

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# **БІОМЕДИЧНА МЕХАНІКА**

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчально-методична праця для здобувачів ступеня бакалавра  
за спеціальністю 163 Біомедична інженерія

Укладач Л. Д. Тарасова

Електронне мережеве навчальне видання

Київ  
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО  
2021

УДК 531/539:61  
Б63

Укладач *Тарасова Лариса Дмитрівна, канд. техн. наук*

Рецензенти: *Настенко Є. А. д-р біол. наук, проф., кафедра біомедичної кібернетики ФБМІ КПІ ім. Ігоря Сікорського*  
*Козяр В. В., канд. мед. наук, кафедра біомедичної інженерії ФБМІ КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Відповідальний редактор *Зубчук В.І., канд. техн. наук, доцент*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 1 від 16.09.2021 р.)  
за поданням вченої ради факультету біомедичної інженерії  
(протокол № X від DD.MM.YYYY р.)*

Б63 Біомедична механіка [Електронний ресурс] : конспект лекцій : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спец. 163 Біомедична інженерія / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Л. Д. Тарасова. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 178 с.

Конспект лекцій містить необхідний теоретичний матеріал, приклади розв'язання завдань контрольні питання. Представлений матеріал може використовуватися здобувачами вищої освіти для самостійної роботи при дистанційному вивченні курсу «Біомедична механіка», при виконанні практичних завдань, а також при підготовці до екзамену або заліку.

УДК 531/539:61

Реєстр. № НП XX/XX-XXX. Обсяг 7,7 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
Лекція 1. Загальні питання біомедичної механіки .....	5
Лекція 2. Механіка пружних біологічних матеріалів .....	24
Лекція 3. Основи реології .....	35
Лекція 4. Основи теорії тонкостінних оболонок .....	54
Лекція 5. Механічні властивості та функціонування скелетних м'язів .....	64
Лекція 6. Механіка рідин .....	79
Лекція 7. Ньютонівські та неньютонівські рідини .....	92
Лекція 8. Напруження внутрішнього тертя .....	103
Лекція 9. Біомеханіка серцево-судинної системи .....	114
Лекція 10. Біомеханіка травної системи .....	126
Лекція 11. Статика тіла .....	140
Лекція 12. Біомеханіка опорно-рухового апарату .....	149
Лекція 13. Кінематика і динаміка опорно-рухового апарату .....	163
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	177

## ВСТУП

Навчальна дисципліна «Біомедична механіка» відноситься до вибіркового освітнього компонента циклу професійної підготовки, базується на знаннях окремих розділів з дисциплін: «Анатомія та фізіологія людини», «Фізика», «Матеріалознавство та конструкційні матеріали», «Кількісна фізіологія», «Механіка», «Біофізика» і складає фундамент для подальшого опанування дисциплін за спеціальністю 163 Біомедична інженерія.

Конспект лекцій побудовано з врахуванням положень кредитно-модульної системи організації навчального процесу. Кожна лекція містить стислі теоретичні відомості, приклади та контрольні питання.

Відповідь на контрольні питання передбачає ретельне ознайомлення з теоретичним матеріалом, викладеним у лекціях, та має бути доповнена і розширена студентом в рамках самостійної роботи.

Тематика лекцій зорієнтована на оволодіння теоретичними та практичними підходами для вирішення широкого кола задач біомедичної інженерії.

Конспект лекцій з курсу «Біомедична механіка» спрямований на формування компетентностей у відповідності до освітньо-професійних програм «Медична інженерія», «Регенеративна та біофармацевтична інженерія».

Вивчення дисципліни «Біомедична механіка» дозволяє краще усвідомити суть механічних явищ, що відбуваються в організмі людини.

# ЛЕКЦІЯ 1

## ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ БІОМЕДИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Біомедична механіка (далі – біомеханіка) - це розділ природничих наук, що вивчає і описує на основі моделей і методів сучасної механіки, властивості та механічні процеси, що протікають у біологічних системах різних рівнів організації.

Біомеханіка розвивається на стику: теоретичної механіки, теорії механічних коливань, динаміки механічних систем і суцільних середовищ, робототехніки, математичних, біологічних та медичних наук.

Біомеханіка тісно взаємозв'язана з галузями знання, в яких вивчають конкретні області рухової діяльності людини, де використовуються теоретичні висновки та практичні результати біомеханічних досліджень, а саме: в клінічній медицині; космічній і авіаційній біології, фізіології праці, теорії фізичного виховання і т.п.

Результати біомеханічних досліджень використовуються для:

- створення замінників тканин і органів;
- в ортопедії та травматології при відновленні втраченої працездатності, особливо при протезуванні інвалідів (оцінка функціональних можливостей, створення заміщуючих конструкцій, контроль над оволодінням рухами);
- розробки методів захисту людини від несприятливих чинників довкілля (удари, вібрація, невагомість, теплова дія і т.п.);
- розробки методів оцінки ефективності, аналізу і корекції природних, трудових і спортивних рухів;
- створення нового типу взуття, спортивного інвентаря, устаткування і техніки управління ними;
- розробки способів впливу на організм при профілактиці та лікуванні;
- удосконалення старих і розробки нових діагностичних методик.

## Ієрархія об'єктів дослідження

1. Біологічні макромолекули (деформація макромолекул, їх реологічні властивості).
2. Клітини (механічні властивості, масоперенос через мембрани; механічні властивості та роль цитоскелета; підтримка і зміна форми клітини; механічні аспекти клітинної рухливості; ділення і ріст клітин; поведінка клітин у зовнішніх полях; пухлинні клітини; клітини в суспензії та культурі).
3. Кров (фізико-механічні властивості плазми; макрореологічні та мікрореологічні властивості; масоперенос у крові; седиментація клітин крові; акустичні та оптичні властивості; електричні та магнітні властивості; згортання крові та механічні властивості згустка; гемоліз).
4. Інші біологічні рідини: лімфа, спинномозкова рідина (ліквор), тканинна рідина (міжклітинна, внутрішньотканинна, або інтерстиціальна), виділення залоз, рідини у дихальних шляхах, синовіальна рідина.
5. М'які тканини (стінки кровоносних судин, тканини дихальних шляхів, паренхіма легень, головний мозок, шкіра, сухожилля, суглобовий хрящ).
6. М'язова тканина (скелетні та гладкі м'язи, серцевий м'яз; електроміографія; феноменологія м'язової втоми; принципи управління).
7. Тверді тканини людини (деформація кісткової тканини, електромеханічні властивості; тканини зуба).
8. Тканини новоутворень (особливості механічних, електричних і транспортних властивостей).
9. Механіка кровообігу (рух крові у великих артеріях; мікроциркуляція; капіляри; венозне русло; малий круг кровообігу; серце і клапани; органний кровоток; судинні патології).

10. Механіка дихання (аеродинаміка дихальних шляхів; механіка плевральної порожнини; робота дихальних м'язів; осадження часток і мукоциліарний транспорт; звукоутворення і мова).
11. Травний тракт і система сечовиведення (перистальтичний транспорт; механіка ротової порожнини і стравоходу; механіка роботи шлунку і кишковика; механіка руху сечі).
12. Опорно-руховий апарат (механічні аспекти будови; локомоторні м'язи, механіка суглоба).
13. Органи чуття (органи зору, слуху, рівноваги, дотику, смаку, нюху, терморцепція).
14. Рухи людини (ходьба; біг; трудові рухи; спортивні рухи; регуляція пози і руху).
15. Рухи у співтоваристві (натовп і транспортні потоки);
16. Організмені реакції (біомеханіка реакцій на зовнішній вплив; біомеханічні методи в психології).
17. Взаємодія організму і місця існування (приспособлені реакції; масовий і енергетичний баланс; екосистеми).
18. Індивідуальний розвиток (алометрія, біологічна подібність; ріст, морфогенез; оптимальність біосистем).
19. Електромагнітна біомеханіка (електричні і магнітні властивості біологічних об'єктів; реакція БС на електромагнітне поле (ЕМП); механізми чутливості БС до ЕМП; моделювання - біомеханічні аспекти).

### **Історичні віхи розвитку біомедичної механіки**

*Аристотель* (384-322 рр. до н.е.) - дав першу класифікацію тварин, описав зовнішні і внутрішні органи людини, способи розмноження, походження статі, спадковість окремих ознак, розробив питання розумової діяльності.

*Клавдій Гален* (130-210 рр.) - автор більше ніж 125 праць, у тому числі «Про призначення частин людського тіла». Першим дав порівняно-анатомічний опис людині та мавпі.

*Леонардо да Вінчі* (1452-1519 рр.) - описав функціонування серця і зорову функцію ока, механіку тіла в русі (хода, махаючий політ птахів і ширяння).

*Рене Декарт* (1596-650) - зробив спробу побудувати механічну модель організму з урахуванням управляючої ролі нервової системи.

*Галілео Галілей* (1564-1642 рр.) - заклав основи механіки, створив безліч приладів для медицини, винайшов телескоп.

*Джованні Альфонсо Бореллі* (1608-1679 рр.) - розробляв питання анатомії та фізіології з позицій математики і механіки. Показав, що рух кінцівок і частин тіла людини при піднятті вантажів, ходьбі, бігу, плаванні можна пояснити принципами механіки. Вперше представив рух серця як м'язове скорочення. Вивчаючи механіку руху грудної клітки, встановив пасивність розширення легень. Вперше розглянув можливість створення дихального апарату для підводних досліджень. Вивчав складові крові.

*Антоні ван Левенгук* (1632-1723) створив мікроскоп 300-кратного збільшення, першим відкрив еритроцити, описав рух клітин за допомогою війок, першим довів і досліджував існування мікробів.

*Роберт Гук* (1635-1703 рр.) - сформулював основний закон механіки про залежність між деформацією і напруженням ідеально-пружного тіла; запропонував розглядати клітину в якості основного елемента живих організмів; вніс значний внесок у вивчення механіки органів дихання.

*Ісаак Ньютон* (1643-1727 рр.) - сформулював основні закони класичної механіки, відкрив закон всесвітнього тяжіння, створив теорію диференціальних і інтегральних числень, відкрив дисперсію світла, хроматичну аберацію, вивчав інтерференцію і дифракцію, розвивав корпускулярну теорію світла.

*Леонард Ейлер* (1707-1783 рр.) - засновник теоретичної гідромеханіки; вивчав поширення пульсових хвиль в артеріях. Відомий своїм внеском у теоретичну механіку. Внесок в математику і механіку відображений в його основних працях: «Теорія руху твердого тіла», «Диференціальне числення», «Введення в аналіз», «Інтегральне числення» тощо.

*П'єр Симон Лаплас* (1749-1827 рр.) - розробив теорію капілярних сил, вивів формулу для визначення капілярного тиску (формула Лапласа). Займався проблемами акустики; вивів формулу для швидкості поширення звуку в повітрі, проводив дослідження в галузі гідродинаміки.

*Томас Юнг* (1773 - 1829) - засновник хвильової теорії світла, теорії кольорового зору; вивчав акомодацию ока, мовоутворення. В теорії пружності Юнгу належать дослідження деформації зсуву. Він же ввів механічну характеристику пружності - модуль Юнга.

*Пуазейль Жан Луї Марі* (1799-1869 рр.) - вивчав рух крові по судинах і модельних трубках, уперше виміряв артеріальний тиск манометром. На основі дослідів, проведених з дистильованою водою, експериментально відкрив і сформулював названий його іменем закон Пуазейля. Цей закон дозволив описати стаціонарне ламінарне протікання ньютонівських рідин по трубці сталого круглого перетину.

*Гельмгольц Герман Людвіг Фердинанд* (1821-1894 рр.) - дав математичне формулювання закону збереження енергії; співзасновник теорії вихрових рухів рідини; засновник фізіології слуху і зору; виміряв швидкість нервового імпульсу; вивчав м'язове скорочення, теплоутворення в м'язі.

*Крог* (1874-1949 рр.) - вивчив механізм дихання, описав вплив різних концентрацій вуглекислого газу на криву дисоціації оксигемоглобіну крові, визначив хвилинний об'єм серця у спокої і при м'язовому навантаженні, вивчив фізіологічну регуляцію капілярного кровотоку (доставки кисню до тканин і клітин). За відкриття механізму регуляції просвіту капілярів в 1920 р. присуджена Нобелівська премія з фізіології та медицини.

*Арчибалд Вівієн Хілл, Отто Мейєргоф* - проводили дослідження фізіологічних особливостей м'язів. За відкриття в галузі теплоутворення в м'язі в 1923 р. присуджена Нобелівська премія з фізіології та медицини.

Експериментальне вивчення ходьби людини здійснили німецькі учені *Е. і В. Вебери* (1836), *В. Брауне і О. Фішер* (1895), французький учений *Е. Марей* (1894), американські вчені *У. О. Фенн* (1935) і *Х. Елфтмен* (1938).

Вивченню механіки живих тканин присвячені роботи американських учених *Ф. Г. Еванса* (1957), *Г. Фроста* (1964).

Біомеханіку дихання досліджував американський вчений *Дж. Л. Клеменс* (1965), гемодинаміку вивчали його співвітчизники *Г. М. Тейлор* (1953), *Е.О. Еттінгер* (1964).

Розвиток біомеханіки пов'язаний з роботами з теоретичної анатомії *П. Ф. Лесгафта* (1905) і книгою *І. М. Сеченова* «Нарис робочих рухів людини» (1901), в якій приведені найважливіші біомеханічні характеристики рухів. Ці дослідження носили прикладний характер і були спрямовані на раціоналізацію робочого місця, робочої пози, форми інструменту, прийомів роботи.

Детальні дослідження локомоцій людини були здійснені *Н.А. Бернштейном* і його співробітниками. Був проведений біодинамічний аналіз ходьби здорових людей, її еволюції у дітей і людей похилого віку, а також бігу, стрибків, стройової ходьби. Ці роботи склали теоретичну основу сучасної біомеханіки рухів.

### **Загальні дані про тіло людини**

Тіло людини є об'єктом найбільшої складності. Воно складається з частин, які вважаються твердими (скелет) та порожнин, що деформуються, причому в цих порожнинах містяться плинні та фільтрувальні неньютонівські середовища.

В анатомії прийнято вивчати тіло людини у вертикальному положенні із зімкнутими нижніми і опущеними верхніми кінцівками. При цьому, виділяють області голови, шиї, тулуба, двох пар верхніх і нижніх кінцівок. На тулубі людини позначають два кінці - черепний (краніальний) і хвостовий (каудальний) та чотири поверхні - черевну (вентральну), спинну (дорсальну) і дві бокових - праву і ліву.

Для позначення частин тіла по відношенню до серединної площини користуються термінами «медіальний» - що знаходиться ближче до серединної площини і «латеральний» - далі від неї.

Для позначення просторових сполучень на кінцівках, прийняті терміни: проксимальний (знаходиться ближче до тулуба) і дистальний (знаходиться далі від тулуба).

Вертикальна площина, що ділить тіло на дві симетричні половини, називається серединною. Площини, паралельні серединній, називаються сагітальними. Вертикальна площина, перпендикулярна до серединної, що проходить через центр мас, називається фронтальною (рис. 1.1).

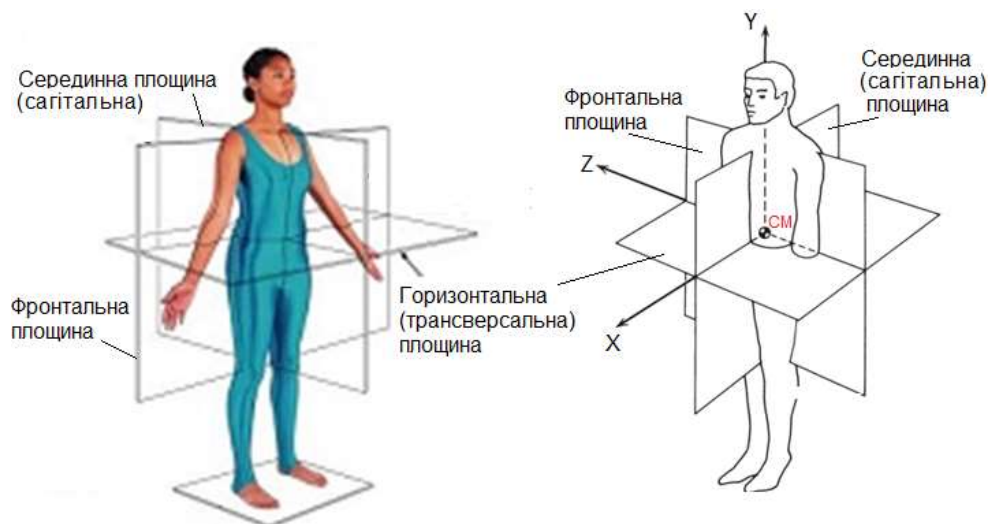


Рис 1.1. Система координат людського тіла

Горизонтальна (трансверсальна) площина перпендикулярна до серединної, що проходить через центр мас, ділить тіло на краніальну (суперіорну) і каудальну (інферіорну) частини.

## Центр мас і центр ваги тіла

В якості центру координат людського тіла, як правило, вибирають загальний центр мас (ЗЦМ), який характеризує просторове розміщення мас окремих сегментів та біоланок. Визначення положення ЗЦМ являє собою важливе завдання для біокінематики та біодинаміки. Опис траєкторії ЗЦМ при виконанні, наприклад, фізичних вправ дозволяє отримувати дані про переміщення тіла спортсмена у просторі. Зокрема, зміни траєкторії руху ЗЦМ відображають дію на тіло зовнішніх сил, а це відкриває можливості для визначення багатьох динамічних характеристик біосистеми (механічної роботи, потужності та ін.).

Як правило, положення ЗЦМ співпадає з положенням загального центру ваги (ЗЦВ) тіла. ЗЦВ тіла людини визначають як точку прикладання рівнодійної сил ваги всіх сегментів тіла. Положення ЗЦВ обумовлюється анатомо-фізіологічними особливостями тіла людини, позою, функціонуванням дихальної, травної та інших систем, які забезпечують переміщення значної маси речовини в організмі. Координати ЗЦВ можна розглядати як функцію від положення центрів ваги (ЦВ) усіх біоланок.

Центр ваги тіла розташовується у чоловіків і жінок по-різному, що залежить від віку, розвитку мускулатури, кісткової основи і жирового шару. Як правило, ЗЦВ у жінок вище, ніж у чоловіків. ЗЦВ людини в положенні стоячи розташований в серединній площині приблизно на 2,5 см нижче основи крижа і на 4 – 5 см вище поперечної осі тазостегнових суглобів.

Терміни центр мас і центр ваги часто використовуються, як синоніми. Більш загальним терміном є центр мас, оскільки центр ваги діє вздовж однієї осі, яка співпадає з напрямком гравітації.

Центр мас - геометрична точка, що характеризує рух тіла або системи тіл як цілого. Радіус-вектор центру мас, відносно обраної системи координат, визначається за формулами:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_{Ci}}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_{Ci}}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_{Ci}}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad (1.1)$$

$$\vec{r}_C = x_C \vec{i} + y_C \vec{j} + z_C \vec{k}, \quad (1.2)$$

де  $m_i$  - маса окремого сегмента тіла;  $\vec{r}_i$  - радіус-вектор центру мас сегмента тіла відносно обраної системи координат;  $x_{Ci}, y_{Ci}, z_{Ci}$  - проєкції радіус-вектора центру мас сегмента тіла на осі X, Y, Z;  $x_C, y_C, z_C$  - проєкції радіус-вектора центру мас тіла відповідно на осі X, Y, Z.

#### *Маса і центр мас сегментів тіла*

Зі збільшенням загальної маси тіла зростає і маса кожного окремого сегмента. Отже, можна представити масу кожного сегмента у вигляді відносної маси, як частку від загальної маси тіла.

Відносна маса сегментів тіла середньостатистичної людини та відносна відстань від осі проксимального суглоба до центру мас сегмента представлено в табл. 1.1.

**Таблиця 1.1. Антропометричні дані середньостатистичної людини**

Сегмент тіла	Відносна маса сегмента від загальної маси тіла, $f$	Відносна довжина сегмента від зросту особи	Відносна відстань центру мас сегмента від проксимального суглоба, $\varphi$
Кисть	0,006	0,108	0,506
Передпліччя	0,016	0,146	0,430
Плече	0,028	0,186	0,436
Стопа	0,0145	0,152	0,50
Гомілка	0,0465	0,246	0,433
Стегно	0,100	0,245	0,433
Тулуб	0,497	0,338	0,50
Голова і шия	0,081	0,182	Над верхнім краєм слухового проходу
Голова, верхні кінцівки і тулуб	0,678	-	0,626

Для більш точних розрахунків використовують метод Селуянова, при якому масу кожного сегмента тіла визначають за допомогою рівняння регресії:

$$m_i = B_0 + B_1 m_B + B_2 H \text{ (кг)}, \quad (1.3)$$

де  $m_B$  - маса тіла, **кг**;  $H$  - зріст (довжина тіла), **см**;  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  – коефіцієнти регресії (табл..1.2, 1,3).

**Таблиця 1.2. Коефіцієнти рівняння регресії для обчислення маси сегментів тіла **чоловіків** за масою ( $m$ ) і довжиною ( $H$ ) тіла**

Сегмент тіла	Коефіцієнти регресії		
	$B_0$	$B_1$	$B_2$
Стопа	- 0,829	0,0077	0,0073
Гомілка	- 1,592	0,0362	0,0121
Стегно	- 2,649	0,1462	0,0137
Кисть	- 0,1165	0,0036	0,00175
Передпліччя	0,3185	0,01445	- 0,00114
Плече	0,250	0,03012	- 0,0027
Голова	1,296	0,0171	0,0143
Верхня частина тулуба	8,2144	0,1862	- 0,0584
Середня частина тулуба	7,181	0,2234	- 0,0663
Нижня частина тулуба	- 7,498	0,0976	0,04896

**Таблиця 1.3. Коефіцієнти рівняння регресії для обчислення маси сегментів тіла **жінок** за масою ( $m$ ) і довжиною ( $H$ ) тіла**

Сегмент тіла	Коефіцієнти регресії		
	$B_0$	$B_1$	$B_2$
Стопа	-1,207	- 0,0175	0,0057
Гомілка	-0,436	- 0,011	0,0238
Стегно	5,185	0,183	-0,042
Кисть	-0,116	0,0017	0,0020
Передпліччя	0,295	0,009	0,0003
Плече	0,206	0,0053	0,0066
Голова	2,388	- 0,001	0,0150
Верхня частина тулуба	-16,593	0,140	0,0995
Середня частина тулуба	-2,741	0,031	0,0560
Нижня частина тулуба	-4,908	0,124	0,0272

## Розмір сегментів

Довжина сегментів залежить від будови тіла, статі та расового походження. Dempster і його співробітники узагальнили розміри довжини сегментів і розташування центрів суглобів відносно анатомічних орієнтирів.

Середні розміри довжини сегментів для середньостатистичної людини, виражені у частках від зросту особи, запропоновані Drillis і Contini та представлені на рисунку 1.2. Вказані розміри сегментів рекомендуються для використання в навчальних цілях.

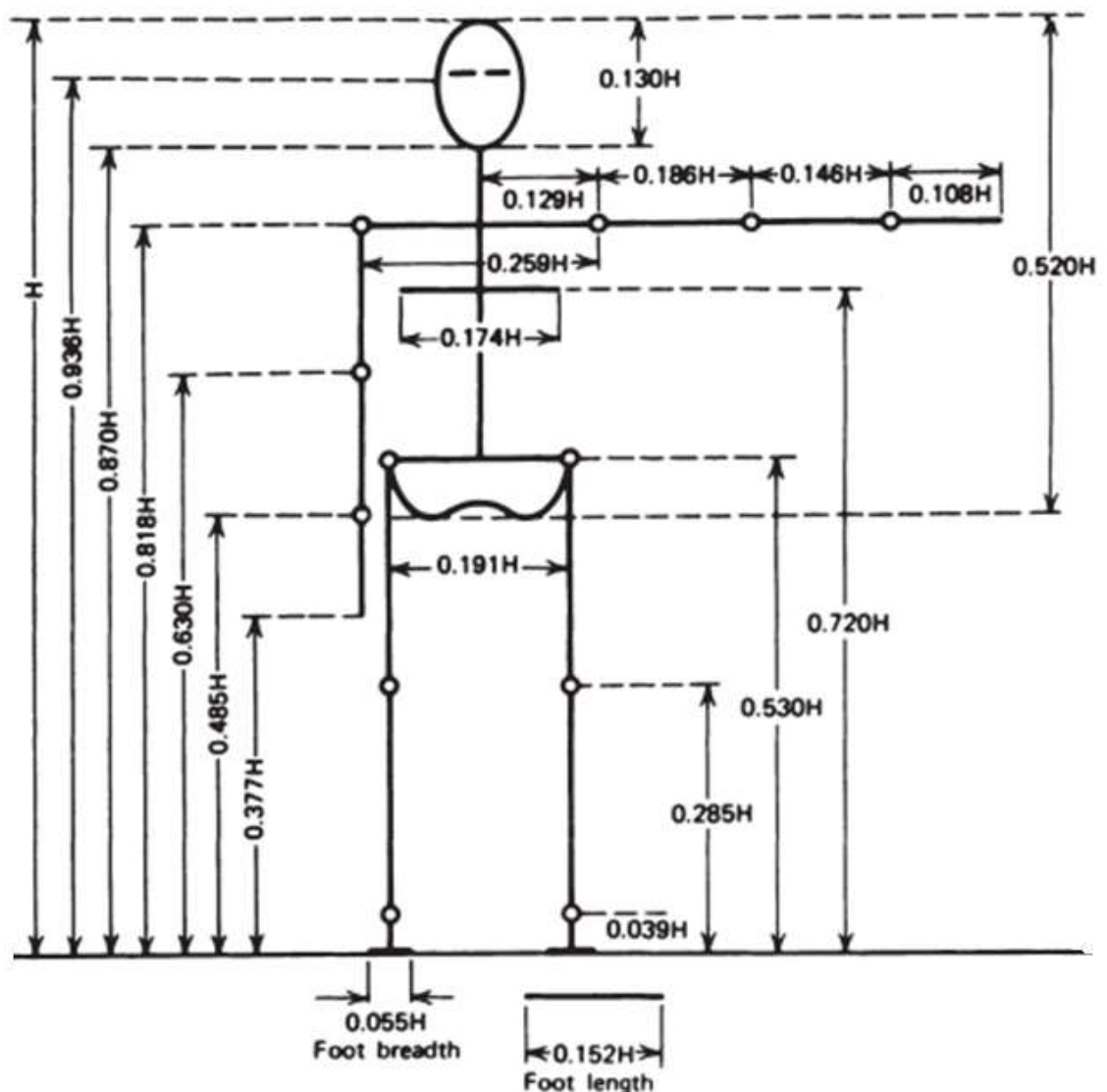


Рис. 1.2. Відносна довжина сегментів тіла в залежності від зросту  $H$  особи

## Середня густина тіла

Тіло людини складається з багатьох типів тканин, кожна з яких має різну густину. Кортикальна кістка має густину понад  $1800 \text{ кг/м}^3$ , м'язова тканина - трохи більше  $1000 \text{ кг/м}^3$ , жирова - менше  $1000 \text{ кг/м}^3$ . Густина легеневої тканини здорових суб'єктів становить  $240 \text{ кг/м}^3$ , у пацієнтів із застоєм і набряком легень густина коливається в межах  $330\text{-}620 \text{ кг/м}^3$ .

Середня густина (щільність) є функцією будови тіла. Існує багато формул для обчислення щільності. Одна з них, найбільш надійна, була запропонована Drillis і Contini в наступному вигляді:

$$\rho = 0,69 + 0,9c \left[ \text{кг} / \text{дм}^3 \right], \quad (1.4)$$

де  $c = H / m^{1/3}$  - пондеральний індекс;  $m$  - маса тіла, **кг**;  $H$  – зріст, **м**.

Кожен сегмент тіла має унікальну комбінацію кісток, м'язів, жиру та іншої тканини, тому щільність у межах даного сегмента неоднакова. Як правило, через більшу частку кістки, щільність дистальних сегментів більша, ніж проксимальних, і окремі сегменти збільшують свою щільність із збільшенням середньої щільності тіла. Залежність щільності сегментів верхньої та нижньої кінцівок від щільності всього тіла представлено на рисунку 1.3.

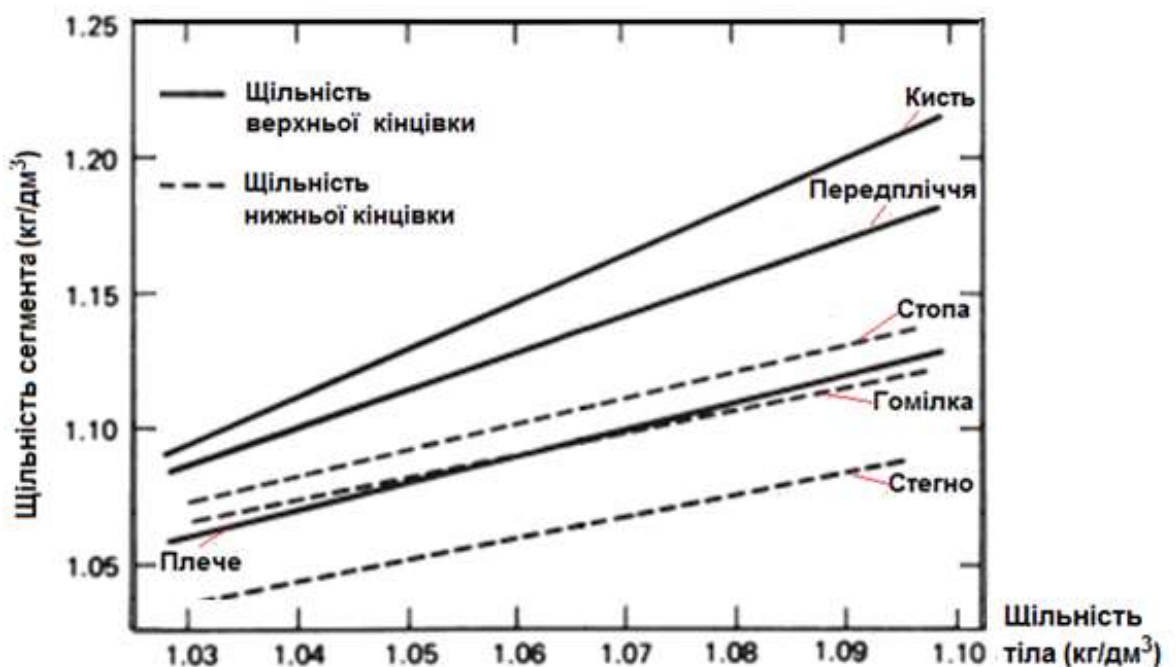


Рис. 1.3.

## Момент інерції та радіус інерції

При русі тіла, його сегменти здійснюють як поступальні, так і обертальні рухи. Кінетичний момент сегмента відносно осі обертання дорівнює добутку моменту інерції сегмента на його кутову швидкість:

$$K = I\omega$$

Похідна за часом від кінетичного моменту сегмента відносно осі дорівнює головному моменту зовнішніх сил, що діють на сегмент відносно тієї ж осі:

$$\frac{dK}{dt} = M_F^E = I\varepsilon$$

Головний момент зовнішніх сил  $M_F^E$  викликає кутове прискорення  $\varepsilon$ . Таким чином, момент інерції  $I$  є коефіцієнтом пропорційності, який характеризує здатність сегмента чинити опір змінам кутової швидкості. Величина моменту інерції  $I$  залежить від місцезнаходження осі, навколо якої відбувається обертання, і є мінімальною, якщо обертання сегмента відбувається навколо центру мас.

Розглянемо сегмент з розподіленою масою, представлений на рисунку 1.4. Момент інерції сегмента відносно центру обертання  $A$

дорівнює:  $I = m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + m_3x_3^2 + \dots + m_nx_n^2 = \sum_{s=1}^n m_sx_s^2$ .

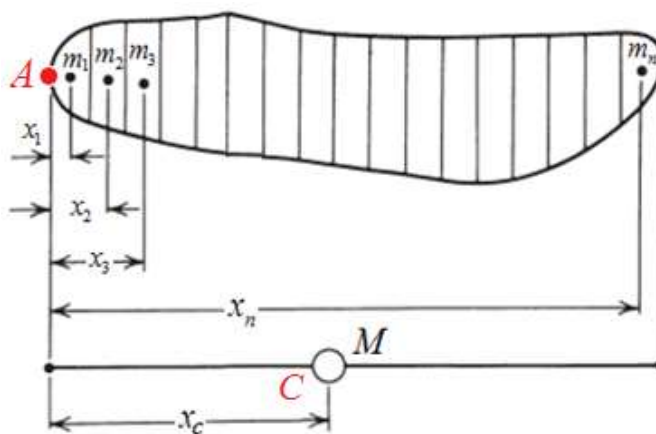


Рис. 1.4. Сегмент тіла з розподіленою масою

Маси, що розташовані поблизу центру обертання А, мало впливають на момент інерції, тоді як найдалша маса має значний вплив.

Масу сегмента, представленого на рисунку 1.4, подумки розіб'ємо на дві рівні точкові маси, які розмістимо на деякій відстані  $r_0$  від центру мас, як показано на рисунку 1.5. Момент інерції відносно центру мас дорівнює:

$$I_C = \frac{M}{2} r_0^2 + \frac{M}{2} r_0^2 = Mr_0^2, \quad (1.5)$$

де  $r_0$  - радіус інерції, при якому дві рівні маси, зображені на рисунку 1.5, мають той самий момент інерції в площині обертання навколо центру мас, як і сегмент з розподіленою масою.

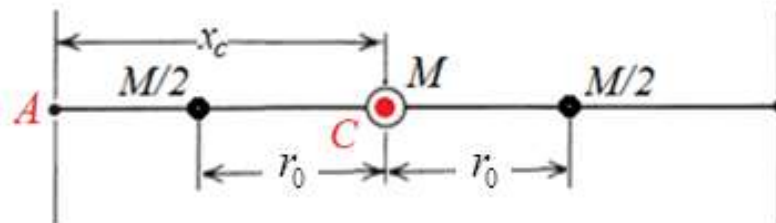


Рис. 1.5. Сегмент у вигляді двох зосереджених мас

Аналізуючи формулу (1.5) можна зробити висновок, що момент інерції будь-якого тіла збігається з моментом точкового тіла тієї ж маси, відсунутої від осі обертання на відстань, що дорівнює радіусу інерції  $r_0$ .

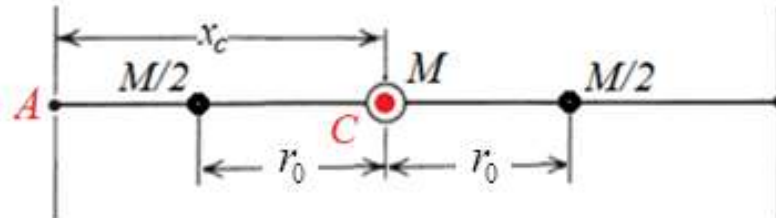
Більшість сегментів обертаються відносно осей, що проходить через центри суглобів. Зв'язок між моментом інерції сегмента відносно осі, що проходить через центр суглоба А, та моментом відносно центру мас С (рис. 1.5) визначається теоремою про паралельні осі (теорема Гюйгенса-Штейнера):

$$I_A = I_C + Mx_C^2, \quad (1.6)$$

де  $I_C$  - момент інерції відносно центру мас;  $M$  - маса сегмента;  $x_C$  - відстань між центром маси та центром обертання суглоба.

Наведемо короткий доказ теореми Гюйгенса-Штейнера. Для цього знайдемо момент інерції сегмента у вигляді двох зосереджених мас (рис. 1.5) відносно центру А:

$$I_A = \frac{M}{2}(x_C - r_0)^2 + \frac{M}{2}(x_C + r_0)^2 = Mr_0^2 + Mx_C^2 = I_C + Mx_C^2$$



### Алометрия

Алометрия - тип нелінійної функціональної залежності між фізіологічними параметрами організму і степеневою функцією маси тіла. Загальний вигляд алометричної залежності має вигляд:

$$f = a m_B^\alpha \quad (1.7)$$

де  $f$  - фізіологічний параметр;  $a$ ,  $\alpha$  - константи;  $m_B$  - маса тіла.

Алометричні параметри для ссавців, відповідно до функції (1.7), представлені в табл. 1.4.

**Таблиця 1.4.** Алометричні параметри для ссавців (використано дані

[Irving P. Herman. Physics of the Human Body, Third edn Springer-erlag Berdlin Heidelberg 2007], table.1.13, p.23)

№ з/п	Параметр	a	$\alpha$
1.	Швидкість основного обміну, Вт	4,1	0,75
2.	Площа поверхні тіла, м <sup>2</sup>	0,11	0,65
3.	Маса мозку людини, кг	0,085	0,66
4.	Маса мозку (виключаючи приматів), кг	0,01	0,7
5.	Частота дихання, Гц	0,892	- 0,26
6.	Витрати енергії при бігу, Дж/м·кг	7	- 0,33
7.	Витрати енергії при плаванні, Дж/м·кг	0,6	- 0,33
8.	Ефективний об'єм легень, м <sup>3</sup>	$5,67 \cdot 10^{-5}$	1,03
9.	Частота серцебиття, Гц	4,02	- 0,25
10.	Маса серця, кг	$5,8 \cdot 10^{-3}$	0,97

11.	Тривалість життя, рік	11,89	0,20
12.	М'язова маса, кг	0,45	1,0
13.	Маса скелету наземних ссавців, кг	0,068	1,08
14.	Швидкість польоту, м/с	15	0,167
15.	Швидкість ходьби, м/с	0,5	0,167

Для отримання більш точних алометричних оцінок використовують не один, а декілька параметрів. Так, площа поверхні тіла  $A$  людини визначається за формулою:

$$A = 0,202 m_B^{0,425} H^{0,725} (m^2), \quad (1.8)$$

де  $m_B$ , кг;  $H$ , м - відповідно маса і зріст тіла.

### Принципи масштабування

Принципи масштабування дозволяють встановити кількісні співвідношення між фізіологічними параметрами і розмірами організму. Розглянемо деякі приклади.

**Приклад 1.** Доведіть, що робота  $W$ , яку здійснюють ссавці вагою  $P$  і розміром  $L$  при одному циклі ходьби  $S$ , пропорційна  $L^4$ .

**Розв'язання.** Робота при переміщенні тіла вагою  $P$  на відстань  $S$  визначається за відомою формулою:  $W = PS$ , тобто робота пропорційна добутку ваги і відстані:

$$W \propto PS.$$

Вага тіла пропорційна масі тіла. Маса, в свою чергу, пропорційна об'єму тіла, який пропорційний лінійному розміру в кубі. Математичний запис цього твердження має вигляд:

$$P \propto m \propto L^3.$$

Цикл ходьби (довжина подвійного кроку) пропорційний розміру тіла:

$$S \propto L.$$

В результаті маємо:

$$W \propto L^4.$$

**Приклад 2.** Швидкість теплових втрат ссавців залежить від площі поверхні тіла  $A$ . В той же час, швидкість метаболізму (телопродукції) пропорційна об'єму тіла  $V$ . Доведіть, що втрати тепла на одиницю об'єму у великих ссавців менше, ніж у дрібних.

**Розв'язання.** При лінійному розмірі тіла  $L$ , площа поверхні тіла  $A$  пропорційна  $L^2$ , об'єм тіла  $V$  пропорційний  $L^3$ , а відношення поверхні  $A$  до об'єму  $V$  пропорційне  $L^{-1}$ :

$$A \propto L^2; \quad V \propto L^3; \quad \frac{A}{V} \propto \frac{1}{L}.$$

Аналізуючи отримане рівняння можна зробити наступні висновки: чим більше  $L$ , тим менше відношення площі поверхні тіла  $A$  до його об'єму  $V$  і тим менше тепловіддача. Тому, з точки зору теорії масштабування, в холодному кліматі, коли втрати тепла можуть бути фатальними, великий ссавець знаходитиметься у більш комфортному тепловому режимі.

**Приклад 3.** Доведіть, що для ссавця розміром  $L$ , максимальна робота м'яза  $W_M$  пропорційна  $L^3$ .

**Розв'язання.** Максимальна робота м'яза дорівнює добутку сили  $F_M$ , що розвивається м'язом, на довжину його скорочення  $l$ , тобто:

$$W_M \propto F_M l.$$

Довжина скорочення  $l$  пропорційна довжині м'яза, яка, в свою чергу, пропорційна розміру ссавця  $L$ :

$$l \propto L.$$

Сила м'яза  $F_M$  пропорційна поперечному перерізу м'яза, який, в свою чергу, пропорційний  $L^2$ :

$$F_M \propto L^2.$$

З урахуванням вищесказаного маємо:

$$W_M \propto L^3.$$

**Приклад 4.** Кістки кінцівок великих ссавців товщі за кістки кінцівок дрібних ссавців у зв'язку з їх більшою вагою, в той час як густина і допустиме напруження на стиск кісткової тканини, майже, однакові для усіх ссавців. Знайти алометричну залежність між відношенням діаметру кістки кінцівки до її довжини та масою тварини.

**Розв'язання.** Оскільки площа поперечного перерізу  $A$  кістки кінцівки пропорційна квадрату діаметру кістки  $d_{boun}$ , можемо записати:

$$A \propto d_{boun}^2;$$

$$d_{boun}^2 \propto m \propto V \propto L^3 \rightarrow d_{boun} \propto L^{3/2}.$$

Довжина кістки кінцівки  $l_{boun}$  пропорційна розміру тіла  $L$ :

$$l_{boun} \propto L;$$

$$\frac{d_{boun}}{l_{boun}} \propto \frac{L^{3/2}}{L} \rightarrow \frac{d_{boun}}{l_{boun}} \propto L^{1/2};$$

$$m_B \propto L^3 \rightarrow m_B^{1/3} \propto L \rightarrow m_B^{1/6} \propto L^{1/2} \rightarrow L^{1/2} \propto m_B^{1/6};$$

$$\frac{d_{boun}}{l_{boun}} \propto m_B^{1/6}.$$

З отриманої формули виходить, що у менших ссавців кінцівки мають бути тоншими. Отриманий результат доводить відсутність прямо пропорційної залежності між розмірами кісток і масою тіла.

## КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення предмету «Біомедична механіка».
2. Перелічить об'єкти дослідження біомеханіки.
3. Який внесок учених у розвиток біомеханіки?
4. Дати визначення поняттям «загальний центр мас», «загальний центр ваги». Чим вони відрізняються?
5. Поясніть, який із суб'єктів має меншу щільність тіла - високий і худий чи невисокий і повний?
6. Пояснити суть алометричної залежності.
7. В чому полягає принцип масштабування, з якою метою його використовують?
8. Вкажіть розмірність роботи, тиску, прискорення, об'ємної витрати рідини, модуля пружності, густини, динамічної в'язкості, механічної роботи, механічного напруження).
9. Вважаючи, що робота дихальної системи наземної тварини пропорційна величині поверхні тіла, доведіть нежиттєздатність великих видів цієї тварини в земних умовах.
10. Клітина отримує поживні речовини і кисень через поверхню мембрани, а споживає їх в усьому своєму об'ємі. Як, з точки зору теорії масштабування, обмежене постачання киснем і поживними речовинами вплине на розмір клітин?

## ЛЕКЦІЯ 2

### МЕХАНІКА ПРУЖНИХ БІОЛОГІЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

#### Основні види деформацій біологічних об'єктів

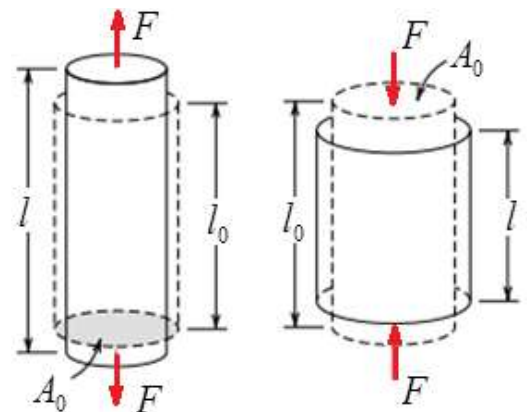
Під деформаціями розуміють будь-які зміни розмірів або форми тіла. Розрізняють пружні та пластичні деформації. Пружні – це деформації, які зникають при розвантаженні тіла. Пластичні – такі, що залишаються після розвантаження. Деформація біологічних матеріалів може бути наслідком: дії зовнішніх сил; перетворень, пов'язаних зі зміною об'єму; теплового розширення, вікових змін тощо.

Якщо зовнішні сили не перевищують деякої величини, званої межею пружності матеріалу, то виникаючі деформації будуть пружними.

Пружність – здатність матеріалів відновлювати свою форму та розміри при розвантаженні. Види деформації, яким піддаються біологічні тканини: розтяг-стиск, зсув, кручення, згинання.

#### Закон Гука при розтягу-стиску

Деформація розтягу-стиску виникає, коли до стержня з початковою довжиною  $l_0$  уздовж його осі прикладені протилежно спрямовані сили  $F$ . При цьому відбувається переміщення перерізів уздовж осі стержня, який при розтягуванні видовжується на величину  $\Delta l$ , а при стискуванні коротшає на  $\Delta l$ . Величина  $\Delta l$  називається абсолютною поздовжньою деформацією. Відносна поздовжня деформація (далі - деформація) дорівнює:



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.1)$$

При пружній деформації осового розтягу-стиску, має місце залежність, яку називають законом Гука:

$$F = k\Delta x,$$

де  $k$  - коефіцієнт жорсткості пружного тіла залежить як від властивостей матеріалу, так і від розмірів пружного тіла.

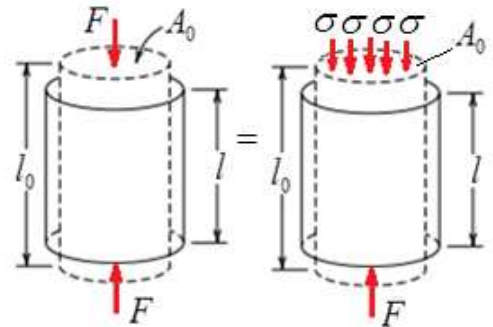
Закон Гука для пружного стержня, після ряду перетворень, можна представити в наступному вигляді (2.2):

$$F = k\Delta x = k(l - l_0) = k\Delta l; \quad F = \sigma A_0;$$

$$k\Delta l = \sigma A_0;$$

$$\sigma = \frac{k\Delta l}{A_0} = \frac{k\Delta l}{A_0} \cdot \frac{l_0}{l_0} = \frac{kl_0}{A_0} \varepsilon;$$

$$\sigma = E\varepsilon,$$



(2.2)

де  $\sigma$  – нормальне напруження;  $A_0$  – початкова площа поперечного перерізу зразка;  $E$  – коефіцієнт пропорційності, званий модулем поздовжньої пружності, або модулем пружності першого роду, або модулем Юнга.

Модуль Юнга  $E$ , на відміну від коефіцієнта жорсткості  $k$ , залежить тільки від властивостей матеріалу:

$$E = \frac{kl_0}{A_0}. \quad (2.3)$$

Модуль Юнга – одна з фізичних констант матеріалу. Вимірюється  $E$  в одиницях напруження. Для однорідного та ізотропного матеріалу  $E = const$ .

При паралельному з'єднанні  $n$  пружних тіл з жорсткостями  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ , жорсткість системи дорівнює сумі:

$$k = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n.$$

При послідовному з'єднанні  $n$  пружних тіл з жорсткостями  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ , загальна жорсткість визначається з рівняння:

$$k^{-1} = k_1^{-1} + k_2^{-1} + k_3^{-1} + \dots + k_n^{-1}.$$

Розтяг або стиск супроводжуються зміною поперечних розмірів. Відношення відносної поперечної деформації до відносної поздовжньої деформації за абсолютною величиною, в межах дії закону Гука, називається коефіцієнтом Пуассона  $\mu$ . Для різних матеріалів коефіцієнтом Пуассона знаходиться в межах  $0 \leq \mu \leq 0,5$ .

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0}; \quad \varepsilon_{\text{попер}} = -\mu \varepsilon_{\text{позд}}; \quad \mu = \left| \frac{\varepsilon_{\text{попер}}}{\varepsilon_{\text{позд}}} \right|. \quad (2.4)$$

### Зміна об'єму при пружній деформації

Пружна деформація супроводжується зміною об'єму. Припустимо, що об'єм зразка у формі паралелепіпеда до деформації складав:

$$V_0 = abc.$$

Після деформації розміри зразка змінилися і відповідно склали:

$$a + \Delta a, \quad b + \Delta b, \quad c + \Delta c.$$

Визначимо об'єм паралелепіпеда  $V$  після деформації, для чого проведемо наступні послідовні перетворення:

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \Delta V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c); \\ \frac{V_0 + \Delta V}{V_0} &= \frac{(a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c)}{abc} = \frac{(a + \Delta a)}{a} \cdot \frac{(b + \Delta b)}{b} \cdot \frac{(c + \Delta c)}{c}; \\ 1 + \frac{\Delta V}{V_0} &= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3); \\ \varepsilon_V &= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1. \end{aligned}$$

Об'ємна деформація дорівнює:

$$\varepsilon_V = \left( \begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 & & & & \end{array} \right) - 1;$$

$$\varepsilon_V \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (2.5)$$

Об'ємну деформацію можна визначити інакше, а саме:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V}{V_0} - 1;$$

$$V = V_0 (\varepsilon_V + 1). \quad (2.6)$$

Якщо прийняти, що  $\varepsilon_1$  - поздовжня деформація, отримаємо наступні залежності для поперечних і об'ємних деформацій:

$$\varepsilon_2 = -\mu\varepsilon_1; \quad \varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1. \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 - \mu\varepsilon_1 - \mu\varepsilon_1 = \varepsilon_1 (1 - 2\mu) = \frac{\sigma_1}{E} (1 - 2\mu). \quad (2.8)$$

### Потенціальна енергія деформації при розтягу-стиску

Деформоване тіло має запас потенціальної енергії, яка називається пружною енергією, і може здійснювати роботу. Пружна енергія дорівнює роботі сил, що витрачені на деформацію тіла, за умови, що його кінетична енергія не змінюється.

Потенціальна енергія розтягнутого стержня визначається за формулою:

$$U = \frac{F\Delta l}{2}. \quad (2.9)$$

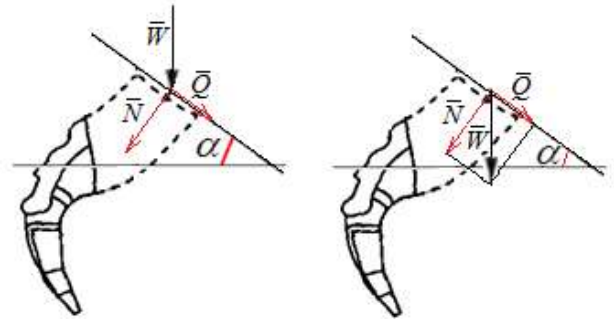
Питома потенціальна енергія пружної деформації (щільність потенціальної енергії):

$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{F\Delta l}{2V_0} = \frac{F\Delta l}{2A_0l_0} = \frac{1}{2} \varepsilon\sigma = \frac{1}{2} \varepsilon^2 E = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (2.10)$$

де  $V_0$  – початковий об'єм стержня.

## Деформація при зсуві

Зсувом називається вид деформації, при якому в поперечному перерізі, наприклад, хребта виникають поперечні сили  $Q$ , які далі будемо називати зсувними.



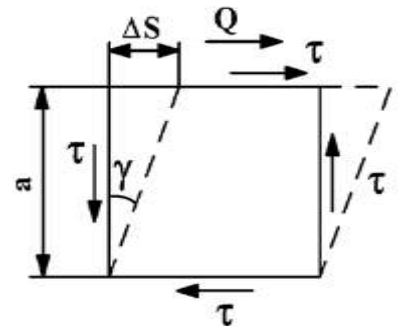
Зсув, як окремий вид деформації, в реальних умовах отримати важко, оскільки деформація зсуву, як правило, супроводжується іншими видами деформацій. Зсувна сила  $Q$  викликає появу дотичних напружень:

$$Q = \int_A \tau dA. \quad (2.11)$$

Якщо дотичні напруження рівномірно розподілені по перерізу площею  $A$ , маємо:

$$Q = \tau A \rightarrow \tau = \frac{Q}{A}. \quad (2.12)$$

Розглянемо окремий випадок зсуву, при якому на чотирьох гранях виділеного прямокутного елемента виникають тільки дотичні напруження. Такий напружений стан називається чистим зсувом. Під дією зсувної сили  $Q$  верхня грань елемента зрушується паралельно нижній на деяку величину



$\Delta S$ , яку називають абсолютним зсувом. Елемент перекошується, прямі кути змінюються на кут  $\gamma$ . Цей кут  $\gamma$  називається відносним зсувом або кутом зсуву. При пружних деформаціях, внаслідок незначних розмірів кута  $\gamma$ , відносний зсув дорівнює:

$$\gamma = \text{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (2.13)$$

Відносний зсув є кутовою деформацією, що характеризує перекіс елемента.

### Закон Гука при чистому зсуві

В межах пружності між кутом зсуву  $\gamma$  і дотичним напруженням існує лінійна залежність, яка носить назву закону Гука при зсуві:

$$\tau = \gamma G, \quad (2.14)$$

де  $G$  – модуль пружності при зсуві, або модуль пружності 2-го роду.

Підставивши у формулу (2.14) дотичне напруження  $\tau$  за формулою (2.12) і кут зсуву  $\gamma$  за формулою (2.13) одержимо:

$$\tau = \gamma G \rightarrow \frac{Q}{A} = \frac{\Delta S}{a} G \rightarrow \Delta S = \frac{Qa}{AG}. \quad (2.15)$$

Формула (2.15) є законом Гука при зсуві в абсолютній формі, яка показує, що абсолютний зсув  $\Delta S$  прямо пропорційний зсувній силі  $Q$  і відстані  $a$  між зрушуваними гранями та обернено пропорційний площі зсуву  $A$ . Доданок  $AG$  називають жорсткістю при зсуві.

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності  $G$  при зсуві і модулем пружності  $E$  при розтягу-стиску існує залежність:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2.16)$$

Потенціальна енергія деформації при чистому зсуві:

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta S = \frac{1}{2} Q \frac{Qa}{AG} = \frac{Q^2 a}{2AG}. \quad (2.17)$$

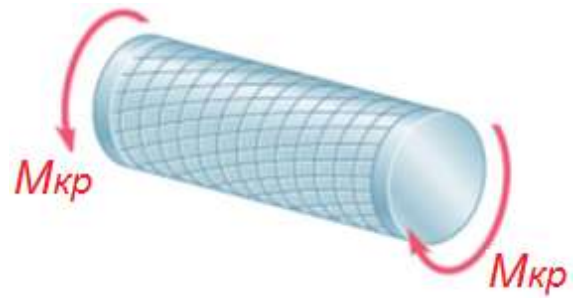
Питома потенціальна енергія (щільність потенціальної енергії) при чистому зсуві дорівнює:

$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{U}{Aa} = \frac{Q^2}{2A^2 G} = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (2.18)$$

де  $V_0$  – початковий об'єм елемента.

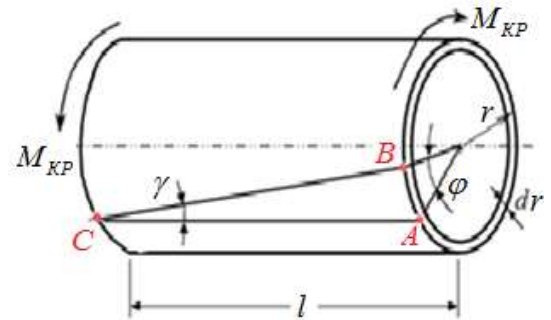
## Деформація при крученні

Кручення – це вид деформації, при якому в поперечних перерізах об'єкта виникають крутні моменти, наприклад, у шийному відділі хребта.



В ході експериментів встановлено, що при скручуванні моментом  $M_{кр}$  твердого тіла циліндричної форми, перерізи повертаються один відносно одного на кут закручування  $\varphi$ , при цьому відстань між перерізами, практично, не змінюється. Тобто, кожен переріз циліндра піддається чистому зсуву.

На рисунку представлений фрагмент циліндра між двома перерізами. При повороті правого перерізу на кут  $\varphi$  точка А зсувається в точку В. Розглянемо трикутник АВС, в якому:



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{AB}{CA} = \frac{r\varphi}{l}. \quad (2.19)$$

При пружних деформаціях, внаслідок незначних розмірів кута  $\gamma$ , має місце залежність:

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l} = r\theta, \quad (2.20)$$

де  $\gamma$  – кут зсуву (відносний зсув, або кутова деформація);

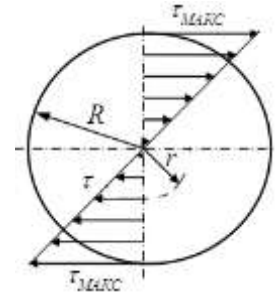
$\varphi$  – кут закручування - кут повороту одного перерізу відносно іншого, які знаходиться на відстані  $l$ ;

$\varphi / l = \theta$  - відносний кут закручування.

Підставивши кут зсуву  $\gamma$  при крученні (2.20) у формулу закону Гука при зсуві (2.14), одержимо:

$$\tau = \gamma G \rightarrow \tau = \frac{r\varphi}{l} G. \quad (2.21)$$

З формули (2.21) видно, що дотичні напруження  $\tau$  прямо пропорційні відстані  $r$  від центра перерізу і досягають максимального значення на поверхні тіла при  $r = R$ :



$$\tau_{MAX} = \frac{R\varphi}{l} G.$$

Крутний момент  $M_{KP}$  в перерізі циліндра визначається за формулою:

$$M_{KP} = G I_P \frac{\varphi}{l}. \quad (2.22)$$

З формули (2.22) знайдемо відносний кут закручування:

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{M_{KP}}{G I_P}. \quad (2.23)$$

Підставивши (2.23) у формулу (2.21), одержимо:

$$\tau = \frac{M_{KP} r}{I_P}. \quad (2.24)$$

Максимальна напруження кручення діє в точках перерізу при  $r = R$ :

$$\tau_{MAX} = \frac{M_{KP} R}{I_P}, \quad (2.25)$$

де  $I_P$  - полярний момент інерції перерізу.

Для суцільного циліндричного тіла діаметром  $d$ :

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Для трубчастого тіла:

$$I_P = \frac{\pi(d_{ЗОВН}^4 - d_{ВН}^4)}{32} = \frac{\pi d_{ЗОВН}^4}{32} (1 - \alpha^4).$$

**Приклад 1.** Зразок кортикальної кісткової тканини довжиною 15 мм, товщиною 12 мм і шириною 4 мм під дією сили розтягу 480 Н подовжився на  $7,5 \cdot 10^{-4}$  мм. Визначити модулі пружності 1 і 2 роду кісткової тканини. Коефіцієнт Пуассона прийняти рівним  $\mu = 0,25$ .

**Розв'язання.** Нормальне напруження, що виникає в поперечних перерізах зразка, дорівнює:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} = \frac{F}{bh} = \frac{480}{(12 \cdot 10^{-3})(4 \cdot 10^{-3})} = 10 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10 \text{ МПа}.$$

Відносну поздовжню деформацію знайдемо за формулою (2.1):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{7,5 \cdot 10^{-4} \text{ мм}}{15 \text{ мм}} = 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

Модуль пружності 1 роду визначимо, використовуючи закон Гука для розтягу-стиску за формулою (2.2):

$$\sigma = E\varepsilon \quad \rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{10^7}{0,5 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} = 200 \text{ ГПа}.$$

Модуль пружності 2-ого роду знайдемо за формулою (2.16):

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{200}{2(1 + 0,25)} = 80 \text{ ГПа}.$$

*Відповідь:*  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $G = 80 \text{ ГПа}$ .

**Приклад 2.** Визначити, який об'єм матиме циліндричний зразок пружного біологічного матеріалу, що піддається розтягу при відносній поздовжній деформації 5 %, первинному об'ємі зразка  $105 \text{ мм}^3$  і коефіцієнті Пуассона 0,3.

**Розв'язання.** Будемо вважати, що розтяг відбувається вздовж осі x. Деформація в напрямку осі x становить  $\varepsilon_x = 5 \% = 0,05$ . Поперечні деформації, тобто деформації вздовж осей y і z, згідно з формулами (2.7), дорівнюють:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x.$$

Знайдемо об'ємну деформацію зразка за формулою (2.8):

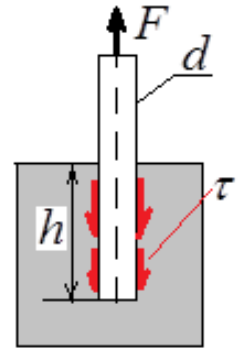
$$\varepsilon_v = \varepsilon_x (1 - 2\mu) = 0,05(1 - 2 \cdot 0,3) = 0,02.$$

Об'єм, який матиме циліндричний зразок пружного біологічного матеріалу, що піддається розтягу при заданих умовах, визначимо за формулою (2.6):

$$V = V_0(\varepsilon_v + 1) = 105(0,02 + 1) = 107,1 \text{ мм}^3.$$

*Відповідь:*  $V = 107,1 \text{ мм}^3$ .

**Приклад 3.** Циліндричний стержень діаметром  $d$  встромлений у тіло на глибину  $h$ . Намагаючись витягнути стержень, до нього прикладають поздовжню силу  $F$ . Визначити напруження зсуву, що виникає на поверхні контакту стержня з оточуючими тканинами.



**Розв'язання.** Система знаходиться в рівновазі, доки прикладена до стержня сила  $F$  не зрівняється із зсувною силою  $Q$ , що діє на бічну поверхню стержня зі сторони оточуючих тканин. Тобто, має виконуватися умова:

$$F - Q = 0; \quad F - \tau S = 0,$$

де  $\tau$  – напруження зсуву, що діє вздовж бічної поверхні стержня;

$S$  – площа бічної поверхні контакту стержня з оточуючими тканинами.

Напруження зсуву, що виникає на поверхні контакту стержня з оточуючими тканинами при прикладанні сили  $F$ , дорівнює:

$$\tau = \frac{F}{S} = \frac{\sigma A_0}{\pi d h} = \frac{\sigma \pi d^2}{4 \pi d h} = \frac{\sigma d}{4 h}.$$

*Відповідь:*  $\tau = \frac{\sigma d}{4 h}$ .

## КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Сформулюйте та запишіть закон Гука при розтягу-стиску.
2. Поясніть різницю між абсолютною і відносною деформаціями. Назвіть їх розмірності.
3. Які властивості матеріалу характеризують коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга?
4. Наведіть залежність між модулем Юнга та жорсткістю. Якому з показників надають перевагу і чому?
5. Який напружений стан називається чистим зсувом? Наведіть приклади. Запишіть закон Гука для зсуву.
6. Який вид деформації називається крученням? Яка величина є кількісною характеристикою деформації кручення?
7. Як визначаються дотичні напруження в поперечному перерізі тіла при крученні? Як розподіляються ці напруження по площі поперечного перерізу?

## ЛЕКЦІЯ 3

### ОСНОВИ РЕОЛОГІЇ

#### Ідеалізовані моделі

Біологічні тканини проявляють пружні, в'язкі та пластичні властивості одночасно. Це пов'язано з тим, що тверді біологічні тканини містять значну кількість рідини, а м'які та рідкі тканини - пружні волокна і тверді частки. Дослідження механічних властивостей твердих тіл і рідин показує, що існує спільність законів, що описують механічну поведінку тіл різної природи.

Науку, що формулює правила і закони узагальненого розгляду механічної поведінки твердо- і рідиноподібних тіл, називають *реологією*. Основним методом реології є розгляд механічних властивостей на ідеалізованих моделях (рис. 3.1), поведінка яких описується невеликим числом параметрів. Розгляд реологічних властивостей починають з трьох простих моделей механічної поведінки тіла, а саме пружного, в'язкого і пластичного.

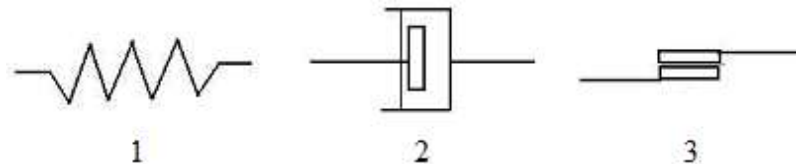


Рис. 3.1. Ідеалізовані моделі механічної поведінки тіла: 1 – пружного; 2 – в'язкого; 3 – пластичного

#### *Ідеально-пружне тіло Гука*

Пружна поведінка характеризується прямою залежністю напруження від деформації і описується законом Гука:

$$\text{при розтягу: } \sigma = E\varepsilon; \quad \text{при зсуві: } \tau = G\gamma. \quad (3.1)$$

Характерною особливістю ідеалізованої пружної поведінки є повна механічна і термодинамічна **зворотність**: при знятті навантаження миттєво відновлюється первинна форма тіла і відсутня дисипація енергії.

Енергія, що накопичується одиницею об'єму тіла при пружній деформації, визначається залежностями:

$$\text{при розтягу: } u = \frac{\varepsilon\sigma}{2}; \quad \text{при зсуві: } u = \frac{\gamma\tau}{2}. \quad (3.2)$$

Моделлю пружної поведінки служить пружина, деформація якої дорівнює: при розтягу:  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ ; при зсуві:  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ . (3.3)

Після зняття напруження, тобто при  $\sigma = 0$  або  $\tau = 0$ , пружина миттєво відновлює початкову форму і деформація стає рівною 0.

Швидкість пружної деформації складає:

$$\text{при розтягу: } \frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = \frac{d\sigma}{Edt}; \quad \text{при зсуві: } \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = \frac{d\tau}{Gdt}. \quad (3.4)$$

#### *Ідеально-в'язка рідина Ньютона*

Властивість рідини чинити опір переміщенню однієї її частини відносно іншої називається в'язкістю. В'язкість  $\eta$  - міра опору течії. Вона є основною властивістю для рідких тіл.

Поведінка ідеально-в'язкої рідини характеризується прямою залежністю напруження від швидкості деформації і описується законом Ньютона:

$$\text{при розтягу: } \sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \dot{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}; \quad (3.5)$$

$$\text{при зсуві: } \tau = \eta \frac{d\gamma}{dt} = \eta \dot{\gamma} \quad \rightarrow \quad \dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta}. \quad (3.6)$$

Після зняття напруження, тобто при  $\sigma = 0$  або  $\tau = 0$ , деформація в'язкого зразка не зникає і його початкова форма не відновлюється:


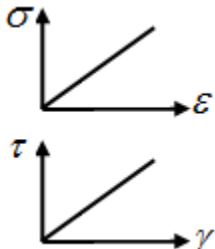
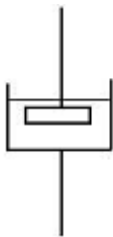
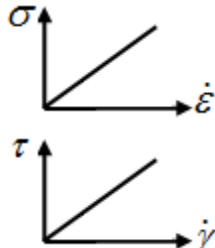
$$\sigma = 0 \rightarrow \eta \dot{\varepsilon} = 0; \quad \eta \neq 0 \rightarrow \dot{\varepsilon} = 0 \rightarrow \varepsilon = const.$$


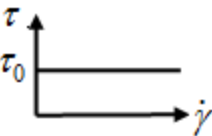
Механічною моделлю ідеально в'язкої рідині являється демпфер (тіло Ньютона) - трубка, заповнена ньютонівською в'язкою рідиною, в якій рухається поршень.

### Ідеальне пластичне тіло Сен-Венана

Пластичність - здатність тіла під дією зовнішніх сил незворотно деформуватися без порушення суцільності. Для пластичних тіл при напруженнях менших за межу плинності  $\tau_0$  (межу текучості), швидкість деформації дорівнює нулю, тобто:  $\dot{\gamma} = 0$  при  $\tau < \tau_0$ . При досягненні межі плинності, тобто при  $\tau = \tau_0$  починається пластична течія, яка не вимагає подальшого підвищення напруження. Пластична течія, як і в'язка, механічно і термодинамічно незворотна. Швидкість дисипації енергії при пластичній течії пропорційна швидкості деформації. Така залежність характерна для сухого тертя  $F_{TP} = fN$ . Саме тому, модель ідеально пластичного тіла - тіло Сен-Венана зображується у вигляді пари тертя. Отже, тіло Сен-Венана не деформується при напруженні нижче за межу плинності  $\tau_0$ , а після її перевищення необмежено деформується. Межа плинності є реологічною константою елемента пластичності. Стисла інформація про реологічні моделі Гука, Ньютона і Сен-Венана зведена до табл. 3.1.

Таблиця 3.1. Реологічні моделі простих ідеалізованих тіл

Реологічна модель	Схематичне зображення моделі	Графіки течії при розтягу і зсуві	Рівняння	Умовні позначення
Гука			$\sigma = E\varepsilon$ $\tau = G\gamma$	$\sigma, \tau$ - нормальне і дотичне напруження, Па; $\varepsilon, \gamma$ - лінійна і кутова деформації; $E, G$ - модулі пружності при лінійній і кутовій деформації, Па.
Ньютона			$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$ $\tau = \eta \dot{\gamma}$	$\dot{\varepsilon}$ - швидкість поздовжньої деформації, $c^{-1}$ ; $\dot{\gamma}$ - швидкість зсуву, $c^{-1}$ ; $\eta$ - в'язкість рідини при певному виді деформації, Па·с.

Сен-Венана			Течія відсутня при $\tau < \tau_0$ $\dot{\gamma} = 0$ . Починається пластична течія при $\tau = \tau_0$	$\tau_0$ – межа плинності при зсуві, Па.
------------	---	---	---	--

Три основні первинні тіла - пружне, в'язке і пластичне в різних поєднаннях і комбінаціях можуть моделювати деформаційні характеристики реальних біологічних матеріалів.

### Двоелементні реологічні моделі

**Модель Максвелла** (модель пружно-в'язкого тіла) є послідовним з'єднанням пружного і в'язкого елементів, тобто послідовним з'єднанням моделі Гука і моделі Ньютона. Будемо вважати, що модель піддається розтягу.

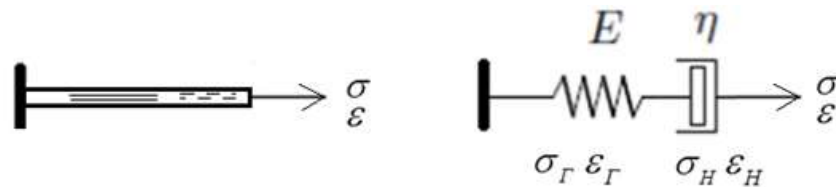


Рис. 3.2. Модель Максвелла

При послідовному з'єднанні:

- напруження на елементах Гука і Ньютона однакові:

$$\sigma = \sigma_G = \sigma_H; \quad (3.7)$$

- загальна деформація дорівнює сумі деформацій елементів:

$$\varepsilon = \varepsilon_G + \varepsilon_H; \quad (3.8)$$

- загальна швидкість деформація дорівнює сумі швидкостей деформацій:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_G}{dt} + \frac{d\varepsilon_H}{dt}. \quad (3.9)$$

Після підстановки в рівняння (3.9) швидкості деформацій пружного (3.4) і в'язкого (3.5) елементів, модель Максвелла набуває вигляду:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{E dt} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (3.10)$$

### Модель Максвелла в ізотонічному режимі

Припустимо, що в деякий момент часу  $t=0$  до тіла прикладається напруження  $\sigma = \sigma_0 = const$ , яке підтримується постійним, що відповідає ізотонічному режиму. В цьому випадку, рівняння (3.10) набуває вигляду:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta} \rightarrow d\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} dt. \quad (3.11)$$

Інтегруючи рівняння (3.11) від початкового моменту часу  $t=0$  і відповідної йому деформації  $\varepsilon_0$  до поточних значень  $t$  і  $\varepsilon$ , отримаємо лінійну залежність деформації від часу при фіксованому напруженні:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{\eta} t \rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t. \quad (3.12)$$

Крива зміни деформації від часу представлена на рис. 3.2.

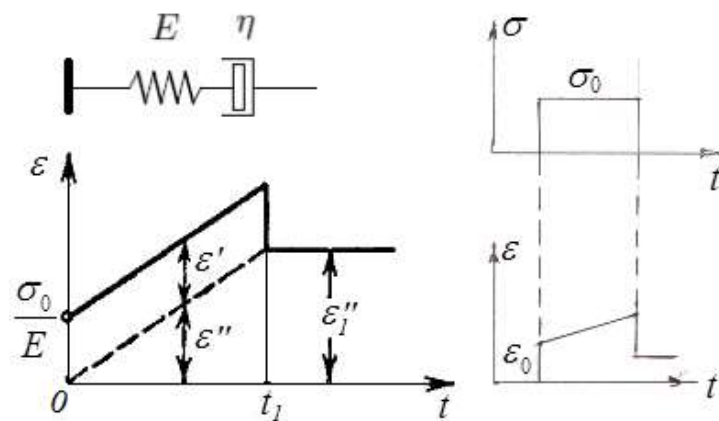


Рис. 3.2. Деформація моделі Максвелла в ізотонічному режимі ( $\sigma_0 = const$ )

Як видно з рис. 3.2, при постійному напруженні спостерігається лінійне зростання деформації. Це явище називається повзучістю. Повзучість - здатність матеріалу деформуватися при напруженні, що не змінюється. При випробуваннях на повзучість прикладають постійну розтягуючу силу і

вимірюють деформацію, як функцію часу. При знятті навантаження в деякий момент часу  $t_1$ , деформація не зникає, а набуває постійного залишкового значення  $\varepsilon_1''$ . Модель Максвелла відрізняється від ньютонівської рідини наявністю пружної реакції на дію (вертикальні ділянки на графіку  $\varepsilon = f(t)$ ). Представлений графік  $\varepsilon = f(t)$  на часовій ділянці  $0 < t < t_1$  описує сталу повзучість, а на ділянці  $t > t_1$  незворотну деформацію (рис. 3.2).

### *Модель Максвелла в ізометричному режимі*

Припустимо, що в деякий момент часу  $t=0$ , тіло миттєво піддається деформації  $\varepsilon_0$ , яка підтримується постійною  $\varepsilon_0 = const$ , тобто реалізується ізометричний режим. В цьому випадку рівняння (3.10) набуває вигляду:

$$0 = \frac{d\sigma}{E dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} dt. \quad (3.13)$$

Інтегруючи рівняння (3.13) з початковою умовою  $\sigma = \sigma_0 = E\varepsilon_0$  при  $t=0$ ,

отримаємо: 
$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} \int_0^t dt; \quad \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = -\frac{E}{\eta} t; \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = e^{\left(-\frac{E}{\eta} t\right)};$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right), \quad (3.14)$$

де  $\theta = \eta / E$ .

Проаналізуємо рівняння (3.14):

при  $t=0$ :  $\sigma = \sigma_0$ ; при  $t=\theta$ :  $\sigma = \frac{\sigma_0}{e}$ ;

при  $t \rightarrow \infty$  напруження експоненціально убуває  $\sigma \rightarrow 0$ .

Явище, що характеризується зменшенням напруження при постійній (незмінній) деформації матеріалу, називається релаксацією напруження.

Величина  $\theta = \eta / E$  називається періодом (сталою) релаксації - визначає час, при якому початкове напруження  $\sigma_0$  зменшується в  $e$  разів. Швидкість релаксації тим більше, чим менше період релаксації.

Крива релаксації напруження для моделі Максвелла представлена на рис. 3.3. При фіксованій деформації  $\varepsilon_0 = const$  напруження з часом повільно знижується. Це відбувається за рахунок перерозподілу напруження усередині системи. Розтягнута пружина, скорочуючись, діє на в'язкий елемент, викликаючи рух і витягування поршня. При цьому, загальна деформація залишається незмінною, а напруження у пружині, по мірі того, як вона повертається до початкового стану, знижується.

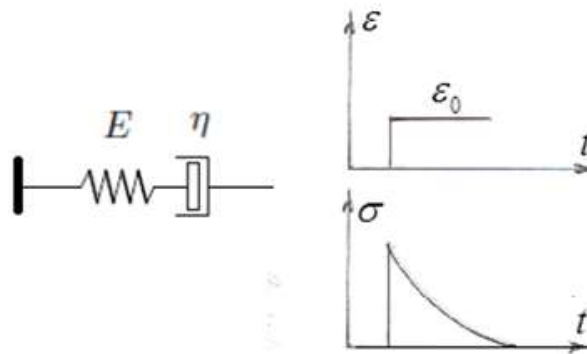


Рис. 3.3. Крива релаксації напруження для моделі Максвелла (ізометричний режим  $\varepsilon_0 = const$ )

### Модель в'язко-пружного тіла (модель Фойгта)

Модель Фойгта є паралельним з'єднанням пружного і в'язкого елементів. Будемо вважати, що модель піддається розтягу.

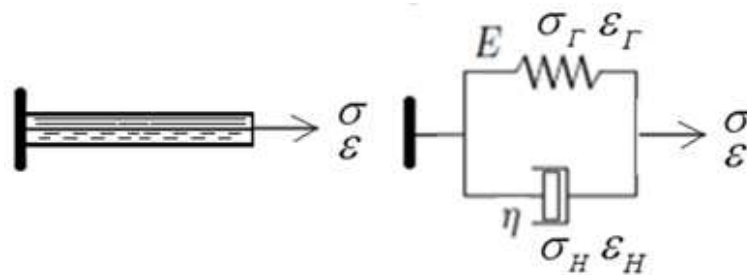


Рис. 3.4. Модель Фойгта

При паралельному з'єднанні:

- деформації елементів Гука і Ньютона однакові:

$$\varepsilon = \varepsilon_G = \varepsilon_H; \quad (3.15)$$

- загальне напруження дорівнює сумі напружень:

$$\sigma = \sigma_G + \sigma_H. \quad (3.16)$$

Рівняння (3.16), з урахуванням рівнянь (3.1) і (3.5), має вигляд:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (3.17)$$

#### Модель Фойгта в ізометричному режимі

При постійній деформації  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$  рівняння (3.17) набуває вигляду:

$$\sigma = E\varepsilon_0 = \text{const}. \quad (3.18)$$

Це означає, що напруження в моделі Фойгта при постійній деформації не змінюється, тобто відсутня релаксація напруження (рис. 3.4).

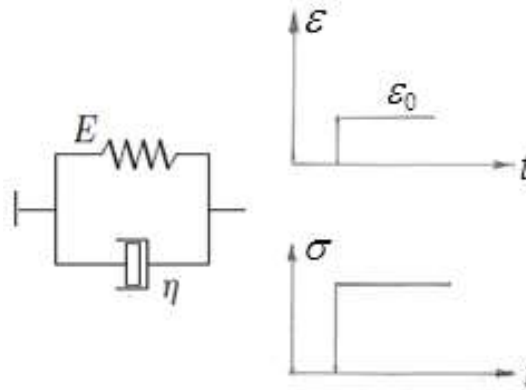


Рис. 3.4. Поведінка моделі Фойгта в ізометричному режимі ( $\varepsilon = \text{const}$ )

#### Модель Фойгта в ізотонічному режимі

Припустимо, що в момент  $t=0$  до тіла прикладається напруження  $\sigma = \sigma_0$ , яке надалі підтримується постійним. Розв'яжемо рівняння (3.17) за цих умов, використовуючи наступні перетворення:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}; & \frac{d\varepsilon}{\sigma_0 - E\varepsilon} &= \frac{dt}{\eta}; & \frac{d(-\varepsilon E)}{(\sigma_0 - \varepsilon E)} &= -\frac{E}{\eta} dt; \\ \frac{d(\sigma_0 - \varepsilon E)}{(\sigma_0 - \varepsilon E)} &= -\frac{E}{\eta} dt; & \int_0^\varepsilon \frac{d(\sigma_0 - \varepsilon E)}{\sigma_0 - \varepsilon E} &= -\frac{E}{\eta} \int_0^t dt; \\ \ln(\sigma_0 - \varepsilon E) - \ln \sigma_0 &= -\frac{E}{\eta} t; & \ln \frac{(\sigma_0 - \varepsilon E)}{\sigma_0} &= \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon E}{\sigma_0} \right) = -\frac{E}{\eta} t; \end{aligned}$$

$$1 - \frac{\varepsilon E}{\sigma_0} = \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right); \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right)\right] = \varepsilon_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right)\right].$$

Таким чином, деформація моделі Фойгта в ізотонічному режимі описуватися рівнянням:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right], \quad (3.19)$$

де  $T = \eta / E$ .

Проаналізуємо рівняння (3.19):

$$\text{при } t = 0: \quad \varepsilon(t) = 0;$$

$$\text{при } t = T: \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{1}{e}\right] = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{1}{2,7}\right] = 0,63\varepsilon_0; \quad \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0} = 0,63;$$

$$\text{при } t \rightarrow \infty \quad \varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}.$$

Величина  $T = \eta / E$  називається періодом запізнювання і визначає час, при якому відношення поточної деформації до максимальної складає 0,63. Якщо в момент часу  $t_1$  напруження зникає, то рівняння (3.17) набуває вигляду:

$$E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \quad (3.20)$$

Розв'язання рівняння (20) з умовою  $\varepsilon = \varepsilon_1$  при  $t = t_1$  дає наступний результат:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 \exp\left(-\frac{t-t_1}{T}\right). \quad (3.21)$$

В рівнянні (3.21) при  $t \rightarrow \infty$  деформація експоненціально наближується до нуля  $\varepsilon \rightarrow 0$ , тобто деформація є зворотною. Графік залежності деформації від часу для моделі Фойгта, що відповідає рівнянням (3.19) і (3.21), представлений на рис. 3.5.

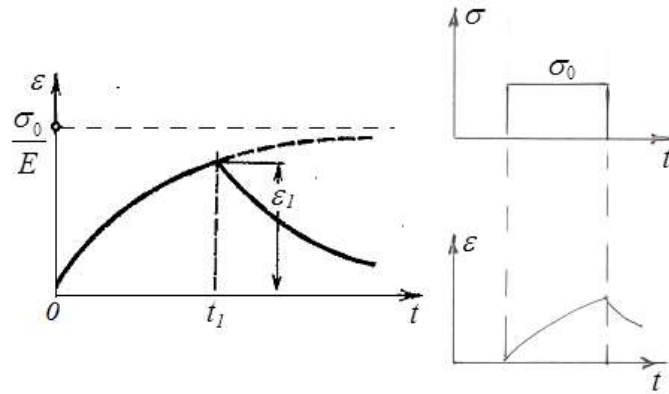


Рис. 3.5. Деформація моделі Фойгта в ізотонічному режимі ( $\sigma_0 = const$ )

При тривалому навантаженні модель Фойгта досягає максимальної деформації  $\varepsilon_{MAX} = \sigma_0 / E$ , яка визначається пружністю пружини, а після зняття навантаження відновлює початкову форму ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Моделі Максвелла і Фойгта демонструють правила розподілу напружень і деформацій при послідовному і паралельному з'єднаннях елементів реологічних схем.

### Модель пружно-пластичного тіла

Модель представляє собою послідовне з'єднання пружного і пластичного елементів (рис. 3.6). При невеликому напруженні це тіло веде як пружне, а при досягненні межі плинності  $\tau_0$  необмежено деформується.

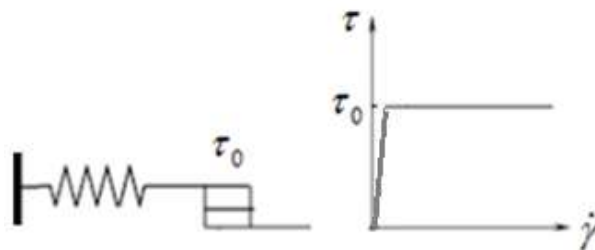


Рис. 3.6. Механічна модель пружно-пластичного тіла

### Модель в'язко-пластичного тіла

Модель, що представляє собою паралельне з'єднання елементів Ньютона і Сен-Венана (рис. 3.7), називається моделлю Шведова-Бінгама і описується рівнянням:

$$\tau = \tau_0 + \eta_{\text{пл}} \frac{d\gamma}{dt} = \tau_0 + \eta_{\text{пл}} \dot{\gamma}, \quad (3.22)$$

де  $\eta_{\text{пл}}$  - пластична в'язкість, дорівнює тангенсу кута нахилу кривої течії.

Крива течії при  $\dot{\gamma} = 0$  відсікає на осі напружень відрізок, рівний межі плинності  $\tau_0$ , величина якої характеризує пластичні властивості матеріалу, а нахил кривої течії до осі  $\dot{\gamma}$  - її рухливість.

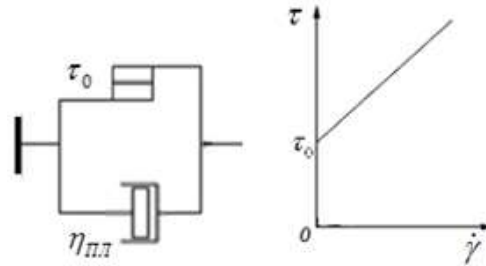


Рис. 3.7. Механічна модель в'язко-пластичного тіла (модель Шведова-Бінгама)

### Триелементні реологічні моделі

Як правило, властивості біологічних тканин задовільно описуються моделями з числом елементів більшим двох. Розглянемо найбільш часто використовувані триелементні моделі.

**Модель Зінера** (рис. 3.8) є послідовним з'єднанням пружного елемента Гука та елемента Фойгта.

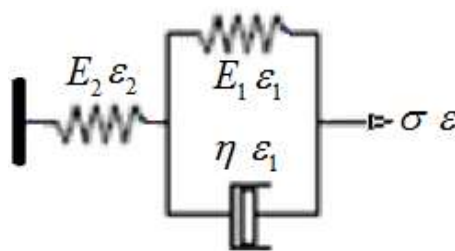


Рис. 3.8. Модель Зінера

При послідовному з'єднанні напруження на елементах Фойгта і Гука однакові, тобто:

$$\sigma = \sigma_\phi = \sigma_\Gamma.$$

На елементі Фойгта напруження дорівнює:

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1 + \eta \dot{\varepsilon}_1. \quad (3.23)$$

На елементі Гука напруження дорівнює:

$$\sigma = E_2 \varepsilon_2. \quad (3.24)$$

Загальна деформація дорівнює сумі деформацій елементів Фойгта і Гука:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (3.25)$$

де  $\varepsilon_1$  - деформація елемента Фойгта,  $\varepsilon_2$  - деформація елемента Гука.

Для отримання загального реологічного рівняння необхідно виключити проміжні величини  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . З цією метою рівняння (3.25) представимо в наступному вигляді:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2 \rightarrow \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_2.$$

Підставимо отримані значення  $\varepsilon_1, \dot{\varepsilon}_1$  в рівняння (3.23):

$$\sigma = E_1 (\varepsilon - \varepsilon_2) + \eta (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_2). \quad (3.26)$$

З рівняння (3.24) маємо:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E_2}; \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}}{E_2}.$$

Підставимо ці значення в рівняння (3.26):

$$\sigma = E_1 \left( \varepsilon - \frac{\sigma}{E_2} \right) + \eta \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_2} \right). \quad (3.27)$$

Отримане рівняння (3.27) встановлює залежність між напруженням, деформацією і швидкістю деформації композиційного біологічного матеріалу.

### Модель Кельвіна

Модель Кельвіна (рис. 3.9) – це паралельне з'єднання моделі Максвелла і пружного елемента Гука. Цю модель називають стандартною. Моделі Максвелла і Фойгта є окремими випадками моделі Кельвіна: за відсутності пружного елемента  $E_2$  - має місце модель Максвелла; за відсутності пружного елемента  $E_1$  - має місце модель Фойгта.

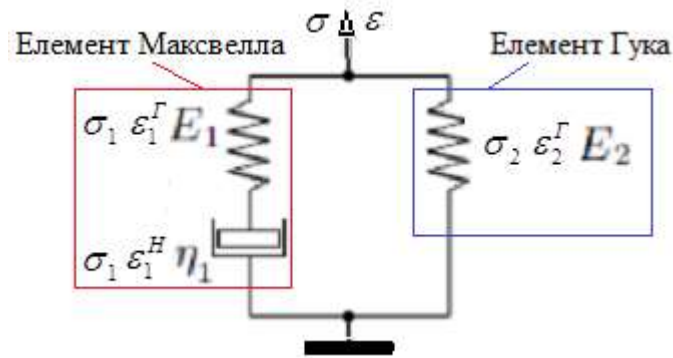


Рис. 3.9. Модель Кельвіна (стандартна)

Складемо систему рівнянь із врахуванням введених позначень напружень і деформацій (рис. 3.9).

При послідовному з'єднанні - напруження однакові, а загальна деформація дорівнює сумі деформацій:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E_1 \varepsilon_1^r = \eta_1 \dot{\varepsilon}_1^H; \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^r + \varepsilon_1^H.\end{aligned}$$

При паралельному з'єднанні елементів - загальне напруження дорівнює сумі напружень, а деформації елементів однакові:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 = \eta_1 \dot{\varepsilon}_1^H + E_2 \varepsilon; \\ \varepsilon &= \varepsilon_1^r + \varepsilon_1^H = \varepsilon_2^r.\end{aligned}$$

Проведемо наступні перетворення:

$$\varepsilon_1^H = \varepsilon - \varepsilon_1^r = \varepsilon - \frac{\sigma_1}{E_1} = \varepsilon - \frac{(\sigma - \sigma_2)}{E_1} = \varepsilon - \frac{(\sigma - E_2 \varepsilon)}{E_1}.$$

В результаті отримаємо:

$$\sigma = \eta_1 \left[ \dot{\varepsilon} - \frac{(\dot{\sigma} - E_2 \dot{\varepsilon})}{E_1} \right] + E_2 \varepsilon. \quad (3.28)$$

Модель Кельвіна більш точно описує поведінку біологічного матеріалу. Тест на повзучість деформації і релаксацію напруження для моделі Кельвіна представлені на рис. 3.10.

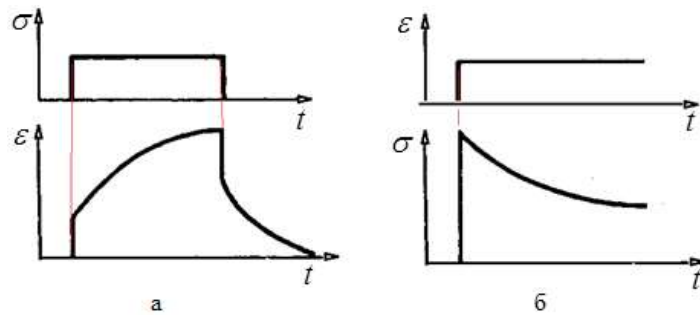


Рис. 3.10. Тест на повзучість і релаксацію для моделі Кельвіна

### Дослідження в'язко-пружних властивостей компактної кістки

Для дослідження в'язко-пружних властивостей компактної кістки використовують триелементні моделі Зінера і Кельвіна (рис. 3.8, рис. 3.9) і відповідні їм реологічні рівняння.

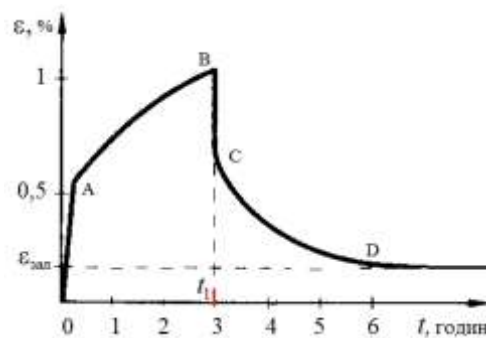


Рис.3.11. Тест на повзучість для моделі Зінера

В'язко-пружні властивості біологічних матеріалів проявляються в таких явищах як: повзучість, релаксація, гістерезис.

1. Повзучість - здатність матеріалів деформуватися при постійному напруженні. При випробуваннях на повзучість прикладають постійну розтягуючу силу і вимірюють деформацію системи (ізотонічний режим), як функцію часу.

2. Релаксація - зменшення напруження в матеріалі при постійній деформації. При випробуваннях на релаксацію при фіксованій довжині розтягнутої системи вимірюють напруження в системі, що змінюється в часі (ізометричний режим).

3. Гістерезис (рис. 3.12) - неспівпадіння деформацій матеріалу, що викликані однаковим за величиною напруженням при навантаженні і розвантаженні. Якщо до тіла спочатку прикладено наростаючу силу, яку потім змінено на спадаючу силу, то деформації, викликані однаковою за величиною силою в першому і другому випадках, не співпадають (цикл навантаження - розвантаження не є зворотним). При знятті навантаження тіло повертає тільки частину енергії, яка була витрачена при прикладанні сили.

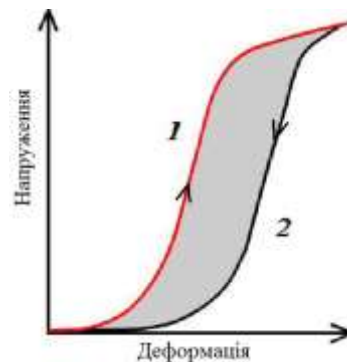


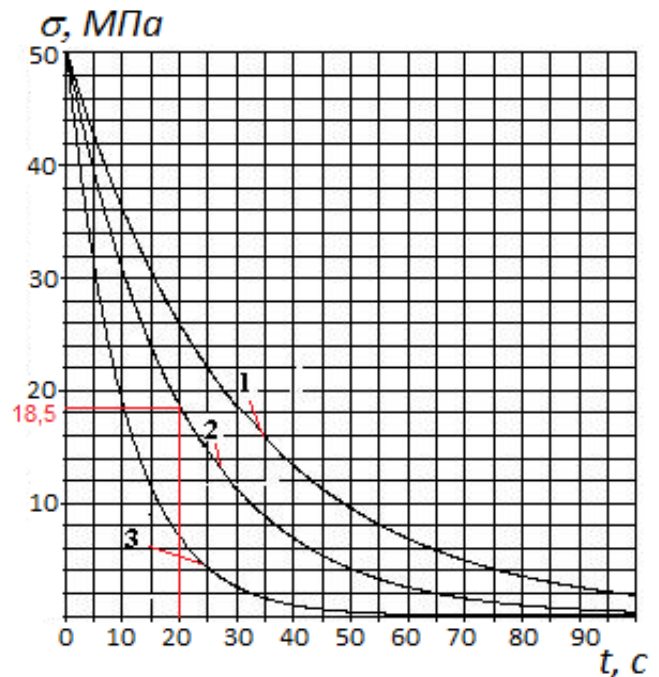
Рис. 3.12. Залежність «деформація – напруження» при навантаженні (1) і розвантаженні (2) біологічного матеріалу

**Приклад 1.** На рисунку представлено криві релаксації напруження для трьох пружно-в'язких матеріалів. Визначити період релаксації другого матеріалу.

**Розв'язання.** В моделі Максвелла в ізометричному режимі має місце залежність:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right),$$

де  $\theta = \frac{\eta}{E}$  - період релаксації.



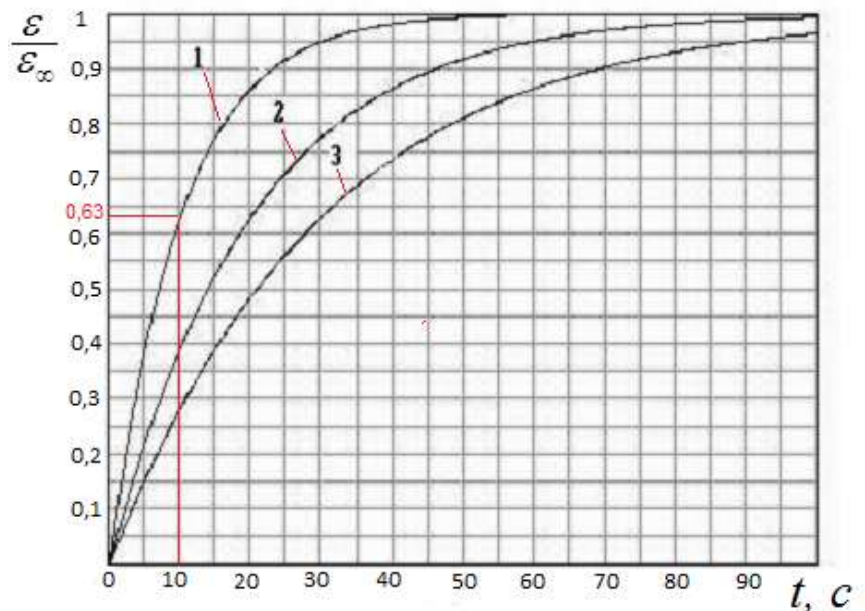
Період релаксації – це час, впродовж якого початкове напруження зменшується в  $e = 2,7$  разів. Початкове напруження для трьох пружно-в'язких матеріалів однакове і дорівнює:  $\sigma_0 = 50$  МПа. Визначимо напруження, що відповідає періоду релаксації:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{e} = \frac{50}{2,7} = 18,5 \text{ МПа.}$$

З точки, що відповідає напруженню 18,5 МПа на осі напружень, проведемо перпендикуляр до пересічення з кривою релаксації другого матеріалу. Точці пересічення відповідає час 20 с. Тобто, період релаксації  $\theta$  складає 20 с.

*Відповідь:*  $\theta = 20$  с.

**Приклад 2.** На рисунку представлено криві повзучості різних біологічних матеріалів. Визначити модуль пружності першого матеріалу, коефіцієнт в'язкості якого 40 Па·с.



**Розв'язання.** В

моделі Фойгта в ізотонічному режимі (при сталому напруженні) має місце залежність:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right] = \varepsilon_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right]; \quad \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0} = 1 - e^{-\frac{t}{T}},$$

де  $T = \frac{\eta}{E}$  - період запізнювання.

$$\text{При } t = T: \quad \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} = 0,63.$$

З точки, що відповідає 0,63 на осі  $\varepsilon(t) / \varepsilon_0$ , проведемо перпендикуляр до пересічення з кривою повзучості першого матеріалу. Точці пересічення відповідає час 10 с. Отже, період запізнювання складає  $T=10$  с.

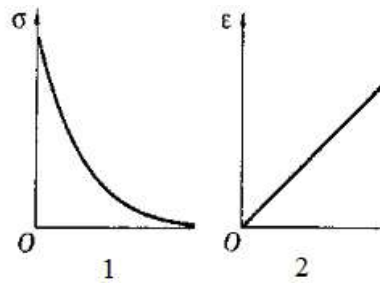
Знаючи період запізнювання і коефіцієнт в'язкості матеріалу, знайдемо його модуль пружності:

$$E = \frac{\eta}{T} = \frac{40}{10} = 4 \text{ Па.}$$

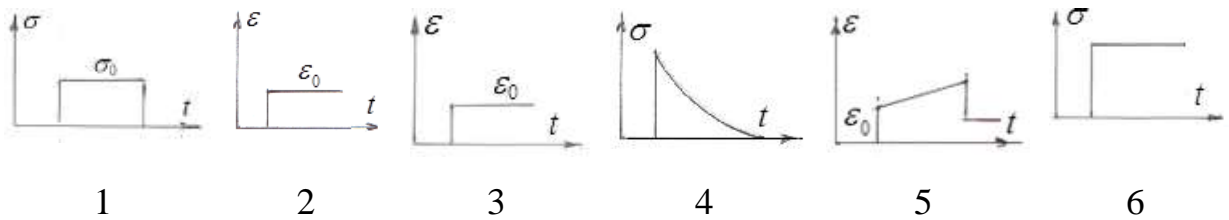
*Відповідь:*  $E = 4 \text{ Па.}$

### КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення релаксації та повзучості.
2. Який фізичний сенс постійної релаксації?
3. В яких одиницях вимірюється постійна релаксації та час запізнювання?
4. Назвіть умови здійснення ізометричного і ізотонічного режиму при вивченні механічних властивостей біологічних матеріалів.
5. За яких умов в моделі Максвелла реалізується повзучість?
6. За яких умов в моделі Максвелла реалізується релаксація?
7. Після зняття навантаження зразок відновлює свої розміри і форму. Якою моделлю моделюється ця властивість?
8. Якою моделлю моделюється в'язко-пружна зворотна деформація?
9. Яку реологічну модель використовують для дослідження в'язко-пружних властивостей кісткової тканини?
10. Дайте характеристику кожній ділянці кривої на рис. 3.11.
11. Якщо швидко розтягнути модель Максвелла і закріпити цей стан, то деформація: а) експоненціально зростає; б) лінійно убиває; в) залишається постійною.
12. Який графік відображає повзучість матеріалу?



13. Охарактеризуйте представлені графіки. Які графіки описують повзучість, а які релаксацію? Яким реологічним моделям вони відповідають?



14. За яких умов в моделі Максвелла реалізується повзучість?  $\varepsilon = const$ ,  $\sigma = const$ ,  $\dot{\varepsilon} = 0$ .

15. За яких умов в моделі Максвелла реалізується релаксація?  $\varepsilon = const$ ,  $\sigma = const$ ,  $\dot{\varepsilon} = 0$ .

16. Після зняття навантаження зразок відновлює свої розміри і форму. Якою моделлю моделюється ця властивість?

17. Якою моделлю описується в'язко-пружна зворотна деформація?

18. При дії постійної сили на модель Максвелла пружина а) пружно повільно подовжується згідно із законом Гука; б) пружно миттєво подовжується згідно із законом Гука; в) довжина пружини не змінюється.

19. В моделі Фойгта: а) повна деформація дорівнює сумі деформацій складових її елементів; б) напруження у всіх елементах системи однаково; в) повне напруження дорівнює сумі напружень складових її елементів; г) деформація всіх елементів системи однакова.

20. Якщо прикласти постійну силу до моделі Фойгта і закріпити цей стан, то деформація буде а) лінійно убавати з часом; б) лінійно зростати з

часом; в) експоненціально зростати з часом; г) миттєво зростати, а потім зберігатися незмінною.

21. В моделі Фойгта при знятті навантаження деформація а) лінійно убиває з часом; б) спочатку миттєво убиває до деякого значення, а потім залишається незмінною; в) експоненціально убиває з часом.

22. Релаксація напруження виникає за умови: 1) навантаження постійне, а деформація змінюється з часом; 2) при зміні напруження змінюється деформація; 3) деформація постійна, а напруження з часом убиває. Така поведінка об'єкту вивчається на моделі, що складається з а) пружини і демпфера, сполучених послідовно; б) демпфера; в) пружини і демпфера, сполучених паралельно; г) пружини.

## ЛЕКЦІЯ 4

### ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТОНКОСТІННИХ ОБОЛОНОК

#### Основні положення теорії тонкостінних оболонок

До основних форм, на які поділяються об'єкти біомедичної механіки, відносяться оболонки.

Оболонка – це тіло, що обмежено двома поверхнями, відстань між якими значно менша за інші розміри. Основними геометричними параметрами оболонки є радіус  $R$  кривизни серединної поверхні і товщина  $\delta$  стінки оболонки.

Серединною поверхнею оболонки називається поверхня, рівновіддалена від зовнішньої і внутрішньої поверхонь.

Оболонка вважається тонкостінною, якщо радіус серединної поверхні  $R$  перевищує товщину стінки  $\delta$  не менше ніж в 10 разів. У деякій літературі умова тонкостінності визначається співвідношенням  $\delta / R \leq 0,15$  ( $R \geq 0,67\delta$ ).

Розглянемо оболонку, на яку діють силові чинники. Виділимо з оболонки елементарний елемент і прикладемо до нього систему сил, що компенсують дію відкинutoї частини оболонки. У перерізах, що обмежують виділений елемент, діють поздовжні (нормальні)  $N$ , дотичні  $S$  і поперечні  $Q$  сили, а також згинальні  $M$  і крутні  $M_{KP}$  моменти.

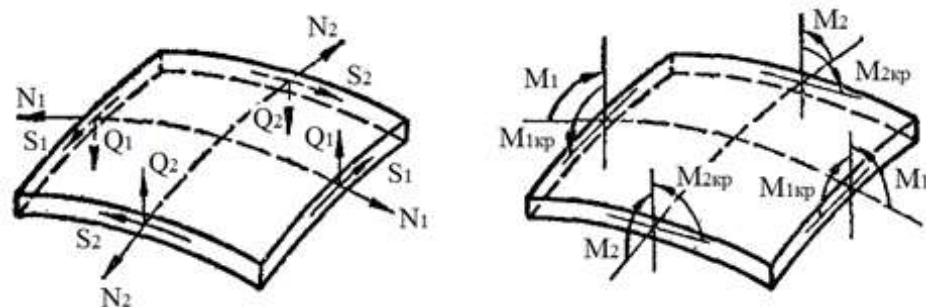


Рис. 4.1. Елемент оболонки

Розрахунок оболонок, що враховує усі перераховані силові чинники, є складним математичним завданням. Розрахунок тонкостінних оболонок істотно спрощується при виконанні наступних умов: оболонка є тілом обертання; навантаження симетрично відносно осі оболонки; оболонка не має різких переходів і жорстких защемлень; оболонка не навантажена зосередженими силами і моментами.

При виконанні всіх цих умов мають місце залежності:

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 = 0; \quad Q_1 = Q_2 = 0; \\ M_1 = M_2 = 0; \quad M_{1KP} = M_{2KP} = 0. \end{aligned}$$

Тобто, на виділений елемент оболонки при виконанні перерахованих умов діють лише поздовжні сили  $N_1$  і  $N_2$  (рис. 4.2).

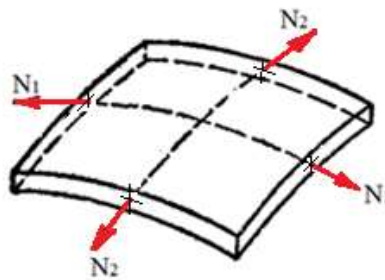


Рис. 4.2. Елемент оболонки під дією поздовжніх сил

### Розрахунок напруження в оболонках обертання

Розглянемо тонкостінну оболонку обертання завтовшки  $\delta$ , що знаходиться під дією тільки внутрішнього надлишкового тиску  $p$ . Матеріал оболонки однорідний, ізотропний і пружний.

Зі стінки оболонки (рис. 4.3) виділимо елементарний елемент ABCD, що утворений пересіченням двох меридіональних і двох окружних перерізів з відповідними радіусами кривизни  $R_M$  і  $R_O$ .

Елемент оболонки ABCD з меридіональним  $R_M$  і окружним  $R_O$  радіусами кривизни і відповідними елементарними кутами  $d\varphi$  і  $d\theta$ , має наступні розміри:

$$AB = CD = R_O d\varphi; \quad AD = BC = R_M d\theta; \quad S_{ABCD} = AB \cdot AD = R_O d\varphi R_M d\theta.$$

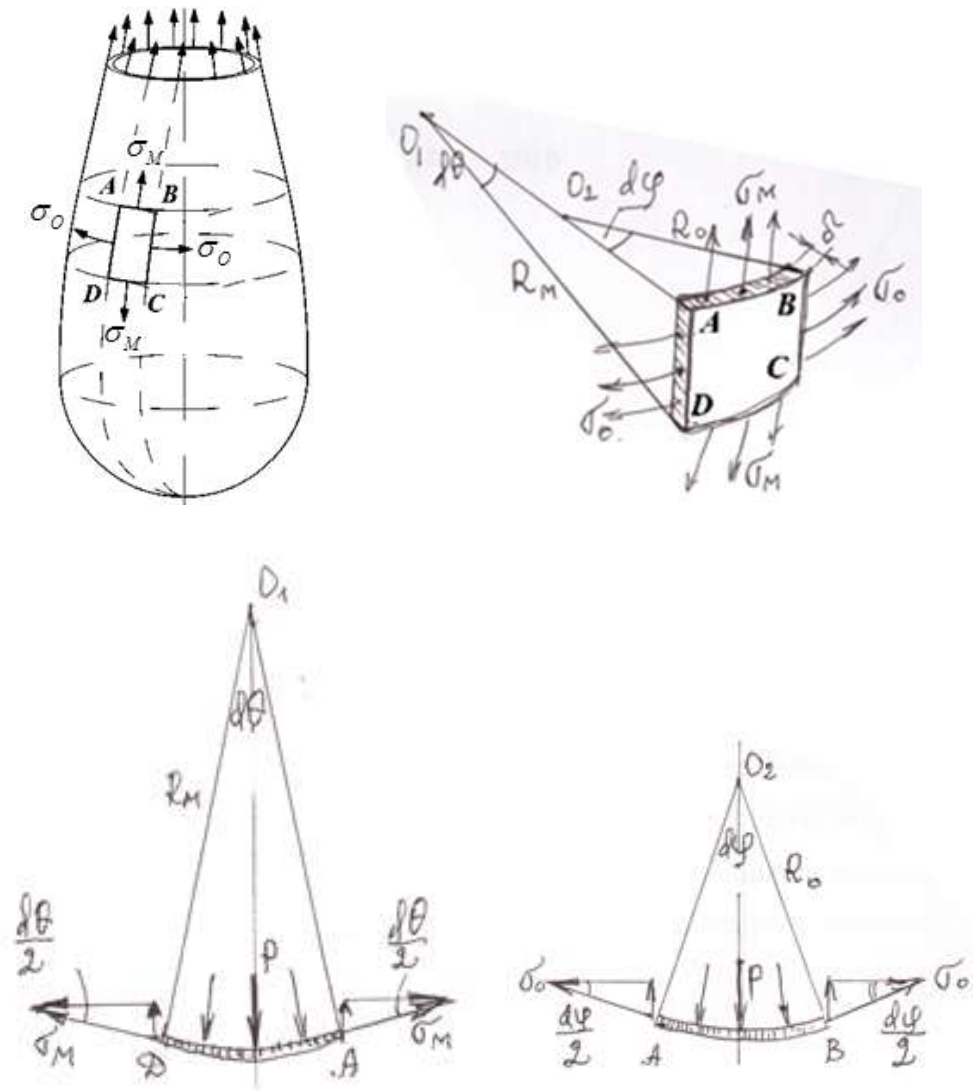


Рис. 4.3. Оболонка обертання та її елементарний елемент ABCD

Під дією тиску  $p$  в елементі ABCD виникають лише поздовжні сили, інтенсивність яких позначимо:  $\sigma_M$ ,  $\sigma_O$ , де  $\sigma_M$  – меридіональне напруження;  $\sigma_O$  – окружне напруження. Оскільки товщина стінки незначна, можна вважати, що напруження  $\sigma_O$ ,  $\sigma_M$  рівномірно розподілені по товщині стінки.

Складемо рівняння рівноваги елемента ABCD, спроектувавши всі діючі на нього сили на нормаль до елемента.

Меридіональні напруження  $\sigma_M$  створюють дві меридіональні сили  $F_M$ , рівні між собою за модулем:

$$\begin{aligned} F_M &= \sigma_M (AB \cdot \delta) = \sigma_M R_O d\varphi \cdot \delta; \\ F_M &= \sigma_M (CD \cdot \delta) = \sigma_M R_O d\varphi \cdot \delta. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Сума проєкцій меридіональних сил на нормаль до елемента ABCD дорівнює:

$$F_M^H = 2\sigma_M R_O d\varphi \cdot \delta \sin \frac{d\theta}{2}. \quad (4.2)$$

Окружні напруження  $\sigma_O$  створюють дві окружні сили  $F_O$ , рівні між собою за модулем:

$$\begin{aligned} F_O &= \sigma_O (AD \cdot \delta) = \sigma_O R_M d\theta \cdot \delta; \\ F_O &= \sigma_O (BC \cdot \delta) = \sigma_O R_M d\theta \cdot \delta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Сума проєкцій окружних сил на нормаль до елемента ABCD дорівнює:

$$F_O^H = 2\sigma_O R_M d\theta \cdot \delta \sin \frac{d\varphi}{2}. \quad (4.4)$$

Сила, що створюється внутрішнім тиском  $p$  на елемент ABCD, дорівнює:

$$F_P = p \cdot S_{ABCD} = p R_O d\varphi R_M d\theta. \quad (4.5)$$

Рівняння рівноваги елемента ABCD, з урахуванням протилежної спрямованості сили  $F_P$  силам  $F_M^H$  і  $F_O^H$ , набуває вигляду:

$$F_M^H + F_O^H - F_P = 0 \quad \rightarrow \quad F_P = F_M^H + F_O^H. \quad (4.6)$$

Після підстановки відповідних значень маємо:

$$p R_O d\varphi R_M d\theta = 2\sigma_M R_O d\varphi \cdot \delta \sin \frac{d\theta}{2} + 2\sigma_O R_M d\theta \cdot \delta \sin \frac{d\varphi}{2} \quad (4.7)$$

Спростимо рівняння (4.7):

$$p R_O R_M = \sigma_M R_O \delta + \sigma_O R_M \delta \quad \rightarrow \quad p = \frac{\delta}{R_O R_M} (\sigma_O R_M + \sigma_M R_O);$$

$$p = \delta \left( \frac{\sigma_o}{R_o} + \frac{\sigma_M}{R_M} \right) \rightarrow \frac{p}{\delta} = \frac{\sigma_o}{R_o} + \frac{\sigma_M}{R_M}. \quad (4.8)$$

Співвідношення (4.8) називається рівнянням Лапласа, яке можна представити у вигляді:

$$p = \frac{T_o}{R_o} + \frac{T_M}{R_M}, \quad (4.9)$$

де  $T_o = \sigma_o \delta$ ;  $T_M = \sigma_M \delta$  [Н/м] – відповідно окружне і меридіональне натягнення – зусилля, що припадають на одиницю довжини і діють у відповідних напрямках тонкостінних оболонок.

$$\text{При } \sigma_o = \sigma_M = \sigma \rightarrow T_o = T_M = T \rightarrow p = T \left( \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_M} \right).$$

### Сферична оболонка

Для сферичної оболонки, внаслідок центральної симетрії, маємо:

$$R_o = R_M = R; \quad \sigma_o = \sigma_M = \sigma.$$

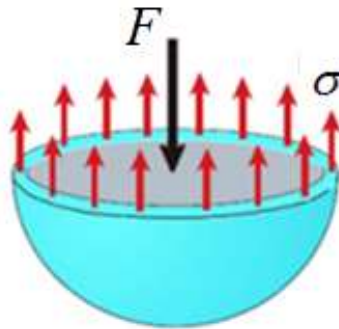


Рис. 4.5. Тонкостінна сферична оболонка

Рівняння Лапласа для сферичної оболонки набуває вигляду:

$$p = \delta \left( \frac{\sigma_o}{R_o} + \frac{\sigma_M}{R_M} \right) = \frac{2\sigma\delta}{R}. \quad (4.10)$$

Напруження у стінці сферичної оболонки визначається за формулою:

$$\sigma = \frac{pR}{2\delta}. \quad (4.11)$$

Тиск у сферичній оболонці і натягнення стінки можна представити в наступному вигляді:

$$p = 2 \frac{T^{C\Phi}}{R}; \quad T^{C\Phi} = \frac{pR}{2}. \quad (4.12)$$

**Приклад 1.** Визначити напруження у сферичній оболонці склери за наступних умов: внутрішньоочний тиск 2900 Па; об'єм ока 7854 мм<sup>3</sup>; товщина склери 0,4 мм.

**Розв'язання.** Напруження у сферичній оболонці склери знайдемо за формулою (4.11):  $\sigma = \frac{pR}{2\delta}$ .

Знаючи об'єм ока  $V = \frac{4}{3}\pi R_{3OB}^3$ , знайдемо зовнішній радіус склери:

$$R_{3OB} = \sqrt[3]{V \frac{3}{4\pi}} = \sqrt[3]{7854 \frac{3}{4\pi}} = 12,33 \text{ мм.}$$

Радіус кривизни серединної поверхні склери дорівнює:

$$R = R_{3OB} - \frac{\delta}{2} = 12,33 - \frac{0,4}{2} = 12,13 \text{ мм.}$$

Напруження у сферичній оболонці склери становить:

$$\sigma = \frac{pR}{2\delta} = \frac{2900 \cdot 12,13}{2 \cdot 0,4} = 43971 \text{ Па.}$$

*Відповідь:* 43,971 кПа.

### Циліндрична оболонка

Для циліндричної оболонки меридіональний радіус кривизни прагне до нескінченності  $R_M = \infty$ , а окружний радіус кривизни дорівнює середньому радіусу циліндра  $R_O = R$ . В цьому випадку, рівняння Лапласа набуває вигляду:

$$p = \delta \left( \frac{\sigma_O}{R_O} + \frac{\sigma_M}{R_M} \right) = \frac{\sigma_O \delta}{R}. \quad (4.13)$$

Окружне напруження у стінці циліндричної оболонки дорівнює:

$$\sigma_o = \frac{pR}{\delta}. \quad (4.14)$$

Рівняння (4.14) називається співвідношенням Ламе. В медичній практиці воно встановлює зв'язок між окружним напруженням у стінці кровоносних судин і внутрішньо-судинним тиском  $p$ .

Для визначення меридіонального напруження у стінці циліндричної оболонки використовуємо метод перерізів, а саме: проводимо переріз, перпендикулярний до осі оболонки; відкидаємо одну частину; її дію на оболонку, що розглядається (рис. 4.6), замінюємо меридіональним напруженням  $\sigma_M$ , рівномірно розподіленим по кільцевому перерізу циліндра; складаємо рівняння рівноваги.

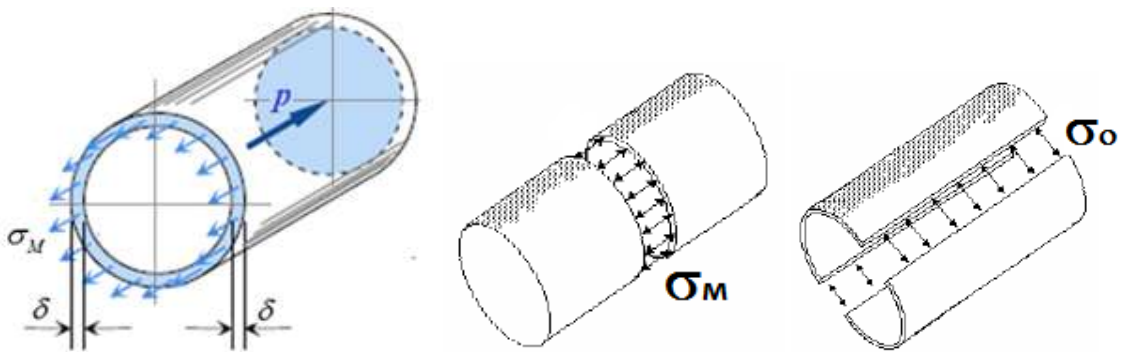


Рис. 4.6. Тонкостінна циліндрична оболонка

На торець оболонки площею  $\pi R^2$  діє сила  $p\pi R^2$ , а в протилежному напрямку по кільцевому перерізу площею  $2\pi R\delta$  діє меридіональне напруження, яке створює силу  $\sigma_M 2\pi R\delta$ . Із рівності цих сил знаходимо меридіональне напруження:

$$p\pi R^2 = \sigma_M 2\pi R\delta; \quad \sigma_M = \frac{pR}{2\delta}. \quad (4.15)$$

Порівнюючи значення окружного (4.14) і меридіонального напружень (4.15) в циліндричній оболонці, бачимо, що окружне напруження в два рази перевищує меридіональне, тобто:

$$\sigma_o = 2\sigma_M. \quad (4.16)$$

Оскільки окружне напруження діє в меридіональних перерізах циліндричних оболонок, розриви, як правило, відбуваються в меридіональному (поздовжньому) напрямку.

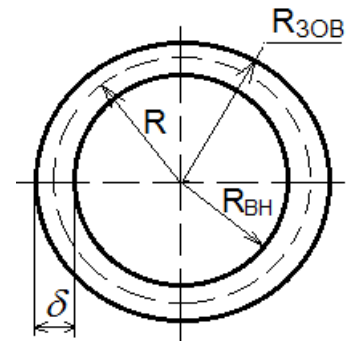
Рівняння Лапласа для циліндричної оболонки можна представити так:

$$p = \frac{T_o^u}{R} \rightarrow T_o^u = pR. \quad (4.17)$$

Між окружними натягненнями у сферичній (4.12) і циліндричній (4.17) оболонках з однаковими внутрішнім тиском і радіусом має місце залежність:

$$T_o^u = 2T^{c\phi}. \quad (4.18)$$

**Приклад 2.** Визначити окружне напруження у кровоносній судині за наступних умов: тиск в судині 50 мм рт.ст. (1 мм рт.ст. = 133,3 Па); зовнішній діаметр судини 10,2 мм; товщина стінки 0,2 мм.



**Розв'язання.** Судину розглядаємо як циліндричну тонкостінну оболонку. Окружне

напруження в судині знайдемо за формулою (4.14):  $\sigma_o = \frac{pR}{\delta}$ .

Визначимо середній радіус судини:

$$R = R_{зОВ} - \frac{\delta}{2} = \frac{D_{зОВ} - \delta}{2} = \frac{10,2 - 0,2}{2} = 5 \text{ мм.}$$

Окружне напруження у кровоносній судині дорівнює:

$$\sigma_o = \frac{pR}{\delta} = \frac{50 [\text{мм рт ст}] \cdot 5 [\text{мм}]}{0,2 [\text{мм}]} = 1250 \text{ мм рт ст} = 166,6 \text{ кПа.}$$

*Відповідь:* 166,6 кПа.

### Еліпсоїдна оболонка

Для еліпсоїдної оболонки окружне і меридіональне напруження дорівнюють:

$$\sigma_o = \frac{pb}{2\delta}; \quad (4.19)$$

$$\sigma_M = \frac{pb}{2\delta} \left( 1 - \frac{b^2}{2a^2} \right), \quad (4.20)$$

де  $a, b$  - відповідно велика і менша вісь еліпсоїда.

### Напруження в тонкостінних оболонках, заповнених рідиною

Формула Лапласа (4.8) встановлює залежність між окружним і меридіональним напруженням у стінці оболонки обертання:

$$\frac{p}{\delta} = \frac{\sigma_O}{R_O} + \frac{\sigma_M}{R_M}.$$

Оскільки невідомих напружень два, необхідно скласти ще одне рівняння. З цією метою використовуємо метод перерізів, а саме: проводимо переріз, перпендикулярний до осі оболонки; відкидаємо верхню частину оболонки; її дію на нижню частину замінюємо тиском рідини  $p = h\gamma$ , що знаходилася вище перерізу, і меридіональним напруженням  $\sigma_M$ , спрямованим по дотичним до оболонки, що розглядається (рис. 4.7).

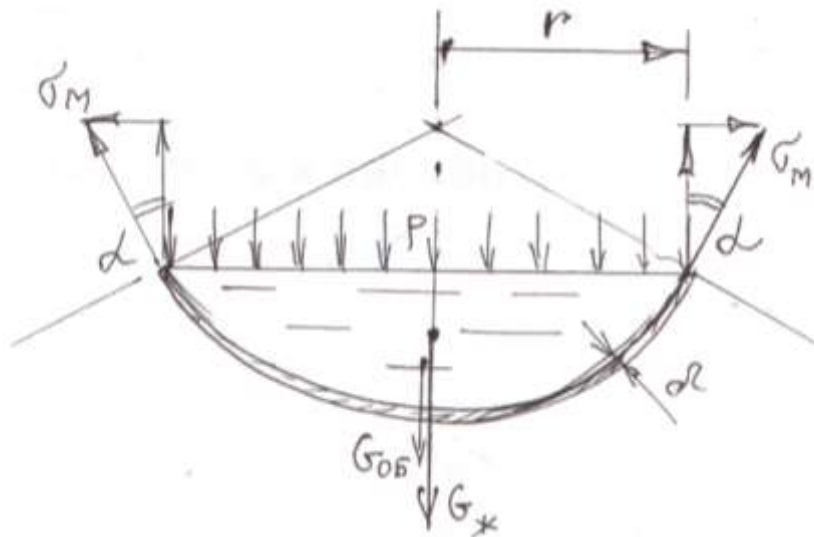


Рис. 4.7. Нижня частина оболонки

Система знаходиться в рівновазі, тому сума сил на вісь  $y$ , має дорівнювати нулю:

$$\sigma_M \cos \alpha \cdot 2\pi r \delta - p\pi r^2 - G_{\text{ж}} - G_{\text{об}} = 0, \quad (4.21)$$

де  $\sigma_M \cos \alpha$  – вертикальна складова меридіонального напруження;  $2\pi r \delta$  – площа кільцевого перерізу, на якому діє меридіональне напруження;  $p\pi r^2$  – сила тиску рідини, що знаходиться вище перерізу;  $G_{Ж}$  – вага рідини, що знаходиться у нижній частині оболонки;  $G_{ОБ}$  – вага нижньої частини оболонки.

З рівняння (4.21) знайдемо меридіональне напруження:

$$\sigma_M = \frac{pr}{2\delta \cos \alpha} + \frac{G_{Ж} + G_{ОБ}}{2\pi r \delta \cos \alpha}. \quad (4.22)$$

Окружне напруження  $\sigma_o$  знайдемо після підстановки в рівняння Лапласа (4.8) меридіонального напруження  $\sigma_M$ , розрахованого за формулою (4.22).

## КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що називається оболонкою?
2. Наведіть приклади, які можуть бути віднесені до оболонок?
3. Яка оболонка називається тонкою?
4. Яка поверхня називається серединною поверхнею оболонки?
5. Яка оболонка називається осесиметричною?
6. Сформулюйте основні положення безмоментної теорії оболонок?
7. У яких випадках можна використовувати безмоментну теорію?
8. Запишіть рівняння Лапласа для тонкої оболонки, що має форму конуса.
9. Співвідношення Ламе для кровеносної судини має вигляд:

$$a) \quad \sigma_o = \frac{pR}{2\delta}; \quad b) \quad \sigma_o = \frac{pR}{\delta}; \quad c) \quad \sigma_o = \frac{pD}{4\delta}.$$

## ЛЕКЦІЯ 5

# МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ФУНКЦІОНУВАННЯ СКЕЛЕТНИХ М'ЯЗІВ

### Загальні відомості

М'язи - скоротливі органи рухової системи людини, поділяють на: скелетні м'язи (закріплюються на скелеті), вісцеральні м'язи (містяться у стінках трубчастих внутрішніх органів) і м'язи серця. М'язи побудовані із посмугової і непосмугової м'язової тканини.

Загальне число скелетних м'язів в тілі людини - більше ніж 600. Їх маса складає: у жінок до 28-35% від маси тіла; у чоловіків - до 40-45%; у спортсменів - 45-55 %. Приблизно 50 % загальної маси скелетних м'язів припадає на нижні кінцівки, 30% - на верхні кінцівки і 20 % - на м'язи голови і тулуба.

Усі м'язи працюють за одним принципом і мають близький хімічний склад: вода - 75 %, білки - 20 % (в т.ч. колаген і еластин), аденозинтрифосфат (АТФ) - до 0,4 %.

У спокої скелетні м'язи поглинають близько 18% усієї споживаної організмом енергії. З усієї енергії, що «згоряє» у скелетному м'язі, тільки 25% використовується на роботу. Ця величина називається ККД м'яза. Інша доля споживаної енергії (приблизно 75%) розсіюється у вигляді тепла. Такий низький ККД скелетних м'язів не можна вважати недоліком - м'язи є надійним і постійним джерелом тепла для організму.

Скелетний м'яз вкритий оболонкою із сполучної тканини – фасцією, яка щільно з'єднана із м'язовою тканиною і перешкоджає її надмірному розтягуванню. Між пучками м'язових волокон розміщуються кровоносні судини і нерви. На кінцях м'яз переходить у сухожилля, яке дуже міцне, але не здатне до скорочення. Сухожилля прикріплюються до двох сусідніх кісток,

з'єднаних суглобом. При скороченні м'яз наближає вільні кінці кісток один до одного (рис. 5.1).

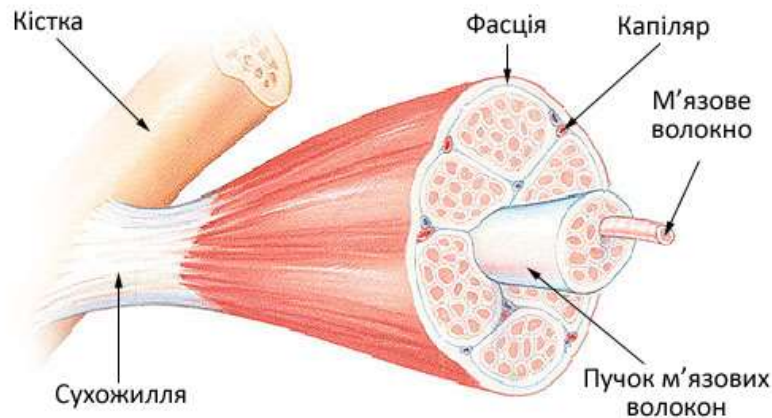


Рис. 5.1. Будова скелетного м'яза

*Сухожилля* складаються із щільної сполучної тканини, багаті колагеновими волокнами (75...85% колагену від сухої маси). Механічні властивості сухожилля залежать від статі та віку людини. Максимальну міцність досягають у віці 21...25 років.

*Фасція* – це сполучно-тканинна перетинка, що утворює чохол для м'яза. Фасції побудовані із щільної сполучної тканини. Пучки колагенових волокон утворюють сітку, яка змінює свою структуру при скороченні м'яза. Фасції відокремлюють м'язи і групи м'язів один від одного, **виконують механічну функцію – полегшують роботу м'язів при скороченні і зменшують коефіцієнт тертя між м'язами.** В місцях з'єднання фасцій між собою утворюються потовщення – фасціальні вузли. Вони зміцнюють фасціальні піхви судин і нервів, захищаючи їх від стиснення. Фасції, що з'єднуються з кістками, формують волокнистий скелет, який називають м'яким скелетом. Деякі фасції утворюють стінки певних каналів, наприклад, пахвинного і стегнового.

*Зв'язки* – щільні тяжі зі сполучної тканини, що мають різну довжину й ширину. Вони з'єднують кістки, що утворюють суглоб, фіксують його в певному положенні, завдяки чому суглобні поверхні не зміщуються одна щодо одної під час руху, визначають напрямок руху суглоба. Довгі й широкі зв'язки, що тягнуться вздовж усього хребта, дають змогу тілу зберігати вертикальне

положення, а хребцям – залишатися на своєму місці. Крім зміцнення суглоба, вони **виконують функції гальмування і спрямування руху.** Зв'язки променезап'ясткового, гомілковостопного й особливо колінного суглоба надійно «бинтують» їх, забезпечуючи згинання, розгинання й обертання голівки.



У переважній більшості випадків, міцність сухожилля і зв'язок вища, ніж міцність їх прикріплення до кісток. Слід також враховувати, що в процесі тренувань міцність сухожилля і зв'язок збільшується порівняно повільно. При форсованому розвитку швидкісно-силових якостей м'язів може виникнути невідповідність між збільшеними швидкісно-силовими можливостями м'язового апарату і недостатньою міцністю сухожилля і зв'язок. Це загрожує потенційними травмами. Систематичне введення гормонів призводить до значного зменшення міцності сухожилля і зв'язок. Значно знижує міцність сухожилля і зв'язок малорухливість.

До допоміжного апарату м'язів, окрім названих структур, відносяться міжм'язові перегородки, синовіальні піхви і сумки, фіброзні канали, сесамоподібні кістки і блоки.

### **Біомеханічні властивості м'язів**

До біомеханічних властивостей м'язів відносяться: скоротливість, жорсткість, в'язкість, міцність, релаксація.

*Скоротливість* - здатність м'яза коротшати при збудженні, внаслідок чого виникає сила тяги. Скорочення м'язів є результатом процесів, що відбуваються на молекулярному рівні. Первинним скорочувальним елементом м'яза є саркомер - ділянка міофібрили, що розташована між, так званими, Z -

мембранами. Типове м'язове волокно людини, що має довжину 5 см, містить 2000 саркомерів.

*Жорсткість* – здатність м'язів чинити опір зміні форми при деформуєчих діях. На відміну від пружного тіла, моделлю якого є пружина, м'яз є системою з в'язко-пружними властивостями. Напруження, що виникає у м'язі, не пропорційне деформації. Спочатку м'яз розтягується легко, а потім, навіть для незначного розтягування, необхідно прикладати все більшу силу. Тобто, **м'язи мають змінну жорсткість**. Так, наприклад, жорсткість активного м'яза в 4-5 разів більше жорсткості пасивного.

*В'язкість* - здатність чинити опір переміщенню однієї частини тіла відносно іншої. При цьому, частина механічної енергії переходить в інші види, головним чином в тепло. При м'язовому скороченні енергія витрачається на подолання в'язкого тертя, яке виникає, в основному, між нитками актину і міозину. Крім того, тертя виникає між збудженими і незбудженими волокнами м'яза. При збудженні усіх волокон в'язкість різко зменшується. Зниженню в'язкості сприяє розігрівання м'язів в ході розминки. При роботі м'язів температура тіла підвищується до 39°C, а в самій мускулатурі ще вище. При цьому, відбуваються наступні фізіологічні зміни: прискорюються хімічні реакції, що відбуваються в організмі; судини розширюються, опір течії крові знижується; прискорюються масообмінні процеси; кров інтенсивніше збагачує їх киснем; швидше проходять нервові імпульси. тим самим швидше здійснюється зв'язок між нервовою системою і м'язами; м'язи і сполучна тканина м'язів навколо суглобів стають еластичнішими. М'яз, що має більшу в'язкість, буде мати більшу площі петлі гістерезису.

*Міцність* - здатність м'язів чинити опір руйнуванню під дією зовнішніх сил. Міцність характеризується межею міцності, яка оцінюється відношенням навантаження, необхідного для розриву, до площі поперечного перерізу. Межа міцності міофібрил – 1,6...2,5 Н/см<sup>2</sup>; м'язів – 20...40 Н/см<sup>2</sup>; фасцій – 1400 Н/см<sup>2</sup> (14 МПа); сухожилля – 4000...6000 Н/см<sup>2</sup> (40...60 МПа).

Основні механічні характеристики компонентів м'язів (модуль пружності і коефіцієнт Пуассона) наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1. Механічні характеристики компонентів м'язів

Назва м'язової структури	Модуль Юнга E, Па	Коефіцієнт Пуассона $\mu$	Густина $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
М'яз	$2,5 \cdot 10^6$	0,49	700
М'язове волокно	$1 \cdot 10^5$	0,49	750
Міофібрила	$2 \cdot 10^5$	0,49	700
Міозин	$1 \cdot 10^6$	0,49	800
Актин	$2 \cdot 10^6$	0,49	850

*Релаксація* – властивість м'язів, що проявляється зниженням напруження при постійній деформації. Більшості спортивних рухів передують рухи у напрямку, протилежному до основного: присідання перед стрибком вгору, замах перед кидком снаряда тощо. Розтягування м'язів, що відбуваються при попередніх рухах, призводять до накопичення в них енергії пружної деформації, яка, в подальшому, використовується організмом в основному русі. Чим більше вклад такої неметаболічної енергії у загальну величину енергії, тим більше економічно виконується цей рух.

Накопичення енергії пружної деформації не завжди використовується повною мірою. Міра її використання залежить від умов виконання рухів, зокрема, від часу між розтягуванням і укороченням м'язів. **Збільшення паузи між попереднім розтягуванням і наступним укороченням знижує економічність руху і спортивний результат. Причиною цього є релаксація м'язів і сухожилля.** Наприклад, висота вистрибування вгору з місця залежить від тривалості паузи між присіданням і відштовхуванням. Чим більше ця пауза (ізометричний режим роботи м'язів), тим менше сила їх тяги і, як наслідок, менша висота вистрибування. Інтервал часу, за який повинні статися накопичення і використання пружної енергії, визначається періодом (постійною часу) релаксації. Якщо цей інтервал більше за час релаксації,

накопичена енергія пружної деформації повністю розсіюється і наступна фаза руху здійснюється лише за рахунок метаболічної енергії м'язового скорочення.

Властивість м'язів накопичувати енергію пружної деформації залежить від особливостей їх морфологічної будови, зокрема, від співвідношення швидких і повільних рухових волокон.

### Активний м'яз. Мікроскопічний рівень

Довжина м'язів і тяга, що розвивається ними, змінюється за рахунок ковзання тонких філаментів (актинових) вздовж товстих (міозинових). Оскільки елементарним модулем, що забезпечує ці зміни, є саркомер, то його поведінка відображає мікроскопічний рівень роботи м'яза.

При активації саркомеру тонкі актинові нитки втягуються в проміжки між товстими міозиновими, тим самим забезпечується скорочення саркомеру.

Поперечні міозинові містки взаємодіють з активними центрами тонкої нитки, замикаючись і розмикаючись. Цикл розмикання-замикання супроводжується розщеплюванням молекули АТФ. Цей молекулярний механізм скорочення м'яза описується теорією ковзаючих ниток. Залежність між мірою перекриття актино-міозинових філаментів і напруженням (силою), що розвивається саркомером, представлено на рисунку 5.2.

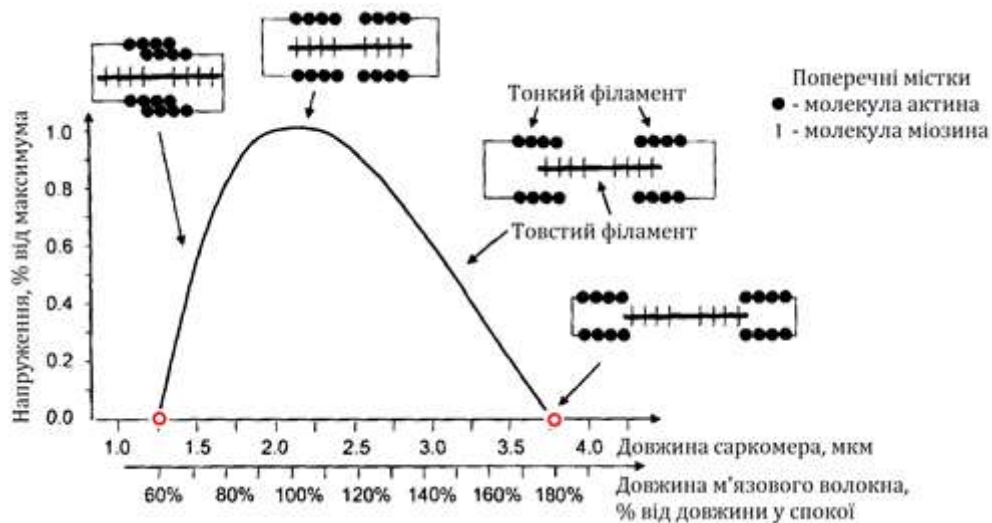


Рис. 5.2. Залежність між мірою перекриття актино-міозинових філаментів і напруженням (силою), що розвивається саркомером

Перше критичне значення довжини саркомеру дорівнює 1,27 мкм. Воно відповідає максимальному укороченню м'яза. У цьому стані регулярність розташування філаментів порушується, вони викривляються. Кількість одночасних взаємодій між філаментами різко зменшується, тому сила, а значить і напруження, падає до нуля.

Друге критичне значення довжини саркомеру дорівнює 3,65 мкм. Воно відповідає максимальному подовженню м'яза. При максимальному розтягуванні саркомеру перекриття товстих і тонких філаментів немає, тому сила зменшується до нуля. Якщо довжина саркомеру знаходиться в інтервалі від 1,27 мкм до 3,65 мкм, значення сили відрізняється від нуля.

Максимальна сила, яку здатний розвинути саркомер, відповідає значенням його довжини - від 1,67 до 2,25 мкм. Це відноситься як до довжини кожного саркомеру (близько 2 мкм), так і до загальної довжини м'яза в стані активності. **Тобто, максимальна сила, яка може бути розвинена м'язом, залежить від поточної довжини м'яза.**

Гладкі м'язи за своїми властивостями істотно відрізняються від скелетних: розташування скорочувальних білків в них не впорядковане, розміри волокон менші. Збудливість гладких м'язів значно нижча, ніж поперечно посмугованих, а період м'язового скорочення довший. Гладкі м'язи мають високу здатність до автоматичної діяльності. Подразниками, що збуджують автоматичне скорочення, є продукти обміну речовин, що виробляються у м'язі або постачаються з кров'ю.

### **Активний м'яз. Макроскопічний рівень**

Існує три типи м'язових волокон, які відрізняються за швидкістю скорочення (рис.3):

- I тип - повільно скорочуються, 110 мс (червоні волокна);
- II тип - швидко скорочуються, 50 мс;
- тип II А, тип II В - проміжні типи.

Час скорочення м'яза залежить від співвідношення кількості швидких і повільних волокон. Залежність між часом скорочення м'яза і м'язовою силою, що виникає, представлено на рисунку 5.3.

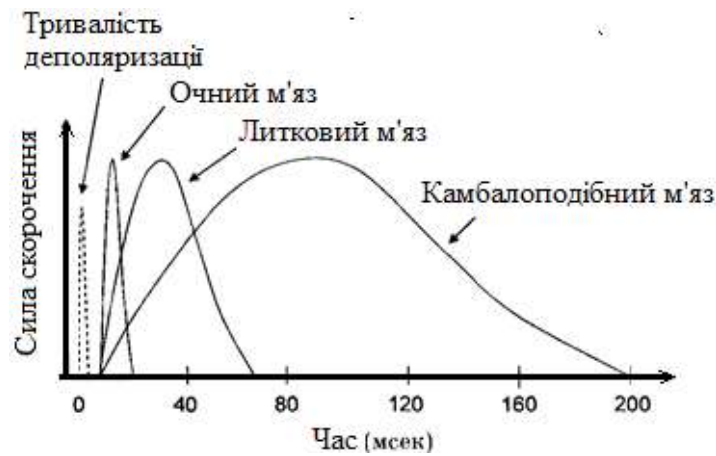


Рис. 5.3. Тривалість ізометричних відповідей різних м'язів з різним змістом швидких і повільних м'язових волокон

Як фізична якість, м'язова сила є здатністю в процесі рухових дій долати зовнішній опір або протидіяти йому за рахунок м'язових зусиль.

Розглянемо вплив структури м'язів на м'язову силу.

М'язові волокна об'єднані в пучки. На макроскопічному рівні ці пучки розташовуються декількома способами.

У *веретеноподібних м'язах* (рис. 5.4 а) м'язові волокна розташовані паралельно. М'язи переходять в сухожилля, які прикріплюються до кісток скелета. Волокна цих м'язів містять послідовно сполучені саркомери. Загальна скорочувальна сила у м'язів з веретеноподібним розташуванням волокон спрямована уздовж осі сухожилля. Така будова дозволяє м'язу швидко скорочувати свою довжину, викликаючи зміщення кісток при русі суглобів.

У *пір'ястих м'язах* (рис. 5.4 б, в, г) паралельні м'язові волокна прикріплюються до сухожилля під кутом  $\theta$ , при цьому, на сухожилля передається тільки певна частина сили  $f$  кожного волокна, а саме:  $f \cos \theta$ . Проте, така геометрія дозволяє прикріпитися до сухожилля більшому числу волокон. В *однопір'ястих м'язах* паралельні м'язові волокна прикріплюються до

сухожилля з одного боку, у двопір'ястих м'язах - з двох сторін, у багатопір'ястих дельтовидних м'язах волокна прикріплюються до центрального сухожилля під різними кутами.

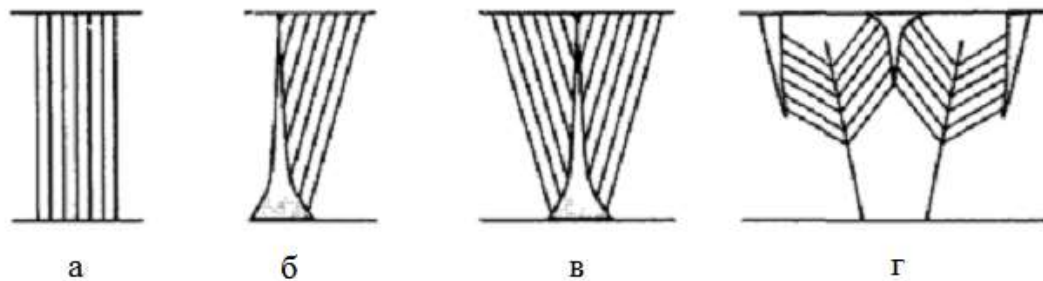


Рис. 5.4. Структура розташування волокон у скелетних м'язах: а – паралельна (веретеноподібна); б - однопір'яста; в - двопір'яста; г - багатопір'яста

Окрім того, пір'яста організація м'язових волокон дозволяє центральному сухожиллю переміщатися на більшу відстань, ніж при веретеноподібній схемі, так що кістки, сполучені із вказаним сухожиллям, можуть переміщатися з більшою амплітудою (рис. 5.5).

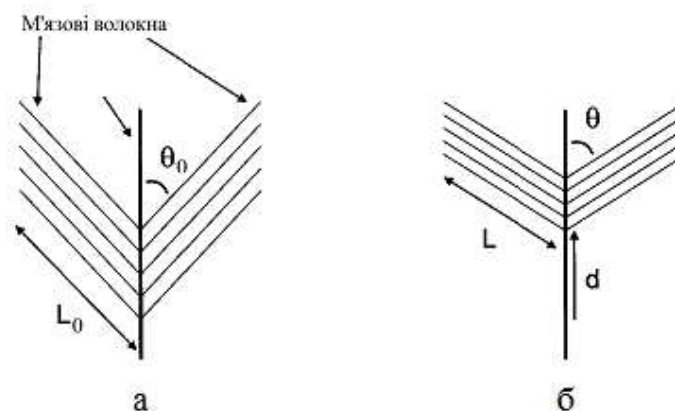


Рис. 5.5. М'язові волокна пір'ястих м'язів до (а) і після (б) скорочення волокон, що супроводжується переміщенням сухожилля

Розглянемо вплив на м'язову силу кількості і товщини м'язових волокон. Максимальна м'язова сила  $F_{MAX}$ , яку може розвинути м'яз, залежить від *фізіологічного поперечника* (ФП) м'яза, тобто від площі поперечного

перерізу м'яза  $A$ , який, в свою чергу, залежить від кількості і товщини м'язових волокон:

$$F_{MAX} = k_M A,$$

де  $k_M$  - абсолютна м'язова сила - сила м'яза, що припадає на  $1 \text{ см}^2$  поперечного перерізу.

Абсолютна м'язова сила  $k_M$  складає  $20 \dots 100 \text{ Н/см}^2$ . М'язи з меншими значеннями  $k_M$  беруть участь в підтримці статичної пози тіла. У м'язів із пір'ястим розташуванням волокон значення  $k_M$  істотно вище.

У веретеноподібних м'язах фізіологічний поперечник дорівнює:

$$A = \frac{m}{\rho L},$$

де  $m$  - маса м'язових волокон;  $\rho$  - густина м'язів ( $1,056 \text{ г/см}^3$ );  $L$  - довжина м'язових волокон.

Для м'язів з пір'ястим розташуванням волокон:

$$A = \frac{m}{\rho L} \cos \theta,$$

де  $\theta$  - кут пір'ястості - кут між поздовжньою віссю м'яза і кутом відходження волокон (кут прикріплення волокон м'яза до сухожилля).

### Стомлення м'язів

При тривалому режимі навантаження м'язова сила знижується, що відповідає гіперболі Ромерта (рис. 5.6). Скелетний м'яз може витримувати достатньо сильне статичне навантаження тільки обмежений час.

М'язове стомлення обумовлене як метаболічними змінами у м'язі, так і погіршенням механізмів його активації. Сила може знижуватися із-за метаболічних чинників, які утрудняють зчеплення і роз'єднання поперечних містків. До цих чинників відносяться: утворення у волокнах молочної кислоти, підвищення вмісту фосфату і зниження креатинфосфату. Зниження АТФ не є домінуючим чинником. Так, збільшення внутрішньом'язового тиску до рівня,

що перевищує систолічний тиск крові, обмежує надходження крові, що, в свою чергу, знижує приплив кисню до м'яза, а також уповільнює процес видалення з м'язів продуктів метаболізму. М'язові волокна типів I і II А стомлюються в меншій мірі, оскільки в них добре розвинена мережа капілярів.

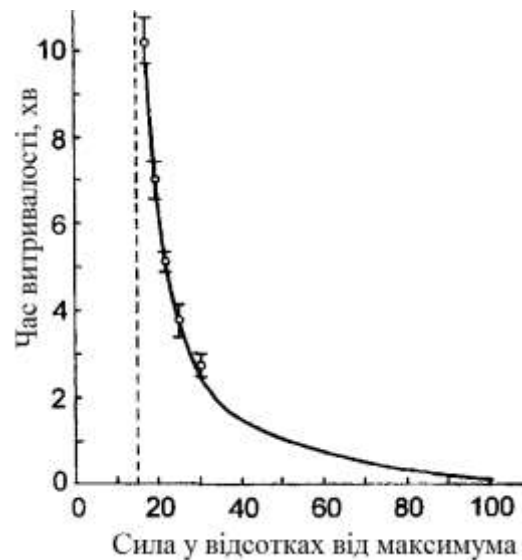


Рис. 5.6. Гіпербола Ромерта статичної витривалості м'язів

Таким чином, *максимальна сила, яку може розвинути м'яз*, залежить від поточної довжини м'яза; його структури; фізіологічного поперечника, тобто кількості і товщини м'язових волокон; типу м'язових волокон, які відрізняються за швидкістю скорочення; стану кровоносних судин.

До чинників, що визначають резерви розвитку м'язової сили, відносяться: включення додаткових рухових одиниць (РО) в м'язі; синхронізація збудження РО в м'язі; підвищення енергетичних ресурсів м'язових волокон; зміна співвідношення повільних і швидких волокон; перехід від поодиноких скорочень до тетанічних.

### **Моделі скелетних м'язів**

Механічні властивості м'язів залежать від властивостей компонентів, що утворюють їх: міофібрил, сполучних і трофічних утворень і т. п., а також від стану самого м'яза.

Поведінку м'язів можна вивчати на спрощеній моделі їх будови у вигляді комбінації пружних і в'язких елементів. Пружні компоненти за механічними властивостями аналогічні пружинам: щоб їх розтягнути, треба прикласти силу. Робота сили дорівнює енергії пружної деформації, яка може в наступній фазі руху перейти в механічну роботу. Для опису поведінки м'яза найчастіше використовують трикомпонентну модель Зінера (рис.5.7).

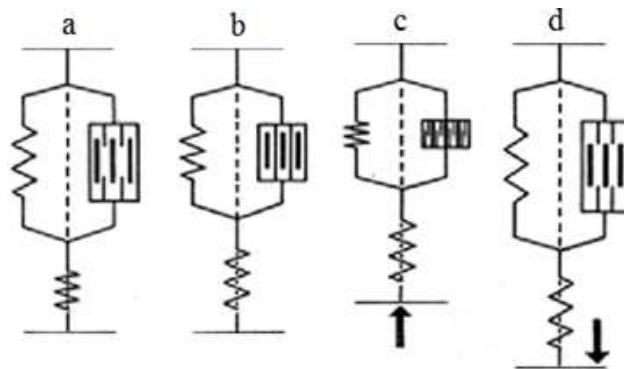


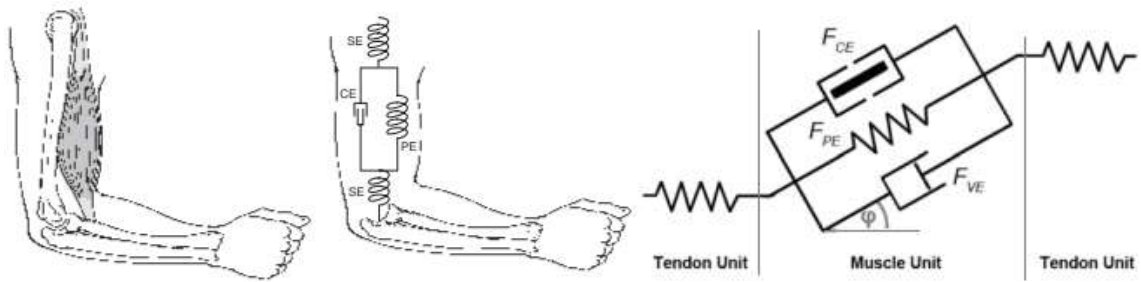
Рис. 5.7. Механічна модель м'язової діяльності: а - спокій; b -статичний режим роботи; c - динамічний режим роботи; d - розтягнутий стан

При описі макроструктури скелетних м'язів виділяють три елементи:

*В'язкий елемент* – скорочувальний компонент відповідає тим ділянкам саркомерів, де актинові та міозинові міофіламенти перекривають один одного. У цих ділянках при збудженні м'яза відбувається взаємодія між актиновими і міозиновими філаментами, що призводить до зміни натягнення і довжини м'яза і, як наслідок, генерації м'язової сили. Цей елемент у моделі позначається демпфером.

*Пружний паралельний елемент* – до нього відносяться оболонки, що оточують м'язове волокно, сполучна тканина між волокнами та їх пучками, деякі інші структурні компоненти м'язової клітини.

*Пружний послідовний елемент* – до нього відносяться сухожилля, ділянки переходу міофібрил у сполучну тканину, а також окремі ділянки саркомерів, що не входять до складу скорочувального компонента.



Для опису поведінки м'язів також використовують модель Кельвіна, яка представляє собою паралельне з'єднання моделі Максвелла і пружного елемента. Закон пружності для моделі Кельвіна має вигляд:

$$\sigma = \eta_1 \left[ \dot{\varepsilon} - \frac{(\dot{\sigma} - E_2 \dot{\varepsilon})}{E_1} \right] + E_2 \varepsilon.$$

Мережева модель м'яза, в якій кожен саркомер відповідає поведінці моделі Кельвіна, представлена на рис 5.8.

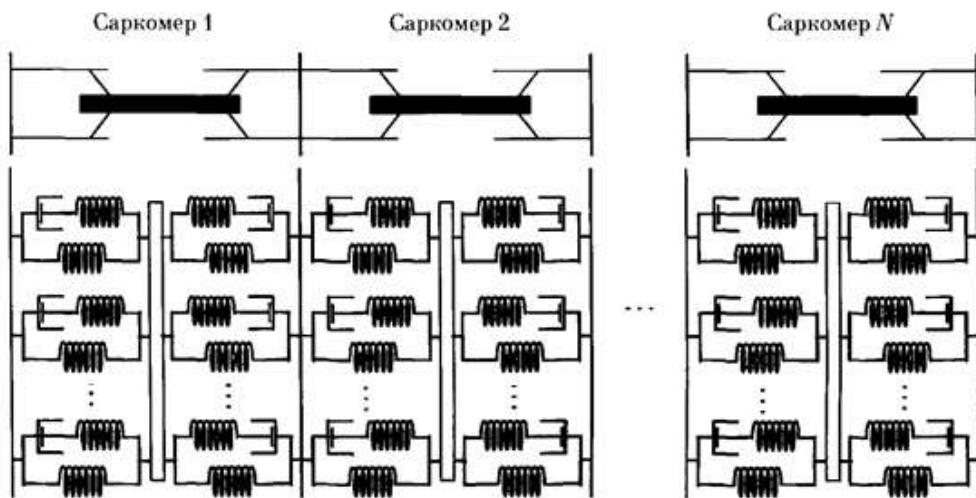


Рис. 5.8. Мережева модель м'язового волокна

## КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Перерахуйте біомеханічні властивості м'язів.
2. М'яз здатний розвивати силу тільки при: а) подовженні; б) скороченні; в) в обох випадках. При цьому, сила залежить від: г) від кількості утворюваних поперечних актин-міозинові мостиків; д) фізіологічного поперечника м'яза; ж) прикладеного навантаження.
3. Сила скорочення саркомеру визначається: а) довжиною актинової нитки; б) зміною сили, генерованої одним містком; в) кількістю одночасно замкнутих містків; г) пружністю міозинової нитки.
4. Від чого залежить сила, що розвиває саркомер.
5. Повзучість м'яза характеризує: а) запізнення деформації м'яза при зміні навантаження; б) наявність залишкової деформації після зняття навантаження; в) подовженні м'яза з часом при незмінному напруженні.
6. При максимальному розтягуванні саркомеру: (а) сила зменшується до нуля; (б) сила приймає максимальне значення.
7. При максимальному укороченні м'яза: (а) сила падає до нуля; (б) сила приймає максимальне значення.
8. Сила скорочення м'яза визначається: (а) довжиною актинової нитки; (б) кількістю одночасно замкнутих містків; (в) пружністю міозинової нитки.
9. Залежність між мірою перекриття актино-міозинових філаментів і силою, що розвивається саркомером.
10. До послідовного пружного компоненту м'яза відносяться: (а) сухожилля; (б) ділянки переходу міофібрил у сполучну тканину; (в) ділянки саркомерів, що не входять до складу скорочувального компоненту; (г) оболонки, що оточують м'язове волокно; (д) елементи сполучної тканини між волокнами.
11. До в'язкого компоненту м'яза відносяться: (а) сухожилля; (б) ділянки переходу міофібрил у сполучну тканину; (в) ділянки саркомерів, де актинові і міозинові міофіламенти перекривають один одного; (г)

оболонки, що оточують м'язове волокно; (д) елементи сполучної тканини між волокнами.

12. До паралельного пружного компоненту м'яза відносяться: (а) сухожилля; (б) ділянки переходу міофібрил у сполучну тканину; (в) ділянки саркомерів, що не входять до складу скорочувального компоненту; (г) оболонки, що оточують м'язове волокно; (д) елементи сполучної тканини між волокнами.

13. Для того, щоб актинові і міозинові волокна могли взаємодіяти, необхідна присутність іонів: калію; кальцію; натрію; хлору.

14. За рахунок якої енергії відбувається взаємодія між нитками актину і міозину.

## ЛЕКЦІЯ 6

### МЕХАНІКА РІДИН

#### Рівняння руху ідеальної рідини

Розглянемо рух рідини по трубці. Кількість рідини, що протікає через поперечний переріз в одиницю часу називається витратою рідини. Розрізняють масову і об'ємну витрату. Масова витрата  $Q_M$  дорівнює:

$$Q_M = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta S}{\Delta t} = \rho v S = \rho Q,$$

де  $Q = vS$  - об'ємна витрата (об'ємна швидкість) рідини;

$\rho$  - густина рідини;

$v$  - швидкість рідини;

$S$  - площа поперечного перерізу трубки.

Розглянемо трубку змінного перерізу. Масова витрата через поперечний переріз  $S_1$  складає  $Q_1 = \rho_1 v_1 S_1$ , а через переріз  $S_2$  відповідно  $Q_2 = \rho_2 v_2 S_2$ , де  $v_1, v_2$  - середня лінійна швидкість рідини в перерізах 1 і 2. За умови непроникності стінок трубки і відсутності зворотної течії, маємо:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2; \\ \rho_1 v_1 S_1 &= \rho_2 v_2 S_2. \end{aligned}$$

Якщо рідина нестискувана, тобто  $\rho_1 = \rho_2$ , тоді:

$$\begin{aligned} v_1 S_1 &= v_2 S_2; \\ Q &= \text{const.} \end{aligned}$$

*Теорема про нерозривність (безперервність) струменя* - Якщо течія рідини стала (стаціонарна), то через довільні поперечні перерізи однієї і тієї ж трубки протікає в одиницю часу однаковий об'єм нестискуваної рідини.

Рух рідини вважається стаціонарним, якщо швидкість часток потоку, а також густина, температура і тиск, що впливають на її рух, не змінюються в часі у кожній фіксованій точці простору, через яку проходить рідина.

### Рівняння нерозривності струменя при протіканні крові в судинах

Кровоносна система людини - це складна замкнута система еластичних трубок різного діаметру. В систему входять: аорта, артерії, артеріоли, капіляри, венули, вени. Кров із серця надходить в аорту, а звідти розподіляється по головним артеріях, потім по дрібнішим і врешті-решт розходиться по мільйонам дрібних капілярів. По венах кров повертається до серця. Один цикл руху крові триває в середньому 20 с. За добу серце переганяє по всіх судинах до 10 000 л крові. Швидкість кровотоку в різних судинах різна. Орієнтовні значення цих швидкостей представлено в табл. 6.1.

**Табл. 6.1. Швидкість і тиск крові в різних судинах**

Назва судини	Діаметр, мм	Швидкість, см/с	Тиск, мм рт. ст.
Аорта	20	30...50	50...150
Артерії	5...10	20...50	80...20
Артеріоли	0,1...0,5	1...20	50...20
Капіляри	0,5...0,01	0,01...0,05	20...10
Венули	0,1...0,2	0,1...1	10...5
Вени	10...30	10...20	(-5) ...(+5)

На перший погляд здається, що наведені значення суперечать рівнянню нерозривності - в тонких капілярах швидкість кровотоку приблизно в 1000 менше, ніж в артеріях. Справа в тому, що в табл.1 наведено діаметр однієї судини. Ця величина дійсно зменшується в міру паралельного розгалуження судин. Однак, сумарна площа розгалуження зростає. Так, сумарна площа всіх капілярів (близько 2000 см<sup>2</sup>) в сотні разів перевищує площу аорти - цим і пояснюється така мала швидкість крові в капілярах. Мала швидкість кровотоку в капілярах забезпечує ефективний масообмін між кров'ю і тканинами.

## Рівняння Бернуллі

Закон збереження енергії і рівняння нерозривності (безперервності) дозволяють отримати один з основних законів руху рідини. Розглянемо закон збереження енергії для елементів рідини рівної маси  $\Delta m$ , що втікають у трубку і витікають з неї, вважаючи, що вхід і вихід трубки розташовані на різних висотах (рис.6.1).

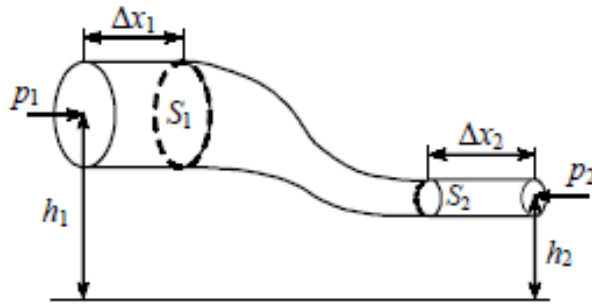


Рис. 6.1

Будемо вважати, що рідина нестислива, рух ізотермічний і тертя відсутнє. В цьому випадку:

$$U + A + W = const, \quad (6.1)$$

де  $U = \Delta mgh$  – потенціальна енергія елемента маси  $\Delta m$ , піднятого на висоту  $h$ ;

$A = pS\Delta x$  – робота тиску  $p$  по переміщенню елемента на довжину  $\Delta x$ ;

$S$  - площа поперечного перерізу трубки;

$W = \frac{\Delta m v^2}{2}$  – кінетична енергія;  $v$  – середня швидкість течії.

Рівняння (6.1) для двох перерізів трубки набуває вигляду:

$$\Delta mgh_1 + p_1 S_1 \Delta x_1 + \frac{\Delta m v_1^2}{2} = \Delta mgh_2 + p_2 S_2 \Delta x_2 + \frac{\Delta m v_2^2}{2}. \quad (6.2)$$

Масу елемента рідини  $\Delta m$  можна представити наступним чином:

$$\begin{aligned} \Delta m &= \rho \Delta V_1 = \rho S_1 \Delta x_1; \\ \Delta m &= \rho \Delta V_2 = \rho S_2 \Delta x_2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

З рівнянь (6.3) маємо:

$$S_1 \Delta x_1 = \frac{\Delta m}{\rho}; \quad S_2 \Delta x_2 = \frac{\Delta m}{\rho}. \quad (6.4)$$

Підставимо (6.4) в (6.2) і отримаємо:

$$\Delta mgh_1 + p_1 \frac{\Delta m}{\rho} + \frac{\Delta m v_1^2}{2} = \Delta mgh_2 + p_2 \frac{\Delta m}{\rho} + \frac{\Delta m v_2^2}{2}. \quad (6.5)$$

Проведемо ряд перетворень над рівнянням (6.5):

$$\begin{aligned} gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} &= gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}; \\ h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} &= h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}; \\ h + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} &= \text{const} \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

Комплекс  $h + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$  називається повним гідродинамічним напором.

Рівняння Бернуллі (6.6.1) зручно використовувати в наступному вигляді:

$$\rho gh + p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}, \quad (6.6.2)$$

де  $\rho gh$  (Па) – гідростатичний тиск, що створюється вагою вертикального стовпа рідини заввишки  $h$ ;

$p$  (Па) – статичний тиск, який чинять сусідні шари рідини один на одного;

$\frac{\rho v^2}{2}$  (Па) – динамічний тиск, що обумовлений рухом рідини.

*Рівняння Бернуллі формулюється наступним чином:* При стаціонарній течії ідеальної рідини повний тиск, що складається з гідростатичного, статичного і динамічного тисків, є сталим у кожному перерізі.

Рівняння Бернуллі є окремим випадком закону збереження енергії і виражає енергетичний баланс потоку.

Рівняння Бернуллі для двох перерізів:

$$\rho gh_1 + p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho gh_2 + p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (6.6.3)$$

В горизонтальній трубці  $h_1 = h_2$  і рівняння Бернуллі (6.6.3) набуває вигляду:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2};$$

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.} \quad (6.7)$$

Аналіз формули (6.7) показує, що збільшення швидкості рідини в перерізі трубки за рахунок звуження перерізу, призводить до зниження статичного тиску в зоні цього перерізу (рис. 6.2).

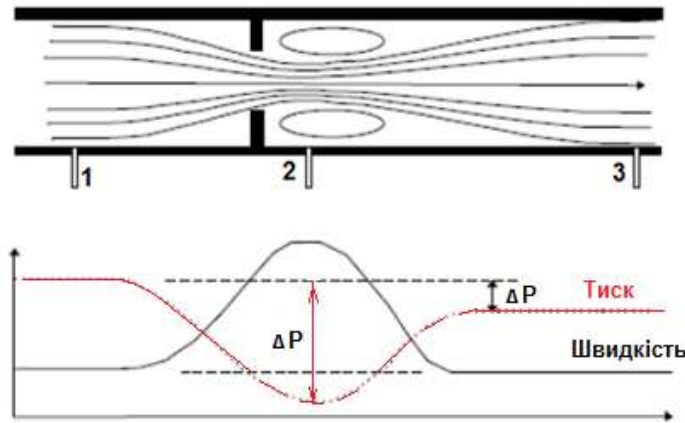


Рис. 6.2

У похилій трубці постійного перерізу середня швидкість рідини однакова  $v_1 = v_2$  і рівняння Бернуллі (6.6.3) набуває вигляду:

$$\rho g h_1 + p_1 = \rho g h_2 + p_2;$$

$$\rho g h + p = \text{const.} \quad (6.8)$$

### Кавітація

Розглянемо горизонтально розташовану трубку змінного перерізу (рис.6.3). Для горизонтальної трубки рівняння Бернуллі має вигляд:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

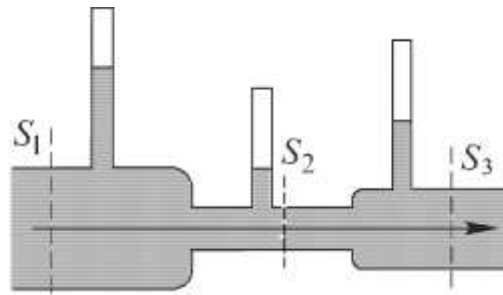


Рис.6.3

Якщо збільшувати швидкість руху рідини по трубці або при тій же самій витраті рідини зменшувати найвужчий переріз трубки  $S_2$ , то можна в цьому перерізі отримати негативний тиск. В цьому випадку рівняння Бернуллі набуває вигляду:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_{MIN} + \frac{\rho v_{MAX}^2}{2}.$$

З урахуванням рівняння нерозривності:  $v_1 S_1 = v_{MAX} S_{MIN}$  маємо:

$$p_{MIN} = p_1 - \frac{\rho v_{MAX}^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{S_{MIN}}{S_1} \right)^2 \right]. \quad (6.9)$$

При  $\frac{\rho v_{MAX}^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{S_{MIN}}{S_1} \right)^2 \right] > p_1$  мінімальний тиск  $p_{MIN}$  буде від'ємним і

рідина, що проходить через переріз труби з від'ємним тиском, закипає, при цьому, суцільність (нерозривність, безперервність) її порушується. Тобто, при падінні тиску до від'ємних значень з рідини виділяються бульбашки, що заповнені або паром рідини, або розчиненим у ній газом, або тим і іншим в тій чи іншій концентрації. Виникає, так звана, кавітація, тобто порушення суцільності середовища. Подібне явище може спостерігатися і при перебігу крові по судинному руслу. У цьому випадку має місце, так звана, повітряна емболія.

## Ламінарний і турбулентний режими течії

Рух рідини поділяють на два режими – ламінарний і турбулентний.

Ламінарний режим - впорядкований, шари рідини ковзають один відносно одного не змішуючись між собою.

Турбулентний режим - невпорядкований, окремі струмини рідини рухаються по складних траєкторіях, що весь час змінюються, і в рідині відбувається інтенсивне перемішування.

Режими течії рідин характеризується *критерієм Рейнольдса*:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}, \quad (6.10)$$

де  $\rho$  – густина рідини;

$v$  – середня швидкість в перерізі;

$d$  – внутрішній діаметр трубопроводу (кровоносної судини);

$\mu$  – динамічна в'язкість.

Перехід від ламінарної течії до турбулентної характеризується критичним значенням  $Re_{кр}$ . При течії рідини вздовж прямих гладких трубок  $Re_{кр} \approx 2300$ . При  $Re < 2300$  течія, як правило, є ламінарною. При  $Re > 2300$  найчастіше спостерігається турбулентний режим.

Ламінарний та турбулентний режими течії спостерігаються при течії крові по судинному руслу. Факторами, що впливають на характер руху крові, є радіус судини, лінійна швидкість кровотоку, густина крові та її в'язкість. При  $Re \leq 2000$  рух крові в судинах ламінарний, при  $Re > 2000$ , рух крові в усіх судинах переважно турбулентний. Частіше за все, це буває при істотному зростанні швидкості руху крові, наприклад, при фізичній роботі або при зменшенні її в'язкості при анеміях. Проявом турбулентного руху крові є шуми в серцево-судинній системі.

Щоб збільшити об'ємну витрату крові у 2 рази при ламінарній течії, треба збільшити тиск у 2 рази, а при турбулентній течії у 4. Таким чином, при турбулентній течії зростає навантаження на серце. В нормі турбулентна течія

крові (рис. 6.4) може спостерігатися при різкому звуженні чи розширенні судин, при розділенні однієї судини в декілька судин чи з'єднанні декількох судин в одну, при виході крові з серця і т. д.

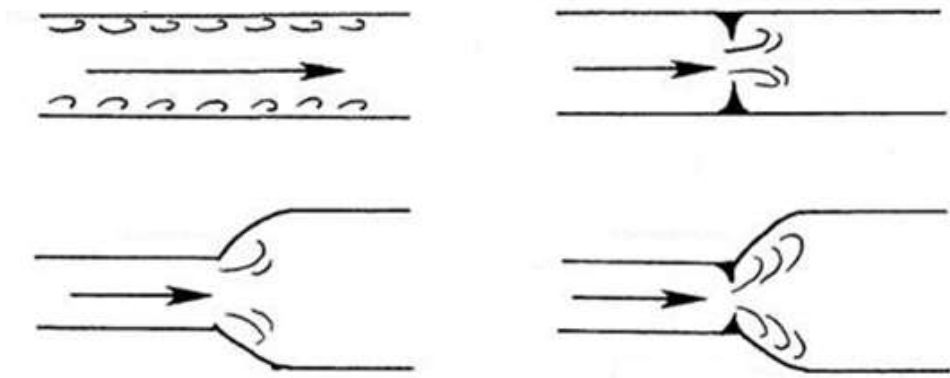


Рис. 6.4

У проксимальній частині аорти і легеневій артерії, під час фази швидкого вигнання крові зі шлуночків серця, число Рейнольдса може збільшуватися до декількох тисяч. Це призводить до розвитку турбулентності, де для цього існують сприятливі умови, а саме: пульсуючий характер і висока швидкість кровотоку, великий діаметр судини та різке змінення діаметра. Проте в дрібних судинах, число Рейнольдса практично ніколи не буває достатньо високим, щоб викликати турбулентність.

### Рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини

При русі реальних рідин починають діяти сили внутрішнього тертя, що обумовлені в'язкістю рідини і режимом її течії, а також сили тертя об стінки трубки. Ці сили чинять опір руху рідини. На подолання виникаючого гідравлічного опору витрачається частина енергії потоку. Тому, загальна кількість енергії потоку по довжині трубопроводу безперервно зменшується. Для двох будь-яких перерізів трубопроводу, розташованих по ходу руху реальної рідини, має місце нерівність:

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} > h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Для дотримання балансу при русі реальної рідини, в праву частину нерівності додається величина  $H_{1-2}$ , що компенсує втрати питомої енергії на подолання опорів між перерізами 1 і 2. В цьому випадку рівняння Бернуллі (6.6.1) набуває вигляду:

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \approx h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + H_{1-2}. \quad (6.11)$$

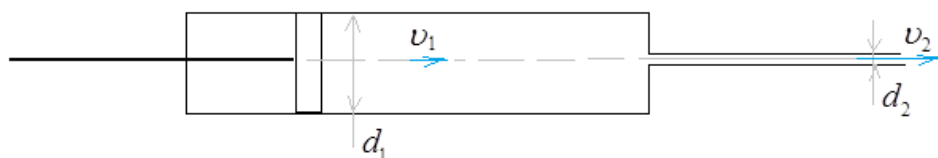
Оскільки розподіл швидкостей в площині перерізу потоку нерівномірний, вводиться коефіцієнт  $\alpha$ , що представляє собою відношення дійсної кінетичної енергії потоку до кінетичної енергії, розрахованої по середній швидкості в перерізі. Коефіцієнт  $\alpha$  називається коефіцієнтом кінетичної енергії потоку, або *коефіцієнтом Коріоліса*, і відображає нерівномірність розподілу місцевих швидкостей по перерізу потоку. При ламінарному режимі течії в круглій трубці  $\alpha = 2$ , при турбулентному  $\alpha = 1,1 \dots 1,3$ .

Остаточний вигляд рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини:

$$\begin{aligned} \rho g h_1 + p_1 + \rho \frac{\alpha_1 v_1^2}{2} &= \rho g h_2 + p_2 + \rho \frac{\alpha_2 v_2^2}{2} + \rho g H_{1-2}; \\ \rho g H_{1-2} &= \rho g (h_1 - h_2) + (p_1 - p_2) + \frac{\rho}{2} (\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2); \\ H_{1-2} &= (h_1 - h_2) + \frac{(p_1 - p_2)}{\rho g} + \frac{\rho}{2g} (\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2). \end{aligned} \quad (6.12)$$

де  $v_1, v_2$  – середні швидкості в перерізах 1 і 2.

**Приклад 1.** Фізіологічний розчин з густиною  $1050 \text{ кг/м}^3$  упорскують зі шприца діаметром 20 мм через голку діаметром 2 мм. Швидкість розчину в голці 0,5 м/с. Який тиск ( $\Delta p$ ) розвивається у шприці при горизонтальному введенні розчину?



**Розв'язання.** Позначимо переріз шприца індексом 1, а переріз голки - індексом 2. Згідно з теоремою про нерозривність струменя, якщо течія рідини стала, то через довільні поперечні перерізи однієї і тієї ж трубки протікає в одиницю часу однаковий об'єм нестискуваної рідини:

$$Q = v_1 \pi R_1^2 = v_2 \pi R_2^2 \rightarrow v_1 R_1^2 = v_2 R_2^2,$$

де  $R_1$ ,  $R_2$  - відповідно радіус шприца і голки;  $v_1$ ,  $v_2$  - відповідно швидкість розчину у шприці та голці.

Визначимо швидкість руху розчину у шприці:

$$v_1 = \frac{v_2 R_2^2}{R_1^2} = v_2 \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 = v_2 \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 0,5 \left( \frac{2}{20} \right)^2 = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

Тиск, що розвивається у шприці при горизонтальному положенні знайдемо з рівняння Бернуллі за формулою (6.7):

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2};$$

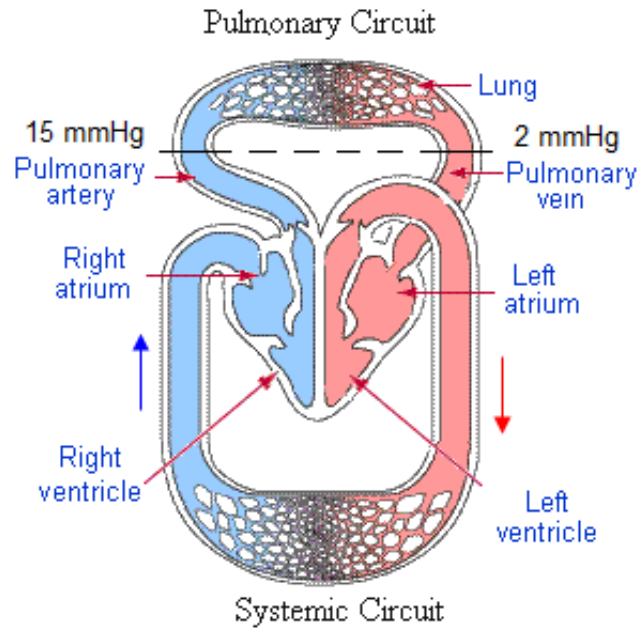
$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2);$$

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2);$$

$$\Delta p = \frac{1050}{2} \left[ 0,5^2 - (0,5 \cdot 10^{-2})^2 \right] = 131,24 \text{ Па}.$$

*Відповідь:*  $\Delta p = 131,24 \text{ Па}$ .

**Приклад 2.** На рисунку представлено велике і мале коло кровообігу. Визначити енергію, що витрачається на подолання опору в легневих капілярах за наступних умов: відсутні зміни потенціальної енергії, кров нестислива рідина, судини мають циліндричну форму. Легневий кровотік  $Q = 5$  л/хв. Тиск у легневій артерії  $p_1 = 15$  мм рт.ст., у легневій вені  $p_2 = 2$  мм рт.ст.. Діаметр легеневої артерії  $d_1 = 3,0$  см; легеневої вени  $d_2 = 2,5$  см. В'язкість крові  $\mu = 3$  мПа·с; густина  $\rho = 1,056$  г/см<sup>3</sup>.



**Розв'язання.** Питому енергію, що витрачається на подолання опору в легеневих капілярах, знайдемо за формулою (6.12):

$$H_{1-2} = (h_1 - h_2) + \frac{(p_1 - p_2)}{\rho g} + \frac{\rho}{2g} (\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2).$$

Перерізи 1 і 2 знаходяться на однаковому рівні, тобто  $h_1 = h_2$ . В цьому випадку формула (6.12) набуває вигляду:

$$H_{1-2} = \frac{(p_1 - p_2)}{\rho g} + \frac{\rho}{2g} (\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2).$$

Визначимо середню швидкість крові в легеневій артерії та легеневій вені:

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 60} = 0,118 \text{ м / с};$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (2,5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 60} = 0,17 \text{ м / с}.$$

Визначимо критерій Рейнольдса в легеневій артерії та легеневій вені:

$$\text{Re}_1 = \frac{d_1 v_1 \rho}{\mu} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 0,118 \cdot 1056}{3 \cdot 10^{-3}} = 1246;$$

$$\text{Re}_2 = \frac{d_2 v_2 \rho}{\mu} = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,17 \cdot 1056}{3 \cdot 10^{-3}} = 1496.$$

При  $Re < 2000$  течія ламінарна. Коефіцієнт Коріоліса при ламінарній течії складає  $\alpha = 2$ .

Визначаємо питому енергію, що витрачається на подолання гідравлічного опору в легеневих капілярах між перерізами 1 і 2.

$$H_{1-2} = \frac{(15 - 2) \cdot 133,322}{1056 \cdot 9,8} + \frac{2(0,118^2 - 0,17^2)}{2 \cdot 9,8} = 0,166 \text{ м.}$$

Визначимо енергію, що витрачається на подолання гідравлічного опору в легеневих капілярах за одиницю часу за формулою:

$$E = \rho g Q H_{1-2},$$

де  $\rho g Q$  - вага крові, що проходить через легеневі капіляри за одиницю часу.

$$E = 1056 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{60 \text{ с}} \cdot 0,166 \text{ м} = 0,143 \text{ Вт.}$$

*Відповідь:*  $E = 0,143 \text{ Вт.}$

#### 6.4. Контрольні питання

1. Дайте визначення ідеальній рідині. Наведіть основні рівняння, що описують перебіг ідеальної рідини.
2. Дайте визначення і поясніть різницю між об'ємною і лінійною швидкостями руху рідини. Який зв'язок між ними?
3. Сформулюйте закон збереження маси.
4. Наведіть формулу Бернуллі. Поясніть фізичну суть вхідних величин.
5. Охарактеризуйте режими течії, дайте визначення числу Рейнольдса.
6. Перелічіть умови виникнення кавітації. Наведіть приклади корисного застосування цього явища.
7. Який вигляд має рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини? Яка фізична суть коефіцієнтів Коріоліса?
8. Чим обумовлена зміна тиску в судині при аневризмі і при звуженні просвіту судини.

9. По горизонтальній трубці, що звужена посередині, рухається без тертя ідеальна рідина. Як змінюється повний гідродинамічний напір (ПГН) по довжині трубки?
- а) ПГН максимальний на вході у трубку;
  - б) ПГН мінімальний посередині трубки;
  - в) ПГН не змінюється по довжині трубки.
10. Тиск крові 80 мм рт.ст. означає, що дійсний тиск крові а) перевищує атмосферний тиск; б) нижче атмосферно тиску; в) дорівнює атмосферному тиску.

## ЛЕКЦІЯ 7

### НЬЮТОНІВСЬКІ ТА НЕНЬЮТОНІВСЬКІ РІДИНИ

#### Фізична суть в'язкості

При русі реальної рідини в ній виникають сили внутрішнього тертя. Ці сили діють між сусідніми шарами рідини, що переміщуються один відносно одного та чинять опір руху.

Властивість рідких речовин чинити опір переміщенню однієї їх частини відносно іншої називається в'язкістю.

Розглянемо одновимірну ламінарну течію в'язкої рідини між двома паралельними пластинами, одна з яких рухається відносно іншої зі швидкістю  $v$  під дією прикладеної сили  $F$  (рис. 7.1). Площа пластин  $S \gg$  ширини зазору між пластинами  $h$ . Профіль швидкостей представлений на рисунку.

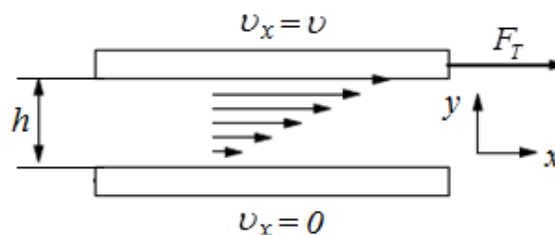


Рис. 7.1. Течія Куетта

При обтіканні твердих поверхонь в'язкою рідиною відбувається її гальмування. Прийнято вважати, що швидкість руху в'язкої рідини безпосередньо у поверхні дорівнює швидкості руху поверхні. Таким чином, швидкість рідини біля нерухомої поверхні дорівнює 0.

Згідно із законом внутрішнього тертя Ньютона, виникаюча сила внутрішнього тертя  $F_T$  прямо пропорційна площі дотичних шарів  $S$  і градієнту швидкості (швидкості зсуву)  $\frac{dv}{dy} = \dot{\gamma} [\text{с}^{-1}]$ .

Градiєнт швидкостi визначає змiну швидкостi при переходi вiд одного шару рiдини до iншого в напрямку, перпендикулярному швидкостi руху рiдини. Закон внутрiшнього тертя Ньютонa має вигляд:

$$F_T = \mu S \frac{dv}{dy}; \quad \rightarrow \quad \frac{F_T}{S} = \mu \frac{dv}{dy} \quad \rightarrow \quad \tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (7.1)$$

де  $\tau$  - напруження внутрiшнього тертя (дотичне напруження, або напруження зсуву, [Па]), що виникає мiж шарами рiдини, що рухається;  $\mu$  - коефiцiєнт динамiчної в'язкостi (далi - коефiцiєнт в'язкостi), [Па·с].

Коефiцiєнт в'язкостi  $\mu$  чисельно дорiвнює силi тертя, яка виникає мiж шарами рiдини одиничної площi при градiєнті швидкостi, рiвному одиницi

$$\mu = \frac{F_T}{S \left| \frac{dv}{dy} \right|}. \quad (7.2)$$

Рiдина, для якої коефiцiєнт в'язкостi не залежить вiд умов течiї, називається ньютонiвською. В'язкостi ньютонiвської рiдини постiйна при заданих температурi i тиску. Залежнiсть напруження внутрiшнього тертя  $\tau$  вiд градiєнта швидкостi  $\dot{\gamma}$  називається кривою течiї i для ньютонiвської рiдини має вигляд прямої лiнii (рис. 7.2).

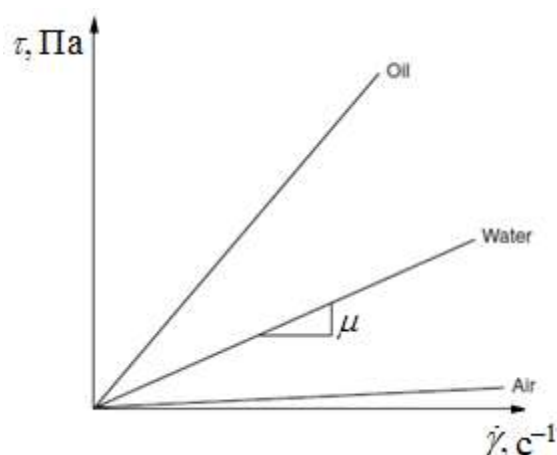


Рис. 7.2. Криві течiї ньютонiвських рiдин

### Ламінарний потік ньютонівської рідини в циліндричній трубці

Розглянемо прямолінійну осесиметричну сталу течію ньютонівської рідини з в'язкістю  $\mu$  під дією перепаду тисків  $(p_1 - p_2)$  на ділянці циліндричної трубки радіуса  $R$  і завдовжки  $L$ . При сталому русі сума проєкцій усіх сил на вісь потоку дорівнює нулю. Виходячи з цієї умови, отримаємо рівняння для швидкості як функції радіуса:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R^2 - r^2). \quad (7.3)$$

Швидкість набуває максимального значення на осі трубки, де  $r = 0$ :

$$v_{MAX} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} R^2. \quad (7.4)$$

Розділивши рівняння (7.3) на (7.4), отримаємо залежність між  $v(r)$  і  $v_{MAX}$ :

$$\frac{v(r)}{v_{MAX}} = \frac{(R^2 - r^2)}{R^2} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2; \quad v(r) = v_{MAX} \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]. \quad (7.5)$$

Рівняння (7.5) відображає параболічний розподіл швидкостей в поперечному перерізі трубки при сталій ламінарній течії.

Для визначення витрати рідини при ламінарному русі розглянемо елементарний кільцевий переріз (рис. 7.3 б) із внутрішнім радіусом  $r$  і зовнішнім радіусом  $(r + dr)$ , площа якого становить:  $dS = 2\pi r dr$ .

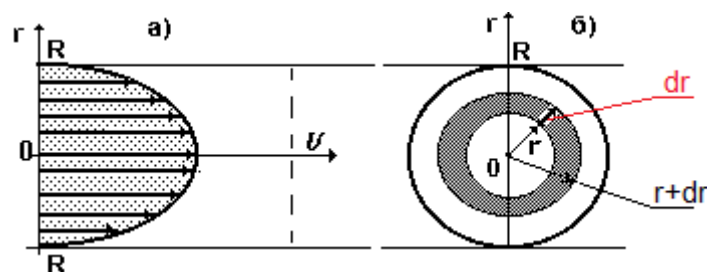


Рис. 7.3

Об'ємна витрата рідини через цей переріз складає:

$$dQ = v(r)dS = v(r)2\pi r dr.$$

З урахуванням рівняння (7.3), об'ємна витрата рідини в елементарному перерізі становить:

$$dQ = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R^2 - r^2) 2\pi r dr.$$

Інтегруючи останнє рівняння від 0 до R, отримаємо загальну витрату рідини через трубку:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{(p_1 - p_2)}{L}. \quad (7.6)$$

Рівняння (7.6), що визначає витрату рідини при сталому ламінарному русі по круглій прямій трубці, носить назву **формули Пуазейля**.

Визначимо середню швидкість рідини в трубці:

$$v_{\text{СЕР}} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{L}}{\pi R^2} = \frac{p_1 - p_2}{8\mu L} R^2. \quad (7.7)$$

При порівнянні максимальної швидкості в трубці (7.4) із середньою (7.7) отримаємо:

$$v_{\text{СЕР}} = \frac{v_{\text{MAX}}}{2}; \quad v_{\text{MAX}} = 2v_{\text{СЕР}}.$$

Формулу Пуазейля можна представити у виді:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{(p_1 - p_2)}{L} = \frac{\Delta p}{X},$$

де  $X = \frac{8\mu L}{\pi R^4}$  - гідравлічний опір.

Отримане рівняння  $Q = \frac{\Delta p}{X}$  аналогічно закону Ома:  $I = \frac{\Delta U}{R}$ ,

де  $Q$  - об'ємна витрата рідини є аналогом сили струму  $I$ ;  $\Delta p$  - перепад тиску рідини на даній ділянці трубки є аналогом різниці потенціалів  $\Delta U$ ;  $X$  - гідравлічний опір є аналогом електричного опору  $R$ .

Таким чином, для моделювання гідродинамічних процесів можна використовувати електричні моделі.

**Приклад 1.** Радіус кровоносної судини по всій довжині зменшився на 20%. У скільки разів зміниться об'ємна витрата рідини через судину за інших рівних умов? Об'ємна витрата рідини через судину збільшиться чи зменшиться?

**Розв'язання.** Об'ємна витрата рідини через судину радіусом  $R$  визначається за формулою Пуазейля (7.6):

$$Q = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\mu L}.$$

Радіус кровоносної судини по всій довжині зменшився на 20%, тобто став дорівнювати:  $R' = 0,8R$ . Об'ємна витрата рідини через судину, радіус якої зменшився на 20%, становить:

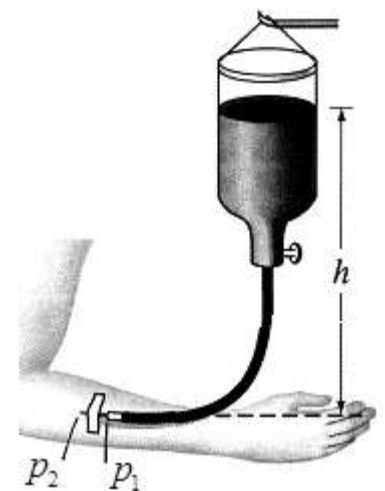
$$Q' = \frac{\pi (R')^4 (p_1 - p_2)}{8\mu L} = \frac{\pi (0,8R)^4 (p_1 - p_2)}{8\mu L} = 0,4096Q.$$

Об'ємна витрата рідини через судину зменшилася. Для визначення у скільки разів зменшилася, знайдемо відношення об'ємних витрат:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{1}{0,4096} = 2,44.$$

**Відповідь:** При зменшенні радіуса кровоносної судини на 20%, об'ємна витрата рідини зменшиться в 2,44 рази.

**Приклад 2.** Пацієнту проводять трансфузію крові. Кров надходить з об'ємною витратою  $0,05 \text{ см}^3/\text{с}$  із контейнера по трубці в голку, встромлену у вену, тиск в якій  $p_B = 9 \cdot 10^3 \text{ Па}$ . Визначити висоту  $h$ , на якій необхідно встановити контейнер, за наступних умов: густина та коефіцієнт в'язкості крові відповідно дорівнюють  $1050 \text{ кг/м}^3$  і  $4 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ ; довжина голки 20 мм, внутрішній діаметр 0,5 мм.



**Розв'язання.** Кров надходить у вену за рахунок різниці тисків:

$$\Delta p = p_1 - p_2,$$

де  $p_1 = \rho gh$ ;  $p_2 = p_B$ .

Безпосередньо у вену кров надходить через голку. При цьому, об'ємна витрата крові, згідно з рівнянням Пуазейля (7.6), дорівнює:

$$Q = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\mu L} = \frac{\pi R^4 (\rho gh - p_B)}{8\mu L}.$$

З наведеного рівняння знайдемо  $h$ :

$$h = \frac{Q \frac{8\mu L}{\pi R^4} + p_B}{\rho g}.$$

В отриману формулу підставимо числові значення величин в системі СІ:

$$h = \frac{0,05 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{\pi (0,25 \cdot 10^{-3})^4} + 9 \cdot 10^3}{1050 \cdot 9,81} = 1,13 \text{ м.}$$

*Відповідь:*  $h = 1,13 \text{ м.}$

### Неньютонівські рідини

Неньютонівська рідина - це модель рідини, для якої напруження  $\tau$  внутрішнього тертя описуються нелінійною залежністю від градієнта швидкості  $\dot{\gamma}$ . В'язкість неньютонівських рідин (рис. 7.4) залежить від гідродинамічних умов течії, градієнта швидкості, передісторії рідини, її структури тощо.

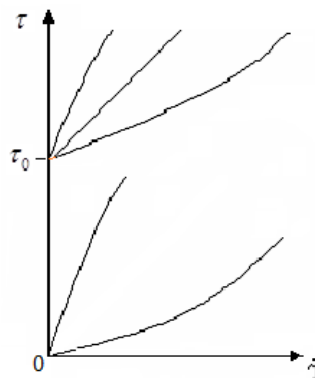


Рис. 7.4. Криві течії неньютонівських рідин

## Рівняння Шульмана

Неньютонівські рідини підпорядковуються рівнянню Шульмана:

$$\tau^m = \tau_o^m + K^n \dot{\gamma}^n, \quad (7.8)$$

де  $n$ ,  $m$  - індекси течії;  $\tau_o$  - межа плинності (текучості);  $K$  - коефіцієнт консистенції.

Рівняння Шульмана (7.8) при  $m = n = 1$ ,  $\tau_o = 0$ ,  $K = \mu$  перетворюється в рівняння (7.1) Ньютона (рис. 7.5, лінія В):

$$\tau = \mu \dot{\gamma}.$$

Рівняння (7.8) при  $m = 1$ ,  $\tau_o = 0$ ,  $K^n = K$  перетворюється в модель Оствальда:

$$\tau = K \dot{\gamma}^n. \quad (7.9)$$

Модель Оствальда описує реологічну поведінку: ньютонівських рідин при  $n = 1$  (рис. 7.5, лінія В); дилатантних рідин при  $n > 1$  (рис. 7.5, лінія С); псевдопластичних рідин при  $n < 1$  (рис. 7.5, лінія D).

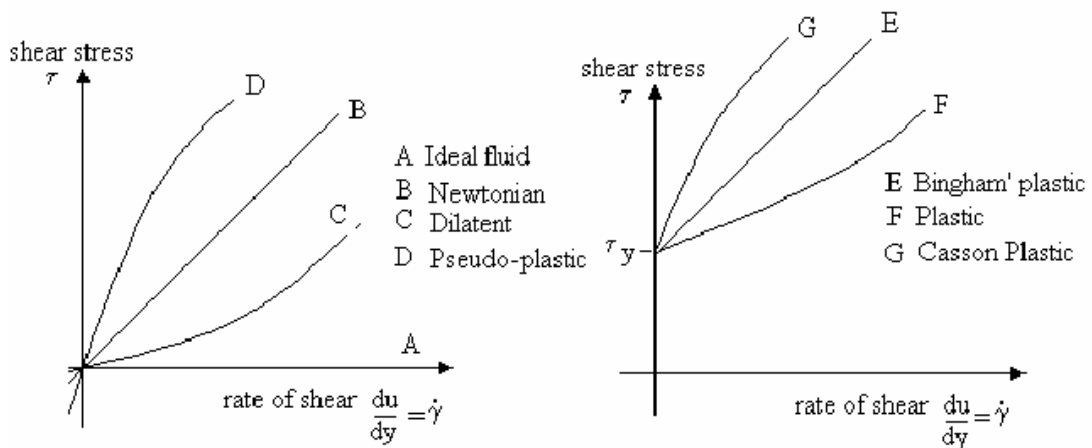


Рис. 7.5. Криві течії неньютонівських рідин

Рівняння (7.8) при  $m = 1$ ,  $K^n = K$  перетворюється в модель Гершеля-Балклі:

$$\tau = \tau_o + K \dot{\gamma}^n. \quad (7.10)$$

Рівняння (7.10) при  $n = 1$  перетворюється в рівняння Бінгама (рис. 7.5, лінія E):

$$\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}. \quad (7.11)$$

При  $\tau \leq \tau_0$  ( $\dot{\gamma} = 0$ ) бінгамівська рідина знаходиться у твердому стані, а при  $\tau > \tau_0$  ( $\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}$ ) у в'язко-пластичному.

Модель Гершеля-Балклі (7.10) при  $n > 1$  описує реологічну поведінку пластичних рідин (рис. 7.5, лінія F).

Рівняння Шульмана (7.8) при  $m = 1/2$ ,  $n = 1/2$  перетворюється в рівняння Кессона (рис. 7.5, лінія G):

$$\tau^{1/2} = \tau_0^{1/2} + K^{1/2}\dot{\gamma}^{1/2}. \quad (7.12)$$

При  $\tau \leq \tau_0$  ( $\dot{\gamma} = 0$ ) кессонівська рідина знаходиться у твердому стані, а при  $\tau > \tau_0$  ( $\tau^{1/2} = \tau_0^{1/2} + K^{1/2}\dot{\gamma}^{1/2}$ ) - у в'язко-пластичному.

Рівняння Кессона можна представити у вигляді:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{K}\sqrt{\dot{\gamma}}; \quad \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\eta}\sqrt{\dot{\gamma}}. \quad (7.13)$$

Початок вивченню реологічних властивостей біологічних рідин поклав Ж. Пуазейль, який почав в 30-40-х роках ХІХ ст. спробу оцінити в'язкість крові. Протягом, майже, ста років передбачалося, що кров належить до ньютонівських рідин, і тільки в 20-х роках ХХ ст. було встановлено, що в'язкість крові залежить від швидкості та напруження зсуву. Подальші дослідження показали, що нормальна кров подібна до псевдопластиків.

Розглянемо деякі неньютонівські рідини.

*Бінгамівські рідини* відносяться до в'язко-пластичних, течія яких починається лише після перевищення деякого критичного напруження  $\tau_0$ , яке називається межею плинності (текучості). Крива течії таких середовищ при  $\dot{\gamma} = 0$  відсікає на осі напруження  $\tau$  відрізок кінцевої довжини, рівної  $\tau_0$ . Межа плинності  $\tau_0$  характеризує пластичні властивості матеріалу. Для бінгамівських рідин має місце залежність, яка називається моделлю Бінгама (7.11) і може бути представлено в наступному вигляді:

$$\tau = \tau_0 + \mu_{III}\dot{\gamma}, \quad (7.14)$$

де  $\mu_{пл}$  - пластична в'язкість, яка дорівнює тангенсу кута нахилу кривої течії;  
 $\tau_0$  - напруження, яке необхідно прикласти, щоб рідина потекла.

Механічна модель бінгамівської рідини, що складається з елементу Ньютона і елементу Сен-Венана (рис. 7.6), називається моделлю Шведова-Бінгама. Елемент Сен-Венана зображується у вигляді пари тертя. Він нерухомий при навантаженні нижче межі плинності.

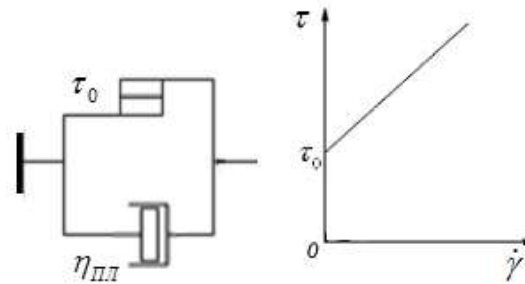


Рис. 7.6 – Механічна модель бінгамівської рідини - модель Шведова-Бінгама

Моделю Шведова-Бінгама передбачає наявність у рідині жорсткої структури, яка перешкоджає течії при напруженнях, менших за межу плинності  $\tau_0$ . При досягненні межі плинності структура рідини, майже, повністю руйнується. При напруженні  $\tau > \tau_0$  рідина тече, як звичайна ньютонівська рідина. Коли напруження стає меншим за межу плинності  $\tau_0$ , жорстка структура відновлюється.

*Псевдопластичні рідини* починають текти, як і ньютонівські, вже при найменших значеннях напруження, проте для цих рідин відношення напруження зсуву до градієнта швидкості, так звана *уявна в'язкість*  $\mu_y$ , залежить від величини напруження  $\tau$ . Значення  $\mu_y$  знижуються зі зростанням  $\dot{\gamma}$  і крива течії поступово переходить у пряму з постійним нахилом  $\mu_\infty$  (в'язкість при нескінченно великому зсуві). Крива течії для псевдопластичних рідин у широких межах змінення змінних (окрім ділянки, де  $\mu_y = \mu_\infty$ ) близька до лінійної і може бути виражена залежністю (7.9)  $\tau = K \dot{\gamma}^n$ . Величина  $K$  зростає зі збільшенням в'язкості і є мірою консистенції рідини. Величина  $n$  знаходиться в межах  $0 < n < 1$ , причому, чим менше  $n$ , тим

значніше відрізняється течія псевдопластичної рідини від ньютонівської, для якої  $n = 1$  і отже  $K = \mu$ .

Характер змінення  $\mu_v$  для псевдопластичних рідин, наприклад для суспензій з асиметричними частками, часто пов'язаний з орієнтацією їх часток (молекул) у напрямку переміщення рідини. Так, довгі частки суспензій витягуються в паралельні ланцюжки при значних швидкостях зсуву, в результаті величини  $\dot{\gamma}$  і  $\tau$  стають пропорційними одна одній. **Отже, механізм псевдопластичності - зниження внутрішнього тертя зі збільшенням швидкості зсуву.**

До псевдопластичних рідин відноситься цілісна кров. Зі збільшенням швидкості зсуву формені елементи крові (еритроцити) орієнтуються потоком і витягуються в напрямку потоку, а потім починають обертатися, що веде до значного зниження внутрішнього тертя, тобто в'язкості.

*Дилатантні рідини*, на відміну від псевдопластичних, характеризуються зростанням уявної в'язкості  $\mu_v$  зі збільшенням  $\dot{\gamma}$ . Для них також можна застосовувати залежність (7.9), але показник ступеня  $n > 1$ . Дилатантні рідини, як правило, є суспензіями з великим змістом твердої фази. Механізм дилатансії - розпад часток структури середовища, їх дезорієнтація потоком і посилення зіткнень, тобто спостерігається «сухе» тертя між частками, що стикаються.

## КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дайте визначення силі внутрішнього тертя?
2. Чим обумовлена в'язкість рідини і від яких параметрів вона залежить?
3. Вкажіть одиницю СІ коефіцієнта в'язкості.
4. Дайте пояснення щодо градієнта швидкості? В яких одиницях він вимірюється?
5. Наведіть рівняння Ньютона для в'язкого перебігу рідини. Поясніть фізичну суть вхідних величин.
6. Дайте загальну характеристику ньютонівським і неньютонівським рідинам.
7. Яка різниця між коефіцієнтом в'язкості для ньютонівських і неньютонівських рідин.
8. Дайте характеристику бінгамівській рідині.
9. Дайте характеристику псевдопластичній рідині.
10. Дайте характеристику дилатантній рідині.
11. Наведіть рівняння Шульмана і проаналізуйте його.
12. Приведіть основні залежності руху ньютонівської рідини по трубці.
13. Проаналізуйте рівняння Пуазейля.
14. Назвіть фактори, що впливають на гідродинамічний опір.
15. Запишіть рівняння Гершеля-Балклі, поясніть його фізичну суть і значення кожного символу.
16. Запишіть рівняння Освальда, поясніть його фізичну суть і значення кожного символу.
17. Які реологічні параметри можна визначати по кривій течії?
18. За допомогою яких показників можна віднести реологічне тіло до рідких чи твердих?
19. Як впливає температура на зсувні характеристики. Приведіть приклади

## ЛЕКЦІЯ 8

### НАПРУЖЕННЯ ВНУТРІШНЬОГО ТЕРТЯ

#### Розподіл напруження внутрішнього тертя в потоці рідини

По трубці з внутрішнім радіусом  $R$  рухається рідина з в'язкістю  $\mu$  і об'ємною витратою  $Q$  (рис. 8.1).

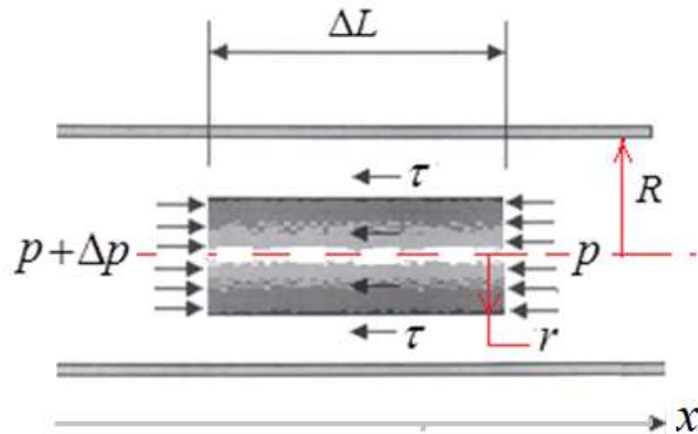


Рис. 8.1

Розглянемо елементарний циліндр рідини довжиною  $\Delta L$  і радіусом  $r$ . Оскільки рух сталий, сума сил, що діють на елементарний циліндр, має дорівнювати 0:

$$(p + \Delta p) \pi r^2 - p \pi r^2 - \tau 2\pi r \Delta L = 0;$$

$$\Delta p \pi r^2 - \tau 2\pi r \Delta L = 0;$$

$$\Delta p r = 2\tau \Delta L.$$

Напруження внутрішнього тертя, що виникає між шарами рідини на відстані  $r$  від осі, дорівнює:

$$\tau = \frac{r \Delta p}{2 \Delta L}. \quad (8.1)$$

Як видно з формули (8.1), напруження внутрішнього тертя вздовж осі трубки, тобто при  $r = 0$ , дорівнює нулю.

При  $r = R$ , тобто безпосередньо у стінки трубки, напруження внутрішнього тертя досягає максимального значення:

$$\tau_w = \tau_{MAX} = \frac{R \Delta p}{2 \Delta L}. \quad (8.2)$$

Розділимо (8.1) на (8.2) і отримаємо:

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{r}{R} \quad \rightarrow \quad \tau(r) = \tau_w \frac{r}{R}. \quad (8.3)$$

Аналізуючи рівняння (8.3), можна зробити висновок, що розподіл напруження внутрішнього тертя по перерізу потоку (рис. 8.2) рідини лінійно змінюється за радіусом:

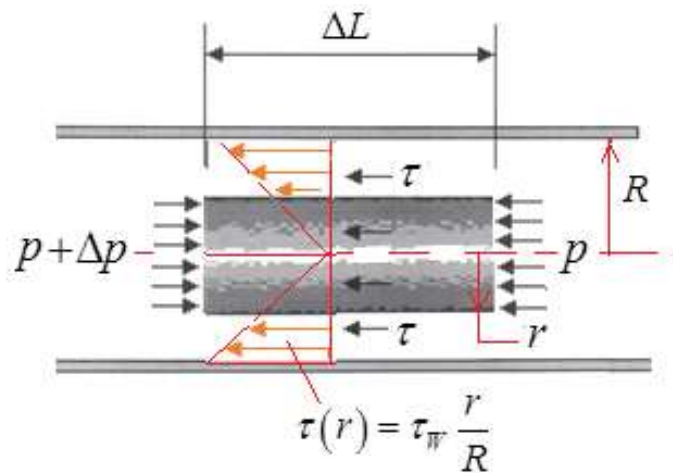


Рис. 8.2

Формулу Пуазейля для циліндра радіусом  $R$  і довжиною  $\Delta L$  можна представити в наступному вигляді:

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = \frac{8\mu Q}{\pi R^4}. \quad (8.4)$$

Після підстановки (8.4) у формулу (8.2), отримаємо наступні залежності:

$$\tau_w = \frac{R\Delta p}{2\Delta L} = \frac{R}{2} \cdot \frac{8\mu Q}{\pi R^4} = \frac{4\mu Q}{\pi R^3} = \frac{32\mu Q}{\pi D^3}. \quad (8.5)$$

$$\mu = \frac{\pi R^3}{4Q} \tau_w = \frac{\pi D^3}{32Q} \tau_w. \quad (8.6)$$

$$Q = \frac{\pi R^3}{4\mu} \tau_w = \frac{\pi D^3}{32\mu} \tau_w. \quad (8.7)$$

Аналізуючи залежність (8.7), можна зробити наступний висновок: Для ньютонівської рідини ( $\mu = const$ ), що тече по трубі незмінного перерізу

( $R = const$ ), має місце прямо-пропорційна залежність між об'ємною витратою рідини  $Q$  і напруженням внутрішнього тертя на стінці трубки  $\tau_w$ .

Гradient швидкості (швидкість зсуву, the shear rate) в шарі рідини, що прилягає до стінки, згідно із законом внутрішнього тертя, дорівнює:

$$\dot{\gamma}_w = \frac{\tau_w}{\mu} = \frac{4\mu Q}{\pi R^3} = \frac{4}{\pi R^3} Q = \frac{4}{\pi R^3} v_{CEP} \pi R^2 = 4 \frac{v_{CEP}}{R} = 8 \frac{v_{CEP}}{D}. \quad (8.8)$$

Прийнято вважати, що в капілярах, з причини їх малого діаметру, напруження внутрішнього тертя однакове по перерізу і дорівнює напруженню внутрішнього тертя на стінці.

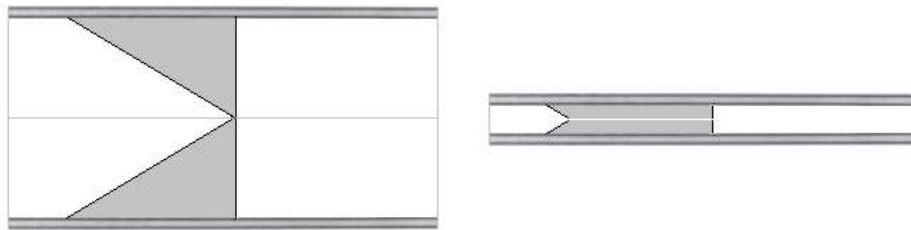


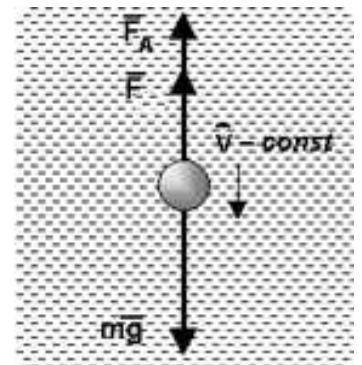
Рис.8.3. Розподіл напруженню внутрішнього тертя в крупних судинах і капілярах

## Методи визначення коефіцієнта в'язкості

### Метод Стокса

При русі невеликої кульки у в'язкій рідині виникають сили опору  $F$ .

Шари рідини, що прилеглі до кульки, захоплюються нею. Між цими шарами і наступними виникають сили тертя. При невеликих швидкостях, коли за кулькою не виникають завихрення, сила опору



обумовлена лише в'язкістю рідини. Згідно із *законом Стокса*, при русі кульки у в'язкій рідині з невеликою швидкістю, коли відсутні завихрення, сила опору визначається за формулою:

$$F = 6\pi \mu Rv, \quad (8.9)$$

де  $\mu$  - в'язкість рідини,  $R$  - радіус кульки,  $v$  - швидкість руху кульки.

На кульку, що рухається в рідині, діють наступні сили: **сила тяжіння, виштовхуюча сила і сила опору**. При цьому, напрямок сили опору протилежний до напрямку руху кульки. При рівномірному русі, відповідно до першого закону Ньютона, сума сил має дорівнювати нулю:

$$-\rho_1 g \frac{4}{3} \pi R^3 + \rho_2 g \frac{4}{3} \pi R^3 + 6\pi\mu Rv = 0, \quad (8.10)$$

де  $\rho_1$  і  $\rho_2$  - відповідно густина кульки і рідини.

З рівняння (8.10) знайдемо в'язкість рідини:

$$\mu = \frac{2R^2(\rho_1 - \rho_2)g}{9v} = \frac{D^2(\rho_1 - \rho_2)g}{18v}. \quad (8.11)$$

Для визначення в'язкості за методом Стокса беруть високий скляний циліндр з досліджуваною рідиною (рис. 8.4). Діаметр циліндра повинен бути таким, щоб кулька при падінні не торкалася стінок і не виникали завихрення. На циліндрі має бути дві кільцеві мітки А і В. Мітка А відповідає тій висоті, де рух кульки стає рівномірним. Нижня мітка В нанесена для зручності відліку часу.

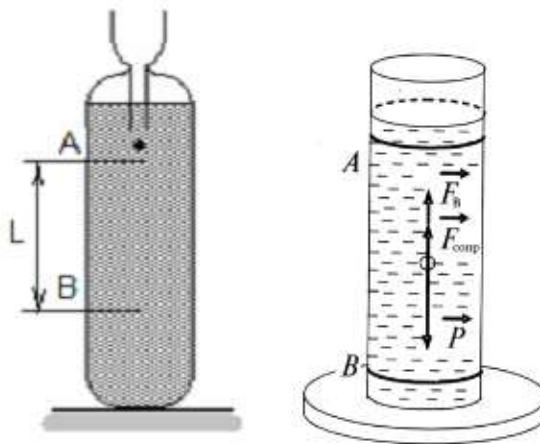


Рис.8.4

Відпускаючи кульку в досліджувану рідину, відзначають час  $t$  проходження кулькою відстані  $L$  між мітками А і В. Оскільки  $v = L/t$ , то формула для визначення в'язкості набуває вигляду:

$$\mu = \frac{D^2 g \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot t}{18L}. \quad (8.12)$$

*Методи Оствальда і Гесса*

Ці методи засновані на використанні *формули Пуазейля*, згідно з якою об'єм рідини  $V$ , що протікає за час  $t$  по капілярній трубці радіуса  $R$  і довжиною  $L$  при ламінарній течії, визначається співвідношенням:

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L};$$

$$\mu = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8VL}.$$

Набагато зручніше користуватися формулою Пуазейля для відносного визначення коефіцієнта в'язкості. Візьмемо еталонну рідину з відомим коефіцієнтом в'язкості  $\mu_0$  і досліджувану рідину з невідомим коефіцієнтом  $\mu_1$ . Час витікання однакового об'єму  $V$  двох рідин через однакові капіляри, відповідно позначимо  $t_0$  і  $t_1$ .

В'язкість еталонної і досліджуваної рідини відповідно дорівнюють:

$$\mu_0 = \frac{\pi R^4 \Delta p_0 t_0}{8VL}; \quad \mu_1 = \frac{\pi R^4 \Delta p_1 t_1}{8VL}.$$

Знайдемо відношення цих в'язкостей:

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\Delta p_1 t_1}{\Delta p_0 t_0}; \quad \mu_1 = \mu_0 \frac{\Delta p_1 t_1}{\Delta p_0 t_0}. \quad (8.13)$$

Оскільки рідина витікає під дією сили гравітації, то  $\frac{\Delta p_1}{\Delta p_0} = \frac{\rho_1 g h}{\rho_0 g h} = \frac{\rho_1}{\rho_0}$  і

співвідношення (8.13) набуває вигляду:

$$\mu_1 = \mu_0 \frac{\rho_1 t_1}{\rho_0 t_0}. \quad (8.14)$$

Отже, коефіцієнт в'язкості  $\mu_1$  досліджуваної рідини можна визначити, знаючи коефіцієнт в'язкості  $\mu_0$  еталонної рідини, час витікання рідин  $t_0$  і  $t_1$  та їх густину  $\rho_0$  і  $\rho_1$ .

### Ротаційний метод

Розглянемо ротаційні віскозиметри типу циліндр в циліндрі (рис. 8.5). Проміжок між двома вертикально розташованими співвісними циліндрами заповнюють рідиною. Один із циліндрів приводиться в обертання з певною кутовою швидкістю. Профілі швидкості та в'язкості в системах Серле і Куетта наведено на рис. 8.6.

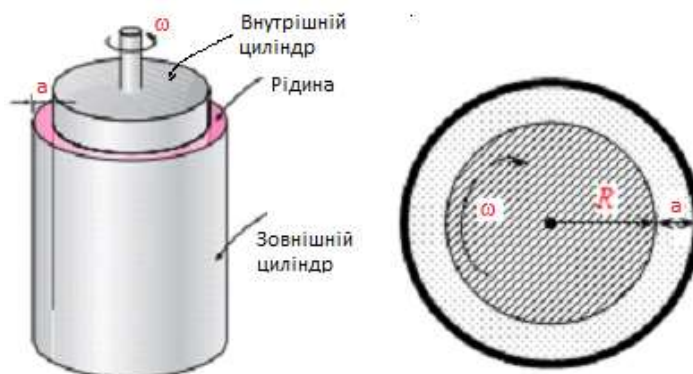


Рис. 8.5

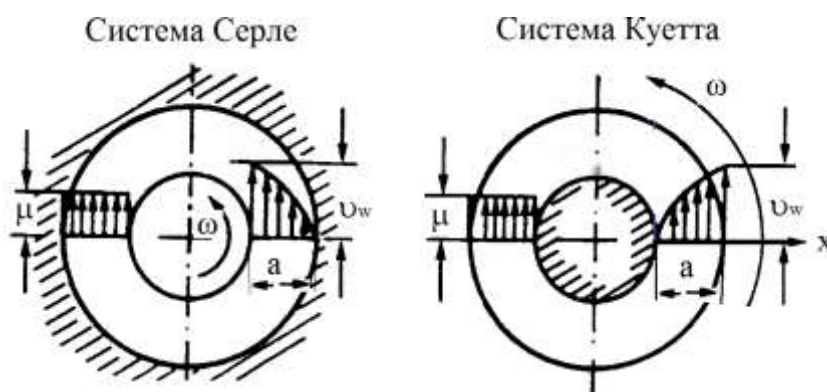
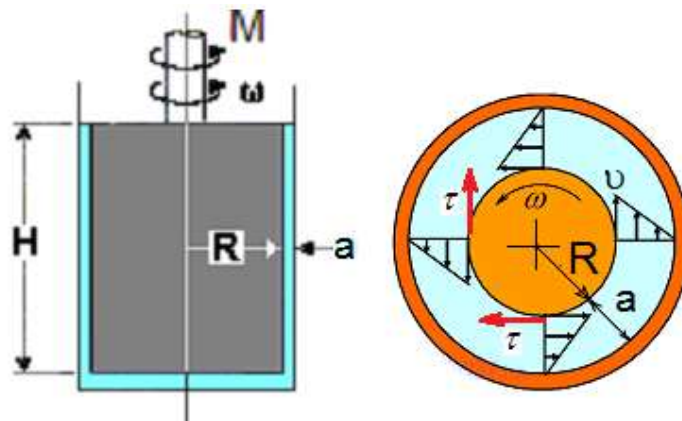


Рис. 8.6

В системі Серле обертається внутрішній циліндр, тоді як зовнішній циліндр - нерухомий. Обертання внутрішнього циліндра викликає течію рідини в кільцевому проміжку. При цьому виникає зсувне напруження внутрішнього тертя  $\tau$ , що призводить до появи відповідної сили і виникнення крутного моменту, пропорційного в'язкості рідини. В системі Куетта обертається зовнішній циліндр, а внутрішній - нерухомий.

Розглянемо систему Серле, коли обертається внутрішній циліндр, а зовнішній - нерухомий. В'язкість рідини вимірюється віскозиметром з використанням двох концентричних циліндрів. Висота стовпа рідини в зазорі між циліндрами  $H$ , радіус внутрішнього циліндра  $R$ , зазор між циліндрами  $a$ . Внутрішній циліндр обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Виникаючий крутний момент дорівнює  $M$ . Визначити в'язкість рідини, нехтуючи кінцевими ефектами та вважаючи, що розподіл швидкості в зазорі лінійний.



Напруження внутрішнього тертя в зазорі віскозиметра визначається за формулою:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} = \mu \frac{dv}{dr} = \mu \frac{v}{a} = \mu \frac{\omega R}{a}.$$

Кутова швидкість внутрішнього циліндра дорівнює:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60},$$

де  $n$  - частота обертання, об/хв.

Сила тертя, що виникає на внутрішньому циліндрі:

$$F_{FR} = \tau A.$$

Площа бічної поверхні внутрішнього циліндра:

$$A = 2\pi RH.$$

Крутний момент на внутрішньому циліндрі складає:

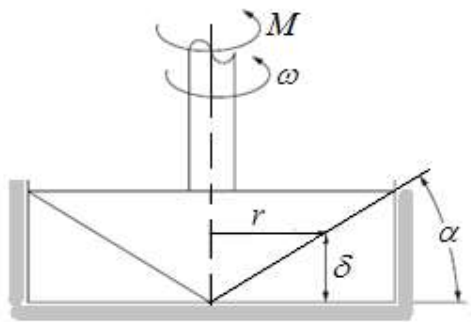
$$M = F_{FR} R = \tau \cdot A \cdot R = \mu \frac{\omega R}{a} \cdot 2\pi RH \cdot R = \mu \frac{2\pi R^3 H}{a} \omega.$$

В'язкість рідини, як функція крутного моменту та геометричних параметрів віскозиметра, дорівнює:

$$\mu = \frac{Ma}{2\pi R^3 H \omega}, \text{ Па} \cdot \text{с}. \quad (8.15)$$

#### *Віскозиметри типу конус-площина*

Віскозиметри цього типу використовуються з метою економії досліджуваної рідини і полегшення обслуговування приладу. Конус спирається на нерухому площину. Досліджувана рідина заповнює проміжок між конусом і площиною.



Визначимо градієнт швидкості, що виникає у в'язкій рідині між конусом, який обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , і нерухомою площиною. Кут між конусом і площиною  $\alpha$ , як правило, не перевищує  $1,5^\circ$ . Градієнт швидкості визначається як зміна швидкості по висоті кутового зазору. Для віскозиметра типу конус-площина висота зазору  $\delta$  є функцією радіуса конуса і кута між конусом і площиною:

$$\delta = r \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Швидкість руху в'язкої рідини у поверхні дорівнює швидкості руху поверхні, тобто швидкість руху рідини також є функцією радіуса конуса:

$$v = \omega r.$$

Градієнт швидкості становить:

$$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dz} = \frac{v}{\delta} = \frac{\omega r}{r \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\omega}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (8.16)$$

#### **Реологічні властивості крові**

Кров - неньютонівське рідина, реологічні властивості якої залежать від умов течії, здатності до деформації формених елементів, переважно еритроцитів, тощо.

Реологічні властивості крові характеризуються:

- *В'язкопружністю* - властивість, при якій рідина може бути як пружною, так і в'язкою;
- *Псевдопластичністю* - властивість, при якій в'язкість зменшується зі збільшення напруження зсуву;
- *Тиксотропією* - здатність дисперсних систем відновлювати структуру, що зруйнована механічною дією.

Складна поведінка крові обумовлена агрегацією і деформацією формених елементів, в'язкістю плазми крові, гематокритом.

При низьких швидкостях зсуву переважають агрегаційні властивості: червоні кров'яні клітини злипаються і утворюють «монетні стовпчики». Це саме ті умови, які сприяють розвитку тромбоутворення в судинному руслі, наприклад, коронарних артеріях. У клінічних умовах цей феномен спостерігається при гострих формах ішемічної хвороби серця.

При середніх швидкостях зсуву переважає здатність до деформації: клітини орієнтовані у напрямку потоку під дією швидкості зсуву. Агрегаційні властивості клітин менші, здатність до деформації дозволяє еритроцитам проникати у судини самого різного калібру.

При високих швидкостях зсуву клітини орієнтуються у напрямку переміщення рідини і утворюють умовні шари, при цьому агрегаційні властивості між клітинами значно ослаблюються.

В'язкість крові зростає зі збільшенням концентрації еритроцитів. У великих судинах в нормі в'язкість складає 4...6 мПа·с, при зменшенні вмісту еритроцитів (анемії) знижується до 2...3 мПа·с, при збільшенні вмісту еритроцитів (поліцитемії) зростає до 15...20 мПа·с. Залежність в'язкості крові від гематокриту можна приблизно описати експоненціальною функцією:

$$\mu = \mu_{пл} \exp 2H, \quad (8.17)$$

де  $\mu_{пл}$  - в'язкість плазми;  $H$  - гематокрит, відн. од..

### Модель Кессона

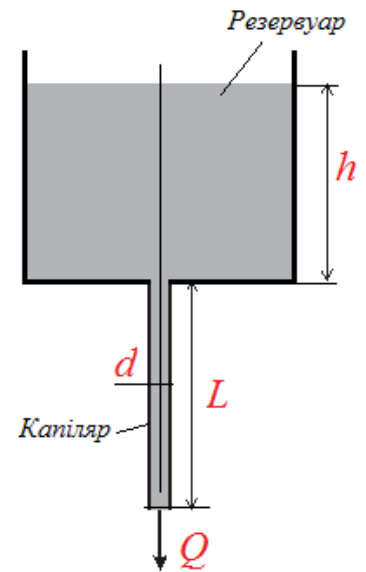
Течія крові найчастіше описується моделлю Кессона, яка має наступний вигляд:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\eta} \sqrt{\dot{\gamma}} = k_0 + k_1 \sqrt{\dot{\gamma}}, \quad (8.18)$$

де  $\tau_0$  - межа плинності;  $\eta$  - кессонівська в'язкість;

$$k_0 = \sqrt{\tau_0}; \quad k_1 = \sqrt{\eta}$$

**Приклад 1.** В ході досліджень біологічної рідини в капілярному віскозиметрі з довжиною капіляра  $L=10$  см і внутрішнім діаметром  $d=2$  мм, отримано наступні дані: при висоті рідини  $h_1=10$  см в резервуарі, рідина стікає через капіляр з об'ємною витратою  $Q_1=12$  см<sup>3</sup>/хв, а при висоті  $h_2=20$  см - з об'ємною витратою  $Q_2=30$  см<sup>3</sup>/хв. Визначити, до якого виду відноситься біологічна рідина, густина якої дорівнює  $1,3$  г/см<sup>3</sup>.



**Розв'язання.** Для ньютонівських рідин, згідно з формулою (8.7) має місце прямо-пропорційна залежність між об'ємною витратою рідини і напруженням внутрішнього тертя на стінці трубки:

$$Q = \frac{\pi R^3}{4\mu} \tau_w, \text{ тобто, повинно виконуватися умова: } \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\tau_{w2}}{\tau_{w1}}.$$

Визначимо співвідношення між напруженнями внутрішнього тертя на стінці трубки в першому і другому експерименті:

$$\tau_w = \frac{r\Delta p}{2\Delta L} = \frac{d\rho gh}{4L}; \quad \tau_{w1} = \frac{d\rho gh_1}{4L}; \quad \tau_{w2} = \frac{d\rho gh_2}{4L};$$

$$\frac{\tau_{w2}}{\tau_{w1}} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{20}{10} = 2; \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{30}{12} = 2,5; \quad \frac{Q_2}{Q_1} \neq \frac{\tau_{w2}}{\tau_{w1}}.$$

**Відповідь:** Біологічна рідина відноситься до неньютонівських рідин.

## КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Рух тіл у в'язкому середовищі. Як змінюється напруження внутрішнього тертя по перерізу потоку?
2. Закон Стокса. Принцип кулькової віскозиметрії.
3. Які сили діють на кульку, що рухається у в'язкій рідині? Виведіть формулу для визначення в'язкості за методом Стокса.
4. Які умови повинні виконуватися при вимірі в'язкості за методом Стокса?
5. Принцип капілярної віскозиметрії.
6. Принцип ротаційної віскозиметрії, методи створення зсувової течії. Системи Серле і Куетта.
7. Поясніть роботу віскозиметра типу циліндр у циліндрі.
8. Виведіть розрахункову формулу для визначення в'язкості для віскозиметра типу циліндр у циліндрі при обертанні зовнішнього циліндра (внутрішній – нерухомий).
9. Виведіть розрахункову формулу для визначення в'язкості для віскозиметра типу *конус-площина* при обертанні конуса.
10. Реологічні властивості крові. Залежність в'язкості від гематокриту.
11. Рівняння Кессона і поняття «кессонівська в'язкість».

## ЛЕКЦІЯ 9

### БІОМЕХАНІКА СЕРЦЕВО-СУДИННОЇ СИСТЕМИ

#### Режими течії крові

Система кровообігу служить для постачання клітин поживними речовинами і газами, для обміну продуктами життєдіяльності клітин, а також перенесення тепла. Вона є розгалуженим і замкнутим ланцюгом судин різного калібру. Основною рушійною силою кровотоку є кров'яний тиск, що обумовлений перевищенням тиску, викликаного роботою серця, над атмосферним тиском. Рух крові завжди напрямлений від ділянки з вищим тиском до ділянки зі зниженим тиском.

Течія крові по судинах, як правило, є ламінарною і переходить у турбулентну лише в наступних випадках:

- у проксимальних відділах аорти і легеневого стовбура при виштовхуванні крові зі шлуночків;
- у великих артеріях при зростанні швидкості кровотоку, наприклад, при інтенсивній м'язовій роботі або зниженні в'язкості крові, наприклад, при різко вираженій анемії;
- в місцях розгалужень і локальних звужень судин, наприклад при утворенні тромбів, а також в області крутих вигинів, де утворюються локальні завихрення.

У вище наведених випадках число Рейнольдса перевищує критичне значення 2300, тобто:  $Re = \frac{\rho v d}{\mu} > 2300$ . Шуми, які супроводжують

турбулентний режим, іноді бувають настільки сильні, що їх можна вислухати навіть без стетоскопа. Тони Короткова, що виникають при непрямому методі виміру артеріального тиску, також викликані турбулентною течією крові.

Турбулентна течія вимагає значних витрат енергії, в порівнянні з ламінарним, і посилює навантаження на серце.

### Особливості течії крові у криволінійних судинах

Течія крові у криволінійних судинах має певні особливості (рис. 9.1). На стінку судини з більшим радіусом кривизни діє більша відцентрова сила  $F_{вц}$ , що обумовлено рухом рідини по колу. Відповідно і тиск на цю стінку буде більшим. З'являється, так званий, «бічний» градієнт тиску і профіль швидкості потоку деформується таким чином, що швидкість течії виявляється максимальною не на осі судини, а ближче до стінки з меншим радіусом кривизни.

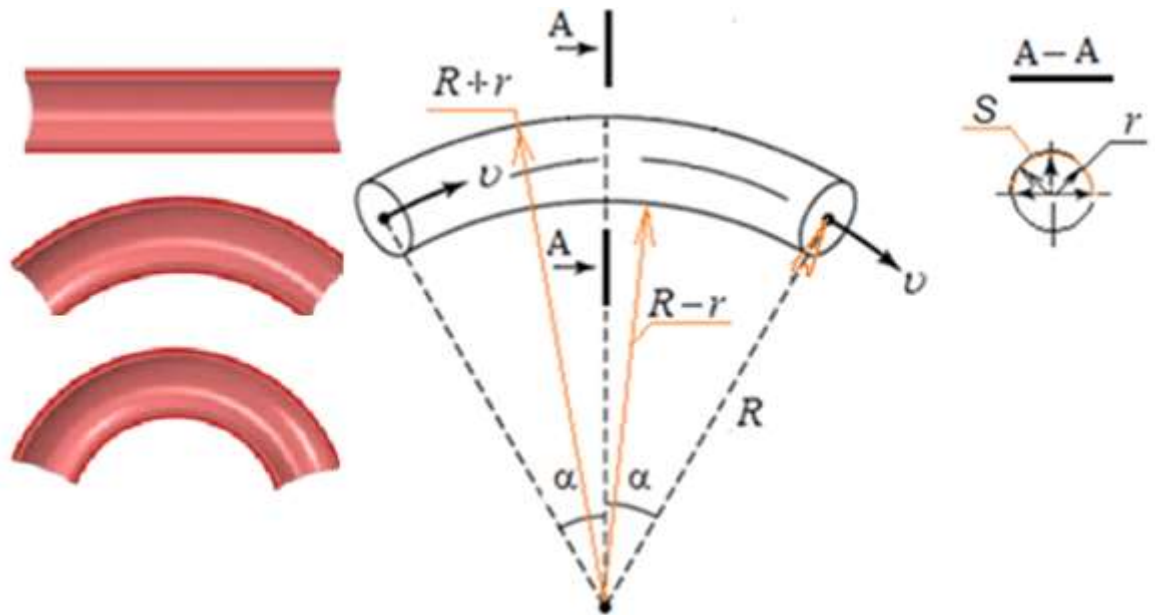


Рис. 9.1. Криволінійна судина

Додаткова сила, що виникає при вигині судини, діє на її верхню ділянку площею  $S$ . Якщо прийняти  $S = \pi rL$ , то додатковий середній тиск, діючий на цю ділянку, складе:

$$p = \frac{F_{вц}}{S} = \frac{ma_N}{S} = \frac{(\rho V)(\omega^2 R)}{\pi rL} = \frac{(\rho \pi r^2 L) \left( \frac{v^2}{R} \right)}{\pi rL} = \frac{\rho r v^2}{R},$$

де  $r$  - внутрішній радіус криволінійної судини;

$R$  - середній радіус кривизни криволінійної судини;

$L = 2\alpha R$  - довжина криволінійної судини;

$\rho$  - густина крові;  $v$  - середня швидкість течії крові по судині.

Більш точне значення тиску виходить при зменшенні площі, на яку діє відцентрова сила. Так, при  $S = \pi rL / 2$  додатковий тиск дорівнює:

$$p = \frac{F_{вц}}{S} = \frac{(\rho \pi r^2 L) \left( \frac{v^2}{R} \right)}{\frac{\pi rL}{2}} = \frac{2\rho r v^2}{R}.$$

Величина додаткового тиску набуває найбільшого значення в аорті, оскільки в цій судині найвища швидкість течії крові.

Приймаючи  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $r = 1,25 \text{ см}$ ;  $R = 2 \text{ см}$ ;  $v = 1 \text{ м/с}$  [Герман, гл.8, с. 582] і вважаючи  $S = \pi rL / 2$ , отримаємо:

$$p = \frac{2\rho r v^2}{R} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 1,25 \cdot 1^2}{2} = 1250 \text{ Па} \approx 9,377 \text{ мм рт ст.}$$

Таким чином, додатковий тиск, діючий на верхню дугу аорти, приблизно дорівнює 9,4 мм рт. ст. Цей тиск складає приблизно 10% в порівнянні з середнім тиском в аорті (близько 100 мм рт. ст.).

### Механічні властивості кровоносних судин

Кровоносні судини складаються з трьох концентричних шарів: внутрішнього (інтими), середнього (медії), зовнішнього (адвентиції).

Механічні властивості кровоносних судин визначаються, головним чином, характеристиками середньої судинної оболонки, до складу якої входять основні компоненти: **еластин, колаген, гладкі м'язові волокна**. Стінки великих артерій і вен приблизно на 70 % складаються з води. У великих артеріях на долю колагену і еластину припадає більше 60 % сухої маси.

Гладкі м'язові волокна можуть змінювати довжину (скорочуватися) під дією нервових і хімічних стимулів. В результаті змінюються їх механічні властивості. Наприклад, модуль пружності, що становить  $10^4 \text{ МПа}$  для нестимульованого м'яза, збільшується при стимуляції приблизно вдесятеро.

Завдяки скороченню гладких м'язів, змінюється діаметр кровоносної судини і механічні властивості судинної стінки в цілому. Цим досягається розподіл і регулювання кров'яного потоку.

Співвідношення трьох основних компонентів судинної тканини для різних ділянок системи кровообігу наведено в табл. 9.1.

**Таблиця 9.1. Співвідношення трьох основних компонентів судинної тканини**

ARTERY	% H <sub>2</sub> O	% COLLAGEN	% ELASTIN
Aorta / Аорта	70,4 ± 0,4	45,5 ± 1,7	30,1 ± 1,7
Carotid / Сонна артерія	71,1 ± 0,1	50,7 ± 2,1	20,1 ± 1,0
Coronary / Вінцеві артерії	63,2 ± 1,0	47,9 ± 2,6	15,6 ± 0,7
Femoral / Стегнова артерія	68,0 ± 0,3	44,5 ± 1,4	24,5 ± 1,6
Mesentary / Брижова артерія	70,8 ± 0,5	38,1 ± 1,7	26,5 ± 1,7
Renal / Ниркова артерія	70,4 ± 0,7	42,6 ± 1,6	18,7 ± 1,8

Чим далі від серця, тим вище доля гладких м'язових волокон, які вже в артеріолах стають основними складовими судинних тканин. Зміна біохімічного складу і структури судинної стінки веде до зміни її механічних властивостей. Механічні характеристики кровоносних судин, як анізотропного середовища, змінюються в поздовжньому, окружному (радіальному) напрямках. В організмі, судини оточені тканинами і розтягнуті в поздовжньому напрямку, так що їх деформації в цьому напрямку обмежені.

Значення модуля пружності для артеріальних судин, за даними літературних джерел, складає  $0,6 \cdot 10^5 - 7 \cdot 10^5$  Па.

На рис. 9.2 показано експериментальні залежності між поздовжнім напруженням  $\sigma_1$  і деформацією  $\varepsilon_1$  для різних судин.

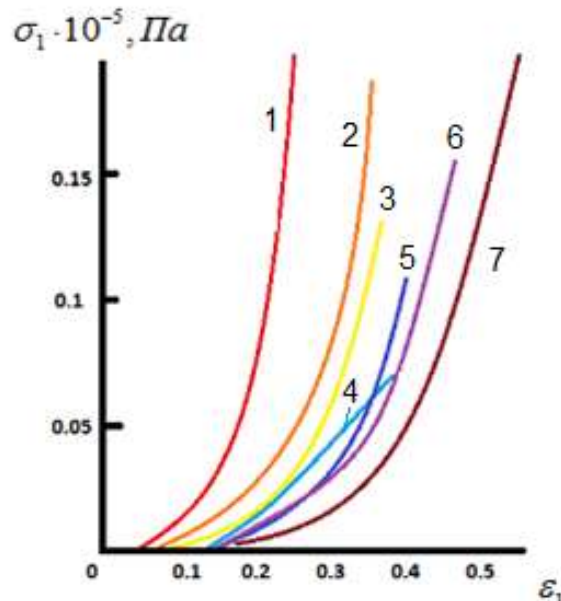


Рис. 9.2. Характерні експериментальні залежності між поздовжнім напруженням і деформацією для різних судин: 1 – підшкірна вена; 2 - клубова артерія; 3 - стегнова артерія; 4 - задня стінка черевної аорти; 5 - передня стінка черевної аорти; 6 - внутрішня сонна артерія; 7 - загальна сонна артерія.

Як правило, експериментальні дослідження проводять в лабораторних умовах на зразках, видалених з організму (*in vitro*). При цьому, функціональна дія гладкого м'яза порушена, а значить, виявляється тільки пасивна механічна поведінка, обумовлена механічними властивостями еластину і колагену.

### **Визначення механічних властивостей кровоносних судин**

Механічні характеристики кровоносних судин можна вимірювати при одному з двох режимів.

1. Діаметр судини підтримують постійним і реєструють зміну її довжини у відповідь на збільшення розтягуючої сили.

2. Довжина судини підтримується постійною і реєструється залежність між діаметром судини і розтягуючим тиском.

Під розтягуючим тиском розуміють різницю тисків по обидві сторони стінки. Цей тиск називають внутрішнім надмірним, або трансмуральним. Трансмуральний тиск призводить до виникнення в судинній стінці меридіонального і окружного напруження.

При розтягуванні судини змінюється площа просвіту кровоносної судини. Просвіт зменшується при скороченні гладких м'язів судин і збільшується при підвищенні тиску в судинах.

Еластичні властивості судин характеризуються розтяжністю  $C$  (еластичністю, податливістю), що відображає відношення зміни просвіту до зміни трансмурального тиску. Залежність між розтяжністю судини в окружному напрямку, її розмірами та модулем пружності має наступний вигляд:

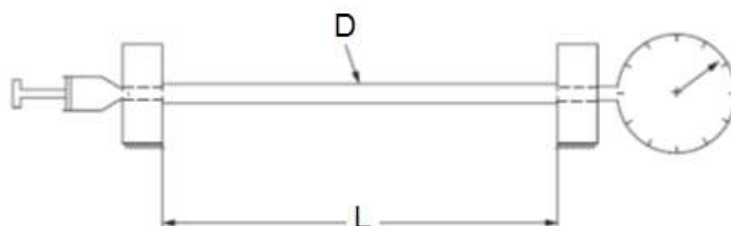
$$C = \frac{dS}{dp} = \frac{2\pi r^3}{Eh}, \quad (9.1)$$

де  $dS$  - зміна просвіту судини;  $dp$  - зміна трансмурального тиску;  $r$  - внутрішній радіус судини;  $E$  - модуль пружності стінки судини;  $h$  - товщина стінки судини.

Судини різних органів мають різну розтяжність. При підвищенні артеріального тиску на 10 мм рт. ст. кровотік в судинах кишковика збільшується на 5 мл/хв, а в судинах міокарда - на 40 мл/хв.

Кровотік в артеріях залежить від зміни частоти серцевих скорочень і ударного об'єму, а також від геометричних розмірів самих кровоносних судин, діаметр яких змінюється під дією нервових, хімічних і механічних стимулів.

**Приклад 1.** В еластичну трубку з модулем пружності 1 МПа, заповнену водою і закріплену між двома нерухомими затискачами, вводять додатковий обсяг води. Товщина стінки трубки 1 мм. Визначити еластичність трубки і обсяг води, необхідний для підвищення тиску на 5 кПа. Внутрішній діаметр трубки 20 мм, довжина трубки між затискачами 20 см.



**Розв'язання.** Еластичність трубки знайдемо за формулою (9.1):

$$C = \frac{2\pi r^3}{Eh} = \frac{2\pi(10 \cdot 10^{-3})^3}{10^6 \cdot 10^{-3}} \approx 6,28 \cdot 10^{-9} \frac{m^2}{Pa}.$$

Знаючи розтяжність трубки та підвищення тиску при введенні додаткової кількості води, визначимо зміну площі просвіту трубки:

$$\Delta S = C \Delta p = 6,28 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^3 = 31,4 \cdot 10^{-6} m^2.$$

Обсяг води, необхідний для підвищення тиску на 5 кПа, дорівнює:

$$\Delta V = \Delta S L = 31,4 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^{-2} = 628 \cdot 10^{-8} m^3;$$

$$\Delta V \approx 6,28 cm^3 = 6,28 ml.$$

*Відповідь:*  $\Delta V \approx 6,28 ml$

### Пульсова хвиля

Виштовхування крові зі шлуночка серця супроводжується розтягуванням найближчого до нього відділу аорти і зростанням напруження в її стінках. По мірі зниження швидкості вигнання крові з серця, тиск в розтягнутій ділянці аорти починає знижуватися, розтягнуті стінки стягуються і повертаються в початковий стан, проштовхуючи при цьому кров далі по руслу і викликаючи розтягування наступних ділянок аорти. Цей процес триває, поступово затухаючи, до області кінцевих розгалужень артерій і артеріол, де пульсуючий потік поступово змінюється безперервним. Таким чином, по судинах поширюються коливання тиску, що називаються пульсовою хвилею. Швидкість поширення пульсової хвилі складає 4-10 м/с і в 10-30 разів більше швидкості кровотоку. Так швидкість пульсової хвилі в аорті 4 м/с, а швидкість кровотоку 1 м/с.

Швидкість поширення пульсової хвилі визначається за формулою Моенса-Кортевега:

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{\rho D_{IN}}}, \quad m/s. \quad (9.2)$$

Якщо відомий коефіцієнт Пуассона  $\nu$  судинної стінки, використовують формулу:

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{\rho(1-\nu^2)D_{IN}}}, \quad \text{м / с}, \quad (9.2 \ 1)$$

де  $E$  - модуль пружності стінки судини;

$h$  - товщина стінки судини;

$D_{IN}$  - внутрішній діаметр судини;

$\rho$  - густина крові.

### **Моделі гемодинаміки серцево-судинної системи**

Течія крові по серцево-судинній системі досить складний процес. Складну будову має кровоносне русло, яке являє собою розгалужену систему еластичних судин різного типу. Кров, у свою чергу, є складною суспензією, реологічна поведінка якої залежать від умов її течії. Крім того, система кровообігу має активні джерела енергії - шлуночки і передсердя серця. Продуктивність серця і механізми рефлекторної зміни тону судин змінюють фізіологічні властивості системи кровообігу, а отже і умови руху крові.

Специфічна функція великих судин артеріальної частини великого круга кровообігу (ВКК) - підтримка рушійної сили кровотоку в діастолу шлуночків шляхом згладжування перепаду тиску між систолою, діастолою і спокоєм шлуночків за рахунок еластичних властивостей стінки судин. В результаті, тиск в аорті в період спокою підтримується на рівні 80 мм рт.ст., що стабілізує рушійну силу, при цьому еластичні волокна стінок судин віддають накопичену під час систоли потенційну енергію серця і забезпечують безперервність потоку крові і тиск по ходу судинного русла.

Еластичність аорти і легеневої артерії пом'якшує також гідравлічний удар крові під час систоли шлуночків. Вигин аорти підвищує ефективність перемішування крові. Основне перемішування і створення однорідності транспортного середовища відбуваються в серці.

### Модель Франка

Першою спрощеною моделлю судинної системи, що дозволяла досліджувати пульсові явища в серцево-судинній системі, була модель пружного резервуару, розроблена німецьким фізіологом Отто Франком.

В моделі Франка (рис. 9.3) всі великі артерії об'єднані у пружний резервуар з еластичними стінками і незначним гідравлічним опором, а всі дрібні резистивні/периферичні судини (артеріоли і капіляри) - в жорстку трубку з постійним гідравлічним опором.

Під час систоли, кров з лівого шлуночка серця (ЛШС) поступає з об'ємною швидкістю (витратою)  $Q_c$  у пружний резервуар об'ємом  $V$  і витікає з цього резервуару з об'ємною швидкістю  $Q$ .

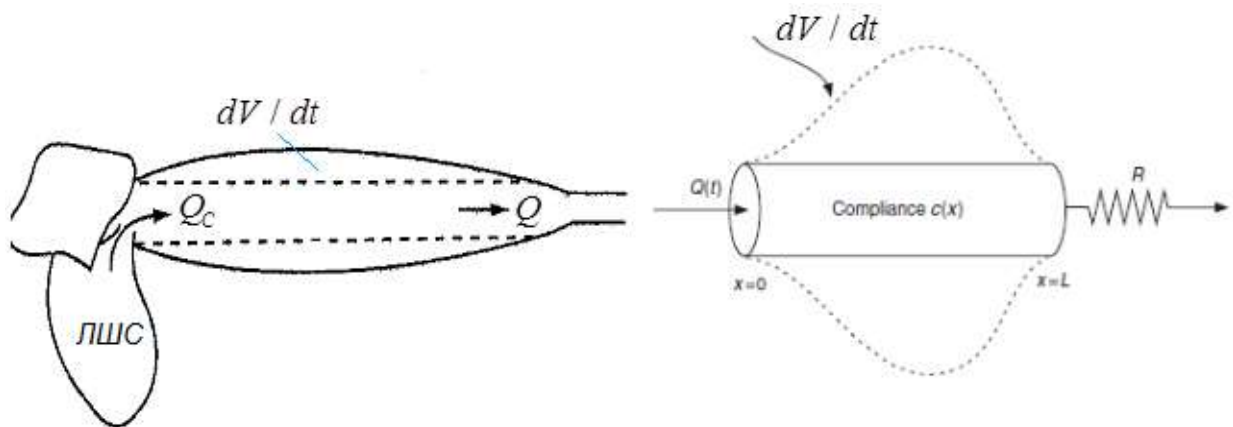


Рис. 9.3. Модель Франка

Кров, що витікає з резервуару, потрапляє у дрібні резистивні судини, представлені у вигляді жорсткої трубки. В моделі передбачається, що змінення тиску  $p$  в артеріях відбуваються одночасно. Відповідно до закону збереження об'єму нестискуваної рідини, має виконуватися рівняння:

$$Q_c = \frac{dV}{dt} + Q, \quad (9.3)$$

де  $dV / dt$  - швидкість змінення об'єму пружного резервуару.

Змінення об'єму пружного резервуару пропорційне зміненню тиску в ньому, тобто:

$$dV = C dp \rightarrow \frac{dV}{dt} = C \frac{dp}{dt}, \quad (9.4)$$

де  $C$  - розтяжність (еластичність) резервуару.

Згідно з рівнянням Пуазейля, об'ємна швидкість кровотоку через резистивні судини складає:

$$Q = \frac{\Delta p}{X} = \frac{p - p_B}{X}, \quad (9.5)$$

де  $X$  - загальний гідравлічний опір периферичної частини системи кровообігу;  $p$  - тиск у пружному резервуарі;  $p_B$  - венозний тиск.

Оскільки  $p_B \approx 0$ , рівняння (9.5) набуває вигляду:

$$Q = \frac{p}{X}. \quad (9.6)$$

Після підстановки (9.4) і (9.6) в рівняння (9.3) отримаємо:

$$Q_c dt = C dp + \frac{p}{X} dt. \quad (9.7)$$

Під час діастоли, надходження крові у пружний резервуар припиняється, тобто  $Q_c = 0$ , стінки резервуару (великих артерій) стискаються і виштовхують кров у периферичні судини. Для цієї фази, рівняння (9.7) набуває вигляду:

$$0 = C dp + \frac{p}{X} dt \rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{1}{CX} dt. \quad (9.8)$$

Проінтегруємо рівняння (9.8) в межах від максимального систолічного тиску  $p_c$  що відповідає часу  $t=0$ , до довільного значення тиску  $p$ , відповідного часу  $t$ :

$$\int_{p_c}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^t \frac{1}{CX} dt \rightarrow \ln \frac{p}{p_c} = -\frac{t}{CX}. \quad (9.9)$$

Залежність тиску в пружному резервуарі від часу в період діастоли дорівнює:

$$p(t) = p_c \exp\left(-\frac{t}{CX}\right). \quad (9.10)$$

Відповідно залежність об'ємної швидкості крові в периферичних судинах в період діастолі має вигляд:

$$Q(t) = Q_c \exp\left(-\frac{t}{CX}\right). \quad (9.11)$$

## КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Яким критерієм оцінюються режими руху рідини? Як визначається межа між ламінарним і турбулентним режимами? Для яких цілей введено критичне число Рейнольдса?
2. У моделі Франка передбачається, що усі крупні судини артеріальної частини ВКК об'єднані в одну камеру: а) з незначним гідравлічним опором; б) з однаковим гідравлічним опором; в) з незначним гідравлічним опором і еластичними стінками; г) з незначним гідравлічним опором і жорсткими стінками.
3. У моделі Франка передбачається, що усі дрібні судини ВКК об'єднані: а) в одну камеру з еластичними стінками і незначним гідравлічним опором; б) в еластичну трубку з постійним гідравлічним опором; в) в жорстку трубку з постійним гідравлічним опором; г) в жорстку трубку зі змінним гідравлічним опором.
4. Часова залежність діастолічного тиску, що розрахована за моделлю Франка, має вигляд:  $p = p_c(t + XC)$ ;  $p = p_c + XCt$ ;  $p = p_c \exp(-\frac{t}{XC})$ ;  
 $p = p_c + \frac{1}{XC}$
5. Швидкість змінення об'єму пружної камери дорівнює:  $\frac{dV}{dp}$ ;  $\frac{dV}{dt}$ ;  $\frac{dp}{dV}$ .
6. Змінення об'єму пружної камери визначається за формулою:  $dV = C dt$ ;  
 $dV = C dp$ ;  $dV = \frac{dp}{C}$ .

7. Об'ємна швидкість кровотоку через периферичні судини визначається за формулою:  $Q = Xp$ ;  $Q = \frac{P - P_B}{X}$ ;  $Q = \frac{X}{p}$ ;  $Q = \frac{P}{X}$ .

8. Рівняння Франка має вигляд:  $Q = Xp$ ;  $Q = \frac{P - P_B}{X}$ ;  $Q = \frac{X}{p}$ ;  $Q = \frac{P}{X}$ .

9. Під час діастоли: а) кров виштовхується із серця, стінки великих артерій розширюються і виштовхують кров в периферичні судини; б) кров виштовхується із серця, стінки великих артерій стискаються і виштовхують кров в периферичні судини; в) надходження крові із серця припиняється, стінки великих артерій стискаються і виштовхують кров в периферичні судини.

10. Залежність об'ємної швидкості крові в периферичних судинах в період діастоли має вигляд:

$$Q(t) = \frac{Q_c}{X} \exp\left(-\frac{t}{C}\right); Q(t) = Q_c \exp\left(\frac{t}{CX}\right); Q(t) = Q_c \exp\left(-\frac{t}{CX}\right).$$

11. Рівняння Франка за умови, що аортальний клапан закритий:

$$p = p_c(t + XC), \quad p = p_c + X Ct, \quad p = p_c \exp\left(-\frac{t}{XC}\right), \quad p = p_c + \frac{1}{XC}, \quad p = p_c \ln \frac{t}{XC}$$

12. Недолік моделі Франка - великі судини артеріального русла розтягуються а) поступово; б) одночасно.

13. Як впливає зміна еластичності великих судин на зміну тиску в період діастоли.

14. Як впливає зміна гідравлічного опору мікросудин на зміну тиску в період діастоли.

15. В якому відділі судинного русла пульсуючий потік поступово стає безперервним.

## ЛЕКЦІЯ 10

### БІОМЕХАНІКА ТРАВНОЇ СИСТЕМИ

#### Загальні відомості

Травлення - сукупність фізіологічних процесів, що забезпечують фізичну і хімічну обробку їжі у травному тракті, внаслідок чого утворюються поживні речовини, які всмоктуються в кров і лімфу. До поживних речовин відносяться продукти розщеплювання білків, жирів і вуглеводів, а також вода, мінеральні солі та вітаміни.



Рис. 10.1. Система травлення

Травна система людини складається з ротової порожнини, глотки, стравоходу, шлунку, тонкої та товстої кишки. Усі вони пов'язані між собою і утворюють у сукупності шлунковий кишковий тракт (ШКТ). Довжина ШКТ

людини складає 6...10 метрів. До органів травної системи відносяться печінка, підшлункова залоза і жовчний міхур.

Основною закономірністю діяльності травної системи є конвеєрний принцип. Приблизні значення характеристик травної системи стандартної людини масою 70 кг і швидкості переміщення харчової грудки представлено в табл. 10.1.

Таблиця 10.1

Елемент ШКТ	Довжина, см	Зовнішній розмір або ширина (еквівалентний діаметр), см	Час проходження	Швидкість, см/с
Ротова порожнина і глотка	8	2-5	1-10 с	1-8
Стравохід	25	1,3-2,5	5-20 с	3-5
Шлунок	12	8	2-6 год.	0,001
Тонка кишка	400	3-6	3-5 год.	0,03
Товста кишка	150	5,0-7,5	10-20 год.	0,004-0,008
Пряма кишка	16-20	2,5-3,8	1 год.	0,006
Загальне, середнє або діапазон	600	3,5	16-32 год.	0,01

Прийом і початкову механічну і хімічну обробку їжі, а також аналіз її властивостей забезпечує ротовий відділ травного тракту.

Жування - строго координований руховий акт, що забезпечує погоджені ритмічні скорочення м'язів язика, м'язів щелепи і жувальних м'язів, які приводять в рух нижню щелепу. Під час жування відбувається подрібнення їжі, змочування її слиною, часткова хімічна обробка і формування харчової грудки.

Ковтання - строго координований руховий акт, який забезпечує погоджені послідовні скорочення м'язів ротоглоткової області, гортані і стравоходу, завдяки яким харчова грудка переходить з ротової порожнини в шлунок. Рідка їжа проходить по стравоходу впродовж 2-3 секунд, а тверда їжа - 6-8 секунд.

## Шлунок

Шлунок (рис. 10.2) є порожнистим м'язовим органом з функцією секреції (виділення) деяких ферментів для переварювання їжі.

Анатомічно шлунок ділиться на наступні відділи:

- кардіальний (прилеглий до ребер);
- тіло шлунку;
- дно шлунку;
- пілоричний (прилеглий до хребта), в якому виділяють антральний відділ і воротар із замикаючим м'язом.

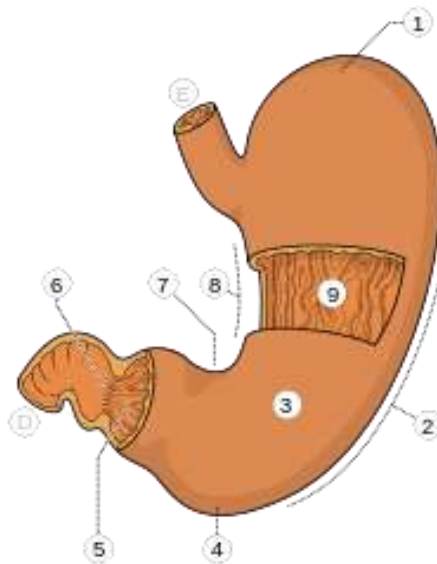


Рис. 10.2. Шлунок: 1 - дно шлунку; 2 - велика кривизна; 3 - тіло; 4 - нижній полюс шлунку; 5 - пілорична частина; 6 – воротарний отвір; 7 - кутова вирізка; 8 - мала кривизна; 9 - складки слизової оболонки.

У шлунку переважають два види рухів - перистальтичні і тонічні. Перистальтичні рухи здійснюються за рахунок скорочення циркулярних м'язів шлунку. Ці рухи починаються на великій кривизні в ділянці, що примикає до стравоходу, де знаходиться кардіальний водій ритму. Перистальтична хвиля, що йде по тілу шлунку, переміщає в пілоричну частину невелику кількість хімусу, який прилягає до слизової оболонки і найбільшою мірою піддається перетравлюючій дії шлункового соку. Велика частина перистальтичних хвиль гаситься в пілоричному відділі шлунку. Деякі з них поширюються по

пілоричному відділу з амплітудою, що збільшується (припускають наявність другого водія ритму, локалізованого в пілоричному відділі шлунку), що призводить до виражених перистальтичних скорочень цього відділу, підвищення тиску і переходу частини утримуваного шлунком хімусу у дванадцятипалу кишку.

Тонічні рухи виникають за рахунок зміни тону м'язів, що призводить до зменшення об'єму шлунку і підвищення тиску в ньому. Тонічні скорочення сприяють перемішуванню утримуваного шлунку і просоченню його шлунковим соком, що значно полегшує ферментативне переварювання харчової кашки. Тиск  $p$  на стінки шлунку зростає в процесі їжі. Якщо представити шлунок у вигляді сфери, тоді його об'єм  $V$  і середній радіус  $R$  будуть дорівнювати:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

З формули Лапласа знайдемо напруження  $\sigma$  у стінці шлунку:

$$\sigma = \frac{pR}{2\delta} = \frac{p}{2\delta} \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}},$$

де  $\delta$  - товщина стінки шлунку.

Натягнення стінки шлунку дорівнює:

$$T = \sigma\delta = \frac{pR}{2} = \frac{p}{2} \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Коли шлунок знаходиться в ненапруженому стані, його порожнина заповнена невеликою кількістю шлункового соку нейтральної або слабкої кислотної реакції. Залежно від хімічного складу і кількості прийнятої їжі вона може затримуватися у шлунку від 3 до 10 годин.

Шлунок виконує наступні основні функції на перших стадіях перетравлення їжі:

1. Служить в якості резервуару, потрапляючи в який їжа може довгий час там знаходитися до тих пір, поки не досягне певної міри подрібнення і розрідження (резервуарна, тобто накопичувальна функція).

2. Саме у шлунку запускається хімічна і ферментативна переробка поживних речовин, а також всмоктування деяких з них (протеїнів).
3. Енергійні скорочення гладких м'язів шлунку подрібнюють і перемішують їжу із шлунковим соком, внаслідок чого їжа розріджується, що є необхідною умовою для її попадання в тонку кишку.
4. Розріджена і подрібнена їжа - хімус - повільно проходить через воротарний отвір шлунку у дванадцятипалу кишку для подальшого перетравлення (моторно-евакуаторна функція).

### **Моторна діяльність тонкої кишки**

Скорочення тонкої кишки здійснюються в результаті координованих рухів поздовжнього (зовнішнього) і поперечного (внутрішнього) шарів гладко м'язових клітин. За функціональною ознакою скорочення ділять на дві групи: локальні - забезпечують розтирання і перемішування вмісту тонкої кишки; спрямовані на пересування вмісту кишки.

Виділяють декілька типів скорочень: маятникоподібні, ритмічна сегментація, перистальтичні, тонічні.

Маятникоподібні скорочення обумовлені послідовним скороченням кільцевих і поздовжніх м'язів кишки. Послідовні зміни довжини і діаметру кишки призводять до переміщення харчової кашки то в один, то в інший бік (на кшталт маятника). Маятникоподібні скорочення сприяють перемішуванню хімусу із травними соками.

Ритмічна сегментація забезпечується скороченням кільцевих м'язів, внаслідок чого поперечні перехоплення, що утворюються, ділять кишку на невеликі сегменти. Ритмічна сегментація сприяє розтиранню хімусу і перемішуванню його із травними соками.

Перистальтичні скорочення обумовлені одночасним скороченням поздовжніх і кільцевих шарів м'язів. При цьому відбувається скорочення кільцевих м'язів верхнього відрізка кишки і проштовхування хімусу в одночасно розширену, за рахунок скорочення поздовжніх м'язів, нижню

ділянку кишки. Таким чином перистальтичні скорочення забезпечують просування хімусу по кишці.

Тонічні скорочення мають невелику швидкість і навіть можуть взагалі не поширюватися, а тільки звужувати просвіт кишки на незначній ділянці.

### **Моторна діяльність товстої кишки**

Скорочення товстої кишки забезпечує накопичення кишкового вмісту, всмоктування з нього ряду речовин, в основному води, формування калових мас і видалення їх із кишки. Розрізняють наступні види скорочень товстої кишки: тонічні, маятникоподібні, ритмічна сегментація, перистальтичні скорочення, антиперистальтичні скорочення (сприяють всмоктуванню води і формуванню калових мас), пропульсивні скорочення - забезпечують просування вмісту кишки у каудальному напрямку.

### **Пряма кишка**

Акт дефекації здійснюється координованим скороченням одних і розслабленням інших груп м'язів стінки прямої кишки, внутрішнього і зовнішнього сфінктера, а також за участю ряду сегментних м'язів промежини і мускулатури черевного пресу. Акт дефекації викликається механічним роздратуванням каловими масами нижніх відділів товстої кишки.

### **Всмоктування поживних речовин**

Всмоктування - це процес перенесення речовин з просвіту травного тракту в кров і лімфу.

У ротовій порожнині всмоктування майже не відбувається, зважаючи на короткочасність перебування в ній їжі.

У тонкій кишці здійснюється основне всмоктування продуктів гідролізу, води, мінеральних речовин, вітамінів. Швидкість всмоктування забезпечується великою всмоктуючою поверхнею, яка формується за рахунок кругових складок, ворсинок і мікроросинок. Всмоктування поживних

речовин здійснюється головним чином верхньою частиною кишкових ворсинок. Всмоктування прискорюється за рахунок ритмічних скорочень ворсинок.

Продукти гідролізу білків всмоктуються у кров **в результаті дифузії**, повторно-активного натрій-залежного транспорту, піноцитозу (поглинання клітинною поверхнею рідини з речовинами, що містяться в ній) і ендоцитозу (поглинання речовини клітиною шляхом утворення мембранних везикул).

Продукти гідролізу жирів всмоктуються у кров і лімфу. Гліцерин всмоктується у кров, а жирні кислоти в лімфу. Доля всмоктування у лімфу набагато більша. Перш ніж потрапити у кров гліцерин, холестерин, тригліцериди покриваються білковою оболонкою і тільки в такій формі вони можуть потрапити у кров.

Всмоктування вуглеводів у кров відбувається **шляхом дифузії** і за допомогою натрій-залежного механізму.

Вода всмоктується згідно із гідростатичним і осмотичним градієнтом в основному в тонкій і товстій кишках, і невелика частина - у шлунку.

Мінеральні солі всмоктуються, в основному, в тонкій і товстій кишках за допомогою первинно-активного транспорту або **шляхом дифузії**.

## Дифузія

Дифузії спостерігається в кожній живій клітині біологічних систем; без неї неможливе нормальне функціонування живої системи. Перенесення речовини усередині фази відбувається або шляхом молекулярної дифузії, або шляхом конвекції і молекулярної дифузії.

*Молекулярною дифузією* називається перенесення розподіленої речовини, що обумовлене хаотичним рухом самих молекул. Молекулярна дифузія (МД) описується **першим законом Фіка**, згідно з яким кількість речовини  $dM$ , що дифундує за час  $d\tau$  через елементарну поверхню  $dS$ , нормальну до напрямку дифузії, пропорційна градієнту концентрації  $dc/dn$  цієї речовини:

$$dM = -DdSd\tau \frac{dc}{dn}. \quad (10.1)$$

Потік речовини, що переноситься МД через одиницю поверхні в одиницю часу, дорівнює:

$$J = \frac{dM}{dSd\tau} = -D \frac{dc}{dn}. \quad (10.2)$$

Коефіцієнт пропорційності  $D$  називається коефіцієнтом МД, або просто коефіцієнтом дифузії. Коефіцієнт дифузії  $D$  залежить від властивостей розподіленої речовини; властивостей середовища, через яке воно дифундує; температури і тиску. Значення  $D$  визначають за експериментальними даними або по теоретичних і напівемпіричних рівняннях з урахуванням температури і тиску, при яких протікає процес дифузії.

Сумарне перенесення речовини внаслідок конвективного перенесення разом із самим середовищем і молекулярної дифузії називають *конвективною дифузією*. Розподіл концентрації речовини при перенесенні шляхом конвективної дифузії визначається диференціальним рівнянням конвективної дифузії:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right). \quad (10.3)$$

чи в коротшому записі:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + v \operatorname{grad} c = D \nabla^2 c. \quad (10.4)$$

Рівняння (10.4) виражає закон розподілу концентрації цього компонента у стаціонарному середовищі, що рухається, при несталому процесі масообміну.

Для окремого випадку сталого масообміну рівняння (10.4) набуває вигляду:

$$v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right). \quad (10.5)$$

При масообміні в нерухомому середовищі рівняння (10.4) перетворюється в диференціальне рівняння молекулярної дифузії, **зване другим законом Фіка:**

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right). \quad (10.6)$$

### Шлунок як хімічний реактор

Процеси перенесення і всмоктування речовин у шлунково-кишковому тракті є вкрай складними для їх опису у вигляді математичних моделей. Проте, попит на прогнозування динаміки транспорту речовин із шлунково-кишкового тракту в кров досить великий, наприклад, в різного роду фармакологічних дослідженнях, у тому числі дослідженнях по розробці нових ліків і препаратів, що призначені до прийому через шлунково-кишковий тракт. У розробках такого роду пробні препарати потребують ретельної усебічної перевірки, для чого необхідно провести серії експериментів, як правило, вивчаючи дію препаратів на піддослідних тваринах. Тут виникає відразу дві проблеми: по-перше, використання піддослідних тварин далеке не в усіх випадках прийнятне; по-друге, деякі роботи вказують на те, що не існує чіткої кореляції в характеристиках процесів всмоктування ліків (наприклад, біологічній засвоюваності препарату) між тваринами і людиною, і у такому разі експерименти з тваринами стають не більше ніж попереднім етапом в дослідженнях. Побудова адекватної математичної моделі дозволила би вирішити обидві проблеми, вивівши дослідження на якісно новий рівень.

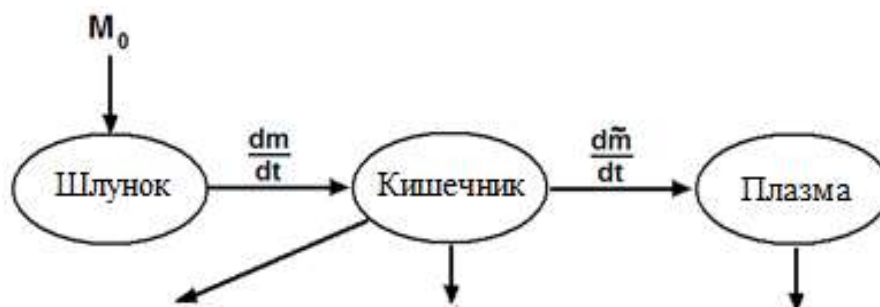


Рис. 10.3. Структурна схема перенесення і всмоктування речовин у шлунково-кишковому тракті.

Таким чином, подальше вивчення і створення моделі перенесення і всмоктування речовин у шлунково-кишковому тракті, є важливим і актуальним завданням. Як правило, шлунок розглядають як хімічний реактор.

### Ідеальні реактори

Розрізняють два типи ідеальних реакторів (апаратів). Перший тип - апарат ідеального витіснення (АІВ) - характеризується тим, що потік речовини в апараті рухається рівномірно, фронт потоку рухається як твердий поршень. Частки рідини мають однакову швидкість  $v$ , отже, однаковий час перебування в реакторі  $\tau$ :

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{LS}{vS} = \frac{V}{Q},$$

де  $L$ ,  $S$ ,  $V$  - відповідно довжина, площа поперечного перерізу і об'єм АІВ;  $Q$  - об'ємна витрата речовини в АІВ.

Другий тип - апарат ідеального перемішування (АІП). Інтенсивність циркуляції речовини в ньому така, що введена речовина  $M$  миттєво рівномірно перемішується з усією масою, що вже знаходиться в апараті, тобто відбувається миттєвий розподіл введеної речовини по всьому об'єму апарату. При цьому, концентрація введеної речовини в апараті дорівнює:

$$c = \frac{M}{V}$$

Оскільки перемішування у шлунку далеко від ідеального (має місце затримка між моментом надходженням речовини у шлунок і моментом евакуації частини цієї речовини в тонку кишку) доцільно розглядати шлунок у вигляді каскаду послідовно сполучених реакторів ідеального перемішування:

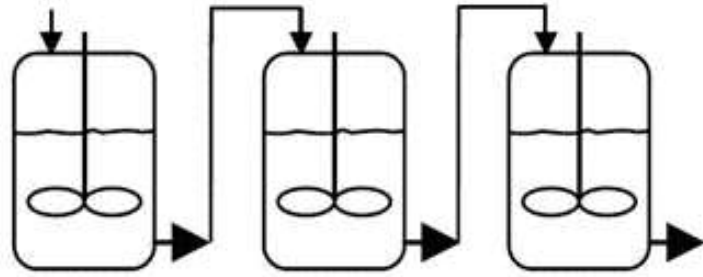


Рис. 10.4 - Каскад реакторів ідеального перемішування для моделювання роботи шлунку

Кожен ідеальний реактор, що входить до складу каскаду, характеризується двома головними параметрами: коефіцієнтом кінетики реакції; середнім часом знаходження в реакторі.

Перший параметр пов'язаний із швидкістю розщеплювання речовини в шлунку, другий відповідає середньому часу знаходження реагенту в шлунку перед його попаданням у тонку кишку.

**Приклад 1.** Визначити період напіввиведення алкоголю з організму пацієнта, якщо константа елімінації  $k = 0,231$  годин<sup>-1</sup>. Процес елімінації описується рівнянням  $dM / dt = -kM$ .

**Розв'язання.** Оскільки кількість речовини  $M$  пропорціональна концентрації  $c$ , тобто:  $M = cV$ , де  $V$  - об'єм, який займає речовина, рівняння, що описує процес виведення алкоголю, можна представити у вигляді:

$$\frac{d(cV)}{dt} = -k(cV); \quad \frac{dc}{dt} = -kc; \quad \frac{dc}{c} = -kdt; \quad \int_{c_0}^c \frac{dc}{c} = -\int_0^t kdt; \quad \ln \frac{c}{c_0} = -kt.$$

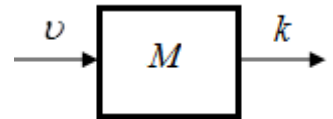
Період напіввиведення речовини  $t_{1/2}$  - це час, впродовж якого концентрація речовини в організмі знижується вдвічі, тобто  $c = 0,5c_0$ . Підставимо це значення концентрації в отримане рівняння і визначимо час напіввиведення речовини:

$$\ln \frac{c}{c_0} = \ln \frac{0,5c_0}{c_0} = -kt_{1/2}; \quad \ln 0,5 = -kt_{1/2};$$

$$t_{1/2} = -\frac{\ln 0,5}{k} = -\frac{\ln 0,5}{0,231} = 3 \text{ год.}$$

Відповідь:  $t_{1/2} = 3 \text{ год.}$

**Приклад 2.** Пацієнту через крапельницю вводять препарат з постійною швидкістю  $\nu = 2 \text{ мкг/хв.}$  Визначити масу препарату в крові через 1 годину при константі елімінації  $k = 0,25 \text{ год}^{-1}$ . Процес описується однокамерною моделлю.



**Розв'язання.** Процес елімінації описується рівнянням:

$$\frac{dM}{dt} = \nu - kM.$$

Для визначення маси препарату в крові  $M$ , як функцію від  $\nu, t, k$ , проведемо наступні перетворення:

$$\frac{dM}{\nu - kM} = dt \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{k} \cdot \frac{d(\nu - kM)}{\nu - kM} = dt;$$

$$-\frac{1}{k} \int_0^M \frac{d(\nu - kM)}{\nu - kM} = \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{k} \ln(\nu - kM)_0^M = t;$$

$$\ln(\nu - kM)_0^M = -kt; \quad \ln(\nu - kM) - \ln \nu = -kt;$$

$$\ln \frac{(\nu - kM)}{\nu} = -kt; \quad \frac{\nu - kM}{\nu} = \exp(-kt);$$

$$\nu - kM = \nu \exp(-kt) \quad \rightarrow \quad M = \frac{\nu}{k} [1 - \exp(-kt)].$$

$$M = \frac{2 \cdot 60}{0,25} [1 - \exp(-0,25 \cdot 1)] = 105,5 \text{ мкг.}$$

Відповідь:  $M = 105,5 \text{ мкг.}$

## КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Тип рухової активності, що забезпечує проходження харчової грудочки по стравоходу а) маятникоподібні рухи; б) ритмічна сегментація; в) перистальтика; г) тонічні скорочення.
2. Відділ шлунково-кишкового тракту, якому притаманна ритмічна сегментація: а) стравохід; б) сфінктер; в) шлунок; г) 12-пала кишка; д) тонка кишка; ж) товста кишка.
3. Тип рухової активності, яку забезпечують сфінктери травної системи: а) перистальтика; б) ритмічна сегментація; в) маятникоподібні рухи; г) тонічні скорочення.
4. Основні види скорочень шлунку: а) тонічні; б) маятникоподібні; в) ритмічно - сегментальні; г) перистальтичні.
5. Маятникоподібні скорочення в тонкій кишці обумовлені: а) періодичним скороченням поздовжніх м'язів; б) одночасним скороченням кільцевих і поздовжніх м'язів; в) послідовним скороченням кільцевих і поздовжніх м'язів.
6. Властивості реактору ідеального перемішування а) речовина рухається з однаковою швидкістю; б) однаковий час перебування речовини в реакторі; в) миттєвий розподіл введеної речовини по об'єму реактора.
7. Основні параметри ідеального реактору: а) коефіцієнт кінетики реакції; б) середній час перебування реагенту в реакторі; в) об'єм реактору.
8. Структура шлунково-кишкового тракту, в якій здійснюється лише тонічні скорочення : а) стравохід; б) сфінктер; в) шлунок; г) 12-пала кишка; д) тонка кишка; ж) товста кишка.
9. Перистальтичне скорочення обумовлено: а) періодичним скороченням поздовжніх м'язів; б) одночасним скороченням кільцевих і поздовжніх м'язів; в) послідовним скороченням кільцевих і поздовжніх м'язів.
10. Властивості реактору ідеального витіснення: а) однаковий час перебування речовини в реакторі; б) миттєвий розподіл введеної

речовини по об'єму реактора; в) речовина рухається з однаковою швидкістю.

11.Період напіввиведення речовини це: а) середній час перебування речовини в організмі; б) час, впродовж якого концентрація речовини в організмі знижується вдвічі.

## ЛЕКЦІЯ 11

### СТАТИКА ТІЛА

#### Введення в статику

Розділ механіки, в якому вивчаються умови рівноваги тіл, називається статикою. Статику відносять до однієї з найважливіших розділів біомеханіки. Статичні методи можна застосовувати і для вивчення рухів, якщо ці рухи повільні. При такому підході, рухи розглядають як послідовність статичних положень.

Значна кількість рухів людини зводиться до руху в одній площині (рух колін і ліктів). Складні рухи, наприклад, нижньої та верхньої кінцівки відносно відповідно тазостегнового і плечового суглоба, можна звести до комбінації плоских рухів.

Опорно-руховий апарат людини складається із зчленованих між собою кісток скелета. Кістки скелета діють як важелі, які мають точку опори у зчленуваннях (суглобах) і призводяться до руху силою тяги, що виникає при скороченні прикріплених до кісток м'язів. В біомеханіці розрізняють важелі I, II і III роду.

#### *Важіль I роду*

Для важелів I роду сила тяжіння і сила тяги м'язів діють в одному напрямку і прикладені з протилежних сторін від точки опори (осі обертання).

#### *Важіль II роду*

У важелях II роду сила тяги м'язів і сила тяжіння діють у протилежних напрямках і прикладені з однієї сторони від точки опори, при цьому сила тяжіння прикладена ближче до точки опори, ніж сила тяги м'язів.

#### *Важіль III роду*

У важелях III роду сила тяги м'язів і сила тяжіння також діють у протилежних напрямках і прикладені з однієї сторони від точки опори, але сила тяги м'язів прикладена ближче до точки опори, ніж сила тяжіння. В

опорно-руховому апараті присутні важелі всіх трьох різновидів, причому значно більше важелів III роду, оскільки м'язи кріпляться, в основному, поблизу суглобів.



Рис. 11.1. Важіль I роду

Важіль II роду

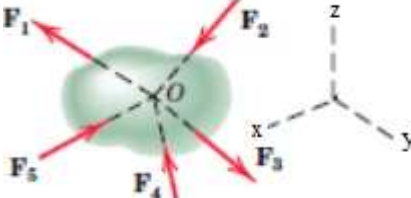
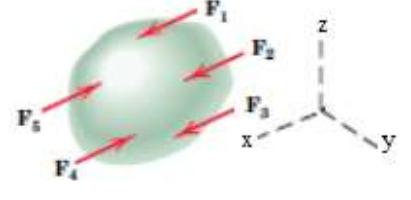
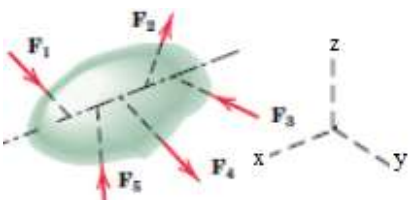
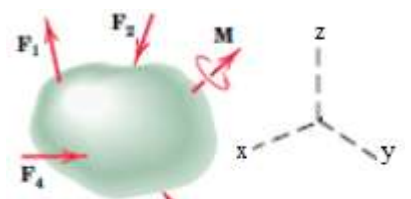
Важіль III роду

### Умови рівноваги системи сил

Окремі випадки умов рівноваги системи сил наведено в табл 11.1

Таблиця 11.1

Назва системи сил	Схема системи сил	Умови рівноваги системи сил
1. Плоска колінеарна (сили лежать на одній прямій)		$\sum_{k=1}^n F_{kX} = 0$
2. Плоска збіжна		$\sum_{k=1}^n F_{kX} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kY} = 0$
3. Плоска паралельна		$\sum_{k=1}^n F_{kX} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_Z(\vec{F}_k) = 0$
4. Плоска довільна		$\sum_{k=1}^n F_{kX} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kY} = 0$ $\sum_{k=1}^n M_Z(\vec{F}_k) = 0$

5. Просторова збіжна		$\sum_{k=1}^n F_{kX} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kY} = 0;$ $\sum_{k=1}^n F_{kZ} = 0$
6. Просторова паралельна		$\sum_{k=1}^n F_{kX} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_Y(\vec{F}_k) = 0;$ $\sum_{k=1}^n M_Z(\vec{F}_k) = 0$
7. Просторова, сили перетинають одну вісь		$\sum_{k=1}^n F_{kX} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kY} = 0;$ $\sum_{k=1}^n F_{kZ} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_Y(\vec{F}_k) = 0;$ $\sum_{k=1}^n M_Z(\vec{F}_k) = 0$
8. Просторова довільна		$\sum_{k=1}^n F_{kX} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kY} = 0;$ $\sum_{k=1}^n F_{kZ} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_X(\vec{F}_k) = 0;$ $\sum_{k=1}^n M_Y(\vec{F}_k) = 0;$ $\sum_{k=1}^n M_Z(\vec{F}_k) = 0$

### Методика розв'язання задач статички

1. Виділити тверде тіло, рівновагу якого треба розглянути щоб знайти невідомі величини.
2. Показати активні сили.
3. Відкинути в'язі та замінити їх дію реакціями.
4. Розглянути рівновагу виділеного тіла як вільного, що знаходиться під дією активних сил і реакцій в'язей.
5. Порівняти число невідомих величин і число рівнянь рівноваги, які повинні бути однаковими для статично визначеної задачі.
6. Обрати систему координат.

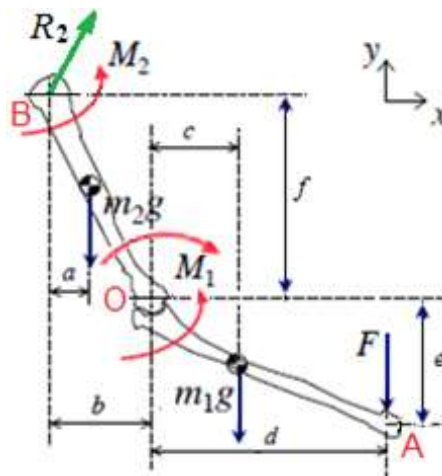
7. Скласти систему рівнянь рівноваги для сил, що прикладені до твердого тіла або системи твердих тіл.

8. Розв'язати складену систему рівнянь рівноваги та знайти невідомі величини.

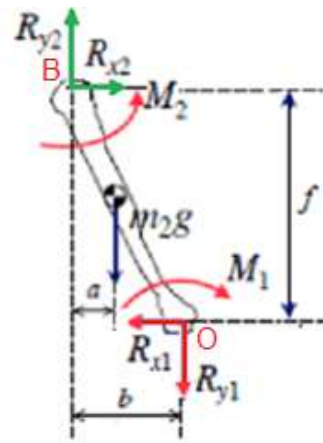
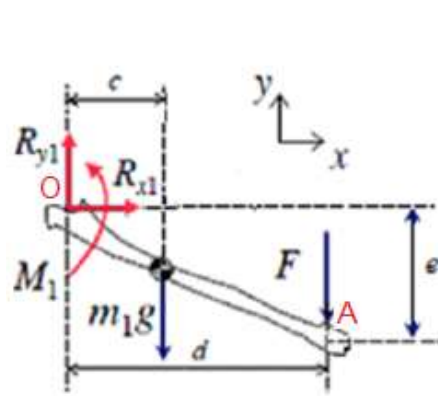
### Рівновага багатосегментних моделей

Якщо в рівновазі знаходиться не одне тіло, а система тіл, то для визначення всіх невідомих величин необхідно розчленити систему, ввівши розгляд реакцій внутрішніх в'язей.

**Приклад 1.** Визначити реакцію  $R_2$  плечового суглоба і моменти  $M_1, M_2$ , що виникають у ліктьовому (т. О) і плечовому (т. В) суглобах двосегментної моделі верхньої кінцівки під дією прикладеної сили  $F$  та ваги передпліччя  $m_1g$  і плеча  $m_2g$ . Необхідні для розрахунку розміри вказані на діаграмі вільного тіла.

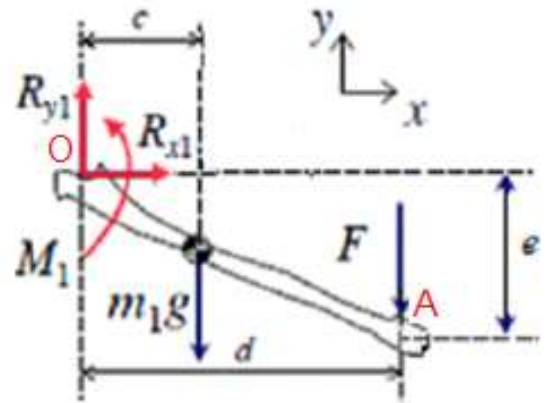


**Розв'язання.** Розділимо двосегментну модель верхньої кінцівки по ліктьовому суглобу О на дві частини – ліву (передпліччя) і праву (плече). Напрямок реакцій  $R_{x1}, R_{y1}$  і  $M_1$  в точці О на лівій і правій частинах рівні за модулем і протилежні за напрямком, згідно з аксіомою про рівність сил дії та протидії.



Розглянемо сегмент передпліччя і складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kX} = 0; & R_{X1} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kY} = 0; & R_{Y1} - m_1g - F = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0; & M_1 - m_1gc - Fd = 0. \end{cases}$$



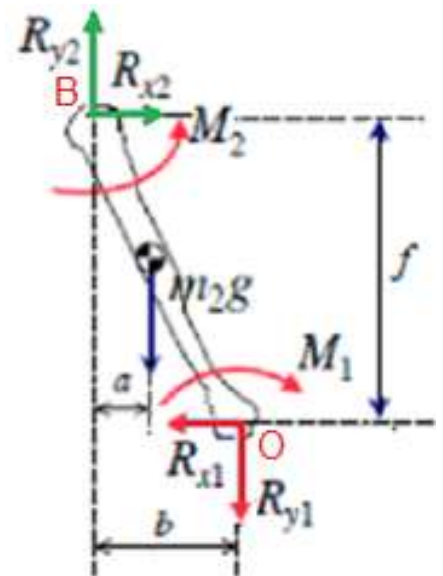
Розв'язок наведеної системи дозволяє визначити складові реакції  $R_1$  і момент  $M_1$ :

$$R_{X1} = 0; \quad R_{Y1} = m_1g + F;$$

$$M_1 = m_1gc + Fd.$$

Розглянемо сегмент плеча і складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kX} = 0; & R_{X2} - R_{X1} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kY} = 0; & R_{Y2} - m_2g - R_{Y1} = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; & M_2 - M_1 - m_2ga - R_{Y1}b - R_{X1}f = 0. \end{cases}$$



Розв'язок перших двох рівнянь наведеної системи дозволяє визначити складові реакції  $R_2$ :

$$R_{x2} = R_{x1} = 0; \quad R_{y2} = m_2g + R_{y1} = m_2g + m_1g + F;$$

$$R_{y2} = (m_1 + m_2)g + F;$$

$$R_2 = (m_1 + m_2)g + F.$$

Підставивши у третє рівняння значення  $R_{x1}$ ,  $R_{y1}$  і  $M_1$ , знайдемо  $M_2$ :

$$M_2 = M_1 + m_2ga + R_{y1}b + R_{x1}f;$$

$$M_2 = (m_1gc + Fd) + m_2ga + (m_1g + F)b;$$

$$M_2 = m_1g(b + c) + m_2ga + F(b + d).$$

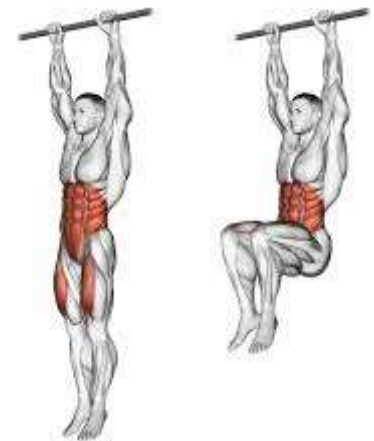
*Відповідь:*  $R_2 = (m_1 + m_2)g + F$ ;  $M_1 = m_1gc + Fd$ ;

$$M_2 = m_1g(b + c) + m_2ga + F(b + d).$$

### Види рівноваги

В статиці людського тіла розрізняють два види рівноваги: стійку та нестійку, які обумовлені розташуванням центру ваги тіла щодо площі опори.

Стійкою рівновагою є така, при якій тіло, виведене зі стану рівноваги, повертається до початкового положення під дією власної ваги. Такий вид рівноваги буває в тих випадках, коли центр ваги тіла знаходиться нижче площі опори, наприклад, при висі на перекладині.



Нестійкою рівновагою називається така, при якій центр ваги тіла знаходиться над площею опори. Тіло, виведене зі стану рівноваги, у початкове положення не повертається.

Основною умовою збереження будь-якого виду рівноваги є проходження вертикалі загального центру ваги (ЗЦВ) усередині площі опори.

Якщо вертикаль ЗЦВ виходить за межі площі опори, то тіло при нестійкій рівновазі в початкове положення не повертається і падає.

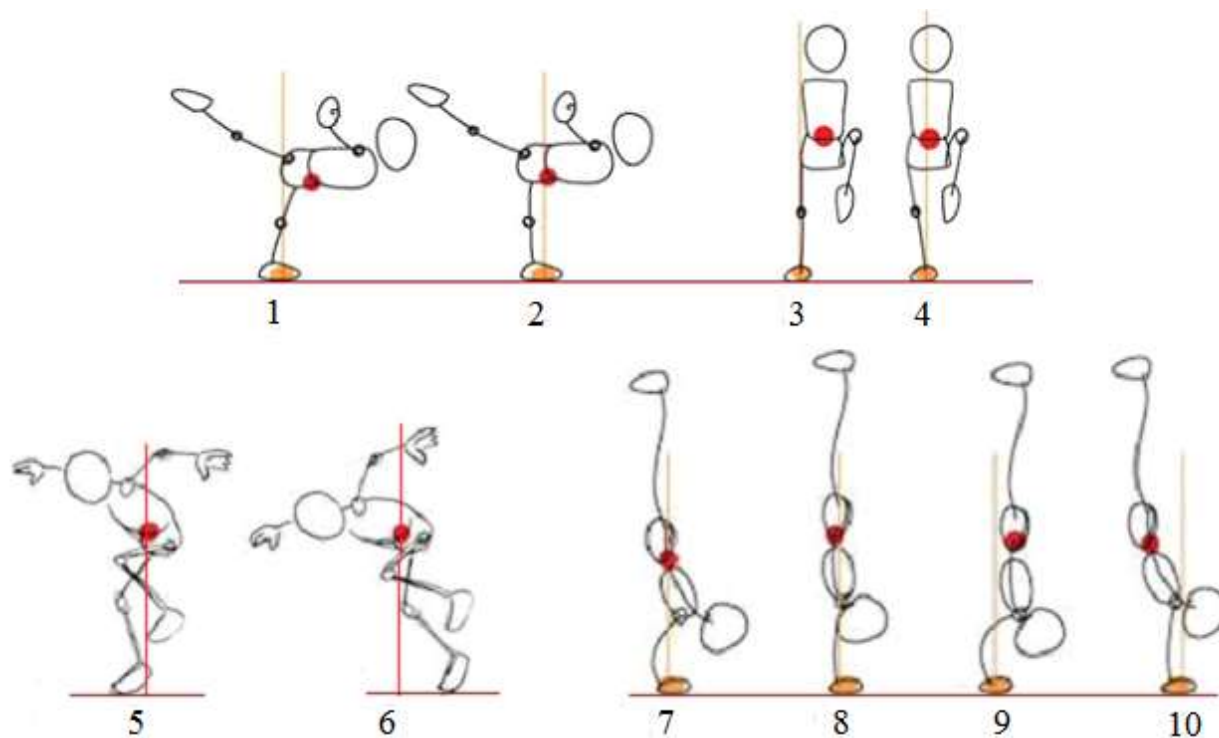


Рис. 11.2. Сійка (2, 4, 5, 7, 8) та нестійка (1, 3, 6, 9, 10) рівноваги

Площею опори є не тільки опорні поверхні тіла, наприклад, стопи, а також площа між ними.

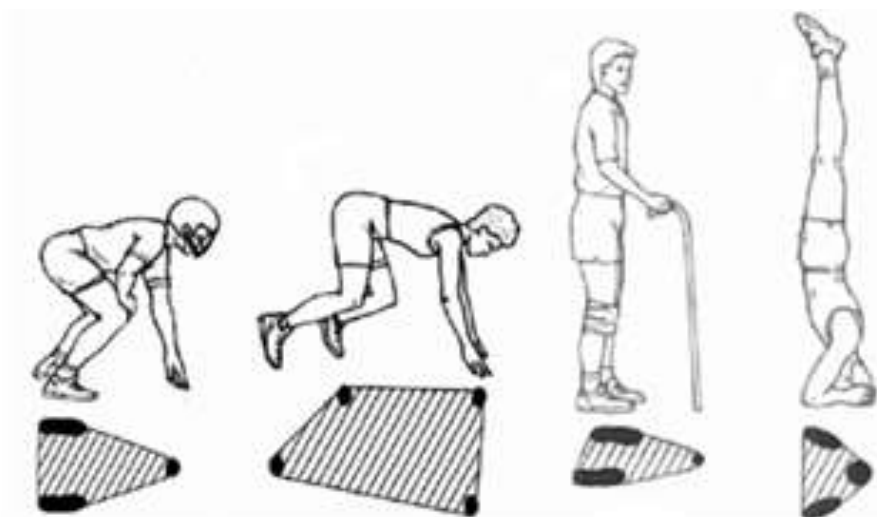


Рис. 11.3. Площа опори

## Показники стійкості тіла

Перебуваючи у нестійкій рівновазі, тіло може мати різний ступінь стійкості, який залежить від: висоти центру ваги над площею опори; величини площі опори; ступеня віддаленості вертикалі ЗЦВ від границь площі опори.

Ступінь стійкості тіла характеризується кутом стійкості, який утворюється двома прямими - вертикаллю ЗЦВ та прямою, що йде від загального центру ваги до тієї чи іншої границі /межі площі опори.

Чим більший кут стійкості, тим більшу стійкість має тіло у конкретному напрямку. Стійкість об'єкта характеризується його здатністю зберігати певне положення, протидіючи порушенню рівноваги.

Розрізняють статичні показники стійкості - здатність чинити опір порушенню рівноваги і динамічні – здатність відновлювати рівновагу.

Статичним показником стійкості твердого тіла служить коефіцієнт стійкості  $k$ , який дорівнює відношенню граничного моменту стійкості до перекидального моменту:

$$k = \frac{M_{CT}}{M_{ПЕР}},$$

де  $M_{CT}$  - момент стійкості, дорівнює добутку ваги тіла на плече;  $M_{ПЕР}$  - момент перекидання, дорівнює добутку зовнішньої сили на висоту її прикладання. Чим вище прикладена зовнішня сила, тим легше перекинути тіло.

При  $k \geq 1$  - перекидання немає. При  $k < 1$  - рівновагу зберегти неможливо. Збільшити коефіцієнт стійкості тіла можна шляхом зменшення перекидального моменту.

Динамічним показником стійкості твердого тіла є кут стійкості. Оскільки тіло складається з окремих частин, його загальний центр ваги визначається як центр системи тіл. Оскільки окремі частини людського тіла з'єднані один з одним рухомо, загальний центр ваги не має фіксованого положення і переміщається при будь-якій зміні положення окремих частин. Тому кожній позі або положенню тіла, що перебуває у стані рівноваги,

відповідає певне місце розташування його загального центру ваги. Збільшення площі опори тіла за допомогою широкої розстановки ніг не призводить, в цілому, до підвищення стійкості тіла, оскільки кут стійкості збільшується лише в одному напрямку.

Особливість статички живого тіла полягає в тому, що рівновагу можна зберегти лише за умови роботи рухового апарату, напруження м'язів та пасивного опору зв'язок, які протидіють вазі тієї чи іншої рухомої ланки.

Сила ваги рухомої ланки, прикладена до її центру ваги, прагне перемістити її донизу. При цьому, утворюється момент сил, що обертає цю ланку навколо осі суглоба. Протидія цього моменту сил і є статичною роботою м'язів і опір зв'язок.

### **КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ**

1. Дати характеристику важелям I, II, III роду, навести приклади.
2. Назвіть умови рівноваги довільної просторової системи сил?
3. Назвіть умови рівноваги плоскої системи сил, як окремий випадок довільної системи сил?
4. Сформулюйте умови рівноваги плоскої систем паралельних сил.
5. Сформулюйте умови рівноваги просторової систем збіжних сил.
6. Поясніть різницю між статично визначеними і статично невизначеними задачами статички.
7. Обгрунтуйте метод розв'язання задач про рівновагу багатосегментних систем.
8. Назвіть основні види рівноваги. Надайте їм характеристику.
9. Дайте визначення нестійкій рівновазі. За яких умов вона виникає?  
Наведіть приклади.
10. Назвіть основну умову збереження рівноваги будь-якого виду.
11. Назвіть фактори, що впливають на ступінь стійкості тіла.
12. Дайте визначення куту стійкості та моменту стійкості.

## **ЛЕКЦІЯ 12**

### **БІОМЕХАНІКА ОПОРНО-РУХОВОГО АПАРАТУ**

#### **Система скелета**

Однією з найважливіших властивостей живого організму є пересування у просторі. Цю функцію виконує опорно-руховий апарат, який об'єднує кістки, з'єднання кісток і м'язи. Опорно-руховий апарат поділяють на пасивну і активну частини. До пасивної частини відносяться кістки і з'єднання кісток. Активну частину складають м'язи, які завдяки здатності до скорочення приводять у рух кістки скелета.

До складу скелета входить більше ніж 200 кісток, переважаюча частина з них - парні. Систему скелета умовно підрозділяють на дві частини: осьовий і додатковий. До осьового скелета відноситься череп (29 кісток), хребетний стовп (26 кісток), грудна клітка (25 кісток); до додаткового - кістки верхніх (64) і нижніх (62) кінцівок.

Маса «живого» скелета у новонароджених близько 11% маси тіла, у дітей різного віку від 9 до 18%. У дорослих людей відношення маси скелета до маси тіла до літнього і старечого віку зберігається на рівні до 20%, потім дещо зменшується.

Кістки скелета є важелями, що приводяться в рух м'язами. В результаті цього частини тіла змінюють положення по відношенню один до одного і пересувають тіло у просторі. До кісток прикріплюються зв'язки, сухожилля, фасції.

#### **Механічні властивості кісткової тканини**

Дослідження механічних характеристик кісткової тканини є необхідною передумовою для побудови сучасних математичних моделей кісток людини, вивчення взаємодії кістки зі штучними імплантатами, різноманітними лікувальними пристроями, розуміння механізмів перебудови і адаптації кістки в умовах функціонального навантаження.

За своїми механічними властивостями кістка є неоднорідною, нелінійною, анізотропною і несучільною, має виражені в'язко-пружні властивості та здатність до структурної перебудови під дією навантажень. При цьому, механічні властивості мають значні індивідуальні і топографічні відмінності та істотно залежать від біологічних чинників.

Кістки вивчають по розпилюваннях і моделях. Випиляні зразки піддають деформаціям на розтяг, стиск, зсув, кручення, згинання. Проводяться виміри напруження  $\sigma$  і деформації  $\epsilon$ , статистична обробка даних, їх аналіз і побудова залежностей  $\sigma$  від  $\epsilon$ . Залежно від топографії зразка кістки і напрямку випілювання по відношенню до осі кістки, модуль пружності кортикальної кісткової тканини коливається в межах від 4 до 20-22 ГПа, губчастої кісткової тканини від 0,05 до 1,5 ГПа, а коефіцієнт Пуассона від 0,05 до 0,4. З віком кісткова тканина зазнає ряд змін, що впливає на її хімічний склад і внутрішню структуру. Старіння знижує біологічну активність кісткової тканини, змінює ступінь мінералізації, а також порядок розташування мінеральних кристалів і остеонів, зменшує кількість сполучної речовини, деяка частина тканини зникає і утворюються пори.

Кістки легко перебудовуються під дією тренувань, фізичних навантажень, що проявляється у збільшенні або зменшенні кількості остеонів, зміні товщини кісткових пластинок кортикальної та губчастої речовин. Для оптимального розвитку кістки кращі помірні регулярні фізичні навантаження.

Сидячий спосіб життя, малі навантаження сприяють послабленню і стоншуванню кістки. Кістка набуває крупнопористої будови і навіть частково розсмоктується (резорбція кістки, остеопороз). Професія також впливає на особливість будови кістки. Істотну роль грають спадково-статеві чинники.

Активна перебудова кісткової тканини обумовлена утворенням нових кісткових клітин, міжклітинної речовини на тлі руйнування (резорбції) наявної кісткової тканини. Резорбція забезпечується діяльністю остеокластів. На місці кістки, що руйнується, формуються нові кісткові балки, нові остеони.

Цей взаємозв'язок характеризує **закон Вольфа** таким чином: «Кожна

зміна функції кістки викликає певні зміни внутрішньої архітектури і зовнішніх параметрів відповідно до математичних законів».

### **Руйнівна деформація**

Опір кістки руйнуванню залежить від виду навантаження. Шляхом експериментів *in vivo* та *in vitro* встановлено, що кістки найміцніші при стиску (компресії), менш витривалі при розтягу і найбільш слабкі при зсуві.

Руйнівна деформація при поєднанні розтягу і крученні складає  $\varepsilon = 2-3 \%$ . При руйнуванні утворюються спіральні тріщини.

При розтягу лінії руйнування проходять по поверхнях остеонів, через ламелі і, дуже рідко, через остеони. В цьому випадку  $\varepsilon = 0,6-3 \%$ . При розтягу зразків, що випиляні уздовж поздовжньої осі, відбувається руйнування зі зломом під кутом  $\alpha = 45-90^\circ$ . Для зразків, що випиляні під кутом до поздовжньої осі, спостерігається злам по рівній поверхні, паралельній осі дії руйнівної сили.

При крученні зразків, що випиляні уздовж осі кручення, відбувається руйнування уздовж остеонів з накопиченням дрібних тріщин. Для зразків, випиляних під кутом, спостерігається крихке руйнування під кутом  $\alpha = 45^\circ$ .

Отже, кістка є композиційним матеріалом, в якому реалізуються наступні процеси опору руйнуванню:

- Гальмування росту тріщин за рахунок наявності порожнин (лакун) і просторового розташування ламел із різним напрямком армуючих волокон;
- Опір руйнуванню шляхом витягування волокон із матриці (висока міцність досягається за рахунок великої поверхні руйнування);
- Розвиток пластичної деформації, що сприяє перерозподілу напруження усередині кістки.

–

## Суглоби та їх класифікація

Кістки скелета з'єднуються між собою за допомогою: безперервних з'єднань, напівсуглобів і переривчастих з'єднань - синовіальних суглобів.

*Безперервні з'єднання кісток* (рис. 12.1) утворюються за допомогою сполучної тканини, хряща або кістки при її зрощенні.

*Напівсуглоби* (рис. 12.2) є перехідною формою між безперервними і переривчастими з'єднаннями кісток. Вони сполучають кістки за допомогою хряща. У товщі хряща є щілина - зачаток суглобової порожнини.

*Синовіальні суглоби* забезпечують високу рухливість усього тіла і є найбільш розповсюдженими видами з'єднання кісток.

Згідно діючої анатомо-фізіологічної класифікації, суглоби розрізняють по числу і формі суглобових поверхонь, а також за мірою рухливості кісток, що зчленовуються.



Рис.12.1 - Безперервні з'єднання кісток

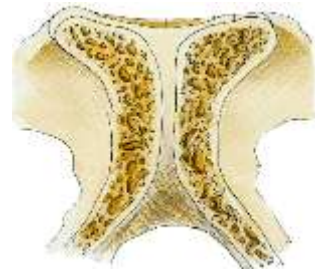


Рис.12. 2 - Напівсуглоби

## Класифікація за числом суглобових поверхонь

*Простий суглоб* - має дві суглобові поверхні (міжфаланговий суглоб великого пальця).

*Складний суглоб* - має більше двох суглобових поверхонь (ліктьовий суглоб).

*Комплексний суглоб* - містить внутрішньосуглобовий хрящ (меніск або диск), що розділяє суглоб на дві камери, наприклад скронево-нижньощелеповий суглоб.

### **Класифікація за формою суглобових поверхонь**

*Циліндричний суглоб* (обертальний суглоб) - циліндрична суглобова поверхня, вісь якої розташовується у вертикальній осі тіла або паралельно довгій осі кісток, що зчленовуються, і забезпечує рух навколо однієї осі обертання (атланта-осьовий серединний, проксимальний променево-ліктьовий суглоб).

*Блоковідний суглоб* - суглобова поверхня є циліндром, що лежить у фронтальній площині, розташованим перпендикулярно по відношенню до довгої осі кісток, що зчленовуються (ліктьовий, гомілковостопний суглоб, міжфалангові суглоби пальців).

*Еліпсоїдний суглоб* - суглобові поверхні мають вигляд відрізків еліпса (одна опукла, а інша увігнута), які забезпечують рух навколо двох взаємно перпендикулярних осей (променево-зап'ястковий суглоб).

*Міщелковий суглоб* - має опуклу суглобову голівку, у вигляді виступаючого виростка, близького за формою до еліпса. Виростку відповідає западина на суглобовій поверхні іншої кістки, хоча їх поверхні можуть істотно відрізнятися один від одного. Виростковий суглоб можна розглядати як перехідну форму від блоковидного суглоба до еліпсоїдного (колінний суглоб).

*Сідловідний суглоб* (saddle joint) - утворений двома сідловидними суглобовими поверхнями, що сидять «верхи» один на одному, з яких одна рухається вздовж і поперек іншою, завдяки чому можливий рух у двох взаємно перпендикулярних осях (зап'ястно-п'ястковий суглоб).

*Кулястий суглоб* (ball and socket joint) - одна з суглобових поверхонь представлена голівкою опуклої кулястої форми, а інша відповідно до увігнутою суглобовою западиною. Теоретично рух в цьому виді суглоба може здійснюватися навколо безлічі осей, але практично використовується тільки три. Кулястий суглоб найвільніший з усіх суглобів (плечовий і тазостегновий суглоби).

*Плоский суглоб* (plane joint) - має практично плоскі суглобові поверхні

(поверхня кулі з дуже великим радіусом), тому рухи можливі навколо усіх трьох осей, проте об'єм рухів, зважаючи на незначну різницю площ суглобових поверхонь, незначний (міжхребцеві суглоби, крижово-клубовий суглоб).

*Тугий суглоб* - представляють групу зчленувань з різною формою суглобових поверхонь із туго натягнутою капсулою і дуже міцним допоміжним зв'язковим апаратом, тісно прилеглі суглобові поверхні різко обмежують об'єм рухів у цьому виді суглоба. Тугі суглоби згладжують струси і пом'якшують поштовхи між кістками.

### **Класифікація суглобів за мірою рухливості кісток**

Одновісні суглоби: циліндричний суглоб (атланта-осьовий серединний); блоковидний суглоб (міжфалангові суглоби пальців).

Двовісні суглоби: еліпсоподібний (промене-зап'ястковий суглоб); м'яцелковий (колінний суглоб); сідлоподібний (зап'ястно-п'ястковий суглоб).

Багатоосні суглоби: кулястий (плечовий та тазостегновий суглоби); плоский (міжхребцеві суглоби); тугий суглоб.

### **Біомеханіка хребта**

Особливості будови скелета і окремих його кісток сформувалися у зв'язку з прямоходінням, розвитком головного мозку і органів чуття, різними функціями верхніх і нижніх кінцівок.

Хребетний стовп складається з 33-34 хребців. У хребетному стовпі виділяють п'ять відділів: шийний, грудний, поперековий, крижовий і куприковий.

Крижі і п'ятий поперековий хребець є базисом усього хребта, вони забезпечують опору для вище розташованих відділів, і тому піддаються найбільшому навантаженню.

На формування хребта і утворення його фізіологічних і патологічних вигинів впливає положення IV і V поперекових хребців і крижів, тобто

співвідношення між крижовою і вище розміщеною частиною хребта (рис. 12.3). В нормі, крижово-поперековий кут має дорівнювати  $30^\circ - 35^\circ$ .

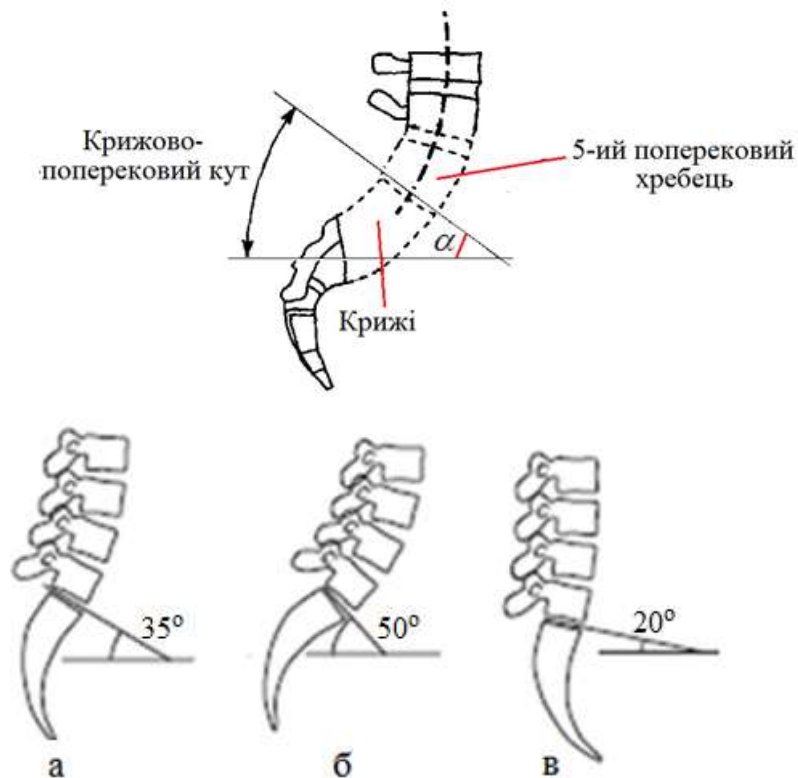


Рис. 12.3. Крижово-поперековий кут (КПК): а – норма; б, в – відхилення від норми

В положенні стоячи на крижі діє 60% ваги тіла. При масі особи 80 кг ця сила складає:

$$W = 0,6mg = 0,6 \cdot 80 \cdot 9,81 = 471 \text{ Н}.$$

Розкладемо силу  $W$  на дві складові (рис. 12.4) - нормальну  $N$  і зсувну (поперечну)  $Q$ , між якими має місце наступні залежності:

$$\vec{W} = \vec{N} + \vec{Q}; \quad N = W \cos \alpha; \quad Q = W \sin \alpha$$

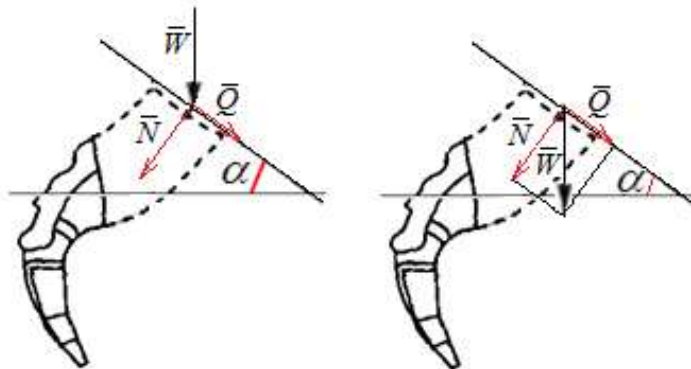


Рис.12.4

Величина нормальної сили  $N$  при крижово-поперекових кутах  $\alpha = 35^\circ, 50^\circ, 20^\circ$  відповідно дорівнює:

$$N_{35} = W \cos 35^\circ = 386 \text{ Н};$$

$$N_{50} = W \cos 50^\circ = 303 \text{ Н};$$

$$N_{20} = W \cos 20^\circ = 443 \text{ Н}.$$

Величина зсувної сили  $Q$  при крижово-поперекових кутах  $\alpha = 35^\circ, 50^\circ, 20^\circ$  відповідно дорівнює:

$$Q_{35} = W \sin 35^\circ = 270 \text{ Н};$$

$$Q_{50} = W \sin 50^\circ = 361 \text{ Н};$$

$$Q_{20} = W \sin 20^\circ = 161 \text{ Н}.$$

### **Вигини хребта і м'язи**

Хребетний стовп не займає строго вертикальне положення. Він має вигини в сагітальній і фронтальній площинах. Вигини хребетного стовпа, обернені опуклістю назад, називаються кіфозами, опуклістю вперед - лордозами, а опуклістю управо або вліво - сколіозами. Виділяють фізіологічні вигини хребетного стовпа, які наявні у здорової людини, і патологічні, які розвиваються внаслідок різних хворобливих процесів або в результаті неправильної постави. Навіть у нормальних фізіологічних умовах може змінюватися конфігурація хребта, якщо порушується симетричність активних м'язових зусиль.

Основна роль в статиці та динаміці хребта належить глибоким м'язам спини (випрямлячам тулуба). Цей м'язовий тяж проходить по обидві сторони остистих відростків від основи черепа до крижової кістки.

Рефлекторна контрактура групи м'язів і порушення статико-динамічної рівноваги ведуть до функціональних змін хребта, спочатку малопомітних, наприклад, функціональний сколіоз, а потім і до стійких органічних. Основні

види функціональних порушень у хребті розвиваються або за типом згладження фізіологічних вигинів, або за типом їх збільшення.

Скорочення міжреберних м'язів і м'язів плечового поясу надає жорсткість грудній клітці, яка таким чином переймає на себе частину тиску, що доводиться на грудний відділ хребта. В результаті цього сили тиску, діючі на грудний відділ хребта, зменшуються на 50%.

Подібним чином черевна порожнина (внаслідок скорочення діафрагми і м'язів живота) розвантажує поперековий відділ хребта. Цей механізм здатний зменшити тиск, що діє на міжхребцевий диск L5 - S1, приблизно на 30%.

Таким чином, статико-динамічний апарат хребта знаходиться під безпосереднім контролем м'язів усього тіла: тулуба, живота, м'язів, що зв'язують тулуб з нижніми кінцівками, і навіть під дією дихальних м'язів, включаючи діафрагму.

Довжина хребетного стовпа у дорослого чоловіка коливається від 60 до 75 см, у жінок - від 60 до 65 см. В старечому віці довжина хребетного стовпа зменшується приблизно на 5 см і більше внаслідок збільшення вигинів хребетного стовпа, сплющення і часткового окостеніння міжхребцевих дисків, а також ряду захворювань (остеохондроз, деформуючий спондиліоз та ін.).

### **Сколіоз. Принципи діагностики та корекції сколіозу**

Найчастіше зустрічають сколіоз, обумовлений аномалією формування хребців. До таких аномалій відносять клиновидні хребці та напівхребці.

Сколіотичні деформації хребта (у тому числі і природжені) розрізняються по локалізації вершини викривлення (рис. 12.5). Залежно від локалізації аномального хребця, який був вершиною деформації, виділяють верхньогрудні (1), середньогрудні (2), нижньогрудні (3), грудопоперекові (4), поперекові (5) і попереково-крижові (6) сколіози.

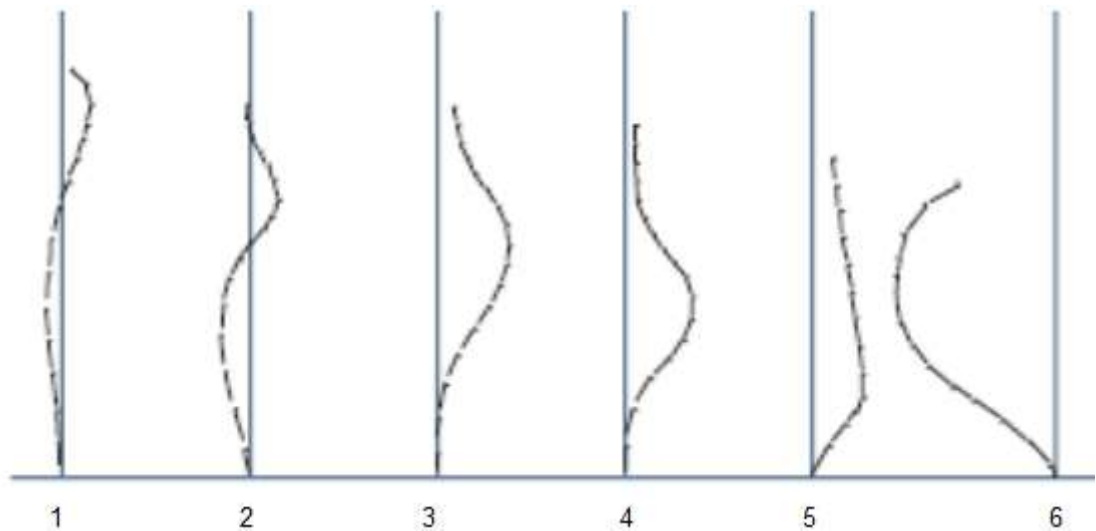


Рис. 12.5. Форма і орієнтація хребців у фронтальній площині залежно від локалізації аномалії

Для обстеження хворих застосовують комплекс біомеханічних методів дослідження, що включають електроподографію, електрогоніографію і електродинамографію. Реєстрації підлягають наступні характеристики ходьби:

- Основні: темп, довжина кроку, середня швидкість;
- Тимчасові: тривалість опорної, переносної та двоопорної фаз; інтервалів опори на п'ятку, усю стопу, на пальці;  $\tau$ -інтервал (час від початку опори на пальці однієї ноги до початку опори на п'ятку іншої ноги - є показником стійкості при ходьбі), коефіцієнт ритмічності;
- Кінематичні: кутові переміщення в тазостегновому (ТСС), колінному (КС) і гомілковостопному (ГСС) суглобах, ротаційні рухи тазового і плечового суглобів відносно трьох площин;
- Динамічні: вертикальна ( $R_z$ ), поздовжня ( $R_x$ ), поперечна ( $R_y$ ) складові головного вектору опорної реакції.

При ходьбі у хворих мимовільним сколіозом II ступеня, незалежно від типу сколіозу, відзначаються наступні порушення біомеханічної структури ходьби: збільшення тривалості локомоторного циклу, зменшення довжини кроку, зниження середньої швидкості пересування, велика в порівнянні з нормою тривалість 2-опорної фази, менша величина  $\tau$ -інтервалу, зменшення

максимальних значень кутових переміщень ц суглобах нижньої кінцівки в опорній фазі, збільшення амплітуди обертальних рухів тазу і плечового поясу відносно трьох площин, редукція екстремумів вертикальної і поздовжньої складових опорної реакції.

Усі відмічені порушення біомеханічної структури ходьби різко посилюються при переході від II до III ступеня сколіозу і більше виражені при С-подібном типі викривлення.

Більшість симптомів зміни структури локомоції - це компенсаторна реакція організму на зниження стійкості при ходьбі у зв'язку з деформацією хребта і прогресуючим послабленням функції м'язів тулуба.

Таким чином, уся низка біомеханічних подій, що відбуваються у хворих II і III ступеня сколіозу при ходьбі, по суті, зводиться до збереження прямоходіння в умовах прогресуючої деформації хребта і значного зниження функції м'язів тулуба.

### **Лікування сколіозу**

Для лікування сколіозу застосовують консервативні і оперативні методи. Оперативні призначаються, якщо кут деформації хребта досягає 30-40 градусів.

До консервативних методів відносять лікувальне плавання, фізкультуру, масаж, фізіотерапію, акупунктуру. Ці методи дають результат тільки при невеликих кутах викривлення.

До консервативних методів лікування сколіозу відноситься і корсетотерапія. До найкращих результатів призводить використання жорстких активно-коригуючих корсетів Шено. Принцип дії корсета базується на дозованій дії на опуклі ділянки хребта і кісткових структур пацієнта. Ця модель була розроблена французьким військовим лікарем Жаком Шено в 70-х роках минулого століття.

Корсет Шено є жорсткою гільзою, виготовленою з термопластичних матеріалів по індивідуальному гіпсовому зліпку з тіла пацієнта. Усередині

гільзи розташовуються пелоти - виступи, за допомогою яких здійснюється тиск на деформовані ділянки кісткових структур. З протилежного боку кожного пелота є зони для тканин, що зміщуються в процесі коригування.

Ретельно розрахований дозований тиск зменшує викривлення хребетного стовпа, нормалізує розташування грудної клітки відносно тазового відділу хребта. Конструкція корсета залучає до процесу корекції рухову активність пацієнта, включаючи рухи ребер при диханні. Ця особливість дозволяє уникнути розвитку м'язової дистрофії, що виникає при використанні пасивних корсетів. Через деякий час форма хребта і грудної клітки змінюється і пацієнтові виготовляють новий корсет.

Найбільший ефект дає використання корсета Шено в лікуванні сколіозу у дітей і підлітків. У дорослих ефект дещо нижчий, але все одно візуально помітний. У комплексі з фізіотерапією та іншими консервативними методами, використання корсета Шено дає можливість практично повністювилікувати дитячий і юнацький сколіоз (рис. 12.6).

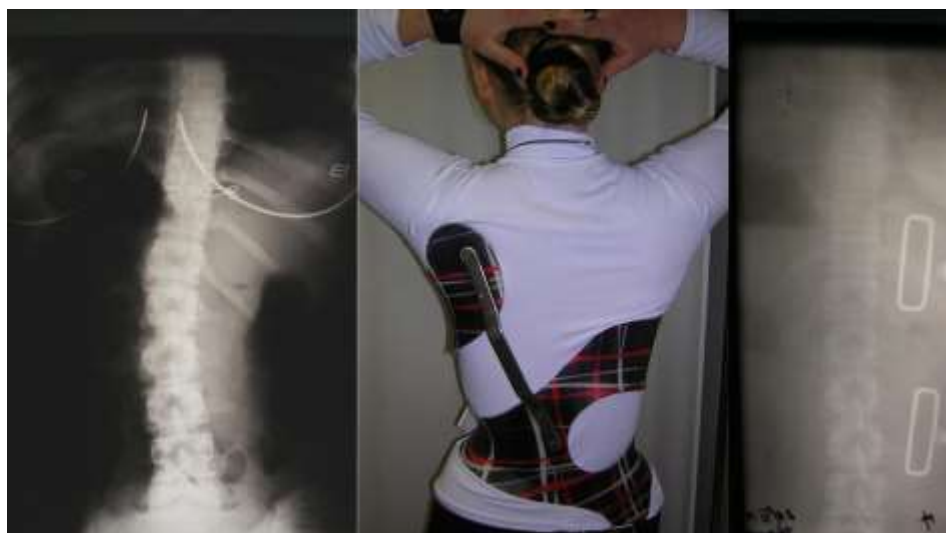


Рис. 12.6. Корсет Шено



Рис. 12.6. Корсет Шено (продовження)

Схема роботи **м'якого екзокоректора** представлена на рисунку 12.7, де  $Q_A$  - активна сила розподіленого навантаження;  $Q_R$  - реактивна сила розподіленого навантаження;  $F_A$  - активна сила зосередженого навантаження;  $F_R$ ,  $F_{IR}$  і  $F_{2R}$  - реактивні сили зосередженого навантаження.

Фрагмент пристрою для усунення деформації хребта оперативним методом представлено на рисунку 12.8.

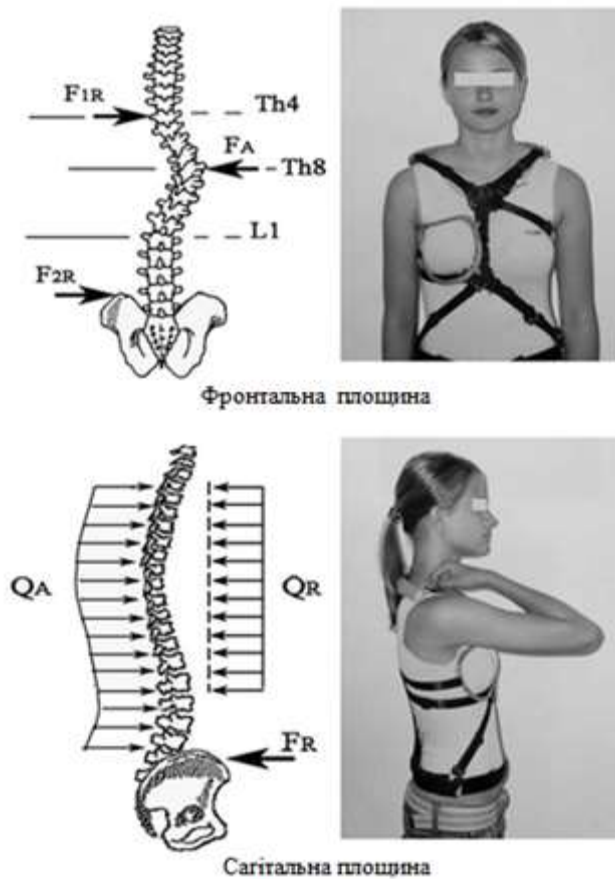


Рис. 12.7.

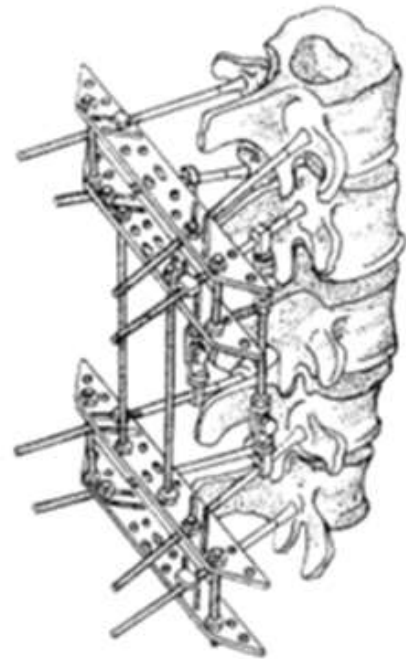


Рис. 12.8

### КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Охарактеризуйте будову опорно-рухового апарату, його пасивну і активну частини.
2. Назвіть чинники, що сприяють перебудові і адаптації кістки в умовах функціонального навантаження.
3. Сформулюйте і поясніть суть закону Вольфа.
4. За яких умов відбувається руйнівна деформація кістки.
5. Охарактеризуйте суглоби та їх класифікацію за мірою рухливості кісток.
6. Назвіть чинники, що впливають на формування хребта і утворення його фізіологічних і патологічних вигинів.
7. Охарактеризуйте підходи до діагностики і корекції сколіозу.
8. Назвіть характеристики ходьби, які підлягають реєстрації при порушенні функцій опорно-рухового апарату.

## ЛЕКЦІЯ 13

# КІНЕМАТИКА І ДИНАМІКА ОПОРНО-РУХОВОГО АПАРАТУ

### Основні особливості опорно-рухового апарату

Головні біологічні особливості, які відрізняють руховий апарат людини від неживих технічних механізмів, полягають в наступному:

1. Апарат руху живих істот побудований з живих тканин і органів, у яких постійно, в тому числі і у стані спокою, відбувається обмін речовин. Структурною і функціональною основою живої матерії є білок – складна, хімічно активна і нестійка речовина. Хімічні перебудови білкових молекул, які вступають у різні реакції з органічними та неорганічними речовинами, є основою внутрішньоклітинного обміну речовин і специфічної робочої діяльності клітин, наприклад, скорочувальної.

2. Для підтримання тканин і органів рухового апарату в стані високої працездатності необхідно їх постійно використання, бо тривале перебування у стані спокою знижує працездатність. Тобто під впливом роботи маємо морфологічне і функціональне вдосконалення тканин і органів рухового апарату і, навпаки, деградацію – при відсутності діяльності. Це є важливою відмінністю рухового апарату живих організмів від неживих.

3. У техніці всі рухи є наперед заданими самою формою сполучень між рухомими ланками. Навпаки ж, руховий апарат людини побудовано таким чином, що з одних і тих самих структурних одиниць (кістки, зв'язки, м'язи) може бути утворена різноманітність механізмів з різними робочими завданнями (тобто одні й ті ж самі структурні одиниці є спроможними виконувати різні завдання).

4. Управління діяльністю опорно-рухового апарату здійснюється через нервову систему, яка спрямовує його рух у необхідному напрямку. Рухову діяльність людини можна представити як систему безумовних і умовних

рефлексів на подразнення із зовнішнього і внутрішнього середовища, які діють у даний час або які діяли раніше і що збереглися у нервових центрах у вигляді сліду.

### **Механізми. Основні поняття**

Механізмом називають систему рухомо з'єднаних між собою ланок, призначених для перетворення одного виду руху на інший.

За характером руху, що здійснюють окремі точки ланок, механізми поділяють на плоскі та просторові. У плоских механізмах точки всіх деталей рухаються у площинах, паралельних одній нерухомій площині. У просторових механізмах ця умова не виконується.

*Ланкою механізму* називають деталь чи групу жорстко з'єднаних між собою деталей. Крім того, ланки можуть бути гнучкими (троси, паси, ланцюги), рідинними чи газоподібними.

У кожному механізмі розрізняють початкову, ведучу (вхідну) і ведену (вихідну) ланки.

- Початковою називають ланку, закон руху якої задається.
- Ведуча – ланка, до якої прикладені рушійні сили, що приводять механізм до руху.
- Веденою називають ланку, що здійснює рух, для виконання якого призначений механізм.
- Інші рухомі ланки механізму називаються проміжними.

*Кінематична пара* – це рухоме з'єднання двох ланок, що перебувають в безпосередньому дотику.

Поверхні, лінії, точки ланки, якими вона може дотикатись до інших ланок, утворюючи кінематичну пару, називають елементами кінематичної пари. Від геометричних форм елементів кінематичної пари залежить ступінь обмеження руху однієї ланки кінематичної пари відносно іншої.

За характером дотику ланок кінематичні пари поділяють на вищі та нижчі. В нижчих кінематичних парах ланки дотикаються між собою по

поверхні, а у вищих – по лінії або в точці. Вищі кінематичні пари дозволяють отримати більш різноманітні види взаємного руху їх ланок, ніж нижчі. Але нижчі кінематичні пари здатні передавати значні зусилля за меншого зношування в порівнянні з вищими парами.

Залежно від характеру відносного руху ланок нижчі кінематичні пари можуть бути обертальними (обертливими), поступальними, сферичними, ....

Академіком Артоболовським І.І. введена класифікація кінематичних пар для просторових механізмів, згідно з якою всі пари поділяються на класи. Клас кінематичної пари визначається кількістю обмежень (в'язей), які пара накладає на відносний рух ланок.

Вільна ланка у просторі має 6 ступенів свободи (3 поступальні рухи у напрямку 3-х осей координат і 3 обертальних навколо цих осей). Ланка, що входить в кінематичну пару, втрачає від однієї до п'яти ступенів свободи.

Розрізняють п'ять класів кінематичних пар, а саме:

- кінематична пара 1-го класу має 1 в'язь, тобто має 5 ступенів свободи;
- кінематична пара 2-го класу має 2 в'язі, тобто має 4 ступені свободи;
- кінематична пара 3-го класу має 3 в'язі, тобто має 3 ступені свободи;
- кінематична пара 4-го класу має 4 в'язі, тобто має 2 ступені свободи;
- кінематична пара 5-го класу має 5 в'язів, тобто має 1 ступінь свободи.

Незалежні параметри, що характеризують положення окремих ланок відносно нерухомої системи координат, називаються узагальненими координатами. Кількість узагальнених координат, що повністю характеризують положення, а отже, і рух тіла, називається числом ступенів свободи (мірою рухливості) тіла. Для визначення числа ступенів свободи  $W$  (незалежних вільних рухів) просторового кінематичного ланцюга використовують формулу Сомова – Малишева:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (13.1)$$

де  $n$  - число рухливих ланок;  $p_5, p_4, p_3, p_2, p_1$  – число кінематичних пар 5-го класу, 4-ого, 3-ого, 2-ого і 1-ого класу, відповідно.

Для визначення числа ступенів свободи  $W$  плоского кінематичного ланцюга використовують формулу Чебишева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (13.2)$$

Класифікація кінематичних пар представлена на рисунку 13.1, де лінійними і круговими стрілками показано можливі рухи однієї ланки відносно іншої; буквою «О» позначено кількість обертальних рухів, буквою «П» - кількість поступальних рухів.

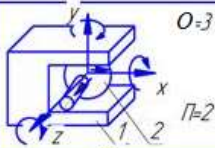


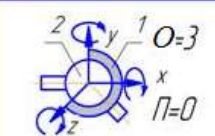
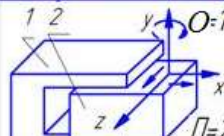
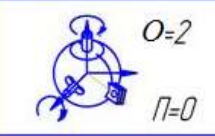
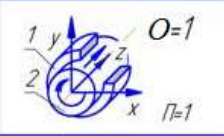
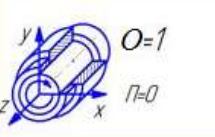
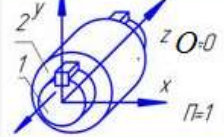
Клас пари	Число в'язей	Число ступенів свободи	Приклади кінематичних пар	
1	1	5		
2	2	4		
3	3	3		
4	4	2		
5	5	1		

Рис.13.1. Класифікація кінематичних пар за Артоболовським

### Кінематика опорно-рухового апарату

Кінематичні пари в тілі людини – це суглоби – рухливі з'єднання двох кісткових ланок, що забезпечують їх просторові рухи. Можливості руху кінематичних з'єднань визначаються скелетною будовою тіла і дією управляючих м'язів. Кінематичні пари в тілі людини прийнято називати біокінематичними.

Рух в суглобах забезпечується парою функціональних робочих груп м'язів: одновісні суглоби обслуговує дві функціональні групи м'язів; двовісні – чотири групи м'язів; тривісні – шість груп м'язів. Контролює рух нервово-м'язовий апарат.

У людському організмі число незалежних рухів кісток в суглобах (ступенів свободи) складає від одного до трьох. Для моделі тіла людини з 148 рухливими ланками, з яких : 85 – 5-го класу (один ступінь свободи); 33 – 4 – го класу (два ступені свободи) і 29 – 3-го класу (три ступені свободи) число ступенів свободи за формулою Сомова – Малишева (13.1) складає:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1;$$

$$W = 6 \cdot 148 - 5 \cdot 85 - 4 \cdot 33 - 3 \cdot 29 - 2 \cdot 0 - 0 = 244.$$

Це означає, що для опису положення моделі тіла людини в кожен момент часу необхідно скласти 244 рівняння.

Проблеми дослідження рухів людини мають велике значення для медицини, спорту, трудової діяльності людей. Аналіз рухів людини допомагає діагностувати функціональні порушення, планувати операції з урахуванням можливих змін в руховій системі хворого, конструювати протези і розробляти системи управління ними, оптимізувати конструкції знарядь праці і органів управління і т. п.

Кінематику людського організму можна досліджувати за допомогою реєструючих пристроїв і методів математичного моделювання.

На рисунку 13.2 представлено найпростіші біомеханічні системи верхніх і нижніх кінцівок тіла, де в якості суглобів застосовуються обертальні кінематичні пари (КП) 5-ого класу з числом ступенів свободи 1.

За формулою Чебишева (13.2) підраховано ступінь свободи кожної біомеханічної системи. Як видно з розрахунків, по мірі ускладнення системи зростає число ступенів свободи  $W$ .

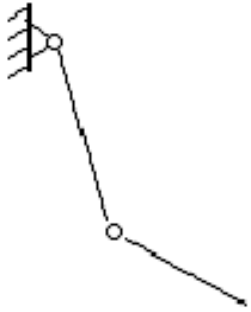
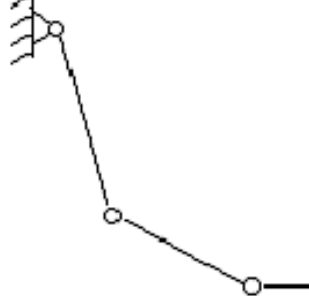
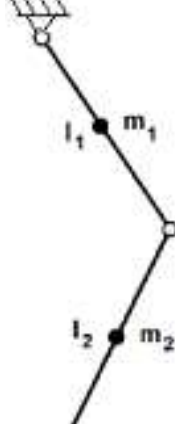
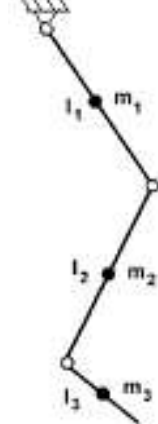
			
<p>Верхня кінцівка – плече і передпліччя: число ланок 2, число КП -2.</p>	<p>Верхня кінцівка – плече, передпліччя, кисть: число ланок 3, число КП -3.</p>	<p>Нижня кінцівка – стегно і гомілка: число ланок 2, число КП -2.</p>	<p>Нижня кінцівка – стегно, гомілка, стопа: число ланок 3, число КП -3.</p>
<p><math>W = 3n - 2p_5 - p_4</math>  <math>n = 2;</math>  <math>p_5 = 2;</math>  <math>p_4 = 0</math>  <math>W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2</math></p>	<p><math>W = 3n - 2p_5 - p_4</math>  <math>n = 3;</math>  <math>p_5 = 3;</math>  <math>p_4 = 0</math>  <math>W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 3</math></p>	<p><math>W = 3n - 2p_5 - p_4</math>  <math>n = 2;</math>  <math>p_5 = 2;</math>  <math>p_4 = 0</math>  <math>W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2</math></p>	<p><math>W = 3n - 2p_5 - p_4</math>  <math>n = 3;</math>  <math>p_5 = 3;</math>  <math>p_4 = 0</math>  <math>W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 3</math></p>

Рис. 13.2. Біомеханічні системи верхніх і нижніх кінцівок

**Приклад 1.** На спрощеній плоскій моделі, представленій на рисунку 13.3, що складається з абсолютно твердих стержнів, з'єднаних шарнірами – кінематичними парами 5-ого класу з одним ступенем свободи, визначити ступінь свободи для чотирьох фаз ходьби людини (рис. 13.4).

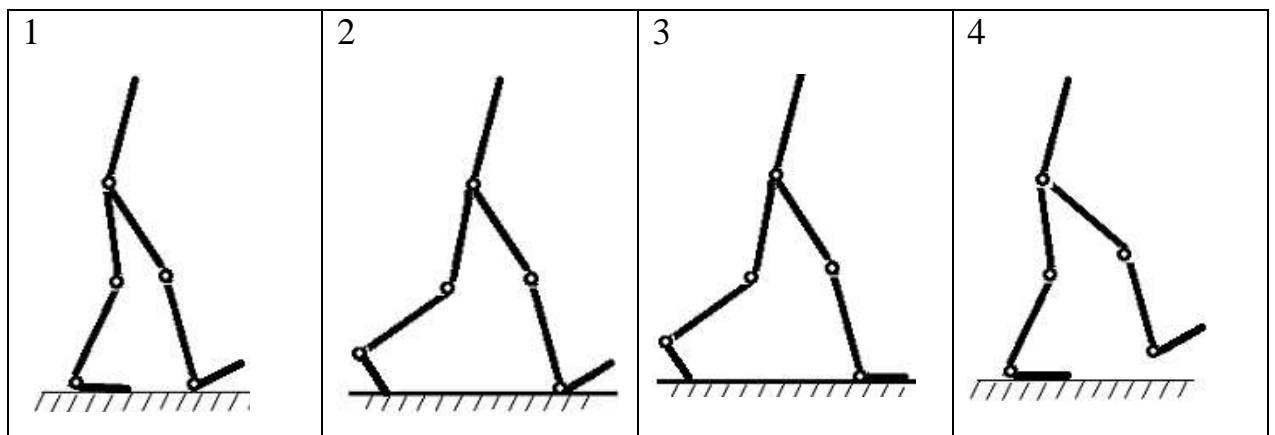


Рис. 13.3

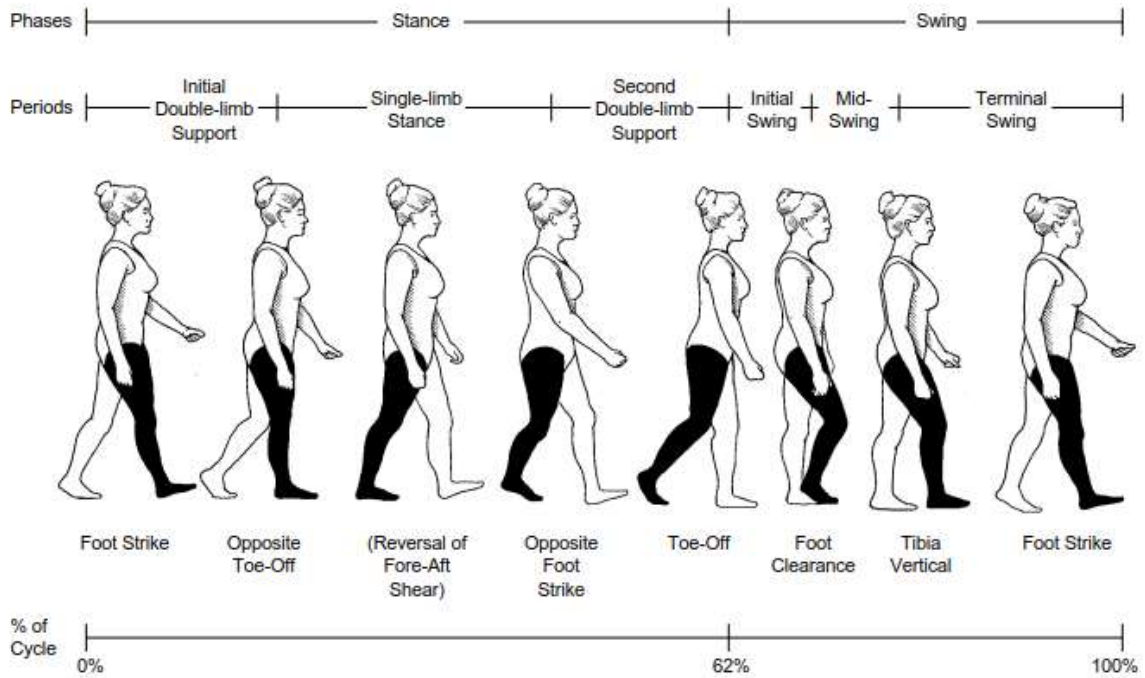


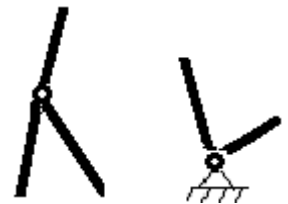
Рис. 13.4

**Розв’язання.** Ступінь свободи для чотирьох фаз ходьби людини визначимо за формулою Чебишева:

$W = 3n - 2p_5 - p_4$ , з врахуванням наступного:

кінематичні пари 4-ого класу відсутні, тобто  $p_4 = 0$ ; на

спільній осі, що з’єднує 3 ланки, знаходяться дві кінематичні пари 5-ого класу.



Результати розрахунків для чотирьох фаз ходьби зведено до таблиці.

<p>1</p> <p><math>W = 3n - 2p_5</math>  <math>n = 6; p_5 = 7</math>  <math>W = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4</math></p>	<p>2</p> <p><math>W = 3n - 2p_5</math>  <math>n = 7; p_5 = 8</math>  <math>W = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 8 = 5</math></p>	<p>3</p> <p><math>W = 3n - 2p_5</math>  <math>n = 6; p_5 = 7</math>  <math>W = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = 4</math></p>	<p>4</p> <p><math>W = 3n - 2p_5</math>  <math>n = 6; p_5 = 6</math>  <math>W = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 = 6</math></p>
---	---	---	---

## Кінематичні характеристики рухів людини

Кінематичні характеристики визначають зовнішню картину рухів (геометрію) та їх зміни у часі без урахування мас та діючих сил. До кінематичних характеристик належать:

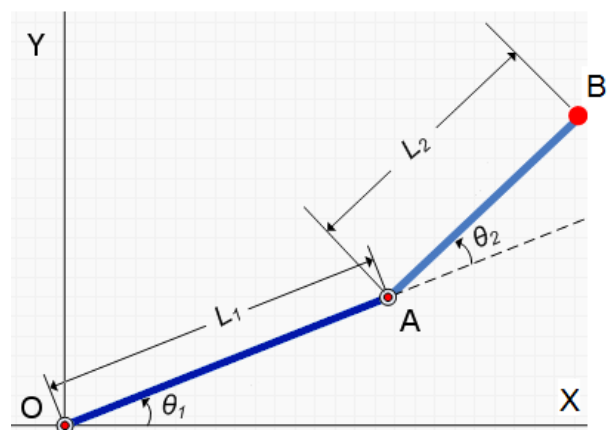
1. Просторові характеристики: положення тіла у просторі, траєкторія, рух.
2. Тимчасові показники: час, тривалість руху, темп рухів, ритм рухів.
3. Просторово-часові характеристики: швидкість точки та тіла (миттєва, середня), прискорення точки та тіла (лінійне, кутове, нормальне, дотичне).

При дослідженні кінематики тіла людини окремі його частини моделюються механізмами. В цьому випадку може бути розглянуте пряме завдання кінематики, коли по значеннях узагальнених координат визначають положення, швидкості та прискорення точок ланок, і зворотне завдання кінематики, коли по положенню якої-небудь точки ланки знаходять значення узагальнених координат, швидкостей і прискорень ланок системи.

### Пряме завдання кінематики

По значеннях узагальнених координат визначають положення, швидкості і прискорення точок ланок. Розглянемо біомеханічну систему верхньої кінцівки, яку надалі будемо називати маніпулятором.

Представлений на рисунку маніпулятор здатний працювати тільки в одній площині і має дві ланки: перша ланка  $OA = L_1$  утворює з віссю  $x$  кут  $\theta_1$ ; друга ланка  $AB = L_2$  кріпиться до кінця першої ланки і повернута відносно неї на кут  $\theta_2$ .



Робочий орган маніпулятора знаходиться на кінці другої ланки в точці В.

Пряме завдання кінематики полягає в знаходженні координат робочого органу В по заданих параметрах  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ .

Знайдемо координати точки В в системі координат x-y:

$$x_B = x_A + x_{AB}; \quad y_B = y_A + y_{AB}.$$

Визначимо проекції ланки ОА на осі x і y:

$$x_A = OA \cos \theta_1 = L_1 \cos \theta_1; \quad y_A = OA \sin \theta_1 = L_1 \sin \theta_1.$$

Визначимо проекції ланки АВ на осі x і y:

$$x_{AB} = AB \cos(\theta_1 + \theta_2) = L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2);$$

$$y_{AB} = AB \sin(\theta_1 + \theta_2) = L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2).$$

Координати точки В, тобто робочого органу маніпулятора, дорівнюють:

$$x_B = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2);$$

$$y_B = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2);$$

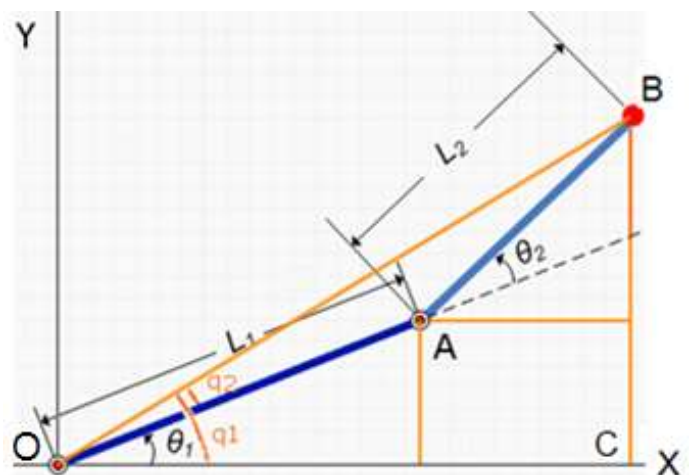
$$\vec{r}_B = [L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] \vec{i} + [L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \vec{j}.$$

Швидкість і прискорення точки В ланки АВ визначимо за формулами:

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt}; \quad \vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt}.$$

### Зворотнє завдання кінематики

В даному випадку, зворотнє завдання полягає в знаходженні кутів  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , які дозволять маніпулятору з довжиною ланок  $L_1$ ,  $L_2$  встановити робочий орган в задану точку В з відомими координатами  $x_B$ ,  $y_B$ .



З'єднаємо точку О з точкою

В і розглянемо  $\Delta OAB$ . Позначимо кут між віссю x і прямою ОВ -  $q_1$ ; кут між ОА і ОВ -  $q_2$ .

Шукані кути  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  визначимо з наступних рівнянь:

$$\theta_1 = q_1 - q_2; \quad \theta_2 = \pi - (\angle OAB).$$

Кут  $q_1$  знайдемо з  $\Delta OBC$ . Для  $\Delta OBC$  має місце рівність:

$$OB^2 = x_B^2 + y_B^2; \quad x_B = OB \cos q_1; \quad y_B = OB \sin q_1;$$

$$\frac{y_B}{x_B} = \frac{OB \sin q_1}{OB \cos q_1} = \operatorname{tg} q_1; \quad q_1 = \operatorname{arctg} \frac{y_B}{x_B}.$$

Кут  $q_2$  знайдемо з  $\Delta OAB$ , використовуючи теорему косинусів:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos q_2;$$

$$L_2^2 = L_1^2 + OB^2 - 2 \cdot L_1 \cdot OB \cdot \cos q_2;$$

$$\cos q_2 = \frac{L_1^2 - L_2^2 + OB^2}{2 \cdot L_1 \cdot OB};$$

$$q_2 = \arccos \frac{L_1^2 - L_2^2 + OB^2}{2 \cdot L_1 \cdot OB}.$$

Визначимо кут  $\theta_1$ :

$$\theta_1 = q_1 - q_2 = \operatorname{arctg} \frac{y_B}{x_B} - \arccos \frac{L_1^2 - L_2^2 + OB^2}{2 \cdot L_1 \cdot OB}.$$

Кут  $\theta_2$  знайдемо з  $\Delta OAB$ , використовуючи теорему косинусів:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \cdot OA \cdot AB \cdot \cos (\angle OAB);$$

$$OB^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos (\pi - \theta_2);$$

$$OB^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos \theta_2;$$

$$\theta_2 = \arccos \frac{OB^2 - L_1^2 - L_2^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_2}.$$

В результаті маємо кути  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , які дозволять маніпулятору з довжиною ланок  $L_1$ ,  $L_2$  встановити робочий орган в задану точку В з відомими координатами  $x_B$ ,  $y_B$ .

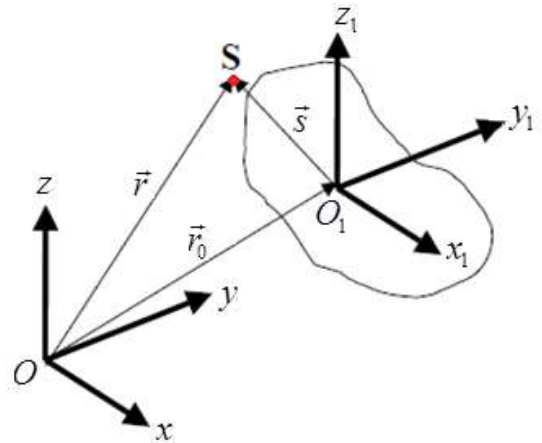
$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{y_B}{x_B} - \arccos \frac{L_1^2 - L_2^2 + OB^2}{2 \cdot L_1 \cdot OB}; \quad \theta_2 = \arccos \frac{OB^2 - L_1^2 - L_2^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_2}.$$

## Метод перетворення координат

Метод перетворення координат дозволяє встановити зв'язок між координатами точки в різних системах координат.

Маємо дві довільно розташовані системи координат і деяку точку  $S$ . Встановимо зв'язок між координатами точки  $S$  в системах координат  $XYZ$  і

$X_1Y_1Z_1$ . Розглянемо векторний трикутник  $OO_1S$  і введемо відповідні позначення:



$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OO_1} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k};$$

$$\vec{s} = \overrightarrow{O_1S} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1;$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OS} = \vec{r}_0 + \vec{s};$$

$$\vec{r} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}) + (x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1). \quad (13.3)$$

Отримане рівняння (13.3) в матричній формі матиме наступний вигляд:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}. \quad (13.4)$$

## Динамічні характеристики рухів людини

Щоб розкрити механізм рухів (причини їх виникнення та спрямованість їх змін) досліджують динамічні характеристики. До них відносяться:

1. Інерційні характеристики: маса тіла, момент інерції тіла.
2. Силкові характеристики: сила, момент сили, імпульс сили, кінетичний момент (момент кількості руху).
3. Енергетичні характеристики: робота сили, потужність, кінетична енергія тіла.

## Динаміка опорно-рухового апарату

Тіло людини є складною біомеханічною системою, яка в повсякденному житті може піддаватися значним прискоренням і навантаженням. При цьому виникають сили, що призводять до травм і порушення координації рухів.

При розв'язанні завдань динаміки необхідно обрати та обґрунтувати динамічну розрахункову схему. Важливу роль при її виборі грає початковий етап - ідеалізація об'єкту дослідження (рис. 13.5), що полягає у моделюванні геометрії об'єкта, матеріалу, а також зовнішніх сил, у тому числі тертя. Далі будують математичну модель, що відповідає динамічній розрахунковій схемі; отримують аналітичне або чисельне рішення; потім перевіряють експериментальні результати і, при необхідності, коригують динамічну розрахункову схему.

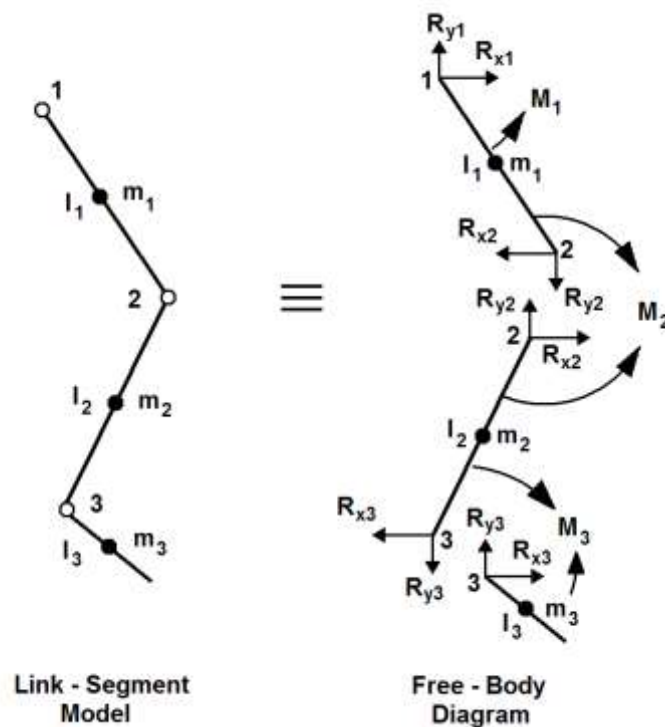


Рис. 13.5

При побудові динамічних розрахункових схем тіла людини актуальним є визначення мас-інерційних характеристик (МІХ) сегментів тіла людини: мас, моментів інерції, координат центрів мас окремих частин (сегментів) тіла.

Розрізняють два завдання динаміки. При розв'язанні першої задачі динаміки вважається, що відомі закони руху усіх ланок (узагальнені координати), і визначаються динамічні навантаження і суглобові моменти в суглобах. Цей розрахунок дозволяє оцінити міцність, жорсткість і надійність системи:

$$\begin{aligned} \sum F_X &= ma_X; & \sum F_Y &= ma_Y; & \sum F_Z &= ma_Z. \\ \sum M_X &= I_{XX}\alpha_X - (I_{YY} - I_{ZZ})\omega_Y\omega_Z - I_{XY}(\alpha_Y - \omega_X\omega_Z) - I_{YZ}(\omega_Y^2 - \omega_Z^2) - I_{ZX}(\alpha_Z + \omega_X\omega_Y); \\ \sum M_Y &= I_{YY}\alpha_Y - (I_{ZZ} - I_{XX})\omega_Z\omega_X - I_{YZ}(\alpha_Z - \omega_Y\omega_X) - I_{ZX}(\omega_Z^2 - \omega_X^2) - I_{XY}(\alpha_X + \omega_Y\omega_Z); \\ \sum M_Z &= I_{ZZ}\alpha_Z - (I_{XX} - I_{YY})\omega_X\omega_Y - I_{ZX}(\alpha_X - \omega_Z\omega_Y) - I_{XY}(\omega_X^2 - \omega_Y^2) - I_{YZ}(\alpha_Y + \omega_Z\omega_X). \end{aligned}$$

(13.5)

Якщо осі рухливої системи координат співпадають з головними осями інерції, то система рівнянь моментів (13.5) трансформується в рівняння руху Ейлера:

$$\begin{aligned} \sum M_X &= I_X \frac{d\omega_X}{dt} - (I_Y - I_Z)\omega_Y\omega_Z; \\ \sum M_Y &= I_Y \frac{d\omega_Y}{dt} - (I_Z - I_X)\omega_Z\omega_X; \\ \sum M_Z &= I_Z \frac{d\omega_Z}{dt} - (I_X - I_Y)\omega_X\omega_Y; \end{aligned} \quad (13.6)$$

Друге завдання динаміки полягає у виявленні динамічних помилок - відхилень законів руху від заданих.

## КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Перелічить основні відмінності опорно-рухового апарату людини від механізмів.
2. Дайте визначення наступним поняттям: механізм, ланка, кінематична пара, кінематичний ланцюг.
3. Надайте характеристику класифікації кінематичних пар, наведіть приклади. Що розуміють під ступенів свободи?
4. Наведіть найпростіші біомеханічні системи верхніх і нижніх кінцівок тіла. Поясніть, як визначають число ступенів свободи.
5. Яка різниця між прямим і зворотним завданням кінематики. Поясніть на прикладі верхньої кінцівки.
6. Поясніть суть методу перетворення координат.
7. Назвіть кінематичні та динамічні характеристики рухів людини.
8. Поясніть, у чому полягає перше і друге завдання динаміки при вивченні опорно-рухового апарату людини.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лебедь О. О. Біологічна та медична механіка : навч. посіб. / О. О. Лебедь, В. І. Гаращенко, І. М. Григус. – Рівне: НУВГП, 2016. – 186 с.
2. Сливко Е. І. Медична і біологічна фізика: навч. посіб. / Е.І. Сливко, О. З. Мельнікова, О. З. Іванченко, Н. С. Біляк. – Запоріжжя, 2018. – 291 с.
3. Терещенко М.Ф. Біофізика: підручник / М. Ф. Терещенко, Г. С. Тимчик, І. О. Яковенко. - Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2019. – 444 с.
4. Терещенко М.Ф Біофізика. Практикум / М. Ф. Терещенко, Г. С. Тимчик, І.О. Яковенко - Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2019. – 288 с.
5. Тарасова, Л.Д. Біомедична механіка. Збірник завдань до домашніх контрольних робіт [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Медична інженерія» спеціальності 163 «Біомедична інженерія» / Л.Д. Тарасова; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,36 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 45 с. – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/34678>.
6. Тісов О. В. Основи біомеханіки. Лабораторний практикум. / О. В. Тісов. – Київ: Національний авіаційний університет, Вид-во «НАУ-друк», 2016. – 54 с. – Режим доступу: <https://er.nau.edu.ua/bitstream/NAU/40241/4/%D0%9B%D0%B0%D0%B1.%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC.%D0%91%D1%96%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%85.pdf>
7. Irving P. Herman. Physics of the Human Body, Second Edition. Springer International Publishing Switzerland 2006, 2016. – Режим доступу:

[http://www.gaitlab.ir/books/gaitlab\\_ref\\_42\\_Irving\\_P.\\_Herman\\_auth.\\_Physics\\_of\\_the\\_Human\\_Body-Book.pdf](http://www.gaitlab.ir/books/gaitlab_ref_42_Irving_P._Herman_auth._Physics_of_the_Human_Body-Book.pdf)

8. Winter, David A. Biomechanics and Motor Control of Human Movement, Fourth Edition Copyright © 2009 John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 978-0-470-39818-0. – Режим доступа: [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4174628/mod\\_resource/content/2/David%20A.%20Winter-Biomechanics%20and%20Motor%20Control%20of%20Human%20Movement-Wiley%20%282009%29.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4174628/mod_resource/content/2/David%20A.%20Winter-Biomechanics%20and%20Motor%20Control%20of%20Human%20Movement-Wiley%20%282009%29.pdf)