x-1}; \\
22) y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}; & 23) y = \ln \frac{\sqrt{\cos 2x}}{\sin x}; & 24) y = \arccos \frac{x}{1+x}; \\
25) y = \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}; & 26) y = \cos \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}; & 27) y = \ln \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}; \\
28) y = \sqrt{\frac{2+x^2}{2-x^2}}; & 29) y = \left(\frac{1+2x^2}{5-3x} \right)^3; & 30) y = \ln \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}; \\
31) y = 5^{\frac{1+3x}{1-3x}}; & 32) y = e^{\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}}; & 33) y = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right); \\
34) y = \ln^3 \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} \right); & 35) y = \log_2 (\operatorname{arctg}^5 (3x + 1)). &
\end{array}$$

1.7. Знайти значення похідної функції $f(x)$ в точках x_0 :

$$\begin{array}{ll}
1) f(x) = 2^{\sin x}, x_0 = \pi; & 2) f(x) = \arcsin 3x, x_0 = 0, x_0 = \frac{1}{5}; \\
3) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x_0 = 0; & 4) f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1}, x_0 = \frac{\pi}{2}, x_0 = \frac{\pi}{6}; \\
5) f(x) = \ln \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + \frac{2\sqrt{2x+3}}{3}, x_0 = \frac{1}{2}; & \\
6) f(x) = (x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - ax, x_0 = a. &
\end{array}$$

1.8. Знайти похідні від неявно заданої функції $y = f(x)$:

$$\begin{array}{ll}
1) x^3 + x^2 y + y^2 = 8; & 2) x^5 - 3xy^2 = 3; \\
3) y^3 - 3y + 2ax^3 = 0; & 4) y = 1 + xe^y; \\
5) \ln(x + y) = \operatorname{arctg} y; & 6) x + y = e^{x-y};
\end{array}$$

$$7) \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 5x + 1;$$

$$8) \ln y + \frac{x}{y} = 2;$$

$$9) e^y \sin x = e^{-x} \cos y;$$

$$10) y \sin x = \cos(x - y);$$

$$11) \frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$12) \operatorname{tg}(x + y) = xy;$$

$$13) y^2 x = e^{\frac{y}{x}};$$

$$14) x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0;$$

$$15) x^2 + \sin y - e^{xy} = 0;$$

$$16) (e^x - 1)(e^y - 1) = 1;$$

$$17) x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 0;$$

$$18) \sin(xy) = \cos(x^2 y).$$

1.9. Знайти похідну функції логарифмічним диференціюванням:

$$1) y = (\sin x)^x;$$

$$2) y = x^{\cos x};$$

$$3) y = (\sin x)^{\cos x};$$

$$4) y = (\cos x)^{\sin x};$$

$$5) y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x};$$

$$6) y = (\cos 3x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$7) y = (\ln x)^{3x};$$

$$8) y = (\sin x)^{\ln x};$$

$$9) y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{1-x}};$$

$$10) y = (\ln x)^{x^2};$$

$$11) y = (\sin x)^{x^2};$$

$$12) y = x^{\operatorname{arctg} x};$$

$$13) y = (x + x^2)^x;$$

$$14) y = x^{\sqrt{x+1}};$$

$$15) y = x^{\frac{5}{x}};$$

$$16) y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x;$$

$$17) y = x^{1-x^3};$$

$$18) y = \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)^3;$$

$$19) y = x\sqrt{(x+1)^3(x-2)};$$

$$20) y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}};$$

$$21) y = \sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{x-3}};$$

$$22) y = \sqrt[4]{\frac{x^3(x+4)}{(x+2)^2}};$$

$$23) y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}};$$

$$24) y = \frac{(x^2 + 2) \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(x+5)^3}.$$

1.10. Знайти похідну y'_x параметрично заданої функції $y = f(x)$:

$$1) \begin{cases} x = 3t + t^2 \\ y = 4t - t^2 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x = t^3 + 8 \\ y = t^6 + 3t \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x = \sqrt[3]{t-1} \\ y = \sqrt[3]{t+1} \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x = \frac{t+1}{t}; \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} x = \frac{1}{t^2}; \\ y = \frac{1}{4t^2+1} \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{t-1}} \end{cases};$$

$$8) \begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases};$$

$$9) \begin{cases} x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases};$$

$$10) \begin{cases} x = 2 \cos t; \\ y = 3 \sin t \end{cases};$$

$$11) \begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \sin t \end{cases};$$

$$12) \begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \cos 2t \end{cases};$$

$$13) \begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \arccos t \end{cases};$$

$$14) \begin{cases} x = te^t; \\ y = e^{2t} \end{cases};$$

$$15) \begin{cases} x = t + \ln \sin t; \\ y = t + \ln \cos t \end{cases};$$

$$16) \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases};$$

$$17) \begin{cases} x = e^t \sin t; \\ y = e^t \cos t \end{cases};$$

$$18) \begin{cases} x = \sin t + \cos t; \\ y = \cos 2t \end{cases};$$

$$19) \begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{1}{\sin t} \end{cases};$$

$$20) \begin{cases} x = \arcsin 2t \\ y = \frac{1}{1-4t^2} \end{cases};$$

$$21) \begin{cases} x = \operatorname{arctg}(1+t); \\ y = \sqrt{t^2+2t+2} \end{cases};$$

$$22) \begin{cases} x = \ln(1+t^2); \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases};$$

$$23) \begin{cases} x = \sin^3 t; \\ y = \cos^3 t \end{cases};$$

$$24) \begin{cases} x = t \sin t + \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}.$$

2. Геометричний та фізичний зміст похідної

2.1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої, заданої функцією, в точці $M_0(x_0; y_0)$:

$$1) y = x^2 - 2x + 3, x_0 = 2;$$

$$2) y = x^2 - 3x + 1, x_0 = 2;$$

$$3) y = x^3 - 4x^2 + 8x - 6, x_0 = 1;$$

$$4) y = 2x^2 + 1, x_0 = -1;$$

$$5) y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1, x_0 = 3;$$

$$6) y = \frac{8}{4+x^2}, x_0 = 2;$$

$$7) x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6, M_0(1; -1);$$

$$8) x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0, M_0(-1; 3).$$

2.2. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = x^4 - 2x^3 + 3x - 13$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

2.3. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кривої $y = 2x^2 - 3x + 4$ у точці $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$, і записати рівняння цієї дотичної.

2.4. Визначити, в якій точці дотична до кривої $y = x^2 - 2$ а) паралельна до осі Ox ; б) утворює з віссю Ox кут 45° ?

2.5. Дотична до графіка функції $y = \frac{1}{x^2}$ паралельна до прямої $y = -2x + 4$. Визначити абсцису точки дотику.

2.6. Скласти рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, проведеної в точці $M_0(-9; -8)$.

2.7. Визначити, в якій точці дотична до кривої $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ паралельна прямій $2x + 2y - 5 = 0$.

2.8. Знайти, в якій точці дотична до кривої $y = 4x^2 - 6x + 3$ перпендикулярна прямій $x - 2y + 6 = 0$.

2.9. Визначити, який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y = e^x$ у точці $M_0(0, 1)$.

2.10. Визначити, в якій точці дотична до кривої $y = e^{2x+1}$ паралельна прямій $y = 2x - 1$.

2.11. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = 2\sin x + 3\operatorname{ctg} x$ в точці $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

2.12. Визначити кут, який утворює дотична до графіка функції $y = x^2 - 5x + 3$ з віссю Ox в точці з абсцисою $x = 3$.

2.13. Знайти координати точки, в якій дотична до параболи $y = x^2 + 3x - 10$ утворює кут 135° з віссю Ox .

2.14. Визначити, який кут утворює з віссю абсцис дотична до параболи $y = x^2 - 3x + 5$, проведена в точці $M_0(2; 3)$. Скласти рівняння цієї дотичної.

2.15. Знайти кут нахилу дотичної до кривої $y = \sqrt{3}x^2$ в точках з абсцисами $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 0$.

2.16. Визначити, під яким кутом синусоїда перетинає вісь абсцис.

2.17. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x = \cos t, y = \sin t$ у точці $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.18. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ при $t = \frac{\pi}{4}$.

2.19. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ у довільній точці $t \in [-\pi, \pi]$.

2.20. Знайти кут між кривою $y = x - x^3$ та прямою $y = 5x$.

2.21. Визначити, під яким кутом перетинаються параболи $y = x^2$ і $y^2 = x$.

2.22. Визначити, під яким кутом перетинаються: 1) парабола $y = x^2$ і пряма $y = 3x - 2$; 2) парабола $y = \sqrt{x}$ і гіпербола $y = \frac{1}{x}$.

2.23. Знайти кут між кривими $y = x^3$ та $y = \frac{1}{x^2}$.

2.24. Знайти кут між кривими $x^2 + y^2 = 5$, $y^2 = 4x$.

2.25. Знайти кут між кривими $y = \sqrt{2} \sin x$, $y = \sqrt{2} \cos x$.

2.26. Профіль підйому гірської дороги має форму кривої $y = \frac{x}{1 + x^2}$. Визначити кут нахилу підйому до його початку.

2.27. Тіло рухається прямолінійно за законом $s = 2t^2 - t + 4$ (м). Знайти швидкість руху тіла у моменти часу $t_0 = 3$ с.

2.28. Шлях, пройдений тілом, визначається функцією $s = 3t^2 - 2t + 4$ (м). Знайти швидкість тіла через 5 секунд після початку руху.

2.29. Визначити, коли швидкість матеріальної точки, яка рухається прямолінійно за законом $s = t^2 - 4t + 5$ (м), дорівнює нулю.

2.30. Знайти швидкість тіла у вказані моменти часу, якщо воно рухається прямолінійно за законом: 1) $s(t) = \sin \frac{\pi t}{3}, t_0 = 1$; 2) $s(t) = -\cos \frac{\pi t}{4}, t_0 = 2$.

2.31. Залежність пройденого шляху від часу при прямолінійному русі тіл задано функціями $s_1(t) = \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 24$ (м) і $s_2(t) = \frac{1}{2}t^2 + 6t - 17$ (м). Визначити, в який момент часу швидкості їх руху будуть однаковими.

2.32. Кількість електрики у провіднику змінюється за законом $Q = \sin(3t + 1)$. Визначити, за яким законом змінюється сила струму.

2.33. Махове колесо за t секунд повертається на кут $\varphi = 8t - 2t^2$. Визначити кутову швидкість обертання. Через скільки секунд колесо зупиниться?

2.34. Чисельність деякої популяції тварин описується функцією $s = t^2(0,3 - 0,001t)$ (тис). Знайти швидкість зростання популяції через 10 років.

2.35. Дві групи туристів одночасно вийшли з турбази. Одна група рухається на південь зі швидкістю 4 км/год., а інша – на схід зі швидкістю 6 км/год. Визначити, з якою швидкістю змінюється відстань між групами.

2.36. Тіло масою 2 кг рухається прямолінійно за законом $s = 3t^2 - 4t + 6$ м. Визначити кінетичну енергію $\left(E = \frac{mv^2}{2}\right)$ тіла через 4с після початку руху.

3. Диференціал функції. Похідні вищих порядків

3.1. Знайти диференціал функції $y = f(x)$:

- | | | |
|--|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) $y = \frac{x^2 + 2x}{x - 3}$; | 2) $y = \frac{(x-1)^2}{x+4}$; | 3) $y = \ln \frac{x-6}{x+6}$; |
| 4) $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$; | 5) $y = \sin \frac{1}{x^2}$; | 6) $y = \ln \sqrt{\cos x}$; |
| 7) $y = x^3 e^{3x+2}$; | 8) $y = e^{4x} \cdot \sin 2x$; | 9) $y = e^{-x}(1 - 2x - x^2)$; |
| 10) $y = \arcsin^3 \sqrt{1-x^2}$; | | |
| 11) $y = x^2 \operatorname{ctg}(5x+1)$; | | |
| 12) $y = e^{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}} \cdot \cos x$. | | |

3.2. Знайти диференціал $df(x)$ і приріст $\Delta f(x)$ функції $f(x) = x^2 - 2$ в точці $x = 2$ при $\Delta x = 0,1$. Обчислити абсолютну і відносну похибки, отримані при заміні приросту функції її диференціалом.

3.3. Обчислити наближено значення функції:

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\ln 1,02$; | 2) $\sqrt{27}$; | 3) $\arcsin 0,51$; |
| 4) $\sin 31^\circ$; | 5) $\sqrt[4]{17}$; | 6) $\operatorname{arctg} 0,98$; |
| 7) $\operatorname{tg} 46^\circ$; | 8) $\sqrt[3]{8,002}$; | 9) $e^{0,95^2}$; |
| 10) $\cos 60^{\circ}1'$; | 11) $\sqrt[4]{15,8}$; | 12) $\operatorname{arctg} 1,05$. |

3.4. Обчислити наближено значення функції $f(x)$ у точці x_0 :

- | | |
|---|---|
| 1) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$, $x_0 = 1,97$; | 2) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}}$, $x_0 = 2,02$. |
|---|---|

3.5. Знайти наближене значення об'єму кулі радіусом 2,01 см.

3.6. Знайти похідну другого порядку для функції $y = f(x)$:

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|---|
| 1) $y = x\sqrt{x}$; | 2) $y = \operatorname{arctg} x$; | 3) $y = \cos^2 x$; |
| 4) $y = \frac{x}{x+1}$; | 5) $y = x^2 \ln x$; | 6) $y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$; |
| 7) $y = \frac{1}{1+x^3}$; | 8) $y = xe^{x^2+2}$; | 9) $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$; |
| 10) $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$; | 11) $y = \sqrt{1+x^2}$; | 12) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. |

3.7. Знайти похідну вказаного порядку для функції $y = f(x)$:

- | | |
|--|--|
| 1) $y = x^2 + 5x - 6$, $y''' - ?$ | 2) $y = \sqrt[3]{x}$, $y''' - ?$ |
| 3) $y = \frac{x}{6(x+1)}$, $y''' - ?$ | 4) $y = \frac{\ln^2 x}{2}$, $y''' - ?$ |
| 5) $y = (2x+1)^3 \sqrt{2x+1}$, $y''' - ?$ | 6) $y = (x^2 + 4) \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$, $y''' - ?$ |
| 7) $y = \frac{1-x}{1+x}$, $y^{(4)} - ?$ | 8) $y = 3^x + 3^{-x}$, $y^{(5)} - ?$. |

3.8. Знайти похідну n -го порядку $y^{(n)}$ для функції $y = f(x)$:

- | | | |
|------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1) $y = a^x$; | 2) $y = e^{kx}$; | 3) $y = \ln(1+x)$; |
| 4) $y = \cos x$; | 5) $y = \frac{1}{x^2}$; | 6) $y = xe^x$; |
| 7) $y = \frac{a}{x}$; | 8) $y = x^{n-1} \ln x$; | 9) $y = x^n \sqrt{x}$. |

3.9. Знайти похідну другого порядку для параметрично заданої функції

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 + 1 \end{cases}$; | 2) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$; | 3) $\begin{cases} x = 2\sqrt{t} + 1 \\ y = \ln t \end{cases}$; |
| 4) $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$; | 5) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \frac{t+1}{\sqrt{t-1}} \end{cases}$; | 6) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$; |
| 7) $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$; | 8) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \ln \sin 2t \end{cases}$; | 9) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$; |
| 10) $\begin{cases} x = a \sin^2 t \\ y = b \cos^2 t \end{cases}$; | 11) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$; | 12) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \arcsin t \end{cases}$; |

$$13) \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}; \quad 14) \begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}; \quad 15) \begin{cases} x = t + \ln \sin t \\ y = t + \ln \cos t \end{cases}.$$

3.10. Знайти диференціал вказаного порядку функції $y = f(x)$:

$$1) y = \ln x + 2x, d^2y - ? \quad 2) y = \frac{3}{x+1}, d^2y - ?$$

$$3) y = \cos \ln x, d^2y - ? \quad 4) y = \frac{x}{x^2-1}, d^2y - ?$$

$$5) y = e^{2x}(x-2), d^2y - ? \quad 6) y = x^2 e^{-x}, d^2y - ?$$

$$7) y = x^2 \ln x, d^3y - ? \quad 8) y = \sin x^2, d^3y - ?$$

3.11. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s = 3t^2 - 3t + 8$. Знайти прискорення точки в момент $t = 4$ с.

3.12. Закон руху тіла визначається рівнянням $s(t) = t^3 - t$. Визначити прискорення тіла в момент часу, коли його швидкість дорівнює 11 м/с.

3.13. Знайти прискорення точки у вказані моменти часу t , якщо швидкість точки, яка рухається прямолінійно, визначається законом:

$$1) v(t) = t^3 - 2t^2 + t, t = 2; \quad 2) v(t) = 2 \sin \frac{t}{2}, t = \frac{2\pi}{3}.$$

3.14. Знайти момент часу t , коли прискорення точки, яка рухається прямолінійно за законом $s(t) = -t^3 + 3t^2 - 8$, дорівнює нулю. Чому дорівнює при цьому швидкість точки?

3.15. Тіло маси m рухається за законом $s(t) = 3t^2 - 5t + 7$. Довести, що сила, яка діє на тіло, є сталою.

3.16. Швидкість прямолінійного руху тіла пропорційна квадратному кореню з пройденого шляху. Довести, що тіло рухається під дією сталої сили.

4. Застосування похідної. Правило Лопітала. Асимптоти кривої

4.1. Знайти границю функції за правилом Лопітала

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tg x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x\sqrt{1-x^2}};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

4.2. Обчислити границю функції, користуючись правилом Лопіталя

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3 + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{\ln x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + x}{\sqrt{x} + 1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^2 + 3};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}.$$

4.3. Знайти границю функції за правилом Лопіталя

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 4x;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x) \frac{1}{x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x);$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2 x \cdot e^{-x}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right);$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} x;$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

4.4. Обчислити границю функції, користуючись правилом Лопіталя

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{\sin x} \right);$$

$$\begin{array}{ll}
7) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}; & 8) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}; \\
9) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x}}; & 10) \lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^{\frac{1}{x}}; \\
11) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}; & 12) \lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}; \\
13) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x}; & 14) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}; \\
15) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}; & 16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.
\end{array}$$

4.5. Знайти асимптоти кривих

$$\begin{array}{ll}
1) y = \frac{x}{x^2 - 4x + 5}; & 2) y = \frac{5x}{x^2 + 2}; \\
3) y = \frac{x^2}{x^2 - 4}; & 4) y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}; \\
5) y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}; & 6) y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 4}; \\
7) y = \sqrt{x^2 - 1}; & 8) y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}}; \\
9) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; & 10) y = c + \frac{a^3}{(x - b)^2}; \\
11) y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x; & 12) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; \\
13) y = x e^{\frac{2}{x}} + 1; & 14) y = x e^x; \\
15) y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right); & 16) y = \frac{\sin 3x}{x}; \\
17) y = \frac{2x^2 - \cos x}{x}; & 18) y = x - \operatorname{arctg} x.
\end{array}$$

5. Застосування похідної до дослідження функцій.

Проміжки монотонності та екстремум функції

5.1. Визначити проміжки монотонності (зростання і спадання) функції

$$\begin{array}{ll}
1) y = -x^2 - 4x + 3; & 2) y = 2x^2 - 4x + 5; \\
3) y = 2 - 3x + x^3; & 4) y = x^3 + 6x^2 + 9x - 4; \\
5) y = x^4 - 2x^2 - 5; & 6) y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 20;
\end{array}$$

- 7) $y = x^2(a - x)^2, a > 0$; 8) $y = (2 - x)(x + 1)^2$;
 9) $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$; 10) $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$;
 11) $y = x\sqrt{2 - x^2}$; 12) $y = \sqrt{(x^2 - 1)^3}$;
 13) $y = x\sqrt{ax - x^2}, a > 0$, 14) $y = \sqrt[3]{(2x - 3)(3 - x)^2}$;
 15) $y = x(1 + \sqrt{x})$; 16) $y = xe^{-x}$;
 17) $y = 2e^{x^2 - 4x}$; 18) $y = \ln(1 - x^2)$;
 19) $y = x - e^x$; 20) $y = x^2e^{-x}$;
 21) $y = \frac{x}{\ln x}$; 22) $y = 2x^2 - \ln x$;
 23) $y = x + \cos x$; 24) $y = x - 2\sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$;
 25) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; 26) $y = \ln(1 + x^2) - x$.

5.2. Показати, що функція $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ спадає на інтервалі $(-1; 3)$.

5.3. Показати, що функція $y = x^3 + x$ зростає $\forall x \in R$.

5.4. Показати, що функція $y = \arctg x - x$ спадає на $(-\infty, +\infty)$.

5.5. Дослідити функцію на екстремум:

- 1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$; 2) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$;
 3) $y = x + \frac{a^2}{x}, a > 0$; 4) $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x, a > 0$;
 5) $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$; 6) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$;
 7) $y = x\sqrt{1 - x^2}$; 8) $y = x + \sqrt{1 - x}$;
 9) $y = x + \sqrt{2 - x^2}$; 10) $y = \sqrt[3]{(x + 3)x^2}$;
 11) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$; 12) $y = (2x - 1)\sqrt[3]{(x - 3)^2}$;
 13) $y = -x^2\sqrt{x^2 + 2}$; 14) $y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x - 7}$;
 15) $y = x - \ln(1 + x)$; 16) $y = \frac{x}{\ln x}$;
 17) $y = \ln(x^2 + 1)$; 18) $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)\arctg x - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x - 1}{2}$.

5.6. Знайти значення функції $f(x) = 10^{\lg \frac{x^3 - 3x}{x + 5} - \log_{0.1}(x + 5)}$ у точці максимуму.

6. Найбільше та найменше значення функції.

Задачі практичного змісту

6.1. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3x - x^2$ на відрізку $[-2; 3]$.

6.2. Знайти найбільше й найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ на відрізку $[0; 3]$.

6.3. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)$ на відрізку 1) $[-8; -1]$; 2) $[-1; 1]$.

6.4. Знайти найбільше і найменше значення функції на вказаному відрізку

1) $y = 2x^2 - 3x + 1$, $[-1; 2]$; 2) $y = x^4 - 2x^3 + 3$, $[-3; 2]$;

3) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2; 2]$; 4) $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5$, $[-4; 1]$;

5) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $[-1; 2]$; 6) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $[-1; 1]$;

7) $y = \frac{x-1}{x+1}$, $[0; 4]$; 8) $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 5}$, $[-1; 3]$;

9) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$, $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$; 10) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0; 1]$;

11) $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0; 4]$; 12) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \frac{2x}{3}$, $[1; 9]$;

13) $y = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6; 8]$; 14) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$, $[0; 3]$;

15) $y = \sin 2x - x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 16) $y = \arctg \frac{1-x}{1+x}$, $[0; 1]$.

6.5. Знайти найменше значення функції $y = x^2 - 3x + \ln x + 5$ на $[3/4; 5/4]$.

6.6. Знайти найбільше значення функції $y = \ln(x+2)^8 - 8x$ на відрізку $[-1.5; 0]$.

6.7. Знайти найменше значення функції $y = 11\lg x - 11x + 16$ на відрізку $[0; \pi/4]$.

6.8. Число 8 розбити на два такі доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.

6.9. Число 36 розкласти на два такі множники, щоб сума їх квадратів була найменшою.

6.10. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V . Якою повинна бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

6.11. Знайти співвідношення між радіусом R та висотою H циліндра, який при заданому об'ємі має найменшу повну поверхню.

6.12. Знайти найбільший об'єм конуса з твірною l .

6.13. Знайти найбільший об'єм циліндра, повна поверхня якого дорівнює S .

6.14. Відкритий басейн з об'ємом 32 м^3 має квадратне дно. Якими повинні бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

6.15. Знайти розміри циліндра з найбільшим об'ємом, якщо він вписаний в кулю радіуса R .

6.16. Які повинні бути розміри прямокутника найбільшої площі, вписаного в коло радіуса 6 см ?

6.17. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в півколо радіуса R .

6.18. Знайти сторону прямокутника найбільшої площі, вписаного в еліпс з осями $2a$ і $2b$.

6.19. Яке співвідношення повинно бути між розмірами прямокутних вікон заданого периметра, щоб освітленість приміщення була найбільшою?

6.20. Вікно має форму прямокутника, завершеного півколом. Визначити розміри вікна, щоб вікно пропускало найбільшу кількість світла, при заданому периметрі.

6.21. Швидкість зростання чисельності x деякої популяції описується функцією $v = 0,003(200 - x)$. При якій чисельності популяції ця швидкість буде найбільшою?

6.22. Витрати на паливо для пароплава складаються з двох частин. Перша з них не залежить від швидкості і дорівнює 480 гривень за годину. А друга частина витрат пропорційна кубу швидкості, причому при швидкості 10 км/годину ця частина витрат дорівнює 30 гривень за годину. Необхідно знайти, при якій швидкості сума витрат на 1 км шляху буде найменшою.

7. Проміжки опуклості та точки перегину функції

7.1. Знайти проміжки опуклості та точки перегину графіка функції

1) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$; 2) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$;

3) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$; 4) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;

5) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$; 6) $y = (x - 4)^5 + 4x + 4$;

7) $y = (x - 2)\sqrt[5]{(x - 2)^4}$; 8) $y = (x + 1)^4 + e^x$;

9) $y = x + \frac{4}{x + 2}$; 10) $y = \frac{x^3}{x^2 + 3}$;

11) $y = a - \sqrt[3]{x - b}$; 12) $y = xe^{-2x}$;

13) $y = 2e^{-3x} - 3e^{-x}$; 14) $y = \ln(1 + x^2)$;

15) $y = x^2 \ln x$; 16) $y = \frac{a}{x} \ln \frac{x}{a}, a > 0$.

7.2. Показати, що графік функції $y = x \operatorname{arctg} x$ скрізь опуклий вниз.

7.3. Показати, що графік функції $y = \ln(x^2 - 1)$ скрізь опуклий вгору.

7.4. Показати, що крива $y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$ має три точки перегину, які лежать на одній прямій.

7.5. При яких значеннях a та b точка $(1; 3)$ є точкою перегину кривої $y = ax^3 + bx^2$?

8. Повне дослідження функції та побудова графіка

8.1. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = x^4 - 4x^3 + 3$; 3) $y = 2x^4 - x^2 + 1$;

4) $y = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4)$; 5) $y = x(x - 1)^2$; 6) $y = x(x^2 - 3)$;

7) $y = (x^2 - 1)^3$; 8) $y = 16x(x - 1)^3$; 9) $y = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3}$;

10) $y = x\sqrt{1 - x^2}$; 11) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$; 12) $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$;

13) $y = \sqrt[3]{x^2}(x^2 - 4)$; 14) $y = \sqrt[3]{x^2 - x}$; 15) $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}$.

8.2. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

1) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; 2) $y = \frac{x}{1 + x^2}$; 3) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$;

4) $y = \frac{1}{x^2 - x};$	5) $y = \frac{x}{1 - x^2};$	6) $y = \frac{x^2 + 4}{x};$
7) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x};$	8) $y = \frac{2}{x^2 + 2x};$	9) $y = \frac{1 + 2x}{3 - x};$
10) $y = \frac{1}{x^2 - 9};$	11) $y = \frac{x^2}{2(x - 1)};$	12) $y = \frac{4x^2}{x^2 + 3};$
13) $y = \frac{x^2}{(x - 1)^2};$	14) $y = \frac{3 - x^2}{x + 2};$	15) $y = \frac{x - 1}{x^2 - 4};$
16) $y = \frac{1}{x} + 4x^2;$	17) $y = x^2 + \frac{1}{x^2};$	18) $y = x + \frac{4}{x^2};$
19) $y = \frac{8x}{(x - 2)^2};$	20) $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2};$	21) $y = \frac{3x - 2}{x^3};$
22) $y = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1};$	23) $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3};$	24) $y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2};$
25) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4};$	26) $y = \frac{x^3}{3 - x^2};$	27) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1};$
28) $y = \frac{x^4}{x^3 - 1};$	29) $y = \frac{x^5 - 8}{x^4};$	30) $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}.$

8.3. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

1) $y = e^{-x^2};$	2) $y = x + e^{-x};$	3) $y = xe^x;$
4) $y = x^2 e^{-x};$	5) $y = xe^{-x^2};$	6) $y = x^3 e^{-x};$
7) $y = x - \ln(x + 1);$	8) $y = x \ln x;$	9) $y = x^2 \ln x;$
10) $y = \ln(x^2 + 1);$	11) $y = \ln^2 x;$	12) $y = \ln(x^2 - 1);$
13) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$	14) $y = \ln \frac{1 + x}{1 - x};$	15) $y = \frac{1}{e^x - 1};$
16) $y = e^{\frac{1}{x^2 - 4x + 3}};$	17) $y = e^{\frac{1}{x}} - x;$	18) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

8.4. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

1) $y = x + \sin x;$	2) $y = x \cdot \sin x;$	3) $y = \sin x + \cos x;$
4) $y = \cos x - x;$	5) $y = \ln \cos x;$	6) $y = \ln \sin x;$
7) $y = \cos x - \ln \cos x;$	8) $y = x - 2 \operatorname{arctg} x;$	9) $y = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$

Відповіді до розділу I.

1. Множини та операції над ними

1.1. 1) $A=\{3,6,9,12,15,18\}$; 2) $B=\{1,3,5,7,11,13\}$; 3) $C=\{2\}$; 4) $D=\{1,2,3,4\}$; 5) $E=\{-3,-5\}$; 6) $G=\{-2,2\}$; 7) $K=\{-2,-1,0,1,2\}$; 8) $M=\{1\}$. **1.2.** 1) $(0;3], [1;2), (0;1]$; 2) менше 1 та більше 2; більше 3 та менше 0; $(2;3)$; 3) $A \cup B = (1;3]$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = (1;2) \cup (2;3)$, $B \setminus A = \{3\}$; **1.3.** $A \times B = \{(1;3); (1;4); (1;5); (2;3); (2;4); (2;5); (3;3); (3;4); (3;5); (4;3); (4;4); (4;5)\}$. **1.4.** 1) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \emptyset$; 2) $\emptyset$. **1.5.** 2^n . **1.8.** 38. **1.10.** 1) $3,025 = 3\frac{25}{1000} = 2\frac{1}{40}$; 2) $1,(78) = 1\frac{78}{99}$; 3) $3,12(3) = 3\frac{123-12}{900} = 3\frac{37}{300}$.

2. Комплексні числа

2.2. 1) $(a+bi)(a-bi)$; 2) $(\sqrt{a}+\sqrt{bi})(\sqrt{a}-\sqrt{bi})$; 3) $(2m+3ni)(2m-3ni)$; 4) $(a+2i)(a-2i)$; 5) $(\sqrt{a}+\sqrt{2i})(\sqrt{a}-\sqrt{2i})$; 6) $(\sqrt{a}+i)(\sqrt{a}-i)$; 7) $(a+2bi)(a-2bi)$; 8) $(c+i)(c-i)$. **2.3.** 1) $1-i$; 2) -2 ; 3) 1 ; 4) $1+i$; 5) $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; 6) i ; 7) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 8) 2 ; 9) $-2i$; 10) $-i$; 11) $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; 12) $z = -\frac{3}{13} + \frac{11}{12}i$; 13) $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. **2.4.** 1) $x=4, y=2$; 2) $x = \frac{10+b}{9}, y = -2 + \frac{90}{10+b}$; 3) $x=4,5; y=18$; 4) $x = \frac{1}{b} - y, y \in R, a=b$ або $x = \frac{1}{a}, y=0$ або $x = \frac{1}{a}, y \in R, b=0$; 5) $x=4, y=-1$; 6) $x=1, y=2$; 7) $x=2, y=-1$. **2.5.** $7-i; -1-7i; 3+4i; 24-7i; -i$. **2.6.** 1) $1-3i$; 2) $7-4i$. **2.7.** 1) $2+i$; 2) $7-6i$; 3) $8+6i$; 4) -2 ; 5) $10+11i$; 6) $1-3i$; 7) $2-3i$; 8) 8 ; 9) 0 ; 10) $7-9i$. **2.8.** 1) $6+3i$; 2) $-11+8i$; 3) $2i$; 4) $1,1+1,5i$; 5) -6 ; 6) $2-10i$; 7) $-3-7i$; 8) $3+7i$; 9) $2-5i$; 10) $-\frac{1}{10} - \frac{13}{20}i$. **2.9.** 1) $38-16i$; 2) $(\sqrt{6}-4\sqrt{5})-(4\sqrt{3}+\sqrt{10})i$; 3) $-24\sqrt{3}$; 4) $-12+6i$; 5) $2-\frac{5}{6}i$; 6) 6 ; 7) $-8\sqrt{2}$; 8) $-8-3i$; 9) $-21+9i$; 10) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})i$; 11) $\frac{2}{5} + \frac{19}{10}i$. **2.10.** 1) 34 ; 2) 5 ; 3) 19 ; 4) $x+y$; 5) 26 ; 6) 2 ; 7) m^2+n^2 ; 8) $a+b$; 9) $0,29$; 10) 28 ; 11) c^2+d^2 ; 12) $\frac{5}{16}$. **2.11.** 1) $2i$; 2) $\frac{3}{5}i$; 3) $2i$; 4) 3 ; 5) $1-3i$; 6) $-i$; 7) $\frac{a^2-abi}{a^2+b^2}$; 8) $\frac{\sqrt{a}-2i}{a+4}$;

$$9) -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad 10) -\frac{4}{13} + \frac{19}{13}i; \quad 11) \frac{17}{20} - \frac{1}{5}i; \quad 12) \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}i;$$

$$13) \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{4} + \frac{3-\sqrt{6}}{4}i. \quad \mathbf{2.12.} \quad -6-2i. \quad \mathbf{2.13.} \quad 1) -8+8\sqrt{3}i; \quad 2) 9\sqrt{3}-10i; \quad 3) 2i;$$

$$4) 5+12i; \quad 5) 1+4ai-4a^2; \quad 6) a^2+10abi-25b^2; \quad 7) -10+9\sqrt{3}i; \quad 8) -24\sqrt{3}i;$$

$$9) -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad 10) 1; \quad 11) -4; \quad 12) a^2-15a^4b^2+15a^2b^4+(6a^5b-20a^3b^3+6ab)i.$$

$$\mathbf{2.14.} \quad \operatorname{Re} z = 0, \quad \operatorname{Im} z = -1. \quad \mathbf{2.15.} \quad 1) |z| = \sqrt{74}, \arg z = \arctg \frac{7}{5};$$

$$2) |z| = \sqrt{13}, \arg z = \arctg \frac{3}{2}; \quad 3) |z| = 4, \arg z = 0; \quad 4) |z| = 5, \arg z = \frac{\pi}{2};$$

$$5) |z| = 2, \arg z = \frac{5\pi}{3}; \quad 6) |z| = \sqrt{2}, \arg z = \frac{5\pi}{4}; \quad 7) |z| = 10, \arg z = 2\pi - \arctg \frac{4}{3}. \quad \mathbf{2.17.}$$

$$1) \cos \pi + i \sin \pi; \quad 2) \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}; \quad 3) \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$4) 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right); \quad 5) 4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right); \quad 6) \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3};$$

$$7) \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}; \quad 8) 5 \left(\cos \left(\arctg \frac{3}{4} \right) + i \sin \left(\arctg \frac{3}{4} \right) \right). \quad \mathbf{2.19.} \quad 1) \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i; \quad 2) -8;$$

$$3) -i; \quad 4) \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad 5) -\sqrt{5}i; \quad 6) -3. \quad \mathbf{2.20.} \quad z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$z_2 = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right); \quad z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{12} \right) \right) \quad \mathbf{2.21.} \quad 1) \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}; \quad 2) \frac{1}{8} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right);$$

$$3) 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right); \quad 4) \cos 0 + i \sin 0 = 1; \quad 5) \left(\frac{5+6i}{6-5i} \right)^8 = \left(\frac{(5+6i)(6+5i)}{(6-5i)(6+5i)} \right)^8 = i^8 = 1;$$

$$6) 128\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right). \quad \mathbf{2.22.} \quad 1) \quad 4 \quad \text{корня:} \quad \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right),$$

$$\sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right), \quad \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} \right), \quad \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8} \right); \quad 2) \quad 3 \quad \text{корня:}$$

$$2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right), \quad 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right), \quad 2(\cos 2\pi + i \sin 2\pi); \quad 3) \quad 3 \quad \text{корня:}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9} \right), \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9} \right), \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{14\pi}{9} + i \sin \frac{14\pi}{9} \right); \text{ 4) 4 кореня:} \\
& \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{16} + i \sin \frac{7\pi}{16} \right), \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{15\pi}{16} + i \sin \frac{15\pi}{16} \right), \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{23\pi}{16} + i \sin \frac{23\pi}{16} \right), \\
& \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{31\pi}{16} + i \sin \frac{31\pi}{16} \right); \text{ 5) 4 кореня: } \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{16} + i \sin \frac{3\pi}{16} \right), \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{16} + i \sin \frac{11\pi}{16} \right), \\
& \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{16} + i \sin \frac{19\pi}{16} \right), \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{27\pi}{16} + i \sin \frac{27\pi}{16} \right); \text{ 6) 5 коренів: } \cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15}, \\
& \cos \frac{7\pi}{15} + i \sin \frac{7\pi}{15}, \cos \frac{13\pi}{15} + i \sin \frac{13\pi}{15}, \cos \frac{19\pi}{15} + i \sin \frac{19\pi}{15}, \cos \frac{25\pi}{15} + i \sin \frac{25\pi}{15}; \text{ 7) 3} \\
& \text{кореня: } 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), 3 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right), 3 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right); \text{ 8) 3 кореня:} \\
& \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right), \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right), \sqrt[6]{8} \left(\cos \frac{23\pi}{4} + i \sin \frac{23\pi}{4} \right).
\end{aligned}$$

3. Загальні відомості про комплексні числа

3.1. 1) $z_1 + z_2 = 1$, $z_1 - z_2 = -1 - 2i$, $z_1 \cdot z_2 = 1 - i$, $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; 2) $z_1 + z_2 = 8$,

$z_1 - z_2 = -6i$, $z_1 \cdot z_2 = 25$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$; 3) $z_1 + z_2 = 6$, $z_1 - z_2 = -2 + 4i$,

$z_1 \cdot z_2 = 12 + 4i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$; 4) $z_1 + z_2 = 2 + i$, $z_1 - z_2 = 4 - 9i$, $z_1 \cdot z_2 = 17 + 19i$,

$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{23}{26} - \frac{11}{26}i$; 5) $z_1 + z_2 = 7 - i$, $z_1 - z_2 = -3 + 7i$, $z_1 \cdot z_2 = 22 + 7i$, $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{2}{41} + \frac{23}{41}i$;

6) $z_1 + z_2 = -6 + 4i$, $z_1 - z_2 = -2 - 2i$, $z_1 \cdot z_2 = 5 - 14i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{11}{13} + \frac{10}{13}i$. **3.2.**

1) $\overline{z_1 + z_2} = 5 - 3i$, 2) $\overline{z_1 - z_2} = 4 + 5i$; 3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = 14 + 5i$. **3.3.** 1) $9 + 7i$; 2) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$;

3) $\frac{5}{17} - \frac{3}{17}i$. **3.4.** 1) $\operatorname{Re} z = \frac{3}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{4}{5}$; 2) $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = 0$; 3) $\operatorname{Re} z = -46$, $\operatorname{Im} z = -9$;

4) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -1$. **3.5.** 1) $1, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 2) $3, (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$;

$$3) \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad 4) \quad 1, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad 5) \quad 1, \frac{6\pi}{7} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$6) 125, \frac{\pi}{2} + 3\arctg \frac{4}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad 7) \frac{1}{4}; 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad 8) \sqrt{2}, \frac{\pi}{14} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{3.6.} \quad 1) z = 8(\cos \pi + i \sin \pi); \quad 2) z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}; \quad 3) z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right);$$

$$4) z = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right); \quad 5) \sqrt{13} (\cos 146^\circ 18' + i \sin 146^\circ 18').$$

$$\mathbf{3.7.} \quad 1) z = 4(\cos \pi + i \sin \pi), z = 4e^{\pi i}; \quad 2) z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right), z = \sqrt{2} e^{\frac{7\pi}{4} i};$$

$$3) z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, z = e^{\frac{\pi}{2} i}; \quad 4) z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right), z = 2e^{\frac{3\pi}{2} i};$$

$$5) z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right), z = 2e^{\frac{2\pi}{3} i}; \quad 6) z = 8 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), z = 8e^{\frac{\pi}{6} i};$$

$$7) z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), z = 4e^{\frac{\pi}{3} i}; \quad 8) z = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right), z = 2e^{\frac{11\pi}{6} i}.$$

$$\mathbf{3.8.} \quad \text{a)} z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right);$$

$$\text{б)} z_1 \cdot z_2 = 8 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \frac{z_1}{z_2} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\text{в)} z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-7\pi}{12} + i \sin \frac{-7\pi}{12} \right);$$

$$\text{г)} z_1 \cdot z_2 = 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right), \frac{z_1}{z_2} = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right). \quad \mathbf{3.9.} \quad z_1 z_2 = 5 + 5\sqrt{3}i.$$

$$\mathbf{4.10.} \quad 1) 6 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right), \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}; \quad 2) 8e^{\frac{\pi}{2} i}, 2e^{\frac{\pi}{6} i}. \quad \mathbf{3.11.} \quad 4(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ).$$

$$\mathbf{3.12.} \quad 4 + 4\sqrt{3}i. \quad \mathbf{3.13.} \quad z^5 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}, \sqrt[3]{z} = \cos \frac{\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi/4 + 2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

$$\mathbf{3.14.} \quad 1) 16; \quad 2) -2^{13}i; \quad 3) 1; \quad 4) \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad 5) -8i; \quad 6) i; \quad 7) 2^{10} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right); \quad 8) 2^{12};$$

$$9) 32 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -16 + 16\sqrt{3}i; \quad 10) -64. \quad \mathbf{3.15.} \quad 1) z_{1,2} = \pm(3 + 2i);$$

2) $z_1 = -i, z_{2,3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$; 3) $z_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i, z_{3,4} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$;
 4) $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = -\sqrt{3} + i$; 5) $z_1 = 1 + i, z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$,
 $z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$; 6) $z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{9} + i \sin \frac{4\pi}{9} \right)$,
 $z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{10\pi}{9} + i \sin \frac{10\pi}{9} \right), z_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{16\pi}{9} + i \sin \frac{16\pi}{9} \right)$; 7) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18} \right)$,
 $z_2 = 2 \left(\cos \frac{13\pi}{18} + i \sin \frac{13\pi}{18} \right), z_3 = 2 \left(\cos \frac{25\pi}{18} + i \sin \frac{25\pi}{18} \right)$. **3.16.** 1) $z_1 = i, z_2 = -i$;

2) $z_{1,2} = -1 \pm 2i$; 3) $z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i$; 4) $z_1 = -1, z_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 5) $z_1 = \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8}$,
 $z_2 = \cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8}, z_3 = \cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8}, z_4 = \cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8}$; 6) $z_1 = 3i$,
 $z_2 = 3 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right), z_3 = 3 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$; 7) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right), z_2 = 2$,
 $z_3 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{10} + i \sin \frac{9\pi}{10} \right), z_4 = 2 \left(\cos \frac{13\pi}{10} + i \sin \frac{13\pi}{10} \right), z_5 = 2 \left(\cos \frac{17\pi}{10} + i \sin \frac{17\pi}{10} \right)$.

3.17. $z_{1,2} = \pm\sqrt{2} + \sqrt{2}i, z_{3,4} = \pm\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, кореням відповідають вершини квадрата $A(\sqrt{2}; \sqrt{2}), B(-\sqrt{2}; \sqrt{2}), C(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}), D(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, вписаного в коло радіуса 2.

3.18. 1) $z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$; 2) $z^3 + 8 = (z + 2)(z - 1 - i\sqrt{3})(z - 1 + i\sqrt{3})$;
 3) $z^2 - 4z + 5 = (z - 2 - i)(z - 2 + i)$; 4) $z^3 - i = (z + i) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$.

3.19. $z_1 = 7 - i, z_2 = -6i$. **3.20.** 1) множина точок площини, розміщених зліва від прямої $x = 2$; 2) множина точок смуги, обмеженої прямими $y = -1, y = 1$; 3) множина точок круга з центром в т. $(0;0)$ і радіусом $R = 4$; 4) зовнішність круга з центром в т. $(0;0)$ і радіусом $R = 1$; 5) внутрішність круга з центром в т. $(1;0)$ і радіусом $R = 3$ без точок кола; 6) єдина точка $z = 1 - i$; 7) пряма $x + y = 1$; 8) дійсна вісь; 9) гіпербола.

Відповіді до розділу II.

1. Властивості функцій

1.1. $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$;
 4) $(-4; 2)$; 5) $(-\infty; 1)$; 6) $(-1; 0) \cup (0; 1]$; 7) $[1; +\infty)$; 8) $(-2, +\infty)$;

9) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; 10) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$; 11) $(-\infty, +\infty)$; 12) $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$; 13) $(0, 1) \cup (1, 2]$;

14) $[-2, 2]$; 15) $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$; 16) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. **1.2.** 1) $|x| \leq 2$; 2) $-1 \leq x \leq 3$;

3) $(-\infty, +\infty)$; 4) $|x| \geq 2$; 5) $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$; 6) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

1.3. У точках $x = -1, x = 1$ функція не визначена; $f(-2) = \frac{2}{3}$, $f(0) = 0$,

$f(a) = \frac{a^2}{1-a^2}$, $f(x^2) = \frac{x^2}{1-x^4}$, $(f(x))^2 = \frac{x^2}{(1-x^2)^2}$. **1.4.** $-4; 5; a^2 - 4$. **1.5.** $0; \frac{1}{a}; a^{-\frac{a+1}{a}}$;

$-a^{a+1}$. **1.6.** $y = |\cos x|$. $y = e^{\operatorname{tg}^2 x}$. **1.7.** 1) $y = \sqrt{u}$, $u = \cos t$, $t = 2x$; 2) $y = e^u$, $u = v^2$,

$v = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \arcsin u$, $u = v^3$, $v = \frac{x}{x^2 - 1}$. **1.8.** 1) $[-1, 1]$. Вказівка

$\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$; 2) $\left(-\infty, \frac{49}{4}\right]$, Вказівка: координати вершини параболи

$x_0 = -\frac{5}{2}$, $y_0 = \frac{49}{4}$, гілки параболи направлені вниз. 3) $(-\infty, 1]$; 4) $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$;

5) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; 6) $[0, +\infty)$; 7) єдине значення $y = 0$, оскільки область визначення

функції $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 8) $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$, оскільки $1 \leq 2 + \cos 3x \leq 3$. **1.9.** 1) непарна,

2) парна, 3) ні парна, ні непарна, 4) парна. **1.10.** 1) ні парна, ні непарна (функція загального вигляду); 2) непарна; 3) ні парна, ні непарна; 4) парна; 5) непарна; 6) загального вигляду; 7) непарна; 8) непарна; 9) непарна; 10) парна.

1.11. 1) $y = x$, 2) $y = 1 \pm \sqrt{x+1}$; 3) $y = \lg \frac{x}{10}$; 4) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; 5) $y = \frac{1}{2} \lg \frac{x}{2-x}$;

6) $y = \frac{x-1}{3}$; 7) $y = \frac{1}{4} \ln x$; 8) $y = 2x$; 9) $y = \sqrt{x-1}$; 10) $y = \frac{1-2x}{x}$;

11) $y = 3 \operatorname{tg}(x-2)$. **1.12.** 1) неперіодична, бо $y = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$; 2) π ; 3) $\frac{6\pi}{5}$; 4) 12π ;

5) π , бо $y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$; 6) π .

Вказівка: $y = 2^{\sin 2x + \cos 2x} = 2^{\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$; 7) π . Вказівка: $y = \log_2 \frac{1 - \cos 2x}{2}$; 8) π .

Вказівка: $y = |\sin x| = \sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$. **1.13.** 1) $T = \frac{2\pi}{3}$; 2) $T = \frac{\pi}{1/4} = 4\pi$;

3) 4π ; 4) $\frac{\pi}{3}$. **1.14.** неперіодична. **1.15.** $1,5 < x < 1,6$. **1.16.** Задана функція неперервна на проміжку $[1,5]$ як сума трьох неперервних на цьому відрізку функцій. Тоді за теоремами Вейерштрасса вона обмежена на цьому проміжку і досягає на ньому найменшого і найбільшого значення. **1.17.** 1) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$; 2) $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 3) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; 4) $x \in (-3; -2) \cup (-2; +\infty)$.

2. Границя послідовності

2.1. 1) $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \dots$; 2) $\frac{2}{7}, \frac{5}{9}, \frac{8}{11}, \frac{11}{13}, \frac{14}{15}, \dots$; 3) $\frac{3}{2!}, \frac{3^2}{3!}, \frac{3^3}{4!}, \frac{3^4}{5!}, \frac{3^5}{6!}, \dots$; 4) $0, 2, 0, 2, 0, \dots$. **2.2.** 1) $(-1)^{n+1} \frac{1}{n}$; 2) $\frac{(-1)^n - 1}{2}$; 3) n^2 ; 4) $\frac{n+1}{n}$; 5) $(-1)^{n-1}$; 6) $\frac{n}{2^n}$; 7) $2 + 3(n-1)$; 8) $\frac{n^3 - 1}{2}$. **2.8.** 1) 0; 2) 2; 3) $\frac{1}{5}$; 4) 0; 5) 2; 6) $-\frac{1}{3}$; 7) ∞ ; 8) ∞ ; 9) 0; 10) 0; 11) $\frac{2}{7}$; 12) 3. **2.9.** 1) 1; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) ∞ ; 6) 1; 7) 0; 8) 0; 9) 0; 10) 0; 11) $\frac{6}{5}$; 12) $\frac{1}{6}$; 13) $\frac{1}{2}$. **2.10.** 1) e^2 ; 2) e^3 ; 3) e^{-8} ; 4) e^{ab} ; 5) e^2 ; 6) e^{-16} . **2.11.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 2; 4) e^{-3} . **2.12.** 1), 5) нескінченно великі; 4), 6) нескінченно малі послідовності.

3. Границя функції

3.2. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 11; 3) 1; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $\frac{7}{3}$; 7) $\frac{5}{2}$; 8) 0; 9) ∞ ; 10) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{1}{6}$; 12) -2; 13) $\frac{5}{4}$; 14) $\frac{1}{32}$; 15) 2; 16) $-\frac{1}{3}$; 17) $\frac{1}{4}$; 18) -2; 19) $\frac{1}{6}$; 20) $\frac{3}{2}$; 21) $-\frac{1}{4}$; 22) 3; 23) -1. **3.3.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) ∞ ; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) ∞ ; 7) 3; 8) 0; 9) 0; 10) 0; 11) ∞ ; 12) 2; 13) $\frac{1}{2}$; 14) -1; 15) 1; 16) 0; 17) 0. **3.4.** 1) $\frac{5}{4}$; 2) $\frac{2}{7}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{5}{2}$; 6) $\frac{m}{n}$; 7) $\frac{1}{2}$; 8) $\frac{1}{9}$; 9) $\frac{25}{9}$; 10) $\frac{3}{8}$; 11) $\frac{2}{9}$; 12) $-\frac{1}{3}$; 13) $\frac{1}{7}$; 14) $\frac{2}{3}$; 15) $\frac{1}{2}$; 16) $\frac{1}{6}$; 17) 0; 18) $-\frac{25}{16}$; 19) $\frac{1}{2}$; 20) 2. **3.5.** 1) e^3 ; 2) $\sqrt{e}$; 3) e ; 4) e^{-5} ; 5) e^{10} ; 6) e^{-1} ; 7) e^{-2} ; 8) e^{-3} ; 9) e^{-2} ; 10) e^{12} ; 11) e ; 12) e^2 ; 13) e^7 ; 14) e^{-16} . **3.7.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; 3) 1, якщо $x \rightarrow +\infty$; 0, якщо $x \rightarrow -\infty$; 4) $\frac{a-c}{2}$; 5) 0; 6) 0; 7) -0,1; 8) -2,5; 9) 1,5; 10) $\frac{5}{2}$;

11) e^6 ; 12) e ; 13) m ; 14) 2; 15) 1; 16) $\sqrt{e}$; 17) $\frac{9}{4}$; 18) $-1/2$; 19) $-\frac{1}{2}$; 20) -2 ; 21) $-\sqrt{2\pi}$; 22) e^3 ; 23) e^{-1} ; 24) $e^{\frac{1}{2}}$; 25) $e^{-\frac{1}{2}}$; 26) 2; 27) 9; 28) 4; 29) 1; 30) 8; 31) e^{-1} ; 32) e^{12} ; 33) e^5 ; 34) $e^{\text{ctg } a}$; 35) -3 ; 36) 10. **3.8.** 1) $-\infty$; 2) 1; 3) ∞ . **3.9.** 1) ∞ ; 2) ∞ . **3.10.** 1) 0; 2) ∞ . **3.11.** 1) Функції α та β – нескінченно малі одного порядку; 2) α є нескінченно малою вищого порядку ніж β , тобто $\alpha = o(\beta)$. **3.12.** $\alpha(x) = 1 - \cos x$ є нескінченно малою другого порядку у порівнянні з x . **3.14.** Функція $\alpha(x) = \text{tg } x - \sin x$ нескінченно мала третього порядку малості у порівнянні з x . **3.15.** Нескінченно малі α та β еквівалентні. **3.16** $\beta = o(\alpha)$. **3.17.** $\alpha \sim \beta$. **3.18.** 1. **3.19.** $\frac{1}{2}$. **3.20.** $\alpha = o(\beta)$. **3.21.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) -1 ; 4) -2 ; 5) 1. **3.22.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) ∞ ; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) 1; 5) $\frac{\pi}{2}$; 6) $\frac{2}{\pi}$; 7) $-\frac{\alpha}{\pi}$; 8) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 9) 2; 10) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 11) -2 ; 12) $-2\sin \alpha$; 13) $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$; 14) $\cos^2 \alpha$; 15) $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$; 16) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; 17) 1; 18) 6; 19) $\frac{3}{2}$; 20) $\frac{1}{e}$; 21) 1; 22) e^{mk} ; 23) e^6 ; 24) $e^{-\frac{2}{3}}$; 25) e^2 ; 26) 0, якщо $x \rightarrow +\infty$; ∞ , якщо $x \rightarrow -\infty$; 27) ∞ , якщо $x \rightarrow +\infty$; 0, якщо $x \rightarrow -\infty$; 28) e^2 ; 29) $\sqrt{e}$; 30) k ; 31) $\frac{1}{\alpha}$; 32) $\frac{1}{e}$; 33) $\ln \alpha$; 34) $\frac{2}{3}$; 35) e ; 36) $\frac{3}{2}$; 37) 2; 38) 1; 39) $a - b$; 40) 1.

4. Неперервність функції

4.1. точка $x=1$ – точка усувного розриву першого роду. **4.2.** $x=0$ – точка розриву першого роду. **4.3.** точка $x=3$ – точка стрибкового розриву першого роду. **4.4.** $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ – точки розриву 2-го роду. **4.6.** $x=2$ – точка усувного розриву. **4.7.** точки розриву $x=4$, $x=-2$. **4.8.** функція має в точці $x=-1$ усувний розрив. **4.9.** функція має в точці $x=-3$ усувний розрив. **4.10.** точка $x=2$ – точка розриву другого роду. **4.11.** в точці $x=0$ функція має розрив другого роду. **4.12.** функція має усувний розрив першого роду. **4.13.** функція має в точці $x=2$ розрив першого роду зі стрибком $f(2+0) - f(2-0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. **4.14.** функція має в точці $x=1$ розрив другого роду. **4.15.** функція має у точці $x=2$ розрив першого роду зі стрибком $f(2+0) - f(2-0) = 1 - (-1) = 2$. **4.16.** $x=3$ – точка розриву другого роду. **4.17.** функція має стрибковий розрив першого роду. **4.18.** 1) $x=2$ – точка

стрибкового розриву першого роду; 2) $x=0$ – точка розриву другого роду.

4.19. 1) в точках $x_1=0, x_2=2$ функція має розрив першого роду. **4.20.** функція

має в точці $x=\frac{\pi}{2}$ розрив першого роду зі стрибком

$$f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=2-1=1. \quad \mathbf{4.21.} \quad x=\frac{\pi}{2} \quad \text{– точка стрибкового розриву}$$

першого роду. **4.22.** $a=-2$. **4.24.** Так.

Відповіді до розділу III

1. Похідна функції. Диференціювання функцій

$$\mathbf{1.1.} \quad 1) \quad y' = 6x - x^3 + 2; \quad 2) \quad y' = 3x^2 + \frac{12}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad 3) \quad y' = -\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}};$$

$$4) \quad y' = 2 - \frac{3}{x\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2\sqrt{x}}; \quad 5) \quad y' = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3\sqrt{x^2}}; \quad 6) \quad y' = \frac{2}{x} + 6^x \ln 6;$$

$$7) \quad y' = 0; \quad 8) \quad y' = 0. \quad \mathbf{1.2.} \quad 1) \quad y' = \cos x - x \sin x; \quad 2) \quad y' = e^t (\sin t + \cos t);$$

$$3) \quad y' = \cos 2t; \quad 4) \quad y' = 2x \operatorname{arctg} x + 1; \quad 5) \quad y' = 3x^2 \operatorname{ctg} x - \frac{x^3}{\sin^2 x}; \quad 6) \quad y' = \frac{5^x (\ln 5 \sin 2x + 2)}{2 \cos^2 x};$$

$$7) \quad y' = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}; \quad 8) \quad y' = 2e^x \cos x; \quad 9) \quad y' = \sqrt{1-x^2} - 2x \arcsin x; \quad 10) \quad y' = 3x^2.$$

$$\mathbf{1.3.} \quad 1) \quad y' = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}; \quad 2) \quad y' = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}; \quad 3) \quad y' = \frac{-3x^2+2x+2}{(x^2-x+1)^2}; \quad 4) \quad y' = \frac{11}{(3x+4)^2};$$

$$5) \quad y' = \frac{5(x^2+2)}{(2-x^2)^2}; \quad 6) \quad y' = \frac{9x^2-6x-1}{(3x-1)^2}; \quad 7) \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}; \quad 8) \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2};$$

$$9) \quad y' = \frac{3x^2+16x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)^2}; \quad 10) \quad y' = \frac{1}{\cos x - 1}; \quad 11) \quad y' = \frac{2 \sin x}{(1+\cos x)^2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$12) \quad y' = \frac{2}{1+\sin 2x}; \quad 13) \quad y' = \frac{1}{2\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 14) \quad y' = \frac{\sqrt{1-x^2} - 2x \arcsin x}{(1-x^2)^2};$$

$$15) \quad y' = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}; \quad 16) \quad y' = \frac{1-x \ln 3 (\ln x - 2)}{x 3^x}; \quad 17) \quad y' = \frac{2x^2 \ln x - x^2 - 1}{x \ln^2 x};$$

$$18) \quad y' = \frac{e^x \operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg} x + 1)^2}. \quad \mathbf{1.4.} \quad 1) \quad y' = 12(2+3x)^3; \quad 2) \quad y' = 5(x^4 - 6x + 2)^4 (4x^3 - 6);$$

$$\begin{aligned}
& 3) y' = -\frac{an}{(ax+b)^{n+1}}; 4) y' = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}; 5) y' = \frac{3x(x-2)}{2\sqrt{x^3-3x^2+1}}; \\
& 6) y' = \frac{x-2}{\sqrt{(x+1)(x-5)}}; 7) y' = 3\left(x^2 - \frac{1}{x^3} + 4\sqrt{x}\right)^2 \left(2x + \frac{3}{x^4} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right); \\
& 8) y' = 12(3x - 9\sqrt[3]{x} + 1)^3 \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x^2}}; 9) y' = \frac{15\left(x^4 + 4x^3 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^5 + 5x^4 - \frac{5}{x}}}; 10) y' = -4\sin(4x-2); \\
& 11) y' = \frac{2x}{\cos x^2}; 12) y' = \frac{4x^3}{x^4-1}; 13) y' = 3\sin^2 x \cos x; 14) y' = \frac{5\ln^4 x}{x}; \\
& 15) y' = -\frac{2}{4+x^2}; 16) y' = -2e^{-2x}; 17) y' = \frac{2e^{\sqrt[3]{x^2}}}{3\sqrt[3]{x}}; 18) y' = \frac{3^{\sqrt{x}+1} \ln 3}{2\sqrt{x}}; \\
& 19) y' = -2x \cdot 4^{1-x^2} \ln 4; 20) y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}; 21) y' = -\operatorname{ctg} x; 22) y' = \frac{\cos \sqrt[5]{x}}{5\sqrt[5]{x^4}}; \\
& 23) y' = \frac{1}{2\sqrt{\arctg x}(1+x^2)}; 24) y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}; 25) y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin^2 x}; \\
& 26) y' = -\frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}; 27) y' = -\frac{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}; 28) y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}; \\
& 29) y' = \frac{e^x \operatorname{tg} \sqrt{1+e^x}}{\sqrt{1+e^x} \cos^2 \sqrt{1+e^x}}; 30) y' = 3\left(e^{\cos x} + 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)^2 (1-e^{\cos x}) \sin x. \\
& \mathbf{1.5.} 1) y' = \frac{2e^{-x}(1-x)}{\sqrt{2x-1}}; 2) y' = -\frac{3(x-2)^2}{\sin^2(x-2)^3}; 3) y' = \frac{5}{x} \sin^4(\ln x) \cos(\ln x); \\
& 4) y' = \frac{\operatorname{ctg} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}; 5) y' = -4\ln^3(\cos x) \operatorname{tg} x; 6) y' = \frac{1}{\sin\left(x + \frac{1}{2}\right)}; 7) y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; \\
& 8) y' = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}(\sqrt{1+e^x}-1)}; 9) y' = \lg(\sqrt{3+x} + \sqrt{2-x}); 10) y' = \frac{\sqrt{2^x} \ln 2}{2\sqrt{1-2^x}}; \\
& 11) y' = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}; 12) y' = 2\left(3^{\sin x} + \ln \frac{1}{x}\right) \left(3^{\sin x} \ln 3 \cos x - \frac{1}{x}\right);
\end{aligned}$$

$$13) y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}; 14) y' = \frac{-\sin\sqrt{x} + 2^{\sqrt{x}} \ln 2}{2\sqrt{x}}; 15) y' = \frac{3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1}{2\cos^2 \frac{x}{2}};$$

$$16) y' = \arcsin \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}; 17) y' = \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$18) y' = e^{\sin x} \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right); 19) y' = 3^x (\ln 3 \sin x^3 + 3x^2 \cos x^3);$$

$$20) y' = 2^x \left(\ln 2 \cdot \ln \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} \right); 21) y' = 2 \cos 2x \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x \sin \frac{x}{2};$$

$$22) y' = 3e^{\sin 3x} (\cos^2 3x - \sin 3x); 23) y' = -\frac{2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{x(1-x)}} (\sqrt{x} \ln 2 \arccos \sqrt{x} + 1);$$

$$24) y' = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} (2x \operatorname{arctg} 2x - 1); 25) y' = \frac{4^{\ln x}}{x^2} \left(x \ln 4 \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right);$$

$$26) y' = e^{2x-x^2} (1-x)^2 (2x^2 - 4x - 1);$$

$$27) y' = 5^{\sqrt{x}} \operatorname{arctg}(1-x) \left(\frac{\ln 5 \cdot \operatorname{arctg}(1-x)}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2 - 2x + 2} \right).$$

$$1.6. 1) y' = \frac{8x+3}{(3-4x^2)\sqrt{3-4x^2}}; 2) y' = \frac{a^2}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}; 3) y' = \frac{-1}{x^2\sqrt{1+4x^2}};$$

$$4) y' = \frac{3x^2 + 16x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 4)^2}; 5) y' = \frac{x+2}{2\sqrt{(x^2+x+1)^3}}; 6) y' = \frac{3(x+1)(x-3)}{2(x-2)\sqrt{x-2}};$$

$$7) y' = \frac{\sin x (\sin^2 x + 1)(3\sin^2 x - 1)}{(\sin^4 x + 1)^2}; 8) y' = \sin x; 9) y' = \frac{2 - \cos^2 x}{2\cos^3 x};$$

$$10) y' = \frac{3x^2 - \sin(2x^3 + 2)}{e^{2x+1} \cos^2(x^3 + 1)}; 11) y' = \frac{\arccos 3x}{\sqrt{(1-9x^2)^3}} - \frac{3x}{1-9x^2};$$

$$12) y' = \frac{2x(\cos x + \sin x) + 2\cos x}{\sqrt{(2x+1)^3}}; 13) y' = -\frac{2\sin 2x(3x^2 + 2) + 3x \cos 2x}{\sqrt{(3x^2 + 2)^3}};$$

$$14) y' = \frac{\operatorname{tg}^2 x (x^2 - 4) - x \operatorname{tg} x + x^2}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}}; 15) y' = \frac{\operatorname{arctg} x (2 - x \operatorname{arctg} x)}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$$

$$16) y' = \frac{2^x (\ln 2 - 4x \ln 2 - 2) + 10x^2 - 2x}{(2^x - x^2)^2 \sqrt{1-4x}}; 17) y' = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}};$$

$$\begin{aligned}
18) y' &= \frac{e^x(2x^3 - 3x^2 - 1) + 3x^2 \cos x + (2x^3 - 1)\sin x}{\sqrt{1 - 2x^3}(e^x - \cos x)^2}; \quad 19) y' = \frac{2}{1 - x^2}; \\
20) y' &= \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}; \quad 21) y' = \frac{2(x - 1)}{x(2x - 1)}; \quad 22) y' = -\frac{1}{x^2 + 1}; \\
23) y' &= -\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} x; \quad 24) y' = -\frac{1}{\sqrt{1 + 2x}(1 + x)}; \quad 25) y' = \frac{-2}{\cos x}; \\
26) y' &= -\sin \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})^2}; \quad 27) y' = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}; \\
28) y' &= \frac{4x}{\sqrt{4 - x^4}(2 - x^2)}; \quad 29) y' = \frac{3(1 + 2x^2)^2(3 + 20x - 6x^2)}{(5 - 3x)^4}; \\
30) y' &= \frac{2}{4x^2 - 1}; \quad 31) y' = \frac{6}{(1 - 3x)^2} 5^{\frac{1+3x}{1-3x}} \ln 5; \quad 32) y' = \frac{2}{1 + \sin 2x} e^{\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}}; \\
33) y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^2}(1 - x^2)}; \quad 34) y' = 3 \ln^2 \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} \right) \cdot \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}; \\
35) y' &= \frac{15}{\operatorname{arctg}(3x + 1)(9x^2 + 6x + 2) \ln 2}. \quad \mathbf{1.7.} \quad 1) f'(0) = -\ln 2; \quad 2) f'(0) = 3, \\
&f'\left(\frac{1}{5}\right) = 5; \quad 3) f'(0) = \frac{1}{2}; \quad 4) f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{22}{25}; \quad 5) f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3; \\
6) f'(a) &= \frac{\pi a}{2}. \quad \mathbf{1.8.} \quad 1) y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}; \quad 2) y' = \frac{5x^4 - 3y}{6xy}; \quad 3) y' = \frac{2ax^2}{1 - y^2}; \\
4) y' &= \frac{e^y}{1 - xe^y}; \quad 5) y' = \frac{1 + y^2}{1 - xy}; \quad 6) y' = \frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} + 1}; \quad 7) y' = \frac{y}{x} + 5x \cos^2 \frac{y}{x}; \\
8) y' &= \frac{y}{x - y}; \quad 9) y' = -\frac{e^y \cos x + e^{-x} \cos y}{e^y \sin x + e^{-x} \sin y}; \quad 10) y' = \frac{\sin(x - y) + y \cos x}{\sin(x - y) - \sin x}; \\
11) y' &= \frac{y}{x}; \quad 12) y' = \frac{y \cos^2(x + 1) - 1}{1 - x \cos^2(x + 1)}; \quad 13) y' = \frac{ye^{\frac{y}{x}} + x^2 y^2}{xe^{\frac{y}{x}} - 2x^2 y}; \quad 14) y' = \frac{2xye^y - 3x^2 y}{1 - x^2 ye^y}; \\
15) y' &= \frac{ye^{xy} - 2x}{\cos y - xe^{xy}}; \quad 16) y' = \frac{e^x(1 - e^y)}{e^y(e^x - 1)}; \quad 17) y' = \frac{e^y + 1}{(1 + x^2)(1 - e^y \operatorname{arctg} x)}; \\
18) y' &= -\frac{y \cos(xy) + 2xy \sin(x^2 y)}{x \cos(xy) + x^2 \sin(x^2 y)}. \quad \mathbf{1.9.} \quad 1) y' = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + x \operatorname{ctg} x); \\
2) y' &= x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right); \quad 3) y' = (\sin x)^{\cos x + 1} (\operatorname{ctg}^2 x - \ln(\sin x));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4) y' = (\cos x)^{\sin x + 1} (\ln(\cos x) + \operatorname{tg}^2 x); 5) y' = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} \frac{1 - \ln(\operatorname{tg} x)}{\sin^2 x}; \\
& 6) y' = (\cos 3x)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln(\cos 3x)}{\cos^2 x} - 3 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x \right); 7) y' = 3(\ln x)^{3x} \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right); \\
& 8) y' = (\sin x)^{\ln x} \left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x \operatorname{ctg} x \right); 9) y' = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{1-x}} \left(\frac{2\sqrt{1-x}}{\sin 2x} - \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{2\sqrt{1-x}} \right); \\
& 10) y' = (\ln x)^{x^2} \left(2x \ln(\ln x) + \frac{x}{\ln x} \right); 11) y' = (\sin x)^{x^2} \left(2x \ln(\sin x) + \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin x} \right); \\
& 12) y' = x^{\operatorname{arctg} x} \left(\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right); 13) y' = (x+x^2)^x \left(\ln(x+x^2) + \frac{x+2x^2}{x+x^2} \right); \\
& 14) y' = x^{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{x \ln x + 2(x+1)}{2x\sqrt{x+1}}; 15) y' = 5x^{\frac{5-2x}{x}} \cdot (1 - \ln x); \\
& 16) y' = \left(\frac{x+1}{x} \right)^x \left(\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right); 17) y' = \frac{1-x^3(1+3\ln x)}{x^{x^3}}; 18) y' = \frac{-3\cos^2 x}{(1+\sin x)^3}; \\
& 19) y' = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} (6x^2 - 7x - 4); 20) y' = \frac{x^2 - 4x + 2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}; 21) y' = \frac{2(x^2 - 4x - 3)}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2(x-3)^4}}; \\
& 22) y' = \frac{x^2 + 6x + 12}{2\sqrt[4]{x(x+2)^6(x+4)^3}}; 23) y' = \frac{(x+1)^2 (44x^2 - 229x + 267)}{15\sqrt[5]{(x-3)^7} \sqrt[3]{(x-2)^2}}; \\
& 24) y' = \frac{(x^2 + 2) \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(x+5)^3} \left(\frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4(x-1)} - \frac{3}{x+5} + x \right) \\
\mathbf{1.10.} & 1) y' = \frac{4-2t}{3+2t}; 2) y' = \frac{2t^5+1}{t^2}; 3) y' = \sqrt[3]{\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2}; 4) y' = -1; \\
& 5) y' = \frac{4t^4}{(4t^2+1)^2}; 6) y' = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{(1-2t)^3}}; 7) y' = \frac{t-2}{t-1}; 8) y' = \frac{t+1}{t}; \\
& 9) y' = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}; 10) y' = -\frac{3}{2} \operatorname{ctg} t; 11) y' = \cos^3 t; 12) y' = -2; 13) y' = -1; \\
& 14) y' = \frac{2e^t}{1+t}; 15) y' = \frac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{ctg} t}; 16) y' = -t; 17) y' = \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}; \\
& 18) y' = \frac{2\sin 2t}{\sin t - \cos t}; 19) y' = \cos t; 20) y' = \frac{4t}{\sqrt{(1-4t^2)^3}}; \\
& 21) y' = (t+1)\sqrt{t^2+2t+2}; 22) y' = \frac{t}{2}; 23) y' = -3\operatorname{ctg} t; 24) y' = \operatorname{tg} t.
\end{aligned}$$

2. Геометричний та фізичний зміст похідної

- 2.1. 1) $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$; 2) $x - y - 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$;
3) $3x - y - 4 = 0$, $x + 3y + 2 = 0$; 4) $4x + y + 1 = 0$, $x - 4y + 13 = 0$; 5) $y + 5 = 0$,
 $x - 3 = 0$; 6) $x + 2y - 4 = 0$, $x + y - 1 = 0$; 7) $x - 4y - 5 = 0$, $4x + y - 3 = 0$;
8) $5x - 6y + 23 = 0$, $6x + 5y - 9 = 0$. 2.2. $k = 5$. 2.3. $k = -1$, $2x + 2y - 7 = 0$.
2.4. а) $(0; -1)$; б) $\left(1; -\frac{7}{4}\right)$. 2.5. $x_0 = 1$. 2.6. $x - y + 1 = 0$. 2.7. $(3; 10)$. 2.8. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.
2.9. $\alpha = \frac{\pi}{4}$. 2.10. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. 2.11. $k = -3$. 2.12. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. 2.13. $(-2; -12)$. 2.14. $\varphi = \frac{\pi}{4}$,
 $y = x + 1$. 2.15. $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$, $\alpha_3 = 0$. 2.16. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ в точках $x = 2k\pi$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ в
точках $x = (2k + 1)\pi$. 2.17. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 2.18. -1 . 2.19. $k = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$. 2.20. $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)$.
2.21. $\varphi_1 = 90^\circ$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \approx 37^\circ$. 2.22. 1) $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{13} \approx 4^\circ$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} \approx 8^\circ$;
2) $\varphi = \operatorname{arctg}3 \approx 72^\circ$. 2.23. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. 2.24. $\varphi_1 = \operatorname{arctg}3$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(-3)$. 2.25. $\frac{\pi}{2}$.
2.26. $\varphi = 45^\circ$. 2.27. $v(3) = 11\left(\frac{M}{c}\right)$. 2.28. $v(5) = 28\left(\frac{M}{c}\right)$. 2.29. $t = 2$ с.
2.30. 1) $v(1) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{M}{c}\right)$, 2) $v(2) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{M}{c}\right)$. 2.31. $t = 1$ с. 2.32. $Q' = 3\cos(3t + 1)$.
2.33. $\omega = 8 - 4t$, $t = 2$ с. 2.34. 5, 7 тис. 2.35. $v = 2\sqrt{13}$ км/год. 2.36. $E = 400$ Дж.

3. Диференціал функції. Похідні вищих порядків

- 3.1. 1) $dy = \frac{x^2 - 8x - 6}{(x - 3)^2} dx$; 2) $dy = \frac{x^2 + 8x - 9}{(x + 4)^2} dx$; 3) $dy = \frac{12dx}{x^2 - 36}$;
4) $dy = \frac{2e^{2x} dx}{1 + e^{4x}}$; 5) $dy = -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} dx$; 6) $dy = -\frac{\operatorname{tg} x}{2} dx$; 7) $dy = 3x^2 e^{3x+2} (1 + x) dx$;
8) $dy = 2e^{4x} (2\sin 2x + \cos 2x) dx$; 9) $dy = e^{-x} (x^2 - 3) dx$; 10) $dy = \frac{3\arcsin^2 \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$;
11) $dy = \frac{5x^2 - x \sin(10x + 2)}{\sin^2(5x + 1)} dx$; 12) $dy = e^{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}} \cdot \sin x \operatorname{tg}^2 x dx$.
3.2. $\Delta f(x) = 0,41$, $df(x) = 0,4$, $\delta = 0,01$, $\varepsilon = \frac{0,01}{0,41} = 0,024$ (2,4%).
3.3. 1) $\ln 1,02 \approx 0,02$; 2) $\sqrt{27} \approx 5,2$; 3) $\arcsin 0,51 \approx 0,513$; 4) $\sin 31^\circ \approx 0,515$;

5) $\sqrt[4]{17} \approx 2,03125$; 6) $\operatorname{arctg} 0,98 \approx 0,775$; 7) $\operatorname{tg} 46^\circ \approx 1,035$; 8) $\sqrt[3]{8,002} \approx 2,0002$;
 9) $e^{0,95^2} \approx 2,446$; 10) $\cos 60^\circ 1' \approx 0,4997$; 11) $\sqrt[4]{15,8} \approx 1,9938$; 12) $\operatorname{arctg} 1,05 \approx 0,811$.

3.4. 1) $f(1,97) \approx 2,975$; 2) $f(2,02) \approx 2,893$. **3.5.** $34,04 \text{ cm}^3$. **3.6.** 1) $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x}}$;

2) $y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; 3) $y'' = -2\cos 2x$; 4) $y'' = -\frac{2}{(x+1)^3}$; 5) $y'' = 2\ln x + 3$;

6) $y'' = \frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$; 7) $y'' = \frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$; 8) $y'' = 2e^{x^2+2}(3x+2x^3)$; 9) $y'' = \ln x$;

10) $y'' = \frac{3\sqrt{x}+2}{4x\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}$; 11) $y'' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 12) $y'' = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

3.7. 1) $y''' = 0$; 2) $y''' = \frac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $y''' = \frac{1}{(x+1)^4}$; 4) $y''' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$;

5) $y''' = 105\sqrt{2x+1}$; 6) $y''' = \frac{32}{(x^2+4)^2}$; 7) $y^{(4)} = \frac{48}{(1+x)^5}$; 8) $y^{(5)} = (3^x - 3^{-x})\ln^5 3$.

3.8. 1) $y^{(n)} = a^x \ln^n a$; 2) $y^{(n)} = k^n e^{kx}$; 3) $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$;

4) $y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$; 5) $y^{(n)} = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$; 6) $y^{(n)} = e^x (x+n)$;

7) $y^{(n)} = (-1)^n \frac{an!}{x^{n+1}}$; 8) $y^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$; 9) $y^{(n)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{2^n} \sqrt{x}$.

3.9. 1) $y'' = \frac{1}{(1-t)^3}$; 2) $y'' = \frac{1}{t\sqrt{t}}$; 3) $y'' = -\frac{1}{2t}$; 4) $y'' = 2$; 5) $y'' = \frac{4}{\sqrt{(1-t)^3}}$;

6) $y'' = \left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)^3$; 7) $y'' = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$; 8) $y'' = -\frac{1}{\sin^2 2t}$; 9) $y'' = \frac{\cos t - 1}{\sin t}$;

10) $y'' = 0$; 11) $y'' = 2(1+t^2)$; 12) $y'' = \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$; 13) $y'' = \frac{1}{t \cos^3 t}$;

14) $y'' = -\frac{2}{e^t(\sin t + \cos t)}$; 15) $y'' = \frac{4(\cos 2t - \sin 2t)}{\sin^2 2t(1 + \operatorname{ctg} t)^3}$. **3.10.** 1) $d^2 y = -\frac{1}{x^2} dx^2$;

2) $d^2 y = \frac{6dx^2}{(x+1)^3}$; 3) $d^2 y = \frac{1}{x^2}(\sin \ln x - \cos \ln x)dx^2$; 4) $d^2 y = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} dx^2$;

5) $d^2 y = 4e^{2x}(x-1)dx^2$; 6) $d^2 y = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)dx^2$; 7) $d^3 y = \frac{2}{x} dx^3$;

8) $d^3y = -4x(3\sin x^2 + 2x^2 \cos x^2)dx^3$. **3.11.** $a(4) = 6\text{ м/с}^2$. **3.12.** $a(2) = 12(\text{м/с}^2)$.

3.13. 1) $a(2) = 5(\text{м/с}^2)$; 2) $a\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}(\text{м/с}^2)$. **3.14.** $t = 1\text{ с}$, $v(1) = 3(\text{м/с})$.

4. Застосування похідної. Правило Лопіталя. Асимптоти кривої

4.1. 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{5}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) -2 ; 6) $+\infty$; 7) $\frac{1}{6}$; 8) $-\frac{1}{2}$; 9) $\ln \frac{2}{3}$; 10) $-\frac{1}{2}$;

11) 1; 12) 2; 13) $\frac{3}{e}$; 14) 2. **4.2.** 1) 0; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) $+\infty$; 5) $+\infty$; 6) 1; 7) 1; 8) 0.

4.3. 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 0; 5) 0; 6) 2; 7) 1; 8) 0; 9) 1; 10) $+\infty$; 11) -1 ; 12) $+\infty$.

4.4.1) 0; 2) 0; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 0; 7) 1; 8) e^2 ; 9) 1; 10) 0; 11) 1; 12) 0; 13) 1;

14) e^{-6} ; 15) 1; 16) $e^{1/3}$. **4.5.** 1) горизонтальна асимптота $y = 0$; 2) горизонтальна асимптота $y = 0$; 3) вертикальні асимптоти $x = \pm 2$, горизонтальна асимптота $y = 1$; 4) вертикальні асимптоти $x = -1, x = 3$, горизонтальна асимптота $y = 2$;

5) вертикальна асимптота $x = 0$, похила асимптота $y = 3x$; 6) похила асимптота $y = x - 2$; 7) похилі асимптоти $y = \pm x$; 8) вертикальна асимптота $x = 2$, права і ліва похилі асимптоти $y = x + 1$ $y = -x - 1$; 9) похилі асимптоти $y = \pm \frac{b}{a}x$;

10) вертикальна асимптота $x = b$, горизонтальна асимптота $y = c$; 11) вертикальна асимптота $x = 0$, похила асимптота $y = -3x$; 12) вертикальна асимптота $x = 0$, права горизонтальна асимптота; 13) вертикальна асимптота $x = 0$, похила асимптота $y = x + 3$; 14) ліва горизонтальна асимптота $y = 0$;

15) $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$; 16) горизонтальна асимптота $y = 0$; 17) вертикальна асимптота $x = 0$, похила асимптота $y = 2x$; 18) $y = x - \arctg x$; права і ліва похилі асимптоти $y = x - \frac{\pi}{2}$, $y = x + \frac{\pi}{2}$.

19) похила асимптота $y = x + 1$; 20) похила асимптота $y = x + 1$; 21) похила асимптота $y = x + 1$; 22) похила асимптота $y = x + 1$; 23) похила асимптота $y = x + 1$; 24) похила асимптота $y = x + 1$;

25) похила асимптота $y = x + 1$; 26) похила асимптота $y = x + 1$; 27) похила асимптота $y = x + 1$; 28) похила асимптота $y = x + 1$; 29) похила асимптота $y = x + 1$;

30) похила асимптота $y = x + 1$; 31) похила асимптота $y = x + 1$; 32) похила асимптота $y = x + 1$; 33) похила асимптота $y = x + 1$; 34) похила асимптота $y = x + 1$;

35) похила асимптота $y = x + 1$; 36) похила асимптота $y = x + 1$; 37) похила асимптота $y = x + 1$; 38) похила асимптота $y = x + 1$; 39) похила асимптота $y = x + 1$;

5. Застосування похідної до дослідження функцій. Проміжки монотонності та екстремум функції

5.1. 1) функція зростає на $(-\infty; -2)$, спадає на $(-2; +\infty)$; 2) функція спадає на $(-\infty; 1)$, зростає на $(1; +\infty)$; 3) функція спадає на $(-1; 1)$, зростає на $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$; 4) функція спадає на $(-3; -1)$, зростає на $(-\infty; -3)$, $(-1; +\infty)$; 5) функція

спадает на $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$, зростає на $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$; 6) функція спадає на $(2; 3)$, зростає на $(-\infty; 2)$, $(3; +\infty)$; 7) функція спадає на $(-\infty; 0)$, $\left(\frac{a}{2}; a\right)$, зростає на $\left(0; \frac{a}{2}\right)$, $(a; +\infty)$; 8) функція спадає на $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, зростає на $(-1; 1)$; 9) функція спадає на $(-1; 1)$, зростає на $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$; 10) функція спадає на $(-\infty; 0)$, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $(1; +\infty)$, зростає на $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; 11) функція спадає на $(-\infty; 0)$, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $(1; +\infty)$, зростає на $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; 12) функція спадає на $\left[-\sqrt{2}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{2}\right]$, зростає на $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; 13) функція спадає на $\left(\frac{3}{4}a; a\right)$, зростає на $\left(0; \frac{3}{4}a\right)$; 14) функція спадає на $(2; 3)$, зростає на $(-\infty; 2)$, $(3; +\infty)$; 15) функція зростає на $(0; +\infty)$; 16) функція спадає на $(1; +\infty)$, зростає на $(-\infty; 1)$; 17) функція спадає на $(-\infty; 2)$, зростає на $(2; +\infty)$; 18) функція зростає на $(-1; 0)$, спадає на $(0; 1)$; 19) функція спадає на $(0; +\infty)$, зростає на $(-\infty; 0)$; 20) функція спадає на $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$, зростає на $(0; 2)$; 21) функція спадає на $(0; 1)$, $(1; e)$, зростає на $(e; +\infty)$; 22) функція спадає на $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, зростає на $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 23) функція монотонно зростає на $(-\infty; +\infty)$; 24) функція спадає на $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$, зростає на $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$; 25) функція монотонно зростає на $(0; +\infty)$; 26) функція монотонно спадає на $(-\infty; +\infty)$.

5.5. 1) $y_{\max} = y(-1) = 8$, $y_{\min} = y(2) = -19$; 2) $y_{\min} = y(-2) = y(2) = -3$, $y_{\max} = y(0) = 1$; 3) $y_{\max} = y(-a) = -2a$, $y_{\min} = y(a) = 2a$; 4) $y_{\max} = y\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{4}{27}a^3$, $y_{\min} = y(a) = 0$; 5) $y_{\max} = y(1) = -4$, $y_{\min} = y(5) = 4$; 6) $y_{\max} = y(0) = 4$, $y_{\min} = y(-2) = \frac{8}{3}$; 7) $y_{\max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$; $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$; 8) $y_{\max} = y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$; 9) $y_{\max} = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(-1) = -1$; 10) $y_{\max} = y(-2) = \sqrt[3]{4}$, $y_{\min} = y(0) = 0$; 11) $y_{\max} = y(0) = 2$, $y_{\min} = y(2) = \sqrt[3]{4}$; 12) $y_{\min} = y(3) = 0$, $y_{\max} = y(2) = 3$; 13) $y_{\max} = y(0) = 0$; 14) $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(1) = -\frac{2}{3}$;

15) $y_{\min} = y(0) = 0$; 16) $y_{\min} = y(e) = e$; 17) $y_{\min} = y(0) = 0$; 18) $y_{\max} = y(0) = \frac{1}{2}$,
 $y_{\min} = y(1) = \frac{\pi}{8}$. **5.6. 2.**

6. Найбільше та найменше значення функції. Задачі практичного змісту

6.1. $f_{\text{найб}} = f(1) = 2$, $f_{\text{найм}} = f(3) = -18$ **6.2.** $f_{\text{найб}} = f(3) = 6$,
 $f_{\text{найм}} = f(0) = -3$. **6.3.** 1) $f_{\text{найб}} = f(-1) = -2$, $f_{\text{найм}} = f(-8) = -36$;
2) $f_{\text{найб}} = f(0) = f(1) = 0$, $f_{\text{найм}} = f(-1) = -2$. **6.4.** 1) $y_{\text{найб}} = y(-1) = 6$,
 $y_{\text{найм}} = y(3/4) = -1/8$; 2) $y_{\text{найм}} = 2$, $y_{\text{найб}} = 66$; 3) $y_{\text{найм}} = 4$, $y_{\text{найб}} = 13$;
4) $y_{\text{найб}} = y(-3) = 8,5$, $y_{\text{найм}} = y(0) = -5$; 5) $y_{\text{найм}} = -10$, $y_{\text{найб}} = 2$;
6) $y_{\text{найм}} = -12$, $y_{\text{найб}} = 2$; 7) $y_{\text{найм}} = -1$, $y_{\text{найб}} = \frac{3}{5}$; 8) $y_{\text{найб}} = y(-1) = 1$,
 $y_{\text{найм}} = y(1) = 0,5$; 9) $y_{\text{найм}} = y(0) = -1$, $y_{\text{найб}} = y(1/2) = 0$; 10) $y_{\text{найм}} = \frac{3}{5}$, $y_{\text{найб}} = 1$;
11) $y_{\text{найм}} = 0$, $y_{\text{найб}} = 8$; 12) $y_{\text{найб}} = y(1) = -2/3$, $y_{\text{найм}} = y(9) = -2$;
13) $y_{\text{найм}} = 6$, $y_{\text{найб}} = 10$; 14) $y_{\text{найм}} = 0$, $y_{\text{найб}} = \sqrt[3]{9}$; 15) $y_{\text{найм}} = -\frac{\pi}{2}$, $y_{\text{найб}} = \frac{\pi}{2}$;
16) $y_{\text{найм}} = 0$, $y_{\text{найб}} = \frac{\pi}{4}$. **6.5. 3. 6.6. 8. 6.7. 16. 6.8. 4 і 4. 6.9. 6 і 6. 6.10. $\sqrt[3]{4V}$.**
6.11. $H = 2R$. 6.12. $V = \frac{2\pi l^3 \sqrt{3}}{27}$. 6.13. $V = \frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. 6.14. $a = 4\text{ м}, h = 2\text{ м}$.
6.15. $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$. 6.16. $x = y = 6\sqrt{2}$. 6.17. $x = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$, $y = \frac{R\sqrt{5}}{5}$.
6.18. $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. 6.19. $x = y$. 6.20. ширина вікна повинна бути в два рази більша за висоту. 6.21. $v_{\max}(100) = 30$. 6.22. при швидкості $v = 20$ км/год.

7. Проміжки опуклості та точки перегину функції

7.1. 1) точка перегину $(2; 12)$, проміжки опуклості вгору $(-\infty; 2)$, опуклості вниз $(2; +\infty)$; 2) точка перегину $(1, -1)$, проміжки опуклості вгору $(-\infty; 1)$, опуклості вниз $(1; +\infty)$; 3) точок перегину немає, графік функції опуклий вниз; 4) точка перегину $\left(\frac{5}{3}; -\frac{250}{27}\right)$, проміжки опуклості вгору $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$, опуклості вниз $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$; 5) точки перегину $(2; 62)$, $(4; 206)$, проміжки

опуклості вниз $(-\infty; 2)$, $(4; +\infty)$, опуклості вгору $(2; 4)$; 6) точка перегику $(4; 20)$; 7) точка перегику $(2; 0)$, проміжки опуклості вгору $(-\infty; 2)$, опуклості вниз $(2; +\infty)$; 8) точок перегику немає, графік функції опуклий вниз; 9) точок перегику немає, проміжки опуклості вгору $(-\infty; -2)$, опуклості вниз $(-2; +\infty)$; 10) точки перегику $\left(-3; -\frac{9}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(3; \frac{9}{4}\right)$, проміжки опуклості вниз $(-\infty; 3)$, $(0; 3)$, опуклості вгору $(-3; 0)$, $(3; +\infty)$; 11) точка перегику $(b; a)$, проміжки опуклості вгору $(-\infty; b)$, опуклості вниз $(b; +\infty)$; 12) точка перегику $\left(1; \frac{1}{e^2}\right)$, проміжки опуклості вгору $(-\infty; 1)$, опуклості вниз $(1; +\infty)$; 13) точка перегику $\left(\frac{\ln 6}{2}; -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$; опукла вниз на $\left(-\infty; \frac{\ln 6}{2}\right)$, опукла вгору $\left(\frac{\ln 6}{2}; +\infty\right)$; 14) точки перегику $(-1; \ln 2)$, $(1; \ln 2)$, проміжки опуклості вгору $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ опуклості вниз $(-1; 1)$; 15) точка перегику $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; -\frac{3}{2e^3}\right)$, графік опуклий вгору на $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$, опуклий вниз $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; +\infty\right)$; 16) точка перегику $\left(a\sqrt{e^3}; \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$, графік опуклий вгору на $\left(0; a\sqrt{e^3}\right)$, опуклий вниз на $\left(a\sqrt{e^3}; +\infty\right)$. 7.5. $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{2}$.

8. Повне дослідження функції та побудова графіка

8.1.1) функція спадає на проміжку $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$, зростає на проміжку $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$, $y_{\min}\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, опукла вниз на $(-\infty; +\infty)$, точок перегику немає, асимптот немає; 2) функція спадає на проміжку $(-\infty; 3)$, зростає на проміжку $(3; +\infty)$, $y_{\min}(3) = -24$, опукла вниз на проміжках $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$, опукла вгору на проміжку $(0; 2)$, точки перегику $(0; 3)$, $(2; -13)$; 3) функція парна, спадає на проміжках $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, зростає на проміжках $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, $y_{\min}\left(-\frac{1}{2}\right) = y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$, $y_{\max}(0) = 1$, точки перегику $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{67}{72}\right)$; 4) $y_{\max}(3) = \frac{27}{5}$, функція опукла вгору на проміжках $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$, опукла вниз на проміжку $(0; 2)$, точки перегику $(0; 0)$, $\left(2; \frac{16}{5}\right)$, асимптот немає; 5) $y_{\max}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$,

$y_{\min}(1)=0$, точка перегину $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{27}\right)$, асимптот немає; 6) функція непарна, спадає на проміжку $(-1;1)$, зростає на проміжках $(-\infty;-1), (1;+\infty)$, $y_{\max}(-1)=2$, $y_{\min}(1)=-2$, опукла вгору на проміжку $(-\infty;0)$, опукла вниз на проміжку $(0;+\infty)$, точка перегину $(0;0)$, асимптот немає; 7) графік симетричний відносно осі ординат, функція спадає на проміжку $(-\infty;0)$, зростає на проміжку $(0;+\infty)$, $y_{\min}(0)=-1$, точки перегину $(1;0), (-1;0)$, $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{64}{125}\right)$, опукла вниз на проміжках $(-\infty;-1), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right), (1;+\infty)$, опукла вгору на проміжках $\left(-1; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}; 1\right)$, асимптот немає; 8) $y_{\min}\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{27}{16}$, точки перегину $(1;0), \left(\frac{1}{2}; -1\right)$, асимптот немає; 9) область визначення $(-\infty;+\infty)$, функція непарна, $y_{\max}(1)=\frac{2}{3}$, $y_{\min}(-1)=-\frac{2}{3}$, точка перегину $(0;0)$, асимптот немає; 10) область визначення $[-1;1]$, функція непарна, $y_{\min}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, $y_{\max}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$, точка перегину $(0;0)$, асимптот немає; 11) область визначення $(-\infty;+\infty)$, функція непарна, зростає на проміжках $(-\infty;-1), (1;+\infty)$, спадає на проміжках $(-1;1)$, $y_{\max}(-1)=\sqrt[3]{2}$, $y_{\min}(1)=-\sqrt[3]{2}$, точка перегину $(0;0)$, асимптота $y=x$; 12) область визначення $(-\infty;+\infty)$, $y_{\max}(0)=2$, $y_{\min}(-1)=0$, точка перегину $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, асимптота $y=1$; 13) область визначення $(-\infty;+\infty)$, функція парна, $y_{\max}(0)=0$, $y_{\min}(\pm 1)=-3$, немає точок перегину, немає асимптот; 14) область визначення $(-\infty;+\infty)$, $y_{\max}\left(\frac{8}{27}\right)=\frac{4}{27}$, $y_{\min}(0)=0$, немає точок перегину, немає асимптот; 15) область визначення $(-\infty;+\infty)$, $y_{\min}(-1)=-\sqrt[3]{4}$, $y_{\max}(1)=\sqrt[3]{4}$, опукла вгору на проміжках $(-\infty;-1), (-1;0)$, опукла вниз на проміжках $(0;1), (1;+\infty)$, точка перегину $(0;0)$, асимптота $y=0$. **8.2.** 1) функція парна, $y_{\max}(0)=1$, точки перегину $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right)$, асимптота $y=0$; 2) область

визначення $(-\infty; +\infty)$, графік симетричний відносно початку координат, $y_{\max}(1) = \frac{1}{2}$, $y_{\min}(-1) = -\frac{1}{2}$, точки перегину $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0; 0)$, $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, асимптота $y = 0$; 3) функція невизначена в точках $x = \pm 1$, графік симетричний відносно осі ординат, $y_{\max}(0) = 0$, при $x < -1$ зростає, при $x > 1$ спадає, немає точок перегину, асимптоти $x = \pm 1, y = 1$; 4) область визначення $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$, $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = -4$, точок перегину немає, асимптоти $x = 0, x = 1, y = 0$; 5) функція невизначена в точках $x = \pm 1$, функція непарна, $y_{\max}(0) = 0$, зростає на кожному проміжку області визначення, немає точок екстремуму, точка перегину $(0; 0)$, асимптоти $x = \pm 1, y = 0$; 6) область визначення $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, функція непарна, зростає на проміжках $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$, спадає на проміжках $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $y_{\max}(-2) = -4$, $y_{\min}(2) = 4$, точок перегину немає, асимптоти $x = 0, y = x$; 7) область визначення $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, функція непарна, $y_{\min}(-2) = -2$, $y_{\max}(2) = 2$, точок перегину немає, асимптоти $x = 0, y = \frac{x}{2}$; 8) область визначення $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$, функція зростає на проміжках $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, спадає на проміжках $(0; 2)$, $(2; +\infty)$, $y_{\max}(-1) = -2$, точок перегину немає, асимптоти $x = -2, x = 0, y = 0$; 9) область визначення $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$, точки перетину з осями $y(0) = \frac{1}{3}$, $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, функція зростає на області визначення, точок перегину немає, асимптоти $x = 3, y = -2$; 10) область визначення $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$, $y_{\max}(0) = -\frac{1}{9}$, точок перегину немає, асимптоти $x = -3, x = 3, y = 0$; 11) область визначення $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, $y_{\max}(0) = 0$, $y_{\min}(2) = 2$, точок перегину немає, асимптоти $x = 1$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; 12) область визначення $(-\infty; +\infty)$, $y_{\min}(0) = 0$, точки перегину $(-1; 1)$, $(1; 1)$, асимптота $y = 4$; 13) область визначення $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, $y_{\min}(0) = 0$, точка перегину $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{9}\right)$, асимптоти $x = 1, y = 1$; 14) область визначення $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$, $y_{\min}(-3) = 6$, $y_{\max}(-1) = 2$, точок перегину немає, асимптоти $x = -2, x = 0, y = 0$; 15) область визначення $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$, функція спадає на проміжках $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$, точка перегину $\left(0; \frac{1}{4}\right)$, асимптоти $x = -2, x = 2, y = 0$; 16) функція визначена скрізь, крім $x = 0$,

$y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)=3$, точка перегину $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2};0\right)$, асимптота $x=0$; 17) область визначення $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, функція парна, $y_{\min}(-1)=y_{\min}(1)=2$, точок перегину немає, асимптота $x=0$; 18) область визначення $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $y_{\min}(2)=3$, точок перегину немає, асимптоти $x=0$, $y=x$; 19) область визначення $(-\infty;2),(2;+\infty)$, $y_{\min}(-2)=-1$, точка перегину $\left(-4;-\frac{8}{9}\right)$, асимптоти $x=2$, $y=0$; 20) область визначення $(-\infty;1),(1;+\infty)$, $y_{\min}(0)=-1$, точка перегину $\left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right)$, асимптоти $x=1$, $y=0$; 21) область визначення $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $y_{\max}(1)=1$, точка перегину $\left(\frac{4}{3};\frac{27}{32}\right)$, асимптоти $x=0$, $y=0$; 22) область визначення $(-\infty;+\infty)$, $y_{\max}(-1)=2$, $y_{\min}(1)=0$, точки перегину $(0;1)$, $\left(-\sqrt{3};\frac{9}{5}\right)$, $\left(\sqrt{3};\frac{1}{5}\right)$, асимптота $y=1$; 23) область визначення $(-\infty;-3),(-3;1),(1;+\infty)$, $y_{\max}(-1)=-1$, точок перегину немає, асимптоти $x=-3$, $x=1$, $y=0$; 24) функція визначена скрізь, крім $x=-1$, $y_{\min}(-3)=-\frac{27}{8}$, точка перегину $(0;0)$, асимптоти $x=-1$, $y=\frac{1}{2}x-1$; 25) функція непарна, функція спадає на інтервалі $(-2;2)$, екстремуми $y_{\min}(2\sqrt{3})=3\sqrt{3}$, $y_{\max}(-2\sqrt{3})=-3\sqrt{3}$, точка перегину $(0;0)$, на інтервалах $(-\infty;-2)$, $(0,2)$ графік опуклий вгору, на інтервалах $(-2,0)$, $(2;+\infty)$ опуклий вниз, асимптоти $x=\pm 2$, $y=x$; 26) функція визначена скрізь, крім $x=\pm\sqrt{3}$, функція непарна, $y_{\max}(3)=-4,5$, $y_{\min}(-3)=4,5$, точка перегину $(0;0)$, асимптоти $x=\pm\sqrt{3}$, $x+y=0$; 27) область визначення $(-\infty;+\infty)$, функція зростає скрізь, точки перегину $\left(-\sqrt{3};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0;0)$, $\left(\sqrt{3};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, асимптота $y=x$; 28) функція визначена скрізь, крім $x=1$, $y_{\max}(0)=0$, $y_{\min}(\sqrt[3]{4})=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$, точка перегину $\left(-\sqrt[3]{2};-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$, асимптоти $x=1$, $y=x$; 29) функція визначена скрізь, крім $x=0$, $y_{\max}(-2)=-2,5$, точок перегину немає, асимптоти $x=0$ та $y=x$; 30) область визначення $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $y_{\max}(-3)=-1,8$, $y_{\max}(1)=3,5$, $y_{\min}(2)=3,4$, точка перегину $(1,3;3,5)$, асимптоти $x=0$, $y=\frac{x}{2}+1$.

8.3. 1) область визначення $(-\infty;+\infty)$, функція парна, $y_{\max}(0)=1$, точка перегину

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, асимптота $y=0$; 2) область визначення $(-\infty; +\infty)$, $y_{\min}(0)=1$, опукла вниз на області визначення, асимптота $y=0$ при $x \rightarrow +\infty$; 3) область визначення $(-\infty; +\infty)$, $y_{\min}(-1)=-\frac{1}{e}$, точка перегику $\left(-2; -\frac{2}{e^2}\right)$, асимптота $y=0$ при $x \rightarrow -\infty$; 4) область визначення $(-\infty; +\infty)$, $y_{\max}(2)=\frac{4}{e^2}$, $y_{\min}(0)=0$, абсциси точок перегику $x=2\pm\sqrt{2}$, асимптота $y=0$; 5) область визначення $(-\infty; +\infty)$, $y_{\min}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{e}}$, $y_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{e}}$, точки перегику $(0;0)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$, асимптота $y=0$; 6) область визначення $(-\infty; +\infty)$, $y_{\max}(2)=\frac{4}{e^2}$, $y_{\min}(0)=0$, абсциси точок перегику $x=2\pm\sqrt{2}$, асимптота $y=0$; 7) область визначення $(-\infty; +\infty)$, $y_{\max}(3)=\frac{27}{e^3}$, абсциси точок перегику $x=0, x=3\pm\sqrt{3}$, асимптота $y=0$; 8) область визначення $(-1; +\infty)$, $y_{\min}(0)=0$, немає точок перегику, асимптота $x=-1$; 9) область визначення $(0; +\infty)$, $y_{\min}\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$, опукла вниз на області визначення, асимптот немає; 10) область визначення $(-\infty; +\infty)$, функція парна, $y_{\min}(0)=0$, точки перегику $(-1; \ln 2), (1; \ln 2)$, асимптот немає; 11) область визначення $(0; +\infty)$, $y_{\min}(1)=0$, точка перегику $(e; 1)$, асимптот немає; 12) область визначення $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, функція парна, функція спадає на $(-\infty; -1)$, функція зростає на $(1; +\infty)$, точок перегику немає, опукла вгору на області визначення, асимптоти $x=\pm 1$; 13) область визначення $(0; +\infty)$, $y_{\max}(e^2)=\frac{2}{e}$, асимптота $y=0$; 14) область визначення $(-1; 1)$, функція непарна, функція зростає на $(-1; 1)$, точка перегику $(0; 0)$, на інтервалі $(-1; 0)$ опукла вгору, на інтервалі $(0; 1)$ опукла вниз, асимптоти $x=\pm 1$; 15) область визначення $(0; +\infty)$, функція спадає на області визначення, точок перегику немає, опукла вгору на проміжку $(-\infty; 0)$, опукла вниз на проміжку $(0; +\infty)$, асимптоти: $x=0$; $y=-1$ при $x \rightarrow -\infty$, $y=0$ при $x \rightarrow +\infty$; 16) функція визначена скрізь, крім $x=1, x=3$, $y_{\max}(2)=e^{-1}$, немає точок перегику, асимптоти $x=1, x=3, y=1$; 17) функція визначена скрізь, крім

$x=0$, екстремумів немає, точка перегину $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}\right)$, асимптоти $x=0$, $x+y=1$; 18) область визначення $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$, функція зростає на інтервалі $(-\infty; -1)$ від e до ∞ ; зростає на інтервалі $(0; +\infty)$ від 1 до e , асимптоти $y=e$, $x=-1$.

8.4. 1) область визначення $(-\infty; +\infty)$, функція непарна, екстремумів немає, точки перегину $(\pi k; \pi k)$, $k \in Z$, в точках перегину графік перетинає пряму $y=x$, асимптот немає; 2) область визначення $(-\infty; +\infty)$, функція парна, абсциси точок екстремуму задовольняють рівняння $\operatorname{tg} x = -x$, абсциси точок перегину задовольняють рівняння $x \operatorname{tg} x = 2$, асимптот немає; 3) область визначення $(-\infty; +\infty)$, функція періодична з періодом $T=2\pi$, $y_{\min}\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) = -\sqrt{2}$, $y_{\max}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \sqrt{2}$, $k \in Z$, точки перегину $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; 0\right)$, $k \in Z$, асимптот немає; 4) область визначення $(-\infty; +\infty)$, функція скрізь спадна, точки перегину $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$, асимптот немає; 5) функція визначена на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$, функція парна, функція періодична з періодом $T=2\pi$, $y_{\max}(2\pi k) = 0$, опукла вгору; немає точок перегину, асимптоти $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; 6) функція визначена на інтервалах $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$, функція періодична з періодом $T=2\pi$, $y_{\max}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0$, опукла вгору; немає точок перегину, вертикальні асимптоти $x = \pi n$, $n \in Z$; 7) функція визначена на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$, функція парна, функція періодична з періодом $T=2\pi$, $y_{\min}(2\pi k) = 1$, немає точок перегину, асимптоти $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; 8) область визначення $(-\infty; +\infty)$, функція непарна, $y_{\max}(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$, $y_{\min}(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$, точка перегину $(0; 0)$, асимптоти $y = x \pm \pi$; 9) область визначення $(-\infty; +\infty)$, функція парна, зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$, $y_{\max}(0) = \frac{\pi}{2}$, опукла вниз на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, точок перегину немає, асимптота $y = -\pi/2$.

Рекомендована література

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. В 3 ч.– Ч. 1 –. К.: Вища школа, 1990. – 383 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч.1. – М.: Высш. школа, 1986. – 304 с.
4. Денисюк В.П., Репета В.К., Гаєва К.А., Клешня Н.О. Вища математика. Модульна технологія навчання. Навч. посіб. Ч.1: – К: Книжк. вид-во НАУ, 2005. – 225 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Збірник задач: Навч.посібн. – К.: А.С.К., 2004. – 480 с.
7. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі. Посібник.–К.: Видав. центр «Академія», 2003. – 624 с.
8. Дюженкова О.Ю. Методичні вказівки з вищої математики для студентів інженерних спеціальностей. – К: Компринт, 2017. – 192 с.
9. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966. – 464 с.
10. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Высш. шк., 1989. – 583 с.
11. Овчинников П. Ф., Лисицын Б. М., Михайленко В. М. Высшая математика. – К.: Вища шк., 1989. – 679 с.
12. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. В 3 т. – М.: Наука, т. 1, 2001. – 415 с.
13. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис–пресс, 2007. – 608 с.
14. Сборник задач по математике для втузов / под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П.. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
15. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу: Навч. посібн. – К.: Вища школа, 1993. – 375 с.