

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Навчальний посібник

ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавр,
за освітньою програмою «Технічні та програмні засоби автоматизації»
спеціальністю 151
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Укладач Л.Р.Ладієва

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент: Шилович Т.Б., канд. техн. наук, доц., доцент кафедри ХПСМ
Відповідальний редактор Жученко А.І., д-р техн. наук, професор

Гриф надано Методичною радою КПІ ім.. Ігоря Сікорського (протокол №1837 від
12.04.2023р.)
за поданням Вченої ради інженернохімічного факультету (протокол № 2 від
27.02. 2023р.)

Посібник містить викладення питань оптимізації технологічних процесів, оптимального керування, формулювання задачі оптимізації, вибору критерію оптимальності, обмежень та методів розв'язання таких задач. Представлені моделі нелінійного програмування, динамічного програмування, теорії ігор. Розглянуті питання варіаційного числення для пошуку екстремуму функціоналів, а також наближені методи розв'язання оптимізаційних задач. Наведені завдання для самостійного розв'язку.

Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавр за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Може бути корисний студентам інших спеціальностей, які пов'язані з розробкою систем оптимізації.

Реєстр. № 22/23-532. Обсяг 6,4 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© Л.Р.Ладієва, 2023

© КПІ ім.. Ігоря Сікорського. 2023

ВСТУП

Оптимізація існуючих технологічних процесів є складним завданням. Пошук оптимального технологічного процесу повинен бути обмежений певними технологічними умовами конкретного виробництва. Теорія оптимізації надає готові допоміжні засоби рішення, що можуть використовуватися після формулювання проблеми оптимізації. Але, не може бути виконана формалізація перекладу словесного формулювання задачі в математичні терміни, без застосування досвіду і кваліфікації постановника задачі. Звісно ж у знанні методів оптимізації лежить головна передумова раціонального їх застосування. Даний посібник є вступом у теорію оптимізації і знайомить з додатками цієї теорії до рішення ряду задач, що виникають в інженерній практиці. У найбільш загальному змісті теорія оптимізації являє собою сукупність фундаментальних математичних результатів і чисельних методів, орієнтованих на вибір й ідентифікацію найкращих варіантів із множини альтернатив і що дозволяють уникнути повного перебору й оцінювання можливих варіантів.

1. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Загальна задача нелінійного програмування полягає у пошуці екстремума цільової функції при заданих обмеженнях у вигляді рівностей і (або) нерівностей. Обмеження можуть бути лінійними і (або) нелінійними. Формально задача нелінійного програмування може бути сформульована таким чином:

мінімізувати

$$f(X), X \in E^n \quad (1.1)$$

при m лінійних і (або) нелінійних обмеженнях у вигляді рівностей

$$h_j(X) = 0, j = 1, \dots, m \quad (1.2)$$

та $(p-m)$ лінійних і (або) нелінійних обмеженнях у вигляді нерівностей

$$g_j(X) \geq 0, j = m + 1, \dots, p \quad (1.3)$$

де E^n — n - мірний евклідовий простір.

В більш вузькій постановці задачі нелінійного програмування із розгляду вилучаються наступні спеціальні випадки:

1) змінні приймають лише цілочислові значення (нелінійне цілочислове програмування);

2) обмеження включають у собі час як параметр, при цьому використовуються диференціальні рівняння (динамічна оптимізація).

Якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні, то має місце задача квадратичного програмування. Задачі лінійного та квадратичного програмування можуть розглядатися як два частинних випадки загальної задачі нелінійного програмування.

1.1 ГРАДІЄНТ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

Серед методів, які використовуються для рішення задач нелінійного програмування, значне місце займають методи пошуку рішення, основані на аналізі похідних оптимізуємої функції. Якщо цільова функція неперервна та диференційована, то існує

градієнт $f(X)$, який визначається як вектор-стовбець з перших частинних похідних $f(X)$ по X , значення яких беруться у даній точці X . Верхній індекс $k=0,1,\dots$ використовується для позначення точки в E^n , в якій береться значення градієнту, і, таким чином, градієнт в X^k

$$\nabla f(X^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_n} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Вираз $\nabla^T f(X^{(k)})$ позначає вектор-рядок.

Основною властивістю градієнту функції $f(X)$ являється наступне: вектор $\nabla f(X)$ у кожній точці області визначення функції $f(X)$ направлений до поверхні рівня, проведеної через цю точку, і за алгебраїчною величиною рівний похідній від вказаної функції по напрямленню до нормалі; градієнт скалярної функції направлений у бік найшвидшого збільшення функції, тобто найшвидшого підйому і ортогональний лінії рівня $f(X)$, яка проходить через данну точку (рис.1.1). Вектор, протилежний цьому градієнтові (від'ємний градієнт), направлений у бік найшвидшого спуску. Довільний вектор V , ортогональний $\nabla f(X^{(k)})$ (так само, як і дотична площина до $f(X^{(k)})$ у точці $X^{(k)}$), може бути записаний як $V^T \nabla f(X^{(k)}) = 0$. Градієнт не являється направленням найшвидшого збільшення $f(X)$, якщо розгляд ведеться не в евклідовій, а у другій метриці.

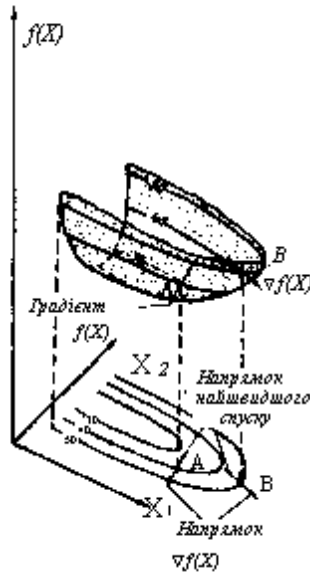


Рис.1.1. Градієнт (напрямок найшвидшого підйому) та напрямок найшвидшого спуску у двох точках

1.2 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ

В градієнтних методах або в методах других похідних, здійснюють лінійну або квадратичну апроксимацію функції $f(X)$. Лінійна, або першого порядку, апроксимація цільової функції може бути виконана за допомогою усеченого ряду Тейлора в околі $X^{(k)}$:

$$f(X) \approx f(X^{(k)}) + \nabla^T f(X^{(k)}) (X - X^{(k)}) \quad (1.5)$$

Квадратичну апроксимацію $f(X)$ можна отримати, відкинувши у рядах Тейлора члени третього або більш високого порядків:

$$f(X) \approx f(X^{(k)}) + \nabla^T f(X^{(k)}) (X - X^{(k)}) + \frac{1}{2} (X - X^{(k)})^T \nabla^2 f(X^{(k)}) (X - X^{(k)}), \quad (1.6)$$

де $\nabla^2 f(X^{(k)})$ - матриця Гессе $f(X)$, $H(X)$, яка являє собою квадратичну матрицю других частинних похідних $f(X)$, взятих у точці $X^{(k)}$:

$$\nabla^2 f(X^{(k)}) = H(X^{(k)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial X_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial X_n \partial X_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(X^{(k)})}{\partial X_n^2} \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

1.3 НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ БЕЗ ОБМЕЖЕНЬ

Постановка задачі: мінімізувати $f(X)$, $X \in E^n$. Для задачі нелінійного програмування при відсутності обмежень необхідними умовами того, що X^* - точка локального мінімуму задачі, являються наступні:

- 1) функція $f(X)$ диференційована у точці X^* ;
- 2) $\nabla f(X^*) = 0$, тобто існує стаціонарна точка X^* .

Достатні умови того, що X^* - точка локального мінімуму задачі (1.8), крім приведених у пп. 1 і 2 умов, включають: $\nabla^2 f(X^*) > 0$, тобто матриця Гессе - додатньо визначена (для випадку максимуму умови ті ж, за виключенням того, що матриця Гессе $f(X^*)$ повинна бути від'ємно визначена).

Звичайно обмежуються пошуком локального мінімуму; разом з тим, якщо можна показати, що $X^T \nabla^2 f(X) X \geq 0$ для всіх X , то $f(X)$ називається опуклою функцією, а локальний мінімум стає глобальним.

1.4 НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ З ОБМЕЖЕННЯМИ У ВИГЛЯДІ РІВНОСТЕЙ І НЕРІВНОСТЕЙ. УМОВИ КУНА - ТАККЕРА

Множники Лагранжа можна використовувати при побудові критеріїв оптимальності для задач оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей. Кун і Таккер узагальнили цей підхід на випадок загальної задачі нелінійного програмування з обмеженнями як у вигляді рівностей, так і у вигляді нерівностей [7].

Кун і Таккер побудували необхідні і достатні умови оптимальності для задач нелінійного програмування, виходячи з припущення про диференційованість функцій f, g_j і h_j .

Знайти сукупність векторів X^*, U^*, V^* , задовольняючих наступні умови:

$$\nabla L(X^*, U^*, V^*) \equiv \nabla f(X^*) - \sum_{j=1}^m U_j \nabla h_j(X^*) - \sum_{j=m+1}^p U_j^* \nabla g_j(X^*) = 0, \quad (4.8)$$

$$h_j(X^*) = 0, j = 1, \dots, m, \quad (1.9)$$

$$g_j(X^*) \geq 0, j = m+1, \dots, p, \quad (1.10)$$

$$U_j^* g_j(X^*) = 0, j = m+1, \dots, p, \quad (1.11)$$

$$U_j^* \geq 0, j = m+1, \dots, p, \quad (1.12)$$

де $L(X, U, V)$ - узагальнена функція Лагранжа; U, V - множники Лагранжа.

Достатньою умовою того, що обмеження - першого порядку, є те, що всі градієнти активних обмежень нерівностей ($g_j(X^*) = 0$) і обмежень-рівностей, взятих у деякій довільній точці X^* , лінійно незалежними. Умова лінійної незалежності являє собою

деяку умову регулярності припустимої області, яка майже завжди виконується для задач оптимізації, які зустрічаються на практиці. Перевірка умов лінійної незалежності являє складність, тому що потрібно, щоб оптимальне рішення задачі було відомо раніше.

Теорема 1.

Якщо функції $f(X), h_j(X) (j = 1, \dots, m)$,

$g_j(X) (j = m + 1, \dots, p)$ диференційовані в точці X^* і якщо у точці X^* обмеження

являються обмеженнями першого порядку, то необхідною умовою наявності в точці X^* локального мінімуму задачі (1.1) - (1.3) полягає у тому, що існують множники Лагранжа U^* і V^* такі, що сукупність векторів X^*, U^*, V^* задовільняє співвідношенням (1.8) - (1.12).

Умови Куна - Таккера стають достатніми умовами наявності глобального мінімуму, якщо цільова функція опукла, обмеження - нерівності утворенні вгнутими функціями, а обмеження - рівності мають лінійні функції. Розглянемо наступну задачу нелінійного програмування.

Приклад 1.1

Мінімізувати $f(X) = X_1^2 - X_2$ при обмеженнях

$$g_1(X) = X_1 - 1 \geq 0, \quad g_2(X) = 26 - X_1^2 - X_2^2 \geq 0, \quad h_1(X) = X_1 + X_2 - 6 = 0 \quad [13].$$

За допомогою теореми доведемо, що рішення $X^* = [1 \quad 5]^T$ - оптимальне.

Маємо

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} 2X_1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad H_f(X) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тому що матриця $H_f(X)$ - додатньо напіввизначена при всіх X , функція $f(X)$ виявляється опуклою. Перше обмеження - нерівність має лінійну функцію $g_1(X)$, яка одночасно являється і опуклою, і вгнутою. Для того щоб показати, що функція $g_2(X)$ - вгнута, обчислимо

$$\nabla g_2(X) = \begin{bmatrix} -2X_1 \\ -2X_2 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad H_{g_2}(X) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця $H_{g_2}(X)$ від'ємно визначена, функція $g_2(X)$ - увігнута. Функція $h_1(X)$ входить у лінійне обмеження - рівність. Отже, всі умови теореми виконані; якщо покажемо, що $X^* = [1 \quad 5]^T$ - точка Куна - Таккера, встановимо оптимальність рішення X^* .

Наприклад, умова Куна - Таккера має вигляд:

$$2X_1 - U_1 + 2X_1U_2 - V_1 = 0, \quad (1.13)$$

$$-1 + 2X_2U_2 - V_1 = 0, \quad (1.14)$$

$$X_1 - 1 \geq 0, \quad (1.15)$$

$$26 - X_1^2 - X_2^2 \geq 0, \quad (1.16)$$

$$X_1 + X_2 - 6 = 0, \quad (1.17)$$

$$U_1(X_1 - 1) = 0, \quad (1.18)$$

$$U_2(26 - X_1^2 - X_2^2) = 0 \quad (1.19)$$

$$U_1, U_2 \geq 0. \quad (1.20)$$

Точка $X^* = [1 \ 5]^T$ задовільняє обмеженням (1.15) - (1.17) і, отже, - припустима. Рівняння (1.13) - (1.14) приймають наступний вигляд:

$$2 - U_1 + 2U_2 - V_1 = 0; \quad -1 + 10U_2 - V_1 = 0.$$

Припустивши $V_1 = 0$, отримаємо $U_2 = 0, 1$; $U_1 = 2, 2$. Рішення $X^* = [1 \ 5]^T$, $U^* = [2, 2 \ 0, 1]$ і $V^* = 0$ задовільняють умовам Куна - Таккера.

Щоб врахувати нелінійний характер функції в задачах (1.1) - (1.3), Мак - Кормік сформулював необхідні і достатні умови оптимальності другого порядку для задач з двічі диференційованими функціями.

Точка Куна - Таккера в задачі нелінійного програмування визначається вектором (X^*, U^*, V^*) задовільняючим співвідношенням (1.8) - (1.12).

Точка X^* являє собою точку локального мінімуму в задачі нелінійного програмування, якщо X^* відповідає припущеному рішення і $f(X^*) \leq f(\bar{X})$ для всіх припущених $\bar{X}$ в околі $\delta(X^*)$ точки X^*

Точка X^* являє собою точку строгого (єдиного або ізольованого) локального мінімуму, якщо X^* відповідає припущеному рішення задачі і $f(X^*) < f(\bar{X})$ для всіх припустимих $\bar{X} \neq X^*$ і в околі $\delta(X^*)$ точки X^*

Теорема 2.

Необхідні умови оптимальності другого порядку. Нехай $f(X)$, $h_1(X), \dots, h_m(X)$, $g_{m+1}(X), \dots, g_p(X)$ - двічі диференційовані функції, X^* - припустиме рішення нелінійної задачі, а множина активних в точці X^* обмежень визначається множиною $I = \{j | g_j(X^*) = 0\}$. Припустимо, що градієнт $\nabla g_j(X^*)$ при $j = m+1, \dots, p$ і $\nabla h_j(X^*)$ при $j = 1, \dots, m$ - лінійно незалежні. Тоді необхідні умови того, щоб точка X^* була точкою локального мінімуму в задачі нелінійного програмування, формулюються наступним чином:

1) існує такий вектор (U^*, V^*) що вектор (X^*, U^*, V^*) визначає точку Куна - Таккера;

2) для будь-якого ненульового вектора Y , задовільняючого системі рівнянь

$$\nabla g_j(X^*)Y = 0, \quad j = m+1, \dots, p, \quad (1.21)$$

$$\nabla h_j(X^*)Y = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.22)$$

виконується нерівність

$$Y^T H_L(X^*, U^*, V^*) Y \geq 0, \quad (1.23)$$

$$\text{при } L(X; U, V) = f(X) - \sum_{j=1}^m V_j h_j(X) - \sum_{j=m+1}^p U_j g_j(X), \quad (1.24)$$

а $H_L(X^*, U^*, V^*)$ - матриця Гессе, утворена значеннями других частинних похідних L по X у точці (X^*, U^*, V^*) .

Достатні умови Куна - Таккера виконуються при дуже жорстких припущеннях. У зв'язку з цим розглянемо достатні умови другого порядку, формулювання яких не потребує припущень про опуклість та вгнутість відповідних функцій і про лінійність обмежень - рівностей.

Теорема 3.

Достатні умови оптимальності другого порядку.

Достатні умови того, щоб точка X^* була точкою строгого локального оптимуму в задачі нелінійного програмування, де $f(X)$,

$g_j(X), j = m + 1, \dots, p, h_j(X), j = 1, \dots, m$ - двічі диференційовані функції, формулюються наступним чином:

1) існує такий вектор (U^*, V^*) , що вектор (X^*, U^*, V^*) визначає точку Куна -

Таккера;

2) для кожного ненульового вектора Y , задовільняючого системі рівнянь і нерівностей

$$\nabla g_j(X^*)Y = 0, \quad j \in I_1 = \{j \mid g_j(X^*) = 0, U_j^* > 0\} \quad (1.25)$$

$$\nabla g_j(X^*)Y = 0, \quad j \in I_2 = \{j \mid g_j(X^*) = 0, U_j^* = 0\} \quad (1.26)$$

$$\nabla h_j(X^*)Y = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad Y \neq 0, \quad (1.27)$$

виконується нерівність

$$Y^T H_L(X^*, U^*, V^*) Y > 0. \quad (1.28)$$

Множина $I = I_1 \cup I_2$ має номери всіх активних у точці X^* обмежень.

Порівнюючи теореми 2 і 3, нескладно побачити, що достатні умови лише дечим відрізняються від необхідних умов. Основна різниця полягає у тому, що рівняння (1.21) не повинні виконуватися для всіх активних обмежень, а нерівність (1.23) перетворюється у строго нерівність.

Приклад 1.2

Мінімізувати $f(X) = (X_1 - 1)^2 + X_2^2$ при обмеженні

$$g_1(X) = -X_1 + \left(\frac{X_2^2}{5}\right) \geq 0 \quad [13].$$

Припустимо, потрібно перевірити, чи буде точка $X^* = [0 \ 0]^T$ точкою локального мінімуму. Запишемо умови Куна - Таккера для данної задачі:

$$2(X_1 - 1) + U_1 = 0; \quad 2X_2 - \frac{2}{5}X_2U_1 = 0;$$

$$U_1 \left[-X_1 + \left(\frac{X_2^2}{5}\right) \right] = 0; \quad U_1 \geq 0.$$

Точка $X^* = [0 \ 0]^T$, $U_1^* = 2$ задовільняє умовам Куна - Таккера. Необхідні умови наявності мінімуму виконуються, однак не можна стверджувати, що X^* - точка локального мінімуму, оскільки функція $g_1(X)$ в супереч припущень теореми 1 (про достатність умов Куна - Таккера) являється опуклою.

Використовуючи достатні умови другого порядку, знаходимо матрицю

$$H_L(X^*; U^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix}.$$

Вектор $Y = [Y_1 \ Y_2]^T$, задовільняючий умовам (4.25) та (4.26) $\nabla g_1(X^*)Y = 0$, або $\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 0$ необхідно розглядати у вигляді $\begin{bmatrix} 0 & Y_2 \end{bmatrix}^T$. Нерівність (4.28) приймає вигляд

$$\begin{bmatrix} 0 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 1,2 Y_2^2 > 0 \text{ при всіх } Y_2 \neq 0$$

Таким чином, за теоремою 3 $X^* = [0 \ 0]^T$ - точка строгого локального мінімуму.

1.5 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У більшості, методи нелінійного програмування можуть бути охарактеризовані як багатокрокові, або методи послідовного покращення вихідного (або початкового) рішення. Однак у задачах нелінійного програмування звичайно наперед не можна сказати, яке найбільше число кроків гарантує знаходження оптимуму з заданою точністю. Вибір крока являє собою серйозну проблему, від успішного рішення якої у більшості залежить ефективність застосування того чи іншого методу.

Різновидність методів рішення задач нелінійного програмування і пояснюється намаганням знайти оптимальне рішення за найменше число кроків, щоб обминути необхідність багаторазового обчислення значень цільової функції. Вибір того чи іншого

методу визначається конкретним складом задачі. Д.Хіммельблау [7] запропонував способи класифікації задач нелінійного програмування.

Класифікація методів нелінійного програмування.

1. Класифікація по деяким аспектам постановки задачі.
 - 1.1. Характер цільової функції (з обмеженнями, без обмежень).
 - 1.1.1. Без обмежень.
 - 1.1.2. Обмеження - рівності.
 - 1.1.3. Обмеження - нерівності.
 - 1.1.4. Як обмеження - рівності, так і обмеження - нерівності.
 - 1.2. Дискретні (цілочислові) змінні, приймаючі неперервні значення.
 - 1.3. Опукле, квадратичне, сепарабельне програмування.
2. Класифікація за характерними рисами методів розв'язку.
 - 2.1. Методи, які використовують похідні; методи, які не використовують похідні.
 - 2.2. Аналітичне визначення похідних; числове визначення похідних.
 - 2.3. Методи, які використовують перші похідні; методи, які використовують другі похідні.
 - 2.4. Градієнтні методи з малим кроком; градієнтні методи з великим кроком.
 - 2.5. Одночасна ітерація по всім змінним у процесі пошуку; релаксація (послідовний пошук кожного разу по одній змінній).
 - 2.6. Методи внутрішньої точки; методи зовнішньої точки.
 - 2.7. Детермінований пошук; випадковий пошук.
 - 2.8. Початковий вектор знаходиться у припустимій чи неприпустимій області.
3. Класифікація за використаною мовою програмування.

Завдання

1. Сформулювати умови Куна - Таккера для наступної задачі:
максимізувати $f(X) = 3X_1^2 - 2X_2$ при обмеженнях $2X_1 + X_2 = 4$;
 $X_1^2 + X_2^2 \leq 40, X_1 \geq 0$.
2. Розглянути наступну задачу: мінімізувати $f(X) = (X_1 - 3)^2 + (X_2 + 4)^2 + e^{5X_3}$
при обмеженнях $X_1 + X_2 + X_3 \leq 1; X_1, X_2, X_3 \geq 0$;
 - а) записати умови Куна - Таккера для цієї задачі;
 - б) показати, що виконання умов Куна - Таккера є достатнім для існування оптимального розв'язку даної задачі;
 - в) довести, що $X = [1 \ 0 \ 0]^T$ - точка оптимуму.
3. Розглянути наступну задачу нелінійного програмування: максимізувати $f(X) = A_1 X_1 + X_2$, при обмеженні $X_1^2 + X_2^2 \leq 25; X_1 - X_2 \leq 1, X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$,
 - а) записати умови Куна - Таккера;
 - б) показати, що умови Куна - Таккера являються необхідними та достатніми;
 - в) визначити область значень A_1 , для якої розв'язок $X_1 = 4, X_2 = 3$, оптимальний.

Контрольні запитання

1. В чому практичне значення теорем про необхідність та достатність умов Куна - Таккера?
2. Показати основні напрямки використання необхідних та достатніх умов оптимальності другого порядку.

2. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, ЯКІ НЕ ВИКОРИСТОВУЮТЬ ПОХІДНІ

При реалізації методів прямого пошуку потрібно тільки значення цільової функції. При розв'язку задач безумовної оптимізації методами нелінійного програмування градієнтні методи та методи, які використовують другі похідні, сходяться швидше, ніж методи прямого пошуку.

Але, застосовуючи на практиці методи, які використовують похідні, доводиться стикатися з двома головними перешкодами. По-перше, в задачах з досить великим числом змінних важко або не можливо отримати похідні у вигляді аналітичних функцій, необхідних для градієнтного алгоритму або для алгоритму, який використовує похідні другого порядку. Хоч обчислення аналітичних похідних можна замінити обчисленням похідних за допомогою різницевих схем, помилка яка при цьому виникає, особливо в околиці екстремуму, може обмежити застосування подібної апроксимації. По-друге, при використанні методів оптимізації, основаних на обчисленні перших і при необхідності - других похідних, потрібно порівняно з методами прямого пошуку багато часу на підготовку задачі для розв'язку.

Методи прямого пошуку не потребують регулярності і неперервності цільової функції і існування похідних; хоча повільніше реалізуються у випадку простих задач але з точки зору користувача, на практиці можуть опинитися більш задовільними, ніж градієнтні методи.

2.1 ФУНКЦІЯ ОДНОЇ ЗМІННОЇ

2.1.1 МЕТОДИ ВИКЛЮЧЕННЯ ІНТЕРВАЛІВ

За допомогою методів виключення інтервалів можна реалізувати процедуру пошуку, яка дозволяє знайти точку оптимуму шляхом послідовного виключення частин вихідного обмеженого інтервалу. Логічна структура пошуку за допомогою методів виключення інтервалів основана на простому порівнянні значень функції в деяких пробних точках. Крім того, при такому порівнянні в розрахунок приймається тільки відношення порядку на множині значень функції і не враховується різниця між значеннями функції. Пошук завершується, коли залишившийся підінтервал зменшується до достатньо малих розмірів. Застосуванню методів виключення інтервалів накладається єдина вимога на досліджувану функцію: вона повинна бути унімодальною. Отже, вказані методи можна використовувати для аналізу як неперервних, так і розривних функцій, а також у випадках, коли змінні приймають значення із дискретної множини.

Метод ділення інтервалу на чотири частини

Цей метод інколи називають п'ятиточковим пошуком на рівних інтервалах, оскільки його реалізація основана на виборі п'яти пробних точок, рівномірно розподілених у інтервалі пошуку. Нижче наведен опис основних кроків пошукової процедури, орієнтованої на знаходження точки мінімуму функції $f(X)$ в інтервалі $[a, b]$.

Крок 1. Припустимо $L = b - a$, $x_1 = a$, $x_3 = a + \frac{L}{2}$, $x_5 = b$. Обчислити значення $f(x_1), f(x_3)$ та $f(x_5)$.

Крок 2. Припустимо $x_2 = a + \frac{L}{4}$, $x_4 = b - \frac{L}{4}$. Відмітимо, що точки x_2, x_3 і x_4 ділять інтервал $[a, b]$ на чотири рівні частини. Обчислити значення $f(x_2)$ та $f(x_4)$.

Крок 3. Порівняти значення $f(x_k)$, де $k = 1, \dots, 5$, знайти найменше значення $f(x_m)$ серед обчислених $f(x_k)$. Якщо $x_m \leq x_2$, виключити інтервали $[x_3, b]$, поклавши $b = x_3$. Якщо $x_m = x_3$, виключити інтервали $[a, x_2]$ та $[x_4, b]$. Припустимо $a = x_2$ і $b = x_4$. Якщо $x_m \geq x_4$, виключити інтервал $[a, x_3]$. Припустимо $a = x_3$ і $b = x_5$.
Перейти до кроку 4.

Крок 4. Обчислити $L = b - a$. Якщо значення $\frac{L}{4}$ мале, закінчити пошук. В протилежному випадку повернутися до кроку 2.

Зауваження. 1. На кожній ітерації потрібно не більше двох обчислень значення функції.

2. Показано [13], що з усіх методів пошуку на рівних інтервалах (чотириточкових, п'ятиточкових, шеститочкових і т.д.) п'ятиточковий відрізняється найбільшою ефективністю.

Абсолютна помилка в знаходженні положення екстремуму з збільшенням числа точок, в яких обчислюється значення цільової функції, визначається виразом

$$\Delta = (b - a) 2^{-\frac{N-1}{2}}. \quad (2.1)$$

Завдання

Реалізувати процедуру одномірного пошуку точки оптимуму методом ділення інтервалу на чотири частини функції:

- а) $f(X) = 3x^2 + \left(\frac{12}{x^3}\right) - 5$, у інтервалі $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$;
- б) $f(X) = (10x^3 + 3x^2 + x + 5)^2$, $-2 \leq x \leq 1$;
- в) $f(X) = 3x^4 + (x - 1)^2$, у інтервалі $0 \leq x \leq 4$;
- г) $f(X) = 4x \sin x$, $-1 \leq x \leq 3,14$;
- д) $f(X) = 2(x - 3)^2 + e^{0,5x^2}$, $0 \leq x \leq 100$.

Завдання для самостійної роботи

Задані наступні функції однієї змінної:

а) $f(X) = x^5 + x^4 - \left(\frac{x^3}{3}\right) + 2$;

б) $f(X) = (2x + 1)^2(x - 4)$.

Для кожної із заданих функцій знайти:

- 1) інтервал(и) зростання, убуття;
- 2) точки перегину (якщо такі є);
- 3) інтервали, в яких функція вгнута, опукла;
- 4) локальні і глобальні максимум (мінімум) (якщо є).

Контрольні запитання

1. Як перевірити, являється функція опуклою або вгнутою? Визначити, які із наступних функцій опуклі або вгнуті:

а) $f(X) = e^x$; б) $f(X) = e^{-x}$; в) $f(X) = \frac{1}{x^2}$; г) $f(X) = x + \log x, x > 0$.

2. У чому полягає властивість унімодальності функції і в чому його важливе значення при рішенні задач оптимізації з однією змінною?

Метод золотого перерізу

Величина підінтервалу, виключаємого на кожному кроці пошуку оптимуму, залежить від знаходження пробних точок всередині інтервалу пошуку. Оскільки місцезнаходження точки оптимуму невідоме, доречно припустити, що розміщення пробних точок повинно забезпечувати зменшення інтервалу в одному і тому ж відношенні. Крім того, в цілях збільшення ефективності алгоритму необхідно вимагати, щоб вказане відношення було максимальним. Подібну стратегію називають стратегією пошуку.

На основі методів виключення інтервалів і мінімаксних стратегій пошуку можна зробити наступні висновки.

1. Якщо кількість пробних точок приймається рівним двом, то їх слід розміщувати на однакових відстанях від середини інтервалу.

2. У відповідності з загальною мінімаксною стратегією пробні точки повинні розміщувати в інтервалі по симетричній схемі таким чином, щоб відношення довжини виключаючого підінтервалу до довжини інтервалу пошуку залишалось постійним.

Одним з найбільш ефективних способів мінімаксної стратегії пошуку являється пошук за допомогою золотого перерізу, оснований на розбитті відрізка прямої на дві частини у відношенні, відомому як золотий переріз. При цьому відношенні довжини всього відрізка до більшої частини дорівнює відношенню більшої частини до меншої.

Розглянемо симетричне розположення двох пробних точок x_2 та x_3 на вихідному інтервалі $[a, b]$, де $L = b - a$, $x_1 = a$ і $x_4 = b$, яке показано на рис. 5.1.

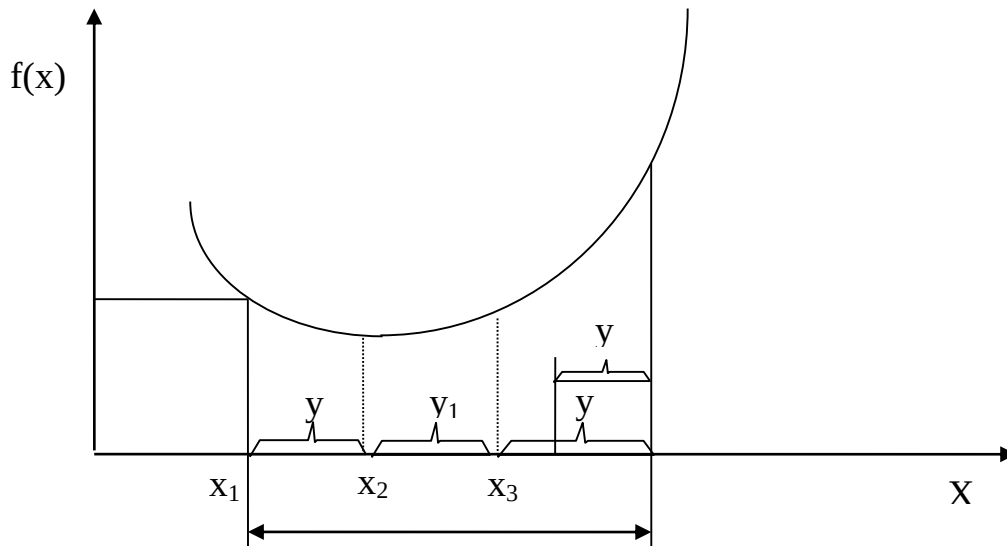


Рис. 2.1. Пошук за допомогою методу золотого перерізу

Довжини інтервалів $[x_1, x_3]$ та $[x_2, x_4]$ однакові, тобто $x_3 - x_1 = x_4 - x_2$, інтервали $[x_1, x_2]$ і $[x_3, x_4]$ також рівні. Позначимо $y = x_2 - x_1 = x_4 - x_3$. Значення y вибирається таким чином, щоб

$$\frac{y}{l} = \frac{l - 2y}{l - y} \quad (2.2)$$

Значення y визначається з (2.2) як рішення рівняння $y^2 - 3ly + l^2 = 0$,

$$\frac{y}{l} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (2.3)$$

З двох коренів рівняння залишаємо

$$\frac{y}{l} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38 \quad (2.4)$$

так як другий корень $\frac{y}{l} > 1$, що не відповідає постановці задачі. Знайдене значення

відношення $\frac{y}{l}$ носить назву золотого перерізу.

Після відкидання у вихідному відрізку однієї з крайніх його частин залишений відрізок при збереженні на місці його вибраної точки повинен ділитися в тому ж відношенні, що і вихідний.

Процедура пошуку мінімуму методом золотого перерізу складається з наступних кроків.

Крок 1. Припустимо $L = b - a$, $x_1 = a$, $x_4 = b$. Обчислити значення $f(x_1)$ та $f(x_4)$.

Крок 2. Припустимо $z = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = x_1 + zL$, $x_3 = x_4 - zL$. Обчислити значення $f(x_2)$ і $f(x_3)$.

Крок 3. Вибрати скорочений підінтервал в інтервалі L , в якому локалізований мінімум.

Якщо $f(x_2) < f(x_3)$, то $x_4 = x_3$, $x_3 = x_2$, $x_2 = x_1 + (x_4 - x_3)$.

Якщо $f(x_2) > f(x_3)$, то $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $x_3 = x_1 + (x_4 - x_2)$.

Крок 4. Обчислити $x_2 - x_1$. Якщо величина $x_2 - x_1$ мала, закінчити пошук. В протилежному випадку повернутися до кроку 3.

Оцінку точності визначення екстремуму методом золотого перерізу при заданному числі розрахунків значень функції $f(x)$ можна визначити як

$$\Delta = \frac{b-a}{2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{s-3}, \quad (2.5)$$

де Δ - абсолютна помилка у визначенні положення екстремуму після S обчислень $f(x)$.

Завдання

Реалізувати процедуру одномірного пошуку оптимуму методом золотого перерізу функції:

а) $f(X) = 3x^2 + \left(\frac{12}{x^3}\right) - 5$, у інтервалі $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$;

б) $f(X) = (10x^3 + 3x^2 + x + 5)^2$, $-2 \leq x \leq 1$;

в) $f(X) = 3x^4 + (x-1)^2$, $0 \leq x \leq 4$;

г) $f(X) = 4x \sin x$, $-1 \leq x \leq 3,14$;

д) $f(X) = 2(x-3)^2 + e^{0,5x^2}$, $0 \leq x \leq 100$.

Порівняти результуючі інтервали пошуку, отримані за допомогою:

а) методу ділення інтервалу на чотири частини;

б) методу золотого перерізу.

Який з методів виявився більш ефективним? Чому?

Завдання для самостійної роботи

Мінімізувати $f(x) = x^2 - x$ за допомогою методу золотого перерізу в інтервалі $0 \leq x \leq 1$. Виконати число обчислень функції, достатнє, щоб отримати $|\Delta x_k| < 10^{-3}$. Побудувати графік залежності $[f(x_{k+1}) - f(x_k)]$ від послідовності номерів k .

Контрольні запитання

Вказати необхідні та достатні умови мінімуму функції однієї змінної. Метод пошуку з використанням чисел Фібоначчі

Для організації оптимального пошуку екстремуму можна використовувати ряд чисел Фібоначчі, властивості якого описуються рекурентним співвідношенням

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \quad (2.6)$$

де $F_0 = F_1 = 1$.

Для оцінки точності визначення екстремуму при заданому числі розрахунків s значень функції $f(x)$, які визначаються на інтервалі $[a, b]$, використовують формулу

$$\Delta = \frac{b-a}{F_s}, \quad (2.7)$$

де F_s - s -е число Фібоначчі.

Порядок виконання алгоритму пошуку мінімуму, який використовує числа Фібоначчі, складається з наступних етапів.

Крок 1. По заданій точності Δ , з якою необхідно знайти положення екстремуму функції $f(x)$ в інтервалі $[a, b]$, розрахувати допоміжне число

$$N = \frac{b-a}{\Delta} \quad (2.8)$$

Для отримання значення N знайти таке число Фібоначчі F_s , щоб виконувалась нерівність $F_{s-1} < N < F_s$.

Крок 2. Визначити крок пошуку за формулою

$$\Delta_m = \frac{b-a}{F_s}. \quad (2.9)$$

Крок 3. Розрахувати значення функції $f(x)$ на початку інтервалу, тобто $f(a)$.

Крок 4. Знайти наступну точку, в якій обчислюється значення $f(x)$, за формулою

$$x^{(1)} = a + \Delta_m F_{s-2} \quad (5.10)$$

Якщо цей крок вийшов вдалим, тобто $f(x^{(1)}) < f(a)$, то наступна точка визначається за формулою

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta_m F_{s-3} \quad (2.11)$$

При $f(x^{(1)}) > f(a)$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \Delta_m F_{s-3} \quad (5.12)$$

Крок 5. Наступні кроки виконуються з зменшуваною величиною кроку, яка для i -го кроку

$$\Delta x^{(i)} = \pm \Delta_m F_{s-i-2}.$$

Процес продовжується до тих пір, доки не будуть вичерпані всі числа Фібоначчі у зменшуваний послідовності:

$$F_{s-i-2} = F_{s-i} - F_{s-i-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Показано, що алгоритм пошуку з використанням чисел Фібоначчі в границі при $S \rightarrow \infty$, тобто при пошучі з високою точністю, збігається з методом золотого перерізу [6],

так як відношення $\frac{F_{s-1}}{F_s}$ прямує до значення $1 - z$, де $z = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38$.

Завдання

Знайти екстремальні точки наступних функцій методом пошуку, який використовує числа Фібоначчі:

- а) $f(X) = x^3 + x, \quad -2 \leq x \leq 2;$
 б) $f(X) = x^4 + x^2, \quad -1 \leq x \leq 1;$
 в) $f(X) = 4x^4 - x^2 + 5, \quad 0 < x < 2;$
 г) $f(X) = (3x - 2)^2(2x - 3)^2, \quad -1 \leq x \leq 1;$
 д) $f(X) = 6x^5 - 4x^3 + 10, \quad 0 \leq x \leq 1.$

Завдання для самостійної роботи

У структурі капітальних вкладів на розвиток хімічного заводу важливе місце займають витрати на придбання і монтаж труб, а також витрати на встановлення насосного обладнання. Розглянемо проект трубопроводу довжиною $L(m)$, який повинен

забезпечувати подачу рідини зі швидкістю $Q \left(\frac{m^3}{xv} \right)$. Вибір найбільш економічного

діаметра труби $D (m)$ здійснюється за мінімізації функції затрат на придбання труб, насосів та прокачування рідини. Відомо, що функція затрат в одиницю часу у випадку, коли трубопровід складається з труб, виготовлених з вуглецевої сталі, і центробіжного насосу з електродвигуном, може бути описана виразом

$$f(x) = 0,45L + 0,245LD^{1,5} + 325(hp)^{0,5} + 61,6(hp)^{0,925}102,$$

$$\text{де } hp = 4,4 * 10^{-8} \frac{LQ^3}{D^5} + 1,92 * 10^{-9} \frac{LQ^{2,68}}{D^{4,68}}.$$

Сформулювати відповідну задачу оптимізації з однією змінною для проектування трубопроводу довжиною 300 м, який повинен забезпечити подання рідини зі швидкістю $0,1 \frac{m^3}{xv}$. Діаметр труби повинен бути заключений в границях $0,6 * 10^{-2} \dots 0,2m$. Вирішити цю задачу за допомогою методу пошуку з використанням чисел Фібоначчі.

Контрольні запитання

1. В чому суть алгоритму пошуку мінімуму, що використовує числа Фібоначчі?
2. Як обчислюється точність визначення екстремуму за допомогою методу пошуку, що використовує числа Фібоначчі.

2.1.2 ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ.

В ряді випадків виходить більш ефективним, ніж методи виключення інтервалів, метод пошуку, який дозволяє враховувати відносні вимірювання значень функції. Основна його ідея пов'язана з можливістю апроксимації гладкої функції поліномом і послідовного використання апроксимуючого поліному для оцінки координати точки оптимуму. Необхідними умовами ефективної реалізації такого підходу є унімодальність та неперервність досліджуваної функції. Відповідно теоремі Вейерштрасса про апроксимацію, кількість оцінок координати точки оптимуму, які отримуються за допомогою апроксимуючого поліному, можна підвищити двома способами: використанням поліному більш високого порядку і зменшення інтервалу апроксимації. Другий спосіб являється переважним, оскільки побудова апроксимуючого поліному порядку вище третього стає складною процедурою, тоді як зменшення інтервалу в умовах, коли виконується припущення про унімодальність функції, особливої складності не являє. Методи оцінювання з використанням квадратичної апроксимації

Простіший варіант поліноміальної інтерполяції - квадратична апроксимація, основана на тому, що функція, яка приймає мінімальне значення у внутрішній точці інтервалу, повинна бути по крайній мірі квадратичною. Когтінс запропонував використовувати алгоритм Девіса, Свенна та Кемпі (ДСК) [15] для визначення інтервалу, який складає точку мінімуму, щоб усі подальші обчислення проводились за алгоритмом Пауелла [7].

При одномірному пошуці за алгоритмом ДСК проводяться зростаючі за величиною кроки до тих пір доки не буде пройдений мінімум, а потім за алгоритмом Пауелла проводиться квадратична апроксимація і визначається точка x , відповідна мінімуму квадратичної функції. Квадратична апроксимація продовжується до тих пір, доки з потрібною точністю не знаходиться мінімум $f(x)$.

Крок 1. Обчислити $f(x)$ у початковій точці x_0 . Якщо $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$, то перейти до кроку 2. Якщо $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, то припустити $\Delta x = -\Delta x$ і перейти до кроку 2.

Крок 2. Обчислити $x_{k+1} = x_k + \Delta x$.

Крок 3. Обчислити $f(x_{k+1})$.

Крок 4. Якщо $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$, тоді удвоїти Δx та повернутися до кроку 2 при $k = k + 1$. Якщо $f(x_{k+1}) > f(x_k)$, то x_{k+1} позначити x_m , $x_k - x_{m-1}$ і т.д., зменшити наполовину і повернутися до кроків 2 та 3.

Крок 5. З чотирьох рівновідстаючих значень $x\{x_{m+1}, x_m, x_{m-1}, x_{m-2}\}$ вилучити або x_m , або x_{m-2} в залежності від того, яке з них знаходиться далі від x , відповідного найменшому значенню $f(x)$. Нехай x_a , x_b та x_c - залишені три значення x , де x_b - центральна точка, а

$$x_a = x_b - \Delta x \text{ і } x_c = x_b + \Delta x.$$

Крок 6. Обчислити наближене значення x у точці мінімуму $f(x)$ за формулою

$$\tilde{X}^* = -\frac{1}{2} \frac{\left[(x_b)^2 - (x_c)^2 \right] f(x_a) + \left[(x_c)^2 - (x_a)^2 \right] f(x_b) + \left[(x_a)^2 - (x_b)^2 \right] f(x_c)}{(x_b - x_c) f(x_a) + (x_c - x_a) f(x_b) + (x_a - x_b) f(x_c)} \quad (5.14)$$

Крок 7. Якщо $\tilde{X}^*$ і будь - яке із значень $x\{x_a, x_b, x_c\}$, відповідних мінімуму $f(x)$, відрізняється менш, ніж на передписану точність x або на точність відповідних значень функції $f(x)$, тоді закінчити пошук. У протилежному випадку обчислити $f(\tilde{X}^*)$ та вилучити з множини $\{x_a, x_b, x_c\}$ те значення x , яке відповідає найбільшому значенню $f(x)$, якщо, однак, при цьому не буде загублений інтервал, в якому знаходиться мінімум $f(x)$. У цьому випадку слід так вилучити x , щоб зберігти цей інтервал. Перейти до кроку 6.

Робота алгоритму продовжується до тих пір, доки не буде досягнена бажана точність, вказана у кроці 7.

Завдання

Знайти точку мінімуму функції $f(x) = (10x^3 + 3x^2 + x + 5)^2$. Задані початкова точка $x = 2$ та довжина кроку $\Delta = 0,5$.

Порівняти отриманий результуючий інтервал пошуку з отриманим за допомогою методу золотого перерізу.

Завдання для самостійної роботи

Мінімізувати $f(x) = x^2 - x$, починаючи з точки $x = 3$, за допомогою методу Коггінса. Нехай $|\Delta x_0| = 0,1$. Виконати кількість обчислень функції, достатнє, щоб отримати $|\Delta x_k| < 10^{-3}$. Побудувати графік залежності $[f(x_{k+1}) - f(x_k)]$ від послідовності номерів k . Визначити інтервал, в якому знаходиться мінімум, методом золотого перерізу.

Контрольні запитання

1. Зформулювати умову, при виконанні якої метод пошуку, оснований на поліноміальній інтерполяції, може не привести до отримання вірного рішення.
2. Чи являються методи виключення інтервалів в цілому більш ефективними, ніж методи точкового оцінювання? Чому?

Порівняння методів одновимірного пошуку

За допомогою теоретичних висновків показано, що такі методи точкового оцінювання, як метод Коггінса або метод пошуку з використанням кубічної апроксимації, суттєво ефективніше методів виключення інтервалів, серед яких виділяється метод золотого перерізу. У випадку, коли інтервали збігу порівняні між собою, метод оснований на квадратичній апроксимації, збігається швидше, ніж будь-який з методів виключення інтервалів.

Результати експериментальних досліджень довели [13], що якщо необхідно отримати рішення з високим ступенем швидкості, тоді кращими виявляються методи пошуку на основі поліноміальної апроксимації. З другого боку, доведено, що при дослідженні мультимодальних (швидко-змінних) функцій метод Коггінса збігається повільніше, ніж метод виключення інтервалів.

Для оцінки ефективності методів використовувались три характеристики: час, витрачений на отримання рішення, точність рішень та чутливість до зміни параметру збігу.

2.2 ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

2.2.1 МЕТОД СКАНУВАННЯ

Метод сканування полягає у послідовному перегляді значень функції мети у ряді точок, які належать області зміни незалежних змінних і знаходження серед них мінімального (максимального) значення функції мети [6]. Точність методу визначається тим, наскільки щільно розташовуються обрані точки у припустимій області зміни незалежних змінних.

Переваги методу - при використанні щільного розташування досліджуваних точок гарантується відшук оптимуму, а також незалежність пошуку від вигляду оптимізованої функції.

Недолік методу - обчислення значень цільової функції для великої кількості точок.

Найбільш простий алгоритм пошуку оптимуму методом сканування, який називається пошуком на сітці змінних, полягає у приростах, які дають у відповідному порядку по кожній з незалежних змінних і забезпечуючих заповнення всієї області зміни рівномірною і достатньо щільною сіткою (рис. 2.3).

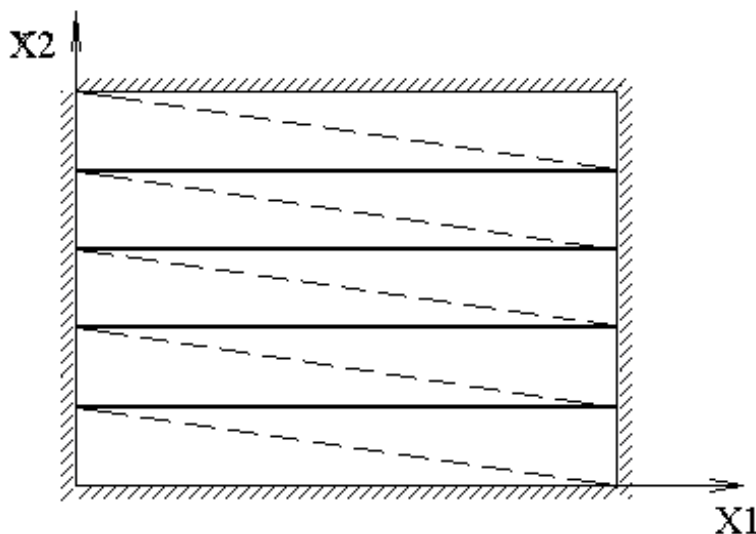


Рис. 2.3. Пошук оптимуму для випадку двох змінних

Додаткові обмеження на незалежні змінні не ускладнюють процедуру використання методу, так як у цьому випадку точки, які не задовільняють заданим умовам, просто вилучаються з розгляду і значення функції мети не обчислюються.

Для оцінки обчислювальних витрат методом сканування визначають кількість обчислень функції мети при умові, що точність визначення положення оптимуму дорівнює Δ :

$$S = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^n, \quad (2.15)$$

де n - кількість незалежних змінних.

Для скорочення об'єму обчислень застосовують різні модифікації методу сканування, наприклад метод пошуку з змінним кроком сканування. Початкова величина кроку обирається достатньо великою, по можливості такою, що перевищує точність визначення положення оптимуму. Виконується грубий пошук, який локалізує область знаходження глобального оптимуму. Коли область визначена, проводиться пошук з меншим кроком. Необхідний об'єм обчислень значень цільової функції скорочується:

$$S = k^{-rn} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^n + r(2k)^n, \quad (2.16)$$

де r - число етапів уточнення пошуку, на яких крок пошуку зменшується у k разів.
На рис. 5.4 показаний пошук з змінним кроком для функції двох змінних.

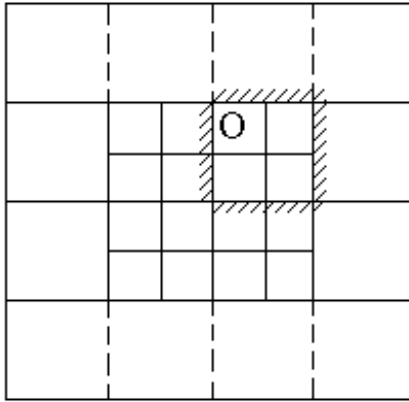


Рис. 2.4. Пошук методом сканування з змінним кроком: хрестиком позначене значення оптимуму, знайдене у наслідок грубого пошуку, кружком - справжнє положення оптимуму.

Порядок виконання пошуку процедури мінімуму функції $f(x)$ методом сканування зі змінним кроком складається з наступних етапів.

Крок 1. Обчислити крок сканування по кожній змінній

$$H(z) = \frac{(B(z) - A(z))}{2K(z)} \quad (2.17)$$

і початковий крок сканування по першій змінній

$$HO = \frac{(B(1) - A(1))}{L}, \quad (2.18)$$

де A, B - ліва та права межі вихідної області; k - кратність дроблення по кожній змінній; L - кратність дроблення по першій змінній.

Крок 2. Для ряду значень першої змінної, які відстають один від одного на величину кроку H ,

$$X(1) = A(1) + H(1)Z(1) \quad (2.19)$$

і при фіксованих значеннях інших змінних обчислити значення функції мети f . Якщо $\left[f(x_{k+1}^{(i)}) < f(x_k^{(i)}) \right]$, то переприсвоїти $y(z) = x(z)$, $f_1 = f$. Знайти мінімальне значення функції мети f_1 .

Крок 3. При першому значенні другої змінної, яке відстає на величину кроку від попереднього значення,

$$X(2) = A(2) + H(2)Z(2) \quad (2.20)$$

та фіксованих значеннях інших змінних перейти до кроку 2 і т.д.

Крок 4. Якщо весь діапазон зміни змінних досліджених, перевірити умову збігу за величиною кроку по першій змінній. Якщо $\frac{(B(1) - A(1))}{K(1)} \leq HO$, то пошук закінчується; у протилежному випадку локалізується область знаходження оптимуму

$$A(z) = Y(z) + H(z), \quad B(z) = Y(z) + H(z) \quad (5.21)$$

і крок пошуку зменшується кратно к $H(z) = \frac{H(z)}{K}$, здійснюється повернення до кроку

1.

Завдання

Дослідити функцію

$$f(x) = x^3 - 12x + 3 \text{ на інтервалі } -4 \leq x \leq 4.$$

Знайти локальний мінімум і глобальний мінімум в заданному інтервалі. Порівняти об'єми обчислень методів сканування з постійним та змінним кроком.

Завдання для самостійної роботи

Знайти екстремальні точки наступних функцій:

$$f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, \quad 0 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 5.$$

Контрольні запитання

1. Нехай дана точка задовільняє достатнім умовам існування локального мінімуму. Як встановити, чи являється цей мінімум глобальним?
2. Модифікації методу сканування.

2.2.2 МЕТОД ГАУСА-ЗЕЙДЕЛЯ

Метод почергової зміни змінних, який називається також методом Гауса-Зейделя заключається в тому, що почергово змінюються всі незалежні змінні так, щоб кожна з них досягала найменше (найбільше) значення цільової функції. Черговість варіювання незалежних змінних встановлюється довільно і звичайно не змінюється в процесі пошуку. Кожна уточнююча змінна варіюється до тих пір поки в данному осьовому напрямку не буде знайдено мінімум, після чого починається процес крокового пошуку по наступному осьовому напрямку. Стратегія пошуку мінімуму по кожній змінній при цьому може бути будь-якою. Зокрема можна використовувати один із описаних вище методів пошуку оптимуму функції однієї змінної.

Відзначимо, що для двох незалежних змінних метод почергового змінення змінних та метод релаксації (градієнтний метод пошуку оптимуму) співпадають. Метод Гауса-Зейделя приводить до оптимуму більш довгим шляхом. Однак загальний об'єм обчислень порівняно з методом релаксації в данному випадку може стати меншим, так як при переході до уточнення наступної змінної похідні цільової функції не обчислюються. До недоліків методу Гауса-Зейделя відноситься труднощі пошуку при наявності обмежень або особливостей цільової функції.

Порядок виконання пошукової процедури мінімуму функції $f(x)$ методом Гауса-Зейделя складається із наступних етапів:

Крок 1. Обчислити $f(x)$ при початкових координатах змінних.

Крок 2. При зміні однієї змінної, якщо $f(X_0^{(i)} + \Delta X^{(i)}) \leq f(X_0^{(i)})$, то перейти до кроку 3; якщо $f(X_0^{(i)} + \Delta X^{(i)}) > f(X_0^{(i)})$, то прийняти $\Delta X^{(i)} = -\Delta X^{(i)}$ і перейти до кроку 3.

Крок 3. Обчислити $X_{k+1}^{(i)} = X_k^{(i)} + \Delta X^{(i)}$.

Крок 4. Обчислити $f(X_{k+1}^{(i)})$.

Крок 5. Якщо $f(X_{k+1}^{(i)}) < f(X_0^{(i)})$, то переприсвоїти $f(X_0^{(i)}) = f(X_{k+1}^{(i)})$ і повернутися до кроку 2. Якщо $f(X_{k+1}^{(i)}) > f(X_0^{(i)})$, то перевіряється умова збігу метода по величині кроку.

При виконанні, коли величина кроку H_k стане менше заданої точності, пошук закінчується; в протилежному випадку величина кроку пошуку зменшується кратно K , проходить повернення до кроку 2.

Завдання

1. Використовуючи метод Гауса-Зейделя знайти мінімум функції

а) $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 + 2(x_2 - 5)^2$, $X^0 = [1 \ 2]$;

б) $f(x_1, x_2) = 3(x_1 + 1)^2 + 2(x_2 - 5)^2$, $X^0 = [0 \ 0]$;

в) $f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 2)^2$, $X^0 = [3 \ 4]$;

2. Використовуючи метод Гауса-Зейделя, знайти максимум функції

а) $f(x_1, x_2) = 2 + 2x_1 + x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2$, $X^0 = [3 \ 3]$;

б) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1$, $X^0 = [1 \ 2]$;

в) $f(x_1, x_2) = 2 + 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2$, $X^0 = [1 \ 2]$;

Завдання для самостійної роботи

Знайти мінімум функції

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + 3(x_2 - 3)^2$$

за допомогою метода Гауса-Зейделя, використовуючи пошук мінімуму по кожній змінній методом золотого перерізу. В якості початкової точки вибрана точка $X^0 = [2, 1]$.

Контрольні запитання

1. Область застосування методу Гауса-Зейделя.
2. Порівняти методи Гауса-Зейделя та релаксації.

2.2.3 СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

Спробою уникнути необхідності обчислення похідних для визначення напрямку найшвидшого просування до оптимуму і в той же час зберегти можливість достатньо швидкого руху до нього являється алгоритм симплексного методу [13].

Процедура симплексного пошуку Спендлі, Хекста та Хімсворта базується на тому, що експериментальним зразком, який складається з найменшої кількості точок являється регулярний симплекс. Регулярний симплекс в N - мірному просторі являє собою багатогранник, створений $N+1$ рівновіддаленими одна від одної точками-вершинами. Наприклад, у випадку двох змінних симплексом являється рівносторонній трикутник, в трьохмірному просторі-тетраedr (рис.2.5)

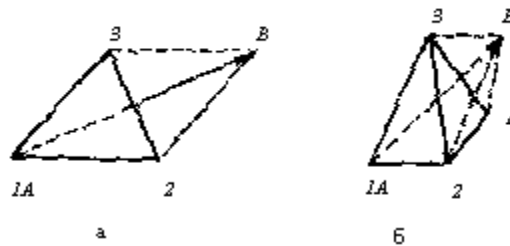


Рис.2.5. Регулярні симплекси для випадку двох (а) та трьох (б) незалежних змінних: вершина 1 означає найбільше значення $f(x)$, стрілка вказує найшвидше покращення.

Із аналітичної геометрії відомо, що координати вершин регулярного симплексу визначаються матрицею D , в якій стовпці являють собою вершини, пронумеровані від 1 до $N+1$, а рядки -координати (i приймає значення від 1 до N):

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_1 & d_2 & \dots & d_2 \\ 0 & d_2 & d_1 & \dots & d_2 \\ 0 & d_2 & d_2 & \dots & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_2 & d_2 & \dots & d_1 \end{bmatrix} - \text{матриця,}$$

(2.22)

$$\text{де } d_1 = \frac{t}{N\sqrt{2}}(\sqrt{N+1} + N - 1); \quad d_2 = \frac{t}{N\sqrt{2}}(\sqrt{N+1} - 1);$$

t - відстань між вершинами.

Наприклад, для $N=2$ та $t=1$ трикутник на рис.2.5 має наступні координати:

Вершина	$X_{1,i}$	$X_{2,i}$
1	0	0
2	0,965	0,259
3	0,259	0,965

Цільову функцію можна обчислити в кожній з вершин симплексу; з вершини, де цільова функція максимальна (точка А на рис.2.5), проводять проектуючу пряму через центр тяжіння симплексу. Потім точку А виключають і будують новий симплекс, називаємий відбитим, з залишившихся попередніх точок та однієї нової точки В, розташованої на проектуючій прямій на належній відстані від центру тяжіння. Якщо функція зменшується достатньо плавно, ітерації продовжують до тих пір, поки або не буде накрита точка мінімуму (рис.2.6), або почнеться циклічний рух по двох та більше симплексах.



Рис.2.6. Послідовність регулярних симплексів отриманих при мінімізації цільової функції у двувірному просторі

В таких ситуаціях можна скористатися наступними правилами:

Правило 1. Накриття точки мінімуму.

Якщо вершина, якій відповідає найбільше значення цільової функції, побудована на попередній ітерації, то замість неї береться вершина, якій відповідає наступне по величині значення цільової функції.

Правило 2. Циклічний рух.

Якщо деяка вершина симплексу не виключається протягом більш ніж M ітерацій, то необхідно зменшити розміри симплексу за допомогою коефіцієнту редукції і побудувати новий симплекс, вибравши в якості базової точку, якій відповідає мінімальне значення цільової функції. Спендлі, Хекст і Хімсворт запропонували обчислити значення M за формулою:

$$M = 1.65N + 0.05N^2$$

де N - розмірність задачі, а M округлюється до найближчого цілого числа.

Правило 3. Критерій закінчення пошуку.

Пошук завершується, коли або розмір симплексу, або різниці між значеннями функцій у вершинах стають достатньо малими.

Відображення відносно центру тяжіння являє неважку процедуру. Нехай $X^{(j)}$ - точка, підлягаюча відображенню. Центр тяжіння N точок розташований в точці

$$X_c = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N X^{(i)}.$$

(2.24)

Всі точки прямої, проходящої через точки $X^{(j)}$ та X_c , задаються формулою

$$X = X^{(j)} + \lambda(X_c - X^{(j)}).$$

(2.25)

При $\lambda=0$ отримуємо вихідну точку $X^{(j)}$, тоді як значення $\lambda=1$ відповідає центру тяжіння X_c . Для того, щоб побудований симплекс володів властивістю регулярності, відображення повинні бути симетричним. Відповідно, нова вершина отримується при $\lambda=2$. Таким чином

$$X_{\text{нова}}^{(j)} = 2X_c - X_{\text{попер}}^{(j)}$$

(2.26)

Схема алгоритму пошуку по симплексу показана на рис.2.7.

Алгоритм володіє рядом суттєвих недоліків:

- 1) невиключено виникнення труднощів, зв'язаних з масштабуванням, оскільки всі координати вершин симплексу залежать від одного і того ж масштабного множника t ;
- 2) алгоритм працює дуже повільно, так як отримана на попередніх ітераціях інформація не використовується для прискорення пошуку;
- 3) не існує простого способу розширення симплексу, непотребуючого перерахунку значень цільової функції у всіх точках зразка.

Завдання

1. Визначити регулярну симплексну фігуру в трьохмірному просторі таку, що відстань між вершинами дорівнює 0.2 і одна вершина знаходиться в точці $(-1.2, -2)$.

2. Використовуючи симплексну фігуру, побудовану в п.1, провести вісім циклів відкидання вершин та отримати нові при пошуку мінімуму цільової функції

$$f(X) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2.$$

3. Трьохмірний оптимальний симплекс пошук дав наступні проміжні результати

Вектор	Значення цільової функції
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$	4
$\begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$	7
$\begin{bmatrix} -1/3 & -4/3 & -1/3 \end{bmatrix}$	10
$\begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & -4/3 \end{bmatrix}$	5

Яка наступна точка підлягає обчисленню в процесі пошуку?

Яка точка пропущена?

Що буде центром тяжіння нового симплексу?

Завдання для самостійної роботи

Число змінних дорівнює 2. Обмеження відсутні. Потрібно мінімізувати

$f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2$ за допомогою симплекс методу. В якості чергової точки вибирається точка $X^{(0)} = \begin{bmatrix} -1.2 & 1 \end{bmatrix}^T$, в якій $f(X^{(0)}) = 2420$.

Контрольні запитання

1. В чому заключається властивість спаду цільової функції при переході від ітерації до ітерації? Чому виконання цієї властивості необхідне для побудови ефективного алгоритму?

2. Чому квадратичні функції використовуються як основа для побудови алгоритмів нелінійної оптимізації?

3. Пояснити поняття квадратичного збігу.

4. Переваги та недоліки симплексного методу.

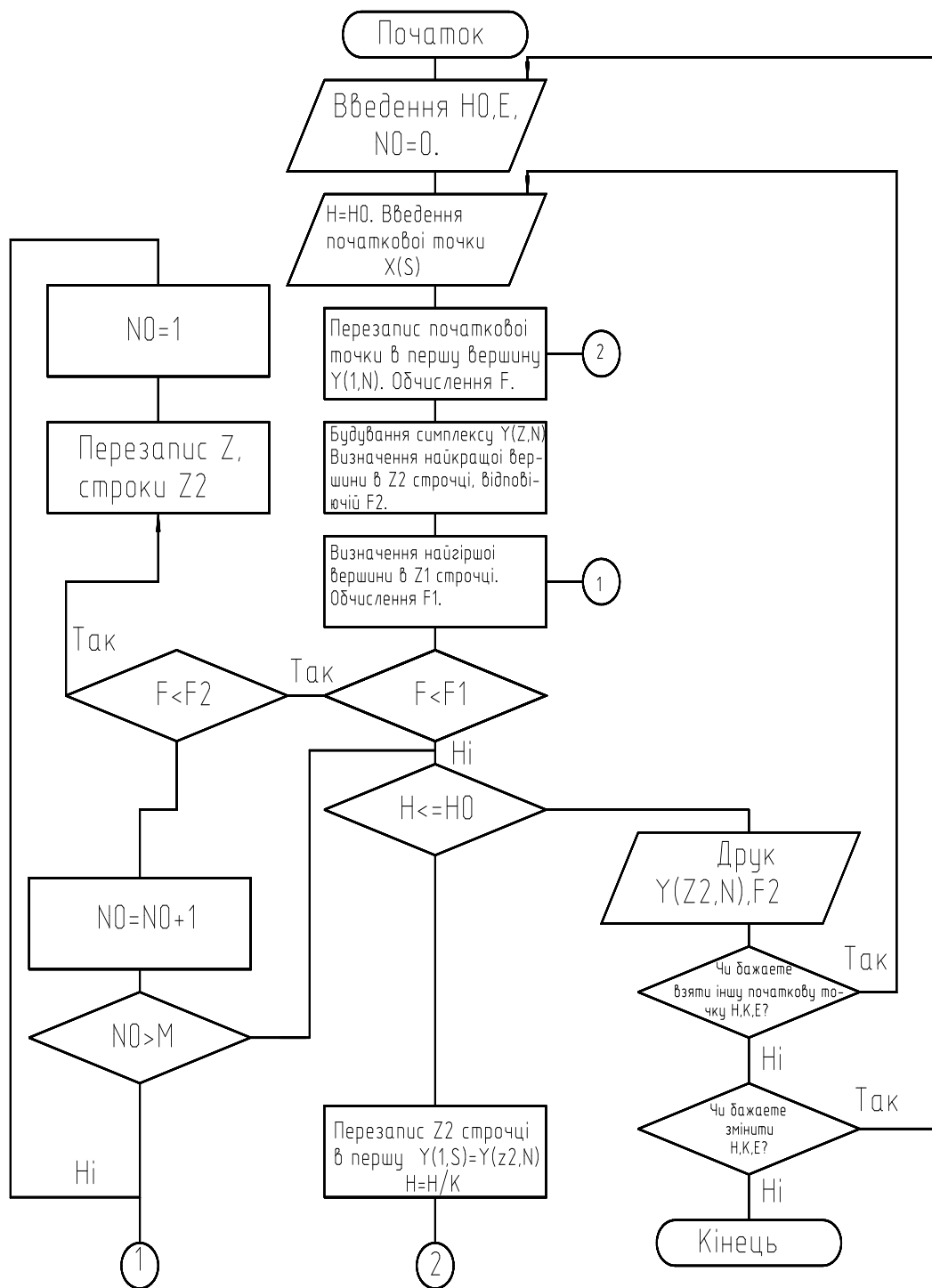


Рис.2.7 Схема пошуку по симплексу

2.2.4 ПОШУК ПО ДЕФОРМОВАНОМУ БАГАТОГРАННИКУ

Практичні труднощі, які зустрічаються при використанні регулярних симплексів, а саме відсутність прискорення пошуку на скривлених байраках і хребтах, привели до необхідності деяких покращених методів. Нелдер і Мід [15] запропонували метод пошуку більш складний, порівняно з методом пошуку Спендлі, Хекста і Хімсворта, але став ефективнішим і легко здійснюваним на ЕОМ. В зв'язку з тим, що симплекс може змінювати свою форму і таким чином вже не буде залишатись симплексом, метод пошуку названо по деформованому багатограннику.

Алгоритм пошуку мінімуму за допомогою методу Нелдера і Міда може бути описаним наступним чином.

Нехай вектор $X_i^{(k)} = [X_{i1}^{(k)}, \dots, X_{ij}^{(k)}, \dots, X_{in}^{(k)}]^T$, $i = 1, \dots, n+1$

є i -ою вершиною в n -мірному просторі на k -ому етапі пошуку ($k=0,1,\dots$) та нехай значення цільової функції в $X_i^{(k)}$ дорівнює $f(X_i^{(k)})$. Крім того, відмітимо ті вектори X багатогранника, котрі дають максимальне та мінімальне значення $f(X)$. Визначимо

$$f(X_h^{(k)}) = \max \{f(X_1^{(k)}), \dots, f(X_{n+1}^{(k)})\} \quad (2.27)$$

де $X_l^{(k)} = X_i^{(k)}$, та

$$f(X_i^{(k)}) = \min \{f(X_1^{(k)}), \dots, f(X_{n+1}^{(k)})\} \quad (2.28)$$

Оскільки багатогранник в n -мірному просторі складається з $n+1$ вершин $X_1, \dots, X_{n+1}$, нехай X_{n+2} буде центром тяжіння всіх вершин, виключаючи X_h .

Координати центру тяжіння визначаються формулою

$$X_{n+2}^{(k)} = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_{ij}^{(k)} \right) - X_{hj}^{(k)} \right], \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.29)$$

де j - координатний напрям.

Початковий багатогранник звичайно вибирається у вигляді регулярного симплексу з точкою 1 в якості початку координат, початок координат можливо помістити в центр тяжіння. Процедура відшукування вершин в n -мірному просторі, в якій $f(X)$ має краще значення, складається з наступних операцій.

1. Відображення- проектування $X_h^{(k)}$ через центр тяжіння в відповідності співвідношенню

$$X_{n+3}^{(k)} = X_{n+2}^{(k)} + \alpha (X_{n+2}^{(k)} - X_h^{(k)}), \quad (2.30)$$

де $\alpha > 0$ - коефіцієнт відображення; $X_{n+2}^{(k)}$ - центр тяжіння, обчислений за формулою (5.20); $X_n^{(k)}$ - вершина, в якій функція $f(X)$ приймає найбільше з $n+1$ її значень на k -ому етапі.

2. Розтяг, який заключається в наступному: якщо $f(X_{n+3}^{(k)}) \leq f(X_i^{(k)})$, то вектор $(X_{n+3}^{(k)} - X_{n+2}^{(k)})$ розтягнеться у відповідності з співвідношенням

$$X_{n+4}^{(k)} = X_{n+2}^{(k)} + \gamma (X_{n+3}^{(k)} - X_{n+2}^{(k)}), \quad (2.31)$$

де $j > 1$ - коефіцієнт розтягу, якщо $f(X_{n+4}^{(k)}) < f(X_l^{(k)})$, то $X_h^{(k)}$ замінюється на $X_{n+4}^{(k)}$ і процедура продовжується знову з операції 1 при $k=k+1$. В протилежному випадку $X_h^{(k)}$ замінюється на $X_{n+3}^{(k)}$ і також здійснюється перехід до операції 1 при $k=k+1$.

3. Стискання. Якщо $f(X_{n+3}^{(k)}) > f(X_i^{(k)})$, для всіх $i \neq h$, то вектор $(X_h^{(k)} - X_{n+2}^{(k)})$ стискається у відповідності з формулою

$$X_{n+5}^{(k)} = X_{n+2}^{(k)} + \beta(X_h^{(k)} - X_{n+2}^{(k)}), \quad (2.32)$$

де $0 < \beta < 1$ - коефіцієнт стискання. Потім $X_h^{(k)}$ замінюємо на $X_{n+5}^{(k)}$ і повертаємося до операції 1 для продовження пошуку $(k+1)$ - му кроці.

4. Редукція. Якщо $f(X_{n+3}^{(k)}) > f(X_h^{(k)})$, то всі вектори $(X_i^{(k)} - X_l^{(k)})$ $i=1, \dots, n+1$, зменшуються в 2 рази з відліком від $X_l^{(k)}$ у відповідності з формулою

$$X_i^{(k)} = X_l^{(k)} + 0.5(X_i^{(k)} - X_l^{(k)}), \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (2.33)$$

Потім повертаються до операції 1 для продовження пошуку на $(n+1)$ -му кроці.

Критерій закінчення пошуку, використаний Нелдером і Мідом, складається з перевірки умови

$$\frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} [f(X_i^{(k)}) - f(X_{n+2}^{(k)})]^2 \right\}^{1/2} \leq \varepsilon, \quad (2.34)$$

де ε - довільне мале число; $f(X_{n+2}^{(k)})$ - значення цільової функції в центрі тяжіння $X_{n+2}^{(k)}$.

На рис. 2.8. зображена схема пошуку методом деформованого багатограннику. Деформований багатогранник в протилежність жорсткому симплексу адаптується до топографії цільової функції, витягуючись вздовж довгих нахилених площин, міняючи напрямки в зігнутих впадинах і стискаючись в околиці мінімуму. Коефіцієнт відображення α використовується для проектування вершин з найбільшим значенням $f(x)$ через центр тяжіння деформованого багатограннику. Коефіцієнт γ вводиться для розтягу вектору пошуку у випадку, коли відображення дає вершину із значенням $f(x)$, меншим ніж найменше значення $f(x)$, отримане до відображення. Коефіцієнт стискання β використовується для зменшення вектора, якщо операція відображення не привела до вершини із значенням $f(x)$, меншим ніж друге по величині (після найбільшого) значення $f(x)$, отримане до відображення. Таким чином, за допомогою операції розтягу або стискання розміри і форма деформованого багатогранника масштабується так, щоб вони задовільняли топологію розв'язаної задачі.

При оптимізації без обмежень Нелдер і Мід рекомендували в якості задовільних значень значення параметрів $\alpha=1$, $\beta=0.5$ та $\gamma=2$.

Завдання

1. Методом Нелдера і Міда знайти оптимум для функції:

а) $f(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2$, починаючи з базисної точки $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$;

$$\text{б)} f(X) = 4x_1^2 + x_2^2 - 40x_1 - 12x_2 + 136, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \end{bmatrix}^T;$$

$$\text{в)} f(X) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -10 & 1 \end{bmatrix}^T;$$

$$\text{г)} f(X) = (x_1 x_2)^2 (1 - x_1)^2 \left[1 - x_1 - x_2 (1 - x_1)^5 \right]^2, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} -1.2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

2. Шляхом підбору значень параметрів β і γ в алгоритмі Нелдера і Міда знайти їх оптимальні значення для функції.

$$\text{а)} f(X) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T;$$

$$\text{б)} f(X) = (x_1^2 + 12x_2 + 1)^2 + (49x_1^2 + 49x_2^2 + 84x_1 + 2324x_2 - 681)^2, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T;$$

$$\text{в)} f(X) = 100 \left[x_{33} - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \right]^2 + (1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} -1.2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

3. Знайти мінімум функції Розенброка $f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, починаючи з базової точки $X^{(0)} = \begin{bmatrix} -1.2 & 0 \end{bmatrix}^T$, методом Нелдера і Міда. Побудувати траєкторію і вказати значення цільової функції $f(x)$ в залежності від числа ітерацій.

4. Знайти координати точок мінімуму функції Хіммельблау

$$f(X) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

з точністю до трьох десятичних знаків, при пошуку скористатися наступними початковими точками:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}^T, \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \end{bmatrix}^T, \quad X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad X^{(4)} = \begin{bmatrix} -5 & -5 \end{bmatrix}^T, \\ X^{(5)} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти максимум функції

$$f(X) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

методом Нелдера і Міда.

Контрольні запитання

1. Що буде вихідним симплексом у випадку пошуку Нелдера і Міда для функції $f(X) = 2x_1^2 + x_2^4$? Яка із вершин виключається першою? другою?

2. Як впливають на збіг алгоритму значення коефіцієнтів α, β, γ :

а) якщо $\alpha > 1$ або $\alpha < 1$; б) якщо $0 < \beta < 0.4$ або $\beta > 0.6$?

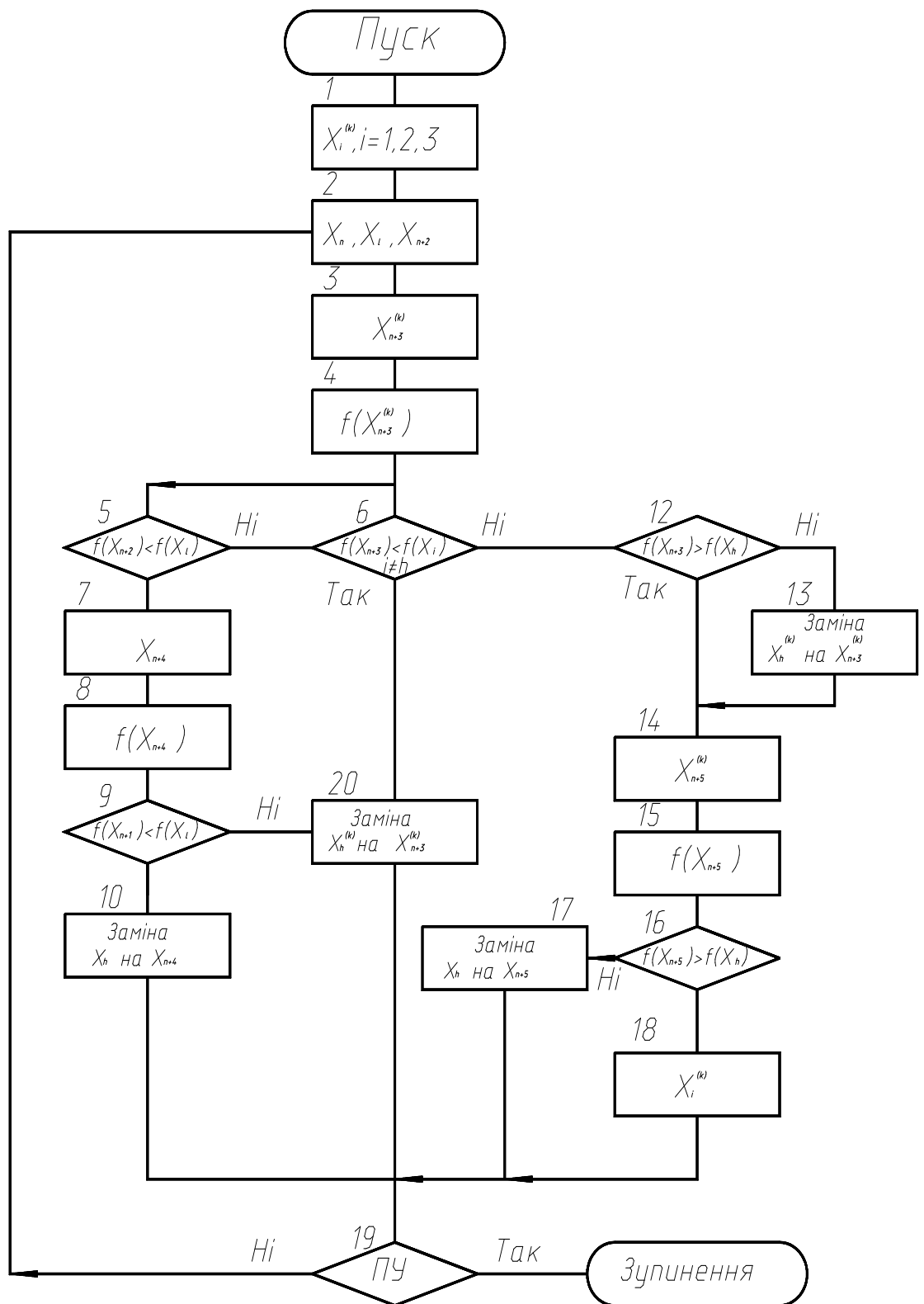


Рис. 2.8. Схема пошуку мінімуму методом Нелдера і Міда.

2.2.5 МЕТОД ПАУЕЛЛА

Одним з найбільш ефективних з алгоритмів прямого пошуку є метод, розроблений Пауеллом . Як і попередні методи , метод Пауелла не потребує знаходження похідних оптимізованої функції . У випадку неунімодалної функції , пошук слід проводити з кількох вихідних точок.

У цьому методі мінімум де-якої квадратичної функції визначається при умові додатної визначеності матриці Гессе $H(X) > 0$ шляхом проведення послідовних одновірних пошуків , починаючи з точки $X_0^{(k)}$, уздовж системи одержаних спряжених напрямків .

Нагадаємо, що в загальному випадку система N лінійно незалежних напрямків пошуку $M^{(0)}, M^{(1)}, \dots, M^{(n-1)}$; називається спряженою по відношенню до де-якої додатньо визначеної (квадратичної) матриці Q , якщо

$$(M^{(i)})^T \cdot Q \cdot M^{(j)} = 0, \quad 0 \leq i \neq j \leq n-1.$$

Сутність алгоритму Пауелла полягає в тому , що якщо на данім етапі пошуку визначається мінімум квадратичної функції $f(X)$ уздовж кожного з ρ спряжених напрямків ($\rho < h$) і якщо потім у кожному з напрямків робиться де-який крок , то повне переміщення від початку до ρ -го кроку спряжене до усіх піднапрямків пошуку.

Перехід з точки $X_0^{(k)}$ в точку $X_m^{(k)}$ визначається за формулою

$$X_m^{(k)} = X_0^{(k)} + \sum_{i=0}^{m-1} S_i^{(k)} M_i^{(k)}, i = 1, \dots, m-1. \quad (2.35)$$

У точці $X_0^{(0)}$ початкові напрямки $M_1^{(0)}, \dots, M_n^{(0)}$ беруться паралельними координатним вісям. Перший крок робиться у напрямку $M_n^{(0)}$, тобто мінімізується $f(X_0^{(0)} + S \cdot M_n^{(0)})$ за S (за допомогою одновірного пошуку) для обчислення $S_0^{(0)}$. Потім вважається $X_1^{(0)} = X_0^{(0)} + S_0^{(0)} M_n^{(0)}$. Потім уздовж кожного з n напрямків $M_i^{(0)}, i = 1, \dots, n$, в свою чергу мінімізується $f(X_i^{(0)} + S M_i^{(0)})$, визначаються відповідно $S_i^{(0)}$ і послідовно обчислюються за формулою (2.35) нові значення $X_i^{(0)}$.

Для цільової функції $f(X) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$ координатні вісі мають напрямки (рис. 2.9)

$$M_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вони ортогональні , тобто $(M_1^{(0)})^T \cdot (M_2^{(0)}) = 0$, але не спряженні , так як $(M_1^{(0)})^T H M_2^{(0)} = 4 \neq 0$. Розміщення відповідних мінімумів $f(X)$ показано в наступній таблиці.

Ітерація	$(M_i^{(0)})^T$	$S_i^{(0)}$	$(X_{i+1}^{(0)})^T$	$f(X_{i+1}^{(0)})$
0	[0 1]	-1	[2 1]	7
1	[1 0]	-1,75	[0,25 1]	0,875
2	[0 1]	-0,875	[0,25 0,125]	0,109

Теорема Якщо при початковій точці $X^{(0)}$ пошуку в напрямку M мінімум квадратичної цільової функції $f(X)$ знаходиться в де-якій точці $X^{(a)}$ та якщо при початковій точці $X^{(1)} \neq X^{(0)}$ пошуку у тому самому напрямку M мінімум $f(X)$ знаходиться в точці $X^{(b)}$, то при $f(X^{(b)}) < f(X^{(a)})$ напрямок $(X^{(b)} - X^{(a)})$ спряжено з M .

Для квадратичної функції $f(X) = a + X^T b + \frac{1}{2} X^T H X$, де H - додатньо визначена матриця, слідує, що для першого пошуку $M^T \nabla f(X^{(a)}) = M^T (H X^{(a)} + b) = 0$ для другого пошуку $M^T \nabla f(X^{(b)}) = M^T (H X^{(b)} + b) = 0$. Віднімаючи, отримуємо $M^T H (X^{(b)} - X^{(a)}) = 0$, отож, M та $(X^{(b)} - X^{(a)})$ спряжені. З рис.5.9 видно, що $(X_3^{(0)} - X_2^{(0)})^T H (X_3^{(0)} - X_1^{(0)}) = 0$, де $X_0^{(0)}$ відповідає точці $X^{(0)}$ у формулюванні теореми, а люба точка на прямій $(X_3^{(0)} - X_2^{(0)})$ відповідає точці $X^{(1)}$. Для прикладу рис. 2.9

$$\left[(0,25 - 0,25)(0,125 - 1) \right] \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0,25 - 2,0) \\ (0,125 - 1,0) \end{bmatrix} = 0.$$

Таким чином, визначені два спряжених напрямки, в котрих потрібно вести пошук.

Напрямок $M_1^{(0)}$ повинен бути замінений на напрямок вектору $(X_3^{(0)} - X_1^{(0)})$, що представляє собою повне переміщення з першого мінімуму.

Напрямки пошуку на наступному етапі такі:

$$M_1^{(1)} = M_2^{(0)};$$

$$M_2^{(1)} = (X_3^{(0)} - X_1^{(0)}).$$

У загальному випадку на K -му етапі методу Пауелла використовується M лінійно незалежних напрямків пошуку; при цьому пошук починається в де-якій точці $X_0^{(k)} = X_{n+1}^{(k-1)}$ та проводиться наступним чином.

Крок 1 Починаючи з $X_0^{(k)}$, за допомогою якого-небудь одномірного пошуку визначається $S_1^{(k)}$ так, щоб $f(X_0^{(k)} + S_1 \cdot M_1^{(k)})$ приймала мінімальне значення та покладається $X_1^{(k)} = X_0^{(k)} + S_1^{(k)} \cdot M_1^{(k)}$. Починаючи з $X_1^{(k)}$ визначається $S_2^{(k)}$ так, щоб $f(X_1^{(k)} + S_2^{(k)} \cdot M_2^{(k)})$. Пошук продовжується послідовно в кожному напрямку, завжди починаючи з самої останньої точки послідовності, поки не будуть визначені усі $S_i^{(k)}, i = 1, \dots, n$;

Крок 2 Пауелл відмітив, що пошук, здійснюваний у відповідності з кроком 1, може привести до лінійно залежних напрямків пошуку. Напрямок повного переміщення на K -м етапі $M^{(k)}$ повинно замінити попередній напрямок тільки в тому випадку, якщо вектор що замінить збільшує визначник матриці напрямків пошуку, оскільки тільки тоді новий набір напрямків буде більш ефективним. Після мінімізації $f(X)$ в кожному з n напрямків, як на кроку 1, проводиться один допоміжний крок величиною $(X_n^{(k)} - X_0^{(k)})$, що відповідає повному переміщенню на K -етапі та що приводить у точку $(2X_n^{(k)} - X_0^{(k)})$.

Крок 3 Проводиться перевірка, зменшується чи визначник матриці напрямків пошуку шляхом включення нового напрямку та відкидання старого. Напрямок пошуку, що відповідає максимальній зміні $f(X)$ $\Delta^{(k)} = \max \{ f(X_{i-1}^{(k)}) - f(X_i^{(k)}) \}$, позначили $M_m^{(k)}$. Покладемо $f_1 = f(X_0^{(k)})$, $f_2 = f(X_n^{(k)})$ та $f_3 = f(2X_n^{(k)} - X_0^{(k)})$, де

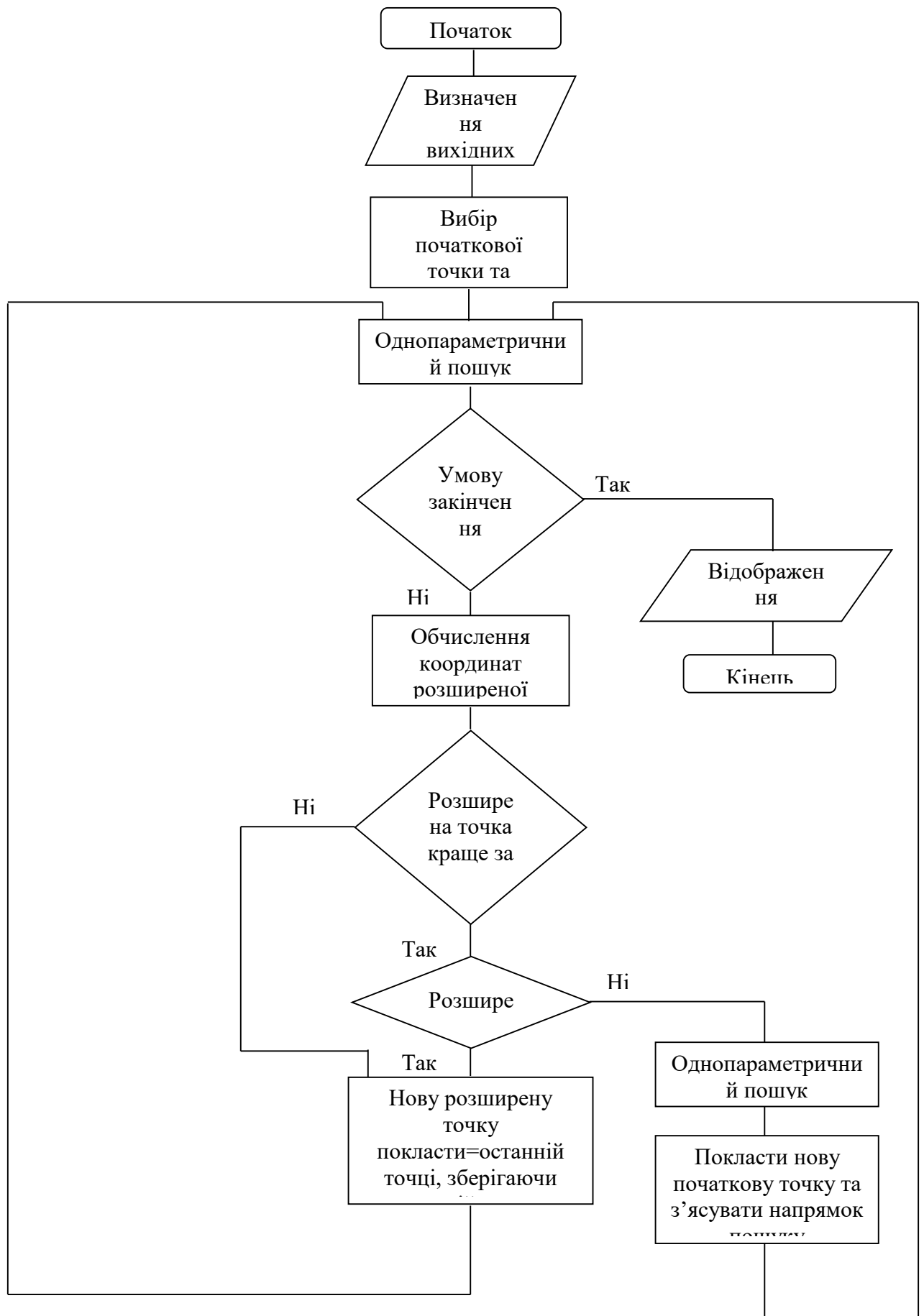


Рис. 2.9 Схема алгоритма Пауела

$X_0^{(k)} = X_n^{(k-1)}$ та $X_n^{(k)} = X_0^{(k)} + \sum_{i=1}^n S_i^{(k)} M_i^{(k)}$. Якщо $f_3 \geq f_1$ та (або)

$(f_1 - 2f_2 + f_3)(f_1 - f_2 - \Delta^{(k)})^2 \geq 0, 5\Delta^{(k)}(f_1 - f_3)^2$, то слід використовувати на (K+1)-м етапі ті ж напрямки $M_1^{(k)}, \dots, M_n^{(k)}$, що і на K-м етапі, та друкувати пошук з точки $X_0^{(k+1)} = X_n^{(k)}$ (або з точки $X_0^{(k+1)} = 2X_n^{(k)} - X_0^{(k)} = X_{n+1}^{(k)}$ в залежності від того, у якій точці X функція $f(X)$ приймає найменше значення).

Крок 4 Якщо текст не задовільний, то шукається мінімум $f(X)$ у напрямку вектора $M^{(k)}$, проведеного з $X_0^{(k)}$ у $X_n^{(k)}$; точка цього мінімуму береться в якості початкової для наступного (K+1)-го етапу. Система напрямків, що використовується на (K+1)-м етапі, та ж, що і на K-м етапі за виключенням напрямку $M_m^{(k)}$, котрий замінюється на $M^{(k)}$.

Однак $M^{(k)}$ поміщують в останній стовпець матриці напрямків, а не замість $M_m^{(k)}$

$$[M_1^{(k+1)} M_2^{(k+1)} \dots M_n^{(k+1)}] = [M_1^{(k)} M_2^{(k)} \dots M_{m-1}^{(k)} M_{m+1}^{(k)} \dots M_n^{(k)} M^{(k)}]$$

Крок 5 Критерій збіжності метода Пауелла. Зміна по кожній незалежній змінній повинна бути меншою, чим задана точність $E_i, i=1, \dots, n$ або $\|X_n^{(k)} - X_0^{(k)}\| \leq 0,1E$.

Показано, що процедура Пауелла буде збігатися до точки, в якій градієнт $f(X)$ дорівнює нулю, якщо $f(X)$ - строго опукла функція. Така точка являє собою локальний екстремум. На рис. 2.10 приведена схема алгоритма Пауелла.

Алгоритм пошуку Пауелла, являє собою таку послідовність операцій:

1) задаються координати початкової точки $X_0^{(0)}$ та вихідні напрямки пошуку $M_i^{(0)} (i=1, 2, \dots, n)$, паралельні координатним вісям;

2) здійснюється однопараметричний пошук в кожному напрямку, використовуючи квадратичну апроксимацію оптимізуючої функції;

3) потім визначаються наступні точки:

$X_n^{(k)}$ -остання точка однопараметричного пошуку;

$X_m^{(k)}$ - точка найбільшого покращання значення функції серед успішних однопараметричних пошуків;

$X_t^{(k)} = 2X_n^{(k)} - X_0^{(k)}$ -розширена точка ;

$X_0^{(k)}$ -вихідна точка ітерації,

де k -номер ітерації, що зміниться при кожному новому напрямку пошуку;

4) якщо значення функції у розширеній точці $X_t^{(k)}$ більш, ніж в вихідній точці $X_0^{(k)}$, остання точка $X_n^{(k)}$ стає новою вихідною точкою та проводиться новий однопараметричний пошук в тому ж напрямку:

$$X_0^{(k+1)} = X_n^{(k)},$$

$$M_i^{(k+1)} = M_i^{(k)}, i=1, 2, \dots, n.$$

Якщо значення оптимізуючої функції у розширеній точці покращилось, виконується наступна перевірка:

$$\left[f_0^{(k)} - 2f_n^{(k)} + f_t^{(k)} \right] \left[f_0^{(k)} - f_n^{(k)} - \Delta \right]^2 \geq \frac{\Delta (f_0^{(k)} - f_t^{(k)})}{2}$$

$$\text{де } \Delta = |f_m^{(k)} - f_{m-1}^{(k)}|.$$

Дана умова визначає, чи не є функція відгуку у тій області “байраком”, тобто значення $f_t^{(k)}$ краще, ніж $f_0^{(k)}$ але в колишньому напрямку значення функції збільшується. Якщо умова виконується, попередній напрямок пошуку зберігається та новий однопараметричний пошук відновлюється, як згадано вище. Якщо умова не виконується, пошук здійснюється в новому напрямку $\mu^{(k)}$:

$\mu^{(k)} = X_n^{(k)} - X_0^{(k)}$ до тих пір, поки не буде знайдено найкраще значення функції.

Новий напрямок пошуку обирається наступним чином:

$$M_i^{(k+1)} = M_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, M-1;$$

$$M_i^{(k+1)} = M_{i+1}^{(k)}, i = M, \dots, n-1;$$

$$M_n^{(k+1)} = \mu^{(k)};$$

Приклад 2.1

Знайти точку мінімуму функції $f(X) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^3 - 10x_1x_2 + x_2^2$, за допомогою методу Пауелла. Якщо початкова точка $X^{(0)} = [5 \ 2]^T$, в якій $f(X^{(0)}) = 314$.

Крок 1. $S^{(1)} = [1 \ 0]^T$, $S^{(2)} = [0 \ 1]^T$

Крок 2. Знайти оптимальне значення λ . $\lambda^* = -0.81$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 0,81 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1,19 \end{bmatrix}; \quad f(X^{(1)}) = 250$$

Наступне значення $\lambda^* = -3.26$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,74 \\ 1,19 \end{bmatrix}, \quad f(X^{(2)}) = 1,10$$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,74 \\ 1,092 \end{bmatrix}, \quad f(X^{(3)}) = 0,72$$

Крок 3. Отримаємо $S^{(3)} = X^{(3)} - X^{(1)} = [-3,25 \ -0,098]^T$, після нормування отримаємо

$$S^{(3)} = \frac{S^{(3)}}{\|S^{(3)}\|} = [-0,99955 \ -0,33]^T.$$

Нехай $S^{(3)} = S^{(2)}$, $S^{(2)} = S^{(3)}$ і перейдемо до кроку 2.

Крок 4. Знайдемо значення λ , при якому $f(X^{(3)} + \lambda S^{(2)}) \rightarrow \min$

$$\lambda^* = 0,734, \quad X^{(4)} = [1,006 \ 1,070]^T, \quad f(X^{(4)}) = -2,86$$

Крок 5. Пошук завершується при виконанні умови

$$|X_i^{(k)} - X_i^{(k-1)}| \leq E, i = 1, 2, \dots, n.$$

Завдання

1. Знайдіть напрямок, ортогональний вектору $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T$ в точці

$X = [0 \ 0 \ 0]^T$. Знайдіть напрямок, спряжений до M для цільової функції

$f(X) = x_1 + 2x_2^2 - x_1x_2$ у тій самій точці.

2. Випішіть чотири перших напрямки пошуку для методу Пауелла у випадку мінімізації $f(X) = x_1^2 + \exp(x_1^2 + x_2^2)$, починаючи з точки $X^{(0)} = [2 \ 2]^T$.

3. Знайдіть мінімуми функцій, використовуючи метод Пауелла.

а) $f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $X^{(0)} = [-1, 2 \ 1]^T$,

б) $f(X) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $X^{(0)} = [-1, 2 \ 1]^T$,

в) $f(X) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$, $X^{(0)} = [-1, 2 \ 1]^T$,

г) $f(X) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$, $X^{(0)} = [-1, 2 \ 1]^T$

Контрольні запитання

1. Оскільки метод Пауелла використовує спряжені напрямки, чи можна гарантувати відшукання мінімуму квадратичної цільової функції n змінних за n кроків?

2. Чи надасть метод Пауелла той самий набір напрямків пошуку, що й метод Розенброка, якщо розпочати з тієї самої початкової точки X ?

3. Поясніть, яким чином методом Пауелла отримують набір спряжених напрямків пошуку для трьохмірної задачі?

2.2.6 МЕТОД ПОШУКУ ХУКА-ДЖИВСА

Даний метод не потребує визначення похідних оптимізованої функції і припускає її унімодальність. Якщо функція не унімодальна або властивості її апріорно невідомі, пошук оптимуму слід проводити із кількох початкових точок.

Хук і Дживс запропонували логічно просту стратегію пошуку. Алгоритм складає два основних етапи: досліджуючий пошук навколо базисної точки та пошук за зразком, тобто є в напрямку, обраному для мінімізації.

Досліджуючий пошук. Досліджуючий пошук починається з обчислення значення функції $f(x)$ у базисній точці, котра являє собою початковий вектор припустимих шукомих значень незалежних змінних на першому циклі. Потім у циклічному порядку змінюється кожна змінна (кожен раз тільки одна) на обрані величини приростів, поки всі параметри не будуть таким чином змінені. Якщо приріст не поліпшує цільову функцію, необхідно повернутися в попередню точку та зробити крок в протилежному напрямку з наступною перевіркою значення цільової функції. Після перебірки усіх N координат досліджуючий пошук завершується.

Пошук за зразком. Після проведення одного (чи більше) досліджуючого пошуку використовується стратегія пошуку за зразком. Пошук за зразком полягає у реалізації серії прискорюючих кроків уздовж прямої, що з'єднує отриману точку з попередньою базисною точкою. Нова точка зразку визначається у відповідності з формулою

$$X_p^{(k+1)} = X^{(k)} + (X^{(k)} - X^{(k-1)}) , \quad (2.36)$$

де

$X^{(k)}$ - базисна точка;

$X^{(k-1)}$ - попередня базисна точка

$X_p^{(k+1)}$ - точка, побудована при русі за зразком.

Як тільки рух за зразком не призведе до зменшення цільової функції, точка $X_p^{(k+1)}$ фіксується в якості тимчасової базисної точки та знову проводиться досліджуючий пошук. Для прискорення процесу оптимізації змінення розміру кроку ΔX в пошуку за зразком здійснюється шляхом введення деякого множника за величиною ΔX , що використовується у досліджуючих пошуках.

Пошук завершується, коли величина кроку стане достатньо малою.

Опис алгоритму

Алгоритм пошуку оптимуму методом Хука та Дживса складається наступним чином (рис 2.10.):

1) Задається початкова точка та оцінюється значення функції, що оптимізується в цій точці;

2) Проводиться локальний пошук в цій точці за усіма напрямками X_i з кроком S_i з метою знайти точку $X^{(k+1)}$, де значення функції $f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)})$;

3) Якщо значення функції не зменшується в жодному з можливих напрямків, то перевіряється умова закінчення пошуку, що складаються в тому, що пошук завершується, якщо змінення оптимізуючої функції, викликані пошуковим рухом, менше наперед заданої точності визначення $f(X)$. Якщо пошук слід продовжити, то крок пошуку S_i зменшується та пошук відновлюється з точки $X^{(k)}$.

4) Якщо значення функції, що оптимізується зменшилось, то визначаються координати тимчасового оптимуму $X_{\text{опт}}^{(k+1)}$.

$$X_{i,\text{опт}}^{(k+1)} = X_i^{(k+1)} + \alpha (X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}), i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.37)$$

де α -фактор прискорення ($\alpha \geq 1$);

5) Якщо значення функції $f(X_{\text{опт}}^{(k+1)})$ виявилось менше раніше знайденого мінімуму, то наступний локальний пошук здійснюється з точки $X_{\text{опт}}^{(k+1)}$. Визначається нова точка $X_{\text{опт}}^{(k+2)}$ і до тих пір, поки функція, що оптимізується зменшується;

6) Якщо в черговій $X_{\text{опт}}^{k+\tau}$ ($\tau = 1, 2, \dots$) точці значення функції збільшилося, то локальний пошук слід провести з попередньої оптимальної точки.

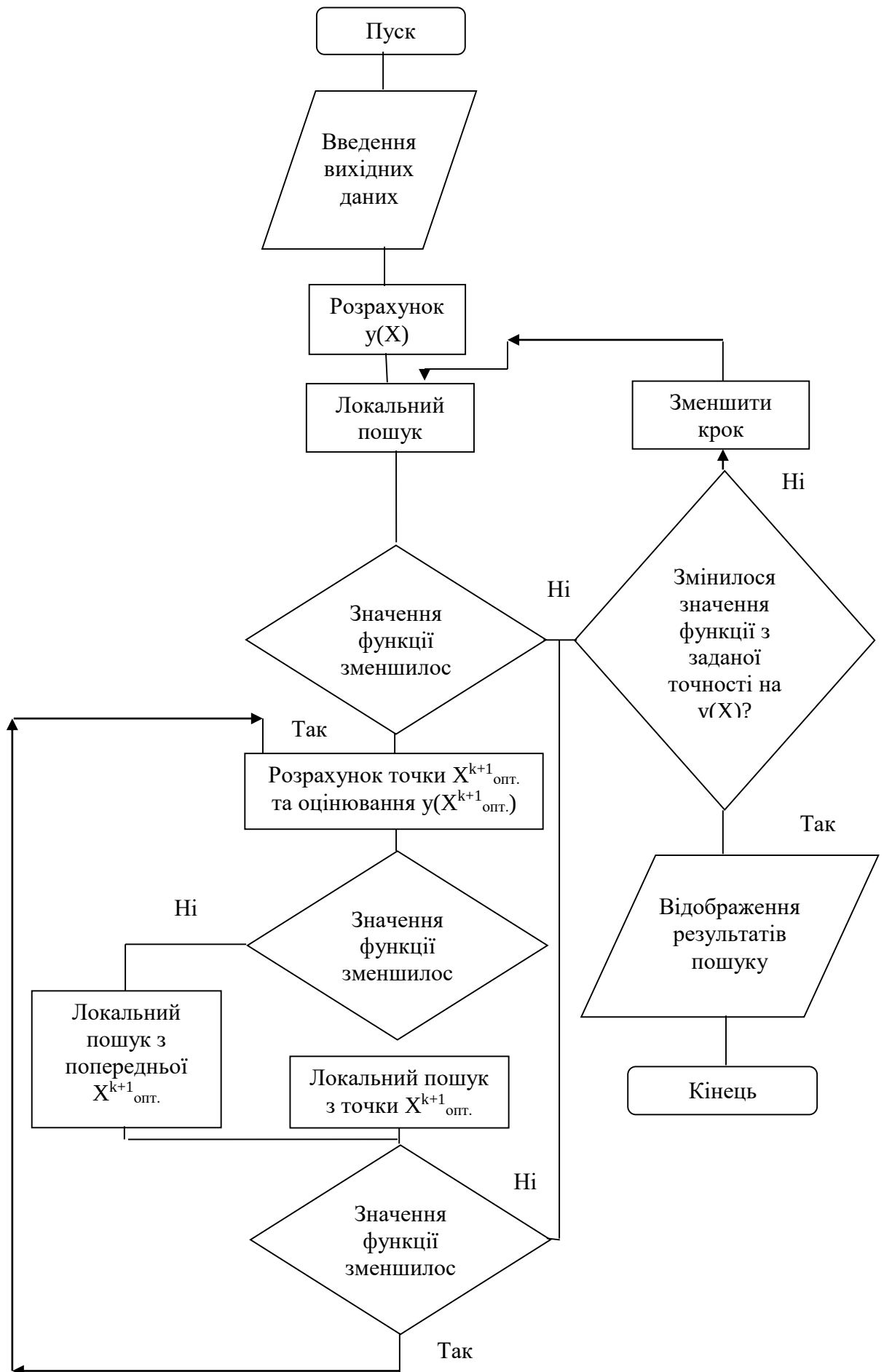


Рис 2.10. Схема алгоритма Хука і Дживса

Приклад 2.2

Максимізувати цільову функцію

$$f(X) = \frac{1}{(x_1 + 1)^2 + x_2^2}$$

починаючи з $X^{(0)} = [2,00 \ 2,80]^T$ з початковим кроком $\Delta x = [0,6 \ 0,84]^T$,

$$f(2,00 \ 2,80) = 0,059.$$

Досліджуючий пошук для визначення вдалого напрямку

$$x_1^{(1)} = 2,00 + 0,60 = 2,60$$

$$f(2,6 ; 2,80) = 0,048 \text{ (невдача)}$$

$$x_1^{(1)} = 2,00 - 0,60 = 1,40$$

$$f(1,40 ; 2,80) = 0,073 \text{ (успіх)}$$

$$x_2^{(1)} = 2,80 + 0,84 = 3,64$$

$$f(1,40 ; 3,64) = 0,052 \text{ (невдача)}$$

$$x_2^{(1)} = 2,80 - 0,84 = 1,96$$

$$f(1,40 ; 1,96) = 0,104 \text{ (успіх)}$$

Досліджуючий пошук виявився вдалим. Новим базисним вектором буде $(1,40 ; 1,96)$.

Тепер з точки $(1,40 ; 1,96)$ проводиться пошук за зразком у відповідності з правилом акселерації

$$X_i^{(k+1)} = 2X_i^{(k)} - X_i^{(k-1)}$$

де $X_i^{(k-1)}$ - попередній базисний вектор X . У даному випадку це початковий вектор X .

$$X_1^{(2)} = 2(1,40) - 2,00 = 0,80$$

$$X_2^{(2)} = 2(1,96) - 2,80 = 1,12,$$

$$f(0,8 ; 1,12) = 0,22$$

Далі знову проводиться досліджуючий пошук. Послідовні кроки метода реалізації показані на рис. 2.11.

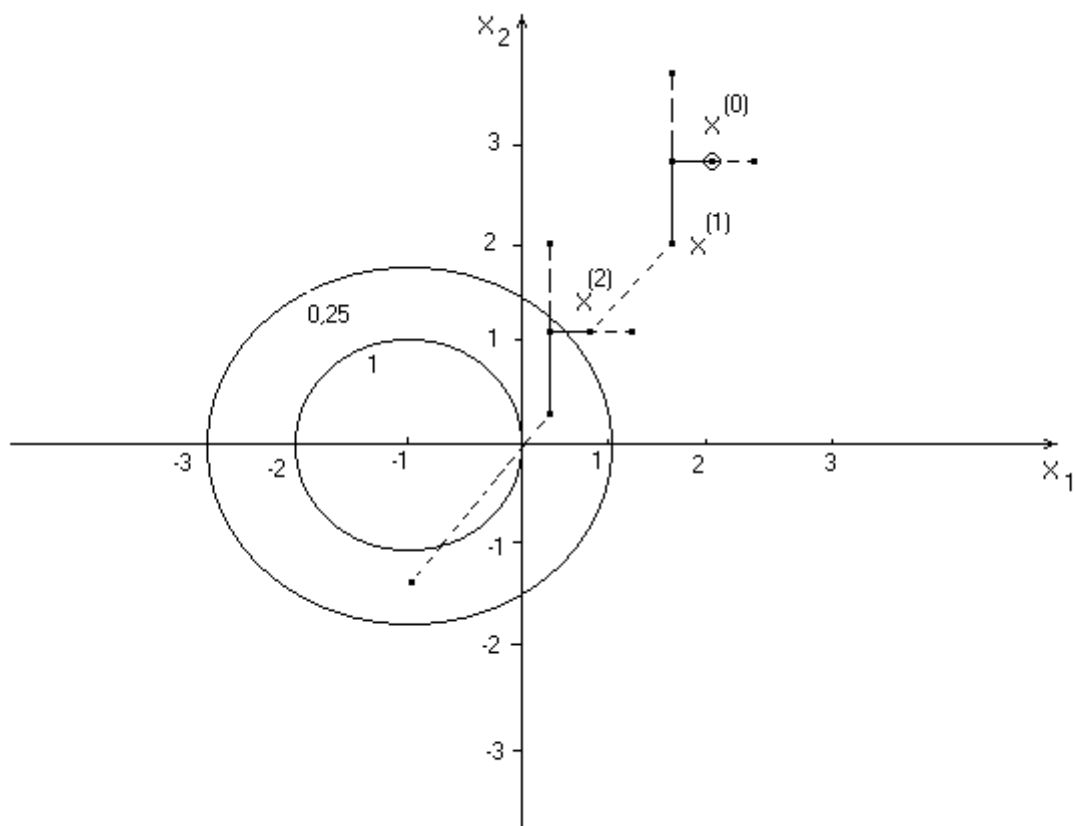


Рис. 2.11. Графік реалізації пошуку за методом Хука-Дживса, де

Кроки досліджуючого пошуку

_____ Успіх

----- Невдача

Кроки пошуку за зразком

..... Успіх

+++++ Невдача

Завдання

Система подачі газу по трубах, у якій компресорні станції розташовані на відстані L км, один від одного, зображена на рис. 2.12.

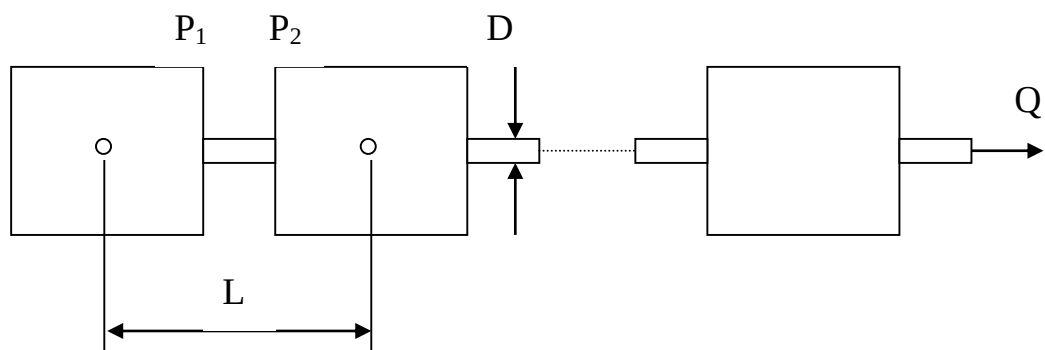


Рис. 2.12. Схема газопроводу

Сумарні витрати на експлуатацію газопроводу протягом року з'ясовуються за допомогою функції, грн.:

$$C(D, P_1, L, r) = 7,84D^2P_1 + 45 \cdot 10^4 + 36900D + \frac{6,57 \cdot 10^6}{L} + \frac{772 \cdot 10^6}{L} (r^{0,219} - 1), \quad (5.38)$$

де

D – внутрішній діаметр труб, см;

P_1 – тиск на виході компресора, кгс/см²;

L – відстань між компресорними станціями, км;

$\gamma = P_1 / P_2$ – відношення тисків на вході та виході компресора.

Витрати газу на одиницю часу, м³/г:

$$Q = 3,39 \left[\frac{(P_1^2 - P_2^2) D^5}{fL} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.39)$$

де $f=0,008D^{-1/3}$ – коефіцієнт тертя. Нехай витрати газу на день складають $100 \cdot 10^6$ м³. Скористайтесь формулою (5.39) для виключення змінної P_1 з (5.38). Потім за допомогою метода Хука-Дживса знайдіть такі значення параметрів системи, яким відповідає мінімум сумарних експлуатаційних витрат на одиницю часу.

Контрольні запитання

1. Поясніть, чому напрямки пошуку, які використовуються в алгоритмі прямого пошуку Хука-Дживса, повинні бути лінійно незалежними. Скільки напрямків слід використовувати у данному випадку?
2. Чому квадратичні функції використовуються як основа для побудови алгоритмів нелінійної оптимізації?

2.2.7 МЕТОД

РОЗЕНБРОКА

Метод не потребує знання похідних оптимізованої функції та припускає унімодалність останньої. У випадку, якщо функція не унімодална або властивості точно не відомі, рекомендовано проводити пошук оптимуму із кількох початкових точок.

Метод Розенброка є ітераційною процедурою, що має подібність із досліджуваним пошуком Хука та Дживса. Отут замість безперервного пошуку за координатами, що відповідають напрямкам незалежних змінних, після кожного циклу координатного пошуку можна зробити покращення шляхом зведення напрямків пошуку у ортогональну систему, приймаючи увесь крок попереднього етапу в якості першого блоку при побудові нової системи координат. Метод Розенброка визначає місце знаходження $X^{(k+1)}$, використовуючи послідовні одномірні пошуки, починаючи з вихідної точки $X^{(k)}$, уздовж системи оthonормованих напрямків $M_1^{(k)}, \dots, M_n^{(k)}$, отриманих за допомогою процедури Грама-Шмідта, так що напрямки пошуку витягаються уздовж головних вісей квадратичної апроксимації цільової функції.

На початковому етапі $K=0$ напрямку $\hat{M}_1^{(0)}, \dots, \hat{M}_n^{(0)}$ за звичай беруться паралельні вісям $X_1, \dots, X_n$. У загальному випадку ортогональні випадки пошуку можуть бути виражені, як комбінація координат незалежних змінних:

$$\hat{M}_1^{(k)} = a_{11}^{(k)} \delta_1 + a_{12}^{(k)} \delta_2 + \dots + a_{1n}^{(k)} \delta_n;$$

$$\hat{M}_2^{(k)} = a_{21}^{(k)} \delta_1 + a_{22}^{(k)} \delta_2 + \dots + a_{2n}^{(k)} \delta_n;$$

.....

$$\hat{M}_n^{(k)} = a_{n1}^{(k)} \delta_1 + a_{n2}^{(k)} \delta_2 + \dots + a_{nn}^{(k)} \delta_n;$$

де δ_i – одиничний вектор у напрямку X_i , а a_{ij} являє собою спрямовані косинуси $\hat{M}_i$.

У матричному зображенні $\hat{M}^{(k)} = a^{(k)} \cdot \delta$.

Розглянемо К-й етап, пошук починається з $X_0^{(k)}$ шляхом введення збурення, що дорівнює $S_1^{(k)} \cdot \widehat{M}_1^{(k)}$, у першому координатному напрямку, де S_1 -довжина кроку у напрямку $\widehat{M}_1$. Якщо значення $f(X_0^{(k)} + S_1^{(k)} \widehat{M}_1^{(k)})$ дорівнює або менше, за $f(X_0^{(k)})$, крок рахується успішним та здобута спробна точка замінює $X_0^{(k)}$, $S_1^{(k)}$ множиться на множник $\alpha > 0$ та вводиться збурення за напрямком $\widehat{M}_2^{(k)}$. Якщо значення $f(X_0^{(k)} + S_1^{(k)} \widehat{M}_1^{(k)})$ більше за $f(X_0^{(k)})$, то крок рахується невдалим, $X_0^{(k)}$ не замінюється, $S_1^{(k)}$

множиться на множник $\beta < 0$ та знову задається збурення за напрямком $\widehat{M}_2^{(k)}$. Розенброк запропонував у загальному випадку брати значення параметрів такими: $\alpha = 3$ та $\beta = -0,5$. Збурення за вибраним напрямком пошуку задаються до тих пір, поки по кожному з напрямків за успіхом не настане невдача. Остання отримана точка ставатиме початковою точкою наступного етапу, $X_0^{(k+1)} = X_n^{(k)}$. Нормований напрямок $\widehat{M}_1^{(k+1)}$ береться паралельним $(X_0^{(k+1)} - X_0^{(k)})$, а останні напрямки обираються ортонормованими один до одного та до $\widehat{M}_1^{(k+1)}$.

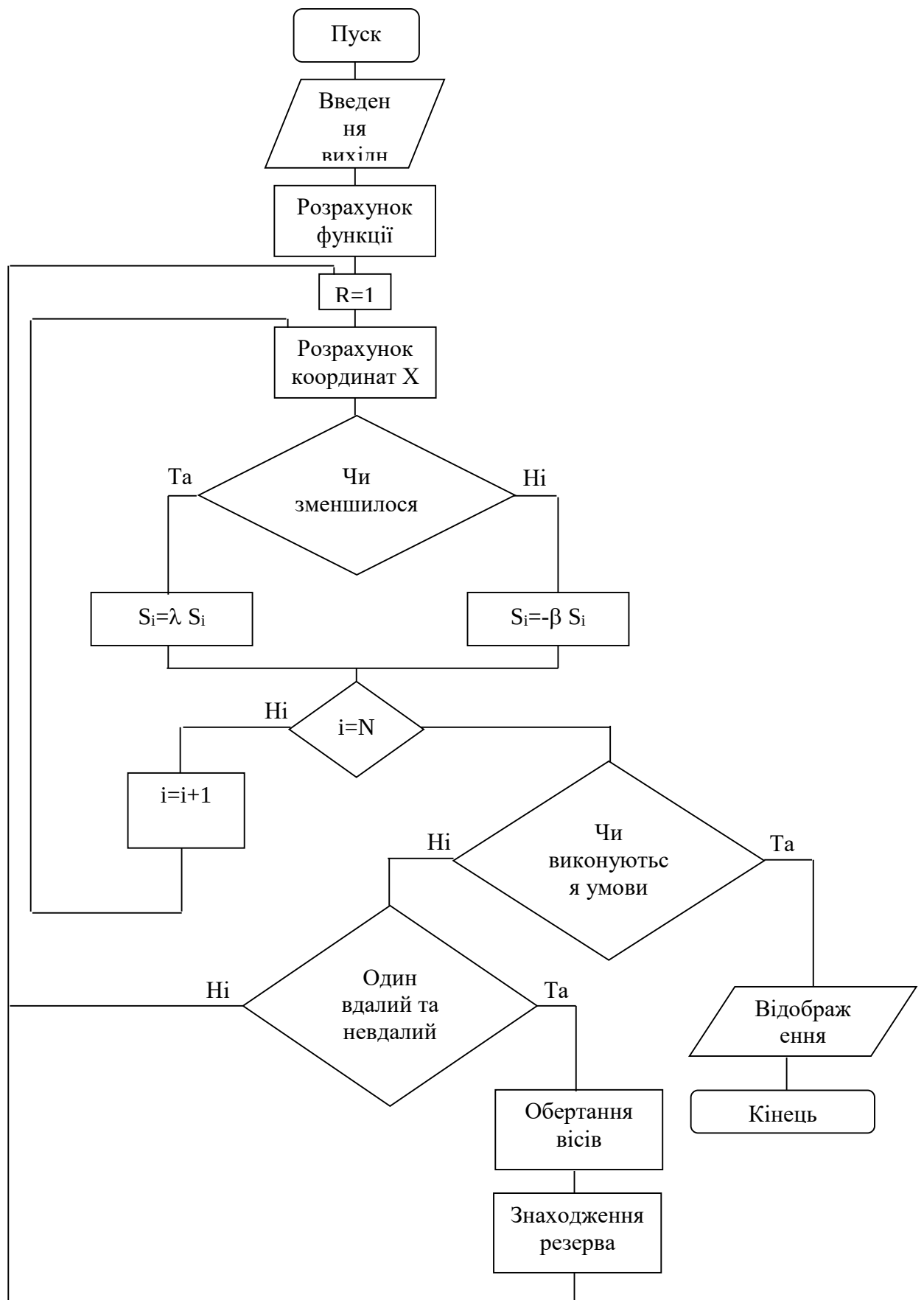


Рис. 2.13. Схема алгоритма Розенброка

Девіс , Свенн та Кемпі (ДСК) модифікували пошук Розенброка у напрямках $M_1^{(k)}, \dots, M_n^{(k)}$, шляхом пошуку мінімуму в кожному з напрямків $M_i^{(k)}$. Починаючи з $X_{i-1}^{(k)}$, визначається $S_i^{*(k)}$ в напрямку $M_i^{(k)}$ так , щоб $f(X_{i-1}^{(k)} + S_i^{*(k)} M_i^{(k)})$ оберталась у мінімум. Потім приймається $X_i^{(k)} = X_{i-1}^{(k)} + S_i^{*(k)} M_i^{(k)}$. Цей пошук послідовно повторюється, завжди починаючи з попередньої точки , поки не будуть знайдені усі $X_i, i = 1, \dots, n$. Девіс , Свенн та Кемпі визначили $S_i^{*(k)}$ за допомогою ефективних алгоритмів одномірного лінійного пошуку.

Після завершення К-го етапу або за допомогою оригінального методу Розенброку, або його модифікації з використанням ДСК у точці $X_0^{(k+1)} = X_n^{(k)}$ визначаються вектори нових напрямків пошуку. Ортогональні напрямки пошуку обертаються по відношенню до попереднього напрямку так, що вони виявляються витягнутими уздовж байраку (або хребта), таким чином виключається взаємодія змінних. Вектори результуючого переміщення $A_1, \dots, A_n$ визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} A_1^{(k)} &= d_1^{(k)} M_1^{(k)} + d_2^{(k)} M_2^{(k)} + \dots + d_n^{(k)} M_n^{(k)}; \\ A_2^{(k)} &= d_2^{(k)} M_2^{(k)} + \dots + d_n^{(k)} M_n^{(k)}; \\ &\dots\dots\dots \\ A_n^{(k)} &= d_n^{(k)} M_n^{(k)}; \end{aligned} \quad (2.40)$$

$(d_i^{(k)})$ являє собою алгебраїчну суму усіх успішних кроків (сумарне переміщення) у напрямку $M_i^{(k)}$ на K -м етапі; в випадку методу ДСК має право рівність $d_i^{(k)} = S_i^{*(k)}$.

Таким чином, $A_1^{(k)}$ являє собою повне переміщення з К-го етапу на (К+1)-й етап, $A_2^{(k)}$ -повне переміщення, але без обліку переміщення, зробленого вчасно пошуку у напрямку $M_1^{(k)}$ і т.д.

В обох методах нові напрямки визначаються наступним чином. Перший одиничний вектор $\widehat{M}_1^{(k+1)}$ з нового набіру напрямків на $(K+1)$ -м етапі спрямовують так, щоб він співпав з напрямком результуючого переміщення на попереднім етапі $A_1^{(k)}$. Решта напрямків пошуку будуються як взаємно ортогональні до $A_1^{(k)}$, одиничні вектори (ортонормовані вектори) за допомогою методу Грама-Шмідта. Таким чином, набір ортонормованих векторів $\widehat{M}_1^{(k+1)}, \dots, \widehat{M}_n^{(k+1)}$ на $(K+1)$ -м етапі обчислюється за допомогою наступних співвідношень:

[illegible]

де $\|D_i^{(k)}\|$ - норма D_i . Також процедура пошуку, котра проводилась на К-м етапі, повторюється потім на (К+1)-м етапі, починаючи з точки $X_0^{(k+1)} = X_n^{(k)}$.

Метод Розенброка не забезпечує автоматичне закінчення пошуку після того, як буде знайдено екстремум $f(X)$. Пошук або проводиться на визначеному числі етапів, або закінчується, як тільки величина A_1 ставатиме меншою визначеного значення на кількох послідовних етапах. На рис. 2.13 представлена схема алгоритма Розенброка.

Алгоритм складається з наступного:

- 1) Задається початкова точка та крок $S_i (i = 1, 2, \dots, N)$ пошуку; оцінюється значення функції, що оптимізується;
- 2) Виконується крок S_1 уздовж осі X_1 та обчислюється значення функції. Якщо величина $f(X)$ зменшилась, пошуковий рух признається вдалим та крок S_1 збільшується в α раз ($\alpha \geq 1$). Якщо значення функції збільшилось, напрямок пошуку рахується невдалим та пошук продовжується в протилежному напрямку зі зменшенням за допомогою фактора β ($0 < \beta \leq 1$) кроком;
- 3) Аналогічна процедура здійснюється в відношенні інших незалежних змінних $i = 2, 3, \dots, N$ до тих пір, поки за всіма змінними не буде досягнуто тимчасовий оптимум;
- 4) Потім здійснюється обернення вісей координат за наступним правилом:

$$M_{i,j}^{(k+1)} = \frac{D_{i,j}^{(k)}}{\left[\sum_{l=1}^N (D_{l,j}^{(k)})^2 \right]^{1/2}},$$

де $D_{i,1}^{(k)} = A_{i,1}^{(k)}$;

$$D_{i,j}^{(k)} = A_{i,j}^{(k)} - \sum_{l=1}^{j-1} \left[\sum_{n=1}^j M_{n,l}^{(k+1)} \cdot A_{i,j}^{(k)} \cdot M_{i,l}^{(k+1)} \right], j = 2, 3, \dots, N,$$

$$A_{i,j}^{(k)} = \sum_{l=j}^N d_l^{(k)} \cdot M_{i,l}^{(k)}.$$

Тут k - номер ітерації;

d_i – сумарна відстань в i - м напрямку, на котру були зсунені вісі до їх останнього обернення;

d_i – $M_{i,j}$ - елементи вектору напрямків;

- 5) Пошук продовжується аналогічно попередньому в кожному з $i (i = 1, 2, \dots, N)$ напрямків, використовуючи нові координати вісей:

$$X_{Hi}^{(k)} = X_i^{(k)} + S_j^{(k)} \cdot M_{i,j}^{(k)},$$

де $X_{Hi}^{(k)}$ - координата нової вісі X_i ;

- 6) Пошук закінчується при виконанні хоча б однієї з наступних умов: а) досягнуто необхідну точність обчислень значення оптимізуючої функції; б) досягнуто задане число розрахунків функції або обертів вісей координат.

Завдання

1. Наприкінці кожного етапу Розенброка отримано наступні значення при пошуці мінімуму $f(X)$.

2.

Результат		X ₁	X ₂
X ₁	X ₂		
Початок	Початок	3	7
Невдача	Невдача	4	8
Успіх	Успіх	2	8
Успіх	Успіх	1.5	7.5
Невдача	Невдача	-1.5	10.5

а) Які два напрямки пошуку використовувались на цьому етапі?

б) Якими повинні бути два наступних напрямки?

3. Використовуйте пошук Розенброка для з'ясування мінімуму цільової функції

$$f(X) = 3x_1^2 + x_2^2$$

при $\beta=0,5$ і $\alpha=3$, доки подальше покращення не буде неможливим.

4. Знайдіть мінімуми функцій, використовуючи метод Розенброка:

а) $f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$,

б) $f(X) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$,

в) $f(X) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$, $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$,

г) $f(X) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$, $X^{(0)} = [-1, 2 \quad 1]^T$,

Завдання для самостійної роботи

1. Задаючи для параметрів α та β у методі Розенброка різні значення, знайдіть найбільш ефективні з них для випадків квадратичної функції

$$f(X) = 10x_1^2 + 0,1x_2^2$$

Повторіть те ж саме для

$$f(X) = 0,1x_1^2 + 10x_2^2$$

Контрольні запитання

1. У чому різниця між методом Розенброка та методом Хука і Дживса?
2. Як обирають напрямки пошуку на початковому етапі?
3. Що є умовою закінчення етапу?
4. Як обчислюють вектори нових напрямків пошуку?
5. Як модифікували пошук Розенброка Девіс, Свенн та Кемпі?

3. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬ ПОХІДНІ.

3.1 ГРАДІЄНТНІ МЕТОДИ

В розділі 2 розглядалися методи, які дозволяють отримати рішення задачі на основі використання тільки значення цільової функції. Важливість прямих методів безперечна, оскільки в ряді практичних інженерних задач інформація про значення цільової функції являється єдиною надійною інформацією, яку має дослідник. З іншого боку, при використанні навіть найефективніших прямих методів для отримання рішення інколи потрібна надзвичайно велика кількість обчислень значень функції. Ця обставина призводить до необхідності розглядати методи, які ґрунтуються на використанні градієнту цільової функції і ґрунтуються на ітераційній процедурі, яка реалізується в відповідності з формулою

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X^{(k)} = X^{(k)} + \lambda^{(k)} S^{(k)}, \quad (3.1)$$

де $X^{(k)}$ - поточне наближення до розв'язку X^* ; $\Delta X^{(k)}$ - вектор переходу з точки $X^{(k)}$ в точку $X^{(k+1)}$; $\lambda^{(k)}$ - параметр, який характеризує довжину кроку; $S^{(k)}$ - напрямок пошуку в N - мірному просторі керуємих змінних X . Спосіб визначення значень S і λ на кожній ітерації пов'язаний з особливостями методу, який застосовується. Звичайно значення $\lambda^{(k)}$ вибирається шляхом розв'язку задачі мінімізації $f(X)$ в напрямку $S^{(k)}$, тому при реалізації вивчених методів необхідно використовувати ефективні алгоритми одномірної мінімізації.

3.1.1 МЕТОД РЕЛАКСАЦІЇ

Алгоритм методу полягає в знаходженні осьового напрямку, уздовж якого функція цілі зменшується найбільш суттєво. Для цього в початковій точці пошуку визначаються похідні оптимізуємої функції за всіма незалежними змінними. Осьовому напрямку з найшвидшим зменшенням цільової функції, очевидно, відповідає найбільша за модулем похідна. Якщо знак похідної від'ємний, то цільова функція зменшується в напрямку осі, якщо - додатний, то в зворотньому напрямку. В напрямі зменшення функції проводять кроки до тих пір, поки не буде отримано мінімальне значення за обраним напрямком в відповідності з формулою

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda^{(k)} \operatorname{sgn} \frac{\partial f(X^{(p)})}{\partial X}, \quad (3.2)$$

де $X^{(p)}$ - вектор точки, в якій останній раз проводились обчислення похідних цільової функції.

Тоді знов визначаються похідні по всім напрямкам за виключенням тієї, по якій здійснюється спуск і знов знаходиться осьовий напрямок найшвидшого зменшення функції цілі, проводяться подальші кроки. Графік руху від початкового стану до оптимуму показаний на рис. 3.1.

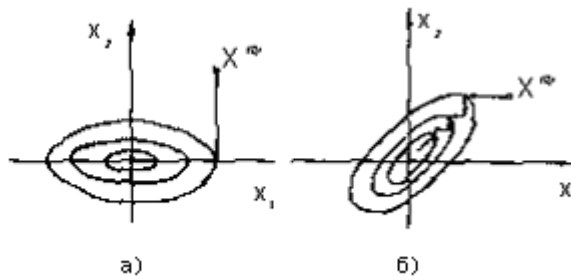


Рис. 3.1. Залежність часу пошуку оптимуму методом релаксації від орієнтації системи координат.

Суттєвою особливістю методу релаксації є залежність часу пошуку від орієнтації системи координат. Якщо в випадку (а) для досягнення мінімуму цільової функції необхідно тільки два цикла руху вздовж осьового напрямку, то для випадку (б) число таких циклів суттєво збільшується. Якщо у цільовій функції є "байраки", напрямки яких не співпадає з осьовими, тоді пошук призупиняється в будь-якій точці дна "байраку".

Швидкість руху до мінімуму залежить від того, на скільки вдало підібрано крок $\lambda^{(k)}$ змін незалежних змінних, який повинен зменшуватись при наближенні до точки мінімуму. Коли величина кроку $\lambda^{(k)}$ стане меншою від заданої точності визначення мінімуму ε в осьовому напрямку, пошук мінімуму можна закінчити.

Пошукова процедура методу релаксації наступна.

КРОК 1. Задати $X^{(0)}$ - початкове наближення до точки мінімуму X^* , H - початкове значення кроку, ε - параметр сходимості.

КРОК 2. Визначити $f(X^{(0)})$.

КРОК 3. Здійснити дослідницький пошук, знайти напрямки, в якому функція цілі найбільше зменшується.

КРОК 4. Перевірка знаходження осьового напрямку. Так - перейти до кроку 5. Ні - перейти до кроку 7.

КРОК 5. Провести пошук в осьовому напрямку.

КРОК 6. Перейти до кроку 3, використовуючи якості базової точки, знайдену на кроці 5.

КРОК 7. Перевірка на закінчення пошуку. Чи виконується нерівність $H < \varepsilon$? Так - закінчити пошук. Ні - зменшити розмір кроку по формулі $H = H/K$. Перейти до кроку 3.

Завдання

1. Мінімізувати наступні функції двох незалежних змінних методом релаксації:

$$a) f(X) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos 360 \left[(2X_1 - 1)^2 + (2X_2 - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \left[1 - \frac{(X_2 - 3X_1)^2}{8} \right];$$

$$б) f(X) = X_2 + \sin X_1;$$

$$в) f(X) = -(X_2 - X_1)^4 + (1 - X_1)^2;$$

$$г) f(X) = X_1^2 + X_1 - X_2^2 + X_2 - 4;$$

$$д) f(X) = \exp \left[-(X_1 - 1)^2 \right] - \frac{(X_2 - 0.5)^2}{0.132};$$

2. Мінімізувати наступні функції методом релаксації:

$$a) f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2;$$

$$б) f(X) = 4(X_1 - 5)^2 + (X_2 - 6)^2;$$

$$в) f(X) = 8X_1^2 + 4X_1X_2 + 5X_2^2;$$

$$г) f(X) = 2X_1^3 + 4X_1X_2^3 - 10X_1X_2 + X_2^2.$$

Завдання для самостійної роботи

В задачі, зв'язаній з проблемою прийняття рішення, бажано мінімізувати очікуваний ризик, який визначається наступним чином:

$$\mathcal{E}\{\text{ризик}\} = (1 - p)C_1[1 - F(b)] + pC_2\Theta\left[\frac{b}{2} + \frac{2\pi}{4}\right]F\left(\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\right),$$

$$\text{де } F(b) = \int_{-\infty}^b e^{-u^2/2} du; C_1 = 1.25 \cdot 10^5; C_2 = 15; \Theta = 2000; p = 0.25.$$

Знайти мінімальний очікуваний ризик і значення b .

Контрольні запитання

1. У чому суть методу релаксації?
2. Чому квадратичні функції використовуються як основа для побудови алгоритмів нелінійного програмування?

3.1.2 МЕТОД ГРАДІЄНТА

На відміну від методу релаксації в простому градієнтному методі кроки здійснюються у напрямку найшвидшого зменшення цільової функції, що прискорює процес пошуку.

Градієнт цільової функції $f(X)$ в будь-якій точці X є вектор у напрямку найбільшого локального збільшення $f(X)$. Отже потрібно рухатись в напрямку, протилежному градієнту $f(X)$, оскільки від'ємний градієнт $f(X)$ в точці $X^{(k)}$ направлений в бік найбільшого зменшення $f(X)$ по всім компонентам X і ортогонален лінії рівня $f(X)$ в точці $X^{(k)}$. Напрямок, протилежний нормованому (одичному) градієнту $f(X)$, який визначається в точці $X^{(k)}$ за формулою

$$S^{(k)} = \frac{\nabla f(X^{(k)})}{\|\nabla f(X^{(k)})\|}, \quad (3.3)$$

де $\nabla f(X^{(k)})$ - вектор - стовпець градієнту,

$$\nabla f(X^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_n} \end{pmatrix};$$

$\|\nabla f(X^{(k)})\|$ – довжина вектору,

$$\|\nabla f(X^{(k)})\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_n}\right)^2}.$$

В основі простого градієнтного методу лежить формула переходу:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{\lambda^{(k)} \nabla f(X^{(k)})}{\|\nabla f(X^{(k)})\|} = X^{(k)} - \lambda^* \nabla f(X^{(k)}). \quad (3.4)$$

Від’ємний градієнт дає тільки напрям оптимізації, але не довжину кроку. Задача вибору стратегії зміни довжини кроку в градієнтному пошуку більш важлива, ніж в методі релаксації. Це пояснюється тим, що після кожного кроку тут визначаються похідні цільової функції, розрахунок яких зв’язаний з обчисленням значень цільової функції. Якщо, з одного боку, розмір кроку надто малий, то рух до оптимуму буде довгим через необхідність розрахунку цільової функції в багатьох точках. З іншого боку, якщо крок вибрано надто великим, в районі оптимуму можуть виникнути пошуки, які або не згасають, або згасають надто повільно. Характер пошуку оптимуму при малій і великій довжині кроку показано на рис. 3.2.

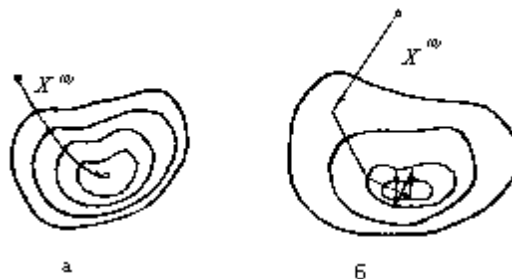


Рис. 3.2. Характер руху до оптимуму в методі градієнта з малою а) і великою б) довжиною кроку

В точці мінімуму всі складові вектору градієнту дорівнюють нулю. Тип стаціонарної точки може бути перевірений шляхом дослідження матриці Гессе (якщо її можливо

отримати) цільової функції, взятої в данній стаціонарній точці. Якщо ця матриця не являється визначеною, тоді стаціонарна точка - сідлова.

В якості критерія закінчення послідовної процедури під час руху в напрямку найшвидшого спуску застосовуються різні правила, які ґрунтуються на значенні $f(X)$ і значеннях $X, \lambda, \nabla f(X)$. Схема алгоритму метода зображена на рис. 6.3. Відмітимо, що робота алгоритму закінчується, коли модуль градієнта або модуль вектора ΔX стає достатньо малим.

Якщо нелінійна цільова функція надто складна, щоб її можливо було продиференціювати аналітично, тоді складові градієнту, які є частинними похідними за оптимізованими змінними, апроксимуються різницевиими співвідношеннями:

де Δ - невелике зміщення у напрямку X_i . Цю формулу часто називають наближенням січної. На деякій відстані від мінімуму різницева апроксимація похідних цілком прийнятна, однак поблизу мінімуму вона недостатньо задовільна. Наведемо алгоритм пошуку мінімуму методом градієнту.

КРОК 1. Задати $X^{(0)}$ - початкове наближення до точки мінімуму X^* ; H - початкове значення кроку, ε - параметр збіжності.

КРОК 2. Визначити $f(X^{(0)})$.

КРОК 3. Визначити компоненти $\nabla f(X^{(k)})$.

КРОК 4. Покласти $X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda^{(k)} \nabla f(X^{(k)})$.

КРОК 5. Чи виконуються нерівності $f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)})$? Так - перейти до кроку 3. Ні - перейти до кроку 6.

КРОК 6. Повернутись до попередньої вдалої точки $X^{(k)}$.

КРОК 7. Перевірка на відхилення пошуку. Чи виконується нерівність $H < \varepsilon$? Так - припинити пошук. Ні - зменшити розмір кроку за формулою $H = H/K$. Перейти до кроку 3.

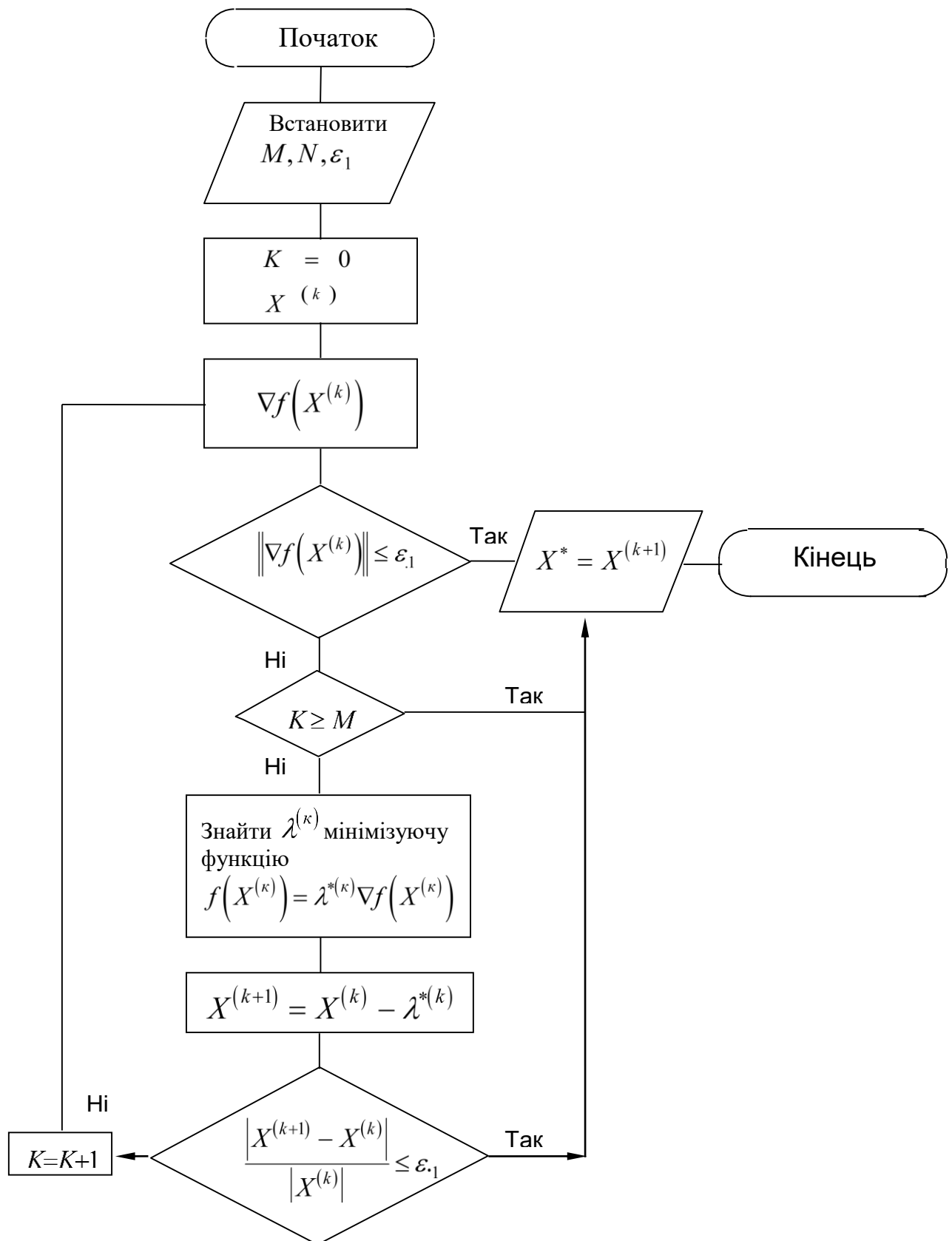


Рис. 3.3. Схема алгоритму градієнтного методу

Метод має недоліки: по-перше, виникає необхідність вибору підходящого значення λ ; по-друге, методу притаманна повільна збіжність в точці мінімуму внаслідок малих Δf навколо цієї точки; по-третє, при використанні методу можна знайти тільки локальний мінімум цільової функції.

Завдання

1. Мінімізувати наступні функції двох незалежних змінних методом градієнту.

$$\text{а) } f(X) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos 360 \left[(2x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \left[1 - \frac{(x_2 - 3x_1)^2}{8} \right];$$

$$\text{б) } f(X) = x_2 + \sin x_1;$$

$$\text{в) } f(X) = -(x_2 - x_1)^4 + (1 - x_1)^2;$$

$$\text{г) } f(X) = x_1^2 + x_1 - x_2^2 + x_2 - 4;$$

$$\text{д) } f(X) = \exp[-(x_1 - 1)^2] - \frac{(x_2^2 - 0.5)^2}{0.132};$$

2. Мінімізувати наступні функції методом градієнту:

$$\text{а) } f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2;$$

$$\text{б) } f(X) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2;$$

$$\text{в) } f(X) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2;$$

$$\text{г) } f(X) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^3 - 10x_1x_2 + x_2^2.$$

Завдання для самостійної роботи

Виконати один цикл пошуку максимуму функції

$f(X) = x_1 + x_2 - (x_1x_2)^2 - x_1^2 - 2x_2^2$ з початкової точки $X^{(0)} = [1 \ 0]^T$, використовуючи алгоритм градієнту з постійним кроком $\lambda = 1$. Знайти значення косинусу кута між напрямком градієнту в початковій точці і в точці, яку було знайдено після першого кроку. Оцінити, як потрібно змінювати крок λ в другому циклі алгоритму градієнту з уточненням кроку.

Контрольні запитання

1. В який локальний оптимум приведе пошук методом градієнту, якщо функція мультимодальна?

2. Як вплине помилка в визначенні однієї із складових градієнту на його значення і напрямки?

3. Як впливає масштабування змінних на збіжність методу градієнту і при якій формі ліній рівня можна отримати швидку збіжність?

3.1.3 МЕТОД НАЙШВИДШОГО СПУСКУ.

Застосування методу градієнту потребує на кожному кроці визначення значення всіх частинних похідних цільової функції по всім незалежним змінним. Якщо розрахунок одного значення даної функції потребує значного об'єму обчислень, тоді час пошуку оптимуму, особливо при великій кількості незалежних змінних, може бути великим.

Метод релаксації має переваги, тому-що під час спускання вздовж вибраного осевого напрямку не потребує обчислення похідних. Однак рух здійснюється не в оптимальному напрямку, оскільки градієнт в загальному випадку не співпадає з осевим напрямком.

Поєднання методів релаксації і градієнту дає метод найшвидшого спуску, який заключається в наступному. Після того як в початковій точці знайдено градієнт цільової функції і тим самим визначено напрям її найшвидшого зменшення, в даному напрямку робиться крок спуску. Якщо значення функції в результаті цього кроку зменшилось, тоді робиться наступний крок в тому ж напрямку до тих пір, поки в цьому напрямку не буде знайдено мінімум, після чого обчислюються градієнт і визначається новий напрям найшвидшого зменшення цільової функції.

В порівнянні з методом градієнту метод найшвидшого спуску більш зручний, бо скорочується об'єм обчислень. Крім того, він вигідно відрізняється від методу релаксації тим, що перші кроки після визначення градієнту здійснюються в оптимальному напрямку.

При визначенні розміру кроку застосовують два загальних методи. В першому методі при переході з точки $X^{(k)}$ в точку $X^{(k+1)}$ цільова функція мінімізується за кроком λ , в другому методі довжина кроку λ вибирається фіксованою або змінюється від кроку до кроку. Функцію $f(x)$ можна мінімізувати за допомогою одного з методів одномірного чисельного пошуку (наприклад, метод Фібоначчі або методу квадратичної апроксимації Коггінса). Якщо в методі обирається фіксоване значення скаляра λ або ця величина змінна, то вона повинна контролюватись, щоб уникнути як різкого росту $f(X)$, так і надмірної кількості кроків. Важливою рисою методу найшвидшого спуску є те, що кожен новий напрямок руху до оптимуму ортогональний до попереднього пошуку $S^{(k)}$. Метод найшвидшого спуску дозволяє суттєво зменшити значення цільової функції, рухаючись з точок, які розташовані на великій відстані від точки мінімуму і тому часто використовується при реалізації градієнтних методів в якості початкової процедури. Наведемо алгоритм пошуку мінімуму методом найшвидшого спуску.

Крок 1. Задати $X^{(0)}$ - початкове приближення до точки мінімуму X^* ; N - початкове значення кроку; K - кратність зменшення кроку; ε - параметр збіжності.

Крок 2. Обчислити $f(X^{(0)})$.

Крок 3. Обчислити компоненти $\nabla f(X^{(k)})$.

Крок 4. Покласти $X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda^{*(k)} \nabla f(X^{(k)})$.

Крок 5. Чи виконується нерівність $f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)})$? Так - перейти до кроку 4. Ні - перейти до кроку 6.

Крок 6. Повернутися до попередньої вдалої точки $X^{(k)}$.

Крок 7. Перевіряється нерівність $f(X^{(k)}) < f(X^{(0)})$? Так - перейти до кроку 3. Ні - перейти до кроку 8.

Крок 8. Перевірка закінчення пошуку. Чи виконується нерівність $N < \varepsilon$? Так - припинити пошук. Ні - зменшити розмір кроку за формулою $N = \frac{N}{K}$. Перейти до кроку 3.

Завдання

1. Мінімізувати наступні функції двох незалежних змінних методом найшвидшого спуску:

$$e) \quad f(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos 360 \left[(2X_1 - 1)^2 + (2X_2 - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{(X_2 - 3X_1)^2}{8} \right] \right\}$$

2. Мінімізувати наступні функції методом найшвидшого спуску:

$$\text{à)} \quad f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2;$$

$$\text{á)} \quad f(X) = 4(X_1 - 5)^2 + (X_2 - 6)^2;$$

$$\text{â)} \quad f(X) = 8X_1^2 + 4X_1X_2 + 5X_2^2;$$

$$\text{ã)} \quad f(X) = 2X_1^3 + 4X_1X_2^3 - 10X_1X_2 + X_2^3;$$

Порівняти швидкість збіжності методу зі швидкістю збіжності методів релаксації і градієнту.

Завдання для самостійної роботи

Максимізувати $f(X) = e^{-X_1 - X_2}(2X_1^2 + 3X_2^2)$ методом найшвидшого спуску. В якості початкової вибирається точка $X^{(0)} = [2, 5; 2, 5]$.

Контрольні запитання

1. Якщо визначено напрямок градієнтного пошуку в точці $X^{(k)}$, як треба вибрати розмір кроку, щоб досягти наступної точки $X^{(k+1)}$?
2. Що являється напрямком найшвидшого спуску в точці $X = [1; 1]$ для цільової функції $f(X) = X_1^2 + 2X_2^2$? Провести два кроки оптимізації.
3. Довести, чи являється метод найшвидшого спуску методом, який використовує спряжені напрямки при мінімізації квадратичної функції з додатньо визначеною матрицею Гессе.

3.2 МЕТОД ДРУГИХ ПОХІДНИХ. МЕТОД НЬЮТОНА

Напрямок пошуку, який відповідає найшвидшому спуску, інтерпретується як наслідок лінійної апроксимації цільової функції. Для визначення напрямку пошуку необхідно обчислити значення функції і її перших похідних. Однак рух в напрямку, протилежному градієнту, приводить в точку мінімуму лише у тому випадку, коли лінії рівня функції $f(X)$ являють собою кола. Для побудови більш загальної стратегії пошуку потрібно застосувати інформацію про другі похідні цільової функції. Квадратичну апроксимацію цільової функції можна отримати, відкидаючи в ряді Тейлора члени третього і більш високих порядків:

$$f(X) = f(X^{(ê)}) + \nabla f(X^{(ê)}) \Delta X^{(ê)} + \frac{1}{2} (\Delta X^{(ê)})^T \nabla^2 f(X^{(ê)}) \Delta X^{(ê)} \quad (3.5)$$

де $\nabla f(X^{(ê)})$ - вектор-строка градієнту; $\nabla^2 f(X^{(ê)})$ - матриця Гессе $f(X)$, $H(X)$, яка представляє собою квадратичну матрицю других частинних похідних $f(X)$, взятих в точці $X^{(k)}$:

$$\nabla^2 f(X^{(ê)}) = H(X^{(ê)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(X^{(ê)})}{\partial X_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^{(ê)})}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 f(X^{(ê)})}{\partial X_n \partial X_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^{(ê)})}{\partial X_n^2} \end{vmatrix}.$$

Мінімум функції $f(X)$ в напрямку $\Delta X^{(k)}$ визначається диференціюванням $f(X)$ по кожному із компонентів ΔX і прирівнюванням до нуля отриманих виразів. Останнє призводить до

$$\Delta X^{(ê)} = -[\nabla^2 f(X^{(ê)})]^{-1} \nabla f(X^{(ê)}) \quad (3.6)$$

де $[\nabla^2 f(X^{(ê)})]^{-1}$ - матриця, обернена до матриці Гессе $H(X^{(k)})$.

Застосування схеми квадратичної апроксимації призводить до реалізації оптимізаційного методу Ньютона за формулою

$$X^{(b+1)} = X^{(b)} - [\nabla^2 f(X^{(b)})]^{-1} \nabla f(X^{(b)}) \quad (3.7)$$

Якщо $f(X)$ - квадратична функція, то для досягнення мінімуму $f(X)$ достатньо тільки одного кроку. Але у випадку загальної нелінійної цільової функції мінімуму $f(X)$ неможливо досягнути за один крок, тому рівняння (3.7) шляхом введення спеціального параметру величини кроку λ приводить до виду

$$X^{(h+1)} = X^{(h)} - \lambda^{(h)} \frac{[\nabla^2 f(X^{(h)})]^{-1} [\nabla f(X^{(h)})]}{\|[\nabla^2 f(X^{(h)})]^{-1} [\nabla f(X^{(h)})]\|} \quad (3.8)$$

де $\|[\nabla^2 f(X^{(h)})]^{-1} [\nabla f(X^{(h)})]\|$ - довжина вектору, яка дорівнює квадратному кореню добутку квадратів складових вектору.

Співвідношення $\frac{\lambda^{(h)}}{\|[\nabla^2 f(X^{(h)})]^{-1} [\nabla f(X^{(h)})]\|}$ - просто деякий скаляр $\lambda^{*(k)}$, тому рівняння (6.8) записують наступним чином:

$$X^{(h+1)} = X^{(h)} - \lambda^{*(h)} H^{-1}(X^{(h)}) \nabla f(X^{(h)}) \quad (3.9)$$

де $S^{(h)} = H^{-1}(X^{(h)}) \nabla f(X^{(h)})$ - вектор напрямку пошуків.

Критерієм, який гарантує збіжність методу Ньютона при припущенні, що функція $f(X)$ двічі диференційована, є те, що матриця, обернена матриці Гессе цільової функції, повинна бути додатньо визначеною:

$$[\nabla^2 f(X^{(k)})]^{-1} = H^{-1}(X^{(k)}) > 0 \quad (3.10)$$

Якщо в деякій точці $\nabla^2 f(X^{(k)})^{-1}$ від'ємно визначена, то вказаний напрямок є напрямком підйому. Метод Ньютона має переваги, які містяться в квадратичній збіжності навколо мінімуму цільової функції (якщо $H(X) > 0$ і цільову функцію можна достатньо добре апроксимувати квадратичною функцією), тобто саме там, де особливо проявляються слабкі сторони методів найшвидшого спуску. Навпаки, в області, далекій від мінімуму, методи найшвидшого спуску можуть виявитись кращими. Обернена матриця Гессе $H^{-1}(X^{(k)})$ може апроксимуватись на кожних n кроках проектуємою матрицею $R^{(k)}$, так що в сутності здійснюється (приблизно) пошук Ньютона. Приведемо основні кроки алгоритму методу проєкцій.

Крок 1. Почати в точці $X^{(0)}$ і встановити проєктуючу матрицю $R^{(0)}=1$.

Крок 2. Для K -го кроку проєктуюча матриця визначається за формулою:

$$R^{(k+1)} = R^{(k)} + \frac{(\Delta X^{(k)} - R^{(k)} \Delta g^{(k)})^T (\eta^{(k)} \Delta g^{(k)})^T}{(\Delta g^{(k)})^T \eta^{(k)} (\Delta g^{(k)})},$$

де $\Delta g^{(k)} = \nabla f(X^{(k+1)}) - \nabla f(X^{(k)})$.

Крок 3. Якщо $R^{(k)} \Delta f(X^{(k)}) \neq 0$, то встановити $S^{(k)} = -R^{(k)} \nabla f(X^{(k)})$ і мінімізувати $f(X)$ в напрямку $S^{(k)}$; точка мінімуму - $X^{(k+1)}$. Повторити крок 2. Після того як пройдено n напрямку пошуку, почати знову з кроку 1 при $X^{(0)}=X^{(n)}$. Якщо $R^{(k)} \nabla f(X^{(k)}) = 0$ і $\nabla f(X^{(k)}) = 0$, то закінчити пошук. Якщо $R^{(k)} \nabla f(X^{(k)}) = 0$, а $\nabla f(X^{(k)}) \neq 0$, то почати з кроку 1, встановивши $X^{(0)}=X^{(k)}$.

Приклад 3.1

Розглядається функція Розенброка $f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ і початкова точка

$X^{(0)} = [-0,5 \quad 0,5]^T$, $f(X^{(0)}) = 8,5$. Мінімум функції відповідає точці $X = [1 \quad 1]^T$.

Визначити напрямки пошуку за допомогою методу найшвидшого спуску і метода Ньютона.

Метод найшвидшого спуску

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} -400(x_2 - x_1^2)x_1 - 2x_1 \\ 200(x_2 - x_1^2)^2 \end{bmatrix}; \quad \nabla f(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 47 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0,685 \\ 0,729 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 - 0,685\lambda \\ 0,5 - 0,729\lambda \end{bmatrix}$$

Звідси

$$f(X^{(k+1)}) = f(\lambda) = 100[0,5 - 0,729\lambda - (0,5 + 0,685\lambda)^2]^2 + (1,5 + 0,685\lambda)^2$$

Мінімум $f(\lambda)$ по λ досягається в точці $\lambda=0,164$.

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -0,612 & 0,381 \end{bmatrix}^T \quad f(X) = 2,6.$$

Потім визначається новий вектор $S^{(k+1)}$

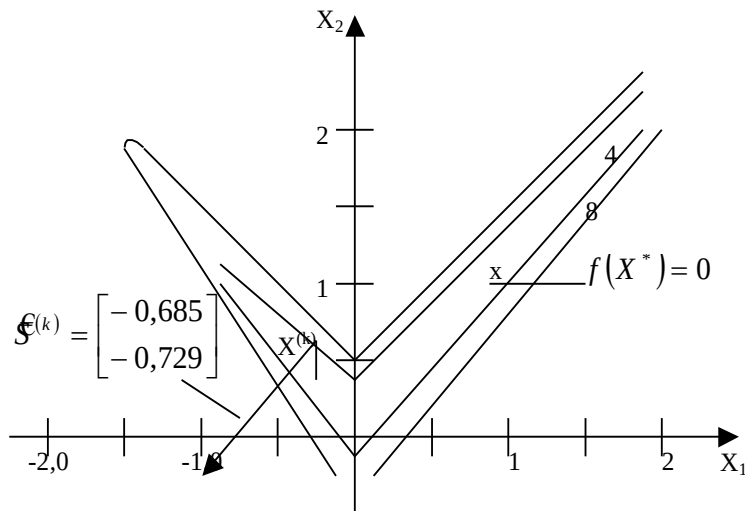


Рис. 3.4. Напрямки пошуку методами найшвидшого спуску і Ньютона

Метод Ньютона

$$\nabla^2 f(X^{(k)}) = \begin{bmatrix} (-400X_2 + 1200X_1^2 + 2) & (-400X_1) \\ (-400X_1) & 200 \end{bmatrix}_{X^{(k)}} = \begin{bmatrix} 102 & 200 \\ 200 & 200 \end{bmatrix}$$

$$\Delta X^{(k)} = -[\nabla^2 f(X^{(k)})]^{-1} \nabla f(X^{(k)}) = \frac{1}{98} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0,51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 47 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,03 \\ -0,22 \end{bmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,03 \\ -0,22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,53 \\ 0,28 \end{bmatrix} \quad f(X) = 2,33.$$

Завдання

Мінімізувати методом Ньютона наступні функції:

$$\text{à)} \quad f(X) = (X_1^2 + 12X_1 - 1)^2 + (49X_1^2 + 49X_2^2 + 84X_1 + 232X_2 - 681)^2, \quad X^{(0)} = [1 \quad 1]^T;$$

$$\text{á)} \quad f(X) = 100 \left[X_3 - \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2 \right]^2 + (1 - X_1)^2 + (1 - X_2)^2, \quad X^{(0)} = [1.2 \quad 2 \quad 0]^T;$$

$$\text{â)} \quad f(X) = (X_1^2 + X_2 - 11)^2 + (1 - X_1)^2 + (1 - X_2)^2, \quad X^{(0)} = [1.2 \quad 2 \quad 0]^T;$$

$$\text{ã)} \quad f(X) = (X_1 + 10X_2)^2 + 5(X_3 - X_4)^2 + (X_2 - 2X_3)^4 + 10(X_1 - X_4)^4; \quad X^{(0)} = [3 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T;$$

$$\text{ä)} \quad f(X) = \frac{(X_1 - X_2)^2}{(1 - X_1)^2} [1 - X_1 - X_2(1 - X_1)^5]^2, \quad X^{(0)} = [-1.2 \quad 1]^T.$$

2. На прикладах порівняти методи, які основуються на використанні похідних першого і другого порядку.

Завдання для самостійної роботи

Мінімізувати цільову функцію $f(X) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2$ методом Ньютона, де $U_i = C_i - X_1(1 - X_2^i)$, $C_1 = 1.5$; $C_2 = 2.25$; $C_3 = 2.625$; $X^{(0)} = [2 \quad 0.2]$. Як початкову вибрати точку $X^{(0)} = [2 \quad 0.2]^T$.

Контрольні запитання

1. Розглянути наступні цільові функції:

$$\text{à)} \quad f(X) = 1 + X_1 + X_2 + \frac{4}{X_1} + \frac{9}{X_2};$$

$$\text{á)} \quad f(X) = (X_1 + 5)^2 + (X_2 + 8)^2 + (X_3 + 7)^2 + 2X_1^2X_2^2 + 4X_1^2X_3^2.$$

Чи буде метод Ньютона збігатись для цих функцій?

2. Що можна сказати про збіжність методу Ньютона, виходячи з розгляду матриці Гессе цільової функції?

3. Скільки потрібно буде кроків для досягнення мінімуму цільової функції методом Ньютона.

3.3 МЕТОД СПРЯЖЕНОГО ГРАДІЄНТУ

Метод Ньютона не має високої надійності при визначенні точки мінімуму з віддаленої точки, однак є ефективним у випадках, коли точка $X^{(k)}$ знаходиться поблизу точки мінімуму. Серед методів, які характеризуються високою надійністю при визначенні точки мінімуму X^* з віддаленої точки i , з іншого боку, швидко збігаються в околі мінімуму, можна виділити клас алгоритмів, в основі яких лежить побудова спряжених напрямків. В загальному випадку система n лінійно незалежних напрямків пошуку $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(n-1)}$ зветься спряженою по відношенню до деякої додатньо визначеної (квадратичної) матриці H , якщо

$$(S^{(i)})^T H S^{(j)} = 0, \quad i \neq j \leq n-1 \quad (3.11)$$

Спряженість - поняття, аналогічне ортогональності; дійсно, коли $H=I$, де I - одинична матриця, то у відповідності з рівнянням (6.11) $(S^{(i)})^T S^{(j)} = 0$. Якщо використовуються спряжені напрямки, то будь-яка квадратична функція n змінних, що має мінімум, може бути

мінімізованою за n кроків, по одному в кожному серед спряжених напрямків. В методі спряженого градієнту Флетчера-Рівса будується послідовність напрямків пошуку S , які є лінійними комбінаціями $\nabla f(X^{(\hat{e})})$ - поточного напрямку найшвидшого спуску і $S^{(0)}, \dots, S^{(k-1)}$ - попередніх напрямків пошуку, причому вагові коефіцієнти підбирають так, щоб зробити напрямки пошуку спряженими. Згадані коефіцієнти такі, що для визначення нового напрямку пошуку в точці $X^{(k)}$ використовуються тільки поточний і передостанній градієнти.

Спочатку вибирають початкову точку простору проектування і шляхом обчислення компонент вектору градієнту визначається напрямок найшвидшого спуску. Потім в напрямку найшвидшого спуску ведеться одномірний пошук. Визначивши мінімум у цьому напрямку, визначають новий напрямок, який дещо відрізняється від напрямку вектору градієнту і визначається з відношення

$$S^{(\hat{e}+1)} = -\nabla f(X^{(\hat{e}+1)}) + S^{(\hat{e})} \frac{\nabla^T f(X^{(\hat{e}+1)}) \nabla f(X^{(\hat{e}+1)})}{\nabla^T f(X^{(\hat{e})}) \nabla f(X^{(\hat{e})})} \quad (3.12)$$

Після $(n+1)$ -й ітерації ($k=n$) процедура циклічно повторюється з заміною $X^{(0)}$ на $X^{(n+1)}$. Схема алгоритму методу Флетчера-Рівса показана на рис.3.5.

Перевага цього алгоритму полягає в тому, що він дозволяє використовувати переваги градієнтних методів, які з'являються при дослідженні цільової функції з розривними похідними. Так як $n+1$ напрямків пошуку різняться від напрямків векторів градієнту, то пошук не зависає іна зламі, а йде вздовж лінії, яка поєднує точки зламів лінії рівня, яка, як правило, проходить через точку оптимуму. Крім того, тут потрібна оберненість матриць, програма методу потребує обмеженої пам'яті ЕОМ. Наведений метод застосовується і до неквадратичної функції, так як якщо пошук здійснюється поблизу мінімуму, то можна чекати на досягнення квадратичної збіжності.

Приклад 3.2

Знайти за допомогою методу Флетчера-Рівса точку мінімуму функції

$$f(X) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Крок 1.

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} 8x_1 - 4x_2 + 1 \\ 6x_2 - 4x_1 \end{bmatrix}$$

$$S^{(0)} = -\nabla f(X^{(0)}) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Крок 2. Пошук вздовж напрямку:

$$X^{(1)} = X^{(0)} - \alpha^{(0)} \nabla f(X^{(0)}); \quad \alpha^{(0)} = \frac{1}{8},$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Крок 3. $k=1$

$$S^{(1)} = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$$

Крок 4. Пошук вздовж напрямку:

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \alpha^{(1)} S^{(1)}; \quad \alpha^{(1)} = \frac{1}{4}$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(X^{(2)}) = [0 \quad 6]^T$$

Таким чином $X^{(2)}=X^*$. Рішення отримане у результаті проведення двох одномірних пошуків, оскільки цільова функція квадратична.

Завдання

1. Починаючи з точки $X^{(k)}=[1 \ -2,3]^T$, визначити точку $X^{(k+1)}$ методом спряженого градієнту для наступних цільових функцій:

а) $f(X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$;

б) $f(X) = 2X_1^2 + 2X_1X_2 + 3X_2^3 + X_3$;

в) $f(X) = \exp(X_1^2 + X_2^2 - X_3 - X_1 + 4)$.

2. Мінімізувати за допомогою методу Флетчера-Рівса наступні функції, починаючи з вектора $X^{(0)}=[2 \ -2,5 \ 2 \ -2,5]^T$:

а) $f(X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$;

б) $f(X) = (X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2$;

в) $f(X) = X_1^3 + X_2 + X_3^3 + X_4 + 16X_1^2X_2 + 8X_2^2X_3 + X_3^2X_4 + 2$.

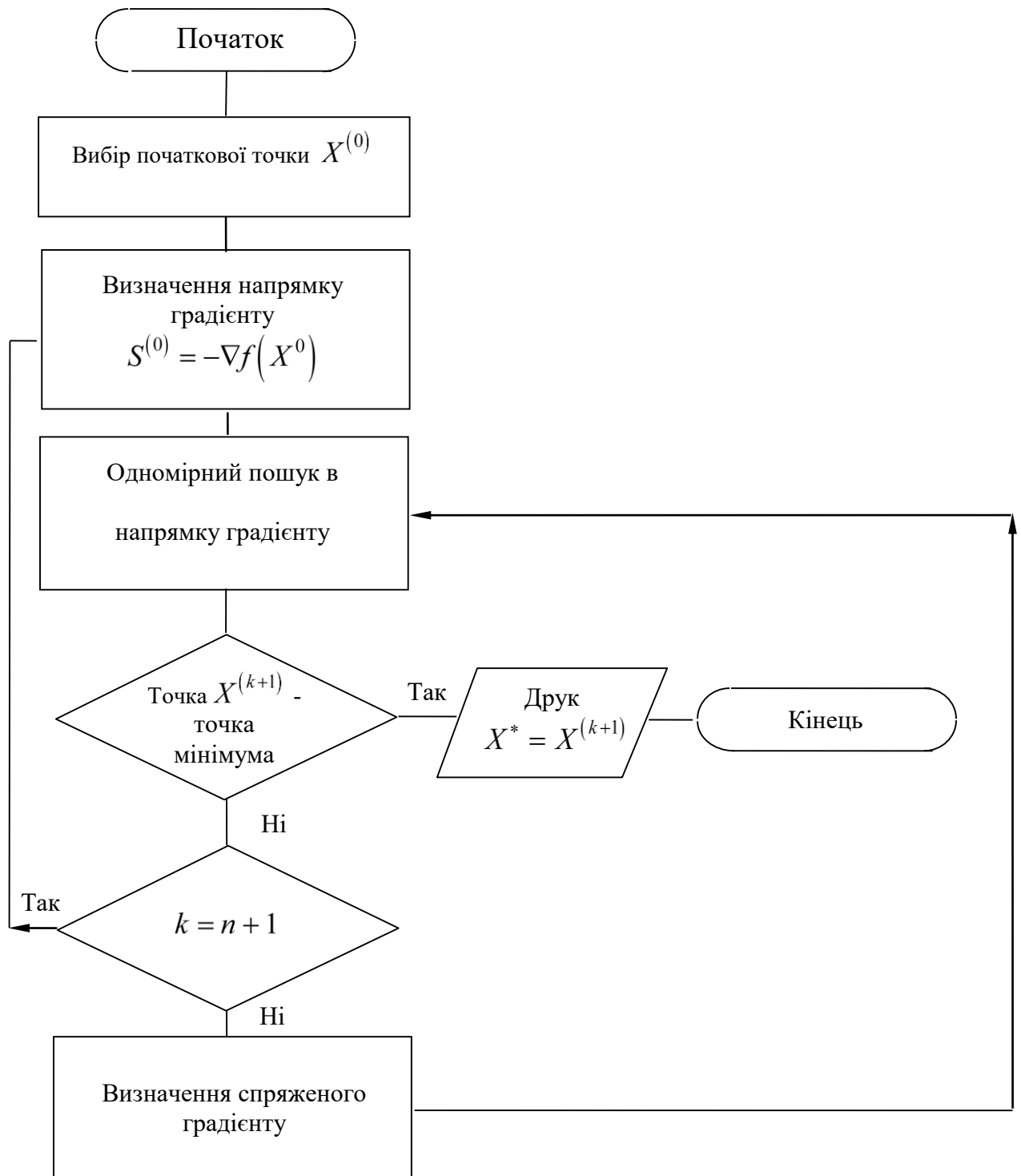


Рис. 3.5. Схема алгоритму методу Флетчера - Рівса

3. Використовуючи метод Флетчера-Рівса з початковою точкою $X^{(0)}=[9 \ -7 \ 11]^T$ мінімізувати функцію $f(X)=3(X_1-1)^2+2(X_2-2)^2+(X_3-2)^2$.

Завдання для самостійної роботи

1. Максимізувати наступну цільову функцію

$$f(X)=X_1^3 \exp[X_2-X_1^2-10(X_1-X_2)^2].$$

Порівняти траєкторії оптимізації в просторі X при використанні методів:

- а) найшвидшого спуску,
- б) Ньютона,
- в) Флетчера-Рівса.

2. Щомісячні витрати, які пов'язані з експлуатацією компресору на газопроводі, визначаються формулою:

$$C = \frac{KQZ}{10^6 Z} \left(\ln \frac{P_1}{P_2} + b \right) + K_1 D^2 \left[\frac{P_1}{2(S-P_1)} + \frac{P_1^2}{4(S+P_1)^2} \right]$$

де C - експлуатаційні витрати грн/рік; Q - кількість накачуваного газу m^3/c ; L - відстань між компресорними станціями, м; P_1, P_2 - тиск відповідно на виході і всасуванні, Па; D -

діаметр трубопроводу, м; K_1, K_2, Z, S, b - константи. Крім того: $Q = K_2 \frac{D^{2.5}(P_1^2 - P_2^2)^{0.54}}{L^{0.54} Z^{0.54}}$

при значеннях $Z=1, K=1370, L=20, b=1,476; K_1=0,081; K_2=1,13; S=100$ визначити P_1 і P_2 , мінімізувати C за допомогою методу Флетчера-Рівса.

Контрольні запитання

- 1. Умова спряженості незалежних напрямків.
- 2. З'ясувати, чи можливо, щоб ортогональний напрямок був спряженим.
- 3. Чи є напрямки $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ортогональними? Спряженими?

3.4 МЕТОДИ ЗМІННОЇ МЕТРИКИ

Існує клас методів, які називаються методами змінної метрики, або квазіньютонівськими, які апроксимують матрицю Гессе або обернену до неї. Квазіньютонівські методи мають лише перші похідні. в більшості цих методів використовують спряжені напрямки. Новий вектор X визначається за вектором попереднього кроку за допомогою рівняння:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda^{(k)} S^{(k)} = X^{(k)} - \lambda^{(k)} \eta(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)}) \quad (3.13)$$

де матриця $\eta(X^{(k)})$ являє собою апроксимацію $H^{-1}(X)$.

При використанні $H^{-1}(X)$ необхідно точно визначити другі похідні $f(X)$ і обернати матрицю $H(X)$, тоді як в методах змінної метрики для обчислення $\eta X^{(k)}$ використовуються різні співвідношення, що не потребують ні того, ні іншого.

Співвідношення, що пов'язують точки $X^{(k+1)}$ і $X^{(k)}$ у випадку квадратичної цільової функції, наступні:

$$\nabla f(X^{(k+1)}) - \nabla f(X^{(k)}) = H(X^{(k)})(X^{(k+1)} - X^{(k)}) \quad (3.14)$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на $H^{-1}(X^{(k)})$, отримаємо:

$$X^{(k+1)} - X^{(k)} = H^{-1}(X^{(k)})[\nabla f(X^{(k+1)}) - \nabla f(X^{(k)})] \quad (3.15)$$

У достатньо великій групі методів $H^{-1}(X^{(k+1)})$ апроксимується за допомогою інформації, яка була отримана на K -му кроці:

$$H^{-1}(X^{(\hat{e}+1)}) \approx \omega \cdot \eta^{(\hat{e}+1)} = \omega(\eta^{(\hat{e})} + \Delta\eta^{(\hat{e})}) \quad (3.16)$$

де ω - масштабний множник, константа, яка звичайно дорівнює одиниці.

Вибір $\Delta\eta^{(k)}$ по суті визначає метод змінної метрики. Для забезпечення збіжності матриця $\omega\eta^{(k)}$ повинна бути додатньо визначеною і задовольняти рівняння (3.15) в тому випадку,

коли вона замінює H^{-1} . На $(k+1)$ кроці відомі значення $X^{(k)}$, $\nabla f(X^{(k)})$, $\nabla f(X^{(k+1)})$ і $\eta^{(k)}$. Потрібно визначити $\eta^{(k+1)}$ так, щоб задовольняти співвідношення

$$\eta^{(\hat{e}+1)} \Delta g^{(\hat{e})} = \frac{1}{\omega} \Delta X^{(\hat{e})} \quad (3.17)$$

Хай $\Delta \eta^{(k)} = \eta^{(k+1)} - \eta^{(k)}$. Тоді рівняння

$$\eta^{(\hat{e})} \Delta g^{(\hat{e})} = \frac{1}{\omega} \Delta X^{(\hat{e})} - \eta^{(\hat{e})} \Delta g^{(\hat{e})} \quad (3.18)$$

Потрібно вирішити відносно $\Delta \eta^{(k)}$:

$$\Delta \eta^{(\hat{e})} \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta \tilde{O} y^T}{y^T \Delta g^{(\hat{e})}} - \frac{\eta^{(\hat{e})} \Delta g^{(\hat{e})} Z^T}{Z^T \Delta g^{(\hat{e})}} \quad (3.19)$$

де y і Z - довільні вектори.

3.4.1 АЛГОРИТМ БРОЙДЕНА

Якщо для $\omega=1$ в рівнянні (3.19) вибирається спеціальна лінійна комбінація двох напрямків $\Delta X^{(k)}$ і $\eta^{(k)} \Delta g^{(k)}$, а саме $y=Z=\Delta X^{(k)} - \eta^{(k)} \Delta g^{(k)}$, то використовується алгоритм Бройдена, в якому $\Delta \eta^{(k)}$ являється

$$\Delta \eta^{(h)} = \frac{[(\Delta X^{(h)}) - \eta^{(h)} (\Delta g^{(h)})] [\Delta X^{(h)} - \eta^{(h)} (\Delta g^{(h)})]^T}{[\Delta X^{(h)} - \eta^{(h)} (\Delta g^{(h)})]^T (\Delta g^{(h)})} \quad (6.20)$$

де $(\Delta X^{(k)}) = X^{(k+1)} - X^{(k)}$; $(\Delta g^{(k)}) = \nabla f(X^{(k+1)}) - \nabla f(X^{(k)})$.

Коли для кожного напрямку пошуку $\lambda^{(k)}$ представляє собою скаляр, що мінімізує $f(X)$ в цьому напрямку, то даний метод дає спряжені напрямки пошуку. У випадку, коли цільова функція не є квадратичною, використання рівняння (6.20) може привести до наступних негативних явищ:

1. Матриця η може перестати бути додатньо визначеною;
2. Обчислюване значення $\Delta \eta^{(k)}$ може стати необмеженим (інколи навіть у випадку квадратичної функції) внаслідок помилок при заокругленні.
3. Якщо $\Delta X^{(k)} = -\lambda^{*(k)} \eta(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)})$ випадково співпадає з напрямком попереднього етапу, тоді матриця $\eta(X^{(k)})$ стає невизначеною.

Завдання

1. Мінімізувати алгоритмом Бройдена наступні цільові функції:

а) $f(X) = 100(X_2 - X_1)^2 + (1 - X_1)^2$, $X^{(0)} = [-0,5 \quad 0,5]^T$;

б) $f(X) = 4(X_1 - 5)^2 + (X_2 - 6)^2$, $X^{(0)} = [8 \quad 9]^T$;

в) $f(X) = X_1^2 + X_2^2 - 4$, $X^{(0)} = [4 \quad 4]^T$.

2. Мінімізувати алгоритмом Бройдена наступні цільові функції:

а) $f(X) = \left\{ 12 + X_1^2 + \frac{1 + X_2^2}{X_1^2} + \frac{X_1^2 X_2^2 + 100}{(X_1 X_4)^4} \right\} \frac{1}{10}$, $X^{(0)} = [0,5 \quad 0,5]^T$;

а) $f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2 + 90(X_4 - X_3^2)^2 + (1 - X_3)^2 + 10,1[(X_2 - 1)^2 + (X_4 - 1)] + 19,8(X_2 - 1)(X_4 - 1)$, $X^{(0)} = [-3 \quad -1 \quad -3 \quad -1]^T$.

Завдання для самостійної роботи

Мінімізувати алгоритмом Бройдена наступні цільові функції:

$$\text{à)} \quad f(X) = X_1^3 \exp[X_2 - X_1^2 - 10(X_1 - X_2)^2];$$

$$\text{á)} \quad f(X) = (0,35 + 0,4X_1 + 0,31X_2)^4 (0,85 - 0,6X_1 + 0,85X_2)^4 \exp[2 - (0,35 - 0,4X_1 + 0,35X_2)^4];$$

$$\text{â)} \quad f(X) = X_1^2 \exp[1 - X_1^2 - 20,25(X_1 - X_2)^2].$$

Контрольні запитання

1. Чому додатня визначеність матриці $\eta^{(k)}$ є необхідною умовою при рішенні задач мінімізації за допомогою методів змінної метрики?
2. Вивести рекурентне рівняння для визначення матриці напрямків за допомогою алгоритму Бroyдена, якщо необхідно максимізувати, а не мінімізувати цільову функцію.
3. Як найпростішим засобом використовувати алгоритм Бroyдена для максимізації, а не для мінімізації?

3.4.2 МЕТОД ДЕВІДОНА-ФЛЕТЧЕРА-ПАУЕЛЛА

Якщо в рівнянні (6.19) береться $y = \Delta X^{(k)}$, $Z = \eta^{(k)} \Delta g^{(k)}$, то матрицю $\eta^{(k+1)}$ визначаємо за допомогою алгоритму Девідона-Флетчера-Пауелла (ДФП):

$$\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)} + A^{(k)} - B^{(k)} = \eta^{(k)} + \frac{(\Delta X^{(k)})(\Delta X^{(k)})^T}{(\Delta X^{(k)})^T (\Delta g^{(k)})} - \frac{\eta^{(k)} (\Delta g^{(k)}) (\Delta g^{(k)})^T (\eta^{(k)})^T}{(\Delta g^{(k)})^T \eta^{(k)} (\Delta g^{(k)})}. \quad (3.21)$$

Початкова матриця η звичайно вибирається у вигляді одиничної матриці $\eta^{(0)} = I$ (але може бути і будь-якою симетричною додатньо визначеною матрицею), так що початковий напрямок мінімізації - напрям найшвидшого спуску. Під час оптимізації має місце поступовий перехід від градієнтного напрямку до ньютонівського; при цьому використовуються перевага кожного з них на відповідному етапі. Рекурентне співвідношення (3.21) на практиці цілком задовольняє, якщо помилка в розрахунку $f(X)$ невелика. Роль матриці $A^{(k)}$ полягає в забезпеченні того, щоб $\eta \rightarrow H^{-1}$, тоді як матриця $B^{(k)}$ забезпечує додатню визначеність на всіх етапах і в межах виключає початкову матрицю $\eta^{(0)}$.

Використаємо формулу (3.21) на кількох етапах, починаючи з $\eta^{(0)}$:

$$\eta^{(1)} = I + A^{(0)} - B^{(0)},$$

$$\eta^{(2)} = \eta^{(1)} + A^{(1)} - B^{(1)} = I + (A^{(0)} + A^{(1)}) - (B^{(0)} + B^{(1)}),$$

.....

$$\eta^{(\hat{e}+1)} = I + \sum_{i=0}^{\hat{e}} A^{(i)} - \sum_{i=0}^{\hat{e}} B^{(i)}$$

У випадку квадратичної функції сума матриць $A^{(i)}$ повинна дорівнювати H^{-1} при $k=n-1$, а сума матриць $B^{(i)}$ - будується так, щоб вона скоротилась з матрицею, яка була обрана в якості початкової матриці $\eta^{(0)}$ (тут - одиничної матриці). Потрібно визначити, що у випадку квадратичної цільової функції в алгоритмі ДФП використовується спряжені напрямки. Щоб кінцевий напрямок $S^{(n-1)}$ був спряжений по відношенню до всіх попередніх напрямків, повинна виконуватись рівність $(X^{(n-1)})^T H S^{(n-1)} = 0$ або при $S^{(n-1)} = -\eta^{(n-1)} \nabla f(X^{(n-1)})$:

$$(X^{(n-1)})^T H \eta^{(n-1)} \nabla f(X^{(n-1)}) = 0 \quad (3.22)$$

У випадку загальної цільової функції ефективність методу ДФП є скоріше наслідком використання спряжених напрямків, чим близькою до апроксимації H^{-1} матрицею η . В деяких задачах неможливо досягнути мінімуму цільової функції за допомогою методів змінної метрики, якщо ступінь точності одномірного пошуку недостатня, тому рекомендується, щоб точність одномірного пошуку була по крайній мірі еквівалентна точності, яка потрібна для закінчення основного алгоритму. Схема алгоритму методу ДФП показана на рис.3.6. .

Метод ДФП протягом ряду років продовжує залишатись найбільш широко застосовуваним при рішенні різноманітних задач. Основним недоліком методів такого типу є необхідність зберігати в пам'яті ЕОМ матрицю η порядку $n \times n$.

Приклад 3.3

За допомогою метода Девідона-Флетчера-Пауелла знайти точку мінімуму функції

$$f(X) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1, \quad X^{(0)} = [0 \ 0]^T$$

Крок 1. Нехай $S^{(0)} = -\nabla f(X^{(0)}) = -[1 \ 0]^T$

Крок 2. Пошук приведе до $X^{(1)} = \left[\frac{1}{8} \ 0 \right]^T$

Крок 3. $k = 1, \quad \eta^{(1)} = \eta^{(0)} + A^{(0)} - B^{(0)}$

$$\eta^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{(0)} - B^{(0)} = \frac{\Delta X^{(0)} (X^{(0)})^T}{(\Delta X^{(0)})^T \Delta g^{(0)}} - \frac{\eta^{(0)} \Delta g^{(0)} \Delta^T g^{(0)} \eta^{(0)}}{\Delta^T g^{(0)} \eta^{(0)} \Delta g^{(0)}}$$

$$\Delta X^{(0)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}^T - [0 \ 0]^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta g^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T - [1 \ 0] = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$A^{(0)} - B^{(0)} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T}$$

$$A^{(0)} - B^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\eta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,325 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \quad S^{(1)} = -\eta^{(1)} \nabla f(X^{(1)}) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}^T$$

Крок 4. Пошук вздовж прямої:

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \lambda^{(1)} S^{(1)}, \lambda^{(1)} = \frac{5}{16}$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}^T - \frac{5}{16} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}^T$$

Завдання

1. Мінімізувати наступні цільові функції методом ДФП:

а) $f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2$, $X^{(0)} = [-0,5 \ 0,5]^T$;

а) $f(X) = 4(X_1 - 5)^2 + (X_2 - 6)^2$, $X^{(0)} = [8 \ 9]^T$;

а) $f(X) = X_1^2 + X_2^2 - 4$, $X^{(0)} = [4 \ 4]^T$.

2. Мінімізувати наступні цільові функції методом ДФП:

а) $f(X) = (X_1 + 10X_2)^2 + 5(X_3 - X_4)^2 + (X_2 - 2X_3)^2 + 10(X_1 - X_4)^4$, $X^{(0)} = [3 \ -10 \ 1]^T$;

а) $f(X) = 3(X_1 - 1)^2 + 2(X_2 - 2)^2 + (X_3 - 3)^2$, $X^{(0)} = [9 \ -7 \ 11]^T$.

Завдання для самостійної роботи

Вивчити вплив ε - параметру збіжності для пошуку вздовж прямої на процедуру розрахунків за методами Флетчера-Рівса, Бройдена, Девідона-Флетчера-Пауелла. Використовуючи кожен з перерахованих методів для рішення задачі мінімізації функції вигляду Вуда

$$f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2 + 90(X_4 - X_3^2)^2 + (1 - X_3)^2 + 10,1[(X_2 - 1)^2 + (X_4 - 1)^2] + 19,8(X_2 - 1)(X_4 - 1), \quad X^{(0)} = [-3 \quad -1 \quad -3 \quad -1]^T$$

при $\varepsilon_2 = \alpha \varepsilon_1$; $\alpha = 0,01; 0,1; 1$ і 10 .

Контрольні запитання

1. Чи використовуються в алгоритмі ДФП спряжені напрямки?
2. Роль матриць $A^{(k)}$ і $B^{(k)}$ в рекурентному відношенні для обчислення матриці $\eta^{(k+1)}$.
3. Що є початковим напрямком мінімізації цільових функцій методом ДФП?

3.4.3 АЛГОРИТМ ПІРСОНА

Пірсон запропонував кілька методів обчислення матриці η , які використовують спряжені напрямки пошуку. Алгоритм Пірсона можна отримати, задаючи різним чином вектори u і Z в рівнянні (3.19).

1. Алгоритм Пірсона №2.

Покладемо в рівнянні (3.19) $u=Z=\Delta X^{(k)}$, а $\omega=1$. Тоді

$$\eta^{(h+1)} = \eta^{(h)} + \frac{(\Delta X^{(h)} - \eta^{(h)} \Delta g^{(h)})(\Delta X^{(h)})^T}{(\Delta X^{(h)})^T (\Delta g^{(h)})}, \quad \eta^{(0)} = R^{(0)},$$

де $R^{(0)}$ - довільна додатньо визначена симетрична матриця.

Якщо через кілька кроків матриця напрямку стає поганою, коливаючись між додатньо і від'ємно визначеною, повтор початку алгоритму через кожні n кроків (тобто прирівняння $\eta^{(n+1)}$ до $R^{(0)}$ після кожних n кроків) допомагає уникнути труднощів такого роду.

2. Алгоритм Пірсона №3.

Покладемо в рівнянні (3.19) $u=Z=\eta^{(k)} \Delta g^{(k)}$, а $\omega=1$. Тоді

$$\eta^{(h+1)} = \eta^{(h)} + \left[(\Delta X^{(h)}) - \eta^{(h)} (\Delta g^{(h)}) \right] \cdot \frac{[\eta^{(h)} (\Delta g^{(h)})]^T}{(\Delta g^{(h)})^T \eta^{(h)} (\Delta g^{(h)})}.$$

Завдання

1. Мінімізувати алгоритмом Пірсона наступні функції:

а) $f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2, \quad X^{(0)} = [-0,5 \quad 0,5]^T;$

б) $f(X) = 4(X_1 - 5)^2 + (X_2 - 6)^2, \quad X^{(0)} = [8 \quad 9]^T;$

в) $f(X) = X_1^2 + X_2^2 - 4, \quad X^{(0)} = [4 \quad 4]^T.$

Порівняти траєкторії оптимізації в просторі X при використанні методів змінної метрики.

2. Мінімізувати наступні цільові функції алгоритмом Пірсона і порівняти їх траєкторії оптимізації в просторі X :

а) $f(X) = 3(X_1 - 4)^2 + 5(X_2 + 3)^2 + 7(2X_3 + 1)^2;$

б) $f(X) = 1 - 2X_1 - 2X_2 - 4X_1X_2 + 10X_1^2 + 2X_2^2;$

в) $f(X) = X_1^4 + X_2^4 + 2X_1^2X_2^2 - 4X + 3;$

г) $f(X) = (X_1^2 + X_2 - 11)^2 + (X_1 + X_2^2 - 7)^2;$

д) $f(X) = X_1^3 + X_2^3 - 3X_1 - 2X_2 + 2.$

Завдання для самостійної роботи

Вивести рекурентне рівняння для визначення матриць напрямків за допомогою алгоритмів Пірсона.

Контрольні запитання

1. Як уникнути труднощів в зв'язку з тим, що матриця напрямків η в процесі пошуку перестає бути додатньо визначеною?

3.5 МЕТОД ГОЛДШТЕЙНА-ПРАЙСА

Замість апроксимації оберненої матриці Гессе $H^{-1}(X^{(k+1)})$, як це робиться в методі Девідона-Флетчера-Пауелла, можна апроксимувати матрицю $H(X^{(k+1)})$, а потім побудувати обернену до неї. В алгоритмі Голдштейна та Прайса для оцінки $H(X^{(k)})$ потрібна лише інформація про $f(X^{(k)})$ та $\nabla f(X^{(k)})$ [5].

Алгоритм мінімізує $f(X)$, якщо вона уявляє собою опуклу цільову функцію, при умові виконання де-яких обмежень. На К-му етапі алгоритм реалізує наступні кроки (величини $0 < \delta < 1/2$ та $\tau > 0$ задаються заздалегідь):

Крок 1. Обчислити в якості апроксимації $\tilde{H}(X^{(k)})$ розмірності $n \times n$, j -й стовпець котрий визначається за формулою

$$\nabla f(X^{(k)} + Q^{(k)} I_j) - \nabla f(X^{(k)}),$$

$$\text{де } Q^{(k)} = \tau \|\varphi(X^{(k-1)})\|, k > 0,$$

$$Q^{(0)} = \tau;$$

I_j – j -й стовпець одиничної матриці I розмірності $n \times n$.

$\varphi(X^{(k)})$ – вектор-стовпець, визначається за формулою

$$\varphi(X^{(k)}) = \begin{cases} -\nabla f(X^{(k)}), \text{ якщо } K = 0, \text{ або } \tilde{H}(X^{(k)}) \text{ невизначена,} \\ \text{або } [\nabla^T f(X^{(k)}) \tilde{H}^{-1}(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)})] \leq 0, \text{ так що} \\ \tilde{H}^{-1} \text{ не є додатньо визначеною;} \\ -H^{-1}(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)}) \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

$\tilde{H}(X^{(k)})$ не обов'язково симетрична матриця і якщо

$$[\nabla^T f(X^{(k)}) \tilde{H}^{-1}(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)})] \leq 0,$$

та запропонований напрямок пошуку $\varphi(X^{(k)})$ та напрямок градієнту $\nabla f(X^{(k)})$

відрізняються більш ніж на 90° . Оскільки пошук проводиться в “мінус”-напрямку, то від'ємний знак при квадратичній формі проводить до компоненти в напрямку додатного градієнта.

Крок 2. Обчислюється

$$\lambda^{(k)} \text{ обирається таким чином, щоб } \delta \leq F(X^{(k)}, 1) \text{ або } \delta \leq F(X^{(k)}),$$

$$\lambda^{(k)} \leq 1 - \delta, \quad \lambda^{(k)} \neq 1.$$

Ці критерії потрібні для того, щоб не допускати кроки пошуку, котрі далеко виходять за область лінійної зміни цільової функції у околі $X^{(k)}$, запропоновану при апроксимації $H(X)$.

Крок 3. Береться $X^{(K+1)} = X^{(k)} + \lambda^{(k)} \varphi(X^{(k)})$.

Крок 4. Процес закінчується, коли $\|\varphi(X^{(k)})\| < E$.

Якщо матриця $\hat{H}(X^{(k)})$ невизначена або не приводить до “напрямку униз”, метод Голдштейна-Прайса зводиться до методу найшвидшого спуску. Параметр τ треба обирати так, щоб матриця $\hat{H}(X^{(k)})$ апроксимувала $H(X^{(k)})$ як можливо ближче. Величина δ обирається так, щоб значення $f(X^{(k)})$, $K=1,2,\dots$ уявляли собою монотонно зменшуючу послідовність; чим ближче значення δ до $1/2$, тим в більшій мірі $f(X^{(k)} + \lambda \varphi(X^{(k)}))$ наближається до свого мінімуму за λ .

Алгоритм Голдштейна та Прайса за своєю ефективністю у відношенні об’єму обчислень $f(X)$ та $\nabla f(X)$ еквівалентним алгоритму Флетчера-Пауелла.

Для випадку рішення задач з погано обраними масштабами змінних метод виявляється менш задовільним, оскільки при цьому фактично здійснюється рух за методом найшвидшого спуску. Для даного алгоритму властиво порівняно мале число кроків одномірного пошуку на кожному новому етапі руху.

В методі Голдштейна-Прайса, як і в методах змінної матрики, можуть іноді зустрічатись від’ємні кроки або ці методи можуть закінчуватись в нестационарній точці. Якщо матриця $\tilde{H}$ робиться майже невизначеною, то напрямки пошуку можуть бути обрані так, як в випадку якби в задачі були погано обрані масштаби змінних, не дивлячись на те, що це не так.

Завдання

1. Мінімізуйте наступні функції методом Голдштейна-Прайса:

а) $f(X) = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 2)^2$, $X^{(0)} = [3 \quad 4]^T$,

б) $f(X) = 3(x_1 + 1)^2 + 6(x_2 - 2)^2$, $X^{(0)} = [0 \quad 0]^T$,

в) $f(X) = 10x_1^2 + 2(x_2 - 5)^2$, $X^{(0)} = [1 \quad 2]^T$

2. Мінімізуйте наступні функції методом Голдштейна-Прайса:

а) $f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $X^{(0)} = [-1,2 \quad 0]^T$,

б) $f(X) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, $X^{(0)} = [-1,2 \quad 0]^T$,

в) $f(X) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$, $X^{(0)} = [-1,2 \quad 0]^T$

Завдання для самостійної роботи

1. Максимізуйте наступну цільову функцію:

$$f(X) = x_1^3 \exp[x_2 - x_1^2 - 10(x_1 - x_2)^2]$$

методом Голдштейна-Прайса. Порівняйте траєкторію оптимізації у просторі X при використанні

- а) методу Голдштейна-Прайса;
- б) методу Флетчера-Пауелла

4. Мінімізуйте суму квадратів відхилень

$$F = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{\text{передбачен}})^2, \quad \text{де } Y_{\text{передбачен}} = \frac{K_1}{K_1 - K_2} (e^{-K_2 t} - e^{-K_1 t})$$

для наступних даних:

T	Y
0,5	0,263
1,0	0,455
1,5	0,548

Контрольні запитання

1. Що являє собою початковий напрямок пошуку в методі Голдштейна-Прайса?
2. Чи використовує алгоритм Голдштейна-Прайса спряжені напрямки?
3. У якому випадку в методі Голдштейна-Прайса можуть зустрітися негативні кроки та як їх уникнути?
4. Як у найпростіший засіб використати алгоритм для максимізації, а не мінімізації?

3.6. ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМІВ МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОХІДНИХ

Як критерій для оцінювання алгоритмів градієнтних методів нелінійного програмування при відсутності обмежень часто розглядаються наступні:

1. Успіх в досягненні оптимального рішення (в межах заданої ступені точності) для широкого класу задач.
2. Число необхідних визначень цільової функції.
3. Машинний час, який потрібен для реалізації алгоритмів (в межах бажаної ступені точності).

Метод зветься збігаючимся, якщо виконується нерівність:

$$\frac{|\varepsilon^{(\hat{e}+1)}|}{|\varepsilon^{(\hat{e})}|} \leq 1 \quad (3.24)$$

де $\varepsilon = X^{(k)} - X^*$, де $X^{(k)}$ - результат k -ої ітерації; X^* - рішення виконується на кожній ітерації.

Оскільки при розрахунках частіше застосовують кінцеві десятичні дробі, навіть самий ефективний алгоритм потребує нескінченної послідовності ітерацій. Тому, в першу чергу, інтерес представляють асимптотичні властивості збіжності вивчаємих методів. Алгоритм має збіжність порядку r , якщо

$$\frac{|\varepsilon^{(\hat{e}+1)}|}{|\varepsilon^{(\hat{e})}|^N} = C,$$

де C - постійна величина.

Якщо $r=1$ чи $r=2$, то алгоритм характеризується лінійною чи квадратичною швидкістю збіжності відповідно. При $r=1$ і $C=0$ алгоритм характеризується суперлінійною швидкістю збіжності.

Швидкість збіжності найпростіших градієнтних методів, методу найшвидшого спуску залишається недопустимо низькою при рішенні ряду практичних задач. Метод найшвидшого спуску часто використовується при реалізації градієнтних методів як

початкової процедури. Результати досліджень градієнтних методів [17] показали переваги квазіньютонівських методів. Однак точність розрахунків на ЕОМ здійснює більший вплив на реалізацію квазіньютонівських методів, ніж на реалізацію методів спряжених градієнтів. Це дозволило зробити висновок про те, що у розрахунках на мікроЕОМ (подібних до тих, що використовуються в управлінні технологічними процесами) метод Флетчера-Рівса може виявитись більш ефективним. Д. Хімелблау [13] провів дослідження сходимості градієнтних методів. Процедура ДФП представляється кращою в змісті загального методу нелінійного програмування при відсутності обмежень по відношенню до отримання вірних значень вектору X в точці мінімуму цільової функції. Метод Ньютона завжди видавався легшим; що стосується інших методів, то, за виключенням методу Флетчера-Рівса, який не спрацьовує в деяких тестах, всі вони видались рівної ефективності. Використання методів змінної метрики з перезавданням матриці η є найбільш придатним на ранніх етапах оптимізації, тоді як віднова від перезавдання віддається перевага на більш пізніх етапах, коли X буває настільки близько до X^* , що ефективними стають властивості спряженості алгоритмів змінної метрики. На основі порівняння часу рішення найліпшими видались алгоритми ДФП; слухними - алгоритми Флетчера-Рівса, Пірсона №3; надійними - алгоритм Пірсона №2.

4. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ

При рішенні задач нелінійного програмування з обмеженнями зустрічаються більші труднощі, ніж при рішенні задач безумовної оптимізації за тієї причини, що рішення, яке потрібно віднайти повинне відповідати додатковим вимогам, тобто задовольняти фігуруючим в задачі умовам. Для рішення задач нелінійного програмування, що має обмеження, часто застосовують один з наступних підходів:

- 1) перебудова задачі нелінійного програмування з обмеженнями в еквівалентну їй послідовність задач безумовної оптимізації за допомогою штрафних функцій;
- 2) використання методів лінійного програмування для рішення задач нелінійного програмування з застосуванням процедури послідовної лінійної апроксимації [1].
- 3) використання методу ковзного допуску, що дозволяє покращити значення цільової функції [7].

4.1 МЕТОДИ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ

В основу методів штрафних функцій в області нелінійного програмування покладена ідея перебудови загальної нелінійної задачі (3.1)-(3.3) в послідовність задач без обмежень шляхом додавання до цільовій функції однієї або кількох функцій, які встановлюють обмеження для того, щоб обмеження, як такі, в задачі оптимізації не фігурували. В цьому випадку мінімізація може здійснюватись за допомогою більш простих алгоритмів. При використанні методів штрафних функцій отримується оптимальний ефект за рахунок постійного компромісу між необхідністю задоволення обмежень і процесом мінімізації $f(x)$, який досягається шляхом присвоєння належної ваги цільової функції і функціям, які визначають обмеження. Методи штрафних функцій можна поділити на 2 класи: параметричні і непараметричні методи. Параметричні методи характеризуються наявністю одного чи кількох певним чином підібраних параметрів, які входять у склад штрафної функції в якості вагових коефіцієнтів. Параметричні методи розпадаються на 3 категорії: методи внутрішньої точки; методи зовнішньої точки; комбіновані методи. При використанні методів внутрішньої точки рівень цільової функції утримується вдалині від межі припустимої області (тобто точка $X^{(k)}$ постійно знаходиться всередині припустимої області) за допомогою штрафної функції. Методи зовнішньої точки, навпаки, генерують послідовність точок, які виходять за межі припустимої області, але дають в межах припустимі рішення. Штрафна функція не дозволяє вектору X надто відходити від межі

припустимої області. Формально перебудова задачі, яку представлено співвідношеннями (1.1)-(1.3), в задачу мінімізації обмежень проводиться шляхом переходу до задачі мінімізації:

$$P(X^{(\hat{e})}, \rho^{(\hat{e})}) = f(X^{(\hat{e})}) + \sum_{i=1}^m \rho_i^{(\hat{e})} H(h_i(X^{(\hat{e})})) + \sum_{i=m+1}^p \rho_i^{(\hat{e})} G(g_i(X^{(\hat{e})})) \quad (4.1)$$

де $P(X^{(k)}, \rho^{(k)})$ - узагальнена приєднана функція чи штрафна функція; $\rho_i^{(k)} \geq 0$ - вагові коефіцієнти; K - кількість завершених етапів обчислювального оптимізаційного процесу. При будь-якому виборі функціоналів $H(h_i(X))$ і $G(g_i(X))$ потрібно, щоб:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\hat{e} \rightarrow \infty} \sum_{i=m+1}^p \rho_i^{(\hat{e})} G(g_i(X^{(\hat{e})})) &= 0 \\ \lim_{i=1}^m \rho_i^{(\hat{e})} H(h_i(X^{(\hat{e})})) &= 0 \\ \lim |P(X^{(\hat{e})}, \rho^{(\hat{e})}) - f(X^{(\hat{e})})| &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

В міру розвитку процесу оптимізованого пошуку вплив входячих в $P(X^{(k)}, \rho^{(k)})$ функцій обмежень на значення даної приєднаної функції постійно слабне, а в межі повністю зникає. Значить, екстремум $P(X)$ співпадає з екстремумом $f(X)$.

4.1.1 ОСНОВНІ ТИПИ ШТРАФІВ

Для обліку обмежень-рівностей часто використовують квадратичний штраф (Рис.4.1):

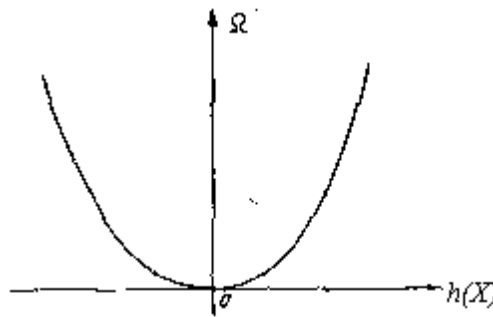


Рис.4.1. Квадратичний штраф

При мінімізації цей штраф запобігає відхиленню значення $h(X)$ від нуля. На Рис.4.2 графічно показана штрафна функція, отримана шляхом додавання до $f(X)$ квадратичним штрафом (з ваговим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці).

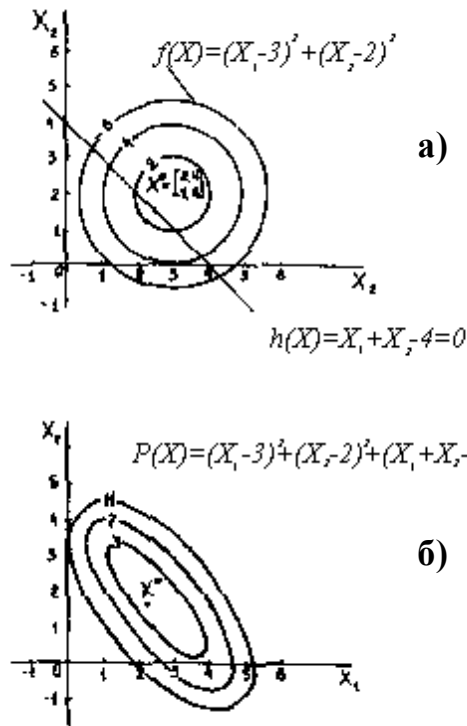


Рис.4.2. Лінії рівня цільової а) та штрафної функції б)

При врахуванні обмежень-нерівностей використовують різні типи штрафів. Простішим серед них є нескінченний бар'єр, показаний на рис.4.3.

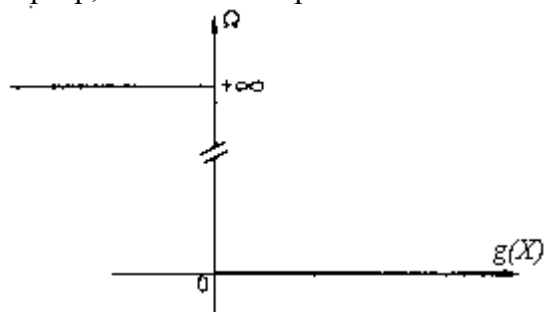


Рис.4.3. Нескінчений штраф

Відповідний вираз приймає нескінченно великі значення в неприпустимих точках і нульове значення - в припустимих. У даному випадку штрафна функція $P(X, \rho)$ - розривна на межі припустимої області. В машинній реалізації нескінченних штрафів використовують велике додатне число. Наприклад, цей штраф використовується у формулі

$$\Omega = 10^{20} \sum_{j \in g} |g_j(X)| \quad (4.4)$$

де g - множина індексів порушень обмежень, $g_j(X) < 0$ при $j \in g$. Іншим широко використовуваним типом штрафу є логарифмічний центр (рис.4.4).

$$\Omega = -\rho \ln[g(X)] \quad (4.5)$$

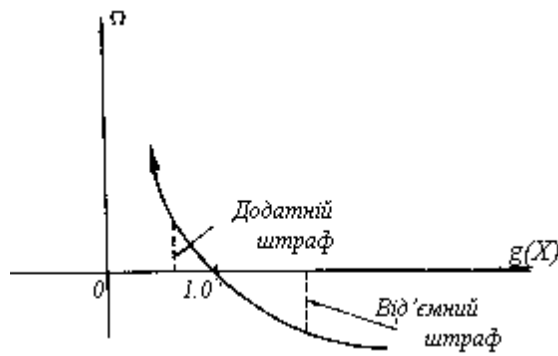


Рис.4.4. Логарифмічний штраф

Цей штраф додатний при всіх X таких, що $0 < g(X) < 1$ і від'ємний при $g(X) > 1$. Логарифмічний штраф - бар'єрна функція, не визначена в неприпустимих точках (тобто для X таких, що $g(X) < 0$). Ітераційний процес починається з припустимої точки початкової при додатному значенні ρ . Після рішення кожної підзадачі безумовної мінімізації параметр ρ зменшується і в межах прагне до нуля. Штраф, заданий оберненою функцією рис.4.5.

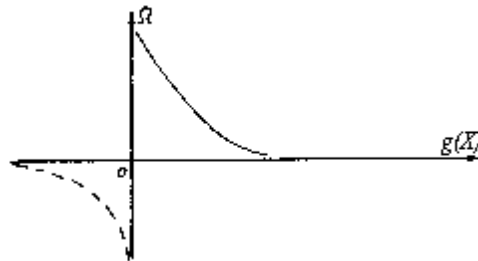


Рис.4.5. Штраф, заданий оберненою функцією

$$\Omega = \rho \left[\frac{1}{g(X)} \right] \quad (4.6)$$

Штраф, заданий оберненою функцією, не має від'ємних значень в припустимій області. Цей штраф є бар'єром; можливі труднощі, які пов'язані з появою неприпустимих точок.

4.1.2 МЕТОД ПОСТУПОВОЇ БЕЗУМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ

Алгоритм методу поступової безумовної мінімізації (МПБМ), розвинутий Фіакко і Мак-Корміком, який застосовується для рішення задачі нелінійного програмування вигляду (1.1)-(1.3), в якій $f(X)$ і $g(X)$ ($i=m+1, \dots, p$) можуть бути нелінійними функціями незалежних змінних, а $h_i(X)$ ($i=1, \dots, m$) повинні бути лінійними функціями незалежних змінних. При таких умовах гарантується збіжність послідовності проміжних рішень до оптимального рішення задачі нелінійного програмування. Метод МПБМ в основному приводиться до рішення деякої послідовності задач без обмежень, причому в межах знаходиться мінімум початкової вихідної задачі нелінійного програмування. В варіанті метода 1967 р. задачу перетворюють в послідовність задач без обмежень, використовуючи штраф, заданий оберненою функцією і шляхом побудови P - функції вигляду

$$P(X^{(e)}, r^{(e)}) = f(X^{(e)}) + (r^{(e)})^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^m h_i^2(X^{(e)}) + r^{(e)} \sum_{i=m+1}^p \frac{1}{g_i(X^{(e)})} \quad (4.7)$$

де значення вагових коефіцієнтів r додатні і утворюють монотонно зменшуючу послідовність $\{r \mid r^{(0)} > r^{(1)} > \dots > 0\}$.

У варіанті МПБМ 1970 р. застосовується логарифмічний штраф

$$P(X^{(\hat{e})}, r^{(\hat{e})}) = f(X^{(\hat{e})}) + \frac{1}{r^{(\hat{e})}} \sum_{i=1}^m h_i^2(X^{(\hat{e})}) - r^{(\hat{e})} \sum_{i=m+1}^p \ln g_i(X^{(\hat{e})}) \quad (4.8)$$

Як і у варіанті (4.7) тут використовується квадратичний штраф для урахування обмежень-рівностей. Процедура мінімізації функцій (4.7) і (4.8) починається з внутрішньої (або граничної) точки, тобто з точки $X^{(0)}$, в якій всі граничні умови у вигляді нерівностей задоволені. Після визначення $r^{(0)}$ точка $X^{(1)}$ розраховується мінімізацією $P(X, r^{(0)})$. Потім визначається $r^{(1)}$ і знаходиться $X^{(2)}$ і т.д. Швидкість збіжності залежить від початкового вибору $r^{(0)}$ і від способу редуцирування даного параметру. Одним з способів вибору початкового значення $r^{(0)}$, який було запропоновано Фіакко і Мак-Корміком, є $r^{(0)}=1$. При цьому вказано, що ефективність алгоритму не зміниться значно, якщо послідовність $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, ..., $r^{(k)}$ індукуювати простим співвідношенням

$$r^{(\hat{e})} = \frac{r^{(\hat{e}-1)}}{C}$$

де $C>1$ є константою (завжди вважають $C=4$). На рис.7.6 показано схему методу.

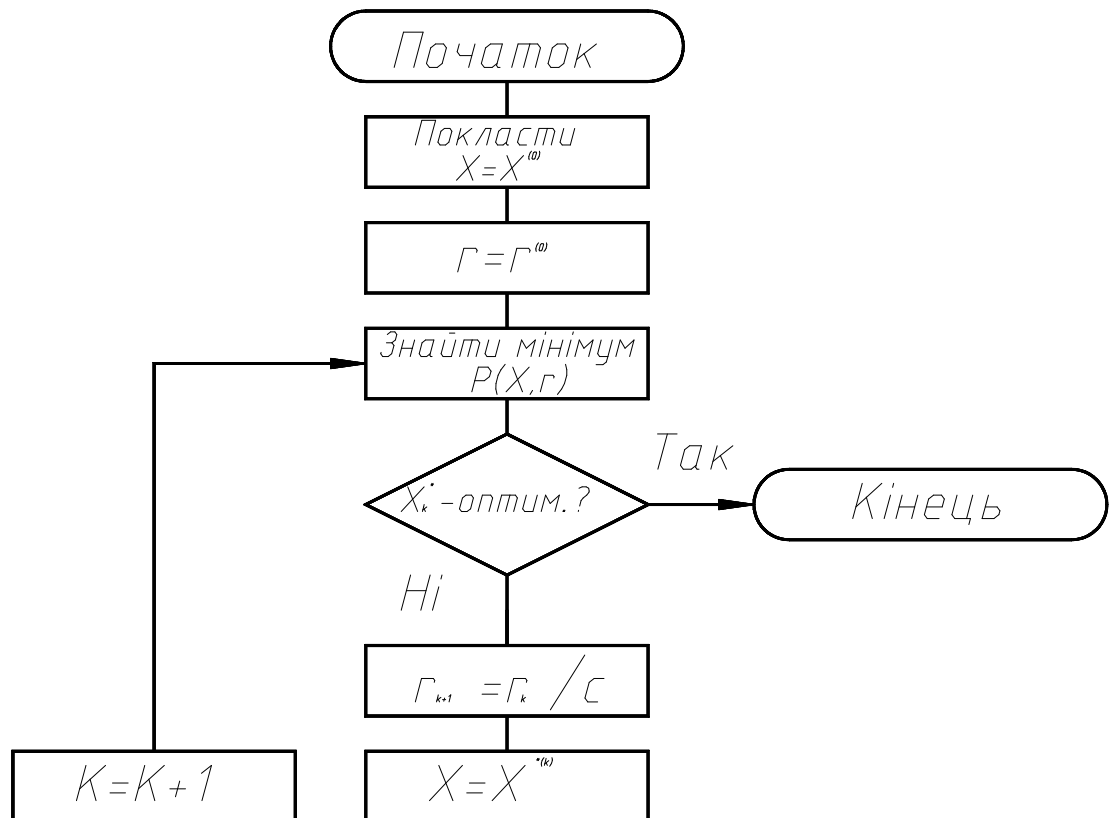


Рис.4.6. Схема алгоритма МПБМ

Приклад реалізації розділу статичної оптимізації

Статична оптимізація процесу форсованого випаровування у виробництві карбаміду

Поставлена задача статичної оптимізації процесу форсованого випаровування у виробництві карбаміду. Для вирішення цієї задачі необхідно сформулювати критерій оптимальності. Для цього необхідно визначитись з регульованою величиною та з параметром, що може впливати на неї. Вихідною величиною є концентрація карбаміду у розчині на виході з вакуум-сепаратора. А керуючим впливом являється витрата грійних газів.

Постановка задачі оптимізації

Вибрано канал керування «витрата грійних газів - кінцева концентрація карбаміду». В якості критерія оптимальності обрали квадратичний критерій оптимальності, який необхідно мінімізувати.

$$J = \frac{1}{2}q(Q_{p2} - Q_{p2}^0)^2 + \frac{1}{2}rG_r^2 \rightarrow \min \quad (4.9)$$

де q , r – вагові коефіцієнти; G_r – витрата газів(теплоносія); Q_{p2} – кінцева концентрація карбаміду;

Через обмеження пропускної здатності трубопроводу, геометричних розмірів апарату виникають певні обмеження на витрату грійних газів. Тому встановимо межі по керуючому впливу :

$$G_{r \min} \leq G_r \leq G_{r \max} \quad (4.10)$$

де $G_{r \min} = 0,05$ кг/с; $G_{r \max} = 0,125$ кг/с.

Оскільки задача стоїть у забезпеченні концентрації карбаміду у розчині на виході на рівні 78%, то це обмеження теж необхідно врахувати :

$$Q_{p2} = Q_{p2 \text{ зад}} \quad (4.11)$$

де $Q_{p2 \text{ зад}} = 78\%$.

Математична модель статички теплообмінника-рекуператора і вакуум сепаратора:

$$G_r C_r (\Theta_{r1} - \Theta_{r2}) - K F_1 (\Theta_{r2} - \Theta_{p2}) = 0$$

$$G_{p1} C_{p1} \Theta_{p1} - G_{p2} C_{p2} \Theta_{p2} + K F_1 (\Theta_{r2} - \Theta_{p2}) - W r = 0$$

$$G_{p1} Q_{p1} - (G_{p1} - W) Q_{p2} = 0$$

де G_{p1} – витрата освітленого розчину караміду; Q_{p1} – початкова концентрація карбаміду Θ_{p2} – температура концентрованого розчину карбаміду, K - коефіцієнт теплопередачі; F_1 - площа поверхні теплообміну;

Задача безумовної оптимізації з використанням методу штрафних функцій і градієнтної процедури.

В результаті, враховуючи критерій оптимальності, рівняння статички процесу та обмеження на керуючий вплив та концентрацію карбаміду на виході можемо перетворити задачу умовної оптимізації в безумовну :

$$L = J + \lambda_i \cdot \sum F_i + \frac{1}{k} \sum h_i^2 + k \sum \frac{1}{g_i} \quad (4.12)$$

де F_i – рівняння статички; h_i – обмеження типу рівність; g_i – обмеження типу нерівність; λ_i – множники Лагранжа; k – ваговий коефіцієнт. Для обмеження типу рівність застосовано квадратичний штраф. Для обмежень типу нерівність використали обернену функцію. В результаті отримали штрафну функцію :

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} Q(Q_{p2} - Q_{p2}^0)^2 + \frac{1}{2} R G_r^2 + \lambda_1 (G_{p1} Q_{p1} - (G_{p1} - W) Q_{p2}) + \\ & + \lambda_2 (G_r c_r (\Theta_{r1} - \Theta_{r2}) - K F_1 (\Theta_{r2} - \Theta_{p2})) + \\ & + \lambda_3 (G_{p1} c_{p1} \Theta_{p1} - G_{p2} c_{p2} \Theta_{p2} + K F_1 (\Theta_{r2} - \Theta_{p2}) - W_r) + \frac{1}{k} (Q_{p2} - Q_{p2\text{зад}})^2 + \\ & + k \left(\frac{1}{G_r - G_{r\min}} + \frac{1}{G_{r\max} - G_r} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Тоді похідні по змінним стану та керуванню мають вигляд:

$$\partial L / \partial \Theta_{p2} = 0 = F_1 K \lambda_2 - \lambda_3 (c_{p2} (G_{p1} + F_2 \beta (\Theta_{p2} \xi_2 - \Theta_{p2} \xi_1)) + F_1 K + F_2 \beta \xi_1 r - F_2 \Theta_{p2} \beta c_{p2} \xi_1) + F_2 Q_{p2} \beta \xi_1 \lambda_1; \quad (4.14)$$

$$\partial L / \partial \Theta_{r2} = 0 = F_1 K \lambda_3 - \lambda_2 (G_r c_r + F_1 K); \quad (4.15)$$

$$\partial L / \partial Q_{p2} = 0 = Q(Q_{p2} - Q_{p2\text{зад}}) - \lambda_1 (G_{p1} + F_2 \beta (\Theta_{p2} \xi_2 - \Theta_{p2} \xi_1)) + 1/k; \quad (4.16)$$

$$\partial L / \partial G_r = G_r R - k(1/(G_r - G_{r\min})^2 - 1/(G_r - G_{r\max})^2) + c_r \lambda_2 (\Theta_{r1} - \Theta_{r2}); \quad (4.17)$$

де рівність нулю похідних по змінним стану являється необхідними умовами оптимальності.

Пошук мінімуму виконувано за градієнтною процедурою. Тому маємо наступний алгоритм розрахунку:

1. Встановити початкове значення керуючого впливу G_r .
2. Розрахувати вихідну величину Q_{p2} з рівнянь статички .
3. Розрахувати λ_i з необхідних умов оптимальності.
4. Розрахувати похідну по керуванню.
5. Знайти нове значення витрати за формулою $G_r^k = G_r^{k-1} - h \partial L / \partial G_r^{k-1}$.
6. Зменшити коефіцієнт k .
7. Повторити процедуру.

Для порівняння проаналізуємо різні вагові коефіцієнти. Візьмемо $r = 1$, а q перевіримо при значеннях 1; 1,05; 1,1.

Лістинг програми наведено в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1. Програма розрахунку

```

% __Параметри статичного режиму__
ksi1 = 0.05; ksi2 = 0.05015; Teta_r1 = 408; Teta_p = 410; beta = 0.0553;
F2 = 3.2; G_r1 = 0.125; Teta_g1 = 428; c_r1 = 2.003; c_r2 = 1.606;
c_g = 2.3; r = 2145; F1 = 80; K = 11.27*10.^-3; Q_r1 = 68;
Teta_r2 = 413; Teta_g2 = 418; G_g = 0.196;
W = beta*F2*(ksi1*Teta_r2 - ksi2*Teta_p); G_r2 = G_r1 - W;
% __Обмеження на змінні__
G_gmin = 0.05; G_gmax = 0.5; Q_r2z = 78;
% __Початковий розрахунок__
Q_r2 = f(G_g)
q = [1 1.05 1.1]; r = 1; k = 1;
J = ((q*(Q_r2 - Q_r2z).^2)/2) + (R*G_g.^2)/2;
Garr = [G_g];
Jarr = [J];
Qarr = [Q_r2];
n = 1;
while n<16
    n = n + 1;
    syms lambda1 lambda2 lambda3
    dL_dTeta_r2 = F1*K*lambda2 - lambda3*(c_r2*(G_r1 + F2*beta*(Teta_p*ksi2 -
Teta_r2*ksi1)) + F1*K + F2*beta*ksi1*r - F2*Teta_r2*beta*c_r2*ksi1) +
F2*Q_r2*beta*ksi1*lambda1;
    dL_dTeta_g2 = F1*K*lambda3 - lambda2*(G_g*c_g + F1*K);
    dL_dQ_r2 = (q*(2*Q_r2 - 2*Q_r2z))/2 - lambda1*(G_r1 + F2*beta*(Teta_p*ksi2
- Teta_r2*ksi1)) + 1/k;
    % __Пошук лямбда__
    [lambda1,lambda2,lambda3] = solve(dL_dTeta_r2,dL_dTeta_g2,dL_dQ_r2);
    lambda1 = vpa(lambda1,5);
    lambda2 = vpa(lambda2,5);
    lambda3 = vpa(lambda3,5);
    % __Перерахунок керування, критерію__
    dL_dG_g = G_g*R - k*(1/(G_g - G_gmin)^2 - 1/(G_g - G_gmax)^2) +
c_g*lambda2*(Teta_g1 - Teta_g2);
    dL_dG_g = vpa(dL_dG_g,8);
    G_g = G_g - 0.00001*dL_dG_g;
    Q_r2 = f(G_g)
    J = ((q*(Q_r2 - Q_r2z).^2)/2) + (R*G_g.^2)/2;
    Garr(end + 1) = G_g;
    Jarr(end + 1) = J;
    Qarr(end + 1) = Q_r2;
    k = k/2;
end
% __Побудова графіків__
s = size(Jarr); s = s(2);
figure
plot(0:s-1, Jarr, 'x-');
grid on
title("Зміна критерію якості");
ylabel('J'); xlabel('n');
figure
plot(0:s-1, Garr, 'x-');
grid on

```



```

title('Зміна керуючого впливу');
ylabel('Gг, кг/с'); xlabel('n');
figure
plot(0:s-1, Qarr, 'x-');
grid on
title('Зміна вихідної величини');
ylabel('Qp2, %'); xlabel('n');

```

Зміну критерію оптимальності, витрати газу та вихідної концетрації наведено на рисунках 4.7 – 4.9.

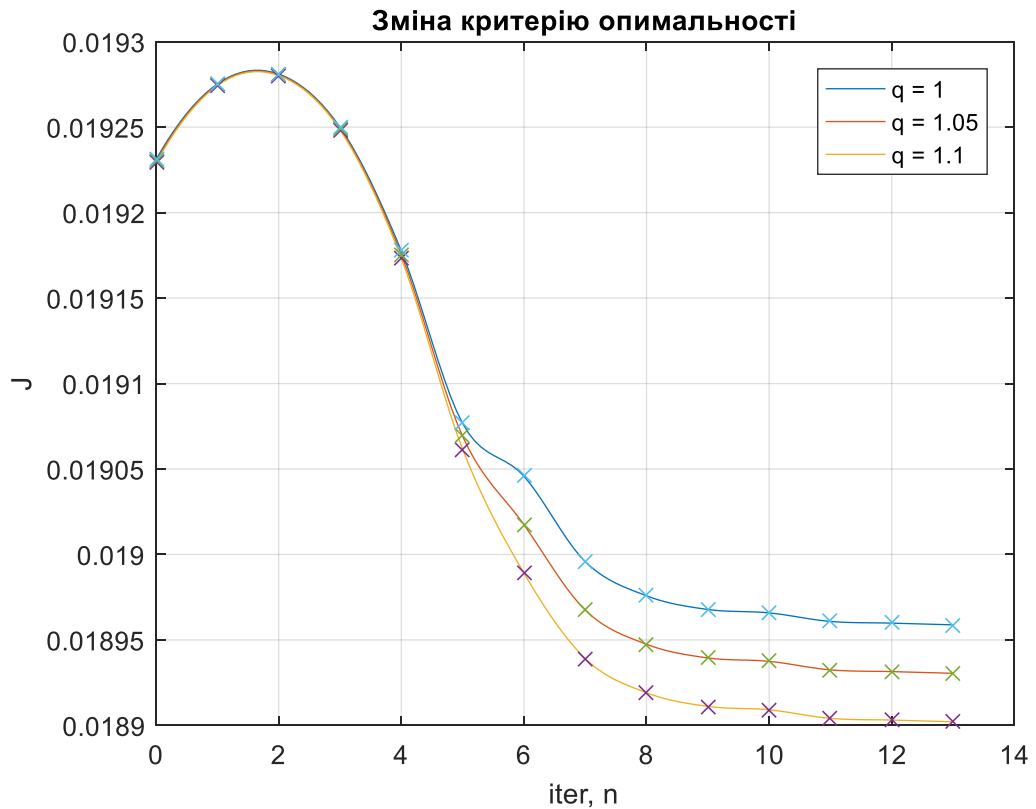


Рис. 4.7. Зміна критерію оптимальності

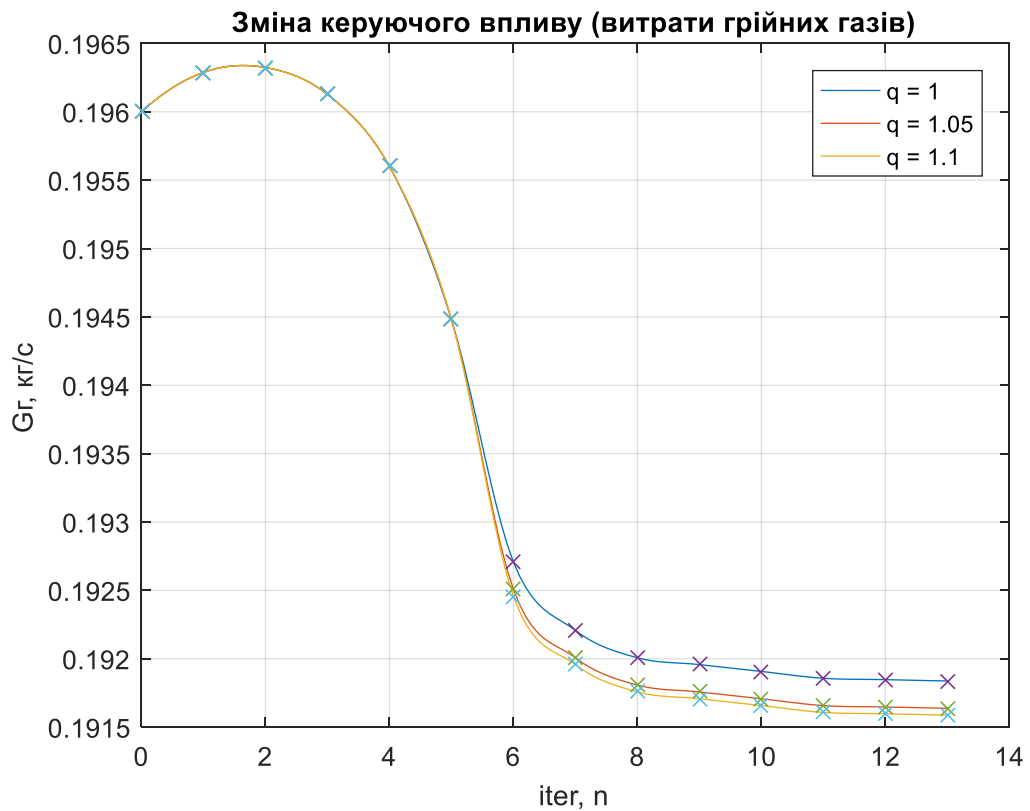


Рис. 4.8. Зміна керуючого впливу

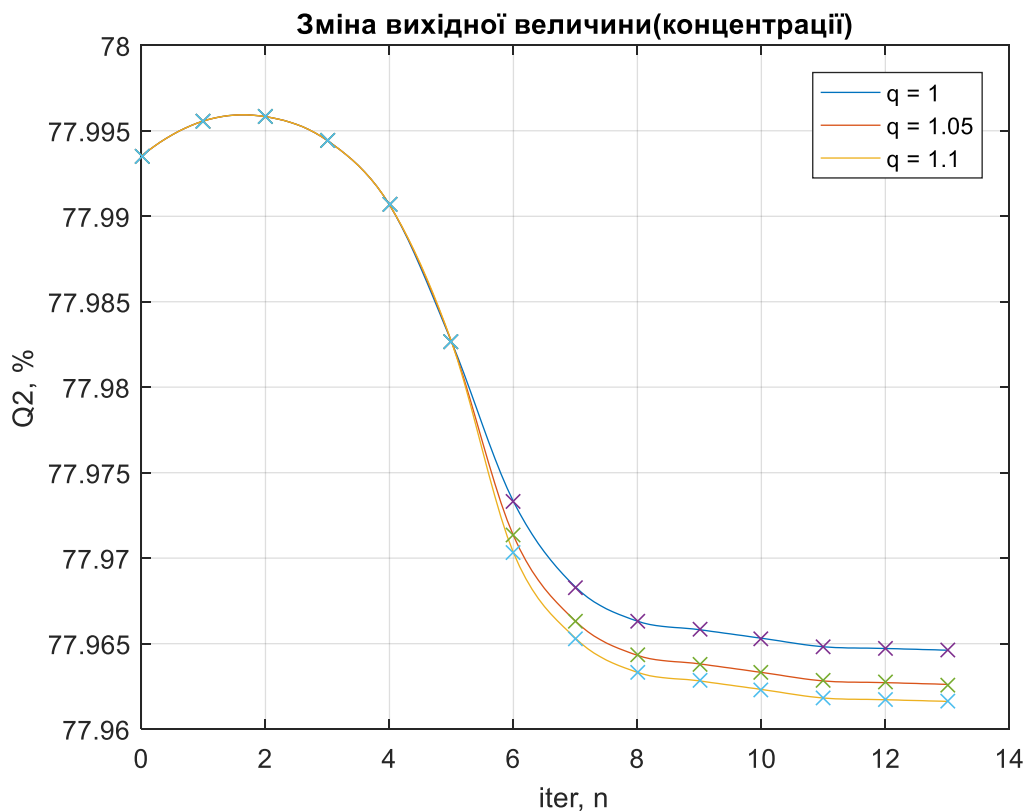


Рисунок 4.9. Зміна вихідного параметру

Як видно з рисунка 4.7 критерій оптимальності набув мінімального значення при значеннях вагових коефіцієнтів $q = 1.1$, $r = 1$.

Такий підхід вважається відносно малоефективним і відповідно був замінений на методи розв'язку засновані на формулюванні рівнянь Куна-

Таккера. У загальному випадку ці методи можна віднести до послідовного квадратичного програмування (SQP).

Застосування метода послідовного квадратичного програмування

SQP – один з сучасних методів нелінійного програмування. К. Шитковський, використовуючи даний варіант оптимізації, успішно реалізував тестові розрахунки. Цей метод є значено ефективнішим, точнішим і має більший відсоток успішного результату у порівняння з іншими тестовими методами.

Метод SQP базується на роботах таких учених, як Бигс, Хан, Пауелл. Він дозволяє з високою точністю імітувати метод Ньютона для оптимізації при наявності обмежень. На кожній ітерації методу виконується апроксимація Гессіана для функції Лагранжа. Для цього використовується квазіньютонівський модифікований метод. Все це дозволяє поставити підзадачу у QR, розв'язання якої використовується для формування напрямку пошуку оптимуму при лінійному пошуку. С

Згідно з описом основної задачі, ідея під задачі QR полягає у квадратичній апроксимації функції Лагранжа.

$$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i(X) \quad (4.18)$$

Якщо припустити, що зв'язані обмеження можна представити у вигляді нерівностей, то пролінеаризувавши їх отримуємо під задачу QR.

Реалізацію SQP можна представити як три основні кроки:

- Скоригувати матрицю Гессе для функції Лагранжа.
- Розв'язати задачу квадратичного програмування.
- Обчислити лінійний пошук та функцію вигоди.

Сучасні методи нелінійного програмування при наявності обмежень засновані на формуванні та подальшому розв'язанні умов Куна-Таккера. В рівняннях Куна-Таккера вводяться додаткові припущення про обмеження та поняття оптимальності для задач оптимізації при наявності обмежень. Якщо задача, яку необхідно розв'язати являється опуклою задачею програмування, тобто $f(X)$ $G_i(x)$ є опуклими функціями, то рівняння Куна-Таккера є необхідними й достатніми умовами для постановки задачі.

$$\begin{aligned} \nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla G_i(X^*) &= 0; \\ \lambda_i^* \nabla G_i(X^*) &= 0 \quad i = 1, \dots, m; \\ \lambda_i^* &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Перші рівняння описують процес зникнення градієнта між цільовою функцією та обмеженнями у точці розв'язку. Так як градієнти повинні вийти

на нульові значення, то множники Лагранжа призначені для усунення відхилення по величині цільової функції та градієнтів обмежень. Подібне розв'язання рівнянь Куна-Таккера є базою для багатьох алгоритмів нелінійного програмування[6].

Метод оптимізації, що було розглянуто у попередньому пункті, являється досить точним. Однак при цьому він є досить ресурсозатратним, адже потребує розуміння методу штрафних функцій, створення градієнтної процедури. Також необхідні навички у формуванні критерію оптимальності та накладення обмежень. Для спрощення задачі пошуку оптимуму в MatLab присутня бібліотека Optimization Toolbox, що базується на SQP. Для пошуку мінімуму скористаємося функцією `fmincon()` з цієї бібліотеки. Для того щоб нею скористатись необхідно оголосити обмеження, присутні у процесі. Цими обмеженнями є рівняння статички та границі керуючого впливу та вихідної величини. З рівнянь статички сформуємо матриці A_{eq} та b_{eq} . Обмеження на керуючий вплив та на вихідну величину задамо як lb та ub , тобто нижні та верхні межі. Програма розрахунку наведена у таблиці 4.2.

Таблиця 4.2. Програма розрахунку

```
% __Параметри статичного режиму__
ksi1 = 0.05; ksi2 = 0.05015; Teta_r1 = 408; Teta_p = 410; beta = 0.0553;
F2 = 3.2; G_r1 = 0.125; Teta_g1 = 428; c_r1 = 2.003; c_r2 = 1.606;
c_g = 2.3; r = 2145; F1 = 80; K = 11.27*10.^-3; Q_r1 = 68;
Teta_r2 = 413; Teta_g2 = 418;
W = beta*F2*(ksi1*Teta_r2 - ksi2*Teta_p); G_r2 = G_r1 - W;
Q_r2z = 78;
% __Обмеження типу нерівність__
G_gmin = 0.05; G_gmax = 0.5;
lb = [G_gmin, 77.97];
ub = [G_gmax, 78];
% __Старт поинт__
x0 = (lb+ub)/2;
% __Обмеження типу рівність__
Aeq = [0,(G_r1 - W); c_g*(Teta_g1 - Teta_g2),0];
beq = [G_r1*Q_r1;K*F1*(Teta_g2 - Teta_r2)];
% __Функція__
Q = 1; R = 1;
J = @(x) (((Q*(x(2) - Q_r2z).^2)/2) + (R*x(1).^2)/2);
options = optimoptions('fmincon','Display','iter','Algorithm','interior-point',
'PlotFcn','optimplotfval','MaxIterations',14);
[x,fval,exitflag,output] = fmincon(J,x0,[],[],Aeq,beq,lb,ub,[],options);
```

Зміну критерію оптимальності наведено на рисунку, керуючого впливу та вихідної величини наведено на рисунках 4.10 – 4.12.

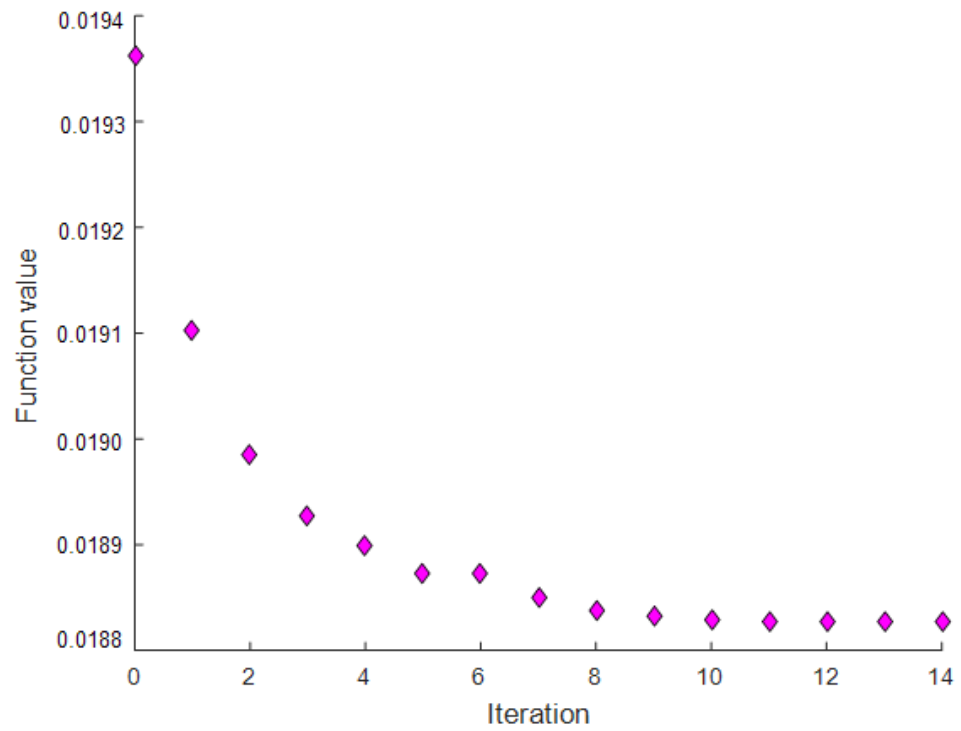


Рис..4.10 Зміна критерію оптимальності в залежності від ітерацій

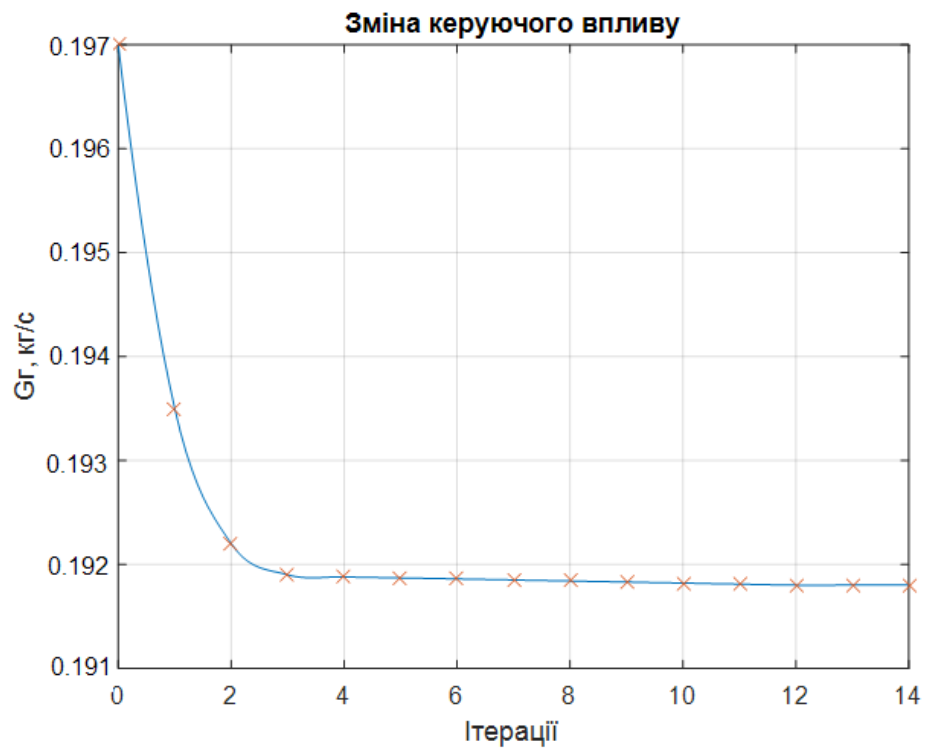


Рис. 4.11 Зміна витрати газу в залежності від ітерацій

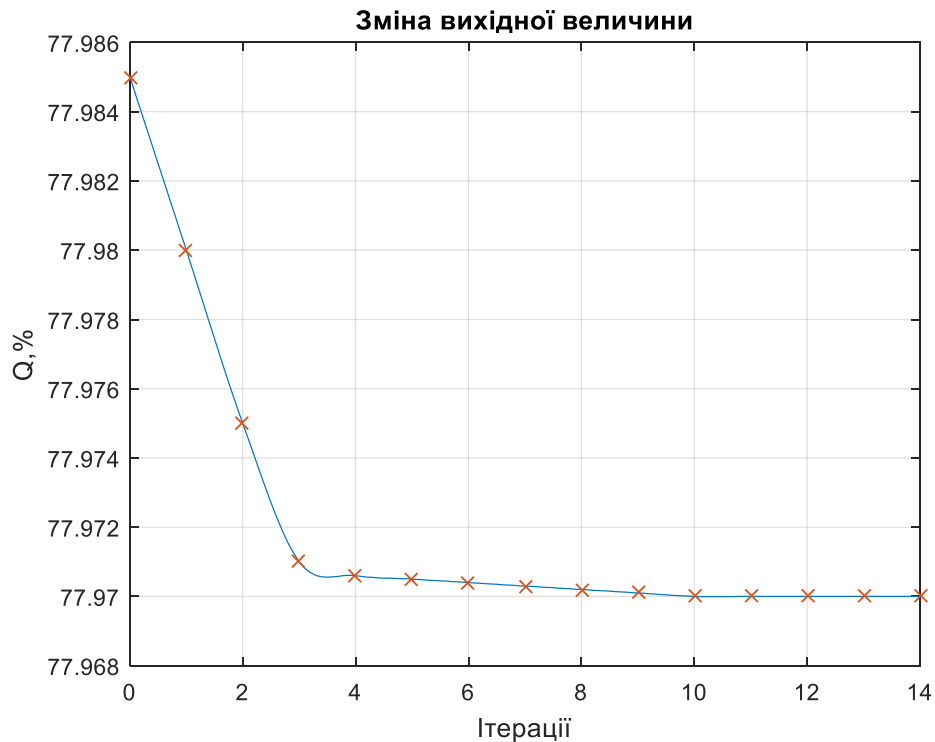


Рис. 4.12. Зміна концентрації в залежності від ітерацій

В результаті порівняння застосованих підходів до задачі оптимізації бачимо, що метод SQP забезпечує більшу точність і швидкість пошуку мінімуму.

Завдання

1. Мінімізувати $f(X) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2$ при обмеженнях:

$$g_1(X) = X_1 + 1 \geq 0;$$

$$g_2(X) = 1 - X_2 \geq 0;$$

$$g_3(X) = 4X_2 - X_1 - 1 \geq 0;$$

$$g_4(X) = 1 - 0,5X_1 - X_2 \geq 0;$$

Записати для цієї задачі штрафні функції, використовуючи: логарифмічний штраф; штраф, який задано оберненою функцією. Дослідити кожен із функцій у точках $X^{(0)} = [-1 \ 1]^T$ та $[-0,5 \ 0,5]^T$, звернувши увагу на труднощі, що зустрічаються.

2. Мінімізувати функцію $f(X) = -X_1^2 - X_2^2$ при обмеженнях

$$X_1 \geq 0;$$

$$X_2 \geq 0;$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 3.$$

3. Використовуючи МПБМ, мінімізувати функцію $f(X) = \frac{4}{X_1} + \frac{9}{X_2} + (X_1 + X_2)$ при обмеженнях

$$X_1 \geq 0;$$

$$X_2 \geq 0;$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4.$$

4. Мінімізувати функцію $f(X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ при обмеженнях

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 3;$$

$$X_1 X_2 X_3 \geq 3;$$

$$X_1 > 0;$$

$$X_2 \geq 0;$$

$$X_3 \geq 0;$$

5. Мінімізувати функцію $f(X) = (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - 1)^2$ при обмеженнях

$$y_1(X) = \frac{X_1^2}{4} + X_2^2 + 1 \geq 0,$$

$$h_2(X) = X_1 - 2X_2 + 1 = 0$$

а) побудувати функцію $P(X, r)$ при $r=0,04$. Зобразити побудовану P -функцію графічно;

б) визначити напрямок оптимізаційного пошуку з початкової внутрішньої точки

$$X^{(n)} = [0,748 \ 0,548]^T;$$

в) знайти вектор $X^{(1)}$;

г) Чи може одна з точок $X^{(k)}$ виявитися зовні припустимої області.

4.1.3 МЕТОД РОЗЕНБРОКА

Непараметрична схема методу штрафних функцій запропонована Розенброком. Метод співмножників є спробою запобігти погіршенню зумовленості допоміжних підзадач у звичайній схемі методу штрафних функцій.

Метод Розенброка дає змогу знайти максимум або мінімум нелінійної функції багатьох змінних $f(X)$ при нелінійних обмеженнях у вигляді нерівностей:

оптимізувати $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

при обмеженнях $G_k \leq X_k \leq H_k \quad (k=1, 2, \dots, m)$.

Внутрішні змінні $X_{n+1}, \dots, X_m$ є незалежними функціями зовнішніх незалежних змінних $X_1, X_2, \dots, X_n$. Верхні і нижні обмеження H_k і G_k можуть бути константами або функціями незалежних змінних.

Опис алгоритму. Алгоритм ґрунтується на методі Розенброка за відсутності обмежень [5], за допомогою якого здійснюється пошук оптимуму доти, поки не будуть виконані умови закінчення пошуку або не буде досягнута гранична зона навколо обмежень. Граничні зони знаходять так:

нижня зона

$$G_k \leq X_k \leq (G_k + (H_k - G_k)10^{-4})$$

верхня зона

$$H_k \geq X_k \geq (H_k - (H_k - G_k)10^{-4})$$

$K=1, 2, \dots, m$.

Метод потребує завдання початкової точки, яка задовольняє обмеженням і не лежить у граничних зонах.

Алгоритм включає кілька кроків: (рис 4.13)

Крок 1. Знайти найкраще поточне значення функції цілі f_0 у точці, для якої виконується обмеження, і найкраще поточне значення функції цілі f_1 у точці, де також задовольняються обмеження і не порушені межі граничних зон. Спочатку f_0 і f_1 прирівнюються до значення функції цілі у початковій точці.

Крок 2. Якщо поточне значення функції цілі $f(X)$ гірше за $f_0(X)$ або не задовольняються обмеження, крок вважають невдалим і процедура пошуку продовжується згідно з методом Розенброка при

безумовній оптимізації.

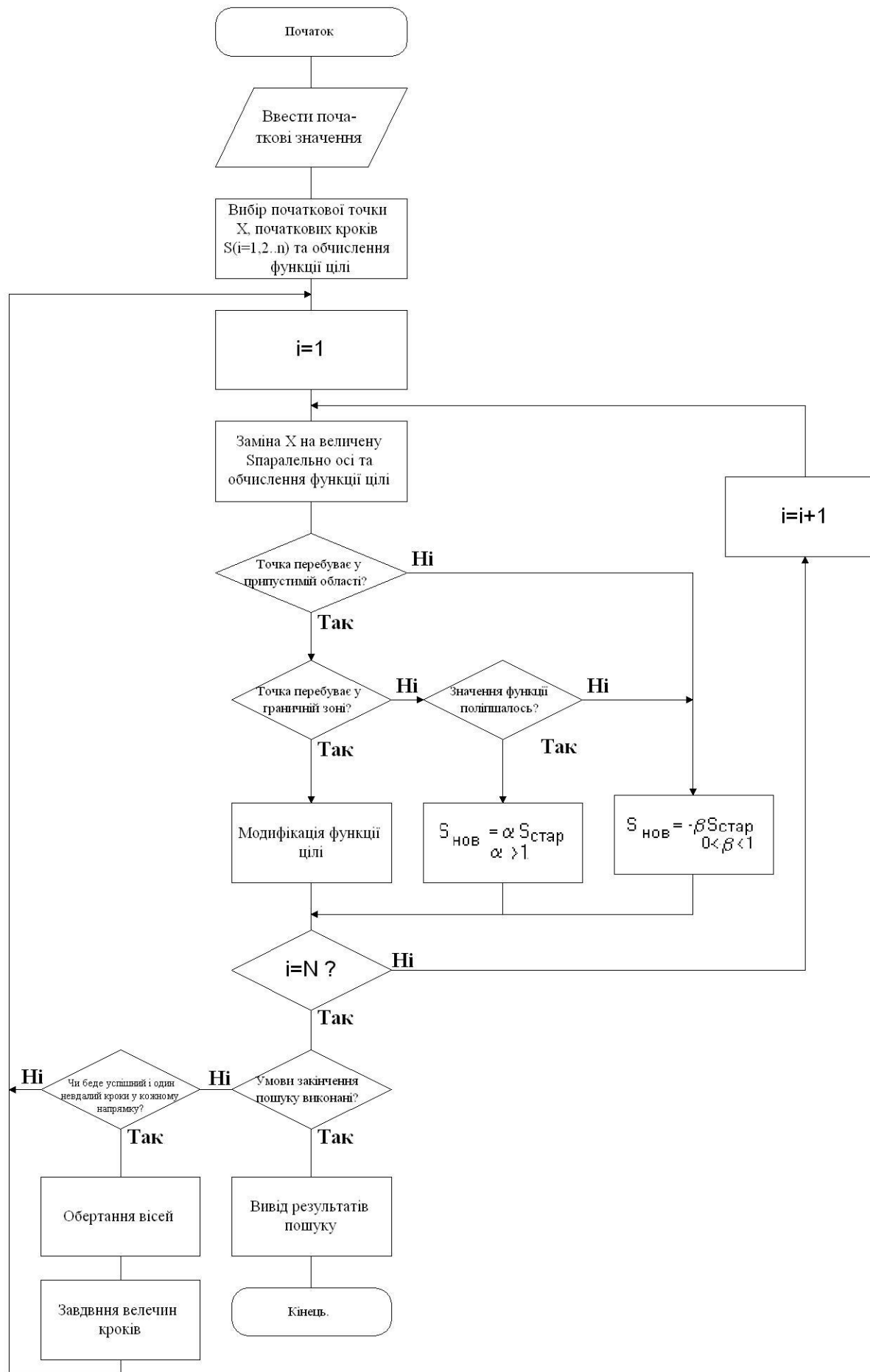


Рис. 4.13 Схема алгоритма методу Розенброка

Крок 3. Якщо поточна точка лежить в середині граничної зони, функція цілі модифікується так:

$$f(X^{(k+1)}) = f(X^{(k)}) - (f(X^{(k)}) - f_1(X)) (3\lambda - 4\lambda^2 + 2\lambda^3),$$

де $\lambda = Q/W$; Q - відстань від точки до межі зони; W - ширина граничної зони.

Звідси маємо:

Для нижньої зони:

$$\lambda = \frac{G_k + (H_k - G_k) 10^{-4}}{(H_k - G_k) 10^4};$$

Для верхньої зони:

$$\lambda = \frac{X_k - (H_k - (H_k - G_k)) 10^{-4}}{(H_k - G_k) 10^4}.$$

На внутрішній поверхні граничної зони $\lambda=0$, тобто функція не модифікується: $f(X^{(k+1)}) = f(X^{(k)})$. Якщо точка перебуває на межі, $\lambda=1$, отже $f(X^{(k+1)}) = f_1(X)$. Таким чином, значення функції змінюється на найкраще поточне значення функції у припустимій області, а не в граничній зоні.

Крок 4. Якщо поліпшення функції цілі отримано без порушення зон або обмежень, $f(X)$ прирівнюється до $f_1(X)$ і пошук триває.

Крок 5. Пошук закінчується при виконанні умов його зупинки.

Завдання для самостійної роботи

Треступеневий компресор, зображений на рис. 4.14., призначений для стиснення газу, що поступає під тиском 1 атм у кількості N моль/год, до тиску 64 атм. Припускається, що стиснення двостороннє й адіабатичне; після кожної його стадії газ охолоджується до початкової температури T . Потрібно вибрати значення тиску на проміжних стадіях процесу, яке мінімізує споживання енергії.

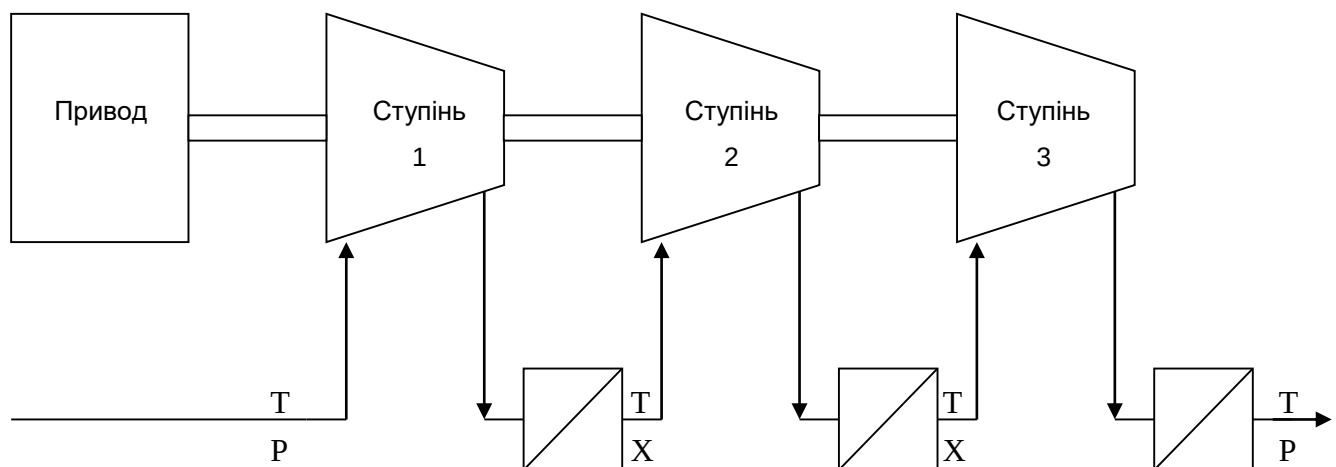


Рис. 4.14. Схема багатоступеневого компресора

Для двостороннього адіабатичного стиснення з охолодженням початкової температури T робота газу визначається за формулою

$$W = NRT \left(\frac{K}{K-1} \right) \left(\frac{P_{вих}}{P_{вх}} \right)^{\frac{(K-1)}{K}} - NRT \left(\frac{K}{K-1} \right), \text{ де } R - \text{універсальна газова стала; } K = C_p/C_v -$$

коефіцієнт Пуассона.

При триступеновому стисненні повна робота газу визначається за формулою

$$W_{повн} = NRT \left(\frac{K}{K-1} \right) \left\{ \left(\frac{X_1}{1} \right)^\alpha + \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^\alpha + \left(\frac{64}{X_2} \right)^\alpha - 3 \right\}, \text{ де } \alpha = (K-1)/K; X_1 - \text{вихідний тиск на}$$

першому ступені; X_2 – вихідний тиск на другому ступені.

Якщо для даного газу $\alpha = 1/4$, то при фіксованих T і N оптимальні тиски X_1 і X_2 можна здобути, розв'язуючи методом Розенброка таку задачу:

$$\text{Мінімізувати } f(X) = X_1^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{64}{X_2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

при обмеженнях $X_1 \geq 1, X_2 \geq 1, 64 \geq X_2$.

Контрольні запитання

Назвіть основні відміни методу співмножників від інших методів, побудованих на перетворенні задачі, наприклад методу штрафних функцій.

4.1.4 МЕТОД ФЛЕТЧЕРА - ПАУЕЛЛА

Параметричний метод внутрішньої точки, який об'єднує метод Флетчера - Пауелла за відсутності обмежень з методом бар'єрних поверхонь (МБП), дозволяє ефективно розв'язувати задачі нелінійного програмування за наявності обмежень.

Метод бар'єрних поверхонь побудовано на використанні штрафної функції вигляду

$$P(X, r) = f(X) + r \sum_{i=1}^p \frac{\omega_i}{g_i(X)} \quad (4.20)$$

де r – параметр, значення якого зменшується з кожним циклом;

ω_i ($i=1, \dots, p$) – додатні вагові коефіцієнти.

Співвідношення (4.20) перетворює задачу нелінійного програмування за наявності обмежень на задачу без обмежень з набагато складнішою структурою, але яка характеризується наявністю досить сильних бар'єрів уздовж межі припустимої області.

Побудувавши штрафну функцію і визначивши внутрішню точку, переходимо до реалізації процедури мінімізації $P(X, r)$ при заданому початковому значенні $r^{(0)}$. кінцева для першого етапу обчислювальної процедури точка X стає вихідною (стартовою) точкою для мінімізації функції P при зменшеному значенні r . Кінцевий етап мінімізації реалізується при дуже малому значенні r , так що вихідна точка X з точністю до встановленого допуску може опинитись або на одній з обмежувальних поверхонь, або відразу на кількох поверхнях, що задані обмеженнями задачі. На кожному етапі безумовної мінімізації користуються методом Флетчера – Пауелла.

На початковій стадії оптимізаційного процесу кут між $\nabla f(X^{(0)})$ і $\nabla P(X^{(0)}, r^{(0)})$ має бути гострим, а значення r – збільшуватись або зменшуватись шляхом множення або ділення початкового значення цього параметра на деяке число доти, поки кут між $\nabla f(X^{(k)})$ і $\nabla P(X^{(k)}, r^{(k)})$ не стане тупим. Окрім цього, повинна виконуватись умова $r^{(0)} \geq 10^{-4}$. На практиці вважають $r^{(0)} = 50$. Рекомендовано при переході від одного етапу обчислювального процесу

до іншого помножити поточне значення g на 0.1 , що забезпечує поступове зменшення параметра.

Значення ω_i вибирають з таким розрахунком, щоб всі доданки в (4.7) після масштабування стали величинами одного порядку.

Коли обмеження-нерівності зводять до Р-функції вигляду

$$P_1 = f(X) + k \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{g_i(X)}, \quad (4.21)$$

$$P_2 = f(X) + k \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{g_i^2(X)}, \quad (4.22)$$

ω_i потрібно вважати рівним нулю доти, поки не виявиться порушення хоча б одне обмеження. За значення k рекомендується вибрати значення множника Лагранжа, асоційованого з першим з порушених обмежень. Наприклад, у виразі для P_1 (стосовно активних обмежень $g_i(X) \geq 0$)

$$K = \frac{g_i^2(X) (\nabla^T f(X) \nabla g_i(X))}{\nabla^T g_i(X) \nabla g_i(X)}, \quad (4.23)$$

де значення градієнтів $f(X)$ і $g(X)$ обчислені в останній з поточних припустимих точок.

Програма, що реалізує метод Флетчера-Пауелла, дозволяє розв'язати задачу мінімізації $f(X)$, $X \in R$ за наявності обмежень типу рівностей

$$H_k(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Алгоритм, що реалізується програмно, є послідовністю таких операцій.

Крок 1. Формується нова функція цілі з вихідної функції і обмежень:

$$F = f(X) - \sum_{k=1}^m \lambda_k H_k + B \sum_{k=1}^m H_k^2,$$

де λ_k , B -константи.

Крок 2. Задається початкова точка пошуку і знаходяться значення функції $f(X)$ та її похідних, а також H_k . Похідні можуть бути визначені алгоритмічно або чисельними методами. Величина λ_k обчислюється розв'язком системи лінійних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^m \left(\lambda_g \frac{\partial H_g}{\partial X_i} \frac{\partial H_k}{\partial X_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_k}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_i} \right), \quad k=1, 2, \dots, m.$$

Зазвичай вважають $B = 30$.

Крок 3. Реалізується процедура пошуку оптимуму Флетчера-Пауелла для функції F без урахування обмежень. Коефіцієнти λ_k ($k=1, 2, \dots, m$) перераховуються для кожної нової ітерації. Коли пошук завершено, $H_k=0$, $f(X)=F$.

Завдання

Знайти мінімуми функцій, використовуючи метод Флетчера-Пауелла:

$$a) f(X) = -\frac{x_1 x_2^2 x_3^2}{81}$$

при обмеженнях

$$h_1(X) = x_1^3 + x_2^2 + x_3 - 13 = 0,$$

$$h_2(X) = x_2^2 x_3^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0,$$

$$x_i \geq 0;$$

$$б) f(X) = (x_1 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$$

при обмеженнях

$$h_1(X) = x_1(1 + x_2^2) + x_2^4 - 4 - 3\sqrt{2} = 0,$$
$$0 \leq x_i \leq 3;$$

$$е) f(X) = (x_1 - 1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^4 + (x_5 - 1)^6$$

при обмеженнях

$$h_1(X) = x_1^2 x_4 + \sin(x_4 - x_5) 2\sqrt{2} = 0,$$
$$h_2(X) = x_2 - x_3 x_4^2 - 8 - \sqrt{2} = 0;$$

$$з) f(X) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

при обмеженні

$$h(X) = x_1 + x_2 - 5 = 0;$$

$$д) f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

при обмеженнях

$$h_1(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 7 = 0,$$
$$h_2(X) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 - \frac{9}{2} = 0.$$

Контрольне запитання

Відміна методу Флетчера-Пауелла від методу послідовної безумовної оптимізації.

4.2 МЕТОДИ ЛІНІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Проективні методи.

Методи лінійного програмування вдало застосовується для розв'язування задач великої розмірності при лінійних обмеженнях у вигляді рівностей і нерівностей, тому є очевидним спосіб розв'язування задач нелінійного програмування за допомогою процедури лінеаризації, реалізованої за схемою ітераційного процесу. Проективні методи /інколи їх ще називають методами припустимих напрямків, або градієнтними методами з великою довжиною кроку/ полягають у такому: лінійні чи лінеаризовані обмеження утворюють лінійну різноманітність, що визначається перетином обмежень, на які можна спроеціювати вибраний напрямок пошуку S у просторі розв'язків. Всі проективні методи припускають реалізацію на кожному K -му етапі такої послідовності кроків:

1) алгоритм починає працювати у припустимій точці $X^{(k)}$,

2) визначається припустимий напрям $S^{(k)}$,

3) у припустимому напрямку вибирається крок довжиною $\lambda^{(k)}$, що мінімізує $f(X)$, але водночас зберігає вектор $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda^{(k)} S^{(k)}$ припустимим.

Алгоритм проєктивних методів розрізняється способом визначення напрямку $S^{(k)}$, але пошук розпочинається з припустимого розв'язку і розвивається /при лінеаризованих обмеженнях / у напрямі, що забезпечує зменшення цільової функції при збереженні поточної точки X всередині припустимої області. Проективні методи не вимагають, щоб усі обмеження у вигляді нерівностей були замінені еквівалентною системою обмежень у вигляді рівностей шляхом введення послаблювальних змінних /подібно тому, як це має місце в лінійному програмуванні/, вони на кожному ітераційному кроці підключають до

обчислювального процесу якомога меншу кількість нерівностей з числа активних обмежень. У випадку, коли на перетин підмножини обмежень проєціюється градієнт цільової функції у точці $X^{(k)}$, метод оптимізації називається методом проєкції градієнта.

Метод проєкції градієнта

Одним з ефективних і широко використовуваних проєктивних методів є метод проєкції градієнта, або метод Розена. Цей метод мінімізації є методом найшвидшого спуску. Він застосовується у поєднанні з ортогональним проектуванням від'ємного градієнта на лінійне різноманіття обмежень або їх апроксимації. У припустимій точці $X^{(k)}$ обмеження, що мають вигляд рівностей (активні обмеження), лінеаризуються (якщо вони є нелінійними) і тимчасово замінюються відповідними гіперплощинами.

Поняття “зведений базис” або “базис за наявності обмежень” означає сукупність лінійно незалежних гіперплощин, перетини яких обмежують область пошуку. Основною особливістю методу є те, що він перетворює (проєціює) градієнт цільової функції так, що його складові лежать в $(n-l)$ – вимірному різноманітті (визначає припустиму область, в якій задовольняються l обмежень у вигляді рівностей).

Проекція градієнта цільової функції $\nabla f(X^{(k)})$ на активні обмеження визначає новий напрям пошуку $S^{(k+1)}$:

$$S^{(k+1)} = P_l \nabla f(X^{(k)}) = \nabla f(X^{(k)}) - A_l^t (A_l A_l^t)^{-1} A_l \nabla f(X^{(k)}), \quad (4.24)$$

де P_l – n -мірна квадратна проєціююча матриця, що обчислюється з допомогою співвідношення

$$P_l = I - A_l^t (A_l A_l^t)^{-1} A_l,$$

A_l – матриця розміром $n \times l$ частинних похідних активних обмежень,

$$A_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(X^{(k)})}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial g_1(X^{(k)})}{\partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_l(X^{(k)})}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial g_l(X^{(k)})}{\partial X_n} \end{bmatrix}.$$

Вираз $(A_l A_l^t)^{-1} A_l \nabla f(X^{(k)}) = U$ можна розглядати як вектор-стовпець, елементами якого є множники Лагранжа (так звані тіньові параметри). Новий напрям визначається так:

$$S^{(k+1)} = \nabla f(X^{(k)}) - A_l^t U. \quad (4.25)$$

Якщо якась зі складових U_i від'ємна, відповідне обмеження у вигляді нерівності можна виключити із зведеного базису до того, як буде продовжений пошук. Якщо активні обмеження нелінійні, то складові вектора нового напрямку лежатимуть на гіперплощинах, дотичних до обмежень у точці $X^{(k)}$. Якщо активні обмеження лінійні, складові вектора нового напрямку $S^{(k+1)}$ лежатимуть на самих обмеженнях.

Для задачі нелінійного програмування з лінійними обмеженнями алгоритм починає роботу з припустимої точки і продовжує ефективно діяти як метод найшвидшого спуску доти, поки не буде досягнута точка, для якої стають активними одне або кілька обмежень. Якщо задача містить обмеження у вигляді рівностей, то активні обмеження мають місце на кожному етапі обчислювального процесу.

Основний алгоритм проєкцій градієнта

Задані припустимі точка $X^{(k)}$ і похибка збіжності $\varepsilon > 0$.

Крок 1. Обчислити проєціюючу матрицю $P = I - A_l^t (A_l A_l^t)^{-1} A_l$ у припущенні, що вектори A_l лінійно незалежні і вектор у напрямку проєкції $\nabla f(X^{(k)})$

$$S^{(k)} = - \frac{P_l \nabla f(X^{(k)})}{\| P_l \nabla f(X^{(k)}) \|}. \quad (4.26)$$

Крок 2. Якщо $P_l \nabla f(X^{(k)}) = 0$, то обчислити множники Лангранжа:

$$U = (A_e A^T)^{-1} A_e \nabla f(X^{(k)})$$

Якщо $U_l \geq 0$ для всіх значень $i=1, \dots, l$, то $X^{(k)}$ – шуканий розв'язок, оскільки він задовольняє умові Куна-Таккера. У протилежному разі добираємо таке значення $U_m < 0$, для якого значення виразу $\|a_m\| U_m$ від'ємне і максимальне за модулем, нехтуємо і відповідною гіперплощиною, викреслюємо у матриці A_l m -й рядок і переходимо до кроку 1.

Якщо $P_l \nabla f(X^{(k)}) \neq 0$, перейти до кроку 3.

Крок 3. Визначити максимальну довжину кроку

$$\lambda^* = \max \{ \lambda \mid X^{(k)} + \lambda S^{(k)} \in R \},$$

де $R = \{ X \mid g_i(X) \geq 0 \text{ і } h_i(X) = 0, i=1, \dots, P \}$.

Крок 4. Розв'язати задачу одновимірного пошуку:

Мінімізувати (ϕ) при $0 \leq \lambda^{(k)} \leq \lambda^*$. Значення λ^* – максимальна довжина кроку, який можна зробити у напрямку $S^{(k)}$ з точки $X^{(k)}$, не виходячи за межі області R .

Якщо $\lambda^{(k)} < \lambda^*$, то число обмежень у вигляді рівностей, що задовольняються у точці $X^{(k+1)}$ додатково з l обмеженнями, які враховувались у точці $X^{(k)}$ у вигляді рівностей, повинні братись **до уваги нелінійні обмеження, зображені у вигляді рівностей**.

Крок 5. Взяти $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda^* S^{(k)}$ і перейти до кроку 1.

Таким чином, на кожному етапі обчислювального процесу можливі такі варіанти:

- 1) сукупність активних обмежень може залишатися без змін;
- 2) до цих обмежень можна додати одне активне обмеження;
- 3) із сукупності активних обмежень одне обмеження може бути виключене.

У програмі, що реалізує метод Розена, обмежились розв'язанням задачі нелінійного програмування з лінійними обмеженнями для максимізації нелінійної функції

$$f(X) = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

при лінійних обмеженнях на незалежні змінні

$$g_i(X) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Опис алгоритму :

1. задаються координати початкової точки, що задовольняють обмеження, і крок пошуку.

2. Обчислюються значення похідних у початковій точці

$\frac{\partial f}{\partial X_i}$ ($i=1, 2, \dots, n$) і компоненти нормалізованого вектора напрямку

$$S_i = \frac{\frac{\partial f}{\partial X_i}}{\sqrt{\sum_{g=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2}}.$$

Якщо $\frac{\partial f}{\partial X_i} \leq E_i$ (E – попередньо задане число), пошук припиняється і потрібна точка вважається знайденою.

3. Обчислюються координати нової точки:

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \lambda_i S_i, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Розраховується значення функції цілі. Потім аналізуються такі можливості:

а/ якщо є покращання значення функції цілі без порушення обмежень, крок пошуку подвоюється, компоненти нового вектора напрямку обчислюються у здобутій точці і процес пошуку триває ;

б/ якщо значення функції у новій точці не покращилось, крок пошуку зменшується вдвічі і пошук продовжується з попередньої точки;

в/ якщо значення функції у новій точці покращилось, але при цьому порушені одне чи кілька обмежень, необхідно повернутися до попередньої точки, яка знаходиться у перебуває області, і крок пошуку змінити так, щоб нова точка потрапила на порушені в результаті попереднього кроку обмеження. Після цього визначається новий вектор напрямку вздовж обмежень:

$$S_i = \frac{\frac{\partial f}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^l U_k \frac{\partial g_k}{\partial X_i}}{\sqrt{\sum_{g=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^l \left(U_k \frac{\partial g_k}{\partial X_i} \right) \right)^2}}, \quad i=1,2,\dots,n,$$

де l – кількість порушених обмежень.

Параметри $U_k / k=1,2,\dots,l$ / можна знайти з таких l рівнянь:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^l \left(U_g \frac{\partial g_i}{\partial X_i} \frac{\partial g_k}{\partial X_i} \right) = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_k}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_i} \right).$$

Якщо $\frac{\partial f}{\partial X_j} + \sum_{k=1}^l \left(U_k \frac{\partial g_k}{\partial X_j} \right) \leq E$ для $j=1,2,\dots,n$, пошук вважається завершеним. У

протилежному разі пошук відновлюється у новому напрямку.

Завдання для самостійної роботи

Система, що складається з трьох послідовно з'єднаних теплообмінників (рис.4.15), реалізує звичайний поетапний процес теплообміну без повторних циклів.

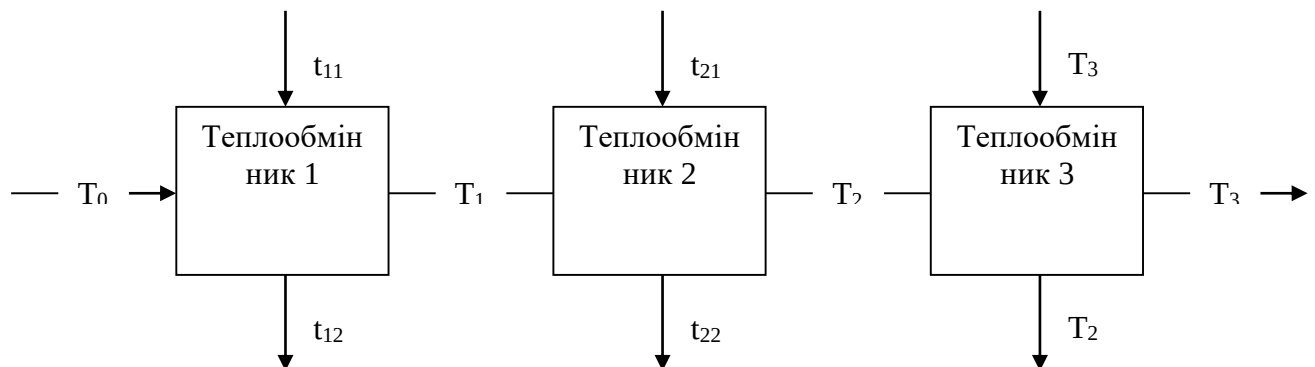


Рис. 4.15. Схема поетапного процесу теплообміну

Процес теплообміну здійснюється так: холодна рідина нагрівається у кожному теплообміннику гарячою рідиною, потік якої перпендикулярний до потоку рідини, що нагрівається. Припустимо, що кожний з теплообмінників можна описати з допомогою стаціонарної моделі:

$$WC_p (T_n - T_{n-1}) = \alpha_n F_n (t_{n1} - T_n)$$

Вважатимемо, що швидкість усіх потоків однакова й дорівнює W , а також припустимо, що теплоємність рідини у будь-якому вузлі системи постійна і дорівнює C_p . Задача полягає у визначенні площі поверхні теплообміну F для кожного з теплообмінників такою, щоб сумарна площа, яка забезпечує теплообмін у системі, була мінімальною. Наводимо постійні коефіцієнти моделі:

$$T_0 = 37,7 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_0 = 260 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$WC_p = 34 \cdot 10^5 \text{ Дж/град}$$

$$t_{11} = 149 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t_{21} = 205 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t_{31} = 315 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\alpha_1 = 1200 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{град)}$$

$$\alpha_2 = 800 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{град)}$$

$$\alpha_3 = 400 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{град)}$$

Контрольні запитання

1. Чи обов'язково проєціююча матриця має бути додатньо визначеною?
2. Яким чином завдання межі значень змінних краще за все використати у методі проєкцій градієнта?

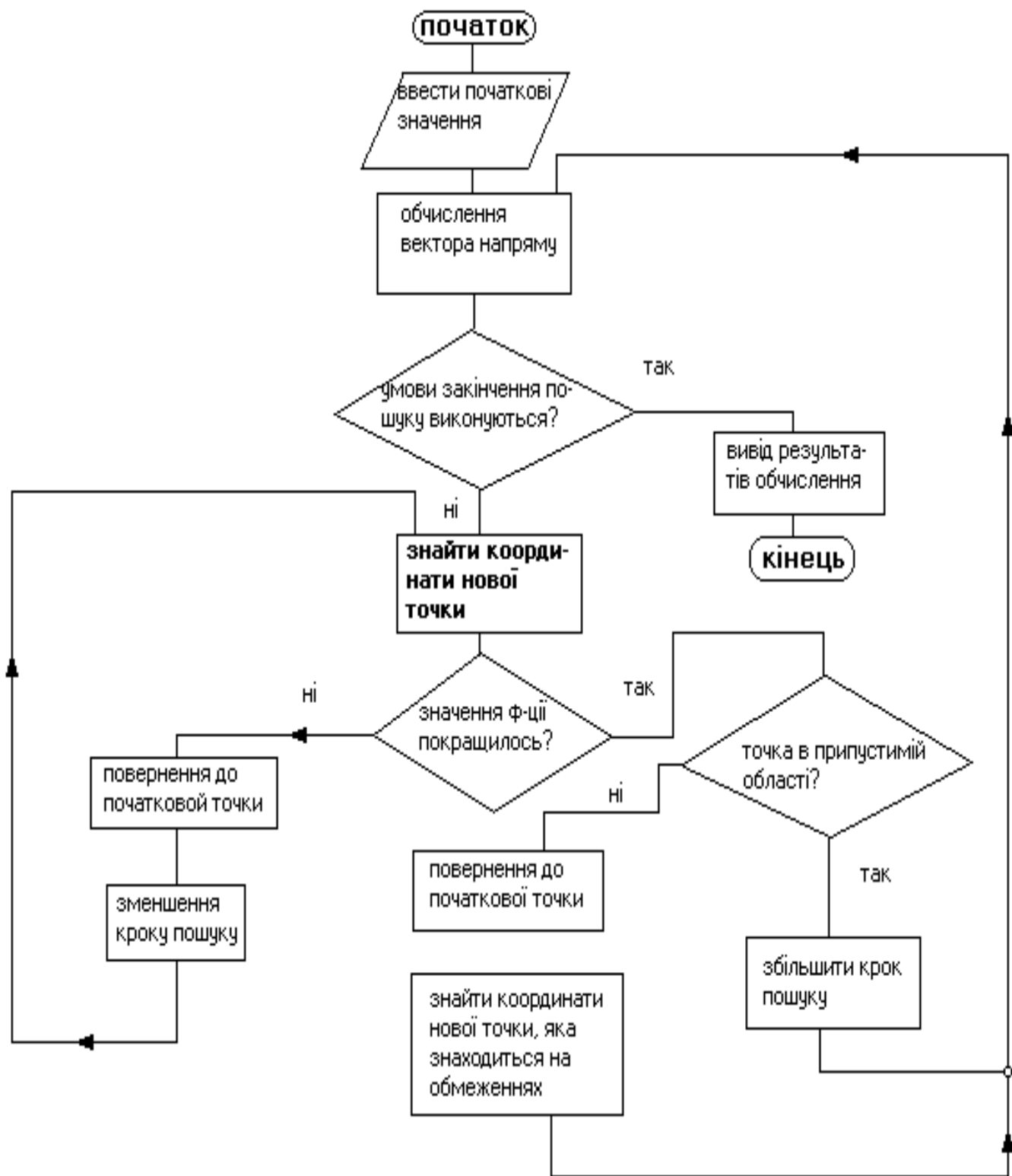


Рис 4.16. Схема алгоритму методу Розена

4.3. МЕТОДИ ПРЯМОГО ПОШУКУ В ЗАДАЧАХ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Як і в задачах безумовної оптимізації, необхідність розробки методів прямого пошуку, коли використовуються лише цільова функція і обмеження, пов'язана з тим, що доводиться розв'язувати задачі, в яких функції розривні або недиференційовані. Всі методи прямого пошуку вимагають, щоб обмеження задачі були задані лише у вигляді нерівностей через труднощі одержання припустимої точки в задачі з обмеженнями у вигляді рівностей.

Найпростіший спосіб виключення обмеження у вигляді рівності полягає у розв'язанні його відносно однієї зі змінних з наступним виключенням цієї змінної шляхом підстановки здобутого виразу у співвідношення, що описують задачу. При цьому слід пам'ятати, що верхні й нижні межі значень змінних, які виключаються, зберігаються в задачі у вигляді обмежень-нерівностей.

Приклад 4.1

Мінімізувати $f(X)=X_1^2+4X_2^2+X_3^2$

при обмеженнях $h_1(X)=X_1+X_2^2-2=0$; $-1\leq X_1\leq 1$; $0\leq X_2\leq 2$; $0\leq X_3\leq 2$.

З першого обмеження X_1 можна виразити $X_1=2-X_2^2$. Після підстановки виразу X_1 через X_2 цільова функція набуває вигляду

$$f(X)=(2-X_2^2)^2+4X_2^2+X_3^2.$$

Оскільки значення X_1 повинно знаходитись у визначених межах, необхідно виконання нерівностей

$$-1\leq 2-X_2^2\leq 1.$$

Задача зменшення розмірності набуде вигляду:

Мінімізувати $f(X)=(2-X_2^2)^2+4X_2^2+X_3^2$;

при обмеженнях

$$\begin{cases} 1 \leq X_2 \leq \sqrt{3}; \\ 0 \leq X_3 \leq 2. \end{cases}$$

Якщо не враховувати межі значень змінної X_1 , то оптимальним розв'язком останньої задачі буде $X_2^*=X_3^*=0$. Звідси $X_1^*=2$, що суперечить початковим умовам.

Замість алгебраїчної підстановки зручніше й надійніше включати до програми обчислення цільової функції й обмежень у вигляді нерівностей вирази, отримані при розв'язуванні рівнянь-обмежень відносно якоїсь невідомої як визначення цієї змінної. Можна також здійснювати виключення обмежень-рівностей неявним чином, розв'язуючи чисельно рівняння відносно залежних змінних при заданих значеннях незалежних оптимізуючих змінних.

Алгоритми методів прямого пошуку починають працювати з припустимої точки. Звичайно користуються такими трьома способами відшукування припустимої точки: випадковий пошук, мінімізація штрафної функції за відсутності обмежень і послідовна мінімізація за наявності обмежень. Теоретично найпростіший спосіб дістати початкову припустиму точку полягає у генерації за допомогою датчика псевдовипадкових чисел (така програма є у програмному забезпеченні обчислювальних машин) пробної точки і в перевірці її на припустимість підстановкою в обмеження. За заданими верхніми й нижніми межами кожної змінної розраховуються

$$X_i=X_i^{(L)}+r_i(X_i^{(U)}-X_i^{(L)}), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Тут r_i – випадкові числа, рівномірно розподілені в межах інтервалу $[0,1]$.

Отримана точка перевіряється на припустимість обчисленням функції, що входять до обмежень задачі. Процес продовжується доти, поки не буде знайдено точку, яка задовольняє всім обмеженням. Для задач великої розмірності або з вузькою припустимою областю необхідно використовувати інші способи пошуку припустимої точки.

Застосування методів прямого пошуку до задач з обмеженнями полягає у тому, що нескладний спосіб зменшення кроку пошуку, коли прийнятий крок приводить до неприпустимої точки, забезпечує здобуття припустимої пробної точки. Потрібно, щоб пошук починався з припустимої точки і щоб наступні базові точки залишались припустимими: це забезпечує можливість скорочення кроку на кожному етапі. Якщо множина напрямів пошуку не піддається корекції, то рух уздовж обмежувальних поверхонь виключається і результати виявляються незадовільними. Ці труднощі можна подолати істотним розширенням множини напрямів пошуку або переходом до процедур випадкового пошуку напрямів.

Метод комплексів

Метод комплексів, що був запрограмований Боксом у 1964 р., є модифікацією симплексного методу Нелдера і Міда, але дає можливість враховувати обмеження.

Задача оптимізації полягає в мінімізації функції

$f(X)=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, де X визначається явними обмеженням

$$X_i^{(L)} \leq X_i \leq X_i^{(U)}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (4.27)$$

А також неявними обмеженнями

$$g_j(X) \leq b_j, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (4.28)$$

Якщо цільова функція $f(X)$ опукла і функція $g_i(X)$ також опукла, то задача матиме єдиний розв'язок.

Даний метод є ітераційним. У першу чергу необхідно вибрати K точок, що задовольняють обмеження, а також обчислити цільову функцію в усіх K . Множина цих точок називається комплексом. Бокс виявив, що число K має бути більшим за $n+1$ числа точок, які використовуються в симплексному методі Нелдера – Міда, і прийняв $K=2n$. Байлс наводить у роботі хороші результати, здобуті при $K=n+2$. Припускається, що точка X_1 , яка задовольняє всім обмеження, задана. Решта точок, що задовольняють нерівності (4.27), може бути вибрана так:

$$X_{ij}=X_i^{(L)}+r(X_i^{(U)}-X_i^{(L)}) \quad (4.29)$$

при $i=1, 2, \dots, n$; $j=2, 3, \dots, k$.

Тут r -псевдовипадкова рівномірно розподілена змінна в інтервалі $[0;1]$.

Якщо точки, що вибираються згідно з рівнянням (4.29), задовольняють нерівність (4.28), то вони приймаються за початкові точки комплексу, у противному разі точка зсувається на половину відстані до центру ваги множини вже прийнятих точок:

$$X_i = \frac{1}{2}(X_i + X_c). \quad (4.30)$$

де $X_c = \frac{1}{i-1} \sum_{l=1}^{i-1} X_l$ - центр ваги.

Після того як множину з K припустимих точок побудовано, у кожній з них обчислюється цільова функція і точка, для якої значення функції найбільше, відкидається. Нову точку дістають шляхом відображення виключеної точки через центр ваги залишкових точок

$$X_r = X_c + \alpha(X_c - X_h). \quad (4.31)$$

Тут X_h – точка з найбільшим значенням функції. Параметр α задає відстань відображення: $\alpha > 1$ відповідає розтягу, $\alpha < 1$ – стисненню.

Коли знайдено нову точку, обчислено значення цільової функції та функцій, що входять в обмеження, можливі такі випадки.

1. Нова точка припустима, і значення цільової функції в ній не збігається з максимальним значенням в усій сукупності точок. У цьому разі вибираємо точку з максимальним значенням функції і знову виконуємо операцію відображення.

2. Нова точка припустима, і значення цільової функції в ній збігається з максимальним значенням для всієї сукупності точок. Замість того, щоб виконувати

відображення, пересунемо цю точку на половину відстані до попередньо знайденого центру ваги.

3. Нова точка неприпустима. Зменшуємо у два рази відстань до обчисленого раніше центру ваги. Процедура пошуку триває доти, поки многогранник не буде стягненим у центр ваги в межах заданої точності й /або/ поки різниця між значеннями цільової функції у вершинах не стане достатньо малою.

Бокс рекомендує вибирати $\alpha=1,3$. Вибір $\alpha > 1$ компенсує

стискання комплексу, зумовлене скороченням у два рази відстані до центру ваги.

Задано початкову строго припустиму точку X_1 , параметр відображення α і параметр обчислень ε і δ . Для ітераційної процедури методу комплексів необхідні такі кроки.

Крок 1. побудова початкового комплексу, що складається з K припустимих точок. Для кожної точки $K = 1, 2, \dots, K-1$:

а) випадковим чином визначити координати X_{ik} ;

б) якщо X_k – неприпустима точка

$$X_k = \frac{X_k + X_c}{2};$$

цю процедуру повторяти доти, поки X_k не стане припустимою;

в) якщо X_k – припустима точка, повторювати п.а доти, поки $k=K$;

г) обчислити $f(X_k)$ для $K=0, 1, \dots, K-1$.

Крок 2. Відображення комплексу:

а) вибрати точку X_h , для якої $f(X_h) = \max f(X_k) \equiv F_{\max}$;

б) знайти центр ваги X_c і нову точку $X_r = X_c + \alpha(X_c - X_h)$;

в) якщо X_r – неприпустима точка і $f(X_r) \geq F_{\max}$, зменшити в два рази відстань між X_r і центром ваги X_c ; продовжувати пошук, поки $f(X_r) < F_{\max}$;

г) якщо X_r – неприпустима точка і $f(X_r) < F_{\max}$, перейти до кроку 4.

Д) якщо X_r – неприпустима точка, перейти до кроку 3.

Крок 3. Коректування для забезпечення припустимості:

а) якщо $X_r < X^{(L)}$, покласти $X_r = X^{(L)}$;

якщо $X_r > X^{(U)}$, покласти $X_r = X^{(U)}$;

б) якщо X_r – неприпустима точка, зменшити вдвічі відстань до центра ваги; процедуру продовжувати, поки X_r не стане припустимою точкою.

Крок 4. Перевірка умов закінчення обчислень:

а) покласти

$$\bar{f} = \frac{1}{K} \sum_k f(X_k) \quad \text{і} \quad \bar{X} = \frac{1}{K} \sum_k X_k;$$

б) якщо $\sum_k (f(X_k) - \bar{f})^2 \leq \varepsilon$ і $\sum_k (X_k - \bar{X}) \leq \delta$,

обчислення припинити; у противному разі перейти до виконання п. А кроку 2.

Схема алгоритму методу комплексів зображена на рис.4.17.

Завдання

Використайте метод комплексів для реалізації функцій:

а) $f(X) = x_1^2 + x_2^2$, при $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 5$;

б) $f(X) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2$, при $x_1^2 + 2x_2 \leq 1, x_1 + 2x_2 \leq 1$;

в) $f(X) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$, при $x_1 > 0, x_2 \geq 0, x_2 + x_1 \geq 4$;

г) $f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, при $1 - x_2^{-1}x_3 \geq 0, x_1 - x_3 \geq 0, x_1 - x_2^2 + x_2x_3 - 4 = 0$,
 $0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 3$.

Завдання для самостійної роботи

Спроекувати прямокутну конструкцію у формі паралелепіпеда з відкритою передньою стінкою. Конструкція повинна мати об'єм 16000м^3 . Периметр її основи не повинен перевищувати 220м, глибина – бути більшою за 60 метрів, а ширина – за 80 метрів. Крім того, ширина не повинна перевищувати потроєної глибини, а висота – $2/3$ ширини. Вартість 1м^2 гофрованого матеріалу, з якого виготовляють дах і три стінки конструкції – 1 грн.

Визначити розміри конструкції таким чином, щоб мінімізувати вартість матеріалів.

Контрольні запитання

1. Чому необхідно виключити обмеження у вигляді рівностей при використанні методів прямого пошуку?
 2. З якої причини використовується більше ніж $N+1$ точка у алгоритмі комплексів?
 3. Навіщо необхідна опуклість для вдалого застосування алгоритму комплексів?
 4. Чому в алгоритмі комплексів використовується процедура повернення?
- б) Визначити напрямок оптимізаційного пошуку з початкової внутрішньої точки $X^{(0)}=[0,748\ 0,548]^T$;
- в) Знайти вектор $X^{(1)}$;
- г) Чи може одна з точок $X^{(k)}$ бути поза допустимої області?

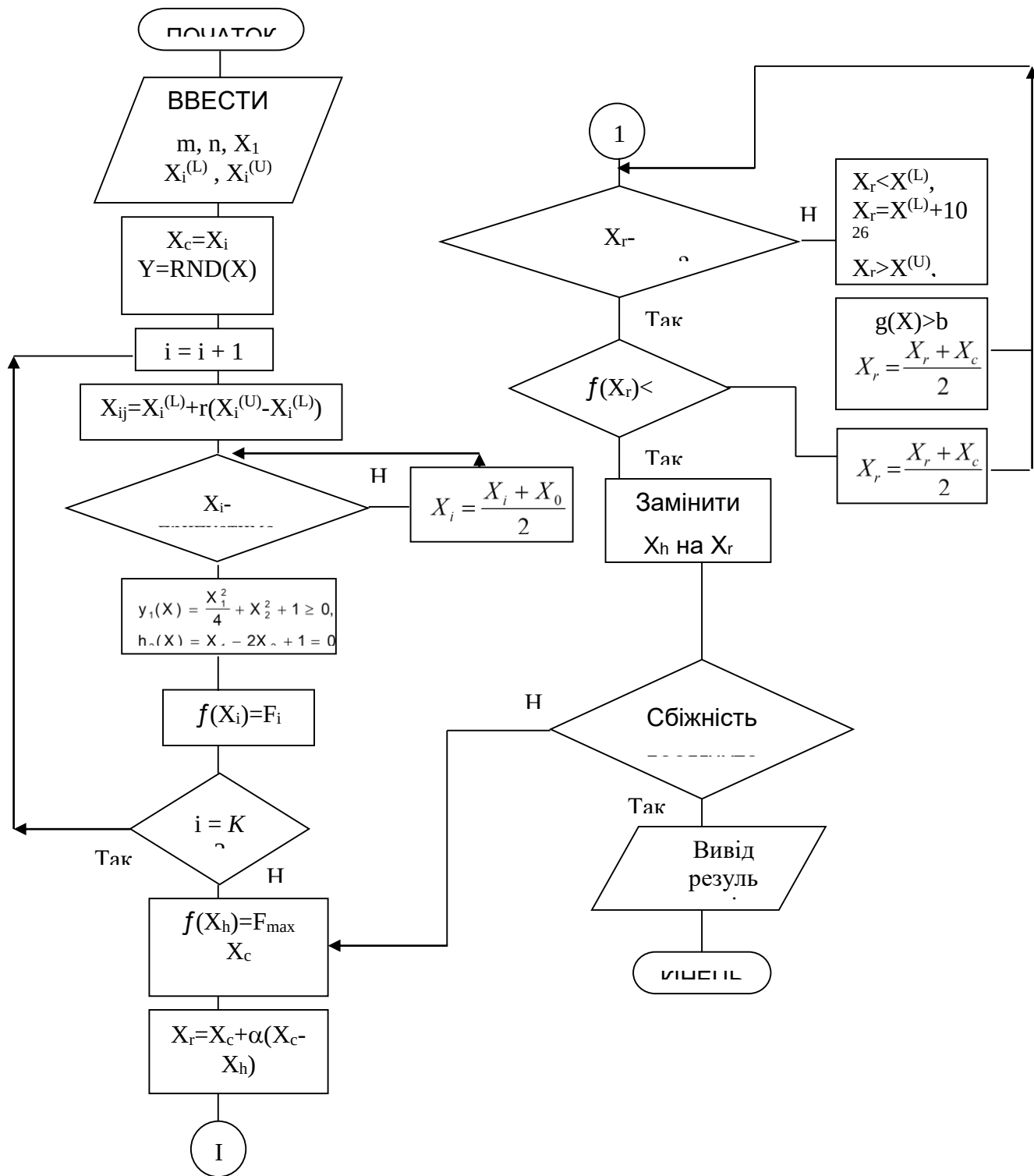


Рис 4.17. Схема алгоритму методу комплексів

5. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАДІЄНТНИХ МЕТОДІВ В ОДНОКРОКОВИХ ПРОЦЕДУРАХ ВИБОРУ РІШЕНЬ

Розглянемо задачу мінімізації функції вартості

$$J = F(X, U) \quad (5.1)$$

шляхом підбору значення вектора u при обмеженні у формі наступної рівності:

$$f(X, U) = 0 \quad (5.2)$$

Тут X – вектор стану, f – n -вектор, U – m -вектор, а F – скалярна функція. Сформульована проблема є задачею нелінійного програмування чи задачею однокрокового рішення. Можна ввести

$$L(X, \lambda, U) = F(X, U) + \lambda^T f(X, U) \quad (5.3)$$

Розрахуємо та прирівняємо нульовому вектору градієнт виразу (5.3) відносно вектора U :

$$\frac{\partial L}{\partial U} = \frac{\partial F(X, U)}{\partial U} + \left[\frac{\partial f^T(X, U)}{\partial U} \right] \lambda = 0 \quad (5.4)$$

Таким самим чином можна отримати співвідношення

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial F(X, U)}{\partial X} + \frac{\partial f^T(X, U)}{\partial X} \lambda = 0 \quad (5.5)$$

Останні дві рівності є першою необхідною умовою мінімуму функції J . В доповнення до цього повинна виконуватись також і наступна умова:
матриця

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial L}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \\ \left[\frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial X} \right]^T & \frac{\partial}{\partial U} \frac{\partial L}{\partial U} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

повинна бути невід’ємно визначеною впродовж “траєкторії” $f(X, U)=0$. В загальному випадку взагалі не вдається розв’язати систему нелінійних алгебраїчних рівнянь. Так як, при $f(X, U)=0$ маємо $J=L$, то поклавши $\partial L / \partial X = 0$, приблизно одержимо

$$\Delta J = \left[\frac{\partial L}{\partial U} \right]^T \Delta U \quad (5.7)$$

Якщо зараз необхідно забезпечити найбільшу зміну ΔJ значення функції J , то можна розрахувати градієнт $\partial L / \partial U$ та нове значення J знайти після введення приросту ΔU , напрямом якого протилежний одержаному градієнту:

$$\Delta U = -K \left[\frac{\partial L}{\partial U} \right] \quad (5.8)$$

В результаті маємо, що зміна значення функції визначається виразом

$$\Delta J = -K \left[\frac{\partial L}{\partial U} \right]^T \left[\frac{\partial L}{\partial U} \right] \quad (5.9)$$

Ця процедура розрахунку починається з неоптимального вектора керування U^N . Для цього вектора керування треба знайти значення X^N вектора X , яке задовольняє рівності, тобто

$$f(X^N, U^N) = 0 \quad (5.10)$$

Далі з (5.5) для забезпечення виконання умови $\partial J / \partial X^N = 0$ знаходимо значення невизначеного множника

$$\lambda^N = - \left[\frac{\partial f^T(X^N, U^N)}{\partial X^N} \right]^{-1} \frac{\partial f(X^N, U^N)}{\partial X^N} \quad (5.11)$$

Нарешті, на основі (5.3) розрахуємо градієнт

$$\frac{\partial L}{\partial U^N} = \frac{\partial f(X^N, U^N)}{\partial U^N} + \left[\frac{\partial f^T(X^N, U^N)}{\partial X^N} \right] \lambda^N \quad (5.12)$$

Цей вектор буде нульовий тільки в тому випадку, коли виконується відмічена вище умова мінімуму. Одержане значення градієнта зараз дозволяє знайти за формулою (5.8) такий приріст вектора U , при якому забезпечується найшвидший спуск, а саме

$$\Delta U^N = -K \left[\frac{\partial L(X^N, \lambda^N, U^N)}{\partial U^N} \right] \quad (5.13)$$

Нове значення вектора U , таким чином, визначається за формулою

$$U^{N+1} = U^N + \Delta U^N \quad (5.14)$$

В свою чергу дане значення дозволяє знайти нові значення X^{N+1} , λ^{N+1} векторів X , λ і так далі. Ці розрахунки повторюються до тих пір, доки зміни значення функції вартості

$$\Delta J^N = -K \left[\frac{\partial L(X^N, \lambda^N, U^N)}{\partial U^N} \right]^T \left[\frac{\partial L(X^N, \lambda^N, U^N)}{\partial U^N} \right] \quad (5.15)$$

на двох сусідніх кроках даного ітераційного процесу не буде менше деякої заданої малої величини.

Приклад 5.1

З метою ілюстрації послідовності розрахунків при використанні даного градієнтного методу розглянемо задачу мінімізації функції $J = X^2 + U^2$ при обмеженні у формі рівності

$XU=1$. Ця задача може бути легко вирішена аналітично. Вираз (5.3) тут має вигляд $L=X^2+U^2+\lambda(XU-1)$, а рівняння $\partial H/\partial U=\partial H/\partial X=0$ призводять до рішення $U=\pm 1$, $X=\pm 1$, $\lambda=-2$, $J_{\min}=2$. Припустимо, що рішення цієї задачі невідоме. Виберемо початкове значення $U=U^0$. Згадані вище рівняння з (5.10) по (5.15) для даного прикладу приймають наступний вигляд

$$f(X^N, U^N) = 0 = X^N U^N - 1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2X + \lambda U = 0; \quad \lambda^N = - \left[\frac{\partial f^T}{\partial X^N} \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial X^N} = - \frac{2X^N}{U^N},$$

$$\frac{\partial L}{\partial U^N} = \frac{\partial F}{\partial U^N} + \left[\frac{\partial f^T}{\partial U^N} \right] \lambda^N = 2U^N + X^N \lambda^N,$$

$$\Delta U^N = -K \frac{\partial L}{\partial U^N} = -K(2U^N + X^N \lambda^N) = -2K \left[U^N - \frac{1}{(U^N)^3} \right],$$

$$\Delta J^N = -K \left[\frac{\partial L}{\partial U^N} \right]^T \left[\frac{\partial L}{\partial U^N} \right] = -K(2U^N + X^N \lambda^N)^2,$$

$$U^{N+1} = U^N - \Delta U^N$$

Таким чином для даної задачі послідовні значення керування одержуються шляхом рішення різницевого рівняння

$$U^{N+1} = U^N - 2K \left[U^N - \frac{1}{(U^N)^3} \right]$$

Послідовні етапи обчислень при використанні приведеної вище градієнтної процедури “першого порядку” полягає в наступному:

1. Обчислити чергове значення вектора U^i .
2. З рівняння $f(X^i, U^i)=0$ знаходимо X^i .
3. Вектор λ^i визначаємо за формулою

$$\lambda^i = - \left[\frac{\partial f^T(X^i, U^i)}{\partial X^i} \right]^{-1} \frac{\partial F(X^i, U^i)}{\partial X^i}$$

4. Знаходимо похідні

$$\frac{\partial L(X^i, U^i, \lambda^i)}{\partial U^i} = \frac{\partial F(X^i, U^i)}{\partial U^i} + \frac{\partial f^T(X^i, U^i)}{\partial X^i} \lambda^i$$

5. Обчислюємо чергове значення вектора

$$U^{i+1} = U^{(i)} - K^i \left[\frac{\partial L(X^i, U^i, \lambda^i)}{\partial U^i} \right]$$

6. Ця послідовність обчислень повторюється, якщо значення керування U змінюється від ітерації до ітерації і обчислення припиняються, коли значення U практично не змінюється.

У деяких випадках виявляється можливим отримати явне рівняння (5.2) відносно n -вектора X , представивши тим самим його компоненти у вигляді функції від m – мірного вектора U . Підставивши знайдене рівняння у (8.1), прийдемо до виразу скалярного показника якості, що має тільки m компонент вектора керування. У цьому випадку немає необхідності звертатися до методу множників Лагранжу. Але такий спосіб часто є нереалізованим.

Розглянемо ще один підхід, відомий як метод проекції градієнта. В околі точки, що визначається деякими номінальними значеннями $\bar{X}$ і $\bar{U}$ векторів X і U , для функції (5.2) можна ввести лінійну апроксимацію і записати

$$f(X, U) \approx f(\bar{X}, \bar{U}) + \left[\frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right] (X - \bar{X}) + \left[\frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right] (U - \bar{U}) = 0 \quad (5.16)$$

Якщо припустити, що умова (5.2) виконується при $X = \bar{X} + \Delta \bar{X}$ і $U = \bar{U} + \Delta \bar{U}$, то складову $f(\bar{X}, \bar{U})$ в останньому виразі можна опустити. Це припущення приводить до наступної системи лінійних рівнянь відносно $\Delta \bar{X}$ і $\Delta \bar{U}$:

$$\left[\frac{\partial f(X, U)}{\partial \bar{X}} \right] \Delta \bar{X} + \left[\frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right] \Delta \bar{U} = 0 \quad (5.17)$$

де $\Delta \bar{X} = X - \bar{X}$, $\Delta \bar{U} = U - \bar{U}$. Цю систему можна вирішити відносно вектора приросту $\Delta \bar{X}$, оскільки матриця $\partial f / \partial X$ повинна мати обернену. Отримані рішення можна підставити у (5.1) і знайти градієнт функції вартості F чи J при указаних обмеженнях. У геометричній інтерпретації цей спосіб зведеться до обчислень проекції градієнта, обчисленого без урахування обмежень на m -мірному просторі значень вектора керування, що визначається як перетин n гіперплощин (5.17).

$$\Delta J = \left[\frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right]^T \Delta \bar{X} + \left[\frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right]^T \Delta \bar{U} \quad (5.18)$$

На підставі (17) цей вираз можна переписати:

$$\Delta J = \left\{ - \left[\frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right]^T \left[\frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{X}} \right]^{-1} \left[\frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right] + \left[\frac{\partial F(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right]^T \right\} \Delta \bar{U} \quad (5.19)$$

Матриці, що заключені у квадратні дужки у формулі (5.19), співпадають з відповідними матрицями в (5.4) і (5.5), що ілюструє еквівалентність двох розглянутих підходів.

При застосуванні метода градієнта другого порядку чи метода Ньютона, приріст вектора керування визначається співвідношенням

$$\Delta U^{-N} = - \left[\frac{d^2 F(U^N)}{(dU^N)^2} \right]^{-1} \frac{dF(U^N)}{dU^N} \quad (5.20)$$

Спряжений метод градієнту, що описаний вище, зберігає кращі якості методів градієнту першого і другого порядку і зменшує їх недоліки. Замість обчислення матриці $\left[\frac{d^2 F}{dU^2} \right]^{-1}$ він передбачає побудову послідовності векторів напрямків $S^1, S^2, \dots$, котрі є

спряженими з валовою матрицею $\frac{\partial^2 F(U)}{(\partial U)^2}$, тобто

$$(S^i)^T \left[\frac{d^2 F(U^i)}{(dU^i)^2} \right] S^j = 0, \quad i \neq j \quad (5.21)$$

Потім реалізується пошук вздовж кожного вектора S^N з метою знайти оптимальну довжину кроку у тому напрямку, в якому повинен продовжуватись рух. Таким чином, використовується співвідношення

$$U^{N+1} = U^N - K^N S^N \quad (5.22)$$

де K^N – додатня скалярна величина, що вибирається оптимально.

$$K^N = \min_{K_n} F(U^N - K^N S^N) \quad (5.23)$$

В результаті реалізується оптимальний градієнтний метод. На практиці обчислення оптимального значення для скаляра K^N може виявитися складним. У цьому випадку можна виділити декілька передбачуваних значень для K^N в околі значення цієї величини на попередньому кроку і вибрати з них таке значення, котре забезпечує мінімум (5.23). Обчислення реалізується таким чином:

1. Вибираємо значення U^i .
2. Визначаємо $S^i = \frac{\partial F(U^i)}{\partial U^i}$
3. Знаходимо K^i , при якому функція $F(U^i - K^i S^i)$ має мінімальне значення.
4. Обчислюємо нове значення $U^{i+1} = U^i - K^i S^i$.
5. Вибираємо новий напрямок руху вздовж вектора

$$S^{i+1} = - \frac{\partial F(U^{i+1})}{\partial U^{i+1}} + S^i \frac{\left(\frac{\partial F(U^{i+1})}{\partial U^{i+1}} \right)^T \left(\frac{\partial F(U^{i+1})}{\partial U^{i+1}} \right)}{\left(\frac{\partial F(U^i)}{\partial U^i} \right)^T \left(\frac{\partial F(U^i)}{\partial U^i} \right)}$$

6. Повторюємо обчислення на новому кроці ітераційної процедури, починаючи з пункту 3, доки не виконаються умови збіжності алгоритму.

Розглянемо вирішення задачі мінімізації функції (2.1) при обмеженні (2.2) і додатковому обмеженні у формі q нерівностей $g(X)=0$, де $q \leq n-1$. Скориставшись методом множників Лагранжу, запишемо

$$L(X, \lambda, \Gamma, U) = F(X, U) + \lambda^T f(X, U) + \Gamma^T g(X)$$

Записавши умови $\partial L / \partial U = 0$ і $\partial L / \partial X = 0$, отримаємо нелінійні алгебраїчні вектори рівняння, котрі визначають необхідні умови мінімуму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(X, U)}{\partial U} + \left[\frac{\partial f(X, U)}{\partial U} \right]^T \lambda &= 0, & f(X, U) &= 0 \\ \frac{\partial F(X, U)}{\partial X} + \left[\frac{\partial f(X, U)}{\partial X} \right]^T \lambda + \left[\frac{\partial g(X)}{\partial X} \right]^T \Gamma &= 0; & g(X) &= 0 \end{aligned}$$

Використати градієнтну процедуру тут неможливо тому, що хоча при будь-якому заданому U можна знайти таке значення вектора X , котре буде задовольняти рівнянню $f(X, U)=0$, але це значення, як правило, не забезпечить виконання умови $g(X) \geq 0$.

Щоб уникнути цих труднощів, можна застосувати метод штрафних функцій.

Відповідно методу штрафних функцій, обмеження у формі рівності на значення вектора стану може бути введене у вихідну функцію вартості за допомогою квадратичного штрафу

$$J = F(X, U) + \lambda^T f(X, U) + g^T(X) N g(X)$$

де N – додатньо визначена діагональна вагова матриця.

Приклад 5.2. Оптимізація плівкового апарата роторного типу в режимі випаровування

Найбільш часто критерієм, що зустрічається для керування випарними апаратами є собівартість процесу випарювання, що пояснюється великою питомою вагою енерговитрат вартості готового продукту. При чому якщо процес розглядається як лінійна система, в якості критерію можна вибрати квадратичний критерій якості

$$I(X, U) = \frac{1}{2} U^T R U + \frac{1}{2} X^T Q X,$$

де R , Q – додатньо визначені матриці вагових коефіцієнтів.

Друга складова функції якості може враховувати обмеження на якість вихідного продукту.

Але вибір критерію оптимальності диктується інтересами всієї технологічної лінії виробництва. Прикладом використання технологічного критерію є випадок, коли ПАРТ представляє “вузьке” місце в виробництві. Задача збільшення продуктивності апарату вирішується шляхом забезпечення умов, при яких в плівкових апаратах роторного типа можлива передача більшої кількості тепла через поверхню нагрівання від гріючої пари до плівки рідини.

Тому в якості критерію керування ПАРТ, коли це в інтересах оптимального керування процесами всієї технологічної лінії виробництва, доцільно вибрати технологічний критерій – продуктивність при заданій концентрації абсолютно сухих речовин у розчині вихідного продукту

$$I = S_K \rightarrow \max \quad (5.24)$$

при $b_K = b_{K30}$

де S'_K - витрати рідини на вихід з апарату, кг/с

b_K - концентрація кінцевого продукту, кг/кг.

Керуючими збуреннями вибрано число обертів ротора і витрати охолоджуючої води на конденсатор. Вибір числа обертів ротора пояснюється намаганням ефективно використовувати плівкові апарати роторного типу за рахунок забезпечення найкращих умов теплообміну в ПАРТ, що досягається при зануренні лопатів ротора у шар рідини. Збільшення числа обертів ротора викликає значну турбулізацію плівки рідини. Границі зміни швидкості обертання ротора вибрані 5,83-25 об/с. На витрати охолоджуючої води також накладені обмеження, що пов'язані з забезпеченням нормального функціонування ПАРТ в режимі випаровування з пропускною здатністю обладнання.

З урахуванням обмежень, що накладаються на керуючі збурення і пов'язаних з ефективним використанням і можливостями технологічного обладнання, задача оптимізації технологічного режиму роботи ПАРТ може бути представлена наступним чином:

$$I = S_K \rightarrow \max$$

$$b_K = b_{K30}, \quad (5.25)$$

$$n_{\min} \leq n \leq n_{\max}, \quad G_{b \min} \leq G_b \leq G_{b \max}.$$

Визначення оптимальних технологічних режимів роботи ПАРТ ґрунтується на рівняннях математичної моделі статичного процесу випаровування.

Рівняння теплового балансу парової рубашки має вигляд

$$G_{II} (i''_{II} - i'_K) - \alpha_{II} F_{CT.H} (\Theta_{II} - \Theta_{CT.K}) = 0 \quad (5.26)$$

де $G_{II}, i''_{II}, \Theta_{II}$ - відповідно витрати гріючої пари, її ентальпія і температура,

α_{II} - коефіцієнт тепловіддачі від гріючої пари до стінки корпусу апарату,

$F_{CT.H}, \Theta_{CT.K}$ - відповідно площа зовнішньої поверхні і температура стінки корпусу.

Оскільки товщина стінки корпусу порівняна з товщиною плівки рідини, температура стінки і її теплоємність вважалися однаковими для будь-якої точки об'єму стінки і рівняння теплового балансу стінки представлена як

$$\alpha_{II} F_{CT.H} (\Theta_{II} - \Theta_{CT.K}) - \alpha_{III} F_{CT.BH} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{III}) = 0 \quad (5.27)$$

де $\alpha_{III}, \Theta_{III}$ - коефіцієнт тепловіддачі від стінки корпусу до плівки і температура плівки,

$F_{CT.BH}$ - внутрішня поверхня стінки корпусу.

В рівнянні теплового балансу для плівки рідини, крім тепла, переданого від гріючої пари, враховувалось тепло підведене за рахунок енергії дисипації, котра залежить від потужності, що витрачається на перемішування

$$S_0 c_0 \Theta_0 + \alpha_{III} F_{CT.BH} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{III}) + LN - W r_{II} - S_K c_K \Theta_{III} = 0 \quad (5.28)$$

де S_0, c_0, Θ_0 - відповідно витрати вихідної рідини, її питома теплоємність і температура;

L - розмірний коефіцієнт;

W, r_{II} - кількість вологи, що випаровується і схована теплота пароутворення,

S_K, c_K - витрати рідини на виході з апарату і питома теплоємність.

Рівняння теплового балансу конденсатора представлені

$$W r_{II} - K_T F_K (\Theta_2 - \Theta_{b_2}) = 0,$$

$$K_T F_K (\Theta_2 - \Theta_{b_2}) + G_b c_b (\Theta_{b_1} - \Theta_{b_2}) = 0, \quad (5.29)$$

де K_T, F_K – коефіцієнт теплопередачі від вторинної пари до охолоджуючої води і поверхня теплообміну;

Θ_2 – температура вторинної пари;

$\Theta_{b_1}, \Theta_{b_2}$ – температура охолоджуючої води на вході і виході з конденсатора,

G_b, c_b – витрати охолоджуючої води і її теплоємність.

Рівняння матеріального балансу по абсолютно сухій речовині має вигляд

$$S_0 b_0 - S_K b_K = 0 \quad (5.30)$$

де $S_K = S_0 - W$.

$$\begin{aligned} L = & -S_K + \lambda_1 [G_{\Pi} (i''_{\Pi} - i'_{K}) - \alpha_{\Pi} F_{CT.H} (\Theta_{\Pi} - \Theta_{CT.K})] + \lambda_2 [\alpha_{\Pi} F_{CT.H} (\Theta_{\Pi} - \Theta_{CT.K}) - \\ & - \alpha_{\Pi\Lambda} F_{CT.BH} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{\Pi\Lambda})] + \lambda_3 [S_0 c_0 \Theta_0 + \alpha_{\Pi\Lambda} F_{CT.BH} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{\Pi\Lambda}) + LN - \\ & - \beta F_M (\zeta_1 \Theta_{\Pi\Lambda} - \zeta_2 \Theta_2) r_{\Pi} - S_K c_K \Theta_{\Pi\Lambda}] + \lambda_4 [\beta F_M (\zeta_1 \Theta_{\Pi\Lambda} - \zeta_2 \Theta_2) r_{\Pi} - G_b c_b (\Theta_{e_2} - \Theta_{e_1})] + \\ & + \lambda_5 [S_0 b_0 - S_K b_K] + \frac{1}{r} (b_K - b_{K30})^2 + r \left(\frac{1}{n - n_{\min}} + \frac{1}{n_{\max} - n} \right) + r \left(\frac{1}{G_b - G_{b\min}} + \frac{1}{G_{b\max} - G} \right) \end{aligned}$$

де λ – множники Лагранжа

r – вагові коефіцієнти.

Задача оптимізації представлена як задача мінімізації. За допомогою штрафних функцій враховувались обмеження на кінцеву концентрацію і керуючі збурення.

Виходячи з необхідних умов оптимальності отримали систему рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta_{\Pi}} = \lambda_1 (G_{\Pi} c_{\Pi} - \alpha_{\Pi} F_{CT.H}) + \lambda_2 \alpha_2 F_{CT.H} = 0 \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta_{\Pi}} = \lambda_1 \alpha_{\Pi} F_{CT.H} + \lambda_2 (\alpha_{\Pi} F_{CT.H} - \alpha_{\Pi\Lambda} F_{CT.BH}) + \lambda_3 \alpha_{\Pi\Lambda} F_{CT.BH} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta_{\Pi\Lambda}} = \lambda_2 \alpha_{\Pi\Lambda} F_{CT.BH} + \lambda_3 (-\alpha_{\Pi\Lambda} F_{CT.BH} - \beta F_M \zeta_1 r - S_K c_K) + \lambda_4 \beta F_M \zeta_1 r_{\Pi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta_2} = (\lambda_3 - \lambda_4) \beta F_M \zeta_2 r_{\Pi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_K} = \lambda_5 S_K + \frac{2}{r} (b_K - b_{K30}) = 0$$

Із зміною числа обертів ротора змінюється коефіцієнт тепловіддачі від стінки корпуса до плівки рідини в режимі випаровування, який з використанням критеріальної залежності для апарату з жорстко закріпленими лопатями представлений у емпіричному вигляді

$$\alpha_{\Pi\Lambda} = K_1 S_0^{0,59} n^{0,663} \quad (5.32)$$

Оскільки поставлена умова забезпечення найкращих умов теплообміну, складовою частиною математичної моделі задачі керування ПАРТ в режимі випаровування є гідродинаміка течії плівки рідини. Відомо, між числом обертів ротора і густиною зрошення існує взаємозв'язок. Тому витрати вихідної рідини повинні відслідковувати зміну швидкості обертання ротора. При зміні числа обертів в діапазоні від 11,6 об/с і вище витрати вихідної рідини можна обчислити за формулою

$$S_0 = \frac{C_2}{n^{0,46}} \quad (5.33)$$

а при зміні швидкості обертів ротора у нижньому інтервалі (5,83-11,6) об/с S_0 обчислюється за формулою

$$S_0 = c_1 n^{1,2} \quad (5.34)$$

де c_1, c_2 - сталі коефіцієнти.

Для відповідних числа обертів ротора і витрат вихідної рідини обчислюється коефіцієнт тепловіддачі від стінки корпусу до плівки рідини в режимі випаровування по критеріальній залежності, представлений у емпіричному вигляді

$$\alpha_{пл} = 1,4497 \cdot 10^{-7} \lambda \rho^{-0,59} \left(\frac{v^2}{g} \right)^{-0,333} d_p^{0,775} \nu^{-0,853} \alpha^{-0,439} \rho_{пл}^{-0,039} r_{пл}^{-0,039} q^{0,039} S_0^{0,59} n^{0,663} \quad (5.35)$$

де $\nu, \rho, \rho_{пл}$ – кінематична в'язкість і густина рідини, густина пара;

λ, α – відповідно, коефіцієнт теплопровідності і температуропроводності;

d_p – діаметр ротора.

При постійних теплофізичних властивостях рідини і конструктивних параметрах коефіцієнт тепловіддачі може мати вигляд

$$\alpha_{пл} = K_1 S_0^{0,59} n^{0,663} \quad (5.36)$$

З урахуванням залежності (5.33) і (5.33) коефіцієнт тепловіддачі можна представити: при $n \geq 11,6$ об/с

$$\alpha_{пл} = K_{22} n^{0,393} \quad (5.37)$$

в діапазоні (5,83 – 11,6) об/с

$$\alpha_{пл} = K_{21} n^{1,371} \quad (5.38)$$

Потужність на перемішування, що витрачається на привід ротора з жорстко закріпленими лопатями за допомогою критеріальної залежності також може бути представлена емпіричними залежностями

для $Re_{ц} > 5 \cdot 10^3$

$$N_2 = 129 \nu^{0,42} \rho^{0,42} g^{-0,73} d_p^{3,15} \left(\frac{z}{3} \right)^{0,58} S_0^{0,58} n^{3,46} \quad (5.39)$$

$$Re_{ц} < 5 \cdot 10^3$$

$$N = 0,94 \cdot 10^6 \nu^{1,16} \rho^{0,42} g^{-0,73} d_p^{1,15} \left(\frac{z}{3} \right)^{0,58} S_0^{0,58} n^3 \quad (5.40)$$

де $Re_{ц} = \frac{n d_p^2}{\nu}$ – центробіжне число Рейнольдса.

З урахуванням залежностей і при умові постійності теплофізичних властивостей рідини і конструктивних параметрів ПАРТ отримали

$$N_2 = K_3 S_0^{0,58} n^{3,46}, \quad (5.41)$$

при $n \geq 11,6$ об/с

$$N_2 = K_{32} n^{3,193} \quad (5.42)$$

при n у діапазоні (5,83–11,6) об/с

$$N_2 = K_{31} n^{4,15} \quad (5.43)$$

Підставивши залежності коефіцієнта тепловіддачі і потужності, що витрачається на перемішування від числа обертів ротора отримали для $n \geq 11,6$ об/с і $Re_{ц} > 5 \cdot 10^3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial n} = & 0,393 K_{22} n^{-0,607} (\Theta_{CT.K} - \Theta_{пл}) (\lambda_3 - \lambda_2) + L K_{32} 3,193 n^{2,193} \lambda_3 - \\ & - r \left[\frac{1}{(n - n_{\min})^2} - \frac{1}{(n_{\max} - n)^2} \right] \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial G_b} = -c_b (\Theta_{b_2} - \Theta_{b_1}) \lambda_4 - r \left[\frac{1}{(G_{b_2} - G_{b_{\min}})^2} - \frac{1}{(G_{b_{\max}} - G_b)^2} \right] \quad (5.45)$$

Для пошуку мінімуму цільової функції реалізовано градієнтну процедуру першого порядку

$$n^{нов} = n^{стар} - k \frac{\partial L}{\partial n} \quad (5.47)$$

де k – крок градієнтного пошуку.

Послідовні етапи обчислень $G_b^{нов} = G_b^{стар} - k \frac{\partial L}{\partial G_b}$ при використанні
приведеної вище градієнтної процедури полягають у наступному:

1. Обчислюємо чергові значення n^N, G_b^N .
2. Для цих значень розв'язуємо рівняння математичної моделі процесу.
3. Вектор λ^N знаходимо вирішивши систему (5.31).
4. Визначаємо похідні $\frac{\partial L}{\partial n^N}$ і $\frac{\partial L}{\partial G_b^N}$.
5. Обчислюємо чергове значення вектора керування

$$n^{N+1} = n^N - k^N \frac{\partial L}{\partial n^N}$$

$$G_b^{N+1} = G_b^N - k^N \frac{\partial L}{\partial G_b^N}$$

6. Ця послідовність обчислень повторюється до тих пір, поки значення n і G_b змінюються і поки не виконаються умови

$$|n^{N+1} - n^N| \leq \varepsilon_1,$$

$$|G_b^{N+1} - G_b^N| \leq \varepsilon_2.$$

В якості початкового значення вагового коефіцієнту використали одиницю ($r^{(0)} = 1$). Для цього значення реалізувався пошук мінімуму за допомогою градієнтної процедури.

Після рішення кожної підзадачі безумовної мінімізації вагові коефіцієнти зменшувались за допомогою співвідношення $r^{(k)} = r^{(k-1)} / 4$. Для контролю за збіжністю алгоритму застосували умову

$$|S_k^{(k)} - S_k^{(k-1)}| \leq \varepsilon_3 \quad (5.48)$$

Пошук починався з внутрішньої точки, тобто точки в якій всі обмежуючі умови у вигляді нерівностей виконувались ($n = 15$ об/с $G_b = 1,75$ кг/с). Задача оптимізації вирішувалась при різних значеннях конструктивних параметрів, результати яких представлені у табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Кількість підзадач безумовної мінімізації	Кількість кроків на першій ітерації	d_p , м	z	n^{opt} , об/с	G_b^{opt} , кг/с	S_k , кг/с
3	7	0,6	3	13,763	1,9159	0,0446
3	7	0,6	5	11,5022	1,82915	0,22275
4	5	0,6	6	11,0262	1,2353	0,3705
5	5	0,6	7	10,7919	1,2501	0,36184
5	8	0,6	8	10,7881	1,9260	0,35877

6. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Простий та в той же час дуже ефективний метод багатошагового рішення варіаційних задач, розроблений Річардом Белманом [1,6,7].

Ідеєю методу є вираз концепції інваріантного вкладення, згідно якої початкова проблема замінюється певним класом найбільш простих проблем. У таких випадках використовується принцип оптимальності, що формується у наступному вигляді : *оптимальна стратегія володіє такими якостями, що, який би не був початковий стан або початкове рішення, наступні рішення повинні прийматися, виходячи із оптимальної стратегії відносно стану, що отримується в результаті першого рішення.*

Метод динамічного програмування (ДП) припускає розбиття аналізуючого процесу часу або простору на стадії або ступені. В якості стадії або ступеня можна прийняти одиницю часу, одиничний елемент обладнання.

Стадія або ступінь - математична абстракція, що приймається для представлення у дискретному вигляді безперервної змінної.

Багатокрокові процеси рішення та функціональне керування

Приклад.

Рада директорів фірми вивчає пропозиції по нарощуванню виробничих потужностей на трьох підприємствах, що належать фірмі. Для розширення усіх трьох підприємств фірма виділяє кошти в обсязі 5 млн. гривень. Кожне підприємство представляє на розгляд проекти, які характеризуються величинами сумарних витрат (C) та доходів (R), зв'язаних з реалізацією кожного з проектів. Відповідні дані наведені в таблиці 6.1, в яку включені також проекти з нульовими витратами.

Таблиця 6.1

Проект	Підприємство 1		Підприємство 2		Підприємство 3	
	C_1	R_1	C_2	R_2	C_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

Задача має $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ ймовірних рішення, причому деякі з них не є допустимими, тому що передбачають асигнування більше 5 млн. гривень. Оптимальним буде допустиме рішення, що забезпечує отримання прибутку. Затрати на реалізацію проектів 2, 3 та 1 для підприємств дорівнюють 4млн. гривень (<5), сумарний прибуток рівний 4 млн. гривень. З другого боку, набір проектів 3, 4, 2 не є допустимим, так як об'єм затрат в цьому випадку дорівнює 7 млн.грн.

Розглянемо сітьову модель, що відповідає умовам сформульованої задачі і покажемо, що знаходження найбільш довгого шляху (максимального прибутку) між крайніми вузлами сітки приводить до отримання оптимального рішення вихідної задачі.

Для побудови сітки слід визначити етапи вирішення задачі.

Кожному з підприємств ставиться у відповідність деякий етап.

Введемо следующие визначення :

x_1 - об'єм капіталовкладень, розподілених на етапі 1,

x_2 - об'єм капіталовкладень, розподілених на етапі 1 та 2,

x_3 - об'єм капіталовкладень, розподілених на етапі 1, 2 та 3.

Конкретні значення x_1 та x_2 заздалегідь невідомі, однак знаємо, що ці значення лежать в інтервалі між 0 та 5. Так як затрати на реалізацію кожного з проектів виражаються цілими числами, значення x_1 та x_2 можуть бути рівними 1, 2, 3, 4 та 5. З іншого боку значення змінної x_3 , котра виражає об'єм капіталовкладень, розподілених на всіх трьох етапах дорівнює 5.

Початковий етап $j=0$ введений на розглядання для зручності обчислення. Довжини дуг, з'єднуючих вузли на деякому етапі з вузлами на слідуючому етапі, чисельно дорівнюють прибуткам від реалізації найкращого допустимого проекту.

Дуга (0,0) (котра з'єднує вузли 0 на етапі $j=0$ та 0 на етапі $j=1$) відповідає випадку, коли засоби на етапі 1 не виділяються.

Припустимо тут з'являється проект 1 з $R_1=0$, і дузі (0,0) приписується довжина $R_1(0,0)=0$. Для дуги (0,1) допустимими є проекти 1 та 2, що визначає вибір проекту 2 з більш

високим рівнем прибутку $R_1=5$, дузі (0,1) приписується довжина 5. Значення $x_1=3, 4$ та 5 відповідають “надмірним” варіантам, для яких в кращому випадку $R_1=6$. Дуги, що з’єднують вузли на етапі 1 з вузлами на етапі 2, задаються вузлами x_1 та x_2 . Величина $x_2 - x_1$ по визначенню дорівнює об’єму капіталовкладень, розподілених тільки на етапі 2. Довжина дуги (x_1, x_2) дорівнює найбільшому значенню R_2 для всіх таких проектів. З визначення величин x_1, x_2 та x_3 випливає, що будь-який зв’язаний шлях з вузла 0 на етапі $j=0$ в вузол 5 на етапі $j=3$ відповідає допустимій комбінації проектів. Деякі дуги можна відкинути як заздалегідь неоптимальні.

Наприклад можливо виключити дугу (0,1) між етапами $j=1$ и $j=2$ так як асигнування $x_2-x_1=1$ млн. гривень на етапі 2 не приносить ніякого прибутку, оскільки ця сума не є достатньою для реалізації проекту 2.

Позначимо $f_j(x_j)$ - величину самого довшого шляху, що веде до вузла x_j на етапі j . Оскільки $j=0$ вихідний етап, $f_0(0) \equiv 0$

Етап 1. Так як вузол 0 на етапі $j=0$ з кожним з шести вузлів

$x_1=0,1,2,3,4$ та 5 на етапі $j=1$ з’єднує лише одна дуга,

найдовший шлях до вузла x_1 визначається формулою

$$f_1(x_1) = f_0(0) + R_1(0, x_1),$$

де $R_1(0, x_1)$ - довжина (прибуток) дуги (0, x_1). Маємо

$$f_1(0)=0+0=0, \quad f_1(3)=0+6=6;$$

$$f_1(1)=0+5=5, \quad f_1(4)=0+6=6;$$

$$f_1(2)=0+6=6, \quad f_1(5)=0+6=6.$$

Одержані результати представлені на рис 2.

Вказане на кожній дузі число в круглих дужках представляє собою номер проекту.

Числа над колами вказують значення відстані найбільш довгого шляху до відповідного вузла.

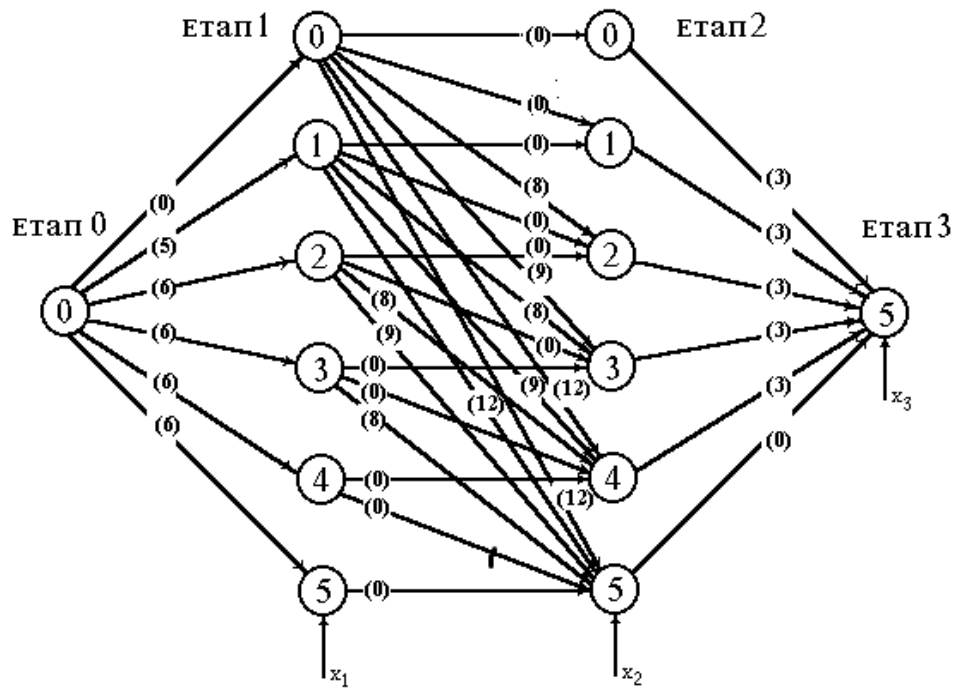


Рис. 6.1. Ілюстрація сітьової моделі

Етап 2. На відміну від етапу 1 кількість дуг, що входять в один із вузлів на етапі, може перебільшувати 1.

$$f_2(x_2) = \max\{f_1(x_1) + R_2(x_1, x_2)\};$$

по допустимим дугам (x_1, x_2)

$$f_2(0) = 0 + 0 = 0;$$

$$f_2(1) = \max\{0 + 0; 5 + 0\} = 5;$$

$$f_2(2) = \max\{0 + 8; 5 + 0; 6 + 0\} = 8;$$

$$f_2(3) = \max\{0 + 9; 5 + 8; 6 + 0; 6 + 0\} = 13;$$

$$f_2(4) = \max\{0 + 12; 5 + 9; 6 + 8; 6 + 0; 6 + 0\} = 14;$$

$$f_2(5) = \max\{0 + 12; 5 + 12; 6 + 9; 6 + 8; 6 + 0; 6 + 0\} = 17;$$

Етап 3. $f_3(x_3) = \max\{f_2(x_2) + R_3(x_2, x_3)\}$

$$f_3(5) = \max\{0 + 3; 5 + 3; 8 + 3; 13 + 3; 14 + 3; 17 + 0\} = 17$$

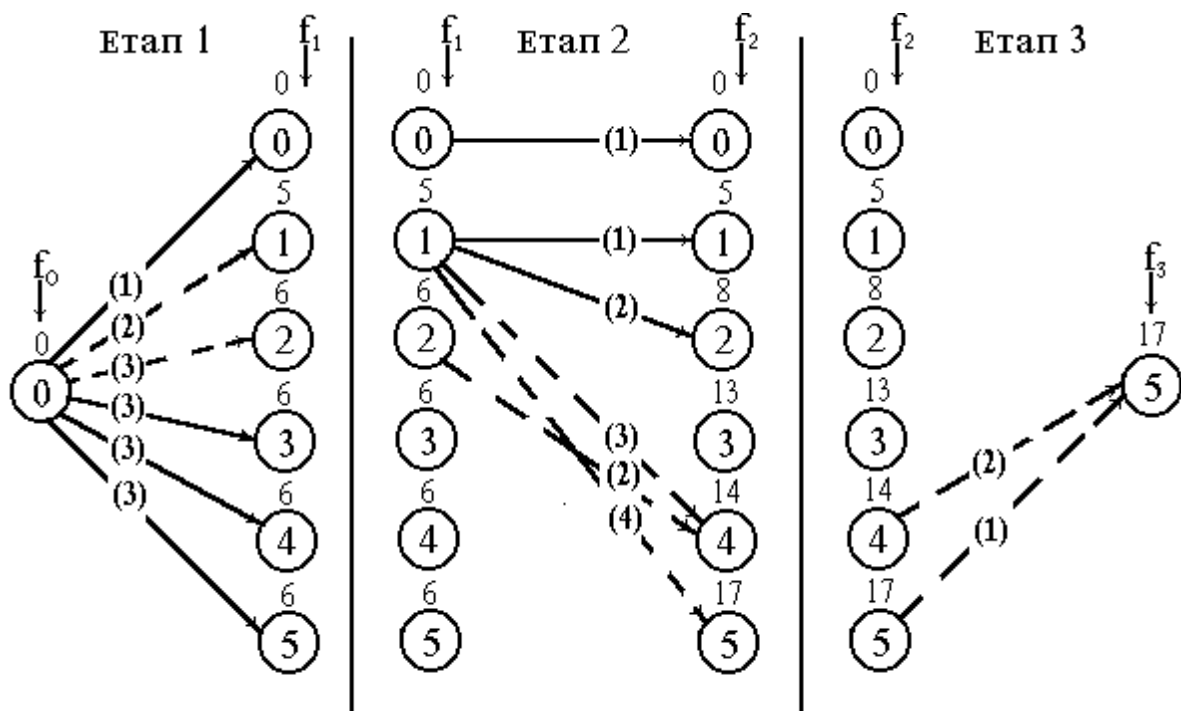


Рис.6.2. Оптимальні дуги відповідають обчисленому значенню $f_3(5)$.

Любий зв'язаний шлях від вузла 0 на етапі $j = 0$ до вузла 5 на етапі $j = 3$ визначає оптимальне рішення

Оптимальний шлях	Оптимальний набір проектів
(0,1),(1,4),(4,5)	(2,3,2)
(0,1),(1,5),(5,5)	(2,4,1)
(0,2),(2,4),(4,5)	(3,2,2)

Якщо скористуватися позначеннями, що введені при розгляданні мережової моделі, можна записати рекурентні співвідношення ДП в наступному вигляді:

$$f_i(x_j) = \max \{ R_j(k_j) + f_{j-1}(x_{j-1}) \} \quad j = 1, 2, 3,$$

для всіх допустимих k_j

де $f_0(x_0) \equiv 0$ по визначенню.

Зауважимо, що $f_i(x_j)$ є функцією одиничного аргумента x_j . Звідси слідує, що права частина рекурентного співвідношення повинна бути виражена через x_j , а не через x_{j-1} . По мережовій моделі, різниця між x_j та x_{j-1} дорівнює величині витрат (c_j) на реалізацію проекту k_j на етапі j , тобто

$$c_j(k_j) = x_j - x_{j-1}$$

Заміна $x_{j-1} = x_j - c_j(k_j)$ забезпечить більш коректний математичний запис рекурентного співвідношення.

Для виконання умови $x_{j-1} \geq 0$ слідує $x_j - c_j(k_j) \geq 0$ або $c_j(k_j) \leq x_j$.

Рекурентне співвідношення ДП має наступний вигляд

$$f_0(x_0) \equiv 0$$

$$f_j(x_j) = \max \{R_j(k_j) + f_{j-1}(x_j - c_j(k_j))\} \quad j=1,2,3,$$

$$c_j(k_j) \leq x_j$$

В ДП звичайно використовується таблична форма запису числових результатів.

Етап 1.

$$f_1(x_1) = \max \{R_1(k_1)\},$$

$$c_1(k_1) \leq x_1,$$

$$k_1=1,2,3$$

x_1	$R_1(k_1)$			Оптимальні рішення	
	$k_1=1$	$k_1=2$	$k_1=3$	$f_1(x_1)$	k_1^*
0	0	-	-	0	1
1	0	5	-	5	2
2	0	5	6	6	3
3	0	5	6	6	3
4	0	5	6	6	3
5	0	5	6	6	3

Етап 2.

$$f_2(x_2) = \max \{R_2(k_2) + f_1(x_2 - c_2(k_2))\},$$

$$c_2(k_2) \leq x_2,$$

$$k_2 = 1,2,3,x$$

x_2	$R_2(k_2) + f_1(x_2 - c_2(k_2))$				Оптимальні рішення	
	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$	$f_2(x_2)$	k_2^*
0	0+	-	-	-	0	1
	0=0					
1	0+	-	-	-	5	1
	5=5					
2	0+	8+0	-	-	8	2
	6=6	=8				

3	0+ 6=6	8+5 =13	9+0 =9	-	13	2
4	0+ 6=6	8+6 =14	9+5 =14	12+0 =12	14	2 або 3
5	0+ 6=6	8+6 =14	9+6 =16	12+5 =17	17	4

Етап 3.

$$f_3(x_3) = \max\{R_3(k_3) + f_2(x_3 - c_3(k_3))\},$$

$$c_3(k_3) \leq x_3,$$

$$k = 1, 2$$

x_3	$R_3(k_3) + f_2(x_3 - c_3(k_3))$		Оптимальні рішення	
	$k_3=1$	$k_3=2$	$f_3(x_3)$	k_3^*
5	0+17=17	3+14=17	17	1 або 2

Оптимальне рішення можна знайти безпосередньо з таблиць.

Спочатку розглянемо таблицю побудовану на етапі 3. При $x_3=5$ оптимальний проект має або $k_3^* = 1$ або $k_3^* = 2$. Нехай спочатку $k_3^* = 1$, так як $c_3(1) = 0$, на етапах 2 і 1 $x_2 = x_3 - c_3(1) = 5$. Легко бачити, що на етапі 2 з $x_2 = 5$ слідує $k_2^* = 4$. Далі $c_2(4) = 4$, звідки $x_1 = 5 - 4 = 1$. На етапі 1 з $x_1 = 1$ виходить $k_1^* = 2$. Таким чином $(2, 4, 1)$ - оптимальний набір проектів для етапів 1, 2 і 3.

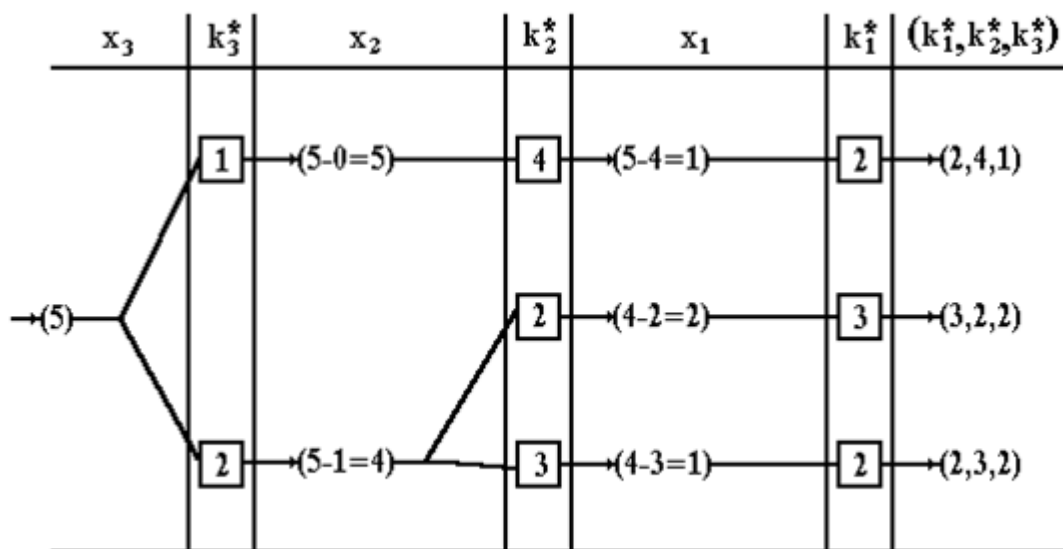


Рис. 6.3. Схема визначення різних оптимальних наборів проектів

Рекурентне співвідношення для процедури зворотної прогонки

Обчислення проводились для прикладу в такій послідовності:

$$f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3.$$

Такий метод обчислення відомий як алгоритм прямої прогонки, оскільки розрахунки виконувались в натуральному порядку руху етапів. Однак в ДП розглядаються рекурентні співвідношення, які наказують починати обчислення з останнього етапу і потім рухатися назад до етапу 1. Такий метод обчислення відомий як алгоритм зворотної прогонки.

Основна різниця між процедурами прямої та зворотної прогонки полягає в засобах визначення стану системи.

Для процедури зворотної прогонки

y_1 - об'єм капіталовкладень, розподілених на етапах 1,2,3,

y_2 - об'єм капіталовкладень, розподілених на етапах 2 та 3,

y_3 - об'єм капіталовкладень, розподілених на етапі 3.

Рекурентне співвідношення для процедури зворотної прогонки записується в наступному вигляді: $f_4(y_4) \equiv 0$,

$$f_j(y_j) = \max_{k_j} \{R_j(k_j) + f_{j+1}(y_j - c_j(k_j))\}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$c_j(k_j) \leq y_j$$

Порядок поетапних обчислень $f_3 \rightarrow f_2 \rightarrow f_1$.

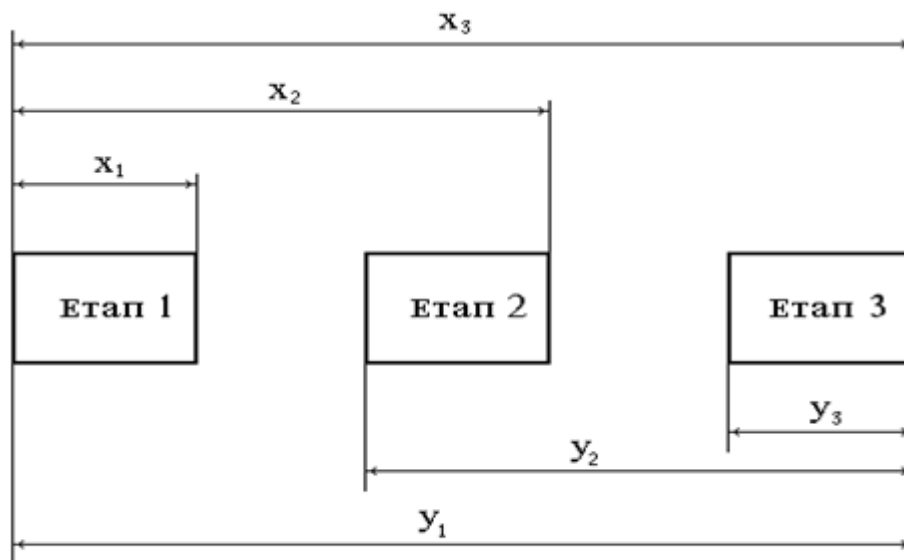


Рис. 6.4. Відмінності між визначеннями станів X_j і Y_j в процедурах прямої і зворотної прогонки.

В розглянутому прикладі ДП для опису станів системи використовувалась тільки одна змінна. В моделях ДП стани можуть бути описані за допомогою $n(\geq 1)$ змінних, що утворюють вектор стану, що викликає зростання числа можливих варіантів вирішення та

можливість переповнення пам'яті ЕОМ. Виникає так звана проблема розмірності (або прокляття розмірності за виразом Р. Беллмана), котра є серйозною перешкодою при вирішенні ДП середньої та великої розмірності.

Метод ДП використовується для оптимізації функцій, але нічого не каже про те, як виконувати оптимізацію. Перевага - метод ДП належить до числа небагатьох методів оптимізації, при використанні яких одержання рішення відповідає глобальному оптимуму.

7. ПОДАЛЬША ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

7.1. КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ

При всіх нетривіальних задачах оптимізації область, що допускається $X \in R^n$ містить нескінченно багато кандидатів для шуканого мінімуму. Навпроти, для задачі комбінаторної оптимізації мова йде про те, щоб серед маси кандидатів вибрати ті, котрі мінімізують значення функції якості. Може здатися, що задачі оптимізації цього роду легко розв'язуються. (Адже необхідно тільки порівняти між собою обчислювальну безліч кандидатів). При пошуку ефективних точних методів рішення широкого класу дискретних задач треба враховувати можливість відсутності таких методів, визнавши, що існують важкорозв'язувані задачі. У переборних задачах, як правило, мається кінцева безліч варіантів, серед яких потрібно знайти рішення. Але з ростом число векторів швидко росте і задача стає практично нерозв'язаною. Крім того, як правило виключається також систематичне використання викладеними раніше методиками, що дають недостатню ефективність і однозначні уявлення про градієнти. Для випадків комбінаторної оптимізації повинні бути розвинуті відповідні нові методики, що, при нових умовах задач, забезпечують систематичний і ефективний пошук мінімуму.

Корисним методом представлення (зображення) об'єднання багатьох подібних груп задач комбінаторної оптимізації є теорія графів, що за останні роки значно розвинута і формалізована. Але докладний виклад методу комбінаторної оптимізації не вкладається в рамки цього посібника [1,2]. Нашою задачею тут, в більшій мірі, є продемонструвати за допомогою прикладів вигляд і застосування постановки комбінаторних задач, а також їхня відмінність від постановки аналітичних задач.

Приклад 7.1

(Вузлове фарбування графа). Розглянемо планування в часі визначеної кількості подій, без небажаного їхнього перетинання (перехлеста). Нехай, наприклад, $x_1, \dots, x_6$ шість одногодинних лекцій, що повинні прослухати сім груп слухачів, яких цікавлять наступні лекції

$\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_2, x_6\}, \{x_4, x_5\}, \{x_5, x_6\}, \{x_1, x_6\}.$

Кожна лекція, у даному випадку, збігається в часі з іншими лекціями. Проводиться пошук оптимального планування часу для мінімізації загальної тривалості так, щоб кожній групі слухачів дати можливість взяти участь (прослухати) ті лекції, що їх цікавлять. Очевидно, що при постановці цієї задачі є безліч альтернативних планів. Найгірше з точки зору мінімізації загальної тривалості, планування в часі, полягає в тому, щоб розташувати лекції послідовно $(x_1), (x_2), \dots, (x_6)$ (загальна тривалість 6 годин). Більш гарний варіант (розв'язок), з загальною тривалістю 4 годин, виглядає як $(x_1 x_3), (x_2 x_4), (x_5), x_6$. Який же мінімальний загальний час? Для систематичного розгляду цієї задачі, розглянемо граф з шістьма вузлами $x_1, \dots, x_6$. Два вузли зв'язують між собою лінією (прямою гранню), якщо обидва вони належать до області інтересів визначеної групи слухачів.

Тим самим, задача зводиться до більш загальної задачі вузлового фарбування графа:

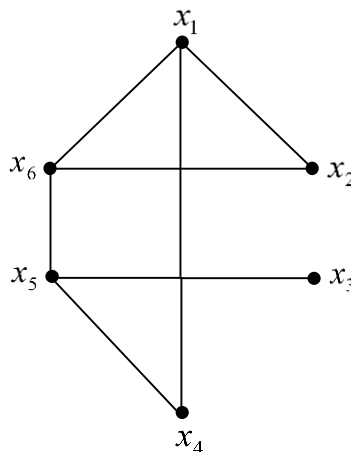


Рис. 7.1. Граф до прикладу 7.1.

Скільки потрібно мінімально фарб, щоб зв'язані один з одним вузли мали завжди різні (з'єднання) кольори?

Розв'язок цієї задачі, для нашого приклада, буде: 3 кольори (тобто загальна тривалість 3 години), а саме: $(x_1), (x_2, x_5), (x_3, x_4, x_6)$.

Приклад 7.2

(Задача найкоротшого шляху). Розглянемо граф, грані якого (направлені або ненаправлені) оцінені певним чином (наприклад довжина або тривалість у часі). Постановка задачі полягає в тому, щоб визначити найбільш сприятливі з точки зору витрат з'єднання між двома вузлами графа. Ця задача пошуку найкоротшого шляху (відрізка) з'єднання, при наявності безлічі альтернатив.

Можна ставити зворотню задачу, тобто шукати замість найкоротшого шляху, між двома вузлами, найдовший. Постановка задачі пошуку найдовшого шляху знаходиться в тісному зв'язку з методом сітьового планування і може, у багатьох випадках приводити до відповідних розв'язків з меншою витратою обчислень, ніж при лінійному програмуванні.

Приклад 7.3

(Мінімальне оснащення графа)

(граф мінімального оснащення)

П'ять населених пунктів $a_1, \dots, a_5$ повинні бути з'єднані з очисною установкою за допомогою відповідних водовідвідних каналів. Можливі варіанти з'єднань показані на графі рис. 7.2

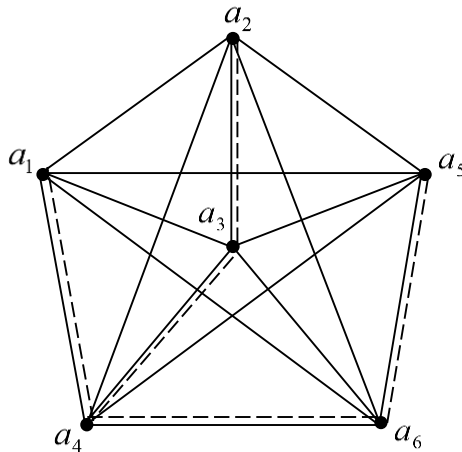


Рис. 7.2: Графи з'єднань до прикладу 7.3

Вартість (витрати на) з'єднання до прикладу 7.3					Таблиця 7.1
	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	1307.2	683.4	850	1790.8	1409.7
a_2		490	1040.3	860	1000
a_3			561	840	864
a_4				1309.8	673.2
a_5					620

Конструктивні витрати на окремі грані (види) з'єднань наведені в таблиці 7.1. Ведеться пошук варіанта прокладки водовідвідних каналів, що вимагає мінімальних витрат.

Ця задача розв'язується за допомогою загальної задачі визначення мінімальної величини оснащення графа. На рис.7.2 підкреслене рішення вищенаведеного прикладу. У цьому випадку вартість (величина) витрат = 3027.6.

Приклад 7.4.

Організаційні задачі в подвійних графах. Групі студентів $S_1, \dots, S_5$ повинні бути видані теми дипломних робіт. На кафедрі лежить перелік шести робочих тем $T_1, \dots, T_6$. Кожен студент вибрав наступні теми, що його цікавлять.

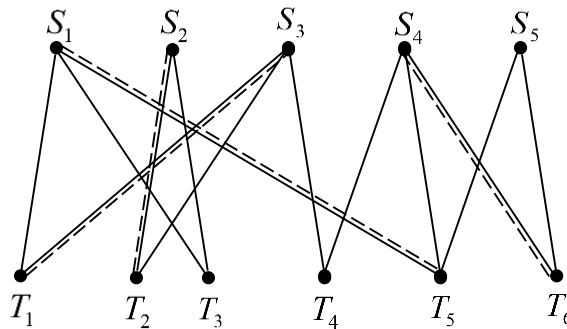


Рис.7.3: Подвійний граф до прикладу 10.4

$$S_1 : T_1, T_3, T_5$$

$$S_2 : T_2, T_3$$

$$S_3 : T_1, T_2, T_4$$

$$S_4 : T_4, T_5, T_6$$

$$S_5 : T_5, T_6$$

Вимагається знайти розподіл тем, при якому можливо більше число студентів одержить бажану тему.

Для формалізації цієї проблеми вузлами $S_1, \dots, S_5$ і $T_1, \dots, T_6$, причому вузли S_i пов'язують з вузлами T_j , у роботі над якою зацікавлений студент S_i (дивись рис.10.3). Задача тоді може бути зведена до організаційної задачі в “подвійних” графах, причому необхідно знайти максимальне число граней без загальних вузлів. Граф називається подвійним, якщо для фарбування кожного з його вузлів (дивіться приклад 10.4) досить 2-х кольорів.

Неоднозначне рішення розглянутого приклада показано на рис.10.3 подвійним пунктиром і призводить до забезпечення чотирьох студентів $S_1, \dots, S_4$ бажаними темами. Студент S_5 змушений буде задовольнитися темою, що йому не бажана.

7.2 ТЕОРІЯ ІГОР

У процесі попереднього викладення, ми виходили з мінімізації або максимізації функції якості по відношенню до єдиного вирішального параметру. Тепер вже в політиці, економіці, техніці й іграх для 2-х чоловіків зустрічаються ситуації, при яких значення функції якості можуть бути піддані впливу двох істотних параметрів із протилежними (конкуруючими) цілями. Тоді мова йде про теорію з двома гравцями.

Для формалізації цих випадків ми визначаємо функцію якості $f(x_A, x_B)$, при цьому головні змінні x_A встановлюються гравцем А, а головні змінні В встановлюються гравцем В. Тепер гравець А намагається мінімізувати функцію f_1 , в той час як гравець В має за мету максимізувати цю функцію. Обидва гравця знають мету супротивника. Для наочності ми приймемо, що функція $f(x_A, x_B)$ представляє грошові відношення й А повинний платити В, після того, як буде встановлено, після завдання x_A^* і x_B^* значення $f(x_A^*, x_B^*)$. Отже, гравець А хоче $f(x_A, x_B)$ мінімізувати, однак, він знає, що супротивник прагне до зворотного результату. Якщо гравець А повинний грати першим, він, внаслідок цього, спробує мінімізувати виграш свого супротивника вирішуючи наступну мінімаксну задачу:

$$\min_{x_A} \max_{x_B} f(x_A, x_B)$$

$$x_A \quad x_B$$

Якщо б гру починав гравець В, то він повинний був-би вирішувати задачу мінімакса

$$\min_{x_B} \max_{x_A} f(x_A, x_B)$$

$$x_B \quad x_A$$

Тим самим для цього простого випадку ми одержимо сідлову точку

$$f(x_A^*, x_B) \leq f(x_A^*, x_B^*) \leq f(x_A, x_B^*)$$

що встановлює оптимальну стратегію для двох гравців.

Задачі теорії ігор стають цікавіші, але і складнішими, якщо розглядаються багатоступінчасті ігри (наприклад, шахи й інші ігри для двох) або так звані диференціальні ігри. Для останніх мова йде про мінімаксімалізацію функції якості, з урахуванням динамічних граничних умов, на увазі динамічної оптимізації. Відомим прикладом з теорії диференціальних ігор є проблема переслідування-втікання, при якій рухомий об'єкт з визначеними динамічними властивостями (максимальна швидкість, здатність відхилятися і т.п.) переслідує в 2-х або 3-х мірному просторі, інший рухомий об'єкт, що намагається врятуватися втечею. Спеціальна література по теорії ігор велика і представляє широкий спектр можливих застосувань.

Динамічна оптимізація - метод керування, при якому процес не тільки підтримується на оптимальному рівні в сталому режимі, але і перехід з одного режиму в інший, здійснюється найкращим чином. Функція оптимальності стає функцією часу, і завдання оптимального управління зводиться до максимізації або мінімізації певного критерію в часі. Динамічна оптимізація має деяку схожість із статичною, однак вона більш складна, так як пов'язана з необхідністю визначати функцію часу, а не окремі величини.

До динамічної оптимізації, згідно з визначенням, відносять завдання визначення значень керуючих впливів, що є функціями часу і забезпечують досягнення заданих критеріїв управління для технологічних процесів в перехідних режимах. визначати функцію часу, а не окремі величини.

8. Варіаційне числення в оптимальному управлінні

8.1 Формулювання проблеми варіаційного числення

Варіаційне числення являє собою розділ математичного аналізу, пов'язаний з проблемами оптимізації при умовах більш загального характеру, ніж ті, які розглядаються в звичайній теорії знаходження максимумів і мінімумів деяких функцій. Воно має справу з максимізацією або мінімізацією функціоналів, коли потрібно визначити не окремі значення функції, а всю функцію загалом.

Розроблено біля 150 років Ейлером. У варіаційному численні трьома основними проблемами є: задача Лагранжа, задача Майєра і задача Больца.

Задача Лагранжа з однією незалежною змінною пов'язана з визначенням функції $U(t)$, яка забезпечує мінімум інтеграла від даної функції.

Сформулюємо цю задачу.

Дано: 1) Система диференціальних рівнянь

$$X' = f(X, U, t) \quad (8.1.1)$$

або в більш загальній формі

$$\varphi_i(X, X', U, t) = 0 \quad (8.1.2)$$

де X - $(n + 1)$ - мірний вектор, а U - $(r + 1)$ - мірний вектор;

2) Система початкових умов

$$x_i(t_0) = a_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (8.1.3)$$

3) Критерій

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt \quad (8.1.4)$$

де $F(X, U, t)$ - безперервна функція аргументів.

Потрібно знайти функцію $U(t)$, яка забезпечує мінімум I серед всіх функцій $U(t)$, що задовольняють умовам, заданим рівняннями (8.1.1) і рівністю (8.1.3).

Задача Майєра пов'язана з визначенням функції $U(t)$, що мінімізує дану функцію, що містить деякі змінні, кінцеві значення яких заздалегідь задані. Сформулюємо цю задачу.

Дано:

1) система диференціальних рівнянь вигляду (8.1.1)

2) система початкових умов вигляду (8.1.3)

3) система кінцевих умов

$$x_j(t_f) = b_j \quad (8.1.5)$$

де j належить деякій підмножині цілих чисел $1, 2, \dots, m$, а t_f не задане;

4) критерій:

$$I = G(X(t), t) \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (8.1.6)$$

Потрібно визначити функцію $U(t)$ мінімізуючу I серед всіх функцій $U(t)$, що задовольняють умовам (8.1.1), (8.1.3) і (8.1.5).

А. Особливий випадок. Коли критерій має вигляд:

$$I = G(t) \Big|_{t_0}^{t_f} = t_f - t_0 \quad (8.1.7)$$

задача зводиться до перетворення деякого початкового стану до бажаного кінцевого стану за мінімальний час.

Задача Больца пов'язана з визначенням функції $U(t)$, що мінімізує суму, що складається з інтеграла від функції і функції, що обчислюється в кінцевій точці, причому ці функції містять деякі змінні, кінцеві величини яких заздалегідь не задані. Сформулюємо цю задачу.

Дано:

- 1) система диференціальних рівнянь (8.1.1)
- 2) система початкових умов (8.1.3)
- 3) система кінцевих умов (8.1.5)
- 4) критерій

$$I = G(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) dt \quad (8.1.8)$$

Потрібно визначити функцію $\mathbf{U}(t)$, що мінімізує I відносно всіх функцій $\mathbf{U}(t)$, що задовольняють умовам (8.1.1), (8.1.3) і (8.1.5).

Якщо під $\mathbf{X}$ мати на увазі вектор стану процесу, а під $\mathbf{U}$ - вектор управління, то управління по мінімуму інтеграла зводиться до задачі Лагранжа. Точно так само управління кінцевим станом і управління по мінімуму часу перехідного процесу можна назвати задачею Майєра. До задачі Больца може бути зведене управління по мінімуму інтеграла при обмеженні кінцевого стану або управлінні по мінімуму часу переходу в кінцевий стан при наявності обмеження на величину інтеграла.

Із сказаного виходить, що формулювання задачі Больца є найбільш загальним, однак завжди можна ввести деякі допоміжні змінні, які перетворюють задачу Майєра і навпаки. Хоч існує багато проблем оптимального управління, які, як це здається на перший погляд не відносяться ні до однієї з трьох перерахованих проблем, однак завжди можна вдатися до того або іншого математичного прийому, що дозволяє звести первинну задачу до однієї з розглянутих вище.

8.2. Основна задача мінімізації. Випадок закріплених кінцевих точок

Розглянемо задачу мінімізації інтеграла:

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f(x, x', t) dt, \quad (8.2.1)$$

де $x=x(t)$ - двічі диференційована функція, що задовольняє умовам $x(t_0)=x_0$ і $x(t_f)=x_{tf}$; f - безперервна функція аргументів x, x', t .

Знайдемо функцію $x(t)$, що мінімізує інтеграл в рівнянні (8.2.1). Геометрична інтерпретація задачі полягає у визначенні такої кривої $x(t)$, що з'єднає точки $x(t_0)$ і x_{tf} , вздовж якої інтеграл від даної функції $f(x, x', t)$ був би мінімальним.

У термінах теорії управління, якщо x - вихід керованої системи, то інтеграл (8.2.1) визначає якість управління системою, причому треба прагнути до того, щоб цей інтеграл мав мінімум. Інтервал часу, при якому інтеграл має мінімум, повинен бути вибраний. Мається на увазі будь-який інтеграл, протягом якого керована система переміститься від одного існуючого режиму роботи до іншого.

Такий істотний режим роботи являє собою особливі умови тільки для тих змінних, які повинні бути безперервними.

Нехай $x(t)$ - функція, що забезпечує мінімум, а $\bar{x}(t)$ - функція, близька до $x(t)$.

Тоді $x(t)$ і $\bar{x}(t)$ зв'язані співвідношеннями:

$$\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon \omega(t); \quad (8.2.2)$$

$$\bar{x}'(t) = x'(t) + \varepsilon \omega'(t) \quad (8.2.3)$$

де ε - малий параметр, а ω - довільна функція, що диференціюється для якої:

$$\omega(t_0)=\omega(t_f)=0 \quad (8.2.4)$$

оскільки кінцева точка передбачається закріпленою як показано на рис. 8.1.

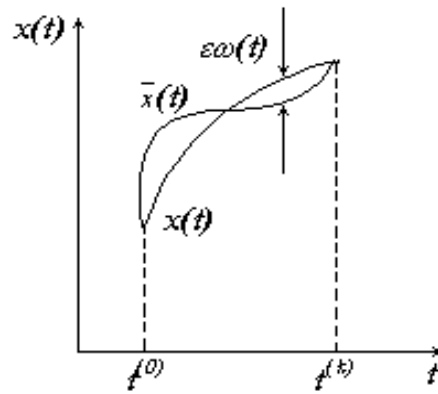


Рис. 8.1. Оптимальна траєкторія із закріпленими крайніми точками

З умови (8.2.4) слідує, що

$$\bar{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$$

$$\bar{x}(t_f) = x(t_f) = x_f$$

тобто всі функції близькі до $x(t)$, мають необхідні кінцеві значення функцій, по відношенню до яких проводиться мінімізація. При відповідному виборі $\omega(t)$ і ε за допомогою виразу вигляду (8.2.2) можна представити будь-яку функцію, що диференціюється, що має необхідні кінцеві значення. Вертикальне відхилення довільної кривої $\bar{x}(t)$ від діючої кривої, що забезпечує мінімум, позначено на рис.8.1 через $\varepsilon\omega(t)$. Незалежно від вибору $\omega(t)$ мінімізуюча функція $x(t)$ є членом цього сімейства, якщо вибрати величину параметра ε , яка дорівнює нулю. Заміняючи x і x' в рівнянні (8.2.1) відповідно на $\bar{x}(t)$ і $\bar{x}'(t)$ отримуємо

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} f(x + \varepsilon\omega, x' + \varepsilon\omega', t) dt \quad (8.2.5)$$

Розкладаючи підінтегральний вираз в формі (8.2.5) в ряд Тейлора знайдемо

$$f(x + \varepsilon\omega, x' + \varepsilon\omega', t) = f(x, x', t) + \varepsilon\omega \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\omega' \frac{\partial f}{\partial x'} + \text{члени що утримують } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \quad (8.2.6)$$

Тоді функцію критерію можна переписати у вигляді:

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} \left[f(x, x', t) + \varepsilon\omega \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\omega' \frac{\partial f}{\partial x'} + \text{члени що містять } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \right] dt, \quad (8.2.7)$$

Необхідною умовою для максимуму або мінімуму I є

$$\left. \frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (8.2.8)$$

звідси витікає, що

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\omega \frac{\partial f}{\partial x} + \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} \right) dt = 0 \quad (8.2.9)$$

Інтегрування за частинами другого члена в цьому інтегралі дає:

$$\int_{t_0}^{t_f} \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} dt = \omega \frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \omega \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) dt \quad (8.2.10)$$

Звідки

$$I'(0) = \omega \frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \omega \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) \right] dt \quad (8.2.11)$$

При цьому рівняння (8.2.11) зводиться до вигляду:

$$\int_{t_0}^{t_f} \omega \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right) \right] dt = 0 \quad (8.2.12)$$

Оскільки рівняння (8.2.12) повинне бути справедливе для всіх ω , то необхідна умова для екстремума I приймає вигляд:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right) = 0 \quad (8.2.14)$$

Це рівняння другого порядку відоме під назвою диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа. Його рішення визначає функцію, що доставляє мінімум інтеграла, що розглядається, при умові, що цей мінімум існує. Рівняння

$$\omega(t) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} = 0 \quad \text{для } t=t_0, t_f \quad (8.2.15)$$

називається умовою трансверсальності. Для випадку, коли $x(t_0)$ і $x(t_f)$ фіксовані $\omega(t_0) = \omega(t_f) = 0$. Рівняння (8.2.14), (8.2.15) визначають двоточкову крайову задачу (ДКТЗ), рішення якої представляє допустиму оптимальну траєкторію. Комбінації граничних умов представлені графічно на рис. 8.2.

Для багатомірного випадку отримаємо рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\nabla_x f - \frac{d}{dt} (\nabla_{x'} f) = 0 \quad (8.2.15)$$

$$\text{де} \quad \nabla_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \nabla_{x'} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1'} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n'} \end{bmatrix}$$

Величина δI , що дорівнює добутку $I'(0)\varepsilon$, представляє диференціал функції $I(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ і називається першою варіацією функціонала I .

Оскільки можна припустити, що

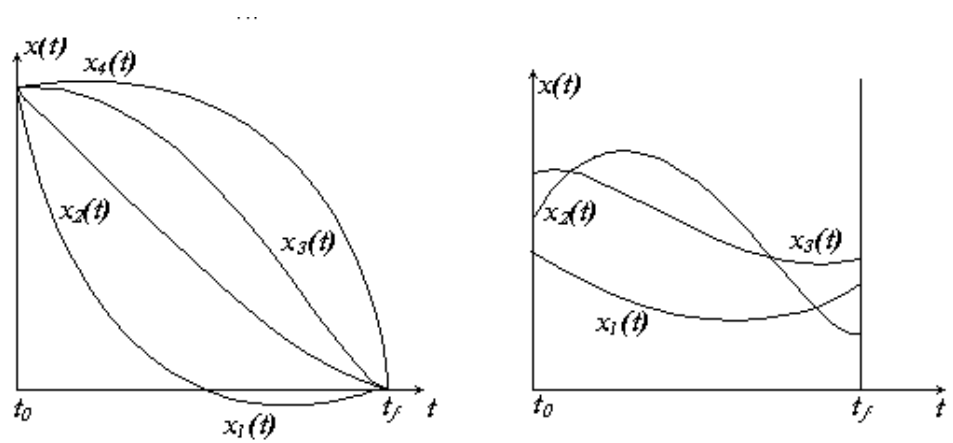
$$\varepsilon \omega(t) = \delta x, \quad (8.2.16)$$

тоді помноживши (8.2.11) на (отримаємо:

$$\delta I = I'(0)\varepsilon = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right) \delta x dt \quad (8.2.17)$$

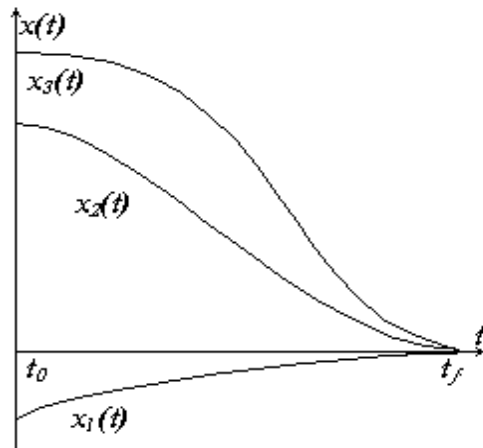
де x - варіація функції $x(t)$.

Умова того, що функція $x(t)$ - екстремаль функціонала I , може бути сформульована як вимога рівності нулю першої варіації функціонала δI .

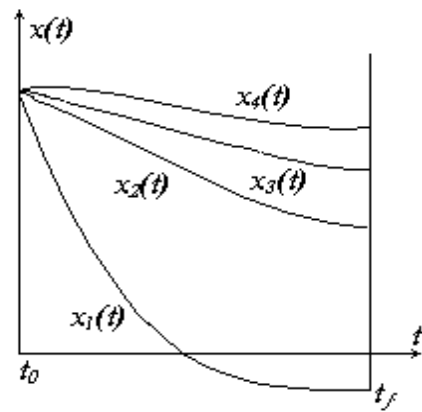


а) $x(t_0)$ і $x(t_f)$ фіксовані

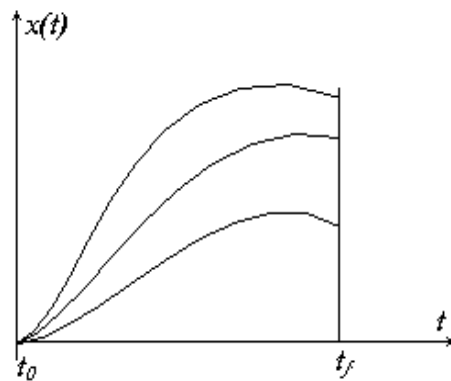
б) $x(t_0)$ і $x(t_f)$ довільні



в)
 $x(t_0)$ - довільне
 $x(t_f)$ - фіксоване



г)
 $x(t_0)$ - фіксоване
 $x(t_f)$ - довільне



д)

$x(t_0)$ - фіксоване, $x(t_f)$ - довільне (задача Майєра).

Рис.8.2. Різні комбінації граничних умов

Приклад 8.2.1. Потрібно знайти рівняння лінії, що мінімізує функціонал (граничні умови не визначені)

$$I(x) = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} (x')^2 + x x' + x' + x \right] dt$$

Для цієї задачі рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд

$$x' + 1 - x' - x'' = 0 = 1 - x''$$

Розв'язок може бути отриманий безпосереднім інтегруванням:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

Тепер для визначення c_1 і c_2 потрібно додати умови трансверсальності до заданих граничних умов. Оскільки розглянута задача має змінні точки початку і досягнення, то

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = x' + x + 1 = 0 \quad \text{для } t=0,2.$$

Таким чином з розв'язку для x і її похідної отримаємо

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = t + c_1 + \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 + 1 = 0 \quad \text{для } t=0,2.$$

Тепер з системи спільних рівнянь

$$c_1 + c_2 = -1, \quad 3c_1 + c_2 = -5$$

можна знайти c_1 і c_2 , а саме: $c_1 = -2$, $c_2 = 1$. Таким чином екстремаль, що задовільняє даним граничним умовам, має вигляд

$$x(t) = t^2/2 - 2t + 1.$$

Фактичне значення екстремума може бути отримане при підстановці в задану функцію вартості і виконання інтегрування при цьому $I_{\min} = 3/4$

Достатні умови Лежандра.

Якщо екстремаль функціонала (8.2.1) є мінімальною, то для будь-якої її точки виконується умова:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \geq 0 \quad (8.2.18)$$

якщо екстремаль функціонала - максимальна, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \leq 0 \quad (8.2.19)$$

Достатні умови можуть бути виражені через другу варіацію функціонала I

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ (\delta x)^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \right] + (\delta x') \frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \right\} dt \quad (8.2.20)$$

тобто друга варіація являє собою квадратичний член в розкладі ΔI .

Якщо друга варіація $\delta^2 I < 0$ - максимум.

8.3 Випадок рухомих кінцевих точок

Розглянемо задачу мінімізації з кінцевою точкою траєкторії, що лежить на кривій. Протягом інтервалу часу управління зовнішні збурення передбачаються постійними. Нехай $\bar{x}(t)$ буде функцією, яка забезпечує мінімум інтегрального критерію (8.2.1).

Передбачається, що кінцева точка траєкторії лежить на кривій $x = c(t)$. Нехай $\bar{x}(t)$ функція, мало відрізняється від $x(t)$, взаємозв'язок $x(t)$ і $\bar{x}(t)$ визначається рівняннями (8.2.2) і (8.2.3).

Довільна функція $\omega(t)$ задовольняє початковій умові.

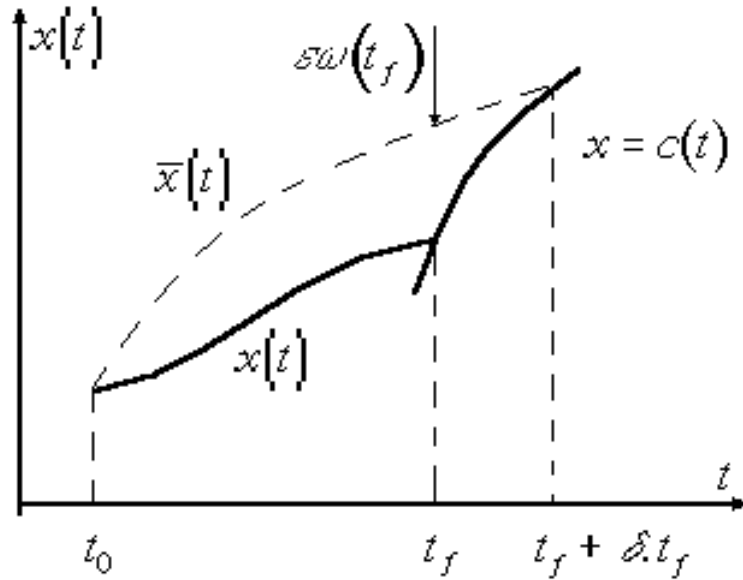


Рис.8.3. Оптимальна траєкторія з рухомими крайніми точками

$$\omega(t_0) = 0, \quad (8.3.1)$$

але кінцева умова ще не визначена. Це приводить до відповідних граничних умов для руху від одного стану до іншого.

Замінюючи в рівнянні (8.2.1) x і x' відповідно через $\bar{x}$ і $\bar{x}'$ і верхню границю інтегрування на $t_f + \varepsilon \delta t_f$ отримаємо :

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} f(x + \varepsilon \omega, x' + \varepsilon \omega', t_f + \varepsilon \delta t_f) dt \quad (8.3.2)$$

Варіація δt_f виникає тому, що кінцева точка траєкторії не закріплена, а лежить на кривій $x=c(t)$.

Розкладемо в ряд Тейлора f обмежуючись першими похідними

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[f(x, x', t_f) + \varepsilon \omega \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} + \varepsilon \delta t_f \frac{\partial f}{\partial t_f} \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[f(x, x', t_f) + \varepsilon \omega \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} \right] dt + \varepsilon \delta t_f f(t_f) \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

Слідуючи тим же міркуванням, що і у випадку із закріпленими кінцями, можна показати, що необхідною умовою для екстремума функціонала I є:

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \omega \frac{\partial f}{\partial x} + \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} \right\} dt + \delta t_f f(x, x', t_f) \quad (8.3.4)$$

Інтегруючи за частинами другий член підінтегрального виразу після деяких перетворень отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) \right) \right] dt + \omega(t_f) \frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{t_f} - \omega(t_0) \frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{t_0} + f(t_f) \delta t_f = 0 \quad (8.3.5)$$

Знайдемо відношення між $\delta t_f(t_f)$ і $\omega(t_f)$, що дає можливість отримати необхідні умови. В момент досягнення множини цілей лінія $c(t)$ і оптимальна траєкторія $x(t)$ перетинаються.

Тоді,використовуючи $\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon \omega(t)$,

$$\bar{t}_f = t_f + \varepsilon \delta t_f$$

$$\text{отримаємо } x(t_f + \varepsilon \delta t_f) + \varepsilon \omega(t_f + \varepsilon \delta t_f) = c(t_f + \varepsilon \delta t_f)$$

Продиференціюємо обидві частини останнього виразу по ε і, прирівнявши $\varepsilon=0$, отримаємо :

$$x'(t_f) \delta t_f + \omega(t_f) = c'(t_f) \delta t_f. \quad (8.3.6)$$

Виключаючи $\omega(t_f)$ із рівнянь (8.3.5) і (8.3.6), отримаємо :

$$\int_{t_0}^{t_f} \omega \left[\frac{\mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{F}}{\partial x'} \right) \right] dt + \left\{ f(t_f) + [c'(t_f) - x'(t_f)] \frac{\mathcal{F}}{\partial x'} \right\} \Big|_{t_f} \delta t_f - \omega(t_0) \frac{\mathcal{F}}{\partial x'} \Big|_{t_0} = 0. \quad (8.3.7)$$

Так як δt_f довільне, то із рівняння (11.3.7) слідує, що :

$$\int_{t_0}^{t_f} \omega \left[\frac{\mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{F}}{\partial x'} \right) \right] dt = 0 \quad (8.3.8)$$

$$\left\{ f(t_f) + [c'(t_f) - x'(t_f)] \frac{\mathcal{F}}{\partial x'} \right\} \Big|_{t_f} - \omega(t_0) \frac{\mathcal{F}}{\partial x'} \Big|_{t_0} = 0 \quad (8.3.9)$$

Враховуючи, що рівняння (8.3.8) повинно бути справедливим для всіх ω , отримаємо диференціальне рівняння Ейлера - Лагранжа для даної варіаційної задачі у вигляді:

$$\frac{\mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{F}}{\partial x'} \right) = 0 \quad (8.3.10)$$

аналогічно рівнянню (8.2.4). Однак у разі незакріпленої кінцевої точки розв'язок рівняння Ейлера Лагранжа повинно задовольняти рівнянню (8.3.9). Якщо $\frac{\mathcal{F}}{\partial x'}$ має кінцеве значення при $t = t_0$, то рівняння (8.3.9) зводиться до

$$f(t_f) = [x'(t_f) - c'(t_f)] \frac{\mathcal{F}}{\partial x'} \Big|_{t_f} \quad (8.3.11)$$

і називається **умовою трансверсальності**.

Відмітимо, що рівняння (8.3.11) може і не задовільнятися при $t = t_0$, тому що $\omega(t_0) = 0$. Необхідно тільки, щоб при $t = t_0$ x було неперервним, а $\frac{\mathcal{F}}{\partial x'}$ скінченним.

В задачах регулювання, протягом деякого інтервалу часу, процес змінюється і спостерігається перехід від одного істотного робочого режиму до іншого. Таким чином, кінцева крива $x = c(t)$ є горизонтальною прямою і

$$c'(t_f) = 0 \quad (8.3.12)$$

Умова трансверсальності (11.3.11) тепер приймає вигляд:

$$f(t_f) = x'(t_f) \frac{\mathcal{F}}{\partial x'} \Big|_{t_f} \quad (8.3.13)$$

Таким чином умова трансверсальності (8.3.11) встановлює зв'язок між кутовими коефіцієнтами дотичних до екстремалі $x(t)$ і лінії $x = c(t)$.

Приклад 8.3.2. Потрібно мінімізувати

$$I(x) = \int_0^{t_f} [1 + (x')^2]^{\frac{1}{2}} dt$$

при $x(0) = 1$, так що $x(t_f) = c(t_f) = 2 - t_f$

Відмітимо, що функція вартості являє собою довжину дуги, а це означає, що повинна бути мінімізована відстань між точкою і лінією. Використовуючи рівняння Ейлера - Лагранжа, отримаємо, що оптимальна траєкторія має вигляд $x = at + b$. Для оцінки довільних постійних a і b виберемо відповідним чином умови трансверсальності.

Потім приймемо $x(0) = 1$, тоді $\omega(t_0) = 0$.

Оскільки t_f не визначене, то (v) переходить в

$$f(t_f) + (c'(t_f) - x'(t_f)) \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right|_{t_f} = 0$$

таким чином при невизначеному часі досягнення t_f нами отримано $x' = 1$.

Із розв'язку рівняння Ейлера-Лагранжа при визначеній початковій умові отримаємо, що $x(t=0)=1$ тобто $b=1$ і $x'(t=t_f)=a=1$.

Тому оптимальна траєкторія $x(t)=t+1$, а час досягнення $t_f = 1/2$.

Відмітимо, що оптимальна траєкторія перетинає безліч цілей під прямим кутом. Взагалі, оптимальна траєкторія не виявляється дотичною по відношенню до безлічі цілей. Ця умова відсутності дотичності фактично і є умова трансверсальності.

Розглянули умови наявності локального мінімуму.

Припустимо траєкторія $X^*(t)$ доставляє абсолютний мінімум функціоналу; тоді окрім виконання рівнянь Ейлера - Лагранжа і умови Лежандра, повинна виконуватися умова

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_f} f(X(t), X'(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} f(X^*(t), X'^*(t), t) dt \geq 0 \quad (8.3.14)$$

відносно довільної траєкторії $X(t)$.

Припустимо, що $X^*(t)$ - мінімізуюча траєкторія, тоді для траєкторії $X(t)$ виконується умова (8.3.14). Крім того, враховуючи міркування, які привели нас до виразу $\left. \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$, отримаємо $\left. \frac{d\Delta I}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \geq 0$.

Якщо визначена так звана функція Вейерштрасса, тобто

$$E(X^*, X'^*, X', t) = f(X^*, X', t) - f(X^*, X'^*, t) - (X' - X'^*) \frac{\partial f}{\partial X'}(X^*, X'^*, t)$$

де X'^* - похідна неоптимальної функції, то можна показати, що необхідною умовою для $\Delta I \geq 0$ у виразі (11.3.4) є

$$E(X^*, X'^*, X', t) \geq 0 \quad (8.3.15)$$

на траєкторії $X^*(t)$ для довільного t . Вираз (8.3.15) являє собою умову Вейерштрасса.

Приклад 8.3.3. Функція задовольняє граничним умовам:

$x(0) = 0$ і $x(1) = 1$ і функціонал вигляду

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x'} dt$$

де $f = \frac{1}{x'}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x'} = -(x')^{-2}$, $x' = k$, k - стала, таким чином

$x = kt + x(0)$, граничні умови виконуються при $k = 1$, тому розв'язок $x = t$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial t}{\partial x'} \right) = 0$$

Припустимо отриманий розв'язок оптимальний, тоді він повинен бути таким, що мінімізує.

Умова Лежандра. $\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \geq 0$ приймає числові значення $\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} = \frac{2}{(x')^3}$.

Вздовж оптимальної траєкторії, де $x' = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} = 2$ умова Лежандра виконується.

Умова Вейерштрасса.

Функція Вейерштрасса

$$E = \frac{1}{x'} - 1 + (x' - 1) = \frac{1}{x'} + x' - 2$$

звідки видно, що умова $E \geq 0$ не задовільняється, якщо $x' < 0$.

Тому умова Вейерштрасса не виконується. Таким чином розв'язок $x = t$ забезпечує локальний мінімум.

8.4. Динамічна оптимізація з обмеженнями в формі рівності і множники Лагранжа

Ситуація, коли на співвідношення між скалярними елементами траєкторії стану накладені обмеження -- ситуація, яка майже завжди виникає в фізичних задачах.

Розглянемо задачу оптимізації функції вартості

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f(X, X', t) dt \quad (8.4.1)$$

з додатковими обмеженнями типу рівності в формі m -мірного векторного простору

$$\varphi_k[X(t), X'(t), t] = 0, \quad k = 1, \dots, m \text{ и } m < n \quad (8.4.2)$$

де функції φ_k двічі диференційовані.

Ця задача еквівалентна задачі мінімізації функціонала без обмежень,

$$I = \int_{t_0}^{t_f} [f(X, X', t) + \lambda^T(t) \varphi(X, X', t)] dt \quad (8.4.3)$$

$$\Phi(X, X', \lambda(t), t) = f(X, X', t) + \lambda^T \varphi(X, X', t)$$

де m -мірний вектор $\lambda(t)$ — вектор, еквівалентний множнику Лагранжа, який розглядається як функція незалежної змінної t .

Для випадку без обмежень справедливо

$$\left. \frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \omega + \frac{\partial f}{\partial x'} \omega' \right) dt = 0 \quad (8.4.4)$$

Однак функція $X(t)$ задовільняє також $\varphi(X, X', t) = 0$.

Це означає, що $\omega(t)$ не може бути вибрана довільно. Вона повинна бути такою, що

$$\bar{\varphi}(x + \varepsilon \omega, x' + \varepsilon \omega', t) = 0 \quad (8.4.5)$$

Із рівняння (8.4.5) слідує $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$ або припустивши, як і раніше $x + \varepsilon \omega = \bar{x}$,

$x' + \varepsilon \omega' = \bar{x}'$, отримаємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}'} \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \omega' = 0 \quad (8.4.6)$$

Тепер вирази (1.6.4) і (1.6.6) можна об'єднати, ввівши множник $\lambda(t)$ і створити єдину необхідну умову вигляду

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}} + \lambda^T(t) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} \right) \omega(t) + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}'} + \lambda^T(t) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}'} \right) \omega'(t) \right] dt = 0 \quad (8.4.7)$$

Якщо $\lambda(t)$ вибрати так, що вираз із співмножником $\omega'(t)$ дорівнює нулю, то перший доданок в інтегралі також повинен дорівнювати нулю, оскільки функція $\omega(t)$ довільна.

Необхідна умова (11.6.7) при інтегруванні за частинами перетворюється до вигляду

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'_i} \right) + \sum_{k=1}^m \left[\lambda_k \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_i} \right) \right) - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'_i} \lambda'_k(t) \right] = 0 \quad (8.4.8)$$

що відповідає
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}'} \right) = 0$$

Приклад 8.4.4. Задано диференціальне рівняння системи $\theta'' = u(t)$, яке можна інтерпретувати як момент інерції ракети у вільному просторі; потрібно мінімізувати

$$I = \frac{1}{2} \int_0^2 (\theta'')^2 dt \quad \text{так, щоб} \quad \theta(t=0) = 1, \quad \theta(t=2) = 0,$$

$$\theta'(t=0) = 1, \quad \theta'(t=2) = 0.$$

Для того, щоб записати задачу в термінах простору станів, припустимо

$$x_1(t) = \theta(t), \quad x'_1 = x_2(t), \quad x'_2 = u(t)$$

Тепер диференціальне рівняння системи прийме вигляд

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b}u(t),$$

де

$$\mathbf{X}^T = [x_1 \ x_2], \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^T = [0 \ 1]$$

Якщо застосувати (11.6.3) ($u(t)$ розглядається як змінна стану x_3) задача зводиться до мінімізації функціоналу

$$I = \int_0^2 \left\{ \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda^T(t) \left[\mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b}u(t) - \mathbf{X}' \right] \right\} dt = \int_0^2 \left\{ \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda_1(t) [x_2(t) - x'_1] + \lambda_2(t) [u(t) - x'_2] \right\} dt$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа приймуть вигляд

$$\lambda'_1 = 0, \quad \lambda'_2 = -\lambda_1(t), \quad u(t) = -\lambda_2(t)$$

Остаточне рішення, отримане за допомогою диференціальних рівнянь і граничних умов, рівне

$$x_1 = \frac{1}{2} t^3 - \frac{7}{4} t^2 + t + 1,$$

$$x_2 = \frac{3}{2} t^2 - \frac{7}{2} t + 1, \quad u = 3t - \frac{7}{2}$$

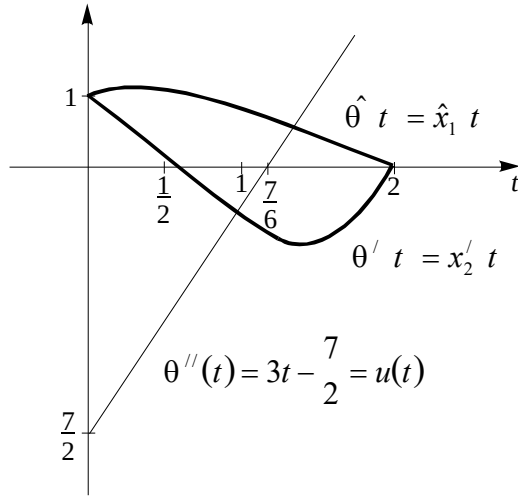


Рис.8.4. Структурна схема, оптимальне рівняння і змінні стани для системи.

8.5. Задача управління кінцевим станом

Розглянемо систему першого порядку $\varphi(x, x', t) = 0$ ($x' = f(x, u, t)$), яка починає рух із точки $x_1(t_0) = x_1$ і протягом заданого часу $[t_0, t_f]$ повинна керуватися так, щоб мінімізувати функцію $I = G(x_{t_f})$.

При цьому кінцева точка $x_{t_f} = x(t_f)$ вважається вільною. Можна вважати, що справжня задача еквівалентна задачі знаходження траєкторії $x(t)$, яка задовольняє заданим граничним умовам і мінімізує деякий еквівалентний показник якості

$$I_1 = G(x_{t_f}) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda(t) \varphi(x, x', t) dt \quad (8.5.1)$$

Розглянемо варіації виду $\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon \omega(t)$, при $\omega(t_0) = 0$, знаходимо, що

$$I_1 = G[x_{t_f} + \varepsilon \omega(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} \lambda(t) \varphi[x + \varepsilon \omega, x' + \varepsilon \omega', t] dt$$

Прийнявши $\left. \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$ і інтегруючи за частинами, отримуємо рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x'} \right) = 0 \quad (8.5.2)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x} \omega(t) \right|_{t=t_f} + \left. \frac{\partial F_1(x, x', t)}{\partial x'} \omega(t) \right|_{t=t_f} = 0 \quad (8.5.3)$$

де $F_1 = \lambda(t) \varphi(x, x', t)$.

Так як величина $\omega(t_f)$ довільна, отримуємо слідуючі умови трансверсальності

$$\left. \frac{\partial G(x)}{\partial x} \right|_{t=t_f} = - \left. \frac{\partial F_1(x, x', t)}{\partial x'} \right|_{t=t_f} \quad (8.5.4)$$

Разом з умовами (8.4.2) і (8.4.4) повинна виконуватися також умова Вейерштрасса $E \geq 0$.

Враховуючи вираз

$E(x^*, x'^*, x', t) = F(x^*, x', x, t) - F(x^*, x'^*, t) - (x' - x'^*) \frac{\partial F}{\partial x'}(x^*, x'^*, t)$ і (1.4.3) знайдемо

$$E = \lambda(t) \varphi(x^*, x', t) - \lambda(t) \varphi(x^*, x'^*, t) - (x' - x'^*) \lambda(t) \quad (8.5.5)$$

Для n -мірного простору $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\varphi(X, X', t) = 0$ перша необхідна умова оптимальності визначається сукупністю рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F_1}{\partial X} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_1}{\partial X'} \right) = 0 \quad (8.5.6)$$

де $F_1 = \lambda^T(t) \phi(X, X', t)$.

Умови трансверсальності

$$\left. \frac{\partial G}{\partial X} \right|_{t_f} = - \left. \frac{\partial F}{\partial X'} \right|_{t_f} \quad (8.5.7)$$

і умови Вейерштрасса

$$E = \lambda^T(t) \phi(X^*, X', t) - \lambda^T(t) \phi(X^*, X'^*, t) - (X' - X'^*)^T \lambda(t) \quad (8.5.8)$$

Якщо G явно залежить від t_f , тобто кінцевий момент часу t_f наперед не визначений, тоді вираз (8.4.1) набуде вигляду

$$I_1 = G(X_{t_f}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) \phi(X, X', t) dt \quad (8.5.9)$$

Це означає, що можлива варіація t_f , позначена через δt_f .

Умови трансверсальності в граничній точці

$$\left[\frac{\partial G}{\partial t} + F_1 - x' \frac{\partial F_1}{\partial x'} \right]_{t=t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial x'} \right]_{t=t_f} \delta x_{t_f} = 0 \quad (8.5.10)$$

У разі n змінних умови трансверсальності запишуться

$$\left[\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} + F_1 - \sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial F_1}{\partial x'_i} \right]_{t_f} \delta t_f + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial x'_i} \right]_{t_f} \delta x_{t_{fi}} = 0 \quad (8.5.11)$$

де $\delta x_{t_{fi}}$ — i -та складова вектора δx_{t_f} .

Для задачі оптимальної швидкодії $G(X_{t_f}, t_f) = t_f$ и $I_1 = t_f + \int_{t_0}^{t_f} F_1(X, X', t) dt$, де t_f

невідомо і повинно бути знайдено, необхідні умови для цієї задачі ті ж, що і для задачі з фіксованим часом і функціоналом

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_f} F(X, X', t) dt.$$

Відмінність в умові трансверсальності (8.4.11), то згідно з виразом (8.4.11) можна отримати умову

$$\left(\sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial F_1}{\partial x'_i} - F_1 \right)_{t=t_f} = 1, \quad (8.5.12)$$

коли $X(t_f)$ фіксоване.

Якщо $\varphi_i = x'_i - f_i(X, U, t) = 0$, то вираз (8.4.12) зводиться до вигляду

$$\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) x'_i(t) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \varphi_i(X, X', t) \right]_{t=t_f} = 1$$

або

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) f_i(x^*, u^*, t) \Big|_{t=t_f} = 1 \quad (8.5.13)$$

Дійсно, якщо функція $F_1(\lambda, X, X', u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x'_i - f_i(X, U))$ явно не залежить від часу, то із виразів (8.4.12), (8.4.13) слідує

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) f_i(X^*, U^*, t) \equiv 1, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (8.5.14)$$

це справедливо, коли $f(X, U)$ не залежить явно від часу.

8.6. Задача оптимального управління з узагальненим показником якості. Задача Больца

Розглянемо системи вигляду

$$X' = f(X, U, t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (8.6.1)$$

Потрібно знайти таку функцію управління на інтервалі $t_0 \leq t \leq t_f$, яка по-перше, переводить систему із початкового стану в кінцевий, для якого зберігається умова

$$\rho[X(t_f), t_f] = 0 \quad (8.6.2)$$

і по-друге, забезпечує мінімум показника якості

$$I = G[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt \quad (8.6.3)$$

$$F_1(X, X', U, \lambda, t) = F(X, U, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \varphi_i(X, X', U, t) \quad (8.6.4)$$

де $\varphi_i(X, X', U, t) = x'_i - f_i(X, U, t)$;

$\lambda_i(t)$ - множник Лагранжа.

1. Рівняння Ейлера-Лагранжа

Виписавши $\frac{\partial F_2}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x'_i} \right) = 0$ в явном вигляді, отримаємо

$$\lambda'_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \quad k=1, \dots, n, \quad \frac{\partial F_2}{\partial u_j} = 0, \quad j=1, \dots, r \quad (8.6.5)$$

Ці $n+r$ рівнянь разом з n рівняннями системи (8.5.1) і умовою $\zeta(u) = 0$ дають $2n+r+1$ рівнянь для $2n+r+1$ невідомих $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n, u_1, \dots, u_r$.

Якщо F_1 — відома функція часу, то

$$-F_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial x'_i} x'_i = \text{const} \quad (8.6.6)$$

яке зводиться до наступного

$$-F_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = \text{const} \quad (8.6.7)$$

2. Умова Лежандра існування мінімуму функціонала

$$[F_{2_{u_i u_j}}] \geq 0 \quad (8.6.8)$$

3. Умова Вейєрштраса

З виразів (11.5.4) і рівнянь (11.5.5) знайдемо

$$-F(X^*, U^*, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(X^*, U^*, t) \geq -F(X^*, U^*, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(X^*, U^*, t) \quad (8.6.9)$$

Це означає, що $\mathbf{U}^*$ потрібно вибрати так, щоб величина $H = -F + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ досягала максимуму в кожній точці оптимальної траєкторії.

Останнє припущення, що функція H диференціюється, означає, що в кожній точці оптимальної траєкторії повинна виконуватися наступна умова:

$$\left(-\frac{\partial F}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) \bigg|_{u_i=u_i^*} = 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (8.6.10)$$

Рівняння (8.5.10) відповідає останнім r рівнянням Ейлера-Лагранжа (8.5.5). Крім того, вимога $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \bigg|_{u=u_i}$ дає умову Лежандра.

4. Умови трансверсальності

Якщо функції G і ρ не залежать від кінцевого часу t_f , то припустивши $R = G + \alpha \rho$ (де α — постійний множник), отримаємо умову трансверсальності при t_f

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} \bigg|_{t=t_f} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \bigg|_{t=t_f} \quad (8.6.11)$$

Коли G і ρ залежать від t_f , виконується умова

$$\left[\delta R + \left(F_2 - \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_i'} x_i' \right) \delta t + \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_i'} \delta x_i \right]_{t=t_f} = 0 \quad (8.6.12)$$

де $\delta R = \sum \frac{\partial R}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial R}{\partial t} \delta t$ для всіх нескінченно малих варіацій δx_i і δt з врахуванням

$$\rho[x(t_f), t_f] = 0.$$

Звернемо увагу на одну граничну умову, яка витікає з умови трансверсальності (8.5.11).

Для класу задач, де $F \equiv 0$ і G не залежать від x_f і де кінцева точка повинна лежати на поверхні $\rho(x) = 0$, маємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \bigg|_{t=t_f} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_i} \bigg|_{t=t_f} \quad \text{при} \quad F_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i.$$

Якщо $\varphi_i = x_i' - f_i$, то маємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \bigg|_{t=t_f} = -\lambda_i(t_f) \quad (8.6.13)$$

Це означає, що градієнт функції $\rho(x)$ повинен вказувати напрямом, протилежний вектору $\lambda(t_f)$.

Інакше кажучи, для цього класу задач гранична умова така, що $\lambda(t_f)$ перпендикулярно гіперповерхності $\rho(x_f)$. Приклад — задачі, оптимальні по швидкодії.

8.7. Лінійноквадратична оптимізація

Відома постановка задачі оптимального керування динамічними системами, що полягає в знаходженні траєкторії $\mathbf{U}(t) \{ t_0 < t < t_f \}$, яка приводить стан системи $\mathbf{X}(t)$ за допомогою мінімізації функціоналу вартості або якості

$$I = G[\mathbf{x}(t), t] \Big|_{t=t_0}^{t=t_f} + \int_{t=t_0}^{t=t_f} F[\mathbf{x}(t), \mathbf{U}(t), t] dt$$

з заданими початковими умовами $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0$ в кінцеву умову $N[\mathbf{X}(t_f), t_f] = 0$ оптимальним способом. З точки зору використання є два альтернативних варіанти отримання оптимальних результатів.

У випадку оптимального керування одержуємо оптимальну траєкторію керування, як постійну функцію часу, та в часовому проміжку оптимізації для реального процесу. Очевидно, що ця оптимальна траєкторія залежить від заданого початкового стану $\mathbf{X}_0$. З-за дії можливих перешкод або неточностей моделі, на які не зважають при оптимізації, буде перебігати стан $\mathbf{X}(t)$, що відрізняється від очікуваного, отриманого по моделі $\mathbf{X}(t)$. При цьому також можливе відхилення кінцевих умов.

В випадку оптимального регулювання з необхідних умов випливає рішення так званої синтез-проблеми оптимального закону регулювання

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}^*[\mathbf{X}(t), t]$$

Ця формула використовується для прямих розрахунків керуючого впливу $\mathbf{U}(t)$ по виміряним величинам станів $\mathbf{X}(t)$. Істотна властивість оптимального регулювання випливає з того, що закон регулювання є незалежним відносно можливих початкових станів $\mathbf{X}_0$. За відсутності несподіваних перешкод або неточностей моделі оптимальне керування та оптимальне регулювання для заданих початкових станів $\mathbf{X}_0$ дає однакові результати. Установлено, що при заданій постановці проблеми використання оптимального закону регулювання з-за своєї універсальності та легкості обчислень з точки зору практичного використання є більш бажаним, ніж застосування оптимальної траєкторії керування.

Важливим спеціальним випадком оптимального керування динамічними системами є лінійно-квадратична (ЛК) оптимізація (ЛКО), яка пов'язана з лінійними рівняннями станів та квадратичними функціоналами якості [8].

Розглянемо задачу оптимального керування, припустимо, що потрібно мінімізувати функцію вартості / при фіксованому t_f /

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_f}^{t_f} [\mathbf{X}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{U}(t)] dt, \quad (8.7.1)$$

для узагальненої системи з змінними в часі параметрами і яка задається рівнянням

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{U}(t) \quad (8.7.2)$$

при умові, що $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ - вектор початкового стану.

Об'єднаємо функцію вартості та обмеження у формі диференційного рівняння за допомогою множника Лагранжа. Тоді

$$I' = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{X}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{U}(t) + \lambda^T(t) [\mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{U}(t) - \mathbf{X}'] \right\} dt \quad (8.7.3)$$

Точний характер використаної функції вартості залежить від вигляду конкретної задачі, що розв'язується. Тому вагові матриці $\mathbf{R}(t)$ та $\mathbf{Q}(t)$ звичайно обираються з фізичних міркувань. Крім того, без втрати спільності припускається, що $\mathbf{R}(t)$ та $\mathbf{Q}(t)$ - симетричні. Вектор керування $\mathbf{U}(t)$ розглядаємо так само, якби це був вектор стану. Далі скористаємось рівняннями Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}'} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{U}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{U}'} \right) = 0 \quad (8.7.4)$$

де

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{U}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{U}(t) - \mathbf{x}'],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t), & \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}'} &= -\boldsymbol{\lambda}(t) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{U}} &= \mathbf{R}(t) \mathbf{U}(t) + \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t), & \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{U}'} &= 0 \end{aligned}$$

то рівняння Ейлера-Лагранжа для цієї задачі мають вигляд:

$$\boldsymbol{\lambda}' = -\mathbf{A}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t) - \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) \quad (8.7.5)$$

$$\mathbf{U}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (8.7.6)$$

Через те, що $\mathbf{x}(t_f)$ не визначений, умова трансверсальності в момент досягнення

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t_f} = \mathbf{l}(t_f) = 0 \quad (8.7.7)$$

Відмітимо, що рівняння для оптимального керування можливе при умові, що існує матриця, обернена матриці $\mathbf{R}(t)$

Для отримання невід'ємної другої похідної необхідно, щоб $\mathbf{R}(t)$ та $\mathbf{Q}(t)$ були невід'ємно визначені. Таким чином, зрозуміло, що $\mathbf{R}(t)$ повинна бути додатньо визначеною.

Стан системи $\mathbf{x}(t_0)$ заданий при $t=t_0$, тоді як спряжений вектор $\boldsymbol{\lambda}(t)$ визначений в момент досягнення $\boldsymbol{\lambda}(t_f)=0$. Таким чином, перш ніж визначати оптимальне керування, необхідно вирішити двоточкову крайову задачу (ДТКЗ).

З'ясуємо, чи можливо перетворити керування (8.7.6) по замкненому контуру $\mathbf{U}(t)=\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)$, тобто знайдемо оптимальний закон регулювання. Припустимо, що рішення для спряженого випадку

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$

Підставляючи (11.7.8) в (11.7.2) та (11.7.6), отримаємо

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (8.7.9)$$

Крім того, з (11.7.8) та (11.7.5) випливає

$$\boldsymbol{\lambda}' = \mathbf{P}'\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{x}' = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (8.7.10)$$

Об'єднуючи (11.7.9) та (11.7.10) одержуємо

$$[\mathbf{P}' + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t)]\mathbf{x}(t) = 0 \quad (8.7.11)$$

Оскільки ця рівність повинна виконуватись для ненульових $\mathbf{x}(t)$, то множник $[\bullet]$, що стоїть перед $\mathbf{x}(t)$, повинен дорівнювати нулю. Таким чином матриця $\mathbf{P}$, що є симетричною матрицею розмірності $(n \times n)$ і яка містить в собі $n(n+1)/2$ різних членів, повинна задовольняти матричному рівнянню Ріккати:

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) \quad (8.7.12)$$

при граничній умові $\mathbf{P}(t_f)=0$

Таким чином, розв'язання матричного рівняння Ріккати можливо проводити в оберненому часі, від t_f до t_0 , побудувавши матрицю

$$\mathbf{K}(t) = -\mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \quad (8.7.13)$$

і потім одержавши керування по замкненому контуру

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \quad (8.7.14)$$

Приклад 8.7.5.:

Синтезувати систему оптимального керування об'єктом

$$T_2 \ddot{x} + T_1 \dot{x} + x = kU, \quad x(t_0) = x_0$$

з критерієм

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^2 + rU^2) dt$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{1}{T_2} x_1 - \frac{T_1}{T_2} x_2 + \frac{k}{T_2} U \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_2} & -\frac{T_1}{T_2} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_2} \end{bmatrix}$$

Далі використаємо рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\Phi = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} r U^2 + \lambda_1 (x_2 - x_1') + \lambda_2 \left(-\frac{1}{T_2} x_1 - \frac{T_1}{T_2} x_2 + \frac{k}{T_2} U - x_2' \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1'} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2'} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = x_1 - \frac{1}{T_2} \lambda_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1'} = -\lambda_1, \quad \lambda_1' = \frac{1}{T_2} \lambda_2 - x_1,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \lambda_1 - \frac{T_1}{T_2} \lambda_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2'} = -\lambda_2, \quad \lambda_2' = -\lambda_1' + \frac{T_1}{T_2} \lambda_2$$

$$\text{або} \quad \lambda' = A^T \lambda(t) - Q(t) X(t)$$

$$\text{Тоді} \quad \lambda' = \begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_2} \\ 1 & -\frac{T_1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1' = \frac{1}{T_2} \lambda_2 - x_2, & \frac{\partial \Phi}{\partial U} = rU + \lambda_2 \frac{k}{T_2} = 0 \\ \lambda_2' = -\lambda_1' + \frac{T_1}{T_2} \lambda_2, & U = -\frac{1}{r} \frac{k}{T_2} \lambda_2 \end{cases}$$

Для оптимального закону регулювання

$$U = -\frac{1}{r} \frac{k}{T_2} (p_{12} x_1 + p_{22} x_2)$$

Матричне рівняння Ріккати

$$P' = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q$$

запишемо в вигляді

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} \\ P'_{21} & P'_{22} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_2} \\ 1 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_2} \end{bmatrix} r^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad r = 1 \\
\begin{cases} P'_{11} = \frac{2}{T_2} P_{12} + \left(\frac{k}{T_2}\right)^2 P_{12}^2 - 1 \\ P'_{12} = -P_{11} + \left(\frac{T_1}{T_2}\right) P_{12} + \frac{1}{T_2} P_{22} + \left(\frac{k}{T_2}\right)^2 P_{12} P_{22} \\ P'_{22} = \frac{2T_1}{T_2} P_{22} + \left(\frac{k}{T_2}\right)^2 P_{22}^2 - 2P_{12} \end{cases} &\begin{cases} P_{11}(t_f) = 0 \\ P_{12}(t_f) = 0 \\ P_{22}(t_f) = 0 \end{cases} \\
U^*(t) = -\frac{1}{r} \frac{k}{T_2} (P_{12} x_1 + P_{22} x_2) &
\end{aligned}$$

Приклад 8.7.6. Синтез лінійного закону керування теплообмінником

Теплообмінник – апарат, що застосовують у виробництві для теплообміну між двома речовинами з різними температурами. Структурно-параметричну схему теплообмінника для синтез-газу перед реактором наведено на рис. 8.5.

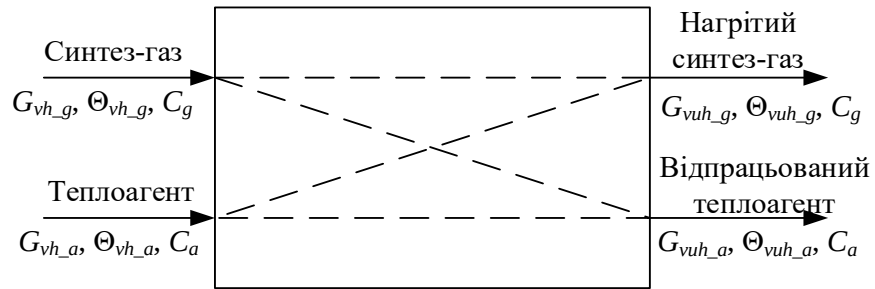


Рис. 8.5. Структурно-параметрична схема теплообмінника:

$G_{vh_g}, \Theta_{vh_g}, C_g$ – витрата, температура, питома теплоємність синтез-газу відповідно; $G_{vh_a}, \Theta_{vh_a}, C_a$ – витрата, температура, питома теплоємність теплоагента відповідно; $G_{vuh_g}, \Theta_{vuh_g}$ – витрата та температура нагрітого синтез-газу відповідно; $G_{vuh_a}, \Theta_{vuh_a}$ – витрата та температура відпрацьованого теплоагента відповідно

Керування теплообмінником полягає в підтриманні температури синтез-газу на виході з апарату, за рахунок зміни витрати теплоагента на вході в апарат. Тому розглянемо спосіб автоматичного керування процесом нагрівання синтез-газу в теплообміннику за каналом керування «витрата теплоагента на вході» – «температура синтез-газу на виході».

Вибір критерію оптимальності

Задача: мінімізувати витрату теплоагента та вивести значення температури синтез-газу на заданий рівень.

Для вирішення даної задачі оберемо інтегральний критерій якості. Необхідно підтримувати на певному рівні температуру синтез-газу на виході з теплообмінника. Тобто в критерій оптимальності включаємо температуру синтез-газу на виході з апарата:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [q(\theta_{s.vuh} - \theta_{s.vuh}^{3d})^2 + r_1 G_s^2 + r_2 G_{ta}^2] dt \rightarrow \min$$

математичну модель до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d(\theta_{s.vuh})}{dt} &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + b_1 \cdot u_1 \\ \frac{d(\theta_{ta.vuh})}{dt} &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + b_2 \cdot u_2 \end{aligned}$$

Проектування оптимального лінійно-квадратичного регулятора

Структурна схема контуру керування температурою у ректифікаційній колоні представлена на рисунку 8.6.

Розрахунок оптимального керування зі зворотнім зв'язком з квадратичним критерієм якості виконано у *MatLab*.

Оптимальний лінійний регулятор:

$$U(t) = -K(t)X(t)$$

де

$$K(t) = -R^{-1}BP(t)$$

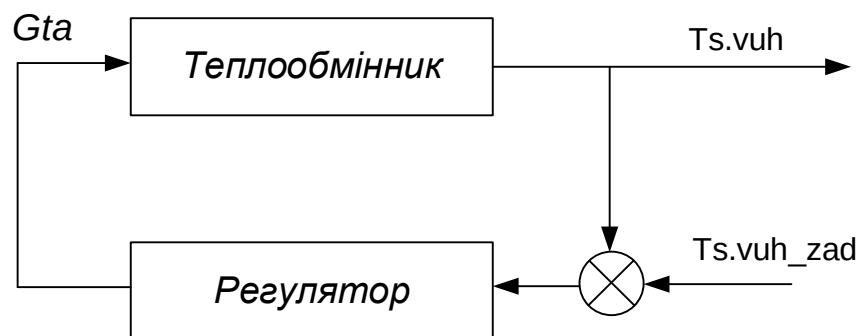


Рис.8.6. Структурна схема контуру керування

Виведені залежності, визначають лінійний оптимальний регулятор з матричним коефіцієнтом підсилення K . Цей регулятор мінімізує критерій на траєкторіях системи при цьому:

1. Матричний коефіцієнт підсилення K може бути визначеним поза контуром керування, так як він не залежить ні від X , ні від U ; для визначення K необхідно розв'язати рівняння Ріккати в зворотному часі.

2. При постійних матрицях A, B, R, Q і при $t \rightarrow \infty$, P прямує до усталеного значення, яке можна знайти розв'язавши алгебраїчне нелінійне матричне рівняння:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Це в свою чергу забезпечує сталість матричного коефіцієнту підсилення регулятора K .

3. Пояснимо смисл критерію якості. Зрозуміло, що квадратичне зваження кінцевого стану дозволяє досягнути бажаної якості керування, але квадратичне зваження керування не так обґрунтовано, особливо якщо вартість ресурсів не велика. В деяких випадках квадратичне зваження замінює собою явні обмеження на величину керуючих дій, та дозволяє отримати оптимальний закон зворотного зв'язку в аналітичному вигляді. Крім того, завдання занадто великих вагових матриць R викликає відхилення фактичного кінцевого стану від заданого, а занадто малих – призводить до дуже великих значень U . Основним обмеженням являються вимоги додатної визначеності R і неможливість завдання явних обмежень на X, U .

4. Вводячи більш загальний критерій якості

$$J = 1/2 X(t_f)^T S_f X(t_f) + 1/2 \int_0^{t_f} (X^T Q X + U^T R U + 2 X^T N U) dt$$

в якому враховуються взаємозв'язки між керуваннями та станом, можна показати, що оптимальний регулятор визначається, як і раніше, виразом з коефіцієнтом підсилення:

$$K = R^{-1}(B^T P - N^T).$$

Вимоги, що до існування оптимального лінійно квадратичного регулятора:

1. пара матриць $[A, B]$ має бути повністю керована;
2. мають виконуватися нерівності $R > 0, Q - NR^{-1}N^T \geq 0$;
3. пара матриць $[Q - NR^{-1}N^T, A - BR^{-1}N^T]$ не може мати спостережувані моди з власними значеннями на дійсній осі.

Слід відмітити, що при практичній реалізації алгоритмів оптимального керування часто не представляється можливим отримати оптимальні точні характеристики оптимізації. Це, найчастіше, обумовлене тим, що при побудові вихідної математичної моделі процесу керування звичайно використовують наближені чи апроксимуючі моделі, що враховують основні домінуючі зв'язки і в той же час відрізняються від реальних. В реальних умовах похибка алгоритмів оптимізації може зростати (особливо на великих інтервалах часу), що приведе до нестійкості алгоритмів оптимізації. Явище нестійкості алгоритмів оптимізації пов'язане з умовами реалізації рівняння Ріккаті, розв'язок якого губить властивість симетричності.

Рівняння Ріккаті:

$$\begin{aligned}
p_{11}' &= p_{21}(1,388 \cdot 10^4 \cdot p_{12} + 8,836 \cdot 10^3 \cdot p_{11}) + 10,471 \cdot p_{11} - 27,113 \cdot p_{12} - 27,113 \\
&\quad \cdot p_{21} + p_{11}(5,626 \cdot 10^3 \cdot p_{11} + 8,836 \cdot 10^3 \cdot p_{12}) - 1 \\
p_{12}' &= p_{22}(1,388 \cdot 10^4 \cdot p_{12} + 8,836 \cdot 10^3 \cdot p_{11}) + 5,235 \cdot p_{12} + 51,208 \cdot p_{12} - 27,113 \\
&\quad \cdot p_{22} - 3,985 \cdot p_{11} + p_{12}(5,626 \cdot 10^3 \cdot p_{11} + 8,836 \cdot 10^3 \cdot p_{12}) \\
p_{21}' &= p_{12}' \\
p_{22}' &= p_{22}(1,388 \cdot 10^4 \cdot p_{22} + 8,836 \cdot 10^3 \cdot p_{21}) + 102,471 \cdot p_{22} - 3,985 \cdot p_{12} - 3,985 \\
&\quad \cdot p_{21} + p_{12}(5,626 \cdot 10^3 \cdot p_{21} + 8,836 \cdot 10^3 \cdot p_{22}) - 1
\end{aligned}$$

Нижче наведений код *MatLab* для розрахунку оптимального лінійного регулятора:

```

function Lin_Reg
disp('Матриця A:')
A = [-5.2353 3.9852;27.1128 -51.2083] % Введення матриці A
disp('Матриця B:')
B = [75.0064 117.7969]' % Введення матриці B
% Параметри критерія якості:
disp('Матриця Q:')
Q = [1 0;0 0] % Формування одиничної матриці
disp('Матриця R:')
R = 1 % Введення матриці R
disp('Матриця N:')
N = [] % Введення матриці N
disp('Вектор початкових умов X0:')
x0 = [473.15;535.15]' % Завдання вектора початкових умов
disp('Вектор заданих значень відхилень Xd:')
xd = [533.15 500]' % Завдання вектора заданих значень відхилень
disp('Вектор заданих значень відхилень керування Ud:')
ud = 0.8 % Завдання відхилень значень керування
disp('Час спостереження tf:')
tf = 1 % Завдання часу спостереження
disp('Довжина кроку dt:')
dt = 0.01 % Завдання довжини кроку
disp('Кількість кроків n:')
n = tf/dt
[K P E] = lqr(A,B,Q,R,N); % Синтез регулятора
disp('Матриця зворотнього зв'язку K:'); K
disp('Розв'язок рівняння Ріккати P:'); P
disp('Власні значення замкненої системи E:'); E
% Визначення розмірності задачі
SA = size(A); SA = SA(1); SB = size(B); SB = SB(2);
% Формування векторів x u
x = zeros(SA,n); u = zeros(SB,n-1);
% Формування початкового стану
x(:,1) = x0;
% Знаходження оптимального керування u та змінних стану x
for i=1:n-1,
u(:,i) = ud-K*(x(:,i)-xd);
x(:,i+1) = (A*(x(:,i)-xd)+B*(u(:,i)- ud))*dt+x(:,i);
end
% Подова динаміки змінних стану

```

```

plot(0:dt:tf-dt,x(1,:)), grid
title('Динаміка руху змінних стану');
xlabel('Час, t,c');
ylabel('Змінні стану, Ts.vuh');
legend('x_1','x_2')
% Побудова вектора керування
figure(2)
plot(dt:dt:tf-dt,u), grid
title('Динаміка зміни керування'); xlabel('Час,t,c'); ylabel('Керування, Ga'); legend('u2')

```

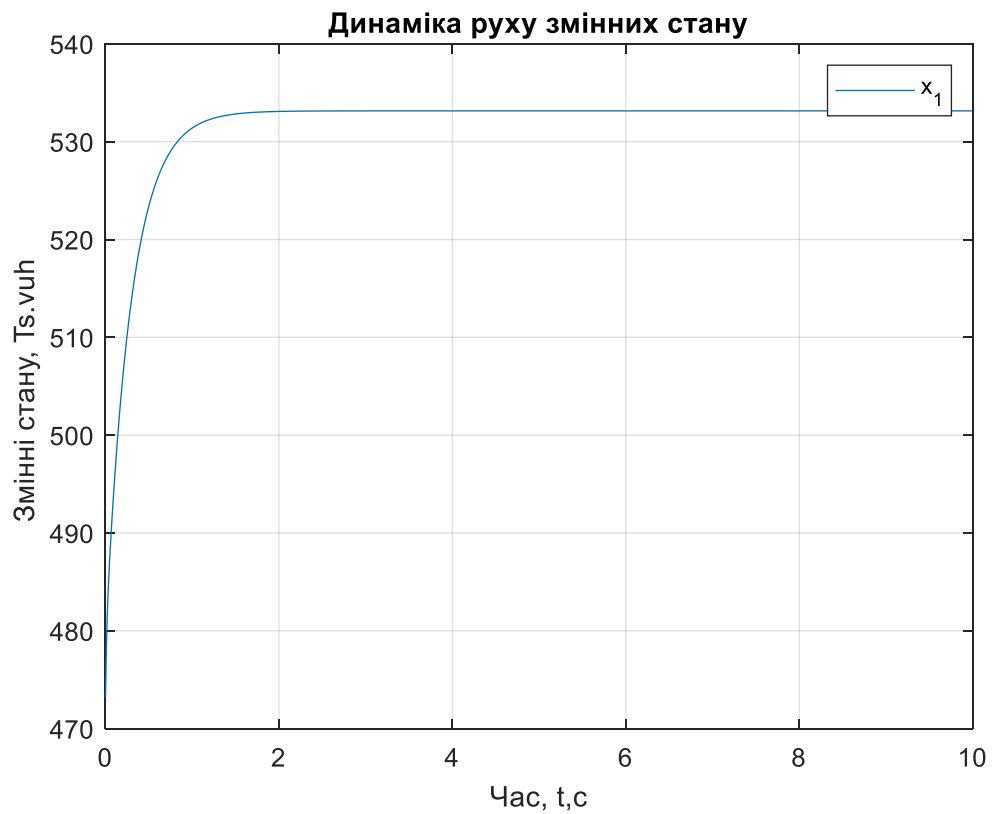


Рис.8.7. Динаміка руху змінних стану з лінійно-квадратичним регулятором

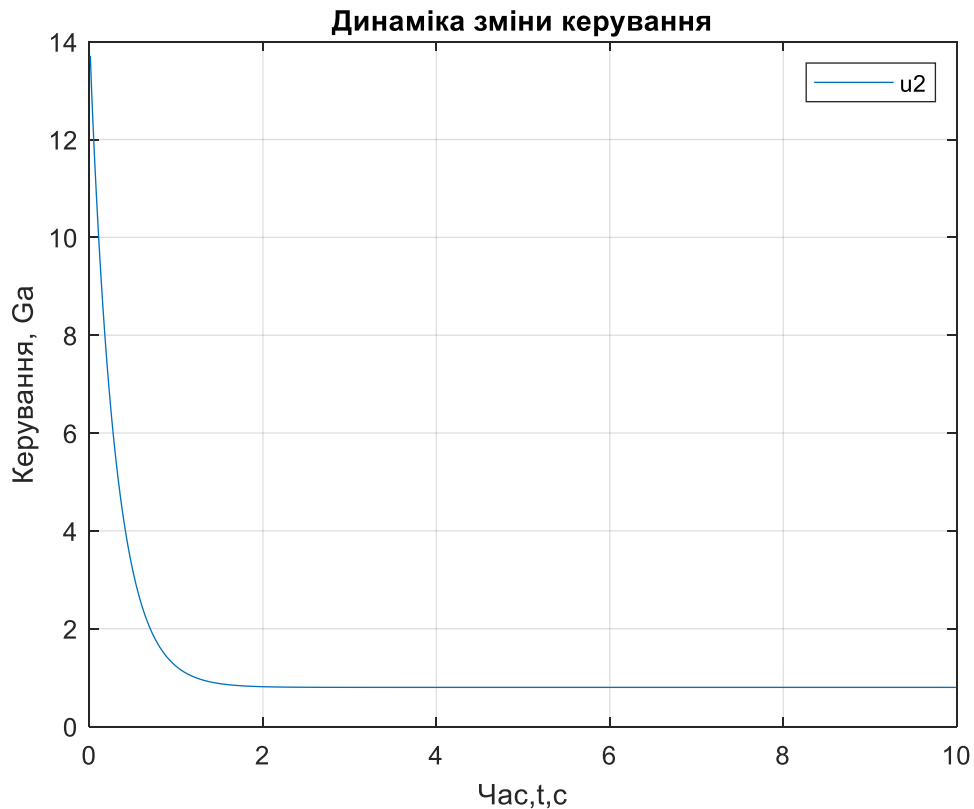


Рис.8.8. Динаміка руху змінних керування з лінійно-квадратичним регулятором

8.8. Динамічна оптимізація з обмеженнями в формі нерівностей

У багатьох фізичних задачах, що представляють інтерес для фахівців в області управління, є різні обмеження в формі нерівностей на вектор управління

$$\Gamma_{\min} \leq \Gamma(X, X', t) \leq \Gamma_{\max} \quad (8.8.1)$$

Для рішення задачі з обмеженнями в формі нерівностей є декілька методів, один з яких метод заміни змінних. Виконується перетворення обмеження (8.8.1) в обмеження типу рівності шляхом введення нових змінних стану γ_i , що задовільняють рівнянням

$$(\Gamma_{\max_i} - \Gamma_i)(\Gamma_i - \Gamma_{\min_i}) = \gamma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8.8.2)$$

Легко довести, що рівняння (8.8.2) еквівалентно (8.8.1) і навпаки. Тепер, щоб ввести обмеження (8.6.2) і (8.8.2) в (8.6.1), можна використати множники Лагранжа. Далі стає можливим використати звичайні необхідні умови екстремума.

Приклад 8.8.6. Розглянемо ту ж динаміку системи, що і в попередньому прикладі:

$$\dot{x}_1 = x_2(t), \quad \dot{x}_2 = u(t)$$

при наявності початкових умов $x_1(t_0) = x_0$, $x_2(t_0) = v_0$ задача заключається в тому, щоб знайти таке управління, яке максимізує $x_1(t_f)$ для фіксованого t_f при граничній умові $x_2(t_f) = v_f$ і обмеженнях типу нерівність на скалярне управління $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$.

Перетворимо обмеження типу нерівність в обмеження типу рівність, ввівши нову змінну $\alpha(t)$: $(u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2 = 0$

Таким чином, задача може бути представлена як задача мінімізації $I = -x_1(t_f)$ при наявності обмежень типу рівність

$$x_1' = x_2(t), \quad x_1(t_0) = x_0, \quad x_1(t_f) \text{ — довільно,}$$

$$x_2' = u(t), \quad x_2(t_0) = v_0, \quad x_2(t_f) = v_f, \quad (u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2 = 0.$$

Функція вартості з множниками Лагранжа прийме вигляд

$$I_1 = -x_1(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (-x_1' + \lambda_1(x_2 - x_1') + \lambda_2(u - x_2') + \lambda_3((u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2)) dt$$

$$\text{Із рівняння Ейлера-Лагранжа} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial X'} - \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0 \quad X^T = [x_1, x_2, u]$$

$$\text{при} \quad \Phi = \lambda_1(x_2 - x_1') + \lambda_2(u - x_2') + \lambda_3((u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2) - x_1' \quad \text{знаходимо}$$

$$\lambda_2' = 0, \quad \lambda_2' = -\lambda_1$$

$$0 = -\lambda_2 + \lambda_3(2u - u_{\max} - u_{\min}), \quad 0 = \alpha \lambda_3.$$

Таким чином, ми прийшли до двоточечної крайової задачі, рішення якої визначає оптимальні змінні стану і управління:

$$x_1' = x_2(t), \quad x_1(t_0) = x_0,$$

$$x_2' = x(t), \quad x_2(t_0) = v_0,$$

$$\lambda_1' = 0, \quad \lambda_1(t_f) = -1,$$

$$\lambda_2' = -\lambda_1(t), \quad x_2(t_f) = v_f,$$

$$\alpha(t) \lambda_3(t) = 0,$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_3(t)(2u(t) - u_{\max} - u_{\min})$$

$$\alpha^2(t) = (u(t) - u_{\min})(u_{\max} - u(t))$$

Дана ДТКЗ є нелінійною через введення останніх трьох рівнянь і отримати рішення аналітично вельми важко. В звичайному варіанті $u_{\min} = -1$, $u_{\max} = 1$.

В цьому випадку можна показати, що $\alpha(t) = 0$,

$$u(t) = -\text{sign} \lambda_2(t),$$

$$\text{де} \quad \text{sign} \lambda_2 = +1, \quad \lambda_2 > 0,$$

$$\text{sign} \lambda_2 = -1, \quad \lambda_2 < 0.$$

Облік обмежень на управління в формі нерівностей

$$g[X(t), U(t), t] \geq 0$$

можна здійснити також використовуючи метод функції штрафів, тобто введенням штрафу за порушення нерівності

$$I = \int \dots + g[X(t), U(t), t]^p H(g) dt$$

Тут p — довільне додатне число; $H(g)$ — модифікована ступінчата функція Хевісайда

$$H(g) = \begin{cases} 0, & g \geq 0 \\ k, & g < 0 \end{cases}.$$

Шляхом вибору значень p і k можна змінити значення штрафу за порушення обмеження на управління

$$(u_{\max} - u)(u - u_{\min}) \geq 0$$

$$u_{\max} = 1, \quad u_{\min} = -1$$

$$(1 - u)(u + 1) = (1 - u^2) > 0$$

Функції штрафу на обмеження по управлінню може мати вигляд

$$\theta = [u(t) - u_b]^2 h[u(t) - u_b] + [u_H - u(t)]^2 h[u_H - u(t)],$$

h — функція Хевісайда.

8.9. Варіаційний метод

В застосованому до цього часу методі при виведенні необхідних умов оптимальності траєкторії x вводилося відхилення від $\bar{x}$ на величину $\varepsilon\omega$, а потім визначались необхідні умови із рівняння

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

яке повинно виконуватися незалежно від ω .

Другий метод, що називається варіаційним, заключається в виділенні лінійної частини $\Delta I = I(x + \varepsilon\omega) - I(x)$ і твердженні, що вона також повинна дорівнювати нулю при $\varepsilon = 0$ незалежно від ω . Лінійна частина ΔI , яку ми позначаємо δI , називається першою варіацією I (при x), диференціалом Гато. У варіаційному методі для визначення необхідних умов використовуються диференціали, а не похідні. Розглянемо виведення необхідних умов мінімуму функціонала варіаційним методом

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f(x, x', t) dt \quad (8.9.1)$$

при фіксованому часі t_f закінчення.

Припускається, що $\bar{x}(t)$ і $\bar{x}'(t)$ представлені сімейством кривих

$$\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon\omega(t), \quad \bar{x}'(t) = x'(t) + \varepsilon\omega'(t) \quad (8.9.2)$$

де $x(t)$ — оптимальна крива, а $\omega(t)$ — варіація від $\bar{x}(t)$, що залежить від t .

Підставивши (8.9.2) в (8.9.1) і розклавши $\varphi(x, x', t)$ в ряд Тейлора в околі точки $\varepsilon = 0$, отримаємо

$$f[x(t) + \varepsilon\omega(t), x'(t) + \varepsilon\omega'(t), t] = f(x, x', t) + \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon\omega(t) + \frac{\partial f}{\partial x'} \varepsilon\omega'(t) + 0(\omega, \omega') \quad (8.9.3)$$

де через $0(\omega, \omega')$ позначаються члени високих порядків по $\omega(t)$ і $\omega'(t)$.

Відмітимо, що

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{t_0}^{t_f} \{f[x(t) + \varepsilon\omega(t), x'(t) + \varepsilon\omega'(t), t] - f[x, x', t]\} dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon\omega(t) + \frac{\partial f}{\partial x'} \varepsilon\omega'(t) + 0(\omega, \omega') \right\} dt \end{aligned} \quad (8.9.4)$$

Визначимо тепер першу варіацію $x(t)$ і $x'(t)$

$$\varepsilon\omega(t) = \delta x, \quad \varepsilon\omega'(t) = \delta x' \quad (8.9.5)$$

Таким чином

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial x'} \delta x' + 0(\omega, \omega') \right] dt \quad (8.9.6)$$

Перша варіація y має вигляд

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \delta x' \right] dt \quad (8.9.7)$$

Необхідна умова існування екстремума при $\bar{x}(t) = x(t)$, тобто при $\varepsilon = 0$, заключається в тому, що перша варіація δI повинна дорівнювати нулю.

Використовуючи цю умову у виразі (8.9.7), а також ввівши деякі спрощення при інтегруванні за частинами, отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right) \right] \delta x dt + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \quad (8.9.8)$$

Для того, щоб (8.9.8) дорівнювало нулю незалежно від варіації, необхідно, щоб

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \right) = 0 \quad (8.9.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'} \delta x = 0 \quad \text{для } t = t_0, t_f \quad (8.9.10)$$

Аналогічно можна показати, що друга варіація (8.9.1), яка позначена $\delta^2 I$, має вигляд

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ (\delta x)^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(x')^2} \right) \right] + (\delta x')^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x')^2} \right\} dt \quad (8.9.11)$$

тобто друга варіація представляє собою квадратичний член в розкладі ΔI (8.9.6).

Контрольні запитання до розділу 8.

1. Класичні задачі варіаційного числення.
2. Рівняння, які лежать у основі рішення варіаційних задач.
3. Які рівняння вирішують двоточкову крайову задачу?
4. Умови трансверсальності. Вірогідні комбінації граничних умов.
5. Достатні умови існування оптимума.
6. Необхідні умови оптимальності для задач з змінним часом досягнення.
7. Векторна форма необхідних умов оптимальності.
8. Лагранжіан для задач з обмеженнями у формі рівностей. Спряжені змінні.
9. Лінійноквадратична оптимізація.
10. У чому різниця оптимального керування від оптимального регулювання?
11. Матричне нелінійне рівняння Ріккати.
12. У чому суть варіаційного метода? Диференціал Гато.

Опуклі та вгнуті функції

Для випадку множинних оптимумів в теорії оптимізації виділяється важливий клас унімодальних функцій, а саме клас опуклих та вгнутих функцій, які досліджують перевірку, чи є функція унімодальною. Вимога унімодальності функції є значно більш слабкою, ніж вимога вгнутості чи опуклості, оскільки унімодальність не потребує ні неперервності, ні єдиної похідної.

Опукла функція. Функція N змінних $f(X)$, визначена на опуклій більшості D , зветься опуклою функцією тоді і тільки тоді, коли для будь-яких точок $X^{(1)}$ і $X^{(2)} \in D$ і $0 < \lambda < 1$ виконується нерівність

$$f(\lambda X^{(1)} + (1 - \lambda)X^{(2)}) \leq \lambda f(X^{(1)}) + (1 - \lambda)f(X^{(2)})$$

Вгнута функція. Функція $f(X)$ - вгнута на множині D тоді і тільки тоді, коли $-f(X)$ є опуклою функцією на цій множині.

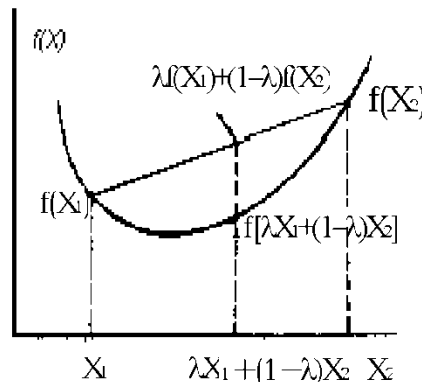


Рис. А.1 Опукла функція

Рисунок А.1 ілюструє визначення опуклої функції для випадку однієї змінної.

Властивості опуклих функцій

- 1) Хорда, яка поєднує дві будь-які криві графіку опуклої функції, завжди проходить над (та вище) кривою в інтервалі між двома цими точками.
- 2) Тангенс кута нахилу дотичної або перша похідна $f'(X)$, зростає чи хоча б не убавляє при збільшенні X .
- 3) Друга похідна $f''(X)$ - завжди невідомий на розглядаємому інтервалі.
- 4) Лінійна апроксимація $f(X)$ в будь-якій точці інтервалу дозволяє завжди отримувати нижню оцінку дійсного значення функції (рис.А.1).
- 5) Для опуклої функції локальний мінімум завжди є глобальним.

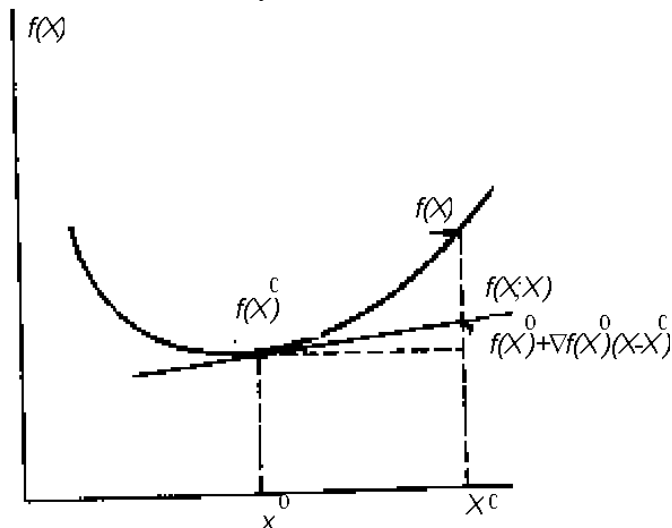


Рис. А.2 Лінійна апроксимація опуклої функції

Лінійна апроксимація функції $f(X)$ в точці X_0 будується шляхом виключенням членів другого і більш високого порядку їх розкладанням функції у ряд Тейлора:

$$f(X, X_0) = f(X_0) + \nabla f(X_0)(X - X_0)$$

З властивості 4 випуклої функції випливає, що $f(X) \geq f(X_0) + \nabla f(X_0)(X - X_0)$ для всіх X .

Градiente функції $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ визначається як вектор

$$\nabla f(X_1, \dots, X_N) = \left[\frac{\partial f}{\partial X_1} \quad \frac{\partial f}{\partial X_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial X_N} \right]^T.$$

матриця Гессе для функції $f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ є симетрична матриця порядку $n \times n$:

$$\mathbf{H}(\tilde{O}) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \right] = \nabla^2 f.$$

Перевірка функції на опуклість

Функція $f(X)$ - опукла, якщо її матриця Гессе додатньо визначена або додатньо напіввизначена для всіх значень X

Список використаної і рекомендованої літератури

1. Глушик М.М., Копич І.М., Сороковський В.М. Математичне програмування: підручник. ISBN 978-966-418-103-4 - Львів: Новий Світ, 2014. – 280 с.
2. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Підручник.-К.: Видавничий дім «Слово», 2006.- -816с.
3. Ладієва Л.Р. Оптимальне керування системами.: Електронне мережне навчальне видання. Навчальний посібник. - 2019- 162 с.
4. Ладієва Л.Р. Оптимізація систем керування. : Електронне мережне навчальне видання. Навчальний посібник. – 2020. – 192 с.
5. Ладієва Л.Р. Оптимізація технологічних процесів: Навчальний посібник. – К: ІВЦ «видавництво «Політехніка»», 2004. – 192с.
6. Hamdy A. Taha. Operations research an introduction. Tenth Edition –Pearson Education Limited publishers London, 2017.-843 P.
7. Ravindran A. Engineering Optimization Methods and Application. /A. Ravindran A., Ragsdell K.M., Reklaitis G.V. / - Publication John Willy and sons, Inc, NJ, 2006, 2nd ed.- 688p.
8. Sage EP, White C.S. Optimal systems control. 2d [View all formats and editions](#) – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 2006. - 392p.

ВСТУП.....	Ошибка! Закладка не определена.	3
1. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ		3
1.1 ГРАДІЄНТ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ		3
1.2 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ.....		5
1.3 НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ БЕЗ ОБМЕЖЕНЬ		6
1.4 НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ З ОБМЕЖЕННЯМИ У ВИГЛЯДІ РІВНОСТЕЙ І НЕРІВНОСТЕЙ. УМОВИ КУНА - ТАККЕРА		6
1.5 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ		10
2. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, ЯКІ НЕ ВИКОРИСТОВУЮТЬ ПОХІДНІ.....		12
2.1 ФУНКЦІЯ ОДНОЇ ЗМІННОЇ		12
2.1.1 МЕТОДИ ВИКЛЮЧЕННЯ ІНТЕРВАЛІВ		12
2.1.2 ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ.....		18
2.2 ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ		21
2.2.1 МЕТОД СКАНУВАННЯ.....		21
2.2.2 МЕТОД ГАУСА-ЗЕЙДЕЛЯ.....		23
2.2.3 СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД.....		24
2.2.4 ПОШУК ПО ДЕФОРМОВАНОМУ БАГАТОГРАННИКУ		29
2.2.5 МЕТОД ПАУЕЛЛА.....		33
2.2.6 МЕТОД ПОШУКУ ХУКА-ДЖИВСА.....		38
2.2.7 МЕТОД РОЗЕНБРОКА.....		43
3. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬ ПОХІДНІ.....		49
3.1 ГРАДІЄНТНІ МЕТОДИ.....		49
3.1.1 МЕТОД РЕЛАКСАЦІЇ		49
3.1.2 МЕТОД ГРАДІЄНТА.....		51
3.1.3 МЕТОД НАЙШВИДШОГО СПУСКУ.		55
3.2 МЕТОД ДРУГИХ ПОХІДНИХ. МЕТОД НЬЮТОНА		57
3.3 МЕТОД СПРЯЖЕНОГО ГРАДІЄНТУ		60
3.4 МЕТОДИ ЗМІННОЇ МЕТРИКИ		64
3.4.1 АЛГОРИТМ БРОЙДЕНА		65
3.4.2 МЕТОД ДЕВІДОНА-ФЛЕТЧЕРА-ПАУЕЛЛА.....		66
3.4.3 АЛГОРИТМ ПІРСОНА.....		69
3.5 МЕТОД ГОЛДШТЕЙНА-ПРАЙСА		70
3.6 ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМІВ МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОХІДНИХ		72
4. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ		73
4.1 МЕТОДИ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ		73
4.1.1 ОСНОВНІ ТИПИ ШТРАФІВ.....		74
4.1.2 МЕТОД ПОСТУПОВОЇ БЕЗУМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ.....		76
4.1.3 МЕТОД РОЗЕНБРОКА.....		87
4.1.4 МЕТОД ФЛЕТЧЕРА - ПАУЕЛЛА.....		90
4.2 МЕТОДИ ЛІНІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ.....		92
4.3. МЕТОДИ ПРЯМОГО ПОШУКУ В ЗАДАЧАХ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ.....		99
5. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАДІЄНТНИХ МЕТОДІВ В ОДНОКРОКОВИХ ПРОЦЕДУРАХ ВИБОРУ РІШЕНЬ		105
6. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ		116
7. ПОДАЛЬША ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ		125
7.1. КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ		125
7.2 ТЕОРІЯ ІГОР		128

8. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ В ОПТИМАЛЬНОМУ КЕРУВАННІ.....	129
8.1 ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ.....	129
8.2. ОСНОВНА ЗАДАЧА МІНІМІЗАЦІЇ. ВИПАДОК ЗАКРІПЛЕНИХ КІНЦЕВИХ ТОЧОК.....	130
8.3. ВИПАДОК РУХОМИХ КІНЦЕВИХ ТОЧОК.....	134
8.4. ДИНАМІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ З ОБМЕЖЕННЯМИ У ФОРМІ РІВНОСТЕЙ І МНОЖНИКИ ЛАГРАНЖА.....	138
8.5. ЗАДАЧА УПРАВЛІННЯ КІНЦЕВИМ СТАНОМ.....	140
8.6. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ УЗАГАЛЬНЕНИМ ПОКАЗНИКОМ ЯКОСТІ. ЗАДАЧА БОЛЬЦА.....	142
8.7. ЛІНІЙНОКВАДРАТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ.....	143
8.8. ДИНАМІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ У ФОРМІ НЕРІВНОСТЕЙ.....	152
8.9. ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД.....	154
Додадок А.....	156
Опуклі та вгнуті функції.....	156
Список використаної і рекомендованої літератури.....	158