ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ АБСТРАКТНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

О.А. ЛАГОДА

Нехай B — дійсний або комплексний банахів простір, $\|\cdot\|$ — норма в B, $L(B)$ — простір всіх лінійних обмежених операторів, що діють з B в B, O – нульовий оператор, I — одиничний оператор в $L(B)$.

Розглянемо стохастичне різницеве рівняння

$$X_n = A_1 X_{n-1} + A_2 X_{n-2} + Y_n, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

з початковими умовами X_0 та X_{-1}, які є деякими випадковими величинами з B, та послідовністю $\{Y_n : n \geqslant 1\} \subset B$, елементи якої також є випадковими величинами.

Використаємо умови, за яких для довільної обмеженої за нормою послідовності $\{Y_n : n \geqslant 1\} \subset B$ та довільних початкових умов $\{X_0, X_{-1}\} \subset B$ розв'язок $\{X_n : n \geqslant 1\} \subset B$ рівняння (1) буде обмеженим за нормою. Необхідною та достатньою умовою такої обмеженості розв'язку є умова [1]

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leqslant 1, \quad \exists (z^2 I - A_1 z - A_2)^{-1} \in L(B). \tag{2}$$

Ця ж умова виявляється корисною і для оцінки розв'язків у недетермінованому випадку.

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *послідовність $\{c_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbb{R}_+$ незростаюча і збігається до нуля;*
2) *послідовність $\{Y_n : n \geqslant 1\} \subset B$ обмежена за нормою майже напевно;*
3) $\sup\limits_n c_n \Big\| \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \Big\| < \infty$ *майже напевно;*
4) *справджується умова* (2).

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} c_n \left\| \sum_{i=1}^{n} X_i - (I - A_1 - A_2)^{-1} \sum_{i=1}^{n} Y_i \right\| = 0$$

майже напевно.

Застосуваннями теореми 1 є різноманітні граничні теореми для сум випадкових величин, що утворюють розв'язок різницевого рівняння (1).

Теорема 2. *Нехай B — дійсний сепарабельний гільбертів простір. Якщо $\{Y_n : n \geqslant 1\} \subset B$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з* $\mathbb{E}Y_n = 0, \quad \mathbb{E}\|Y_n\|^2 < \infty$*; T — оператор коваріації та виконується умова* (2)*, то*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right\|}{\sqrt{n\ln\ln n}} = \sqrt{2\|(I - A_1 - A_2)^{-1}T(I - A_1^* - A_2^*)^{-1}\|}$$

майже напевно.

Зауваження 1. В роботі [2] були отримані твердження аналогічні до теорем 1 та 2 у випадку $A_2 = O$.

Теорема 3. *Нехай $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ — нескінченна послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з B, визначених на одному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Нехай $\mathbb{E}Y_i = \mu$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, та виконуються умови теореми 1.*

Тоді для $\{X_n : n \geqslant 1\} \subset B$ — розв'язку стохастичного різницевого рівняння (1) *справджується, що*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = (I - A_1 - A_2)^{-1}\mu$$

майже напевно.

Зауваження 2. Теорема 2 дає узагальнення закону повторного логарифма для розв'язку абстрактного стохастичного різницевого рівняння (1). Теорема 3 узагальнює посилений закон великих чисел для того ж рівняння. Також можливі аналогічні узагальнення для інших граничних теорем [3].

Література

[1] Городній М.Ф., Лагода О.А. *Обмежені розв'язки двопараметричного різницевого рівняння у банаховому просторі* // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 12. — С. 1610–1614.

[2] Koval V., Schwabe R. *Limit theorems for solutions of stochastic difference equations in Banach spaces with applications* // Random Oper. and Stoch. Equ. — 1998. — Vol. 6, № 2. — pp. 149–158.

[3] Гнєденко Б.В. *Курс теорії ймовірностей.* — Київ: ВПЦ Київський університет, 2010. — 464 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: `Lahoda.Oksana@lll.kpi.ua`