

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. М. Лось, В. В. Третиник, О. М. Андрусенко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ПРАКТИКУМ ЧАСТИНА 2

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю
F1 Прикладна математика

Електронне мережне навчальне видання

Київ
ПТФ «ПРОСВІТА»
2026

УДК 517.91(076.5)
Л79

Автори-укладачі: *Лось В. М.*, д-р фіз.-мат. наук, професор
Третиник В. В., канд. фіз.-мат. наук, доцент
Андрусенко О. М., канд. техн., доцент

Рецензент *Балюнов О. О.*, канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри математики природничо-математичного факультету Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка

Відповідальний редактор *Сирота С. В.*, канд. техн. наук, доцент

*Гриф надано Методичною радою КІП ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 8 від 04.06.2026 р.)
за поданням вченої ради Факультету програмних систем та прикладної математики
(протокол № 13 від 28.05.2026 р.)
Реєстр. № 25/26-478*

Лось В. М.
Л79 Диференціальні рівняння. Практикум. Частина 2 : навчальний посібник / В. М. Лось, В. В. Третиник, О. М. Андрусенко. – Київ : ПТФ «Просвіта», 2026. – 147 с.
ISBN 978-617-7010-44-8

У навчальному посібнику викладено теоретичні відомості та наведено методи розв'язування типових задач з другої частини курсу «Диференціальні рівняння». Посібник містить значну кількість прикладів з розв'язаннями та вправи для самостійної роботи. Навчальне видання призначене здобувачів ступеня бакалавра спеціальності F1 Прикладна математика, а також для студентів інших спеціальностей, що вивчають дисципліну «Диференціальні рівняння».

УДК 517.91(076.5)

ISBN 978-617-7010-44-8

© В. М. Лось, В. В. Третиник, О. М. Андрусенко, 2026
© КІП ім. Ігоря Сікорського, 2026

ЗМІСТ

1. КРАЙОВІ ЗАДАЧІ. ФУНКЦІЯ ГРІНА	4
2. ЗАДАЧА НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ. ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ ...	12
3. ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ	22
4. НЕОДНОРІДНІ СИСТЕМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ	44
5. ФАЗОВІ ПОРТРЕТИ АВТОНОМНИХ СИСТЕМ	56
6. СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ	98
7. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ	120
ЛІТЕРАТУРА	146

1. КРАЙОВІ ЗАДАЧІ. ФУНКЦІЯ ГРІНА

Розглянемо наступну задачу для лінійного диференціального рівняння другого порядку:

$$\begin{cases} a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), & x \in [a, b], & a(x) \neq 0 & (1.1) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma_1, & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0 & (1.2) \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2, & \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0 & (1.3) \end{cases}$$

Задача полягає в знаходженні розв'язку $y(x)$ рівняння (1.1) на відрізку $[a, b]$, який на кінцях цього відрізка $x = a$ та $x = b$ задовольняє крайові умови (1.2) і (1.3) відповідно. Така задача називається двоточною крайовою задачею.

Крайові умови в окремих випадках (задається лише значення функції або лише значення похідної функції) мають спеціальні назви:

1. Крайові умови першого роду (крайові умови Діріхле):

$$y(a) = \gamma_1, \quad y(b) = \gamma_2$$

2. Крайові умови другого роду (крайові умови Неймана):

$$y'(a) = \gamma_1, \quad y'(b) = \gamma_2$$

В загальному випадку (1.2) та (1.3) називаються крайовими умовами третього роду.

Крайова задача може мати один, безліч або жодного розв'язку в залежності від $f(x)$, γ_1 , γ_2 .

Для зручності запишемо задачу (1.1)—(1.3) в операторній формі:

$$Ly = f, \quad B_1 y = \gamma_1, \quad B_2 y = \gamma_2, \quad (1.4)$$

тут

$$\begin{cases} Ly := a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y \\ B_1 y := \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) \\ B_2 y := \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) \end{cases}$$

Задачу (1.4) заміною $y(x) = u(x) + v(x)$ можна звести до задачі з нульовими крайовими умовами. Тут $u(x)$ – нова невідома, $v(x)$ – двічі неперервно диференційована на $[a, b]$ функція, що задовольняє крайові умови задачі:

$$B_1 v = \gamma_1, \quad B_2 v = \gamma_2$$

(таку функцію $v(x)$ завжди можна знайти). Дійсно, робимо в (1.4) підстановку $y(x) = u(x) + v(x)$ і маємо:

$$L(u + v) = f, \rightarrow Lu + Lv = f, (Lv \equiv f_1), \rightarrow Lu = f - f_1 \equiv f_2,$$

$$B_1(y) = B_1(u + v) = B_1 u + B_1 v = \gamma_1, \quad (B_1 v = \gamma_1), \rightarrow \mathbf{B}_1 \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

$$B_2(y) = B_2(u + v) = B_2 u + B_2 v = \gamma_2, \quad (B_2 v = \gamma_2), \rightarrow \mathbf{B}_2 \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Таким чином, одержали задачу з нульовими крайовими умовами:

$$\begin{aligned} Lu &= f_2, \\ B_1 u &= 0, \\ B_2 u &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Означення 1.1 Функцію $G(x, s)$ двох змінних x та s , яка задовольняє наступні умови:

1. Визначена в квадраті $[a, b] \times [a, b]$
2. Для кожного фіксованого $s = \text{const}$, $G(x) = G(x, \text{const})$ є розв'язком однорідного рівняння $Lu = 0$ при всіх $x \neq s = \text{const}$
3. При $x = a$ та $x = b$ функція $G(x, s)$ задовольняє крайові умови $B_1 G(a, s) = 0, \quad B_2 G(b, s) = 0$
4. При $x = s$ функція $G(x, s)$ є неперервною по x а її похідна по x має розрив першого роду зі стрибком $\frac{1}{a(s)}$:

$$\lim_{x \rightarrow s^-} G(x, s) = \lim_{x \rightarrow s^+} G(x, s)$$

$$\lim_{x \rightarrow s^+} G'_x(x, s) - \lim_{x \rightarrow s^-} G'_x(x, s) = \frac{1}{a(s)}$$

називають **функцією Гріна** задачі (1.5).

Нехай однорідна задача має лише нульовий розв'язок, тоді задача (1.5) для неперервної функції $f(x)$ має єдиний розв'язок, який можна подати у вигляді (розв'язок крайової задачі в інтегральній формі):

$$u(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds,$$

де $G(x, s)$ – функція Гріна задачі (1.5) і вона має вигляд:

$$G(x, s) = \begin{cases} u_1(x)\varphi(s), & a \leq x \leq s \leq b, \\ u_2(x)\psi(s), & a \leq s \leq x \leq b, \end{cases}$$

тут

$u_1(x)$ – ненульовий розв'язок однорідної задачі $Lu_1 = 0$, $B_1 u_1 = 0$,

$u_2(x)$ – ненульовий розв'язок однорідної задачі $Lu_2 = 0$, $B_2 u_2 = 0$.

Функції $\varphi(s)$ та $\psi(s)$ підбираються таким чином, щоб виконувалась умова 4 з означення функції Гріна:

$$\begin{aligned} u_1(s)\varphi(s) &= u_2(s)\psi(s), \\ u'_2(s)\psi(s) - u'_1(s)\varphi(s) &= \frac{1}{a(s)} \end{aligned}$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1

Знайти розв'язок крайової задачі:

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0$$

Розв'язання:

Розглянемо спочатку однорідне рівняння та запишемо його характеристичне рівняння:

$$k^2 + 1 = 0$$

Звідси $k = \pm i$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Частковий розв'язок шукаємо у вигляді: $y_1 = A$. Підставимо його у вихідне диференціальне рівняння та одержимо: $A = 1$.

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1$$

Задовольнимо крайові умови:

$$y(0) = c_1 + 1 = 0 \rightarrow c_1 = -1$$

$$y(\pi/2) = c_2 + 1 = 0 \rightarrow c_2 = -1$$

Отже,

$$y(x) = -\cos x - \sin x + 1$$

Приклад 2

Знайти розв'язок крайової задачі:

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y(+\infty) = 0$$

Розв'язання:

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k_1 = 2, \quad k_2 = -1$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

Задовольнимо крайові умови:

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$$

$$y'(0) = 2c_1 - c_2 = 2$$

$$y(+\infty) = c_1 \cdot (+\infty) = 0 \rightarrow c_1 = 0, \quad c_2 = -2$$

Отже, $y(x) = -2e^{-x}$.

Приклад 3

Знайти розв'язок крайової задачі:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = y_0$$

Розв'язання:

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 1 = 0 \rightarrow k = \pm i.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Задовольнимо крайові умови:

$$y(0) = c_1 = 0,$$

$$y(a) = c_1 \cos a + c_2 \sin a = c_2 \sin a = y_0.$$

Розглянемо випадки:

1. Якщо $a \neq n\pi \rightarrow c_2 = y_0 / \sin a$. Тоді задача має єдиний розв'язок:

$$y(x) = \frac{y_0}{\sin a} \sin x;$$

2. Якщо $a = n\pi$ і $y_0 = 0$, то $c_2 = \text{const}$. Тоді задача має безліч розв'язків:

$$y(x) = c_2 \sin x;$$

3. Якщо $a = n\pi$ і $y_0 \neq 0$, то задача розв'язків не має.

Приклад 4

Записати в інтегральній формі розв'язок крайової задачі:

$$y'' = f(x), \quad y(-1) = y(1) = 0, \quad x \in [-1, 1]$$

Розв'язання:

Дослідимо спочатку однорідну крайову задачу, щоб з'ясувати чи матиме єдиний розв'язок для довільної неперервної правої частини $f(x)$ неоднорідна крайова задача, яка дана в умові.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' = 0$:

$$y_0 = c_1 + c_2 x.$$

Задовольнимо крайові умови:

$$y_0(-1) = c_1 - c_2 = 0$$

$$y_0(1) = c_1 + c_2 = 0$$

Отже, $c_1 = c_2 = 0$ і $y_0(x) = 0$. Оскільки однорідна задача має лише тривіальний розв'язок, то дана в умові задача має єдиний розв'язок і для неї існує функція Гріна. Цей розв'язок можна записати в інтегральній формі використовуючи функцію Гріна. Знайдемо її. Для цього знайдемо довільний один ненульовий розв'язок $u_1(x)$ однорідного рівняння, що задовольняє першу крайову умову:

$$y(-1) = c_1 - c_2 = 0 \rightarrow c_1 = c_2, \quad y(x) = c_1 + c_1 x, \quad (c_1 = 1), u_1(x) = 1 + x.$$

Тепер знайдемо довільний один ненульовий розв'язок $u_2(x)$ однорідного рівняння, що задовольняє другу крайову умову:

$$y(1) = c_1 + c_2 = 0 \rightarrow c_1 = -c_2, \quad y(x) = c_1 - c_1 x, \quad (c_1 = 1), u_2(x) = 1 - x$$

Функцію Гріна шукаємо у вигляді:

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)(1+x), & -1 < x \leq s < 1 \\ \psi(s)(1-x), & -1 < s \leq x < 1 \end{cases}$$

Функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \psi(s)(1-s) = \varphi(s)(1+s) \\ -\psi(s) = \varphi(s) + 1 \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$\varphi(s) = \frac{s-1}{2}, \quad \psi(s) = -\frac{s+1}{2}.$$

Отже, функція Гріна має наступний вигляд:

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1-s)(1+x), & -1 < x \leq s < 1 \\ -\frac{1}{2}(1+s)(1-x), & -1 < s \leq x < 1 \end{cases}$$

Запишемо розв'язок в інтегральній формі:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-1}^1 G(x, s) f(s) ds = \\ &= -\frac{1}{2}(1+x) \int_x^1 (1-s) f(s) ds - \frac{1}{2}(1-x) \int_{-1}^x (1+s) f(s) ds. \end{aligned}$$

Задачі для самостійного розв'язання

Розв'язати крайові задачі:

1.1. $y'' - y = 2x; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -1.$

1.2. $y'' + y' = 1; \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

- 1.3. $y'' - y' = 0$; $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$.
- 1.4. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
- 1.5. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- 1.6. $y'' + y = 2x - \pi$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
- 1.7. $y'' - y = 1$; $y(0) = 0$, $y(x)$ обмежена при $x \rightarrow +\infty$.

Побудувати функцію Гріна для крайових задач:

- 1.8. $y'' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.
- 1.9. $y'' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.
- 1.10. $y'' = f(x)$; $y(0) + y(1) = 0$, $y'(0) + y'(1) = 0$.
- 1.11. $y'' + y = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
- 1.12. $y'' + y' = f(x)$; $y'(1) = 0$, $y(0) = 0$.
- 1.13. $y'' - y = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$.
- 1.14. $y'' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(x)$ обмежена при $x \rightarrow +\infty$.
- 1.15. $y'' + y' = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y(+\infty) = 0$.

Записати в інтегральній формі розв'язки задач:

- 1.16. $y'' = f(x)$; $y(a) = 0$, $y(b) = 0$.
- 1.17. $xy'' + y' = 2x$; $y(1) = y'(1)$, $y(x) = O(1)$, $x \rightarrow 0$.

Відповіді:

- 1.1. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - 2x$. 1.2. $y = x + e^{-x} - e^{-1}$.
- 1.3. $y = e^x - 2$. 1.4. Розв'язків немає.
- 1.5. $y = 1 - \sin x - \cos x$.
- 1.6. $y = 2x - \pi + \pi \cos x + C \sin x$, де C – будь-яке.
- 1.7. $y = e^{-x} - 1$.
- 1.8. $G(x, s) = \begin{cases} -(1-s)x, & 0 \leq x \leq s, \\ -s(1-x), & s \leq x \leq 1. \end{cases}$

$$1.9. \quad G(x, s) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq s, \\ -s, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$1.10. \quad G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-s) - \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq s, \\ -\frac{1}{2}(s-x) - \frac{1}{4}, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$1.11. \quad G(x, s) = \begin{cases} \sin s \cos x, & 0 \leq x \leq s, \\ \cos s \sin x, & s \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$1.12. \quad G(x, s) = \begin{cases} e^s(e^{-x} - 1), & 0 \leq x \leq s, \\ 1 - e^s, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$1.13. \quad G(x, s) = \begin{cases} -e^{-s} \operatorname{ch} x, & 0 \leq x \leq s, \\ -e^{-x} \operatorname{ch} x, & s \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$1.14. \quad G(x, s) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq s, \\ -s, & s \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$1.15. \quad G(x, s) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x \leq s, \\ -e^{s-x}, & s \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$1.16. \quad y = \frac{1}{a-b} \left((b-x) \int_a^x (s-a) f(s) ds + (x-a) \int_x^b (b-s) f(s) ds \right).$$

$$1.17. \quad G(x, s) = \begin{cases} 1 + \ln s, & 0 \leq x \leq s, \\ 1 + \ln x, & s \leq x < 1; \end{cases} \quad y = \frac{1}{2}(x^2 + 1).$$

2. ЗАДАЧА НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ

Якщо коефіцієнти диференціального рівняння або крайових умов залежать від деякого параметра λ , то при певних умовах існують такі значення цього параметра, для яких задача має ненульовий розв'язок. Ці значення λ називають **власними числами**, а відповідні їм розв'язки називають **власними функціями** крайової задачі.

Важливий окремий випадок задачі на власні числа, це **задача Штурма-Ліувілля**:

$$\begin{cases} ((p(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

де $x \in [a, b]$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\rho(x)$ – вагова функція, $p(x) \in C_{[a,b]}^1$, $q(x), \rho(x) \in C_{[a,b]}$, $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Розглянемо властивості власних чисел та власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.

1. Для задачі Штурма-Ліувілля існують власні числа і вони утворюють злічену множину: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$
2. Власні числа задачі (2.1) є простими, тобто кожному власному числу λ_k відповідає одна власна функція $y_k(x)$ з точністю до сталого множника.
3. Якщо $q(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a, b]$ і крайові умови першого роду (тобто $y(a) = 0$, $y(b) = 0$), то всі власні числа задачі (2.1) додатні.

Назвемо **скалярним добутком** із вагою $\rho(x)$ функцій y_1 і $y_2 \in C_{[a,b]}$ число:

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x)y_2(x)\rho(x) dx.$$

Функції y_1 і y_2 називаються **ортогональними** з вагою $\rho(x)$, якщо

$$\langle y_1, y_2 \rangle = 0.$$

4. Власні функції y_m і y_n задачі (2.1), які відповідають різним власним числам λ_m і λ_n , ортогональні з вагою $\rho(x)$.
5. Власні числа задачі (2.1) дійсні.

Відмітимо, якщо диференціальне рівняння задачі має інший вигляд ніж в (2.1), наприклад, коефіцієнт $\rho(x)$ – від’ємний, або крайові умови іншого типу ніж в (2.1), то наведені вище властивості 1-5 власних чисел та власних функцій взагалі кажучи не мають місця.

Відомо, що набір власних векторів лінійного оператора $A: R^n \rightarrow R^n$ з n різними власними числами утворює базис в R^n . Природно виникає питання про зображення функцій на відрізку $[a, b]$ у вигляді нескінченних лінійних комбінацій власних функцій задачі Штурма-Ліувілля. Відповідь на це питання дає теорема Стеклова (1896р).

Теорема Стеклова. Якщо функція $f(x)$ двічі неперервно диференційована на відрізку $[a, b]$ і задовольняє крайові умови задачі (2.1), тоді вона розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний на відрізку $[a, b]$ ряд за власними функціями $\{\varphi_i(x)\}$ задачі Штурма-Ліувілля:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x). \quad (2.2)$$

Відмітимо, завдяки ортогональності власних функцій легко обчислити коефіцієнти ряду (2.2). Дійсно, розглянемо скалярний добуток $\langle f(x), \varphi_k(x) \rangle$:

$$\langle f, \varphi_k \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle,$$

Врахуємо, що $\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = 0$, якщо $i \neq k$ (властивість 4) і $\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \|\varphi_k\|^2 > 0$, якщо $i = k$. В результаті маємо $\langle f, \varphi_k \rangle = c_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle$, або

$$c_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_k(x) \rho(x) dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x) \rho(x) dx}$$

Приклади розв’язання задач

Приклад 1

Знайти власні числа та власні функції задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0, \quad l > 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Розв'язки диференціального рівняння будуть залежати від знаку параметра λ .

Тому розглянемо три наступні випадки:

$$1. \quad \lambda = 0: y'' = 0 \rightarrow y(x) = c_1 x + c_2$$

$$y' = c_1, \quad y'(0) = y'(l) = c_1 = 0 \rightarrow y(x) = c_2 = \text{const}.$$

Власна функція визначається з точністю до сталого множника, тому в цьому випадку власною функцією буде довільна, відмінна від нуля константа. Наприклад, візьмемо власну функцію $y(x) = 1$.

$$2. \quad \lambda > 0: y(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{\lambda} x,$$

$$y'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x - c_2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$y'(0) = c_1 \sqrt{\lambda} = 0 \rightarrow c_1 = 0, \quad y'(l) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l - c_2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

$$c_2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \rightarrow \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \rightarrow \sqrt{\lambda} l = \pi n, n \in N$$

Отже, власні числа: $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, власні функції:

$y_n(x) = \cos \frac{\pi n}{l} x$, $n \in N$ (для зручності сталий множник c_2 вибрали рівним одиниці).

$$3. \quad \lambda < 0: y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x},$$

$$y'(x) = c_1 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda} x} - c_2 \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda} x}$$

$$y'(0) = c_1 \sqrt{-\lambda} - c_2 \sqrt{-\lambda} = 0 \rightarrow c_1 = c_2$$

$$y'(l) = c_1 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda} l} - c_2 \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda} l} = 0, \quad \sqrt{-\lambda} c_1 (e^{\sqrt{-\lambda} l} - e^{-\sqrt{-\lambda} l}) = 0$$

$$\rightarrow c_1 = 0$$

Отже, $y(x) \equiv 0$ і від'ємних власних чисел та відповідних їм власних функцій нема.

Поєднуючи випадки 1 і 2 отримаємо власні числа: $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, власні функції:

$$y_n(x) = \cos \frac{\pi n}{l} x, \quad \text{де } n \in N \cup \{0\}.$$

Приклад 2

Знайти власні числа та власні функції крайової задачі:

$$\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y(0) = y(l) = 0, \quad l > 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Розв'язки диференціального рівняння будуть залежати від знаку параметра λ .

Тому розглянемо три наступні випадки:

1. $\lambda = 0$: $y(x) = c_1 x + c_2$, $y(0) = c_2 = y(l) = c_1 l = 0 \rightarrow c_1 = c_2 = 0$

Отже, $y(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ не є власним числом.

2. $\lambda > 0$: $y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$

Задовольнимо крайові умови:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 = -c_2$$

$$y(l) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0, \quad c_1 (e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0 \rightarrow c_1 = 0,$$

$$c_2 = 0$$

Отже, $y(x) \equiv 0$ і тому додатних власних чисел немає.

3. $\lambda < 0$: $y(x) = c_1 \sin \sqrt{-\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{-\lambda}x$

Задовольнимо крайові умови:

$$y(0) = c_2 = 0,$$

$$y(l) = c_1 \sin \sqrt{-\lambda}l = 0 \rightarrow \sin \sqrt{-\lambda}l = 0 \rightarrow \sqrt{-\lambda}l = n\pi, \quad n \in N,$$

Отже, власні числа і відповідні їм власні функції мають вигляд:

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad y_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad \text{де } n \in N$$

Приклад 3

Знайти власні числа та власні функції задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Провівши міркування як і в попередніх задачах переконуємось, що серед чисел $\lambda \leq 0$ немає власних значень. Тепер розглядаємо випадок $\lambda > 0$. В цьому випадку загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{\lambda} x.$$

Задовольнимо крайові умови:

$$y'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x - c_2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$y'(0) - y(0) = c_1 \sqrt{\lambda} - c_2 = 0, \quad y(1) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} + c_2 \cos \sqrt{\lambda} = 0$$

Отже, маємо систему рівнянь для визначення c_1 та c_2 :

$$\begin{cases} c_1 \sqrt{\lambda} - c_2 = 0 \\ c_1 \sin \sqrt{\lambda} + c_2 \cos \sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$

Нас цікавлять тільки нетривіальні розв'язки цієї системи. Отже, детермінант матриці системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\lambda} & -1 \\ \sin \sqrt{\lambda} & \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + \sin \sqrt{\lambda} = 0, \quad \lambda > 0$$

Таким чином, додатні розв'язки трансцендентного рівняння $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$ є власними числами. Оскільки $c_2 = c_1 \sqrt{\lambda} = -c_1 \operatorname{tg} \sqrt{\lambda}$, то, поклавши $c_1 = 1$, отримаємо власні функції:

$$y_\lambda(x) = \sin \sqrt{\lambda} x - \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x.$$

Приклад 4

Знайти власні числа та власні функції крайової задачі:

$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(l) = 0, \quad l > 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Провівши міркування як і в попередніх задачах переконуємось, що серед чисел $\lambda \geq 0$ немає власних значень. Тепер розглядаємо випадок $\lambda < 0$. В цьому випадку загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$\lambda < 0 : y(x) = c_1 \sin \sqrt{-\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{-\lambda} x$$

Задовольнимо крайові умови:

$$y'(x) = \sqrt{-\lambda} c_1 \cos \sqrt{-\lambda} x - \sqrt{-\lambda} c_2 \sin \sqrt{-\lambda} x$$

$$y'(0) = \sqrt{-\lambda} c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$y(l) = c_2 \cos \sqrt{-\lambda} l = 0 \rightarrow \sqrt{-\lambda} l = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in N \cup \{0\}$$

Отже, власні числа і відповідні їм власні функції мають вигляд:

$$\lambda_n = - \left(\frac{1}{2} + n \right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad n \in N \cup \{0\}$$

$$y_n(x) = \cos \left(\frac{1}{2} + n \right) \frac{\pi x}{l}$$

Приклад 5

Знайти власні числа та власні функції крайової задачі:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$$

Розв'язання:

На відміну від попередніх задач, ця задача має крайові умови, що не належать до типу (1.2), (1.3). В цій задачі задано так звані періодичні крайові умови. Розглянувши випадок $\lambda < 0$ отримаємо, що від'ємних власних чисел дана задача не має. Перейдемо до випадків $\lambda = 0$ і $\lambda > 0$.

$$1. \lambda = 0: y(x) = c_1 x + c_2, \quad y(0) = c_2 = y(2\pi) = 2\pi c_1 + c_2 \rightarrow c_1 = 0$$

$$y'(x) = c_1, \quad y'(0) = c_1 = y'(2\pi) \rightarrow c_2 = \text{const}$$

Таким чином, при $\lambda = 0$ власні функції є константи: $y(x) = c_2 = \text{const}$.

Виберемо для зручності $c_2 = 1$. Тоді $y_0(x) = 1$.

$$2. \lambda > 0: y(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{\lambda} x$$

Задовольнимо крайові умови:

$$y(0) - y(2\pi) = c_2 - c_2 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi - c_1 \sin \sqrt{\lambda} 2\pi = 0$$

$$y'(0) - y'(2\pi) = \sqrt{\lambda}(c_1 - c_1 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi + c_2 \sin \sqrt{\lambda} 2\pi) = 0$$

Нетривіальний розв'язок (c_1, c_2) отриманої системи існує, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} -\sin \sqrt{\lambda} 2\pi & 1 - \cos \sqrt{\lambda} 2\pi \\ 1 - \cos \sqrt{\lambda} 2\pi & \sin \sqrt{\lambda} 2\pi \end{vmatrix} = -\sin^2(\sqrt{\lambda} 2\pi) - (1 - \cos \sqrt{\lambda} 2\pi)^2 = \\ = -\sin^2(\sqrt{\lambda} 2\pi) - 1 + 2\cos \sqrt{\lambda} 2\pi - \cos^2(\sqrt{\lambda} 2\pi) = 2\cos \sqrt{\lambda} 2\pi - 2 = 0$$

Отже, $\sqrt{\lambda} = n$, $n \in \mathbb{N}$, або $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Кожному власному числу $\lambda_n = n^2$ відповідають два лінійно незалежних розв'язки:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а отже, і дві власні функції:

$$y_{1n}(x) = \sin nx, \quad y_{2n}(x) = \cos nx.$$

На відміну від попередніх задач, в цій задачі власні числа $\lambda_n = n^2$ не є простими. Кожному такому власному числу відповідає більше однієї власної функції.

Приклад 6

Отримати рівність для визначення власних чисел та знайти власні функції крайової задачі:

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = 0 \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad (1 + 2\lambda^2)y(1) - 2y'(1) = 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

$$1. \lambda = 0: y(x) = c_1 x + c_2, \quad y'(x) = c_1, \quad y(0) + y'(0) = c_2 + c_1 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2, \quad y'(1) = c_1, \quad (1 + 2\lambda^2)(c_1 + c_2) - 2c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0.$$

Отже, $\lambda = 0$ не є власним числом.

$$2. \lambda \neq 0: k^2 + \lambda^2 = 0, \quad k^2 = -\lambda^2, \quad k = \pm \sqrt{\lambda^2} i = \pm |\lambda| i$$

Маємо загальний розв'язок рівняння: $y(x) = c_1 \cos |\lambda| x + c_2 \sin |\lambda| x$.

Задовольнимо крайові умови:

$$y(0) = c_1, \quad y'(x) = -|\lambda|c_1 \sin|\lambda|x + |\lambda|c_2 \cos|\lambda|x, \quad y'(0) = |\lambda|c_2,$$

Отже, $c_1 + |\lambda|c_2 = 0$.

$$y(1) = c_1 \cos|\lambda| + c_2 \sin|\lambda|, \quad y'(1) = -|\lambda|c_1 \sin|\lambda| + |\lambda|c_2 \cos|\lambda|,$$

$$(1 + 2\lambda^2)(c_1 \cos|\lambda| + c_2 \sin|\lambda|) - 2(-|\lambda|c_1 \sin|\lambda| + |\lambda|c_2 \cos|\lambda|) = 0.$$

Розкривши дужки та звівши подібні в останній рівності а також врахувавши, що $c_1 = -|\lambda|c_2$, одержимо:

$$c_2(\sin|\lambda| - 3|\lambda|\cos|\lambda| - 2\lambda^2|\lambda|\cos|\lambda|) = 0.$$

Оскільки c_2 не може дорівнювати нулю (бо тоді $c_1 = 0$ і $y(x) = 0$), то одержимо рівність для визначення власних чисел власних чисел:

$$\sin|\lambda| - 3|\lambda|\cos|\lambda| - 2\lambda^2|\lambda|\cos|\lambda| = 0.$$

Власні функції, що відповідають власним числам мають вигляд:

$$y_\lambda(x) = -|\lambda|\cos|\lambda|x + \sin|\lambda|x.$$

Приклад 7

Довести, що всі власні числа наступної задачі Штурма-Ліувілля є додатними.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y + \lambda \rho(x)y = 0 \\ y'(a) - y(a) = 0 \\ y'(b) + 3y(b) = 0 \end{cases}$$

$$x \in [a, b], \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \rho(x) > 0.$$

Розв'язання: Нехай λ – власне число задачі, а $y = y(x)$ – власна функція. В диференціальному рівнянні перенесемо доданок $\lambda \rho(x)y$ у праву частину. Далі помножимо обидві частини рівності на $y(x)$ і проінтегруємо по відрізку $[a, b]$. При цьому перетворимо отриману ліву частину використавши формулу інтегрування частинами.

$$\begin{aligned} \int_a^b [(p(x)y')' - q(x)y]y dx &= \int_a^b (p(x)y')'y dx - \int_a^b q(x)y^2(x) dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} y(x) = u \quad (p(x)y')' dx = dv \\ y' dx = du \quad p(x)y' = v \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$= p(x)y'y|_a^b - \int_a^b p(x)(y')^2 dx - \int_a^b q(x)y^2 dx = -\lambda \int_a^b \rho(x)y^2(x) dx.$$

Згідно з крайовими умовами остання рівність набуде вигляду:

$$3p(b)y^2(b) + p(a)y^2(a) + \int_a^b p(x)(y')^2 dx + \int_a^b q(x)y^2 dx = \lambda \int_a^b \rho(x)y^2(x) dx.$$

Бачимо, що інтеграл в правій частині рівності строго більше нуля, а всі доданки в лівій частині рівності невід'ємні. Крім того, якщо $y(x) \neq \text{const}$, то ліва частина рівності строго додатна. Це означає, що $\lambda > 0$. Якщо $y(x) = \text{const}$, то з крайових умов випливає, що $y(x) = 0$, а це неможливо, оскільки $y(x)$ – власна функція. Отже, $\lambda > 0$.

Задачі для самостійного розв'язання

Знайти власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля:

- 2.1. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$
- 2.2. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) + hy(l) = 0 \quad (h > 0).$
- 2.3. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) + hy(l) = 0 \quad (h > 0).$
- 2.4. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(l) = 0 \quad (h > 0).$
- 2.5. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y'(l) + h_2 y(l) = 0 \quad (h_1, h_2 > 0).$

Довести, що всі власні значення λ задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y + \lambda \rho(x)y = 0,$$

$$x \in [a, b], \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \rho(x) > 0$$

додатні при наступних крайових умовах:

- 2.6. $y(a) = 0, \quad y'(b) = 0.$
- 2.7. $y'(a) = 0, \quad y(b) = 0.$
- 2.8. $y(a) - y'(a) = 0, \quad y(b) + 2y'(b) = 0.$
- 2.9. $y(a) - 2y'(a) = 0, \quad y(b) + y'(b) = 0.$

Відповіді:

2.1. $\lambda_n = \left(\frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $y_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$.

2.2. λ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ – додатні розв'язки рівняння $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$;
 $y_n(x) = \sin(x\sqrt{\lambda_n})$.

2.3. λ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ – додатні розв'язки рівняння $\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}$;
 $y_n(x) = \cos(x\sqrt{\lambda_n})$.

2.4. λ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ – додатні розв'язки рівняння $\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}$;
 $y_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}(l - x))$.

2.5. λ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ – розв'язки рівняння $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda} \frac{h_1 + h_2}{\lambda - h_1 h_2}$;
 $y_n(x) = h_1 \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x$.

3. ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нехай в деякій області $G \subset R^{n+1}$ визначені функції $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$. Розглянемо наступну систему, яка складається з n диференціальних рівнянь першого порядку вигляду:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (3.1)$$

Означення 3.1. Система (3.1), де x – незалежна змінна, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – невідомі функції, називається нормальною n -вимірною системою диференціальних рівнянь першого порядку.

Систему диференціальних рівнянь в яку входять похідні вищих порядків можна завжди заміною змінних звести до системи (3.1). Тому надалі будемо розглядати тільки системи виду (3.1).

Поряд з системою (3.1) розглядаємо диференціальне рівняння n -го порядку:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.2)$$

Вони тісно пов'язані між собою. Рівняння (3.2) введенням додаткових невідомих функцій завжди можна звести до системи (3.1), а систему (3.1) при певних припущеннях на функції $f_1, \dots, f_n$ – до рівняння (3.2).

Означення 3.2. Сукупність диференційованих на (a, b) функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$, які перетворюють кожне рівняння системи (3.1) на тотожність на цьому інтервалі називається **розв'язком** цієї системи на (a, b) .

Розглянемо параметрично задану криву в просторі R^{n+1} ($x \in (a, b)$):

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y_1(x) \\ \dots \\ x_n = y_{n-1}(x) \\ x_{n+1} = y_n(x) \end{cases}$$

Нехай $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ – розв'язок системи (3.1). Тоді крива:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \varphi_1(x) \\ \dots \\ x_n = \varphi_{n-1}(x) \\ x_{n+1} = \varphi_n(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

є **графіком** розв'язку системи (3.1) або **інтегральною кривою**.

Перепишемо систему (3.1) у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{f_1} = dx \\ \dots \\ \frac{dy_n}{f_n} = dx \end{cases}$$

або

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1} = \dots = \frac{dy_n}{f_n}.$$

Підставивши в систему її розв'язок отримаємо наступні рівності:

$$\frac{dx}{1} = \frac{d\varphi_1}{f_1} = \dots = \frac{d\varphi_n}{f_n} \quad (3.4)$$

Розглянемо вектор $\vec{a} = (dx, d\varphi_1, \dots, d\varphi_n)$, який є дотичним до інтегральної кривої (3.3) в точці $(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in G \subset R^{n+1}$. З рівності (3.4) випливає, що він колінеарний з вектором $(1, f_1, \dots, f_n)$. Тому, якщо кожній точці з області $G \subset R^{n+1}$ поставити у відповідність вектор $(1, f_1, \dots, f_n)$, то отримаємо векторне поле напрямів. Таким чином, розв'язати систему (3.1) означає знайти такі гладкі криві в просторі R^{n+1} дотичні до яких у кожній точці мають напрямки векторного поля, породженого системою (3.1).

Задача Коші для системи (3.1) полягає у знаходженні її розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y_1(x_0) = y_{10} \\ \dots \\ y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases} \quad (3.5)$$

де $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in G \subset R^{n+1}$. Отже, задача Коші - це система (3.1) разом з початковими умовами (3.5).

Теорема Пікара (існування і єдиність розв'язку задачі Коші для нормальної системи (3.1)).

Нехай функції $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$, визначені в деякій області $G \subset R^{n+1}$, задовольняють такі дві умови:

- 1) неперервні в цій області
- 2) задовольняють умову Ліпшиця по змінним $y_1, y_2, \dots, y_n$, тобто існує константа $L > 0$, що для довільних двох точок $(x, t_1, \dots, t_n)$ та $(x, r_1, \dots, r_n)$ з області G правильні нерівності:

$$|f_k(x, t_1, \dots, t_n) - f_k(x, r_1, \dots, r_n)| \leq L \sum_{i=1}^n |t_i - r_i|, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Тоді система (3.1) для довільної точки $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in G$ має єдиний розв'язок $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$, що задовольняє початкові умови (3.5) і визначений в деякому околі точки x_0 .

Система вигляду:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \quad (3.6)$$

де $a_{ij}(x)$ – коефіцієнти, $b_i(x)$ – вільні члени, $y_1, y_2, \dots, y_n$ – невідомі функції, називається **нормальною лінійною системою диференціальних рівнянь**.

Якщо всі $b_i(x) \equiv 0$, то (3.6) називається лінійною **однорідною** системою диференціальних рівнянь (скорочено ЛОДР). Якщо $\exists k: b_k(x) \neq 0$, то (3.6) називається лінійною **неоднорідною** системою диференціальних рівнянь (скорочено ЛНДР).

Якщо всі коефіцієнти та вільні члени є неперервними на (a, b) функціями, то система (3.6) задовольняє умови теореми Пікара в смузі $[\alpha, \beta] \times R \times R \times \dots \times R = [\alpha, \beta] \times R^n$, для довільного відрізка $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Сталу Ліпшиця можна взяти в цьому випадку рівною максимуму з найбільших значень модулів коефіцієнтів системи на відрізку $[\alpha, \beta]$:

$$L = \max_{i,j=1,\dots,n} \max_{x \in [\alpha, \beta]} |a_{ij}(x)|.$$

Таким чином, система (3.6) має єдиний розв'язок для довільних початкових умов $x_0 \in (a, b)$, $y_1(x_0) = y_{10} \in R, \dots, y_n(x_0) = y_{n0} \in R$. Причому цей розв'язок буде єдиний на всьому інтервалі (a, b) .

Означення 3.3. Сукупність n лінійно незалежних на (a, b) розв'язків $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ системи (3.6) називають її фундаментальною системою розв'язків (скорочено ФСР).

З теорії систем лінійних рівнянь відомо, що будь-яка система виду (3.6) з неперервними на (a, b) коефіцієнтами має фундаментальну систему розв'язків. При цьому загальний розв'язок системи (3.6) має вигляд:

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x) + \dots + c_n Y_n(x), \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in R,$$
де $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків.

Перейдемо до розгляду лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь зі **сталими** коефіцієнтами. Це система вигляду:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (3.7)$$

або у матричній формі:

$$Y' = AY, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Будемо шукати розв'язки системи, що утворюють її фундаментальну систему розв'язків у вигляді:

$$Y = e^{\lambda x} H,$$

тут позначено

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda x} H = \begin{pmatrix} h_1 e^{\lambda x} \\ \dots \\ h_n e^{\lambda x} \end{pmatrix},$$

де λ – невідомий параметр, $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}$ – невідомий числовий вектор.

Підставимо $Y = e^{\lambda x} H$ у систему (3.7). Для цього спочатку обчислимо Y' :

$$Y' = \begin{pmatrix} \lambda h_1 e^{\lambda x} \\ \dots \\ \lambda h_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda x} H,$$

Тепер маємо:

$$\lambda e^{\lambda x} H = A(e^{\lambda x} H) \Leftrightarrow \lambda H = AH \Leftrightarrow (A - \lambda I)H = 0.$$

Таким чином, пошук розв'язків системи (3.7) звівся до пошуку ненульових розв'язків системи рівнянь $(A - \lambda I)H = 0$ відносно невідомого вектора H . Остання має нетривіальні розв'язки, якщо $\det(A - \lambda I) = 0$. Тоді λ буде власним числом матриці A , а H – власним вектором. Отже, задача пошуку фундаментальної системи розв'язків системи (3.7) звелась до знаходження власних чисел та власних векторів матриці A .

1. Розглянемо випадок, коли $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – різні. Тоді маємо n лінійно незалежних власних векторів: $H_1, H_2, \dots, H_n$ і фундаментальна система розв'язків має вигляд:

$$\{H_1 e^{\lambda_1 x}, H_2 e^{\lambda_2 x}, \dots, H_n e^{\lambda_n x}\}$$

Тоді загальний розв'язок системи (3.7) матиме вигляд:

$$Y(x) = c_1 H_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 H_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n H_n e^{\lambda_n x}, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in R$$

Зауваження

Якщо $\lambda_k = a + bi$ ($\overline{\lambda_k} = a - bi$) – комплексне і $H_k(\overline{H_k})$ – власний вектор, що відповідає числу λ_k ($\overline{\lambda_k}$), то у фундаментальну систему розв'язків увійдуть функції:

$$Y_k(x) = e^{(a+bi)x} H_k, \quad \overline{Y_k}(x) = e^{(a-bi)x} \overline{H_k}$$

Для того, щоб розв'язки системи були дійсними функціями замінюємо $Y_k(x)$ та $\overline{Y_k}(x)$ на їх лінійні комбінації, які є дійсними функціями:

$$\Phi_k = \frac{Y_k(x) + \overline{Y_k}(x)}{2} = \operatorname{Re} Y_k(x), \quad \Phi_{k+1} = \frac{Y_k(x) - \overline{Y_k}(x)}{2i} = \operatorname{Im} Y_k(x).$$

2. Нехай серед власних значень матриці A є кратні, але кожному кратному власному числу відповідає стільки власних векторів, яка кратність цього

числа. Тоді, якщо λ_k має кратність s_k , то система $(A - \lambda_k I)H = 0$ матиме s_k лінійно незалежних розв'язків.

Запишемо всі власні числа матриці A з урахуванням їх кратності (якщо λ_k має кратність s_k , то λ_k буде записано s_k разів). Поряд з ними запишемо відповідні їм власні вектори. Відповідно, згідно з припущенням, якщо λ_k має кратність s_k , то йому відповідатиме s_k лінійно незалежних власних векторів $H_k, \dots, H_{k+s_k-1}$. Тоді в фундаментальній системі розв'язків власному числу λ_k буде відповідати s_k лінійно незалежних розв'язків: $Y_k(x) = H_k e^{\lambda_k x}, \dots, Y_{k+s_k-1}(x) = H_{k+s_k-1} e^{\lambda_k x}$. В цьому випадку фундаментальна система розв'язків має такий самий вигляд, як і у випадку всіх різних власних чисел:

$$\{H_1 e^{\lambda_1 x}, H_2 e^{\lambda_2 x}, \dots, H_n e^{\lambda_n x}\}$$

Тоді загальний розв'язок (3.7) матиме вигляд:

$$Y(x) = c_1 H_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 H_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n H_n e^{\lambda_n x}, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in R$$

3. Нехай серед власних значень матриці A є кратні, причому деякі з них такі, що їм відповідає менше власних векторів ніж їх кратність, тобто: $s > n - r$, де s - алгебраїчна кратність власного значення, $n - r$ - геометрична кратність (кількість власних векторів). Тоді проведемо такі міркування.

Відомо, що для довільної матриці A існує базис, в якому матриця має Жорданову форму. Кожній клітинці порядку $p \geq 1$ жорданової форми відповідає серія векторів базису $H_1, H_2, \dots, H_p$, що задовольняють рівнянням:

$$AH_1 = \lambda H_1, \quad H_1 \neq 0$$

$$AH_2 = \lambda H_2 + H_1,$$

$$AH_3 = \lambda H_3 + H_2,$$

.....

$$AH_p = \lambda H_p + H_{p-1}.$$

Вектор H_1 називається власним, а $H_2, H_3, \dots, H_p$ - приєднаними. Кожній серії $H_1, H_2, \dots, H_p$ відповідає p лінійно незалежних розв'язків $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ системи (3.7):

$$Y_1 = e^{\lambda x} H_1,$$

$$Y_2 = e^{\lambda x} \left(\frac{x}{1!} H_1 + H_2 \right),$$

.....

$$Y_p = e^{\lambda x} \left(\frac{x^{p-1}}{(p-1)!} H_1 + \frac{x^{p-2}}{(p-2)!} H_2 + \dots + \frac{x}{1!} H_{p-1} + H_p \right).$$

Загальне число всіх таких розв'язків дорівнює сумі порядків всіх клітинок жорданової форми, тобто порядку матриці, а саме числу n . Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (3.7). Їх лінійна комбінація буде загальним розв'язком системи:

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x) + \dots + c_n Y_n(x), \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in R.$$

Приклади розв'язання задач

Вище, в теоретичній частині розглянуто загальний метод розв'язування лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами за допомогою відшукування власних чисел та власних векторів матриці системи. Коли система має малий порядок (другий, інколи третій), буває зручно використати метод підстановки. Його суть полягає у зведенні системи до рівняння вищого порядку. З цього методу почнемо розгляд прикладів.

Приклад 1

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

Розв'язання:

Виключимо з першого рівняння невідому функцію y . Для цього виконаємо наступні дії. Продиференціюємо перше рівняння системи по t :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

Врахуємо, що:

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 2\left(\frac{dx}{dt} - 2x\right) = 2\frac{dx}{dt} - 5x$$

Таким чином:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dx}{dt} - 5x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

Отримали диференціальне рівняння другого порядку відносно однієї невідомої функції $x(t)$. Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$$

Отже,

$$x(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t),$$

$$y(t) = \frac{dx}{dt} - 2x = 2e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + e^{2t}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t) - 2e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) = e^{2t}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t).$$

Приклад 2

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 4x \end{cases}$$

Розв'язання:

Продиференціюємо перше рівняння системи по t :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt}$$

Врахуємо, що:

$$\frac{dy}{dt} = 2y - 4x = \frac{2}{3}\left(x - \frac{dx}{dt}\right) - 4x = -\frac{2}{3}\frac{dx}{dt} - \frac{10}{3}x$$

Таким чином:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2\frac{dx}{dt} + 10x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} - 10x = 0$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 3k - 10 = 0, \quad k_1 = 5, \quad k_2 = -2$$

Отже,

$$x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t}.$$

З першого рівняння системи одержимо:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{3} \left(x - \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{3} (c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t} - 5c_1 e^{5t} + 2c_2 e^{-2t}) = \\ &= \frac{1}{3} (3c_2 e^{-2t} - 4c_1 e^{5t}). \end{aligned}$$

Приклад 3

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y \end{cases}$$

Розв'язання:

Продиференціюємо перше рівняння системи по t :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 5\frac{dy}{dt}$$

Врахуємо, що:

$$\frac{dy}{dt} = -x - 2y = -x - \frac{2}{5} \left(\frac{dx}{dt} - x \right)$$

Тоді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 5 \left(-x - \frac{2}{5} \left(\frac{dx}{dt} - x \right) \right) = -3x - \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + k + 3 = 0, \quad k = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

Отже,

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2} t + c_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t \right),$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\left(\frac{dx}{dt} - x \right)}{5} = \\ &= \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2} t + c_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{1}{2}t} \left(-c_1 \frac{\sqrt{11}}{2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t + c_2 \frac{\sqrt{11}}{2} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} t \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2} t + c_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t \right) \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(-\frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2} t + c_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{1}{2}t} \left(-c_1 \frac{\sqrt{11}}{2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t + c_2 \frac{\sqrt{11}}{2} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} t \right) \right). \end{aligned}$$

Приклад 4

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

Розв'язання:

Продиференціюємо перше рівняння системи по t :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$$

Врахуємо, що:

$$y = x - \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dx} = x + x - \frac{dx}{dt}$$

Тоді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - 2x + \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0.$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k + 2 = 0, \quad k_{1,2} = 1 \pm i$$

Отже,

$$x(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t),$$

$$y(t) = x - \frac{dx}{dt} =$$

$$= e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - e^t(-c_1 \sin t + c_2 \cos t) =$$

$$= e^t(c_1 \sin t - c_2 \cos t).$$

Приклад 5

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}$$

Розв'язання:

Цей приклад системи трьох диференціальних рівнянь також можна розв'язати методом підстановки. Продиференціюємо перше рівняння системи по t :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = x \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - x = 0 \rightarrow k^2 - 1 = 0$$

Таким чином:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad y(t) = \frac{dx}{dt} = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

Підставимо знайдені $x(t)$, $y(t)$ у третє рівняння системи:

$$\frac{dz}{dt} = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_1 e^t - c_2 e^{-t} + z = 2c_1 e^t + z$$

Отже, одержимо неоднорідне диференціальне рівняння для визначення $z(t)$:

$$\frac{dz}{dt} - z = 2c_1 e^t$$

Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння:

$$\frac{dz}{dt} = z, \quad \int \frac{dz}{dt} = \int dt, \quad \ln z = t + \ln c, \quad \ln \frac{z}{c} = t, \quad z_0 = c_3 e^t$$

Частковий розв'язок шукаємо у вигляді:

$$z_1 = a t e^t$$

Підставимо його у неоднорідне рівняння:

$$\frac{dz_1}{dt} = a t e^t + a e^t, \quad a t e^t + a e^t - a t e^t = 2 c_1 e^t \rightarrow a = 2 c_1$$

Отже,

$$z(t) = c_3 e^t + 2 c_1 t e^t.$$

Відповідь:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad y(t) = \frac{dx}{dt} = c_1 e^t - c_2 e^{-t}, \quad z(t) = c_3 e^t + 2 c_1 t e^t,$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 6

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = z - x \end{cases}$$

Розв'язання:

Продиференціюємо перше рівняння системи по t :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dz}{dt} - \frac{dy}{dt} = z - x - z \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0$$

Отже,

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

З третього рівняння системи одержимо:

$$\frac{dz}{dt} - z = -x = -c_1 \cos t - c_2 \sin t$$

Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння:

$$\frac{dz}{dt} = z \rightarrow \frac{dz}{z} = dt, \ln z = t + \ln c_3, z_0 = c_3 e^t$$

Частковий розв'язок шукаємо у вигляді:

$$z_1 = a \cos t + b \sin t$$

Підставимо його у неоднорідне рівняння:

$$-a \sin t + b \cos t - a \cos t - b \sin t = -c_1 \cos t - c_2 \sin t$$

Прирівнюючи коефіцієнти коли $\cos t$, $\sin t$, одержимо:

$$\begin{cases} -a - b = -c_2 \\ b - a = -c_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{c_1 + c_2}{2} \\ b = \frac{c_2 - c_1}{2} \end{cases}$$

Отже,

$$z(t) = c_3 e^t + \frac{c_1 + c_2}{2} \cos t + \frac{c_2 - c_1}{2} \sin t$$

З першого рівняння системи одержимо:

$$\begin{aligned} y(t) = z - \frac{dx}{dt} &= c_3 e^t + \frac{c_1 + c_2}{2} \cos t + \frac{c_2 - c_1}{2} \sin t + c_1 \sin t - c_2 \cos t = \\ &= c_3 e^t + \frac{c_1 - c_2}{2} \cos t + \frac{c_1 + c_2}{2} \sin t. \end{aligned}$$

Приклад 7

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = y - x + z \\ \frac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо рівняння для знаходження власних чисел матриці системи:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1.$$

Знайдемо власні вектори, що відповідають даним власним числам.

$$\lambda_1 = 0 : \quad \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Ранг матриці системи дорівнює 2, x, y – базисні змінні, z – вільна змінна.

Загальний розв'язок системи:

$$H = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad (z = 1) \rightarrow H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Частковий розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 \cdot e^{0t} = 1 \\ y(t) &= 0 \cdot e^{0t} = 0 \\ z(t) &= 1 \cdot e^{0t} = 1 \end{aligned}$$

Розглядаємо наступне власне значення:

$$\lambda_2 = 2 : \quad \begin{cases} -x - 2y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

Ранг матриці системи дорівнює 2, x, y – базисні змінні, z – вільна змінна.

Загальний розв'язок системи:

$$H = \begin{pmatrix} 3z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}, \quad (z = 1) \rightarrow H_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Частковий розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 \cdot e^{2t} \\ y(t) &= -2 \cdot e^{2t} \\ z(t) &= 1 \cdot e^{2t} \end{aligned}$$

Розглядаємо третє власне значення:

$$\lambda_3 = -1 : \quad \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ранг матриці системи дорівнює 2, x, y – базисні змінні, z – вільна змінна.

Загальний розв'язок системи:

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ -z/2 \\ z \end{pmatrix}, \quad (z = 1) \rightarrow H_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Частковий розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{aligned}x(t) &= 0 \cdot e^{-t} = 0 \\y(t) &= -\frac{1}{2} \cdot e^{-t} \\z(t) &= 1 \cdot e^{-t}\end{aligned}$$

Знайдені вище вектори H_1, H_2 та H_3 – це власні вектори матриці системи. Тоді відповідні часткові розв’язки вихідної системи утворюють її фундаментальну систему розв’язків (ФСР). Загальний розв’язок вихідної системи є лінійною комбінацією розв’язків, що утворюють ФСР:

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 + 3c_2e^{2t} \\y(t) &= -2c_2e^{2t} - \frac{1}{2}c_3e^{-t} \\z(t) &= c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{-t}\end{aligned}$$

Приклад 8

Розв’язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 6y - 2x - 2z \\ \frac{dz}{dt} = -2y + 5z \end{cases}$$

Розв’язання:

Запишемо рівняння для знаходження власних чисел матриці системи:

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9.$$

Знайдемо власні вектори, що відповідають даним власним числам.

$$\lambda_1 = 3 : \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ранг матриці системи дорівнює 2, x, y – базисні змінні, z – вільна змінна.

Загальний розв’язок системи:

$$H = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}z \\ z \\ z \end{pmatrix}, \quad (z = 1) \rightarrow H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Частковий розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2} \cdot e^{3t} \\y(t) &= 1 \cdot e^{3t} \\z(t) &= 1 \cdot e^{3t}\end{aligned}$$

Розглядаємо наступне власне значення:

$$\lambda_2 = 6 : \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -4y - 2z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases}$$

Ранг матриці системи дорівнює 2, x, y – базисні змінні, z – вільна змінна.

Загальний розв'язок системи:

$$H = \begin{pmatrix} -z \\ 1 \\ -\frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix}, \quad (z = 1) \rightarrow H_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Частковий розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{aligned}x(t) &= -1 \cdot e^{6t} \\y(t) &= -\frac{1}{2} \cdot e^{6t} \\z(t) &= 1 \cdot e^{6t}\end{aligned}$$

Розглядаємо третє власне значення:

$$\lambda_3 = 9 : \quad \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ранг матриці системи дорівнює 2, x, y – базисні змінні, z – вільна змінна.

Загальний розв'язок системи:

$$H = \begin{pmatrix} 2z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}, \quad (z = 1) \rightarrow H_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Частковий розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{aligned}x(t) &= 2 \cdot e^{9t} \\y(t) &= -2 \cdot e^{9t} \\z(t) &= 1 \cdot e^{9t}\end{aligned}$$

Знайдені вище вектори H_1, H_2 та H_3 – це власні вектори матриці системи. Тоді відповідні часткові розв'язки вихідної системи утворюють її фундаментальну

систему розв'язків (ФСР). Загальний розв'язок вихідної системи є лінійною комбінацією розв'язків, що утворюють ФСР:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2}c_1e^{3t} - c_2e^{6t} + 2c_3e^{9t} \\y(t) &= c_1e^{3t} - \frac{1}{2}c_2e^{6t} - 2c_3e^{9t} \\z(t) &= c_1e^{3t} + c_2e^{6t} + c_3e^{9t}\end{aligned}$$

Приклад 9

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = -2x - z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + y + 2z \end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо рівняння для знаходження власних чисел матриці системи:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Знайдемо власні вектори, що відповідають даним власним числам.

$$\lambda_1 = 2 : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Ранг матриці системи дорівнює 2, x_1, x_2 – базисні змінні, x_3 – вільна змінна.

Загальний розв'язок системи:

$$H = \begin{pmatrix} x_3/2 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (x_3 = 2) \rightarrow H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Частковий розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e^{2t} \\ -2 \cdot e^{2t} \\ 2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Розглядаємо наступне власне значення:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Це власне значення має кратність $k = 2$. Оскільки розмірність матриці $n = 3$, а її ранг $r = 2$, то кількість власних векторів, що відповідають цьому власному значенню, дорівнює $m = n - r = 3 - 2 = 1$. Отже, цьому власному значенню відповідають один власний вектор (позначимо його H_2) і один приєднаний (позначимо його H_{21}). Тому в ФСР цьому власному значенню буде відповідати наступна пара розв'язків:

$$Y_2 = e^t H_2 \quad \text{та} \quad Y_3 = e^t \left(\frac{t}{1!} H_2 + H_{21} \right).$$

Далі можна знайти H_2 та H_{21} і, отримавши ФСР $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$, записати загальний розв'язок системи $Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) + c_3 Y_3(t)$, $c_1, c_2, c_3 \in R$. Можна діяти дещо інакше. Оскільки в загальний розв'язок входить лінійна комбінація Y_2 та Y_3 , то можна зразу шукати цю лінійну комбінацію. Покажемо, як це зробити. Шукаємо її у вигляді вектора, кожна компонента якого являє собою добуток многочлена з невизначеними коефіцієнтами степеня $k - m = 2 - 1 = 1$ та показникової функції $e^{\lambda_2 t} = e^t$:

$$\begin{aligned} x(t) &= (a + bt)e^t \\ y(t) &= (c + dt)e^t \\ z(t) &= (f + gt)e^t \end{aligned}$$

Підставимо цей вектор у вихідну систему і розв'яжемо її відносно невідомих коефіцієнтів a, b, c, d, f, g . В результаті одержимо:

$$a = -c_3, \quad b = 0, \quad c = c_2, \quad d = c_3, \quad f = c_3 - c_2, \quad g = -c_3$$

Таким чином, частковий розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{aligned} x(t) &= -c_3 e^t \\ y(t) &= (c_2 + c_3 t) e^t \\ z(t) &= (c_3 - c_2 - c_3 t) e^t \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок вихідної системи є лінійною комбінацією отриманих розв'язків:

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^{2t} - c_3 e^t \\
y(t) &= -2c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3 t) e^t \\
z(t) &= 2c_1 e^{2t} + (c_3 - c_2 - c_3 t) e^t.
\end{aligned}$$

Задачі для самостійного розв'язання

Розв'язати системи рівнянь:

$$3.1. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$3.2. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$3.3. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases}$$

$$3.4. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

$$3.5. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

$$3.6. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x - y. \end{cases}$$

$$3.7. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

$$3.8. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$$3.9. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y - 2z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$$

$$3.10. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z. \end{cases}$$

$$3.11. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \frac{dz}{dt} = -x + 2y + 3z. \end{cases}$$

$$3.12. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + 2z, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2z, \\ \frac{dz}{dt} = -2x + y - z. \end{cases}$$

$$3.13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \\ \frac{dz}{dt} = 3x + z. \end{cases}$$

$$3.14. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y + 4z, \\ \frac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$$

$$3.15. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y - 2z, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y, \\ \frac{dz}{dt} = 2x + y - z. \end{cases}$$

$$3.16. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = -y + 2z. \end{cases}$$

$$3.17. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y - 3z, \\ \frac{dz}{dt} = 2x - 4y. \end{cases}$$

$$3.18. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y - 2z, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2z, \\ \frac{dz}{dt} = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$$

$$3.19. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y - 3z, \\ \frac{dz}{dt} = -x + y + 2z. \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$$3.21. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x + z. \end{cases}$$

$$3.22. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y - 2z, \\ \frac{dz}{dt} = -x + y + 2z. \end{cases}$$

Відповіді:

$$3.1. \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{2t}((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t). \end{cases}$$

- 3.4. $\begin{cases} x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \\ y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases}$
- 3.5. $\begin{cases} x = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}, \\ y = (C_1 + C_2 t)e^{3t}. \end{cases}$
- 3.6. $\begin{cases} x = (C_1 + 2C_2 t)e^{-t}, \\ y = (C_1 + C_2 + 2C_2 t)e^{-t}. \end{cases}$
- 3.7. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t}, \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1).$
- 3.8. $\begin{cases} x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3).$
- 3.9. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_3 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ z = 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t}. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1).$
- 3.10. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}, \\ y = C_1 e^t - 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}, \\ z = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{5t}. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5).$
- 3.11. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + e^{3t}(C_2 \cos t + C_3 \sin t), \\ y = e^{3t}((C_2 + C_3) \cos t + (C_3 - C_2) \sin t), \\ z = C_1 e^{2t} + e^{3t}((2C_2 - C_3) \cos t + (2C_3 + C_2) \sin t). \end{cases}$
 $(\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3 \pm i).$
- 3.12. $\begin{cases} x = C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3) \sin t, \\ y = 2C_1 e^t + C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3) \sin t, \\ z = C_1 e^t + C_3 \cos t - (C_2 + C_3) \sin t. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i)$
- 3.13. $\begin{cases} x = e^t(2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t), \\ y = e^t(C_1 - C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t), \\ z = e^t(-C_1 - 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t). \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$
- 3.14. $\begin{cases} x = C_1 + C_2 t + 4C_3 e^{3t}, \\ y = C_2 - 2C_1 - 2C_2 t + 4C_3 e^{3t}, \\ z = C_1 - C_2 + C_2 t + C_3 e^{3t}. \end{cases} \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3)$
- 3.15. $\begin{cases} x = (C_2 + C_3 t)e^{-t}, \\ y = 2C_1 e^t - (2C_2 + C_3 + 2C_3 t)e^{-t}, \\ z = C_1 e^t - (C_2 + C_3 + C_3 t)e^{-t}. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$

$$\begin{aligned}
3.16. \quad & \begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}, \\ y = (C_1 - 2C_2 + C_2 t)e^t, \\ z = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}. \end{cases} & (\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2) \\
3.17. \quad & \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-5t}, \\ y = C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{-5t}, \\ z = (C_1 - 2C_2)e^{2t} + 2C_3 e^{-5t}. \end{cases} & (\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -5) \\
3.18. \quad & \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \\ y = -C_1 e^{3t} + (C_2 + 2C_3)e^{-t}, \\ z = -3C_1 e^{3t} + C_3 e^{-t}. \end{cases} & (\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = -1) \\
3.19. \quad & \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^t, \\ y = 3C_1 + C_3 e^t, \\ z = -C_1 + (C_2 - C_3)e^t. \end{cases} & (\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1) \\
3.20. \quad & \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3)e^{3t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \\ z = C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t}. \end{cases} & (\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3) \\
3.21. \quad & \begin{cases} x = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^{2t}, \\ y = (2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3 t^2)e^{2t}, \\ z = (C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)t + C_3 t^2)e^{2t}. \end{cases} & (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2) \\
3.22. \quad & \begin{cases} x = (C_1 + C_3 t)e^t, \\ y = (C_2 + 2C_3 t)e^t, \\ z = (C_1 - C_2 - C_3 - C_3 t)e^t. \end{cases} & (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)
\end{aligned}$$

Загальним методом розв'язування лінійної неоднорідної системи є *метод варіації довільних сталих* або інша назва – *метод Лагранжа*. Опишемо цей метод.

Отже, розглянемо лінійну неоднорідну систему

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}. \quad (4.4)$$

Спочатку розв'язуємо лінійну однорідну систему $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$. Як зазначили вище, розв'язок відповідної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ має вигляд

$$\mathbf{Y}_{30}(x) = C_1 \mathbf{Y}_1(x) + C_2 \mathbf{Y}_2(x) + \dots + C_n \mathbf{Y}_n(x), \quad .$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – сталі.

Метод варіації довільних сталих полягає в тому, щоб замінити сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$ на невідомі функції $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ і шукати загальний розв'язок неоднорідної системи (4.4) у вигляді:

$$\mathbf{Y}_{3H}(x) = C_1(x) \mathbf{Y}_1(x) + C_2(x) \mathbf{Y}_2(x) + \dots + C_n(x) \mathbf{Y}_n(x), \quad (4.5)$$

де $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ – невідомі функції. Підставимо (4.5) у систему (4.4).

Для цього знайдемо похідну $\mathbf{Y}'(x)$:

$$\mathbf{Y}_{3H}'(x) = C_1'(x) \mathbf{Y}_1(x) + \dots + C_n'(x) \mathbf{Y}_n(x) + C_1(x) \mathbf{Y}_1'(x) + \dots + C_n(x) \mathbf{Y}_n'(x).$$

Після підстановки маємо:

$$\begin{aligned} C_1'(x) \mathbf{Y}_1(x) + \dots + C_n'(x) \mathbf{Y}_n(x) + C_1(x) \mathbf{Y}_1'(x) + \dots + C_n(x) \mathbf{Y}_n'(x) = \\ = \mathbf{A}(C_1(x) \mathbf{Y}_1(x) + \dots + C_n(x) \mathbf{Y}_n(x)) + \mathbf{B} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} C_1'(x) \mathbf{Y}_1(x) + \dots + C_n'(x) \mathbf{Y}_n(x) + C_1(x) \mathbf{Y}_1'(x) + \dots + C_n(x) \mathbf{Y}_n'(x) = \\ = C_1(x) \mathbf{A} \mathbf{Y}_1(x) + \dots + C_n(x) \mathbf{A} \mathbf{Y}_n(x) + \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Врахувавши, що $\mathbf{Y}_1(x), \dots, \mathbf{Y}_n(x)$ – розв'язки однорідної системи $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$, тобто $\mathbf{Y}_1'(x) = \mathbf{A} \mathbf{Y}_1(x), \dots, \mathbf{Y}_n'(x) = \mathbf{A} \mathbf{Y}_n(x)$, отримаємо систему для знаходження $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$:

$$C_1'(x) \mathbf{Y}_1(x) + \dots + C_n'(x) \mathbf{Y}_n(x) = \mathbf{B},$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \dots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \dots \\ b_n(x) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Система (4.6) має єдиний розв'язок, бо її визначник є визначником Вронського фундаментальної системи розв'язків однорідної системи $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$. Тому він відмінний від нуля. Отже, розв'язок (4.6):

$$\mathbf{C}'(x) = \mathbf{U}^{-1}(x)\mathbf{B}(x), \quad (4.7)$$

Тут $\mathbf{U}(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}$ – фундаментальна матриця однорідної

системи $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$. Вона складається зі стовпців-розв'язків однорідної системи:

$$\mathbf{Y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \dots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \mathbf{Y}_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ \dots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{Y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ \dots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Інтегруючи рівність (4.7), отримаємо вектор-функцію $\mathbf{C}(x)$:

$$\mathbf{C}(x) = \int \mathbf{U}^{-1}(x)\mathbf{B}(x)dx + \mathbf{C}^0, \quad (4.8)$$

де $\mathbf{C}^0 = \begin{pmatrix} C_1^0 \\ \dots \\ C_n^0 \end{pmatrix}$ – довільний сталий вектор (константи інтегрування).

Підставляючи знайдені функції $\mathbf{C}(x)$ у формулу (4.5), маємо загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь:

$$\mathbf{Y}_{\text{ЗН}}(x) = \mathbf{U}(x)\mathbf{C}(x) = \mathbf{U}(x)\mathbf{C}^0 + \mathbf{U}(x) \int \mathbf{U}^{-1}(x)\mathbf{B}(x)dx, \quad (4.9)$$

Зауваження. Для розв'язування систем другого порядку часто використовують метод зведення системи до одного диференціального рівняння другого порядку з подальшим його розв'язуванням. Це так званий метод підстановки. Його суть полягає в тому, щоб продиференціювати одне з рівнянь системи і, використовуючи друге рівняння, виключити ту невідому функцію з отриманого після диференціювання рівняння, похідна якої входить в друге рівняння системи.

Приклади розв'язання задач

Почнемо розгляд практичних прикладів як і випадку однорідних систем з методу підстановки.

Приклад 1

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

Розв'язання:

Продиференціюємо перше рівняння системи по t :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + 5\sin t = 2x + y + 5\sin t$$

Врахуємо, що:

$$y = \frac{dx}{dt} + 5\cos t$$

Тоді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + \frac{dx}{dt} + 5\cos t + 5\sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 5\cos t + 5\sin t.$$

Отримали лінійне неоднорідне рівняння другого порядку. Для знаходження його загального розв'язку спочатку розв'яжемо відповідне однорідне рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - k - 2 = 0, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = -1$$

Отже:

$$x_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$x_1 = A\cos t + B\sin t$$

$$\dot{x}_1 = -A\sin t + B\cos t$$

$$\ddot{x}_1 = -A \cos t - B \sin t$$

Підставимо ці рівності у неоднорідне рівняння та одержимо:

$$-A \cos t - B \sin t + A \sin t - B \cos t - 2A \cos t - 2B \sin t = 5 \cos t + 5 \sin t$$

Прирівнюючи коефіцієнти коло $\cos t$, $\sin t$, одержимо систему рівнянь для визначення A , B :

$$\begin{cases} -A - B - 2A = 5 \\ -B + A - 2B = 5 \end{cases} \rightarrow A = -1, \quad B = -2$$

Таким чином:

$$x_1 = -\cos t - 2 \sin t$$

Загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - \cos t - 2 \sin t \\ y(t) &= \frac{dx}{dt} + 5 \cos t = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} + \sin t - 2 \cos t + 5 \cos t = \\ &= 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} + \sin t + 3 \cos t \end{aligned}$$

Приклад 2

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2e^t \end{cases}$$

Розв'язання:

Розв'яжемо систему використовуючи метод Лагранжа. Спочатку розв'яжемо однорідну систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння системи по t :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 2 \frac{dx}{dt} - x$$

Тоді:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k + 1 = 0, \quad k_{1,2} = 1$$

Отже:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= (c_1 + c_2 t)e^t \\ y_0(t) &= 2x - \frac{dx}{dt} = 2(c_1 + c_2 t)e^t - c_2 e^t - (c_1 + c_2 t)e^t = \\ &= (c_1 - c_2 + c_2 t)e^t. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок вихідної системи шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= c_1(t)e^t + c_2(t)te^t \\ y_0(t) &= c_1(t)e^t + c_2(t)(t-1)e^t \end{aligned}$$

Функції $c_1(t)$, $c_2(t)$ знаходимо з системи:

$$\begin{cases} c'_1(t)e^t + c'_2(t)te^t = 0 \\ c'_1(t)e^t + c'_2(t)(t-1)e^t = 2e^t \end{cases}$$

З першого рівняння одержимо:

$$c'_2(t) = -c'_1(t)$$

З другого рівняння одержимо:

$$\begin{aligned} c'_1(t) &= \frac{2}{2-t} \\ c_1(t) &= 2 \int \frac{1}{2-t} dt = -2 \ln|2-t| + c_3 \end{aligned}$$

Знайдемо $c_2(t)$:

$$\begin{aligned} c'_2(t) &= -c'_1(t) = \frac{2}{t-2} \\ c_2(t) &= 2 \int \frac{1}{t-2} dt = 2 \ln |(t-2)| + c_4 \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_3 e^t + c_4 t e^t + 2(t-1) \ln|t-2| e^t \\ y(t) &= c_3 e^t + c_4 (t-1) e^t + 2(t-2) \ln|t-2| e^t \end{aligned}$$

Приклад 3

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + t^2 \end{cases}$$

Розв'язання:

Розв'яжемо систему використовуючи метод Лагранжа. Спочатку розв'яжемо однорідну систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння системи по t :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = x$$

Тоді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 1 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 1$$

Отже:

$$x_0 = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

$$y_0 = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

Загальний розв'язок вихідної системи шукаємо у вигляді:

$$x(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}$$

$$y(t) = c_1(t)e^t - c_2(t)e^{-t}$$

Функції $c_1(t)$, $c_2(t)$ знаходимо з системи:

$$\begin{cases} c'_1(t)e^t + c'_2(t)e^{-t} = 2e^t \\ c'_1(t)e^t - c'_2(t)e^{-t} = t^2 \end{cases}$$

Додамо ці два рівняння та виразимо $c'_1(t)$:

$$c'_1(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$$

Інтегруючи останню рівність, одержимо:

$$c_1(t) = \int (1 + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}) dt = t - e^{-t} \left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right) + c_3$$

Знайдемо $c_2(t)$:

$$c'_2(t) = e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 e^t,$$
$$c_2(t) = \int \left(e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 e^t \right) dt = \frac{e^{2t}}{2} - \frac{1}{2}e^t(t^2 - 2t + 2) + c_4$$

Отже, загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$x(t) = c_3 e^t + c_4 e^{-t} + \frac{e^t}{2} + t e^t - t^2 - 2$$
$$y(t) = c_3 e^t - c_4 e^{-t} - \frac{e^t}{2} + t e^t - 2t$$

Приклад 4

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$$

Розв'язання:

Розв'яжемо систему використовуючи пошук часткового розв'язку системи.

Спочатку розв'яжемо однорідну систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння системи по t :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2 \frac{dx}{dt} + x + 2y = 2 \frac{dx}{dt} + x + 2 \frac{dx}{dt} - 4x$$

Тоді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 3 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 3$$

Отже:

$$x_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

$$y_0(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

Оскільки $k_1 = 1$ співпадає з коренем неоднорідності у правій частині першого рівняння системи, то частковий розв'язок вихідної системи шукаємо у вигляді:

$$x_1(t) = (A_1 + A_2 t)e^t + A_3 e^{4t}$$

$$y_1(t) = (B_1 + B_2 t)e^t + B_3 e^{4t}$$

Підставимо $x_1(t)$, $y_1(t)$ у вихідну систему та одержимо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} -A_1 + A_2 - B_1 = 2 \\ A_1 + B_1 - B_2 = 0 \\ A_2 + B_2 = 0 \\ 2A_3 - B_3 = 0 \\ 2B_3 - A_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 1 \\ A_3 = -1 \\ B_1 = -1 \\ B_2 = -1 \\ B_3 = -2 \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок системи:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + t e^t - e^{4t}$$

$$y(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{3t} - (t + 1)e^t - 2e^{4t}$$

Задачі для самостійного розв'язання

Розв'язати системи рівнянь:

$$4.1. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

$$4.2. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y + e^{-2t}, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y - 3e^{-2t}. \end{cases}$$

$$4.3. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$4.4. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + e^{2t}. \end{cases}$$

$$4.5. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x + 1, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$$

$$4.7. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y - 8, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$$

$$4.9. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + 1 + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$$

$$4.11. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$4.13. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 5 \sin t. \end{cases}$$

$$4.15. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \sin t. \end{cases}$$

$$4.17. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$$

$$4.19. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

$$4.6. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x + 18t. \end{cases}$$

$$4.8. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$

$$4.10. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y + 5t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y + 8e^t. \end{cases}$$

$$4.12. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + t^2. \end{cases}$$

$$4.14. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2 \sin t. \end{cases}$$

$$4.16. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y - 2 \cos t. \end{cases}$$

$$4.18. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - x. \end{cases}$$

$$4.20. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$$

Відповіді:

- 4.1. $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} + 3e^{5t}, \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} + e^{5t}. \end{cases}$
- 4.2. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{2t} + 3e^{-2t}, \\ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 4e^{-2t}. \end{cases}$
- 4.3. $\begin{cases} x = (C_1 + C_2) \cos 2t + (C_2 - C_1) \sin 2t, \\ y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{-2t}. \end{cases}$
- 4.4. $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} - e^{2t}, \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} - e^{2t}. \end{cases}$
- 4.5. $\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^t - 3, \\ y = (C_1 + C_2 + 2C_2 t) e^t - 2. \end{cases}$
- 4.6. $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 + 3t^2 + 2t, \\ y = -C_1 e^{3t} + 2C_2 + 6t^2 - 2t - 2. \end{cases}$
- 4.7. $\begin{cases} x = 2C_1 e^{8t} - 2C_2 - 6t + 1, \\ y = 3C_1 e^{8t} + C_2 + 3t. \end{cases}$
- 4.8. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}. \end{cases}$
- 4.9. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} e^t, \\ y = C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t} - \frac{3}{4} - e^t. \end{cases}$
- 4.10. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} - 3e^t + 2t - \frac{13}{5}, \\ y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} + e^t - 3t + \frac{12}{5}. \end{cases}$
- 4.11. $\begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - (12t + 13)e^t, \\ y = C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-3t} - (8t + 6)e^t. \end{cases}$
- 4.12. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + te^t - t^2 - 2, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (t - 1)e^t - 2t. \end{cases}$
- 4.13. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - \cos t + 3 \sin t, \\ y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 2 \cos t - \sin t. \end{cases}$
- 4.14. $\begin{cases} x = 3C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 3 \sin t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \cos t + 2 \sin t. \end{cases}$
- 4.15. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \sin t, \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \end{cases}$

$$4.16. \begin{cases} x = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + \cos t - 2 \sin t, \\ y = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 2 \cos t - 2 \sin t. \end{cases}$$

$$4.17. \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + e^t(2 \cos t - \sin t), \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{3t} + e^t(3 \cos t + \sin t). \end{cases}$$

$$4.18. \begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{t}{2} \cos t + 1, \\ y = C_2 \cos t - C_1 \sin t - \frac{t}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t. \end{cases}$$

$$4.19. \begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t(t + \ln|\cos t|) + \sin t(t - \ln|\cos t|), \\ y = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t + 2 \cos t \ln|\cos t| + 2t \sin t. \end{cases}$$

$$4.20. \begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t} + 1) + 2e^{2t} \operatorname{arctg} e^t, \\ y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} - e^t \ln(e^{2t} + 1) + 3e^{2t} \operatorname{arctg} e^t. \end{cases}$$

5. ФАЗОВІ ПОРТРЕТИ АВТОНОМНИХ СИСТЕМ

Розглянемо нормальну систему, тобто систему n диференціальних рівнянь першого порядку:

[illegible]

де x – незалежна змінна, $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – невідомі функції.

Введемо поняття автономної системи.

Означення 5.1. Система вигляду

[illegible]

тобто система, в яку не входить явно незалежна змінна x , називається **автономною**.

Зазначимо, що будь-яку систему (5.1) можна звести до системи (5.2) за допомогою заміни:

$$y_{n+1} := x, \quad y'_{n+1} = 1.$$

Далі будемо проводити дослідження автономних систем другого порядку:

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y); \end{cases} \quad (5.3)$$

де $x(t), y(t)$ – невідомі функції, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, а $t \in \mathbb{R}$ – незалежна змінна.

Припустимо, що $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(D)$. Тоді $G = \mathbb{R} \times D$ – область єдиності системи (5.3). Тобто задача Коші для неї матиме єдиний розв’язок при будь-яких початкових даних з області G . Згідно з цим припущенням через кожену точку $(t_0, x_0, y_0) \in G$ проходить **єдина** інтервальна крива l (Рис.5.1). При проєктуванні кривої l на площину XOY отримаємо криву l_1 .

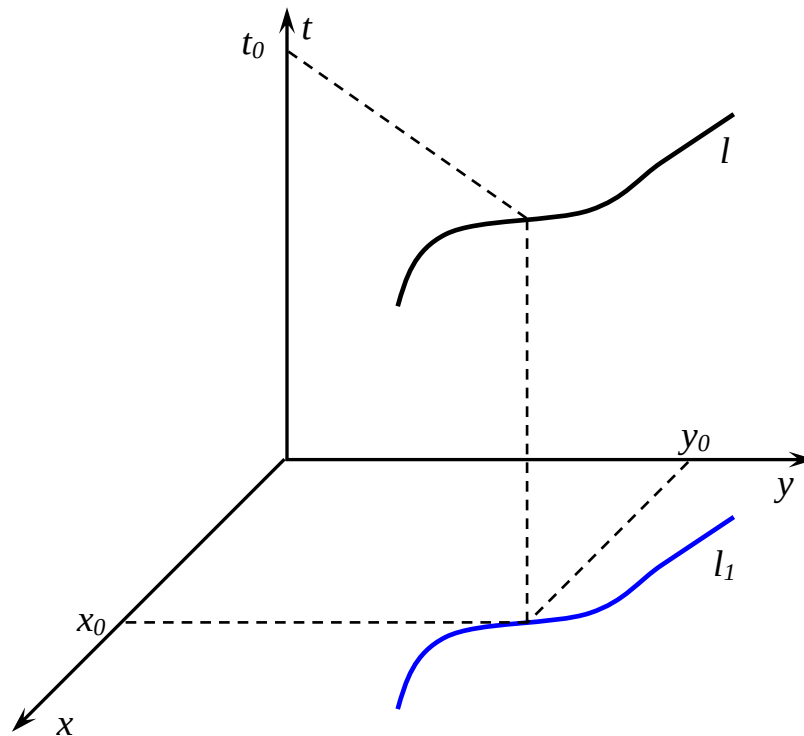


Рис. 5.1.

Означення 5.2. Крива l_1 називається **фазовою кривою** або **траєкторією**. Напрям руху на l_1 вибирається у бік зростання змінної t .

Означення 5.3. Площина, яка містить фазові криві, називається **фазовою площиною**.

На рисунку 5.1. фазовою буде площина XOY .

Означення 5.4. Сукупність фазових кривих називається **фазовим портретом**.

Постає питання: *Чи наслідують властивість єдиності фазові криві від інтегральних кривих?*

Для автономних систем це **так**. Для довільних нормальних – **ні**.

Щоб з'ясувати більш детально це питання, розглянемо деякі властивості розв'язків автономних систем.

1. Нехай $\Phi(t) = (x(t), y(t))$ – розв'язок системи (5.3). Тоді

$\forall c \in \mathbb{R} \quad \psi(t) = (x(t+c), y(t+c))$ – також розв’язок системи (5.3).

Доведення. Дійсно,

$$\begin{aligned}\frac{dx(t+c)}{dt} &= \frac{dx(t+c)}{d(t+c)} = P(x(t+c), y(t+c)), \\ \frac{dy(t+c)}{dt} &= \frac{dy(t+c)}{d(t+c)} = Q(x(t+c), y(t+c)).\end{aligned}$$

2. Дві фазові криві або не мають спільних точок або співпадають.

Доведення. Дійсно, нехай γ_1 – фазова крива для $\Phi(t)$, γ_2 – фазова крива для $\psi(t)$. Припустимо, що γ_1 і γ_2 мають спільну точку. Тоді $\exists t_1, t_2: \Phi(t_1) = \psi(t_2)$. Розглянемо $X(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$. Це буде розв’язок завдяки властивості 1. Тоді $X(t_1) = \psi(t_2) = \Phi(t_1) \Rightarrow X(t) \equiv \Phi(t)$ (єдиність розв’язку (5.3))

$$\Rightarrow \Phi(t) = \psi(t + t_2 - t_1) = \psi(t + c) \Rightarrow \text{криві } \gamma_1 \text{ і } \gamma_2 \text{ співпадають.}$$

Отже, фазові криві не перетинаються. Це дає змогу вивчати замість розв’язків (5.3) їх проєкції на $\mathbb{R}^2$, тобто дослідження достатньо проводити в просторі розмірності на 1 менше.

Означення 5.5. Точка (x_0, y_0) , в якій одночасно

$$P(x_0, y_0) = 0 \quad \text{і} \quad Q(x_0, y_0) = 0,$$

називається **положенням рівноваги** системи (5.3).

Розглянемо функції-константи $x(t) \equiv x_0$ і $y(t) \equiv y_0$. Це буде розв’язок системи (5.3). Отже, положення рівноваги – це сталий розв’язок системи (5.3). Фазовою кривою такого розв’язку буде точка (x_0, y_0) .

3. Будь-який розв’язок автономної системи (5.3) належить до одного з трьох типів:

- 1) Неперіодичний: $\Phi(t_1) \neq \Phi(t_2)$, при $t_1 \neq t_2$. Фазова крива – не замкнена гладка крива без самоперетинів.

2) Періодичний: $\exists T > 0 \quad \forall t \quad \Phi(t) = \Phi(t + T)$ і $\forall t_1, t_2 \in [0, T) : \Phi(t_1) \neq \Phi(t_2)$. Фазова крива – замкнена гладка крива без самоперетинів.

3) Сталий розв'язок $\Phi(t) \equiv c$. Фазова крива – точка.

Доведення. Нехай $\Phi(t)$ не є сталою і не належить до типу 1). Тоді $\exists t_1, t_2 : \Phi(t_1) = \Phi(t_2)$. $\Phi(t)$ періодична, оскільки $\Phi(t) = \Phi(t + t_2 - t_1)$ (це випливає доведення властивості 2). Період $\tau = t_2 - t_1$, взагалі кажучи, можливо не найменший. Але неперервна, відмінна від сталої, функція має основний (найменший додатний) період. Це означає що самоперетинів у кривої не буде. Дійсно, при самоперетині період має бути меншим найменшого. Протиріччя.

Приклад. Фізичний маятник (коливання металевого стрижня).

Розглянемо вільні коливання без сил опору (Рис. 5.2). Тут $x(t)$ – кут відхилення від положення рівноваги в момент часу t .

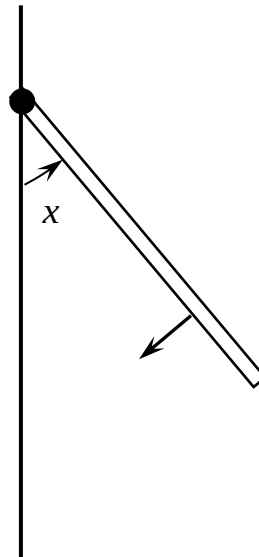


Рис. 5.2. Фізичний маятник

1) Якщо x – малий кут, то рівнянням коливань буде лінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$x'' + kx = 0, \quad k > 0, \quad x = x(t).$$

Позначивши $x_1(t) = x(t)$ і $x_2(t) = x'(t)$, перейдемо до автономної системи

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -kx_1. \end{cases}$$

Бачимо, що система має єдине положення рівноваги $(0;0)$.

Виключивши з системи t , отримаємо рівняння фазових кривих:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -kx_1. \end{cases} \Rightarrow x_2 dx_2 + kx_1 dx_1 = 0.$$

Проінтегрувавши рівняння, отримуємо

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = c \quad - \text{еліпси (рис. 5.3).}$$

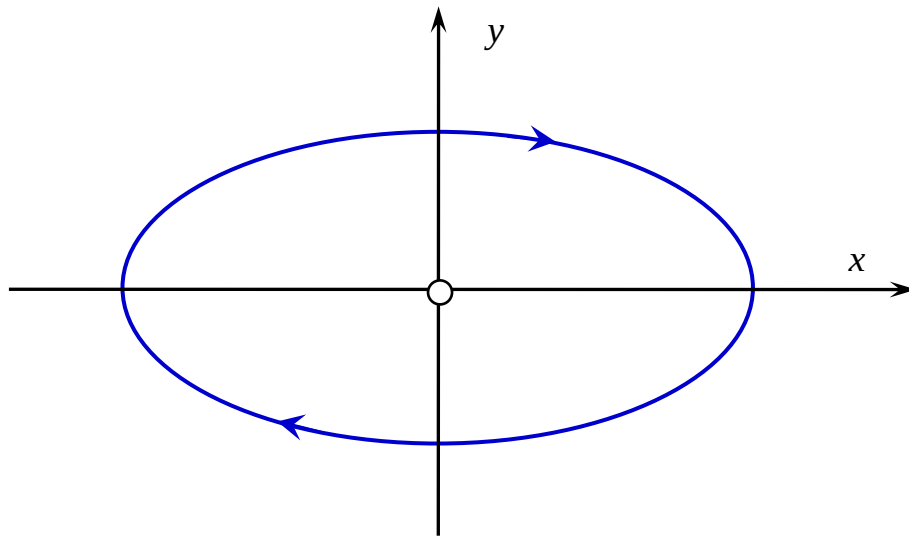


Рис. 5.3. Еліпси

2) Якщо x – довільний кут, то маємо нелінійне диференціальне рівняння коливань:

$$x'' + k \sin x = 0.$$

Тоді відповідна автономна система запишеться як

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -k \sin x_1. \end{cases}$$

В даному випадку положеннями рівноваги будуть точки $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Виключивши з системи t , маємо

$$x_2 dx_2 + k \sin x_1 dx_1 = 0.$$

Отже, $x_2^2 - 2k \cos x_1 = c$ – рівняння фазових кривих.

Розглянемо частинний випадок автономної системи, а саме лінійну однорідну систему другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \quad (5.4)$$

Положення рівноваги визначаються розв'язками системи:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y = 0. \end{cases}$$

Розглянемо матрицю коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Якщо $\det A \neq 0$, то маємо єдине положення рівноваги $(0; 0)$. Якщо $\det A = 0$, то буде безліч положень рівноваги.

Дослідимо поведінку розв'язків системи (5.4) в околі положення рівноваги і побудуємо відповідні фазові портрети. Оскільки розв'язки системи (5.4) визначаються власними числами і власними векторами матриці A , то зробимо класифікацію фазових портретів на основі власних чисел і власних векторів матриці A .

Нехай спочатку $\det A \neq 0$. Власні числа матриці A визначаються з рівняння:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

або

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = 0.$$

Розглянемо випадки.

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 < 0$. Нехай для визначеності $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

Запишемо загальний розв'язок системи (5.4):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ – власні вектори матриці A .

При $t \rightarrow +\infty$ маємо $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, оскільки $\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 < 0$. Всі

розв'язки прямують до нульового (положення рівноваги).

Уточнимо розташування фазових кривих в околі $(0; 0)$:

$$\begin{aligned} y'_x = \frac{dy}{dx} &= \frac{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_{21} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_{22}}{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_{12}} = \left| \text{поділимо на } e^{\lambda_1 t} \right| = \\ &= \frac{c_1 \lambda_1 v_{21} + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_{22}}{c_1 \lambda_1 v_{11} + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_{12}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{v_{21}}{v_{11}}, \text{ де при } t \rightarrow +\infty \text{ і } c_1 \neq 0, \text{ і } c_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Фазові траєкторії при $t \rightarrow +\infty$ наближаються до точки $(0; 0)$, підходячи до неї так, що в границі дотикаються прямої $y = \frac{v_{21}}{v_{11}} x$ (але ці траєкторії не досягають точки $(0; 0)$ протягом скінченного періоду часу t). Якщо $c_1 = 0$, і $c_2 \neq 0$, то

$$x(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_{12}; \quad y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_{22}.$$

Тоді

$$\frac{y}{x} = \frac{v_{22}}{v_{12}} \Rightarrow y = \frac{v_{22}}{v_{12}} x - \text{пряма без точки } (0,0) \text{ є фазово кривою.}$$

Аналогічно, якщо $c_1 \neq 0$, і $c_2 = 0$, то

$$\text{пряма } y = \frac{v_{21}}{v_{11}} x \text{ без точки } (0,0) - \text{фазова крива.}$$

Згідно з проведеним аналізом поведінки розв'язків системи в околі точки положення рівноваги $(0; 0)$ будемо фазовий портрет. Положення рівноваги $(0; 0)$ в цьому випадку називається **стійкий вузол** (Рис. 5.4). На рисунку $\mathbf{v}_1$ – власний вектор, якому відповідає власне значення менше за модулем.

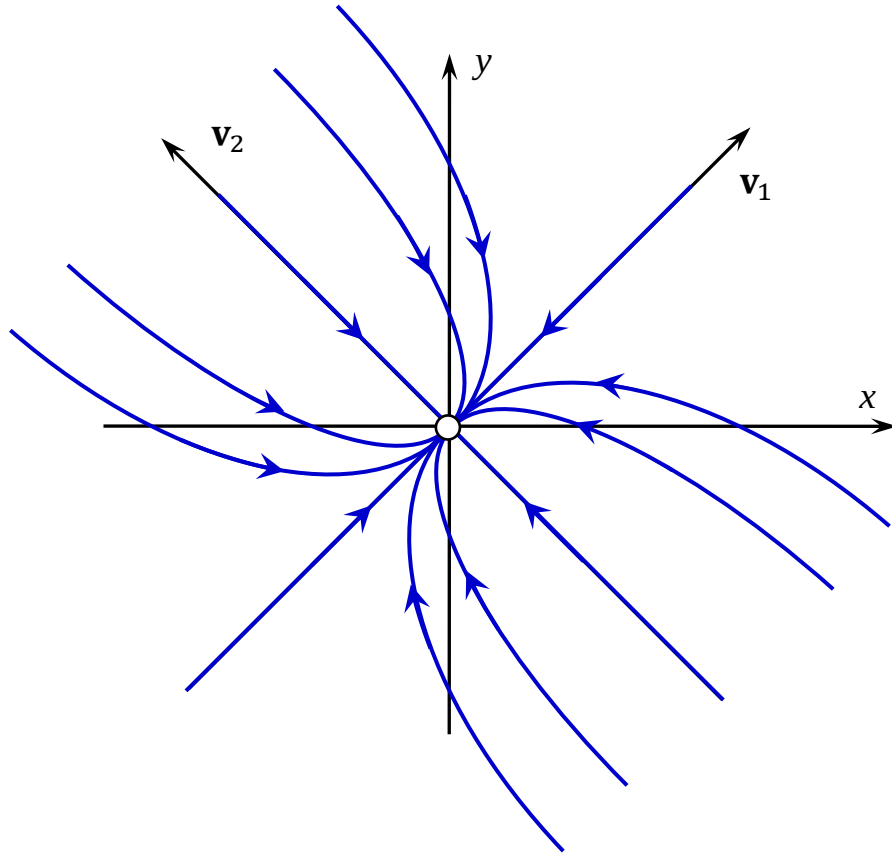


Рис. 5.4. Положення рівноваги – стійкий вузол

Аналогічними міркуваннями виписуючи розв'язки системи та аналізуючи їх поведінку отримаємо фазові портрети для інших випадків.

2. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\lambda_1 > 0$; $\lambda_2 > 0$. Положення рівноваги $(0; 0)$ в цьому випадку називається **нестійкий вузол**, а стрілки на фазових кривих будуть напрямлені в протилежному напрямку, від точки $(0; 0)$ (Рис. 5.5).

3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Нехай $\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 > 0$. Маємо траєкторії гіперболічного типу. Вони будуть наближатися до прямої, яка відповідає додатному власному значенню. Положення рівноваги $(0; 0)$ в цьому випадку називається **сідло** (Рис. 5.6).

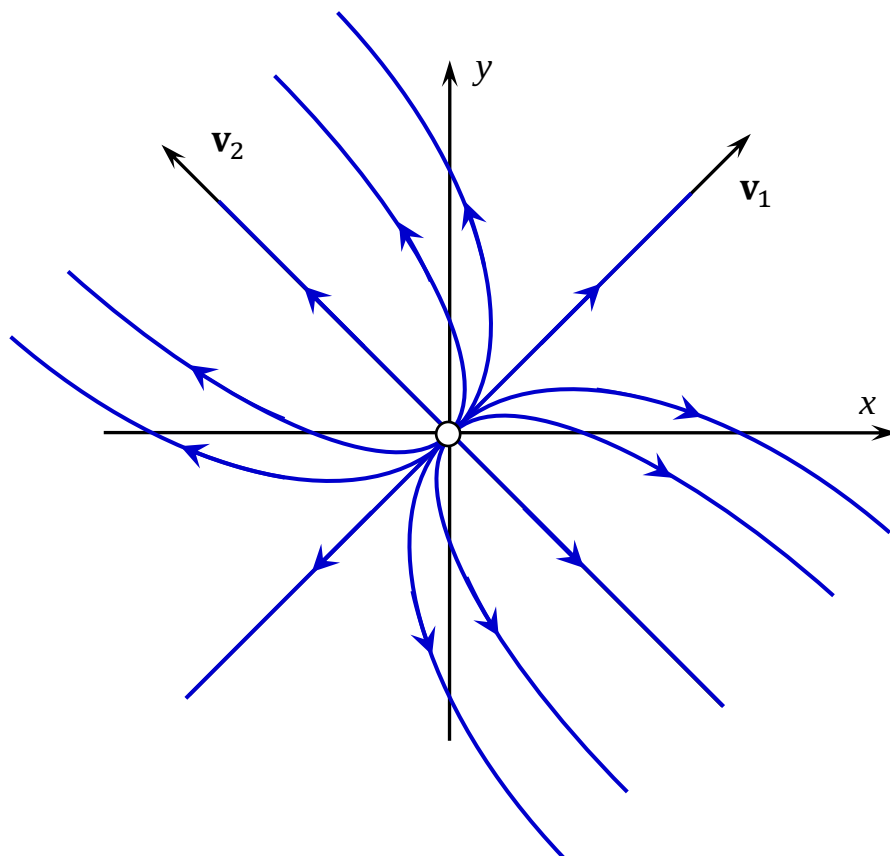


Рис. 5.5. Положення рівноваги – нестійкий вузол

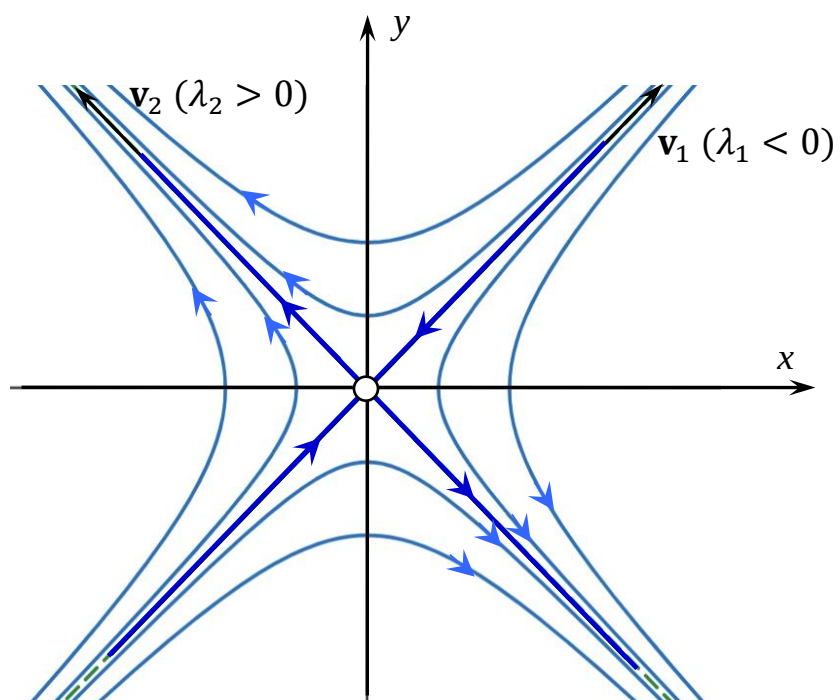


Рис. 5.6. Положення рівноваги – сідло

4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, причому нехай геометрична кратність λ також дорівнює 2 (тобто маємо два власні вектори $\mathbf{v}_1$ і $\mathbf{v}_2$).

Така ситуація виникає в системах вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda y. \end{cases}$$

Напрямок фазових траєкторій буде залежати від знаку λ .

а) $\lambda < 0 \Rightarrow$ положення рівноваги, точка $(0; 0)$ - **стійкий дикритичний вузол** (Рис. 5.7).

б) $\lambda > 0 \Rightarrow$ положення рівноваги - **нестійкий дикритичний вузол** (Рис. 5.8).

5. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, причому нехай геометрична кратність λ дорівнює 1 (тобто маємо один власний вектор $\mathbf{v}_1$).

а) $\lambda < 0 \Rightarrow$ положення рівноваги, точка $(0; 0)$ - **стійкий вироджений вузол** (Рис. 5.9).

б) $\lambda > 0 \Rightarrow$ положення рівноваги - **нестійкий вироджений вузол** (Рис. 5.10).

6. Нехай $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ – комплексні значення.

Власному значенню $\lambda_1 = a + ib$ відповідає комплекснозначний власний вектор

$$\mathbf{v}_1 = u + iw = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок для λ_1 буде

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 = e^{(a+ib)t} (u + iw).$$

Виділивши в $\mathbf{X}_1(t)$ дійсну та уявну частини, отримаємо розв'язок системи:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= c_1 \operatorname{Re} \mathbf{X}_1 + c_2 \operatorname{Im} \mathbf{X}_1 = \\ &= e^{at} (u(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt) + w(c_2 \cos bt - c_1 \sin bt)). \end{aligned}$$

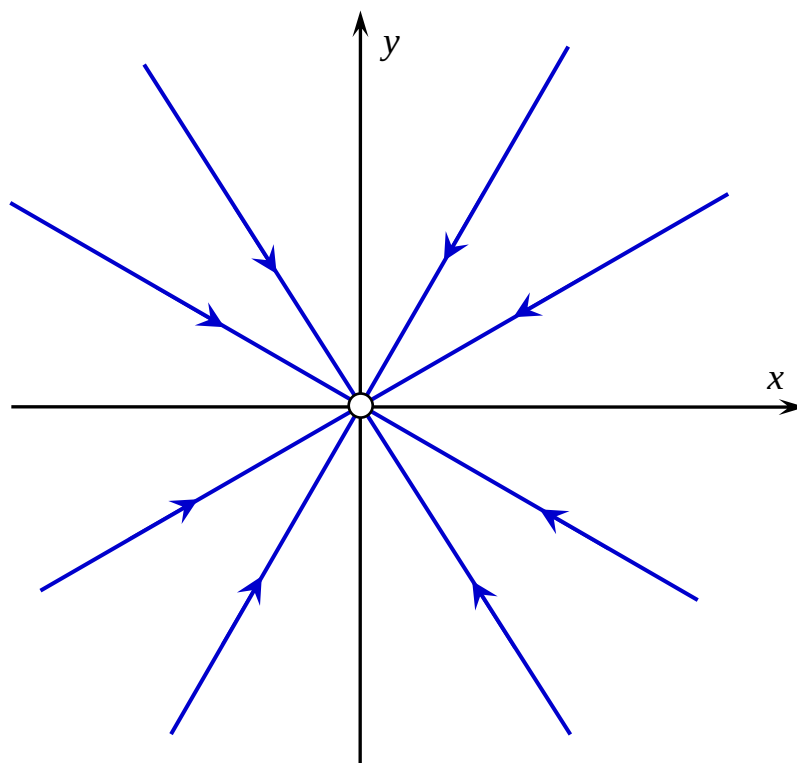


Рис. 5.7. Положення рівноваги – стійкий дикритичний вузол

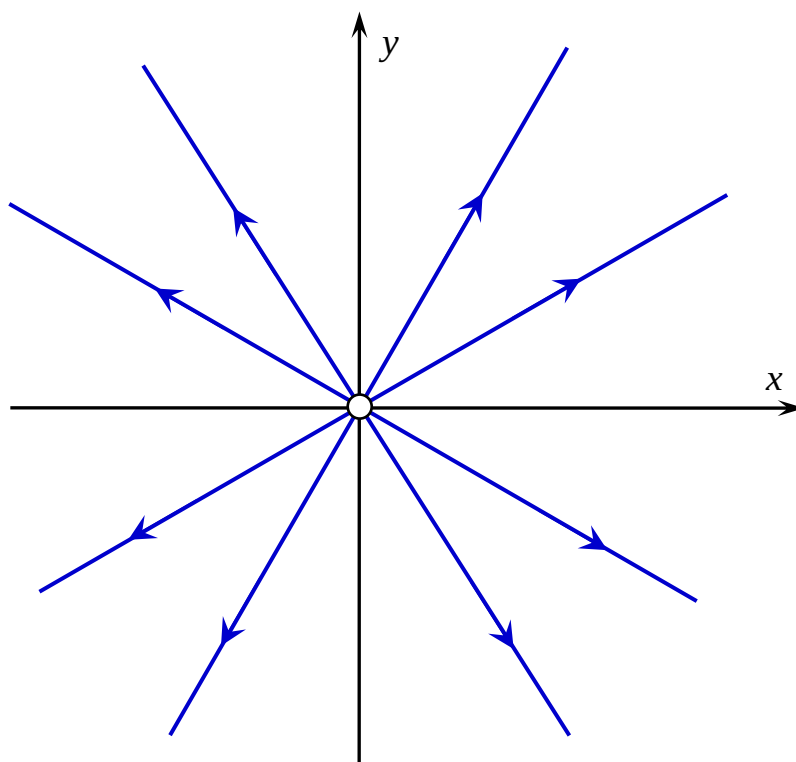


Рис. 5.8. Положення рівноваги – нестійкий дикритичний вузол

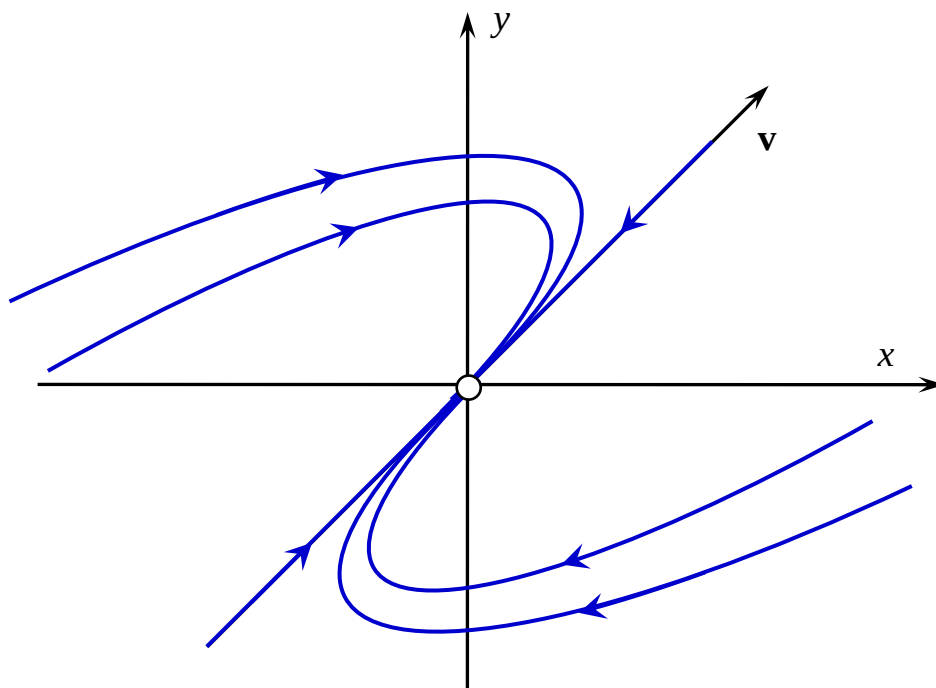


Рис. 5.9. Положення рівноваги –стійкий вироджений вузол

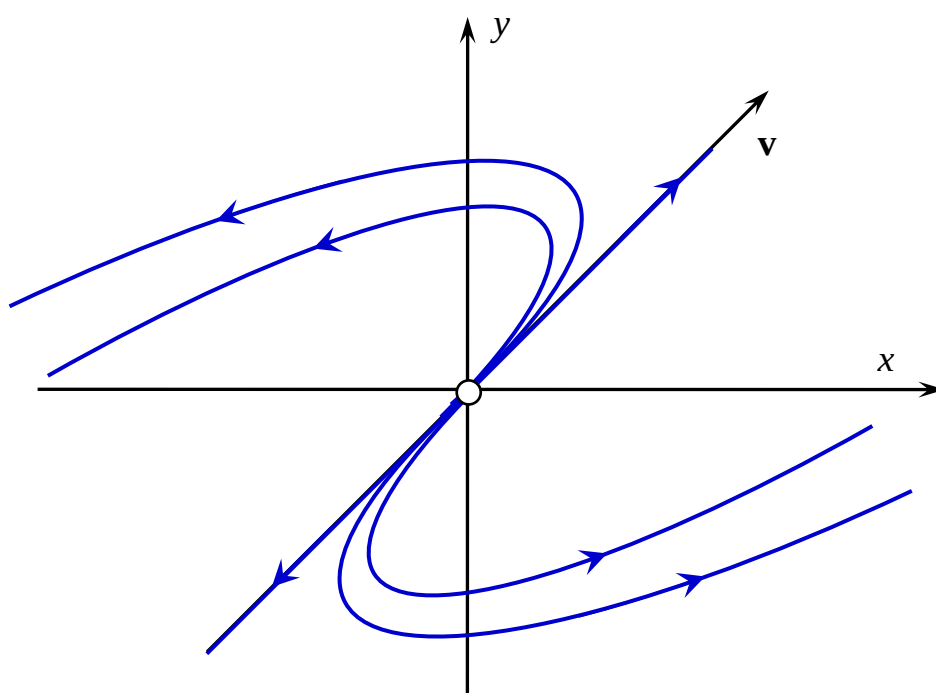


Рис. 5.10. Положення рівноваги –нестійкий вироджений вузол

Позначимо $c_1 = c \sin \delta$, $c_2 = c \cos \delta$, тоді

$$\mathbf{X}(t) = c e^{at} (u \sin(bt + \delta) + w \cos(bt + \delta)).$$

Таким чином фазові траєкторії являють собою **спіралі**. При $a < 0$ вони будуть закручуватись, наближуючись до початку координат. При $a > 0$ – розкручуватись від початку координат.

Напрямок закручування спіралей (за годинниковою стрілкою чи проти) можна визначити за знаком числа a_{21} . Дійсно, розглянемо $\frac{dy}{dt}$ в точці $(1;0)$

$$\frac{dy}{dt}(1;0) = 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} = a_{21}.$$

При $a_{21} > 0$ маємо $\frac{dy}{dt} > 0$, тобто координата y зростає в околі точки $(1;0)$, тому спіраль йде проти годинникової стрілки. Аналогічно, при $a_{21} < 0$ – за годинниковою стрілкою (Рис. 5.11-5.14).

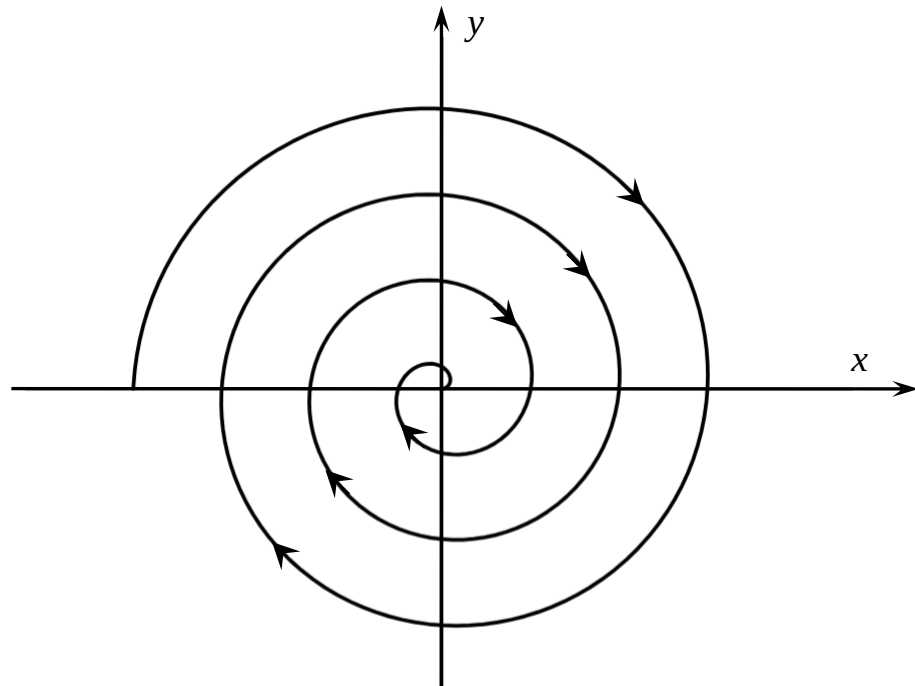


Рис. 5.11. $a_{21} < 0$. Положення рівноваги – стійкий фокус

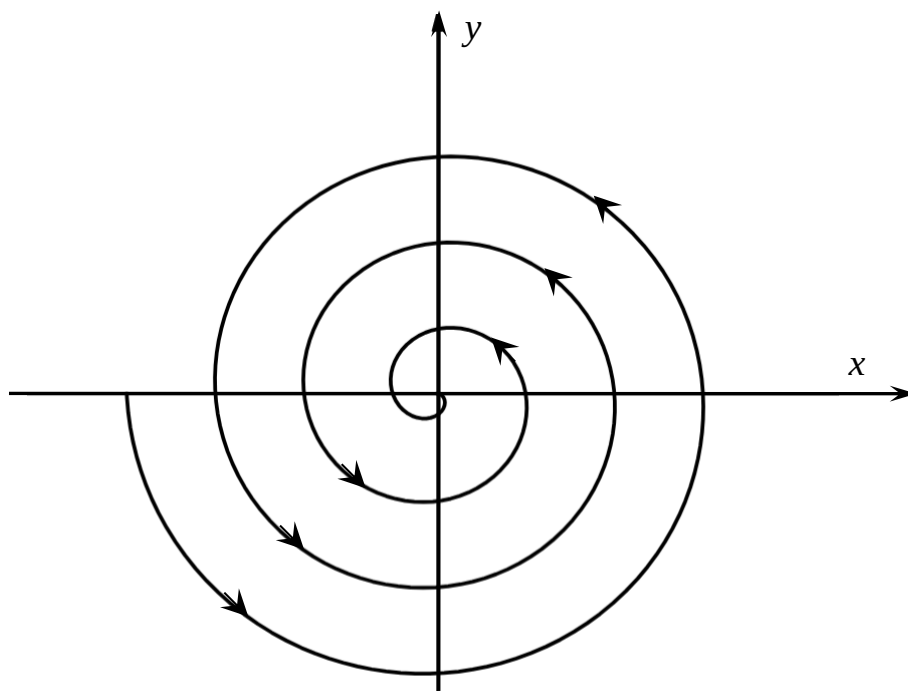


Рис. 5.12. $a_{21} > 0$. Положення рівноваги –стійкий фокус

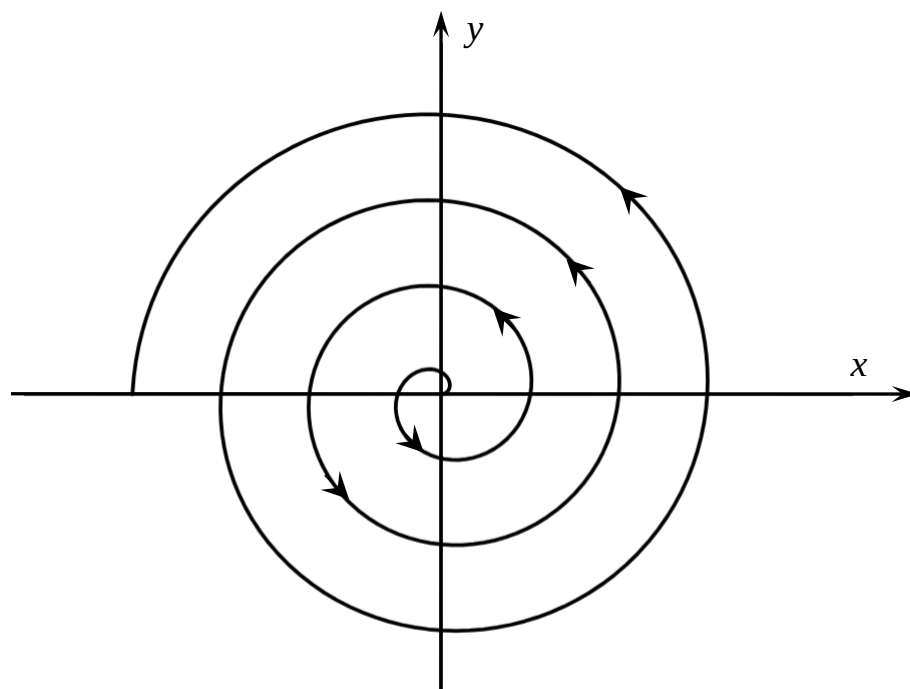


Рис. 5.13. $a_{21} > 0$. Положення рівноваги –нестійкий фокус

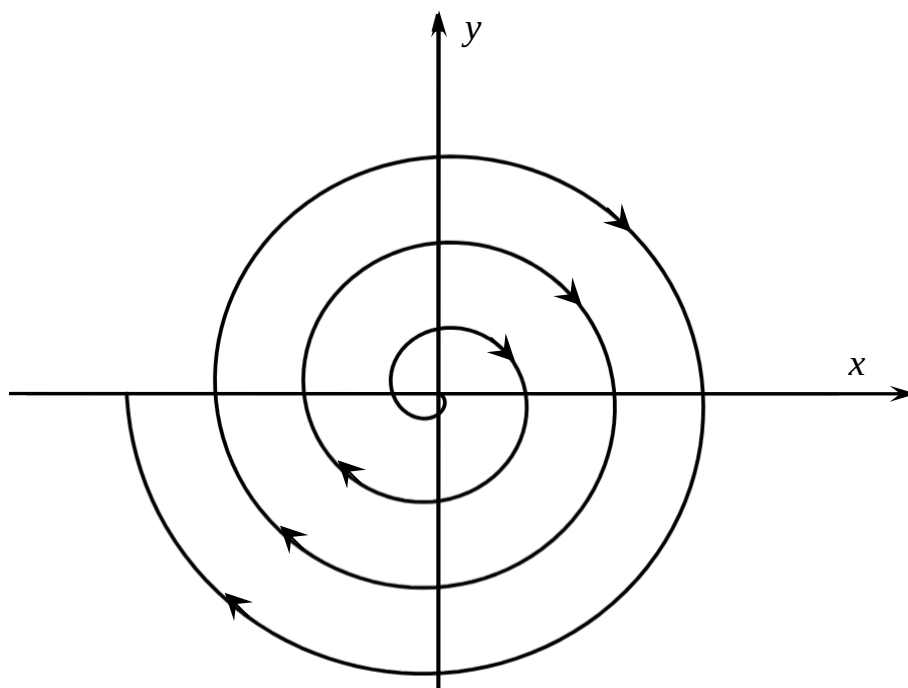


Рис. 5.14. $a_{21} < 0$. Положення рівноваги – нестійкий фокус

Якщо $a_{21} = 0$, то характеристичне рівняння набуває вигляду

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) = 0$$

і має дійсні корені. Тому в розглядуваному випадку виключено $a_{21} = 0$.

6.а) Нехай $\lambda_{1,2} = \pm ib$, $\text{Re}\lambda_{1,2} = 0$ ($a = 0$) – частинний випадок з **п.6.** Тут спіралі перетворюються в еліпси (Рис. 5.15). Таке положення рівноваги називається **центром**.

7. Розглянемо випадок виродженої матриці A ($\det A = 0$).

Тоді характеристичне рівняння має вигляд :

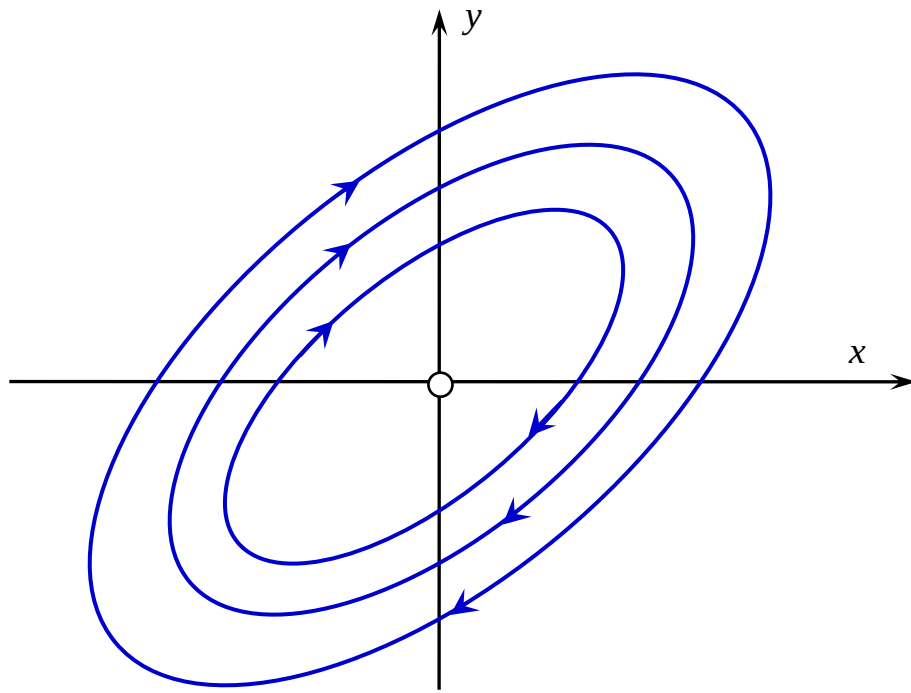
$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda = 0,$$

Тобто одне або обидва $\lambda = 0$.

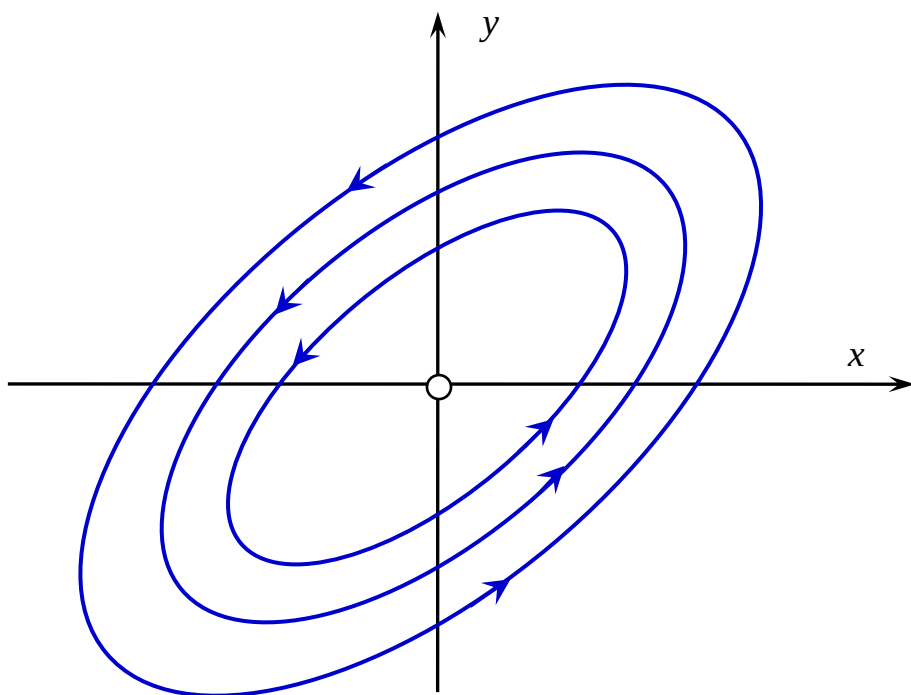
7.а) Нехай $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Тоді маємо загальний розв'язок

$$\mathbf{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2,$$

де $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ – власні вектори. В цьому випадку положення рівноваги – це всі точки прямої, що проходить через початок координат, паралельно до $\mathbf{v}_2$ ((Рис. 5.16).

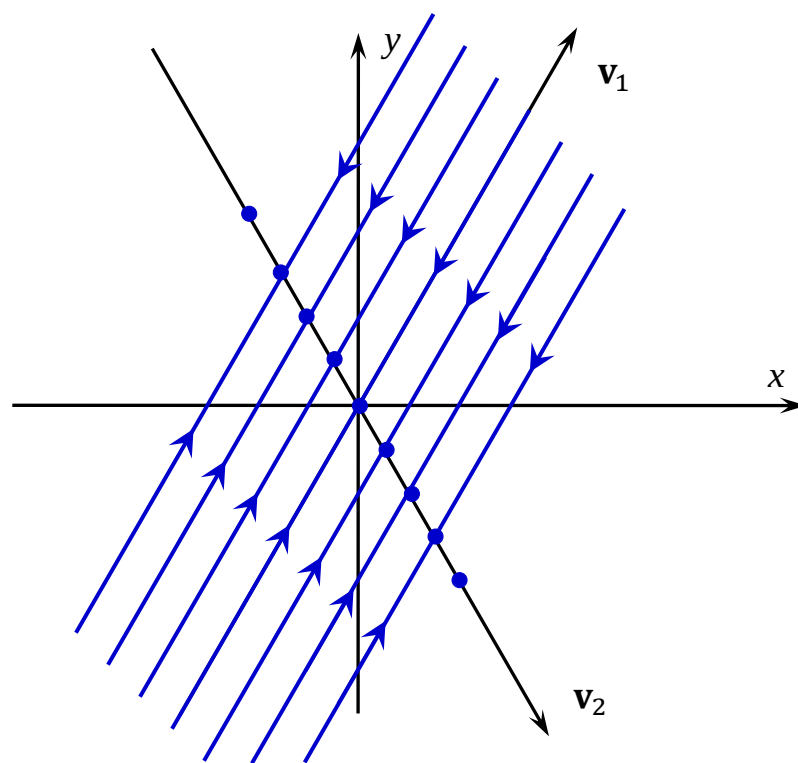


а) $a_{12} < 0$

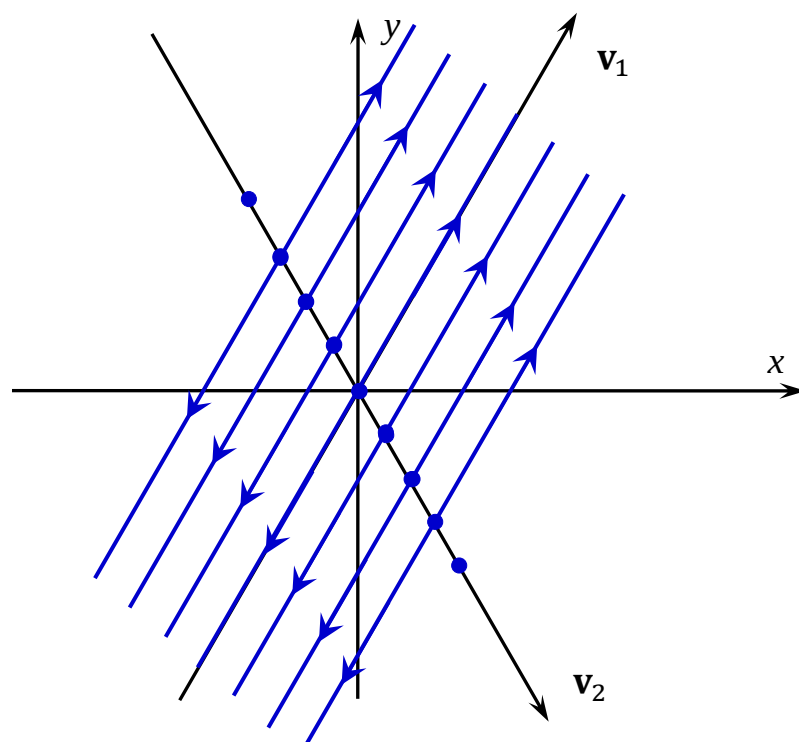


б) $a_{12} > 0$

Рис. 5.15. Положення рівноваги –центр



a) $\lambda_1 < 0$



б) $\lambda_1 > 0$

Рис. 5.16.

7.6) Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і геометрична кратність дорівнює 2. Тоді маємо два власні вектори $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Це означає, що

$$\dim \text{Ker } A = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді будь-яка точка площини є положенням рівноваги.

7.в) Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і геометрична кратність дорівнює 1. Тоді маємо один власний вектор $\mathbf{v}_1$.

$$\dim \text{Ker } A = 1 \Rightarrow A - \text{ненульова матриця.}$$

Тут всі точки прямої, що проходить через початок координат, паралельно до вектора $\mathbf{v}_1$ є положенням рівноваги.

Розв'язком системи буде

$$\mathbf{X}(t) = (c_1 + c_2 t) \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{w}_1,$$

де $\mathbf{w}_1$ – приєднаний вектор до $\mathbf{v}_1$.

Напрямок руху по фазовим траєкторіям при $t \rightarrow +\infty$ залежить від c_2 . Якщо $c_2 > 0$, то в напрямку вектора $\mathbf{v}_1$ (Рис. 5.17), якщо $c_2 < 0$ – в протилежному до $\mathbf{v}_1$ напрямку (Рис. 5.18).

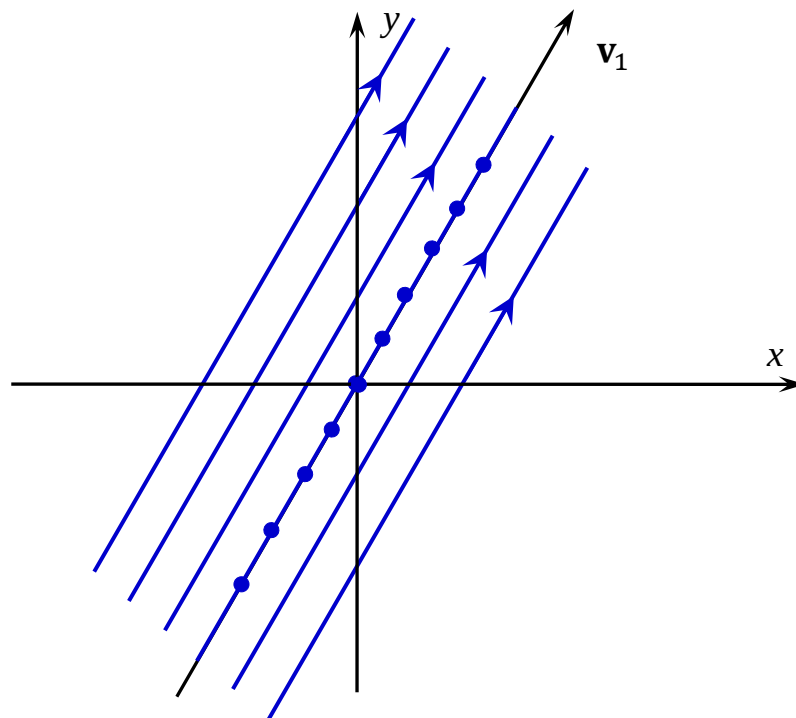


Рис. 5.17. $c_2 > 0$

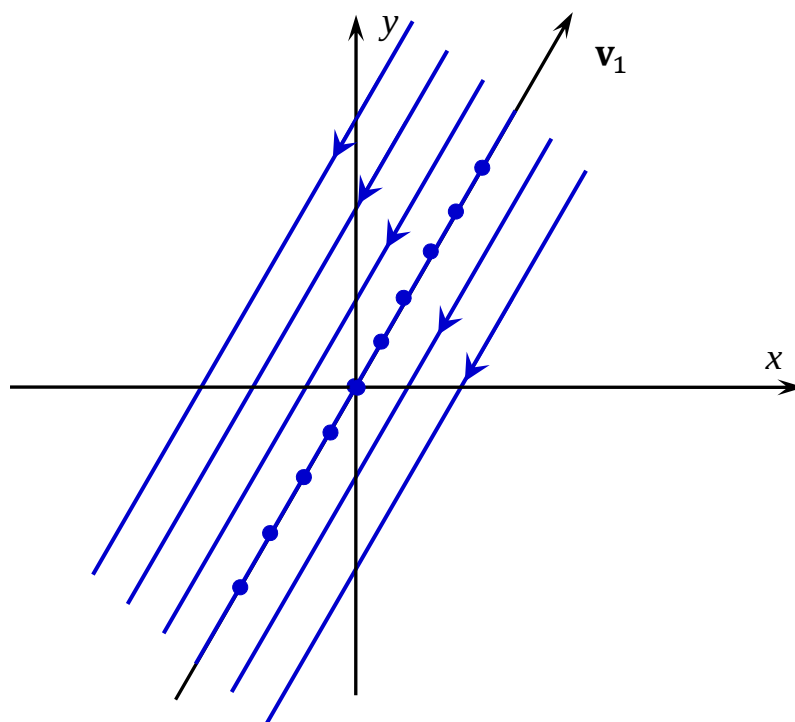


Рис. 5.18. $c_2 < 0$

Біфуркаційна діаграма

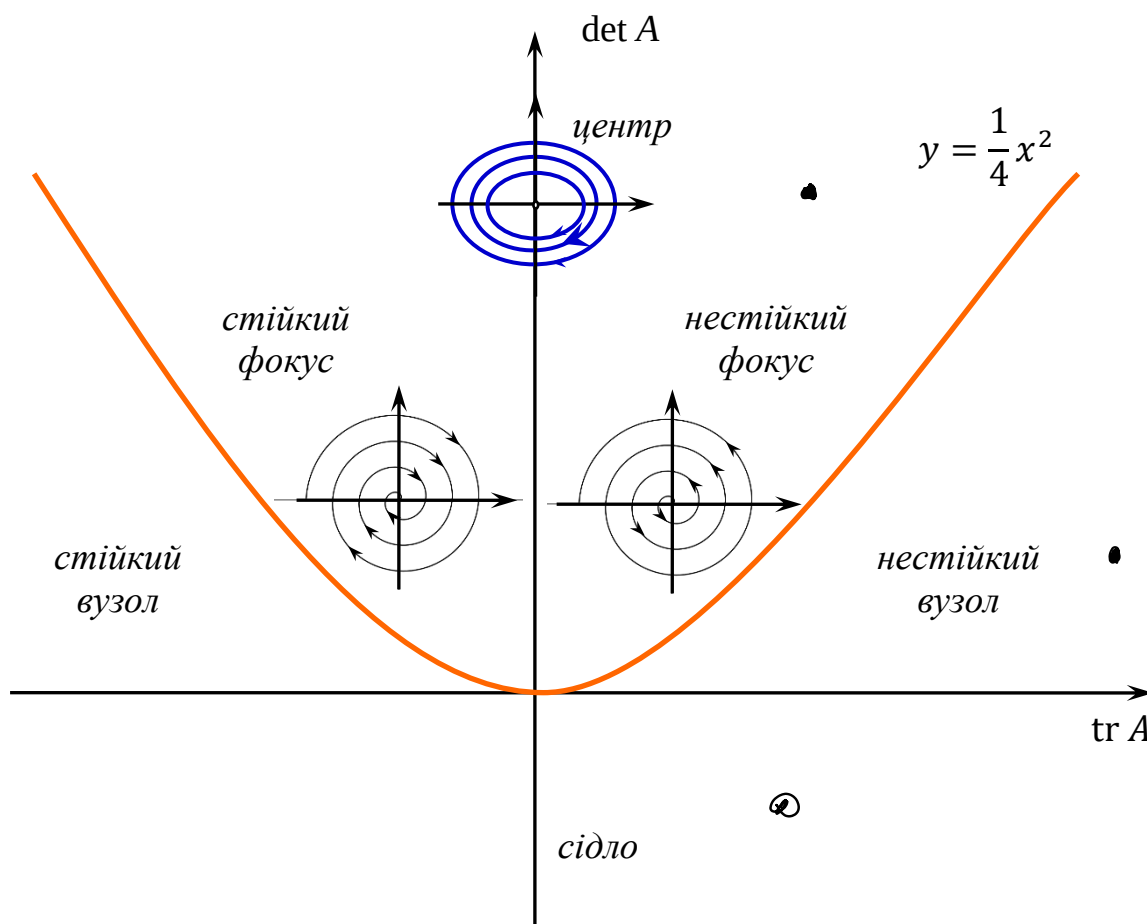


Рис. 5.19. Біфуркаційна діаграма

В загальному випадку маємо

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = 0,$$

$$D = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = 0 \Rightarrow \det A = \frac{1}{4} (\operatorname{tr} A)^2.$$

Всі варіанти фазових траєкторій в залежності від значень $\operatorname{tr} A$ та $\det A$ наведені на Рисунку 5.19.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1

Визначити тип положення рівноваги та побудувати фазовий портрет:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

Знайдемо особливу точку як розв'язок системи:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Отже, $(0,0)$ – особлива точка. Знайдемо власні числа матриці цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Оскільки $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, робимо висновок, що маємо нестійкий вузол.

Знайдемо напрямні фазових траєкторій.

$$y = kx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{x} = \frac{x + 2kx}{x}, \quad \rightarrow k = \frac{x + 2kx}{x}, \quad \rightarrow k = -1$$

Отже, напрямні мають вигляд:

$$y = -x$$

$$x = 0$$

Фазові траєкторії дотикаються до прямої $y = -x$, що відповідає власному вектору $(-1,1)$ числа $\lambda_1 = 1$ (рис.5.20)

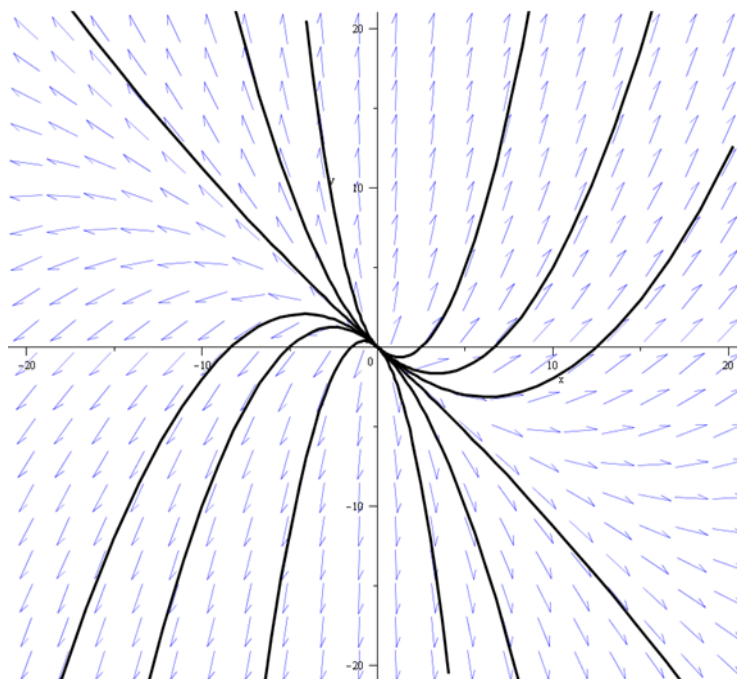


Рис. 5.20.

Приклад 2

Визначити тип положення рівноваги та побудувати фазовий портрет:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

Знайдемо особливу точку як розв'язок системи:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Отже, $(0,0)$ – особлива точка. Знайдемо власні числа матриці цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Оскільки $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, робимо висновок, що маємо нестійкий вузол.

Знайдемо власні вектори:

$\lambda_1 = 1$: $x = 0$, y – довільне число, отже власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 1$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 : x - y = 0, \quad x = y$$

Отже власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 2$:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким чином, напрямні будуть направлені вздовж векторів $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Фазові траєкторії дотикаються до прямої $x = 0$, що відповідає власному вектору $(0,1)$ числа $\lambda_1 = 1$ так як $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ (рис.5.21)

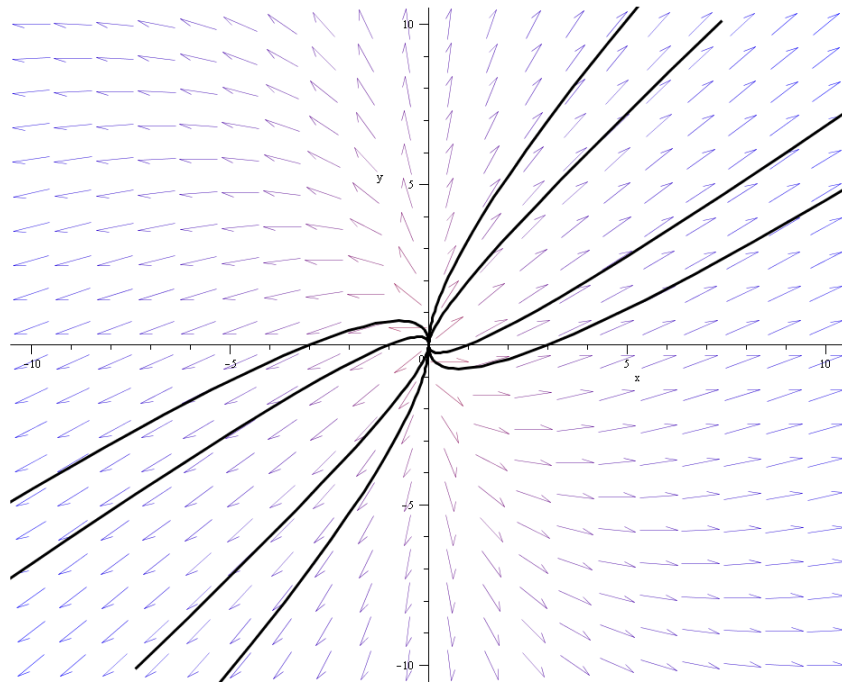


Рис. 5.21.

Приклад 3

Визначити тип положення рівноваги та побудувати фазовий портрет:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases}$$

Знайдемо особливу точку як розв'язок системи:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

Отже, $(0,0)$ – особлива точка. Знайдемо власні числа матриці цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0, \quad \lambda = -1 \pm 2i$$

Оскільки $\operatorname{Re} \lambda = -1 < 0$, робимо висновок, що маємо асимптотично стійкий фокус. Для визначення фазового портрету візьмемо, наприклад, точку $(1,0)$

і побудуємо в ній вектор швидкості:

$$(x', y') = (x - 2y, 4x - 3y)|_{(1,0)} = (1, 4)$$

Отже, фазова траєкторія буде дотична до вектора (1,4). Для визначення напрямку закручування спіралі обчислимо:

$$y'|_{y=0} = 4x > 0, \quad \text{якщо } x > 0.$$

Отже, ордината точки, що перетинає вісь x зростає. Це означає, що рух відбувається знизу вгору, тобто проти годинникової стрілки (рис. 5.22)

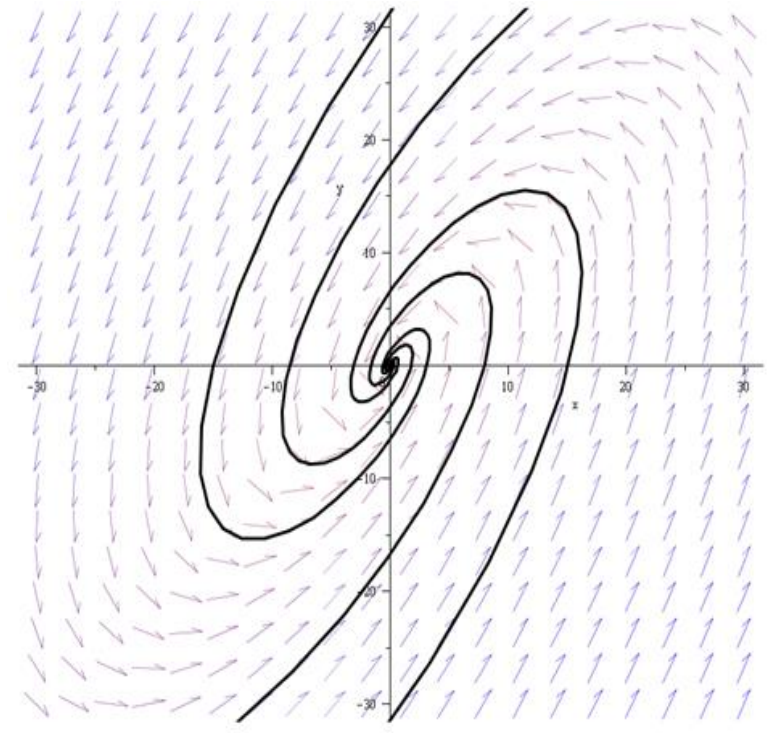


Рис. 5.22.

Приклад 4

Визначити тип положення рівноваги та побудувати фазовий портрет:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

Знайдемо особливу точку як розв'язок системи:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Отже, $(0,0)$ – особлива точка. Знайдемо власні числа матриці цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1$$

Оскільки $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -5 < 0$, робимо висновок, що маємо нестійке сідло.

Для побудови фазових траєкторій знайдемо напрямні:

$$\lambda_1 = 5 : \quad -2x + 4y = 0, \quad x = 2y$$

Отже власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 5$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 : \quad 4x + 4y = 0, \quad x = -y$$

Отже власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_2 = -1$:

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Визначимо напрямок руху вздовж фазових траєкторій. Для цього обчислимо:

$$y'|_{y=0} = 2x > 0, \text{ якщо } x > 0.$$

Це означає, що рух вздовж фазових траєкторій, які перетинають додатну частину осі ox відбувається знизу вгору. Аналогічно рух вздовж фазових траєкторій, які перетинають від'ємну частину осі ox відбувається згори вниз (рис. 5.23).

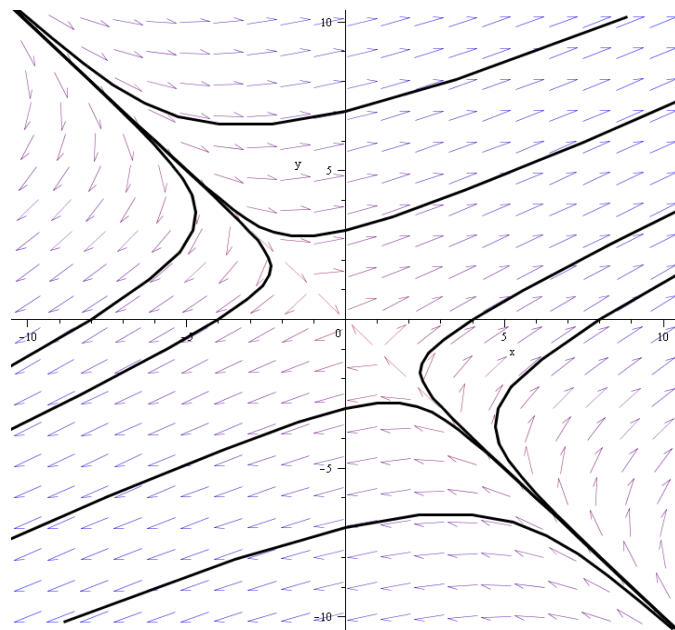


Рис. 5.23.

Приклад 5

Визначити тип положення рівноваги та побудувати фазовий портрет:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 3x \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y \end{cases}$$

Знайдемо особливу точку як розв'язок системи:

$$\begin{cases} 2y - 3x = 0 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$$

Отже, $(0,0)$ – особлива точка. Знайдемо власні числа матриці цієї системи:

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0, \quad \lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = -2$$

Оскільки $\lambda_1 < 0$ і $\lambda_2 < 0$, робимо висновок, що маємо асимптотично стійкий вузол.

Для побудови фазових траєкторій знайдемо напрямні:

$$\lambda_1 = -5 : \quad 2x + 2y = 0, \quad x = -y$$

Отже власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = -5$: $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_2 = -2 : \quad -x + 2y = 0, \quad x = 2y$$

Отже власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_2 = -2$: $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким чином, напрямні будуть направлені вздовж векторів $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Фазові траєкторії дотикаються до прямої $y = \frac{1}{2}x$, що відповідає власному вектору $(2,1)$ числа $\lambda_2 = -2$ так як $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ (Рис.5.24).

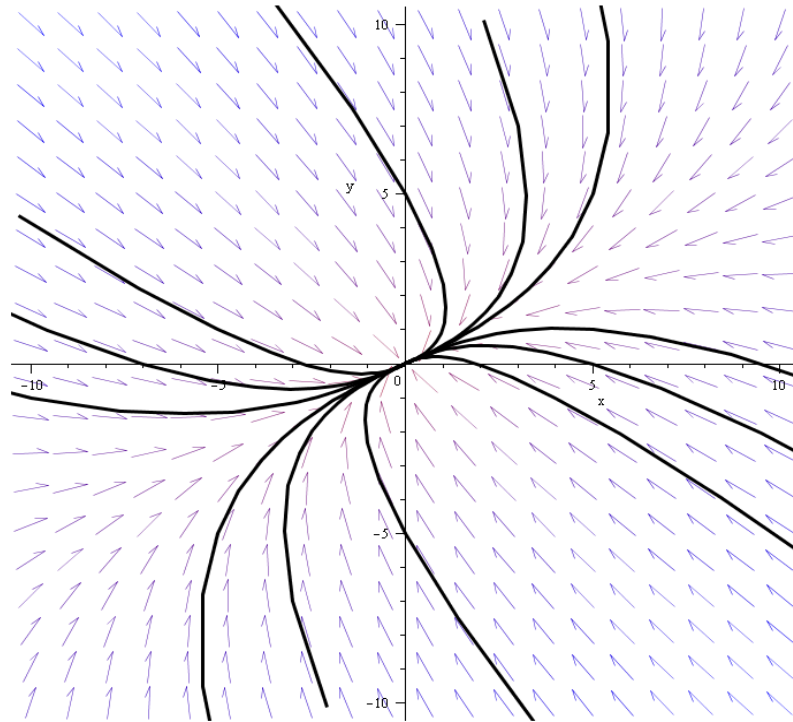


Рис. 5.24.

Приклад 6

Визначити тип положення рівноваги та побудувати фазовий портрет:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$$

Знайдемо особливу точку як розв'язок системи:

$$\begin{cases} y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

Отже, $(0,0)$ – особлива точка. Знайдемо власні числа матриці цієї системи:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda + 2 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{7}i$$

Оскільки $\text{Re} \lambda = 1/2 > 0$, робимо висновок, що маємо нестійкий фокус. Для визначення фазового портрету візьмемо, наприклад, точку $(1,0)$ і побудуємо в ній вектор швидкості:

$$(x', y') = (y, -2x + y)|_{(1,0)} = (0, -2)$$

Отже, фазова траєкторія буде дотична до вектора $(0, -2)$ (Рис. 5.25). В системі $a_{21} = -2 < 0$, тому спіралі розкручуються за годинниковою стрілкою.

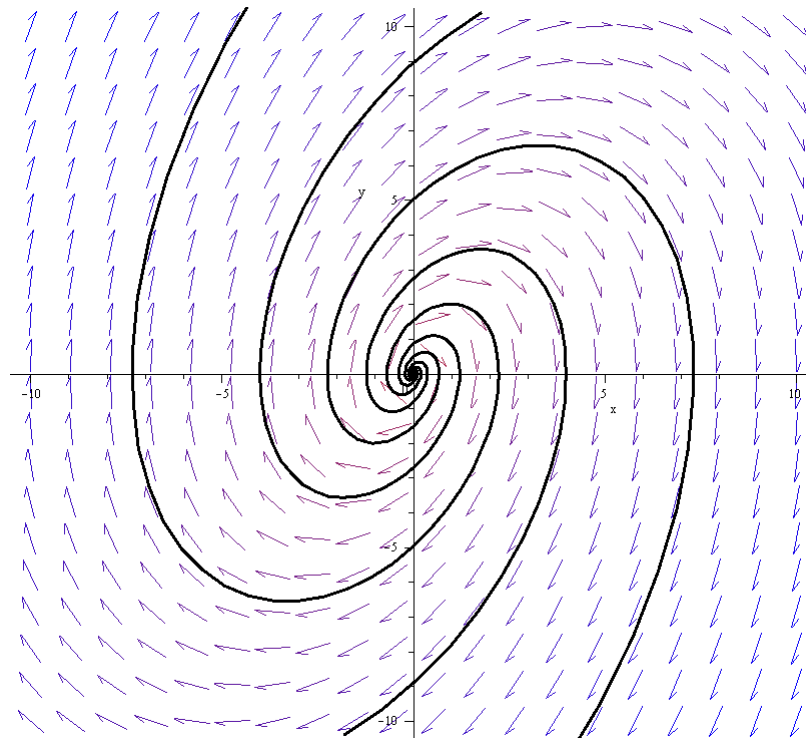


Рис. 5.25.

Приклад 7

Визначити тип положення рівноваги та побудувати фазовий портрет:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

Знайдемо особливу точку як розв'язок системи:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$$

Отже, $(0,0)$ – особлива точка. Знайдемо власні числа матриці цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 1$$

Оскільки $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, робимо висновок, що маємо нестійкий вузол.

Для побудови фазових траєкторій знайдемо напрямні:

$$\lambda_1 = 5 : -3x + 3y = 0, \quad x = y$$

Отже власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 5$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

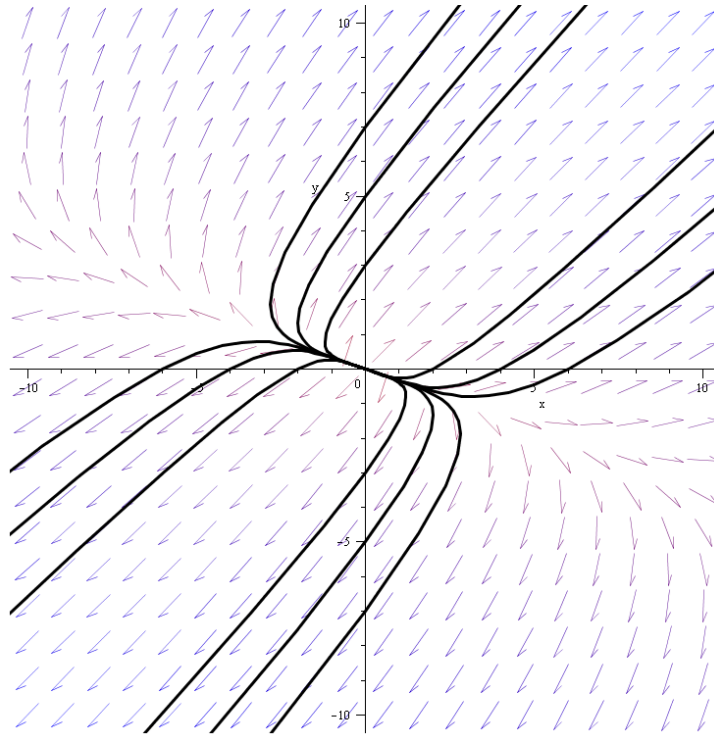


Рис. 5.26.

$$\lambda_2 = 1 : x + 3y = 0, \quad x = -3y$$

Отже власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 1$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким чином, напрямні будуть направлені вздовж векторів $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Фазові траєкторії дотикаються до прямої $y = -\frac{1}{3}x$, що відповідає власному вектору $(-3,1)$ числа $\lambda_2 = 1$, оскільки $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ (рис.5.26).

Приклад 8

Визначити тип положення рівноваги та побудувати фазовий портрет:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$$

Знайдемо особливу точку як розв'язок системи:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Отже, $(0,0)$ – особлива точка. Знайдемо власні числа матриці цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1$$

Оскільки $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -2 < 0$, робимо висновок, що маємо нестійке сідло.

Для побудови фазових траєкторій знайдемо напрямні:

$$\lambda_1 = 2 : x - 4y = 0, \quad x = 4y$$

Отже, власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 2$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 : 4x - 4y = 0, \quad x = y$$

Отже, власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_2 = -1$:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Визначимо напрямок руху вздовж фазових траєкторій. Для цього обчислимо:

$$y'|_{y=0} = x > 0, \text{ якщо } x > 0.$$

Це означає, що рух вздовж фазових траєкторій, які перетинають додатню частину осі ox відбувається знизу вгору. Аналогічно рух вздовж фазових траєкторій, які перетинають від'ємну частину осі ox відбувається згори вниз (рис. 5.27).

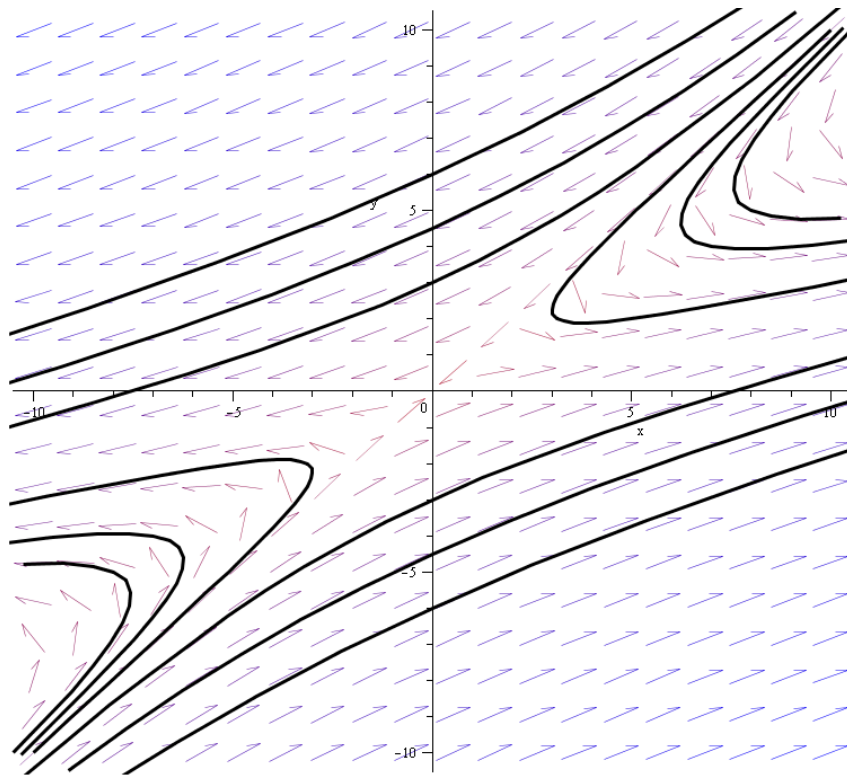


Рис. 5.27.

Приклад 9

Визначити тип положення рівноваги та побудувати фазовий портрет:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

Знайдемо особливу точку як розв'язок системи:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Отже, $(0,0)$ – особлива точка. Знайдемо власні числа матриці цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda = \pm i$$

Оскільки $\text{Re} \lambda = 0$, робимо висновок, що маємо стійкий центр (рис.5.28).

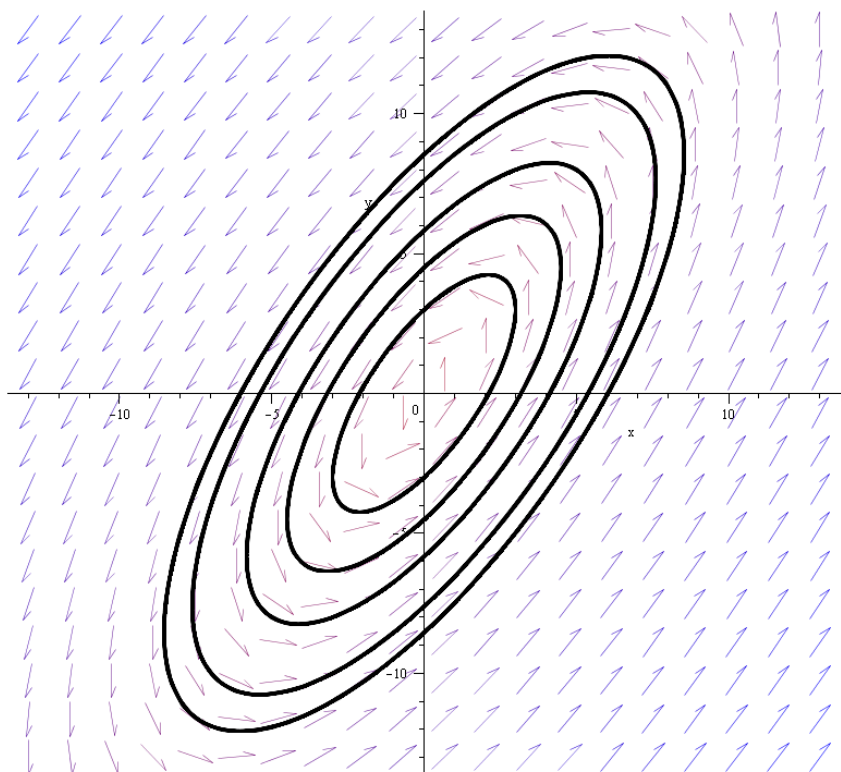


Рис. 5.28.

В системі $a_{21} = 2 > 0$, тому рух по фазових траєкторіях буде проти годинникової стрілки.

Задачі для самостійного розв'язання

Визначити тип положення рівноваги та побудувати фазовий портрет для наступних систем рівнянь:

$$5.1. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x. \end{cases}$$

$$5.2. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$5.3. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

$$5.4. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 5y. \end{cases}$$

$$5.5. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = y - x. \end{cases}$$

$$5.7. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 5y. \end{cases}$$

$$5.9. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

$$5.11. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$$

$$5.13. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$$

$$5.15. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y. \end{cases}$$

$$5.17. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 6x. \end{cases}$$

$$5.6. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$$

$$5.8. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 5y. \end{cases}$$

$$5.10. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$$

$$5.12. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

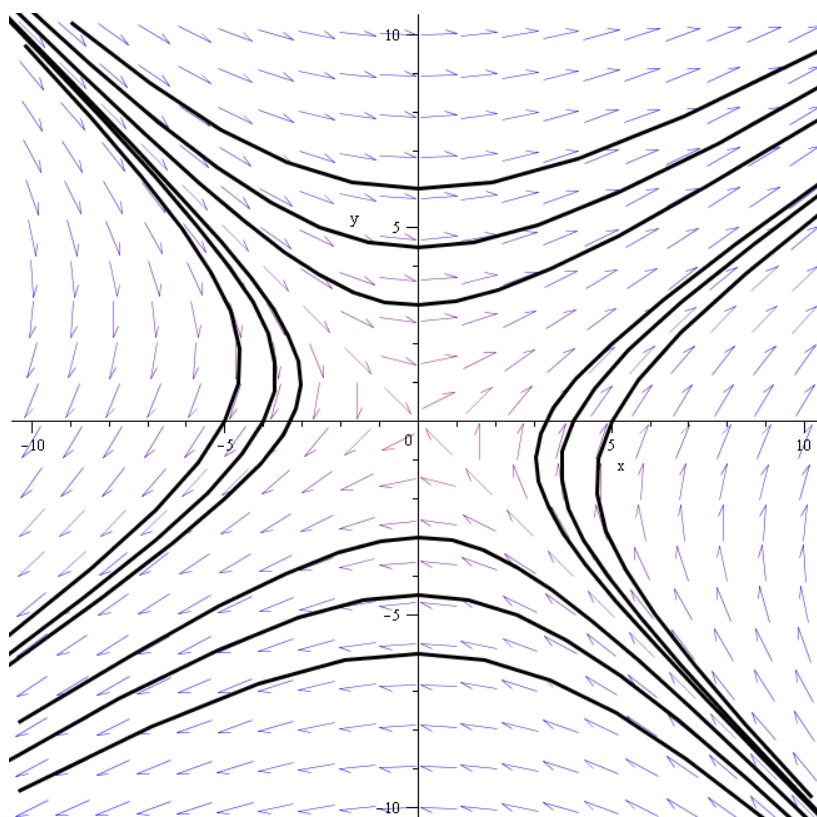
$$5.14. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y. \end{cases}$$

$$5.16. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 2x, \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 4x. \end{cases}$$

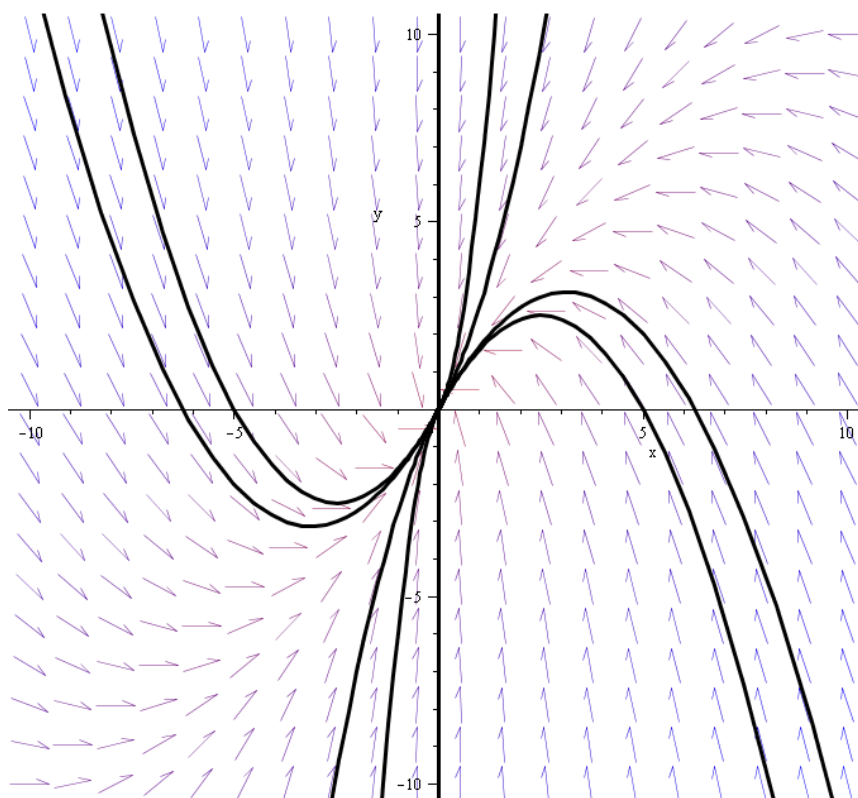
$$5.18. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \alpha y. \end{cases}$$

Відповіді:

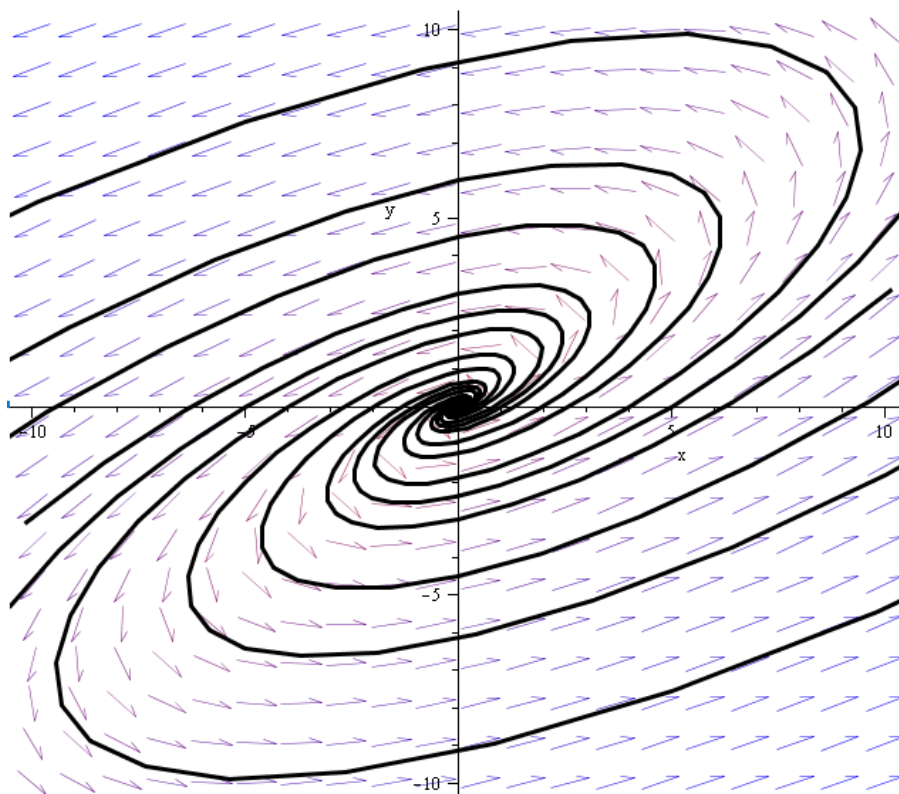
5.1. Сідло.



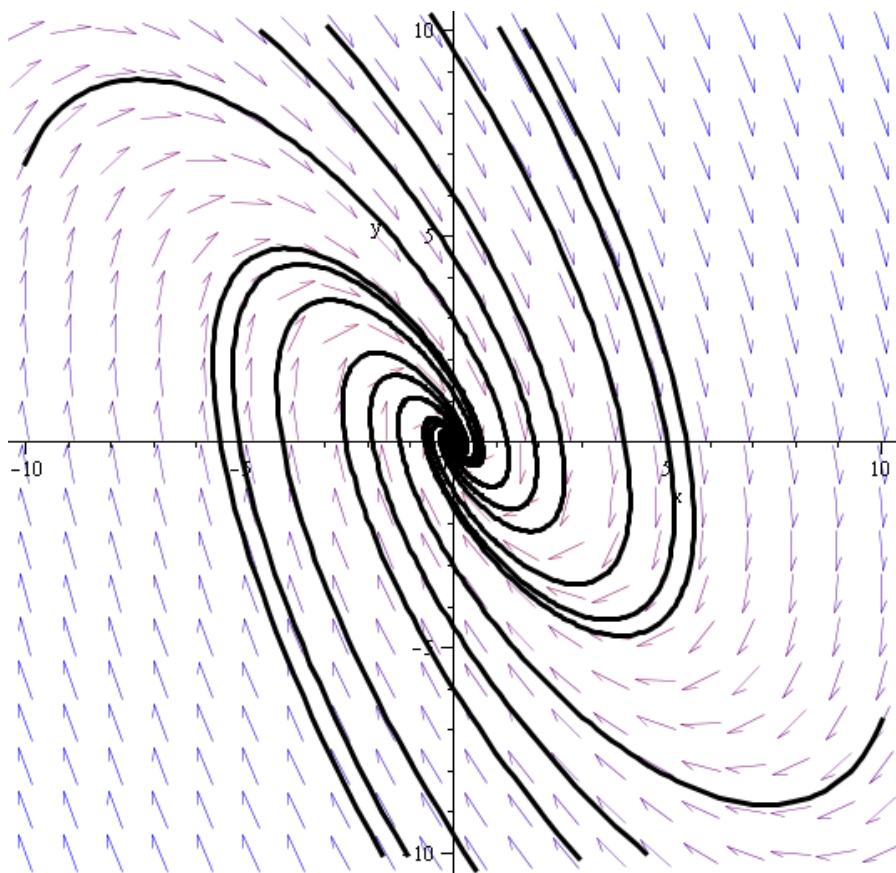
5.2. Стійкий вузол.



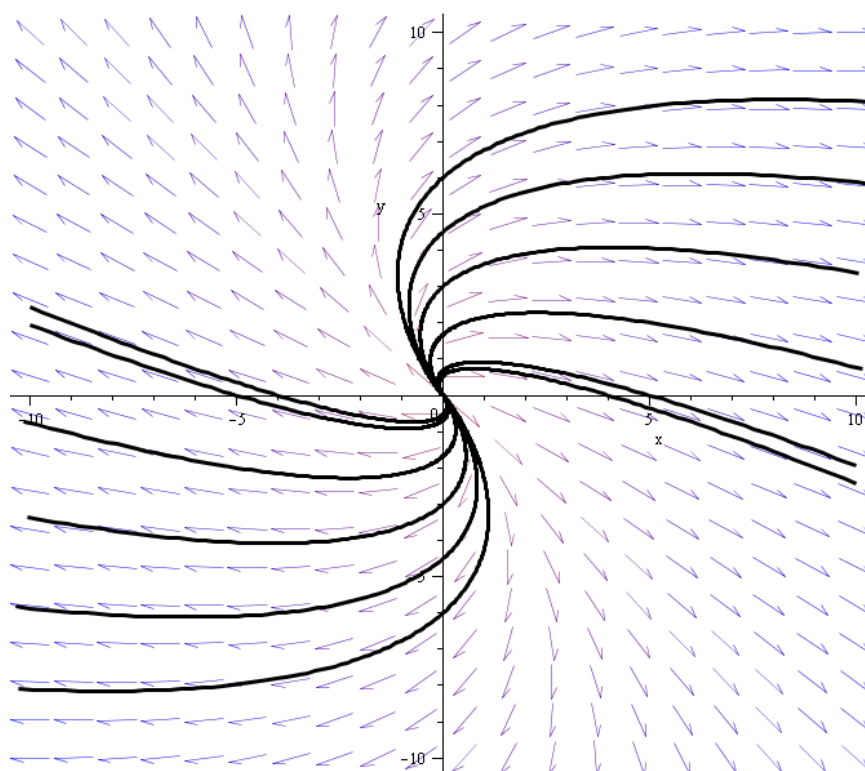
5.3. Нестійкий фокус.



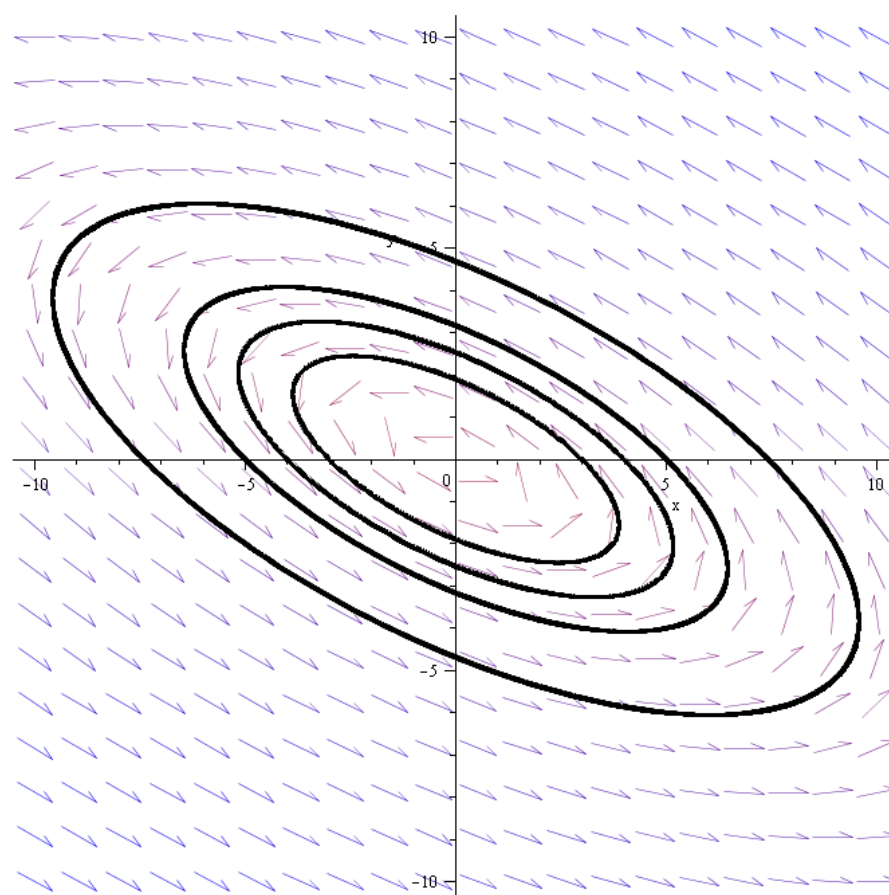
5.4. Стійкий фокус.



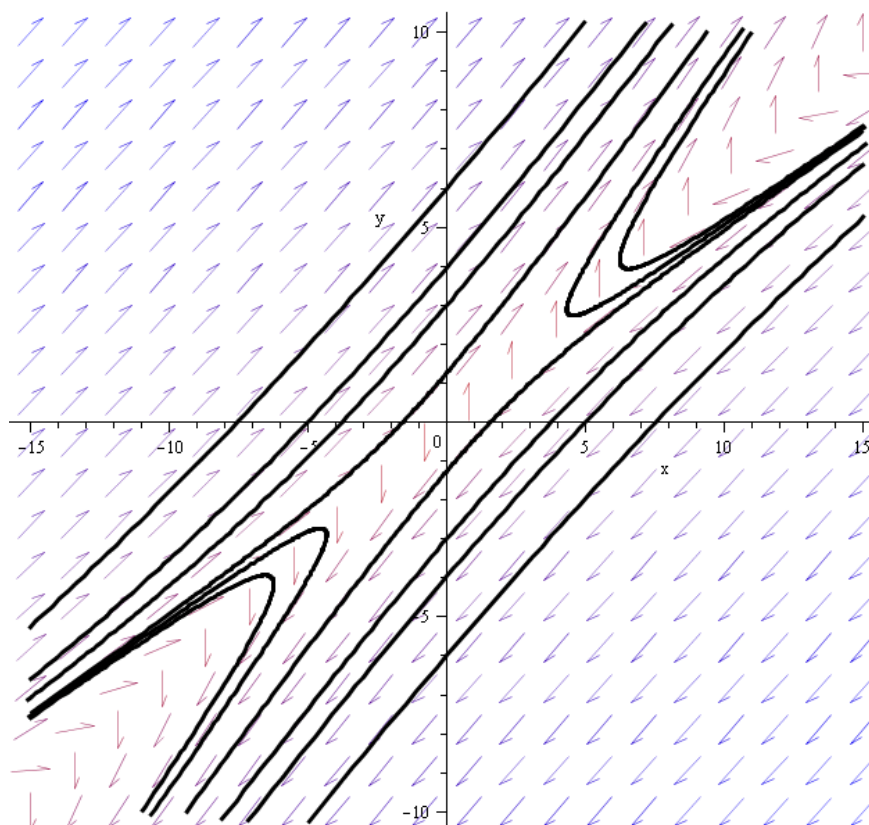
5.5. Вироджений вузол.



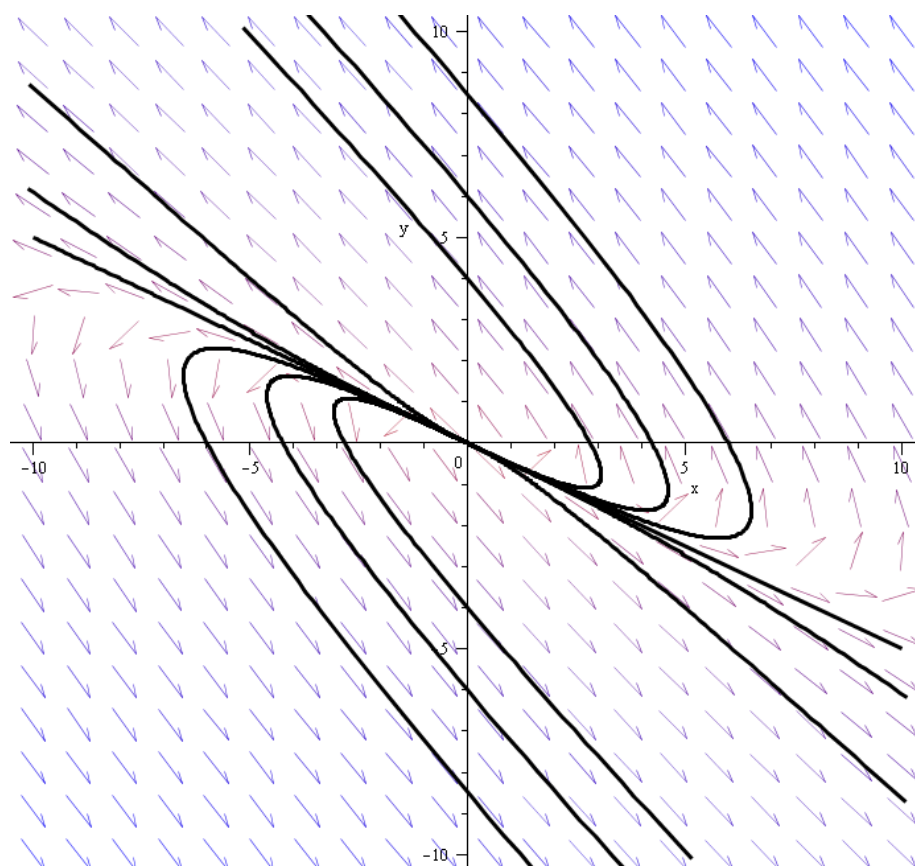
5.6. Центр.



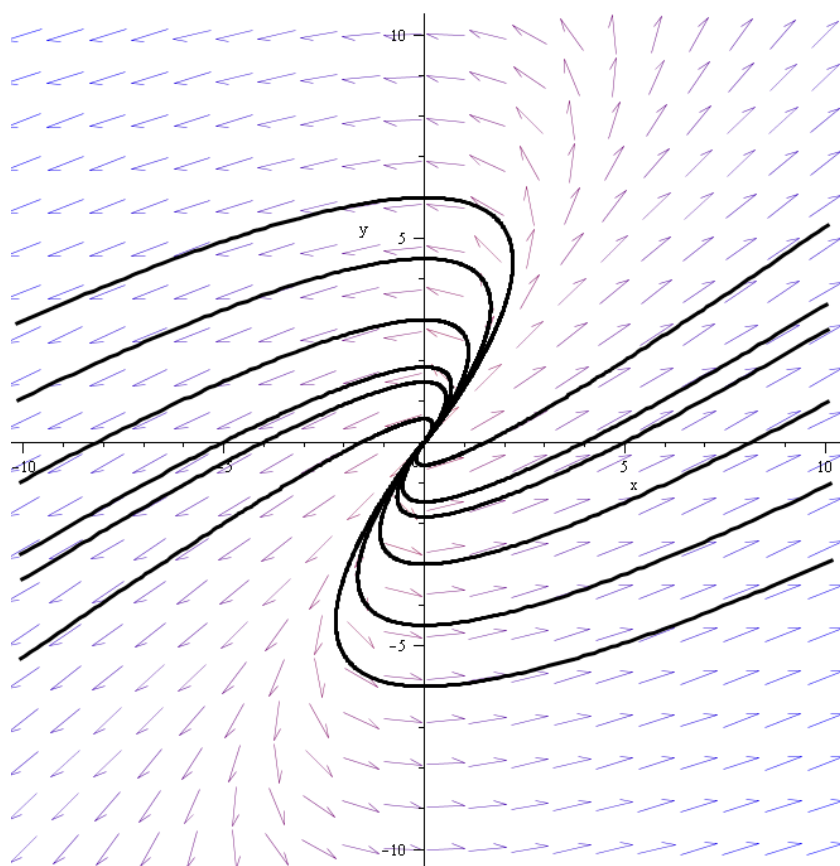
5.7. Сідло.



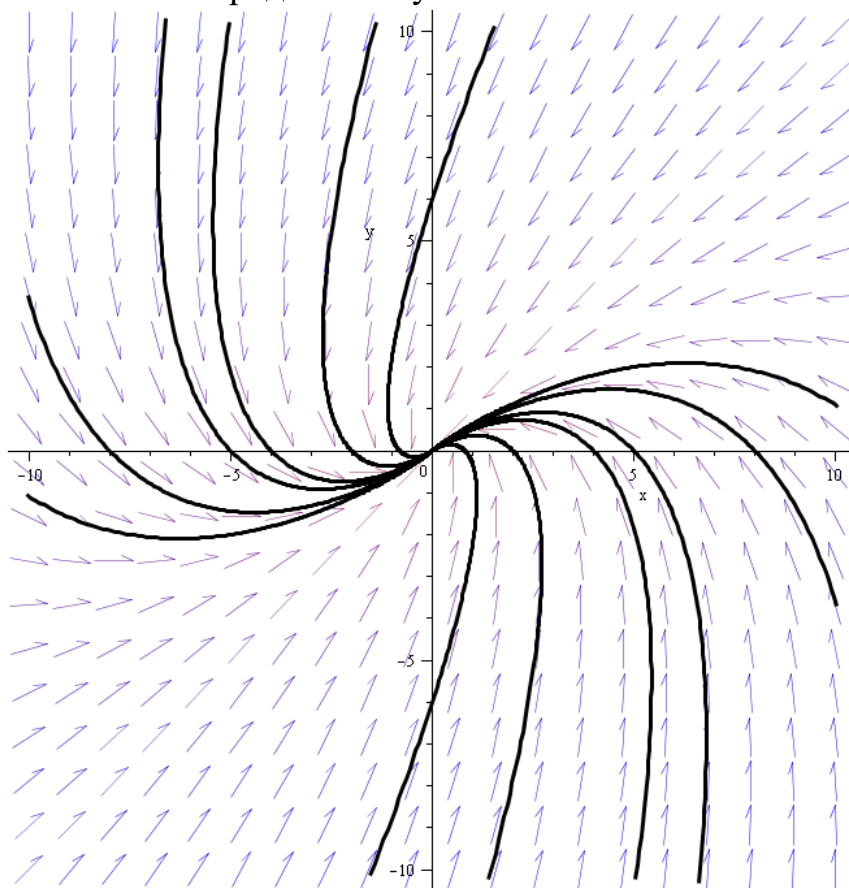
5.8. Нестійкий вузол.



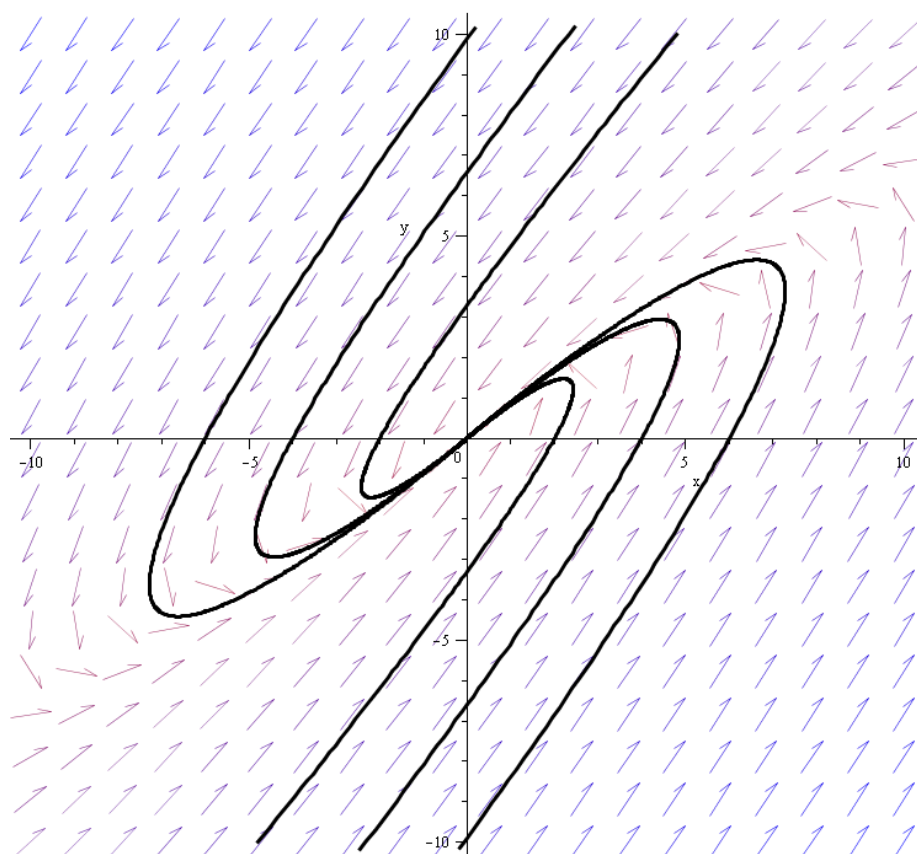
5.9. Нестійкий вироджений вузол.



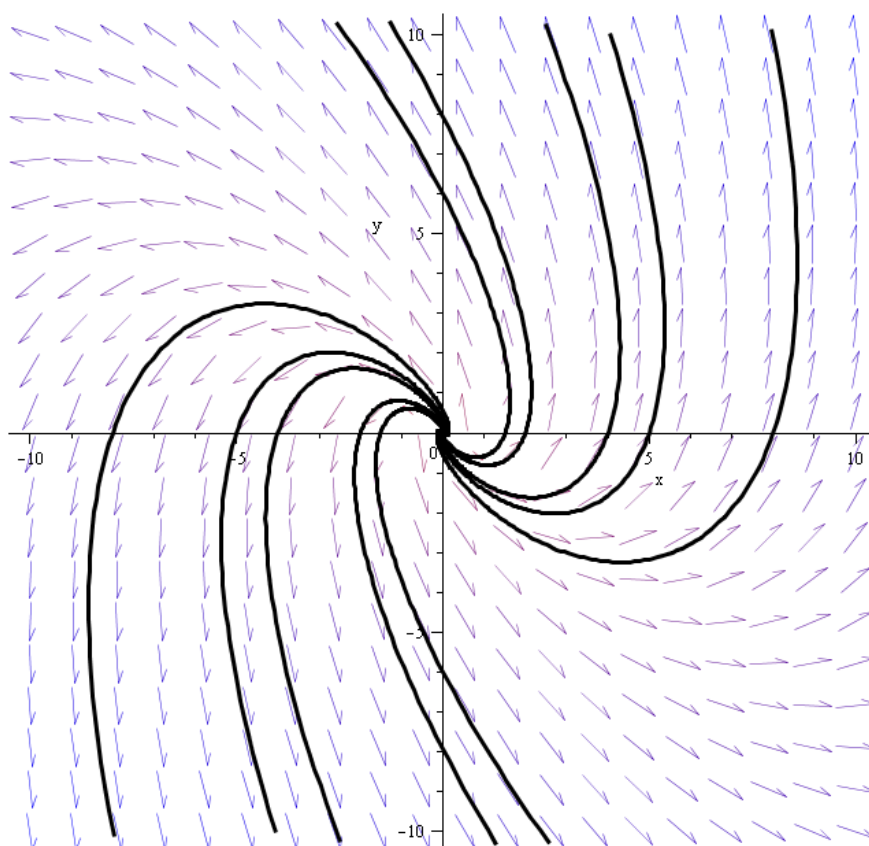
5.10. Стійкий вироджений вузол.



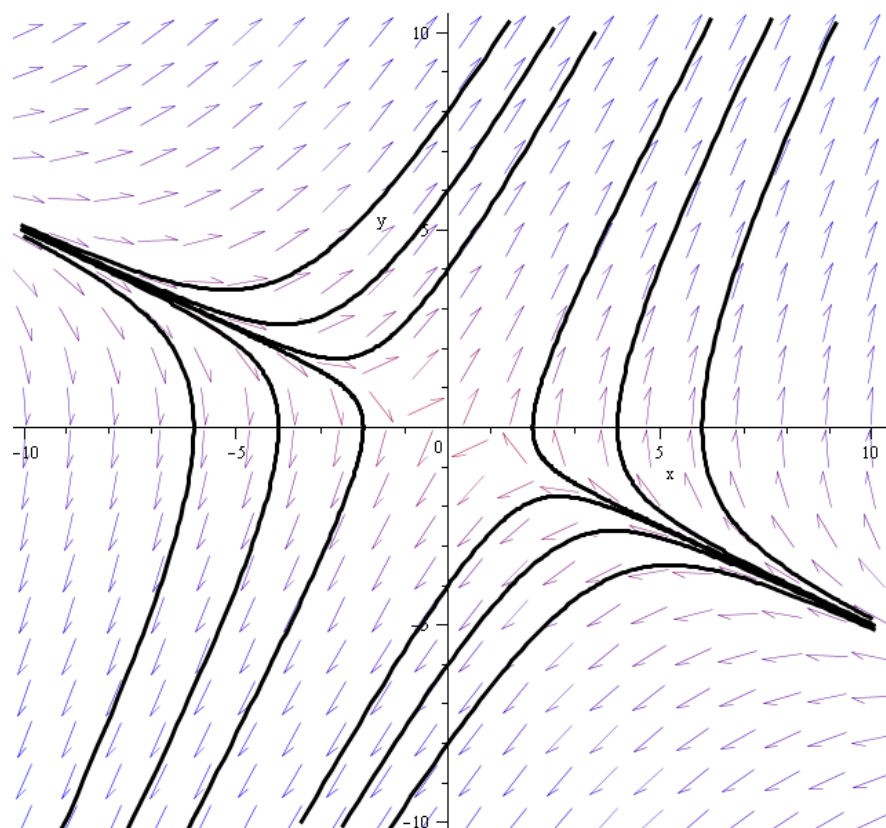
5.11. Стійкий вироджений вузол.



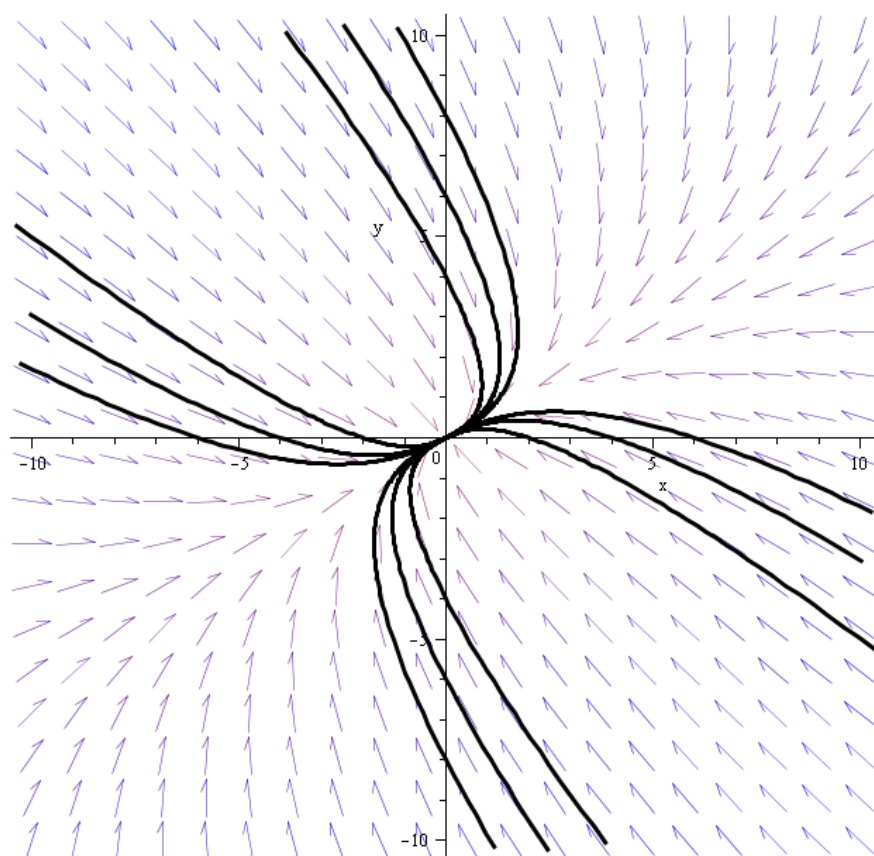
5.12. Нестійкий фокус.



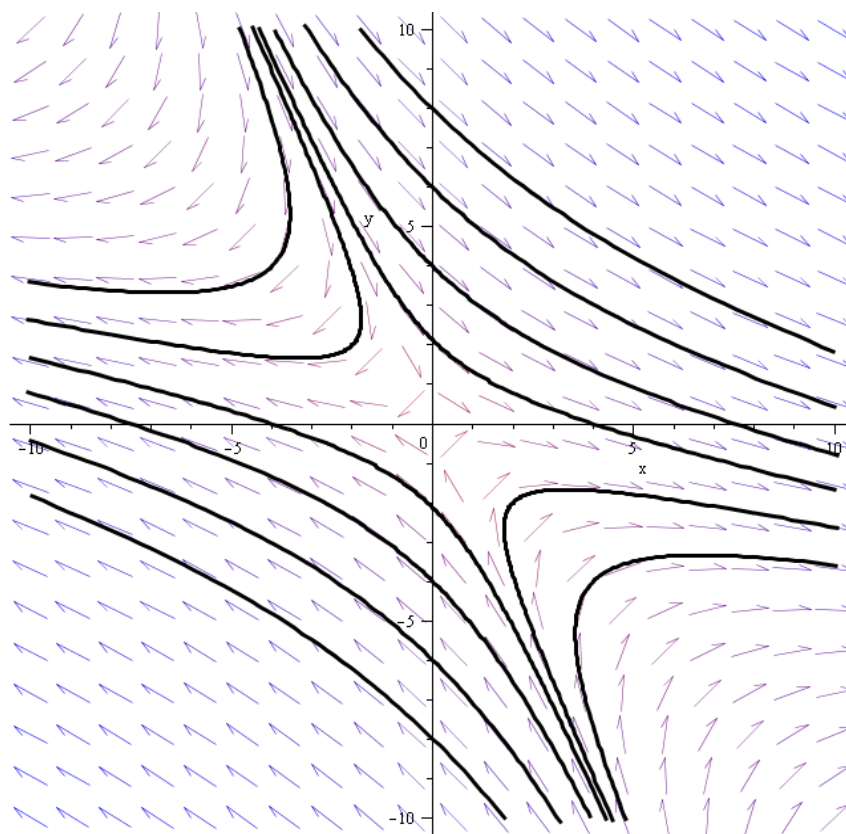
5.13. Сідло.



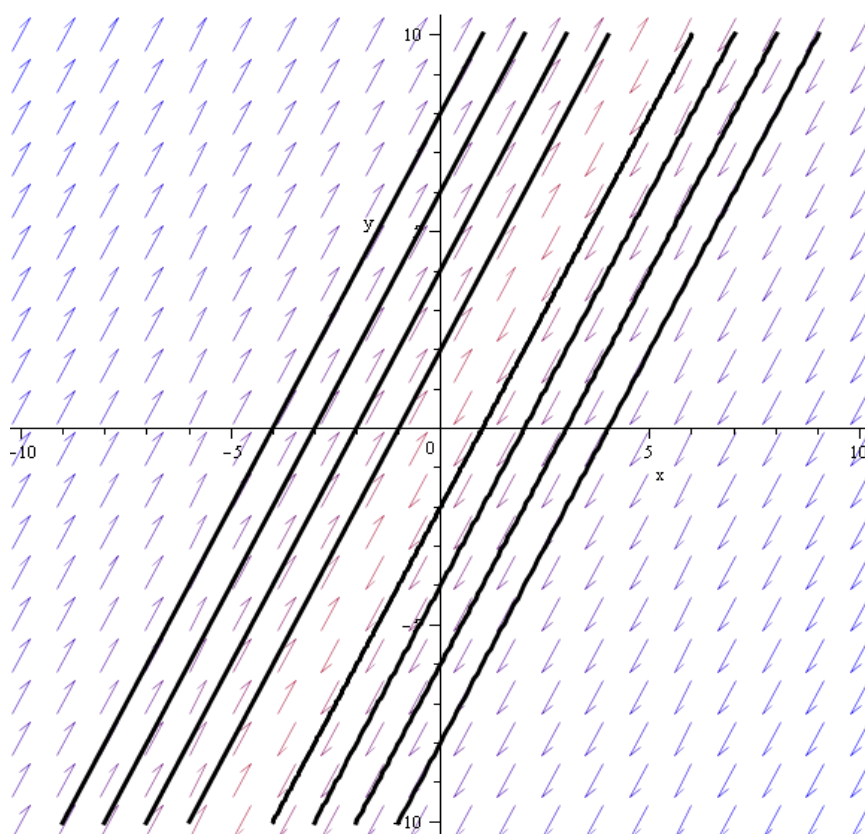
5.14. Стійкий вузол.



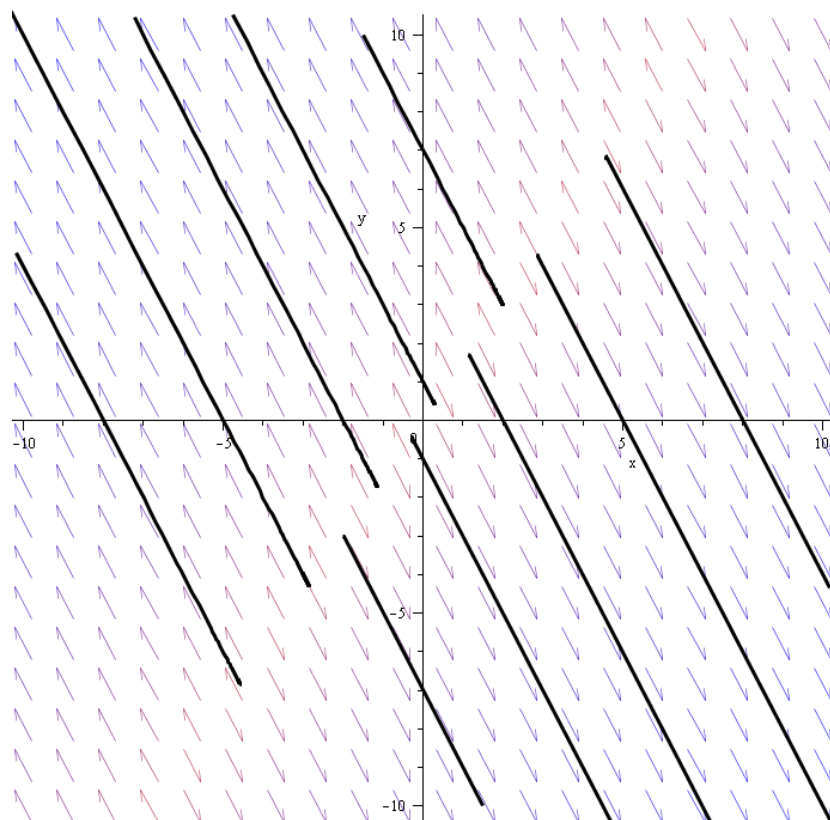
5.15. Сідло.



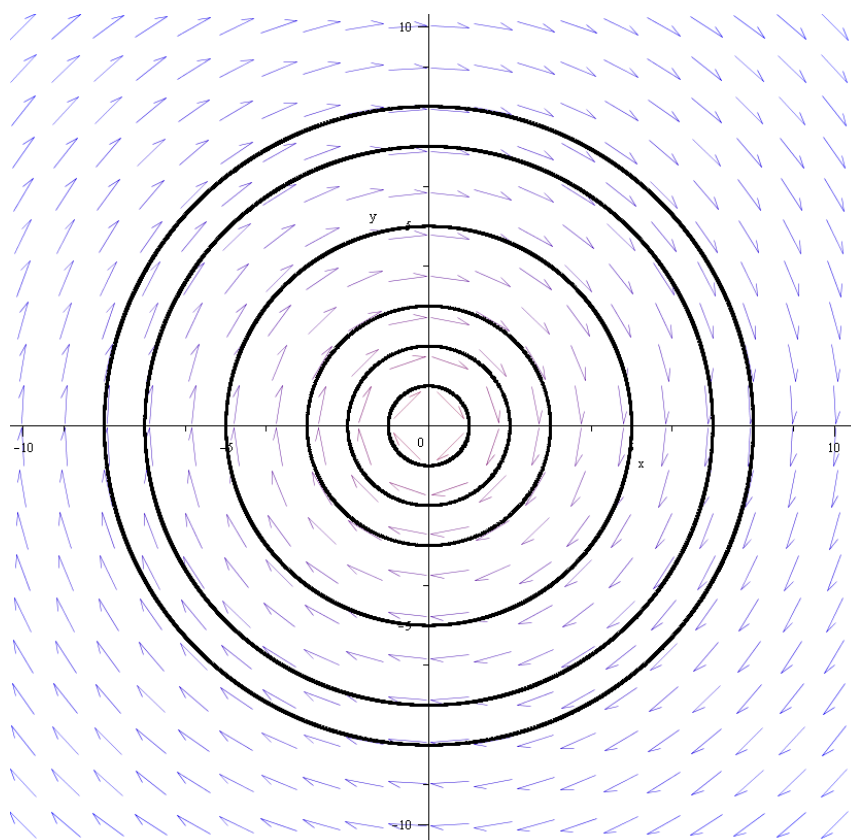
5.16. Особливі точки заповнюють пряму лінію.



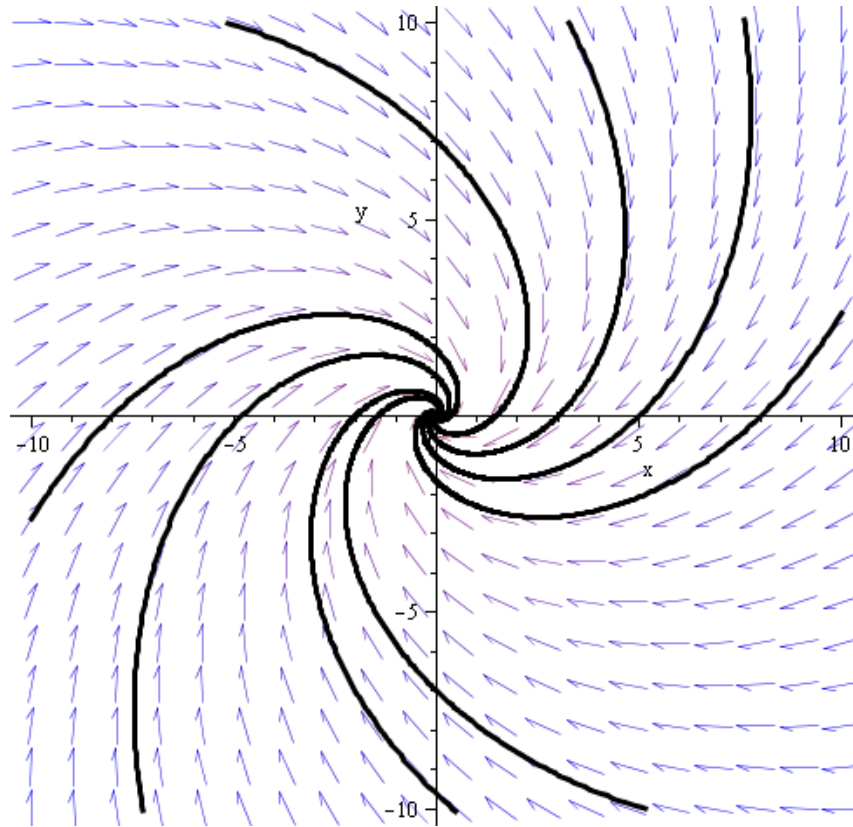
5.17. Особливі точки заповнюють промені.



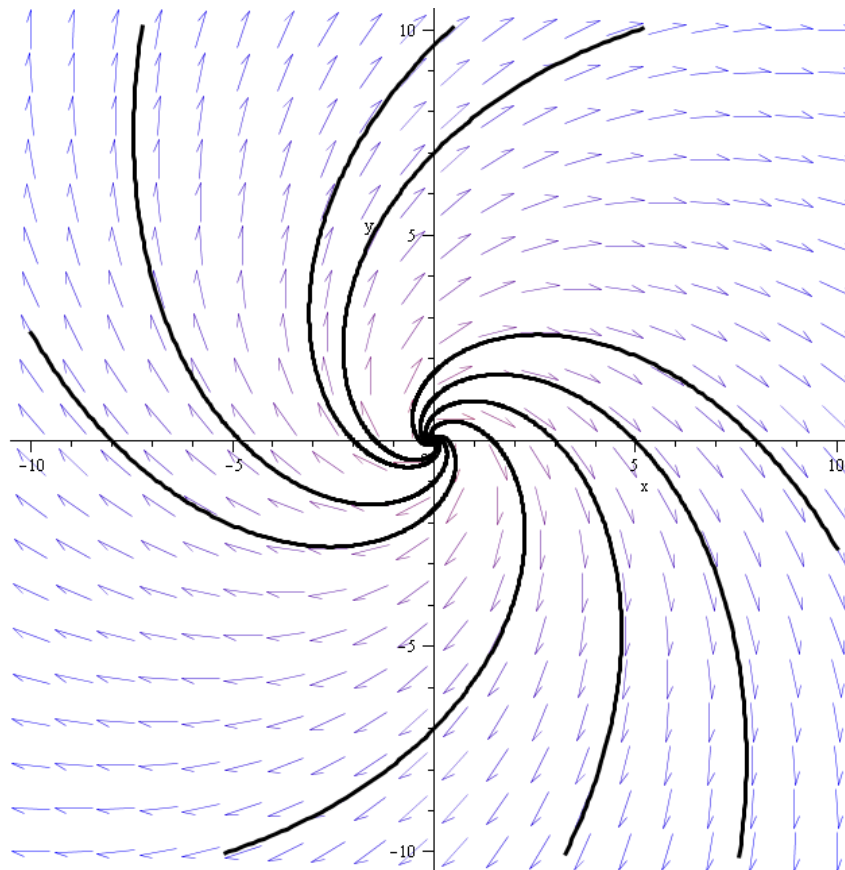
5.18. Якщо $\alpha = 0$, то центр;



Якщо $\alpha < 0$, то стійкий фокус;



Якщо $\alpha > 0$, то нестійкий фокус.



6. СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ

Нехай виконуємо дослідження певних двох процесів. Побудували їх математичні моделі, які записуються такими двома диференціальними рівняннями:

$$x' = -x, \quad (6.1)$$

$$x' = x \quad (6.2)$$

де $x(t)$ – невідома функція, $t \in [0; +\infty)$. Розв’яжемо ці рівняння:

$$x_1(t) = Ce^{-t} \text{ – загальний розв’язок рівняння (6.1),}$$

$$x_2(t) = Ce^t \text{ – загальний розв’язок рівняння (6.2).}$$

Задамо початкову умову

$$x(0) = x_0.$$

Тоді $x_1(t) = x_0 e^{-t}$, $x_2(t) = x_0 e^t$.

Що буде, якщо початкову умову x_0 трохи змінити

$$x_0 \rightarrow x_0 + \delta ?$$

Тоді розв’язки будуть:

$$x_1^*(t) = (x_0 + \delta)e^{-t},$$

$$x_2^*(t) = (x_0 + \delta)e^t.$$

Абсолютні різниці відповідних розв’язків будуть поводити себе при збільшенні аргумента t протилежним чином:

$$|x_1(t) - x_1^*(t)| = |\delta|e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ – різниця прямує до нуля.}$$

$$|x_2(t) - x_2^*(t)| = |\delta|e^t \text{ – зі збільшенням } t \text{ різниця збільшується.}$$

Таким чином, якщо в процесі експериментального визначення початкового значення $x(0)$ припуститися певної помилки δ (замість $x(0) = x_0$ отримали $x(0) = x_0 + \delta$), то для рівняння (6.1) розв’язки $x_1^*(t)$ та $x_1(t)$ будуть мало відрізнятись. Навіть зі збільшенням часу t їх різниця буде зменшуватись. Тобто висновки по експерименту, зроблені на основі аналізу неточного розв’язку $x_1^*(t)$ будуть доволі достовірними. Цього не можна сказати про

розв'язки (6.2). Навпаки, навіть мала похибка початкового значення приведе до значної відмінності у значеннях $x_2^*(t)$ та $x_2(t)$ при збільшенні t .

Ці приклади показують, що важливо знати, як залежать розв'язки диференціальних рівнянь від вибору початкових даних.

Для дослідження зазначеної залежності наприкінці XIX ст. О. М. Ляпуновим було створено строгу теорію стійкості.

Розглянемо систему

[illegible]

визначену в області $G = [b; +\infty) \times D$. Тут $t \in [b; +\infty)$, область $D \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$.

Припустимо, що для довільних початкових даних $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) \in G$ розв'язок задачі Коші для системи (6.3) існує і єдиний. Далі використовуємо стандартне позначення для норми вектора

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \|a\| = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}.$$

Означення 6.1. Розв'язок $x^* = (x_1^*(t), \dots, x_n^*(t))$ системи (6.3) називається **стійким за Ляпуновим** при $t \rightarrow +\infty$, якщо

- 1) цей розв'язок існує $\forall t \in [b; +\infty)$;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \geq b \quad \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, що для кожного $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$, такого, що $\|x_0 - x^*(t_0)\| < \delta$ розв'язок $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ системи (6.3), що задовольняє початкову умову $x(t_0) = x_0$ існує на $[t_0; +\infty)$ і $\forall t \geq t_0$ правильна нерівність $\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$.

Друга умова геометрично означає, що графік будь-якого розв’язку, який виходить з δ -околу точки $x^*(t_0)$ повинен належати ε -трубці графіка розв’язку $x^*(t)$ на проміжку $t \in [t_0; +\infty)$ (Рис. 6.1).

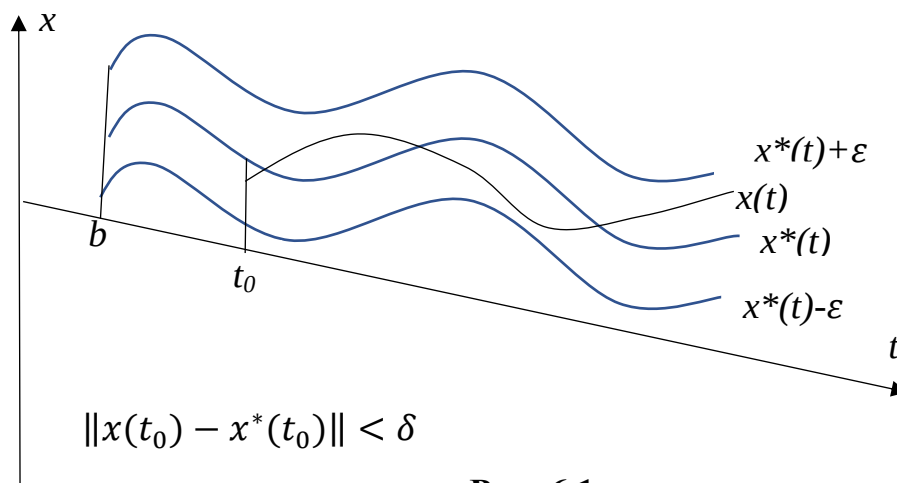


Рис. 6.1.

Означення 6.2. Розв'язок $x^*(t)$ називається **нестійким**, якщо порушується хоча б одна з умов стійкості попереднього означення.

Для нестійкого розв'язку $x^*(t)$ $\exists \varepsilon$ і $\exists t_0$ такі, що $\forall \delta > 0$ буде існувати такий розв'язок $x(t)$, графік якого виходить з δ -околу точки $x^*(t_0)$, тобто $\|x^*(t_0) - x(t_0)\| < \delta$, але при певному $t = t(\varepsilon, t_0, \delta) > t_0$ буде доходити до межі трубки (або навіть виходити за неї), тобто $\|x(t) - x^*(t)\| \geq \varepsilon$.

Означення 6.3. Розв'язок $x^*(t)$ системи (6.3) називається **асимптотично стійким за Ляпуновим** при $t \rightarrow +\infty$, якщо

- 1) розв'язок $x^*(t)$ - стійкий за Ляпуновим;
- 2) для довільного $t_0 \geq b$ будь-який розв'язок $x(t)$, що виходить з δ -околу точки $x^*(t_0)$, прямує до $x^*(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Тобто

$$\forall t_0 \geq b \quad \exists \delta(t_0) > 0 \quad \forall x_0: \|x_0 - x^*(t_0)\| < \delta \text{ розв'язок } x(t) \text{ системи (6.3), що задовольняє початкову умову } x(t_0) = x_0, \text{ існує на } [t_0; +\infty) \text{ і}$$

$$\|x(t) - x^*(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Якщо розв'язок $x^*(t)$ існує при $t \in [b; +\infty)$, то задачу про його стійкість можна звести до задачі про стійкість тривіального (нульового) розв'язку деякої допоміжної системи. Покажемо це. Запишемо систему (6.3) скорочено у вигляді

$$x' = f(t, x).$$

Тут $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$, вектор-функція

$$f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x)).$$

Зробимо лінійну заміну

$$y = x - x^*.$$

Тоді

$$x = y + x^*; \quad x' = y' + (x^*)'.$$

Робимо підстановку в систему

$$y' + (x^*)' = f(t, y + x^*),$$

Оскільки x^* - розв'язок системи, тобто $(x^*)' = f(t, x^*)$, то

$$y' = f(t, y + x^*) - f(t, x^*) \equiv F(t, y) \quad (6.4)$$

Це допоміжна система, що має тривіальний розв'язок $y = 0$.

Правильне таке твердження. Розв'язок x^* системи (6.3) стійкий (асимптотично стійкий) тоді і тільки тоді, коли розв'язок $y = 0$ допоміжної системи (6.4) буде стійким (асимптотично стійким).

Перейдемо до дослідження стійкості розв'язків **лінійних** систем. Розглянемо лінійну однорідну систему

$$X' = A(t) X \quad (6.5)$$

з неперервними на $[b; +\infty)$ коефіцієнтами. Нехай $X^*(t)$ довільний розв'язок системи (6.5). За теоремою існування і єдиності розв'язку задачі Коші для ЛОС (6.5) розв'язок $X^*(t)$ буде існувати для будь-якого $t \in [b; +\infty)$. Зробимо заміну $Y = X - X^*$ і перейдемо до допоміжної системи

$$X = Y + X^* \Rightarrow X' = Y' + (X^*)',$$

$$Y' + (X^*)' = A(t) (Y + X^*),$$

врахуємо, що $(X^*)' = A(t) X^*$ та $A(t) (Y + X^*) = A(t)Y + A(t) X^*$, тоді

$$Y' = A(t) Y. \quad (6.6)$$

Оскільки X^* - розв'язок системи (6.5), то $Y = 0$ – розв'язок допоміжної системи (6.6). Причому помітимо важливу річ: матриці цих систем співпадають. Тобто початкова система та допоміжна – це одна і та сама система. Таким чином характер стійкості довільного розв'язку X^* системи (6.5) повністю визначається характером стійкості її **тривіального розв'язку**. Тому всі

розв'язки системи (6.5) щодо стійкості поведуть себе однаково – вони одночасно або стійкі (асимптотично стійкі), або нестійкі. Отже, *можемо говорити про стійкість (асимптотичну стійкість) чи нестійкість лінійної системи.*

Сформулюємо умови стійкості лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Нехай

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A} \mathbf{X} \quad (6.7)$$

лінійна однорідна система зі сталими коефіцієнтами.

Теорема 6.1.

1) Для того, щоб система (6.7) була стійкою, необхідно і достатньо, щоб дійсні частини всіх власних значень матриці $\mathbf{A}$ були **недодатними** (для всіх $k : \operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$), причому кожному власному значенню з нульовою дійсною частиною відповідало стільки лінійно незалежних власних векторів, яка кратність цього числа як кореня характеристичного многочлена

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

(тобто кожному λ_m , де $\operatorname{Re} \lambda_m = 0$ відповідала одномірна клітина Жордана).

2) Для асимптотичної стійкості системи (6.7) необхідно і достатньо, щоб всі дійсні частини всіх власних значень матриці $\mathbf{A}$ були **від'ємні**.

Наслідок. Якщо в матриці $\mathbf{A}$ системи (6.3) існує j таке, що $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, то система (6.7) – **нестійка**. Якщо існує j таке, що $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ і числу λ_j відповідає така кількість власних векторів, що менша його кратності (тобто λ_j відповідає неодномірній клітині Жордана), то система (6.7) – **нестійка**.

Отже, для дослідження на стійкість лінійних систем необхідно знати знаки дійсних частин коренів характеристичного рівняння. У випадку, коли треба визначити саме асимптотичну стійкість можна самі корені не шукати, а скористатись наступним критерієм.

Теорема 6.2 (Критерій Рауса-Гурвіца).

Дійсні частини всіх коренів рівняння

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad \text{де } a_0 > 0$$

від'ємні тоді і тільки тоді, коли додатні всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

тобто коли

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0.$$

Для утворення матриці Гурвіца (вона має розмір $n \times n$, де n – степінь многочлена) на головну діагональ виписуємо коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n$. Далі в кожному рядку від коефіцієнта, що стоїть на головній діагоналі ліворуч записуємо коефіцієнти зі збільшенням індекса, праворуч – зі зменшенням. Решту позицій заповнюємо нулями. Наприклад, для многочлена четвертого степеня матриця Гурвіца матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Тепер розглянемо питання, як досліджувати на стійкість положення рівноваги **нелінійної** автономної системи. В багатьох випадках відповідь на нього отримують шляхом лінеаризації нелінійної системи та застосуванням теореми про стійкість за першим наближенням.

Нехай задано n -вимірну автономну систему

нього для випадків, коли дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні, або є хоча б одне власне значення з додатною дійсною частиною дають наступні теореми.

Теорема 6.3. (про стійкість за першим наближенням)

Нехай $f(x) \in C^1(B_r(x_0))$ і $f(x_0) = 0$. Якщо дійсні частини всіх власних значень матриці $A = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$ від'ємні, то x_0 – **асимптотично стійке** положення рівноваги системи (6.8).

Теорема 6.4. (про нестійкість)

Якщо серед власних чисел матриці A знайдеться хоча б одне з додатною дійсною частиною, то x_0 – **нестійке** положення рівноваги системи (6.8).

Більш складний випадок, коли дійсні частини всіх власних значень матриці A не є додатними, але є хоча б одне власне число з нульовою дійсною частиною. Для дослідження такої ситуації використовують **метод функцій Ляпунова**. Опишемо його. Надалі розглядаємо автономну систему (6.8) з припущенням, що її положенням рівноваги є точка $x_0 = 0$, тобто $f(0) = 0$. Випадок $x_0 \neq 0$ зводиться до цього заміною $y = x - x_0$.

Нехай $v(x) = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функція змінної $x \in \mathbb{R}^n$, визначена й неперервно диференційована в деякій кулі радіуса $r > 0$ з центром в початку координат

$$B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}.$$

Означення 6.4. Функція $v(x)$ називається **додатно (від'ємно) визначеною** в кулі $B_r(0)$, якщо

- 1) $v(0) = 0$,
- 2) для всіх $x \in B_r(0) \setminus \{0\}$ виконується нерівність $v(x) > 0$ ($v(x) < 0$).

Додатно і від'ємно визначені в $B_r(0)$ функції називають **знаковизначеними** в $B_r(0)$ функціями.

Розглянемо тепер в кулі $B_r(0)$ автономну систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (6.9)$$

Де, як завжди, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Припустимо, що $f(x) \in C^1(B_r(0))$, тобто f визначена і неперервно-диференційовна в кулі $B_r(0)$.

Означення 6.5. Похідною функції $v(x) \in C^1(B_r(0))$ в силу системи (6.9) називають функцію

$$v_f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \cdot f_i(x) = (\text{grad} v(x), f(x)). \quad (6.10)$$

Нехай $x = x(t)$ — деякий розв'язок системи (6.9). На множині значень $\{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t), t \in (b, +\infty)\}$ цього розв'язку функція $v = v(x(t))$ як функція змінної t неперервно диференційована і її похідна $\frac{dv}{dt}$ визначається за формулою диференціювання складеної функції:

$$\frac{dv(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x(t))}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i(t)}{dt}. \quad (6.11)$$

Врахуємо, що згідно з (6.9) правильні рівності $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x)$ для всіх $i = 1, \dots, n$.

Тоді з (6.10) та (6.11) отримаємо

$$\frac{dv(x(t))}{dt} = v_f(x(t)).$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \frac{dv(x(t))}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x(t))}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x(t))}{\partial x_i} \cdot f_i(x(t)) \\ &= (\text{grad} v(x(t)), f(x(t))) = v_f(x(t)). \end{aligned}$$

Означення 6.6. Нехай неперервно диференційована в кулі $B_r(0)$ функція $v(x)$ задовольняє такі умови:

- 1) $v(x)$ додатно визначена в $B_r(0)$,

2) $v_f(x) \leq 0$ для всіх $x \in B_r(0)$ (не виключається випадок $v_f(x) \equiv 0$), тоді функцію $v(x)$ називають **функцією Ляпунова** системи (6.9).

Теорема 6.5. (Теорема Ляпунова про стійкість)

Якщо в деякій кулі $B_r(0)$ для системи рівнянь (6.9) існує функція Ляпунова, то нульовий розв'язок $x = 0$ системи рівнянь (6.9) стійкий за Ляпуновим.

Теорема 6.6. (Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість)

Якщо в деякій кулі $B_r(0)$ для системи рівнянь (6.9) існує функція Ляпунова і додатково функція $v_f(x)$ є від'ємно визначеною, то нульовий розв'язок системи рівнянь (6.9) — асимптотично стійкий.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1

Використовуючи означення стійкості дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші в залежності від значень параметра a .

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{t}x, \quad x(1) = 0, \quad t \in [1, \infty).$$

Розв'язання:

Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\frac{dx}{x} = a \frac{dt}{t}, \quad \rightarrow \quad x(t) = ct^a, c \in \mathbb{R}.$$

Множина функцій $x(t) = ct^a$, залежних від параметра c , описує всі розв'язки рівняння. Відмітимо, що стала c є початковим даним розв'язку при $t = 1$, тобто $x(1) = c$. Розв'язком задачі Коші з початковою умовою $x(1) = 0$ буде функція $x_0(t) = 0$. Цей розв'язок маємо дослідити на стійкість. Згідно означення стійкості розглянемо різницю між довільним розв'язком рівняння $x(t) = ct^a, c \neq 0$ та досліджуваним розв'язком $x_0(t) = 0$ коли початкові умови для цих розв'язків задовольняють нерівність

$$\|x(1) - x_0(1)\| = |x(1) - x_0(1)| = |c - 0| = |c| < \delta.$$

Маємо:

$$\|x(t) - x_0(t)\| = |x(t) - x_0(t)| = |ct^a - 0| = |c|t^a$$

Отже,

якщо $a = 0$, $\|x(t) - x_0(t)\| = |x(t) - x_0(t)| = |c| < \varepsilon$ при $\delta = \varepsilon$, але при цьому $\|x(t) - x_0(t)\| = |c| \nrightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, тобто в цьому випадку $x = 0$ – стійкий, але не асимптотично;

якщо $a < 0$, $\|x(t) - x_0(t)\| = |x(t) - x_0(t)| = |c|t^a \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, тобто в цьому випадку $x = 0$ – асимптотично стійкий (тим паче і стійкий також);

якщо $a > 0$, то яке б мале значення початкової умови $|c| \neq 0$ не взяли, отримаємо $\|x(t) - x_0(t)\| = |x(t) - x_0(t)| = |c|t^a \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Таким чином, розв’язок $x = 0$ даного диференціального рівняння стійкий для $a \leq 0$, асимптотично стійкий для $a < 0$, нестійкий для $a > 0$.

Приклад 2

Дослідити на стійкість розв’язок задачі Коші:

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t - x, \quad x(0) = 0, \quad t > 0.$$

Розв’язання:

Спочатку знайдемо загальний розв’язок даного диференціального рівняння.

Почнемо з розв’язку відповідного однорідного диференціального рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dx}{x} = -dt, \rightarrow x = ce^{-t} - \text{розв’язок однорідного рівняння.}$$

Тепер знайдемо розв’язок неоднорідного рівняння методом Лагранжа:

$$x(t) = c(t)e^{-t}, \quad x'(t) = c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t}$$

Підставимо $x(t)$ та $x'(t)$ у вихідне рівняння та одержимо:

$$c'(t) = (1+t)e^t \rightarrow c(t) = \int (1+t)e^t dt = te^t + c_0, \quad c_0 - \text{const}$$

Отже, загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$x(t) = (te^t + c_0)e^{-t} = t + c_0e^{-t}$$

Шуканий розв'язок, що задовольняє початкову умову $x(0) = 0$ буде $x_0(t) = t$. Розглянемо

$$\|x(t) - x_0(t)\| = |x(t) - x_0(t)| = |c_0|e^{-t} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

тобто $x_0(t) = t$ – асимптотично стійкий розв'язок.

Відмітимо, що для даного в умові диференціального рівняння будь-який розв'язок буде асимптотично стійкий. Цей висновок можна зробити, наприклад, з того, що рівняння є лінійним з неперервними коефіцієнтами. Це означає, що всі його розв'язки щодо стійкості поведуть себе однаково. Або в цьому можна переконатись за означенням. Дійсно, нехай $x_0(t) = t + x_0 e^{-t}$ довільний розв'язок рівняння, що задовольняє початкову умову $x(0) = x_0$. Тоді

$$\|x(t) - x_0(t)\| = |x(t) - x_0(t)| = |c_0 - x_0|e^{-t} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

тобто $x = x_0(t)$ – асимптотично стійкий розв'язок.

Приклад 3

Дослідити на стійкість систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 5y \end{cases}$$

Розв'язання:

Знайдемо власні числа матриці системи:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda - 5)^2 + 9 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 5 \pm 3i$$

Оскільки є власне число з додатною дійсною частиною (в цьому випадку обидва власні числа мають додатну дійсну частину $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 5 > 0$), робимо висновок, що система нестійка.

Приклад 4

Дослідити на стійкість систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y \end{cases}$$

Розв'язання:

Знайдемо власні числа матриці системи:

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda + 2)^2 - 1 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3.$$

Оскільки обидва власні числа мають від'ємну дійсну частину, то система асимптотично стійка.

Приклад 5

Дослідити на стійкість систему диференціальних рівнянь в залежності від параметра a :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + 7y \\ \frac{dy}{dt} = 5y \end{cases}$$

Розв'язання:

Знайдемо власні числа матриці системи:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 7 \\ 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (a - \lambda)(5 - \lambda) = 0.$$

Не залежно від значення параметра a маємо одне дійсне додатне власне значення $\lambda = 5$. Тому система не стійка.

Приклад 6

Дослідити на стійкість систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Розв'язання:

Знайдемо власні числа матриці системи:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i$$

Обидва власні значення мають нульову дійсну частину. Кратність кожного власного значення дорівнює одиниці. Тому кожному з них буде відповідати по одному власному вектору. Отже, система стійка.

Відмітимо, що ця система не асимптотично стійка. Фазовий портрет системи будуть утворювати концентричні кола з центрами у початку координат. Положення рівноваги $(0,0)$ – стійкий центр.

Приклад 7

Дослідити стійкість положень рівноваги математичного маятника, який здійснює вільні затухаючі коливання (в середовищі з опором) та має рівняння руху

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \sin x = 0.$$

Тут $x = x(t)$ – кут відхилення від положення рівноваги.

Розв'язання:

Рівняння коливань є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Шляхом введення додаткової невідомої функції перейдемо від рівняння до системи двох рівнянь першого порядку. Позначимо

$$y = \frac{dx}{dt}.$$

Функція $y = y(t)$ визначає швидкість руху маятника. Перше рівняння набуде вигляду:

$$\frac{dy}{dt} + y + \sin x = 0.$$

Отже, одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\sin x - y \end{cases}$$

Положення рівноваги визначаються розв'язками системи:

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\sin x - y = 0. \end{cases}$$

Розв'язками даної системи є множина точок $(x, y) = (n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки точки $(2\pi k, 0)$ та $(\pi + 2\pi k, 0)$ не залежно від $k \in \mathbb{Z}$ задають два положення рівноваги (нижнє і верхнє, відповідно), то розглянемо стійкість двох розв'язків системи диференціальних рівнянь:

$x = 0, y = 0$ – нижнє положення рівноваги,

$x = \pi, y = 0$ – верхнє положення рівноваги.

Наша система диференціальних рівнянь є нелінійною. Для дослідження вибраних положень рівноваги лінеаризуємо її в околах точок $(0,0)$ та $(\pi, 0)$ відповідно. Нелінійність в систему вносить лише функція $\sin x$. Тому виділимо її лінійну частину в околах точок $x = 0$ та $x = \pi$:

$$x = 0 : \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \approx x,$$

$$x = \pi : \sin x = -(\pi - x) + \frac{(\pi - x)^3}{3!} - \dots \approx \pi - x.$$

Отже, для точки $(0,0)$ маємо лінеаризовану систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - y. \end{cases}$$

Власні числа матриці системи:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2.$$

Оскільки $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$, то положення рівноваги $(0,0)$ асимптотично стійке. Це узгоджується з фізичними міркуваннями: якщо маятник розташований в нижньому положенні рівноваги в стані спокою і ми його трохи відхилимо, то він почне повертатись в це положення рівноваги. Тут важливу роль грає наявність опору середовища.

Аналогічно, для точки $(\pi, 0)$ лінеаризована система набуде вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x - \pi - y. \end{cases}$$

Власні числа матриці системи:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + \lambda - 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{5}/2.$$

Маємо наявність дійсного додатного власного числа $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} > 0$. Тому положення рівноваги $(\pi, 0)$ нестійке. Це підтверджується і фізичними міркуваннями: якщо маятник розташований у верхньому положенні рівноваги і надати йому як завгодно мале відхилення, то він почне здійснювати коливання відходячи від положення рівноваги.

Приклад 8

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y}, \\ \frac{dy}{dt} = \sin x + \ln(1 - 4y). \end{cases}$$

Розв'язання:

Зазначимо, що пара $x = 0, y = 0$ дійсно є розв'язком системи. Сама система є нелінійною. Тому для дослідження на стійкість її нульового розв'язку спочатку лінеаризуємо її. Введемо позначення:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y}, \\ f_2(x, y) &= \sin x + \ln(1 - 4y). \end{aligned}$$

Лінеаризована система матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тут матриця A :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо відповідні частинні похідні та їх значення в точці $(0,0)$.

$$\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} = -2e^{x+y}|_{(0,0)} = -2,$$

$$\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} = \left(\frac{4}{2\sqrt{4+4y}} - 2e^{x+y} \right) |_{(0,0)} = -1,$$

$$\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} = \cos x |_{(0,0)} = 1,$$

$$\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} = \frac{-4}{1-4y} |_{(0,0)} = -4.$$

Маємо лінеаризовану систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y. \end{cases}$$

Знайдемо власні числа матриці системи:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -3 < 0.$$

Оскільки дійсні частини обох власних значень від'ємні, то нульовий розв'язок даної в умові системи диференціальних рівнянь асимптотично стійкий.

Задачі для самостійного розв'язання

Дослідити на стійкість розв'язки рівнянь, що задовольняють задану початкову умову:

6.1. $\frac{dx}{dt} = t(x-1),$ а) $x(1) = 2,$ б) $x(1) = 0.$

6.2. $\frac{dx}{dt} = (2-t^3)x,$ а) $x(0) = 0,$ б) $x(0) = 1.$

6.3. $\frac{dx}{dt} = x(x^2-1),$ а) $x(0) = 0,$ б) $x(0) = -1.$

Для наступних рівнянь визначити положення рівноваги та дослідити його на стійкість:

6.4. $\frac{dx}{dt} = -x^2.$

6.5. $\frac{dx}{dt} = \sin x - x.$

6.6. $\frac{dx}{dt} = x \sin^3 t.$

6.7. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t^2+1}.$

Дослідити на стійкість системи рівнянь і побудувати фазові портрети:

6.8.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x, \\ \frac{dy}{dt} = x - 5y. \end{cases}$$

6.9.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$$

6.10.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 7y. \end{cases}$$

6.11.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y. \end{cases}$$

6.12.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

6.13.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

6.14.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$$

6.15.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 2y. \end{cases}$$

Відповіді:

6.1. а) Нестійкий; б) нестійкий.

6.2. а) Асимптотично стійкий; б) асимптотично стійкий.

6.3. а) Нестійкий; б) нестійкий.

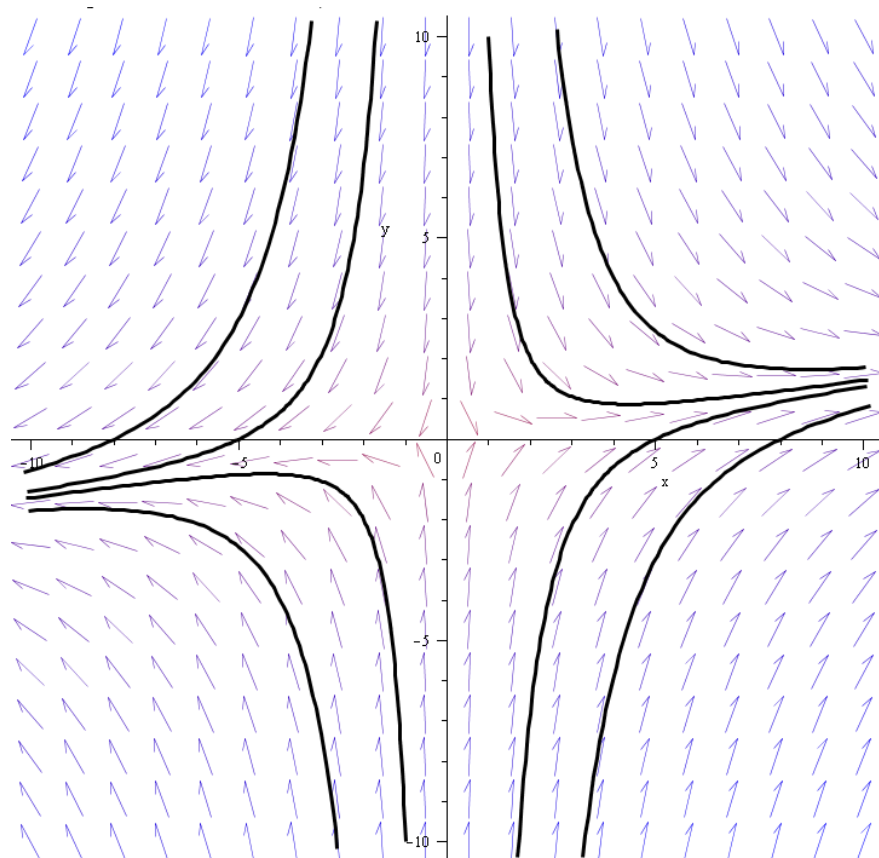
6.4. Нестійкий.

6.5. Асимптотично стійкий.

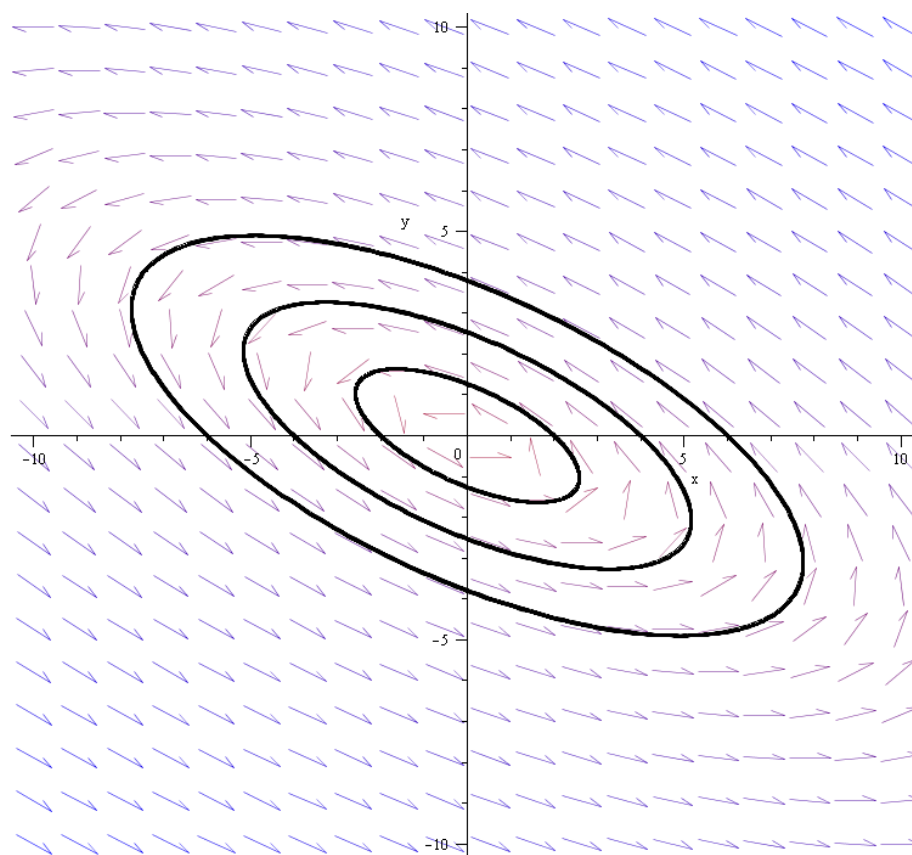
6.6. Стійкий.

6.7. Стійкий.

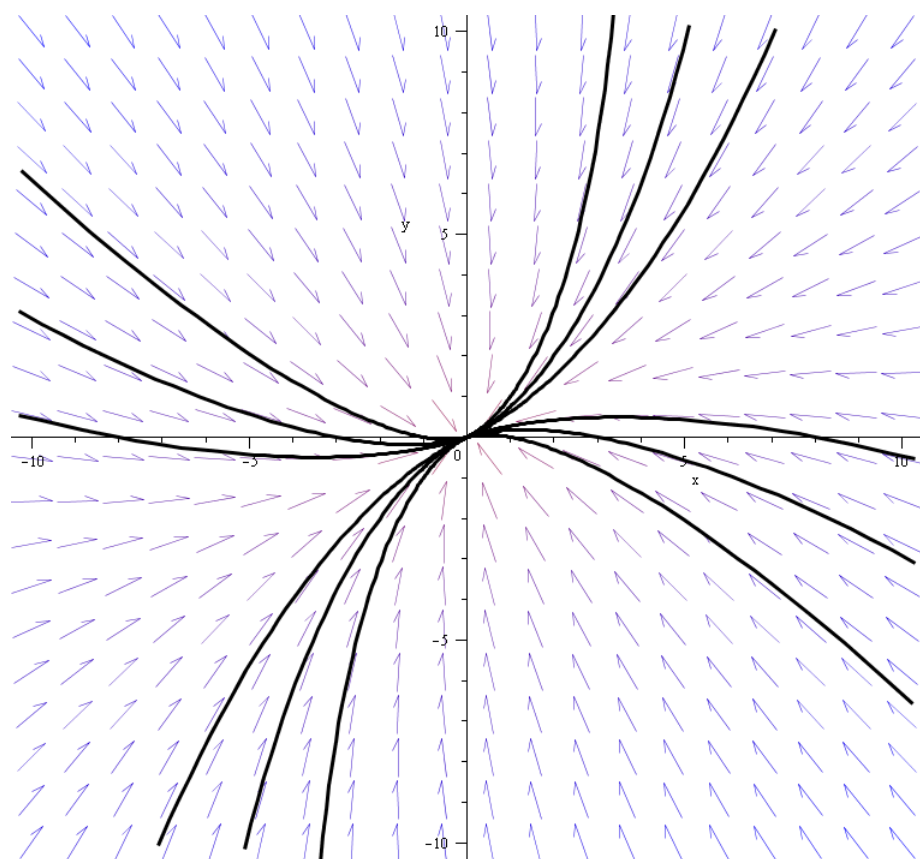
6.8. Нестійка.



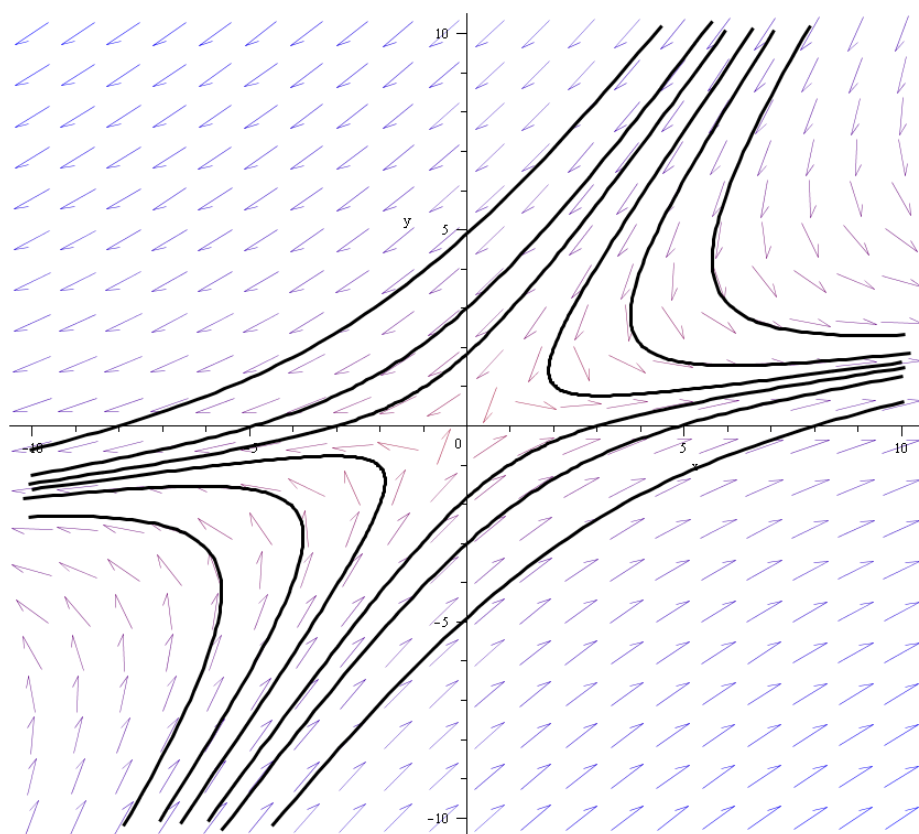
6.9. Стійка, не асимптотично.



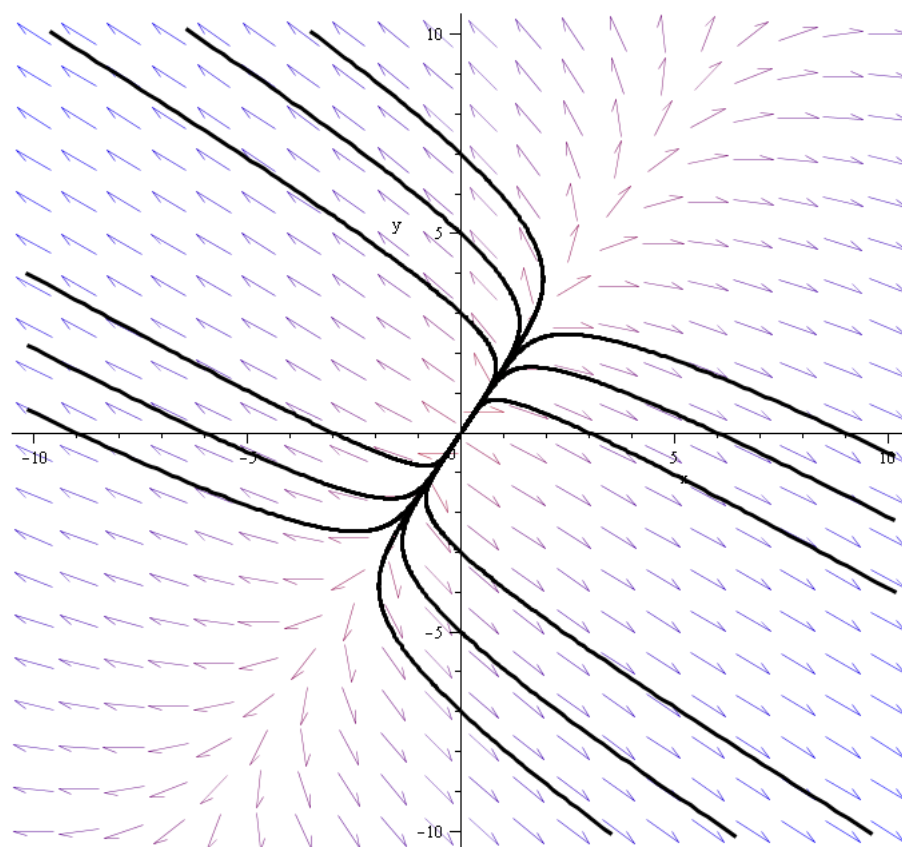
6.10. Асимптотично стійка.



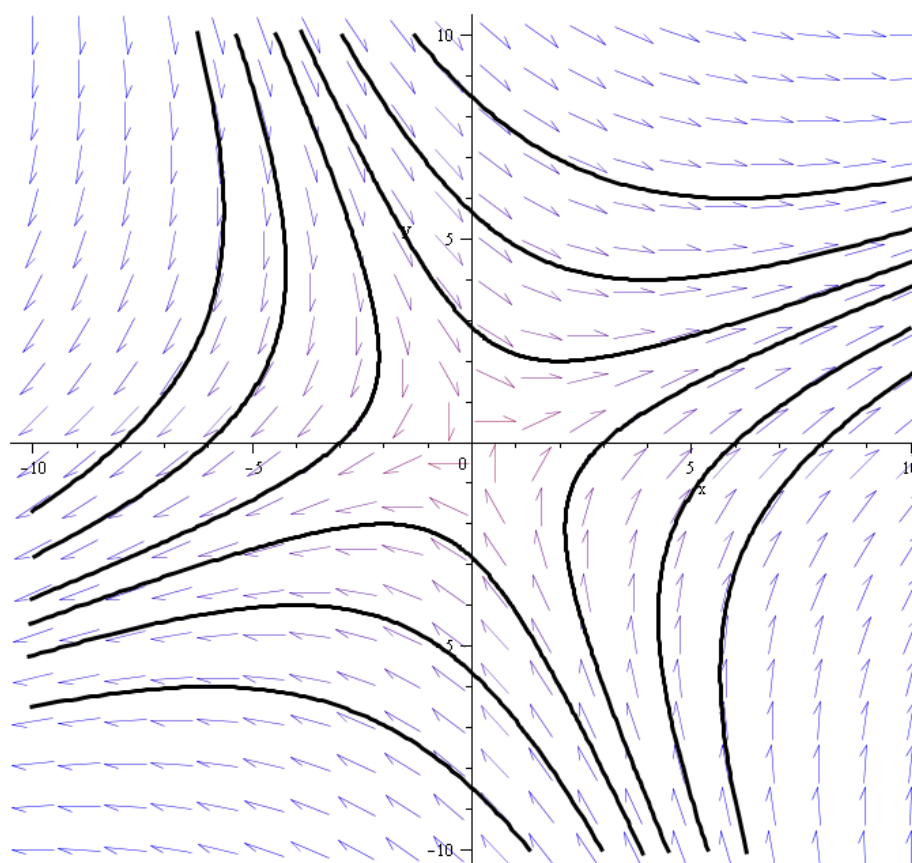
6.11. Нестійка.



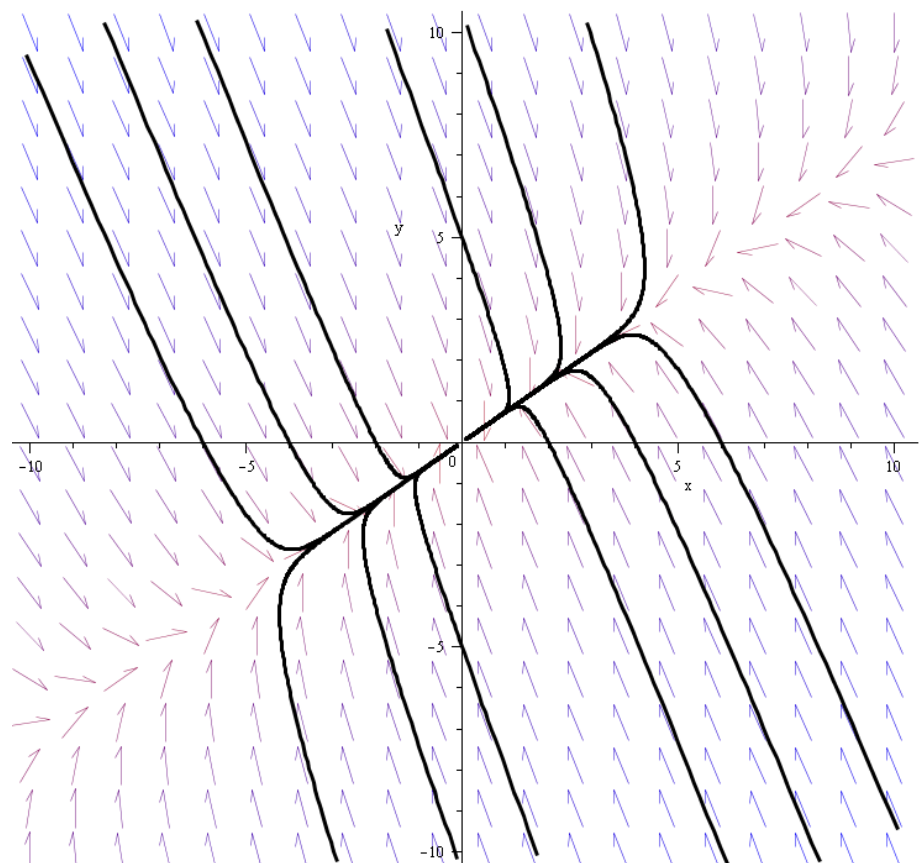
6.12. Нестійка.



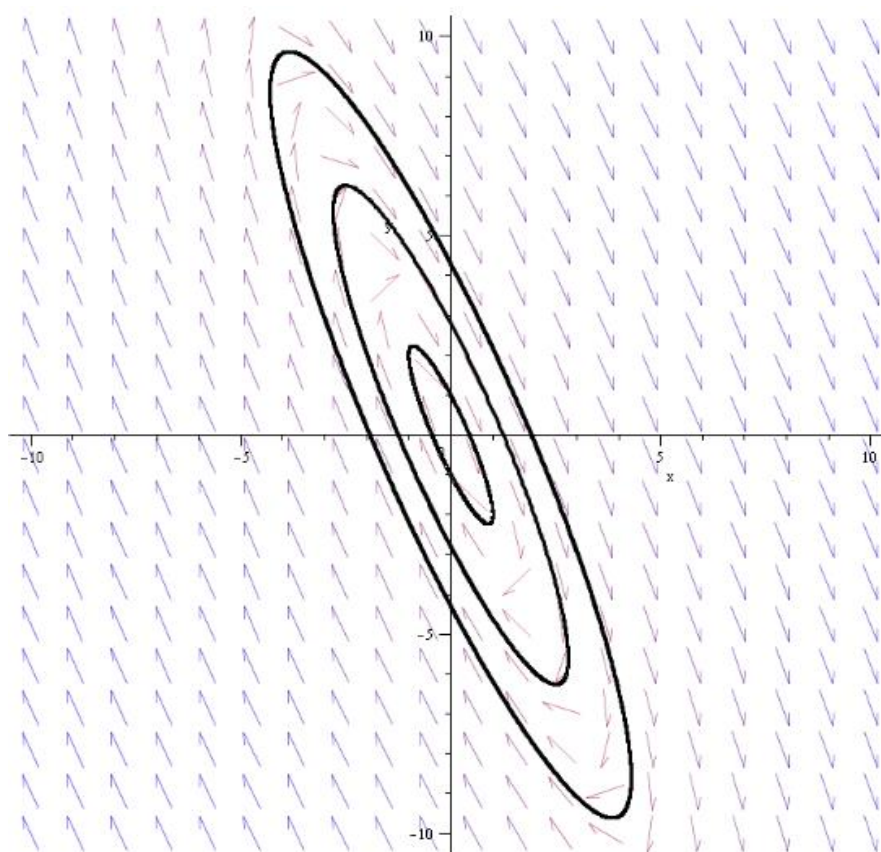
6.13. Нестійка.



6.14. Асимптотично стійка.



6.15. Стійка, не асимптотично.



7. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

В цьому розділі розглянемо застосування диференціальних рівнянь до розв'язування прикладних задач. Почнемо з задач економічного змісту.

7.1. Економічні задачі

Приклад 7.1. Нехай функції попиту D та пропозиції S залежать від ціни товару $P(t)$ та швидкості її зміни $P'(t)$ наступним чином:

$$D = 10 - P - 2P',$$

$$S = 4 + 2P + P'.$$

Причому в початковий момент часу $t = 0$ ціна $P(0) = 5$ грн. Необхідно знайти закон зміни $P(t)$.

Розв'язання: У стані рівноваги попит дорівнює пропозиції ($D = S$), тоді складемо рівняння:

$$10 - P - 2P' = 4 + 2P + P'$$

або

$$3P' + 3P - 6 = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні в ньому:

$$P' = 2 - P,$$

$$\frac{dP}{P - 2} = -dt$$

і проінтегруємо:

$$\int \frac{dP}{P - 2} = - \int dt.$$

Виконуємо подальші перетворення:

$$\ln|P - 2| = -t + \ln|C|.$$

$$\ln|P - 2| = \ln e^{-t} + \ln|C|.$$

$$\ln|P - 2| = \ln|C|e^{-t}.$$

Тоді загальний інтеграл можна записати у вигляді:

$$P - 2 = \pm Ce^{-t}$$

Визначивши нову константу $\tilde{C} = \pm C$, можна записати закон зміни ціни на товар

$$P = 2 + \tilde{C}e^{-t}$$

при умові, що між попитом і пропозицією весь час буде зберігатися рівновага.

Враховуючи, що за умовою задачі в початковий момент часу $t = 0$ ціна $P(0) = 5$ грн, то знайдемо сталу $\tilde{C}$:

$$5 = 2 + \tilde{C}e^0,$$

$$\tilde{C} = 3.$$

Отже, закон зміни ціни задається функцією

$$P = 2 + 3e^{-t}, t > 0.$$

Приклад 7.2. (Модель зростання капіталу з урахуванням інвестицій)

Нехай функції $K(t)$ – обсяг капіталу в момент часу t . Припустимо, що в економіку постійно вкладається фіксована частка від чистого доходу з коефіцієнтом інвестицій $m = 0,25$ (25 % на рік). Капітал зношується зі швидкістю, пропорційною його обсягу з коефіцієнтом $\mu = 0,05$ (5 % на рік). Яким буде обсяг капіталу через 10 років, якщо початковий капітал $K_0 = 100$ млн. грн.

Розв'язання: Швидкість зміни капіталу $\frac{dK}{dt}$ дорівнює різниці між інвестиціями та зносом:

$$\frac{dK}{dt} = mK - \mu K$$

або

$$\frac{dK}{dt} = (m - \mu)K.$$

Підставляючи значення $m = 0,25$, $\mu = 0,05$, отримуємо

$$\frac{dK}{dt} = (0,25 - 0,05)K,$$

$$\frac{dK}{dt} = 0,2K.$$

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dK}{K} = 0,2dt.$$

Проінтегруємо обидві частини

$$\int \frac{dK}{K} = \int 0,2dt.$$

Виконуємо подальші перетворення:

$$\ln|K| = 0,2t + \ln|C|.$$

$$\ln|K| = \ln e^{0,2t} + \ln|C|.$$

Тоді загальний інтеграл можна записати у вигляді:

$$K = \tilde{C}e^{0,2t}, \text{ де } \tilde{C} = \pm C.$$

Враховуючи початкову умову $K(0) = 100$, знайдемо сталу

$$\tilde{C}e^0 = 100 \Rightarrow \tilde{C} = 100.$$

Отже, закон зростання:

$$K(t) = 100e^{0,2t}.$$

Щоб визначити, яким буде значення капіталу через 10 років, підставимо $t = 10$:

$$K(10) = 100e^2 \approx 100 \cdot 2,7^2 = 729 \text{ млн грн.}$$

Приклад 7.3. (Динамічна модель двох секторів економіки)

Розглянемо економічну систему, що складається з двох взаємопов'язаних секторів: промисловості та сільського господарства. Нехай $x(t)$ – обсяг виробництва промисловості в момент часу t , $y(t)$ – обсяг виробництва сільського господарства.

Передбачається, що:

- Кожен сектор зазнає природного спаду, пропорційного обсягу виробництва;
- Розвиток кожного сектору частково забезпечується іншим сектором;
- Вплив одного сектору на інший є лінійним.

За цих умов динаміка системи описується системою лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0,3x + 0,5y, \\ \frac{dy}{dt} = 0,4x - 0,2y. \end{cases}$$

З початковими умовами:

$$x(0) = 10, \quad y(0) = 5.$$

Необхідно знайти залежність від часу обсягу виробництва промисловості $x(t)$ та обсягу виробництва сільського господарства $y(t)$.

Розв'язання: Запишемо систему диференціальних рівнянь в матричному вигляді:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X},$$

$$\text{де } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,5 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів системи.}$$

Випишемо характеристичне рівняння:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -0,3 - \lambda & 0,5 \\ 0,4 & -0,2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(0,3 + \lambda)(0,2 + \lambda) - 0,2 = 0,$$

$$\lambda^2 + 0,5\lambda - 0,14 = 0.$$

З цього рівняння отримаємо власні значення: $\lambda_1 = 0,2$, $\lambda_2 = -0,7$.

Для кожного з них порахуємо власний вектор.

Отже, для $\lambda_1 = 0,2$ розв'яжемо рівняння

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{v}_1 = 0,$$

$$(\mathbf{A} - 0,2\mathbf{E})\mathbf{v}_1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,4 & -0,4 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = 0.$$

Звідси власний вектор $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Аналогічно, знайдемо власний вектор $\mathbf{v}_2$ для власного значення $\lambda_1 = -0,7$

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{v}_2 = 0,$$

$$(\mathbf{A} + 0,7\mathbf{E})\mathbf{v}_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = 0.$$

Звідси власний вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Тоді загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь запишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{X}(t) &= C_1 e^{0,2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-0,7t} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

або

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{0,2t} + 5C_2 e^{-0,7t}, \\ y(t) = C_1 e^{0,2t} - 4C_2 e^{-0,7t}. \end{cases}$$

Використовуючи початкові умови $x(0) = 10$, $y(0) = 5$, знайдемо сталі C_1 та C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + 5C_2 = 10, \\ C_1 - 4C_2 = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{65}{9}, \\ C_2 = \frac{5}{9}. \end{cases}$$

Таким чином, остаточний розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{65}{9} e^{0,2t} + \frac{25}{9} C_2 e^{-0,7t}, \\ y(t) = \frac{65}{9} e^{0,2t} - \frac{20}{9} C_2 e^{-0,7t}. \end{cases}$$

Для системи маємо одне додатне власне значення $\lambda_1 = 0,2 > 0$. Отже, система нестійка.

При $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$.

З економічної точки зору: взаємне підсилення секторів переважає спад, тому виробництво зростає без обмежень (модель “перегрітої” економіки).

Приклад 7.4. (Задача про взаємозалежні ринки нафти і газу)

Нехай $x(t)$ – відхилення ціни на газ від рівноважної, $y(t)$ – відхилення ціни на нафту від рівноважної. Оскільки ці товари взаємозамінні, зміна ціни на один впливає на попит (а отже, і на ціну) іншого. Рівноважна ціна — це вартість енергоносіїв, при якій обсяги видобутку та постачання точно відповідають потребам промисловості й енергетики. Це виключає як виснаження запасів у сховищах (дефіцит), так і їхнє критичне переповнення через неможливість збути надлишки.

Передбачається, що:

- Швидкість зміни ціни на газ залежить від його власної ціни (саморегуляція ринку) та ціни на нафту (конкурентний вплив).
- Аналогічно для нафти.

За цих умов динаміка системи описується системою лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y. \end{cases}$$

Коли $x = 0$, $y = 0$, це означає, що ринок знаходиться в точці ідеальної рівноваги (відхилення нульові).

Необхідно знайти відхилення цін на нафту і газ від рівноважної.

Розв'язання: Запишемо систему диференціальних рівнянь в матричному вигляді:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X},$$

де матриця коефіцієнтів системи $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Запишемо характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= 0, \\ \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ (2 + \lambda)(4 + \lambda) - 3 &= 0, \end{aligned}$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0.$$

Тоді власні значення: $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -1$.

Тепер знайдемо власні вектори для кожного власного значення.

Отже, для $\lambda_1 = -5$ розв'яжемо рівняння

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{v}_1 = 0,$$

$$(\mathbf{A} + 5\mathbf{E})\mathbf{v}_1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = 0.$$

Звідси власний вектор $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Аналогічно, знайдемо власний вектор $\mathbf{v}_2$ для власного значення $\lambda_2 = -1$

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{v}_2 = 0,$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{v}_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = 0.$$

Звідси власний вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тоді загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь запишемо наступним чином:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-t}, \\ y(t) = -3C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Оскільки обидва власні значення від'ємні, то система є **асимптотично стійкою**. Це означає, що за будь-яких початкових коливань, тобто початкових даних $x(0)$ та $y(0)$, (стрибок цін через війну чи кризу), з часом ціни на нафту та газ обов'язково повернуться до своїх **рівноважних значень** ($x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$).

Приклад 7.5. (Динамічна модель взаємодії реклами та продажів)

Розглянемо задачу, яка описує, як змінюються ринкові частки двох компаній Coca-Cola та Pepsi залежно від їх витрат на рекламу та природного відтоку клієнтів.

Нехай $x(t)$ – кількість клієнтів (млн.) компанії Coca-Cola в момент часу t , $y(t)$ – кількість клієнтів (млн.) компанії Pepsi. Припустимо виконання наступних умов:

1. Реклама: кожна компанія залучає нових клієнтів із загального населення (незалежно від конкурента). Coca-Cola залучає 7 млн людей на рік, Pepsi - 5 млн.

2. Відтік: щороку 20% клієнтів Coca-Cola та 20% клієнтів Pepsi перестають пити солодку воду.

3. Конкуренція: Coca-Cola переманює 10% клієнтів Pepsi, і Pepsi переманює 10% клієнтів Coca-Cola.

4. Вважаємо, що компанії почали освоювати територіально новий ринок, тому $x(0) = y(0) = 0$.

Необхідно побудувати математичну модель задачі, визначити залежність від часу кількості клієнтів кожної компанії, зробити висновок щодо зміни цих залежностей з плином часу.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі її математичною моделлю буде наступна система диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7 - 0,2x - 0,1x + 0,1y, \\ \frac{dy}{dt} = 5 - 0,2y - 0,1y + 0,1x, \end{cases}$$

або, після зведення подібних доданків,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0,3x + 0,1y + 7, \\ \frac{dy}{dt} = 0,1x - 0,3y + 5. \end{cases}$$

Це лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розв'язавши її отримаємо такий результат:

$$\begin{cases} x(t) = 32 + C_1 e^{-0,2t} + C_2 e^{-0,4t}, \\ y(t) = 26 + C_1 e^{-0,2t} - C_2 e^{-0,4t}. \end{cases}$$

Бачимо, що коефіцієнти в степенях експонент (а це є власні числа матриці системи) є від'ємними числами. Отже, система асимптотично стійка. Тому з плином часу розв'язки системи прямуватимуть до положення рівноваги (32, 26). Причому це буде при будь-яких сталих C_1 та C_2 , тобто не пов'язано з початковими даними. Таким чином, з часом кількість клієнтів кожної компанії, не залежно від того з якої кількості вони починали буде величиною практично сталою. Для Coca-Cola приблизно 32 млн., для Pepsi – 26.

Врахувавши початкові дані нашої задачі остаточно маємо залежності $x(t)$ та $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = 32 - 29e^{-0,2t} - 3e^{-0,4t}, \\ y(t) = 26 - 29e^{-0,2t} + 3e^{-0,4t}. \end{cases}$$

7.2. Екологічні задачі

Модель Мальтуса. Це ідеальна модель, яка описує ріст популяції за умови ідеальних обставин (нескінченні ресурси, відсутність хижаків).

Приклад 7.6. У національний парк завезли 50 особин рідкісного виду оленів. Оскільки хижаків немає, а їжі вдосталь, то популяція зростає зі швидкістю, пропорційною її чисельності. Через 3 роки кількість оленів зросла до 90. Скільки оленів буде в парку через 10 років?

Розв'язання: Нехай функція $N(t)$ – це чисельність популяції, r – коефіцієнт природного приросту. Тоді складемо диференціальне рівняння:

$$\frac{dN}{dt} = rN.$$

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dN}{N} = r dt.$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$N = Ce^{rt}.$$

Враховуючи, що за умовою задачі в початковий момент часу $t = 0$ кількість оленів $N(0) = 50$, то стала $C = 50$. Отже,

$$N(t) = 50e^{rt}.$$

Далі визначаємо коефіцієнт зросту r з умови $N(3) = 90$:

$$50e^{3r} = 90 \Rightarrow e^{3r} = 1,8 \Rightarrow 3r = \ln 1,8 \Rightarrow r \approx 0,196.$$

Таким чином, приріст становить 19,6 % на рік.

Щоб дізнатись, скільки оленів буде в парку через 10 років, підставимо $t = 10$:

$$N(10) = 50e^{0,196 \cdot 10} = 50e^{1,96} \approx 50 \cdot 7,1 = 355.$$

Отже, через 10 років у парку буде приблизно 355 оленів.

Приклад 7.7. Логістична модель (ріст з обмеженнями). Нехай чисельність популяції зайців на острові $N(t)$ обмежена їжею. Максимальна ємність середовища $K = 300$ особин. Початкова чисельність $N_0 = 60$, а внутрішній коефіцієнт росту $r = 0,2$. Скласти рівняння, що описує динаміку чисельності.

Розв'язання: Оскільки ресурси обмежені, то ми використовуємо рівняння Ферхюльста. Воно стверджує, що швидкість росту $\frac{dN}{dt}$ пропорційна чисельності популяції, помноженої на частку невикористаних ресурсів $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

Підставляючи задані значення ($r = 0,2$, $K = 300$), маємо

$$\frac{dN}{dt} = 0,2N \left(1 - \frac{N}{300}\right).$$

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його

$$\frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{300}\right)} = 0,2dt,$$

$$\frac{300dN}{N(300 - N)} = 0,2dt,$$

$$\int \frac{300dN}{N(300 - N)} = \int 0,2dt.$$

Перший з цих інтегралів обчислимо за допомогою розкладання підінтегральної функції в суму елементарних дробів:

$$\begin{aligned} \int \frac{300dN}{N(300 - N)} &= \int \frac{dN}{N} - \int \frac{dN}{N - 300} = \ln|N| - \ln|N - 300| + C_1 = \\ &= \ln \left| \frac{N}{N - 300} \right| + C_1. \end{aligned}$$

Повертаючись до рівняння, маємо

$$\ln \left| \frac{N}{N - 300} \right| = 0,2t + \ln|C_2|,$$

$$\frac{N}{N - 300} = \pm C_2 e^{0,2t},$$

$$\frac{N}{N - 300} = \frac{1}{C} e^{0,2t}, \text{ де } C = \pm \frac{1}{C_2}.$$

Звідси отримаємо загальну логістичну функцію:

$$N = \frac{300}{1 - C e^{-0,2t}},$$

Оскільки напочатку чисельність складала $N_0 = 60$, то можемо знайти сталу C :

$$60 = \frac{300}{1 - C e^{-0,2 \cdot 0}} \Rightarrow C = -4.$$

Підставляючи C у рівняння, отримаємо остаточний закон росту популяції:

$$N(t) = \frac{300}{1 + 4e^{-0,2t}}.$$

Приклад 7.8. Модель біологічної системи «хижак – жертва».

Розглянемо закриту екосистему, що складається з двох видів: зайців (жертв) та вовків (хижаків). Нехай $x(t)$ – кількість зайців, а $y(t)$ – кількість вовків у момент часу t . Відомо, що на початку ($t = 0$) маємо в системі 15

вовків і 35 зайців. Динаміка системи описується моделлю Лотки –Вольтерри з заданими параметрами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0,8x - 0,04xy, \\ \frac{dy}{dt} = 0,02xy - 0,5y, \end{cases}$$

де в першому рівнянні (рівняння для зайців):

- коефіцієнт **0,8** означає *приріст*, що за відсутності вовків кількість зайців збільшується на **80%** за сезон (дуже висока швидкість розмноження);
- коефіцієнт **0,04** означає *виїдання*: кожна зустріч вовка із зайцем (xy) призводить до зменшення популяції зайців; коефіцієнт показує інтенсивність полювання.

В другому рівнянні (рівняння для вовків):

- коефіцієнт **0,02** означає *конвертація їжі*, що успішне полювання дає лише **2%** приросту популяції хижаків;
- коефіцієнт **0,5** означає *смертність*: за відсутності їжі (зайців) половина популяції вовків (**50%**) вимре за один часовий період через голод та хвороби.

Знайти нетривіальні точки рівноваги системи. Визначити тип цих точок рівноваги та характер стійкості. Побудувати фазовий портрет.

Розв'язання: Положення рівноваги визначаються з умови рівності нулю правих частин рівнянь:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0; \end{cases}$$

де

$$f_1(x, y) = 0,8x - 0,04xy,$$

$$f_2(x, y) = 0,02xy - 0,5y.$$

Отже,

$$\begin{cases} 0,8x - 0,04xy = 0, \\ 0,02xy - 0,5y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0,8 - 0,04y) = 0, \\ y(0,02x - 0,5) = 0; \end{cases}$$

Система має два розв'язки:

$M_1(0; 0)$ – тривіальна рівновага (повне вимирання).

$M_2(25; 20)$ – нетривіальна точка рівноваги.

Нас буде цікавити точка M_2 . Для аналізу стійкості цього положення рівноваги спробуємо використати лінеаризацію системи. Для цього обчислимо матрицю частинних похідних:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 - 0,04y & -0,04x \\ 0,02x & 0,02y - 0,5 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо значення елементів матриці в точці $M_2(25; 20)$:

$$A = J(25, 20) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0,4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 0,4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 + 0,4 = 0.$$

Отримаємо власні значення: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{0,4}$. Власні значення є суто уявними ($\text{Re}\lambda_{1,2} = 0$). Отже, в лінеаризованій системі це положення рівноваги буде **центром**. Лінеаризована система є **стійкою за Ляпуновим**, але не є асимптотично стійкою. Проте, оскільки $\text{Re}\lambda_{1,2} = 0$, то маємо критичний випадок. Тобто ми не можемо судити про характер положення рівноваги вихідної системи за її лінеаризованою системою. В цьому випадку для дослідження характеру точки $M_2(25; 20)$ для нелінійної системи можна використати метод функцій Ляпунова. Опишемо як це зробити.

Насправді досліджувана система шляхом виключення параметра t зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, достатньо поділити одне рівняння на друге:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(0,02x - 0,5)}{x(0,8 - 0,04y)}.$$

Після відокремлення змінних та інтегрування отримаємо рівняння фазових кривих

$$0,8 \ln y - 0,04y = 0,02x - 0,5 \ln x + c.$$

Ці рівняння допоможуть побудувати функцію Ляпунова:

$$V(x, y) = 0,02x - 0,5 \ln x + 0,04y - 0,8 \ln y + a,$$

де

$$a = -(0,02 \cdot 25 - 0,5 \ln 25 + 0,04 \cdot 20 - 0,8 \ln 20).$$

Легко встановити, що точка $M_2(25; 20)$ буде мінімумом функції $V(x, y)$. Отже, $V(x, y) > V(25, 20) = 0$. Таким чином, $V(x, y)$ додатно визначена. Обчисливши похідну $V(x, y)$ в силу системи отримаємо, що $V_f(x, y) \equiv 0$:

$$\begin{aligned} V_f(x, y) &= V_x(x, y) \cdot f_1 + V_y(x, y) \cdot f_2 = \\ &= \left(0,02 - \frac{0,5}{x}\right)(0,8x - 0,04xy) + \left(0,04 - \frac{0,8}{y}\right)(0,02x - 0,5) = 0. \end{aligned}$$

За теоремою Ляпунова про стійкість маємо, що положення рівноваги $M_2(25; 20)$ вихідної нелінійної системи є стійким, але не асимптотично. Тобто саме в цьому прикладі характери положення рівноваги нелінійної системи і лінеаризованої співпали.

Використавши отримані вище рівняння фазових кривих

$$0,8 \ln y - 0,04y = 0,02x - 0,5 \ln x + c$$

можна побудувати фазовий портрет. Наведемо фазову криву, яка задовольняє початкові умови, тобто проходить через точку $(15, 35)$.

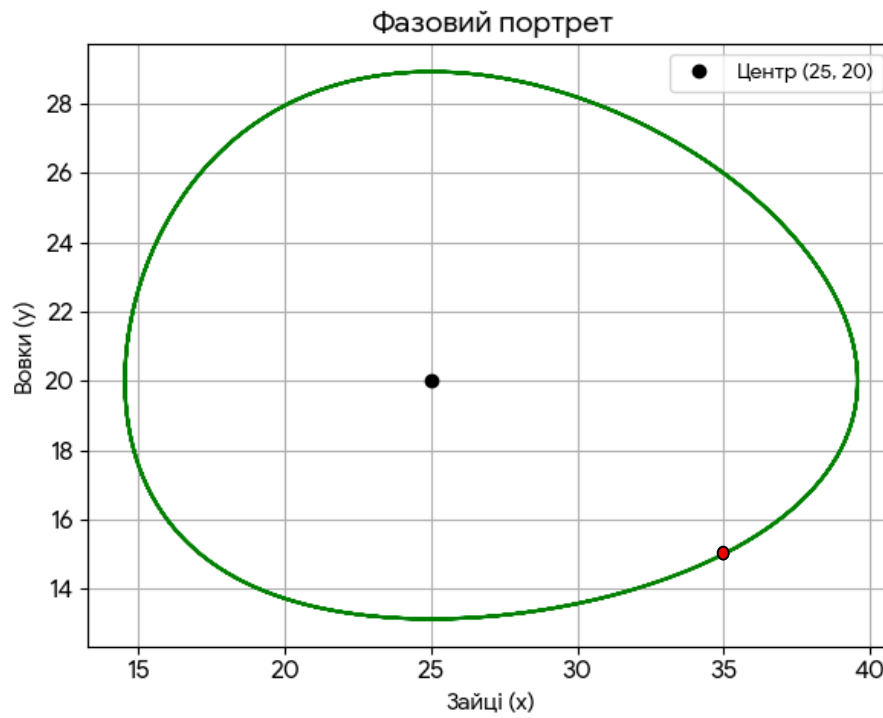


Рис. 7.1.

Популяції здійснюють сталі періодичні коливання навколо точки $M_2(25; 20)$. На рисунку 7.2. наведена часова залежність $x(t)$ та $y(t)$.

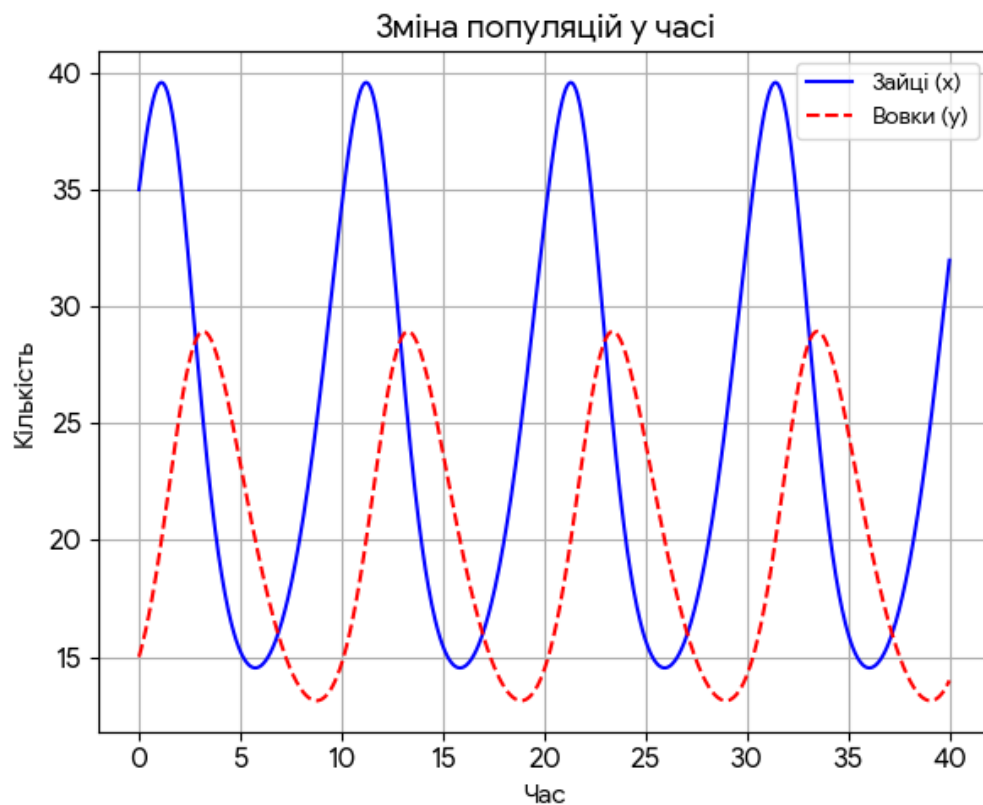


Рис. 7.2.

7.3. Задачі механіки

Приклад 7.9. Корабель масою 10^7 кг рухається зі швидкістю 16 м/с. Опір води є пропорційним до квадрату швидкості корабля та дорівнює $3 \cdot 10^5$ Н при швидкості 1 м/с. У корабля вимикається двигун. Яку відстань пройде корабель, перш ніж його швидкість стане дорівнювати 4 м/с? За який час корабель пройде цю відстань?

Розв'язання: Розглянемо рух корабля під дією сили опору $\vec{F}_{\text{оп}}$, сили тяжіння $m\vec{g}$, сили Архімеда $\vec{F}_A$. Нехай вісь Ox напрямлена в бік руху корабля.

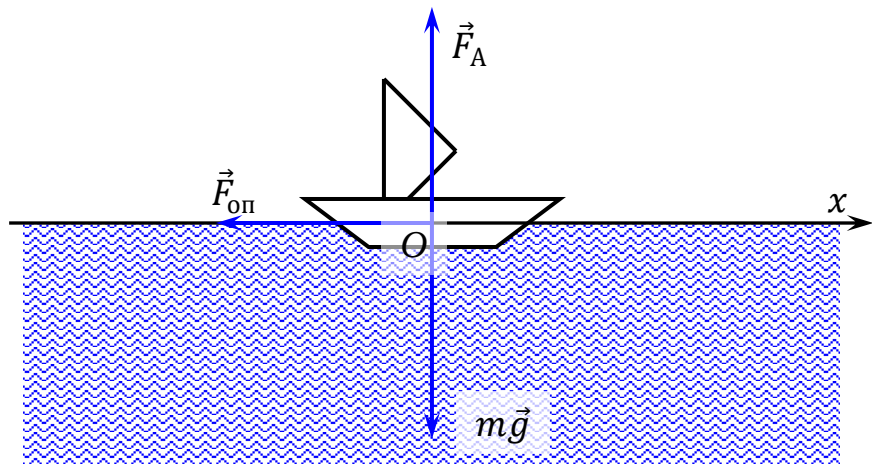


Рис. 7.3.

Використовуючи другий закон Ньютона, випишемо рівняння руху корабля в проєкції на вісь Ox (Рис.7.3):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_i F_{ix},$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\vec{F}_{\text{оп}}.$$

Оскільки опір води є пропорційним до квадрату швидкості корабля та дорівнює $3 \cdot 10^5$ Н при швидкості 1 м/с, то

$$\vec{F}_{\text{оп}} = 3 \cdot 10^5 \cdot v^2 = 3 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Тоді складемо рівняння:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -3 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Це диференціальне рівняння 2-го порядку, що допускає зниження порядку.

Тому можемо зробити заміну $\frac{dx}{dt} = z$, а $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dz}{dt}$, тоді рівняння прийме вигляд:

$$m \frac{dz}{dt} = -3 \cdot 10^5 \cdot z^2.$$

Оскільки маса корабля 10^7 кг, то рівняння переписеться наступним чином:

$$10^7 \frac{dz}{dt} = -3 \cdot 10^5 \cdot z^2,$$

$$\frac{dz}{dt} = -3 \cdot 10^{-2} \cdot z^2,$$

$$\frac{dz}{z^2} = -3 \cdot 10^{-2} dt.$$

Проінтегруємо обидві частини і отримаємо

$$-\frac{1}{z} = -3 \cdot 10^{-2} t - C_1 \Rightarrow z = \frac{1}{3 \cdot 10^{-2} t + C_1}.$$

Повертаючись до попередньої заміни, маємо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-2} t + C_1}. \quad (7.1)$$

Сталу інтегрування C_1 знайдемо з рівняння (7.1), використовуючи початкові умови:

$$\text{при } t = 0 \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0 = 16:$$

$$16 = \frac{1}{0 + C_1} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{16}.$$

Підставимо значення сталої C_1 до рівняння (7.1)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-2} t + \frac{1}{16}} = \frac{1}{0,03t + 0,0625}. \quad (7.2)$$

Проінтегруємо обидві частини цього рівняння:

$$x = \frac{\ln(0,03t + 0,0625)}{0,03} + C_2. \quad (7.3)$$

Оскільки початок вісі x співпадає з початковим положенням корабля, то при $t = 0$ $x_0 = 0$. Підставляючи ці умови до рівняння (7.3), визначимо сталу C_2 :

$$C_2 = -\frac{\ln(0,0625)}{0,03}.$$

Підставимо значення C_2 до формули (7.2) і знайдемо

$$x = \frac{\ln(0,03t + 0,0625)}{0,03} - \frac{\ln(0,0625)}{0,03} = \frac{\ln(0,48t + 1)}{0,03}. \quad (7.4)$$

Визначимо час руху кораблю до досягнення ним швидкості $\tilde{v} = 4$ м/с.

При $t = \tilde{t}$, $\frac{dx}{dt} = \tilde{v}$, тоді згідно з формулою (7.2)

$$4 = \frac{1}{0,03\tilde{t} + 0,0625}.$$

Звідки

$$\tilde{t} = 6,25 \text{ с.}$$

Відстань $x = \tilde{s}$, яку корабель проходить за час $\tilde{t}$ знайдемо за формулою (7.4):

$$\tilde{s} = \frac{\ln(0,48 \cdot 6,25 + 1)}{0,03} \approx 46,2 \text{ (м)}.$$

Приклад 7.10. Літак в точці A пролітає на висоті 4000 м над землею з горизонтальною швидкістю 140 м/с. На якій відстані x , що вимірюється за горизонтальною прямою від даної точки B , повинен бути скинутий з літака без початкової відносної швидкості деякий вантаж для того, щоб він упав в цю точку? Опором повітря потрібно знехтувати. (Рис. 7.4)

Розв'язання: Розглянемо рух вантажу під дією сили тяжіння $m\vec{g}$. Оберемо систему координат Oxy . Вісь y пройде через точку A , в якій вантаж був скинутий на висоті 4000 м. На рисунку 7.4. покажемо вантаж в довільному положенні.

Запишемо рівняння руху точки в проєкції на вісі x та y :

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg. \end{cases} \quad (7.5)$$

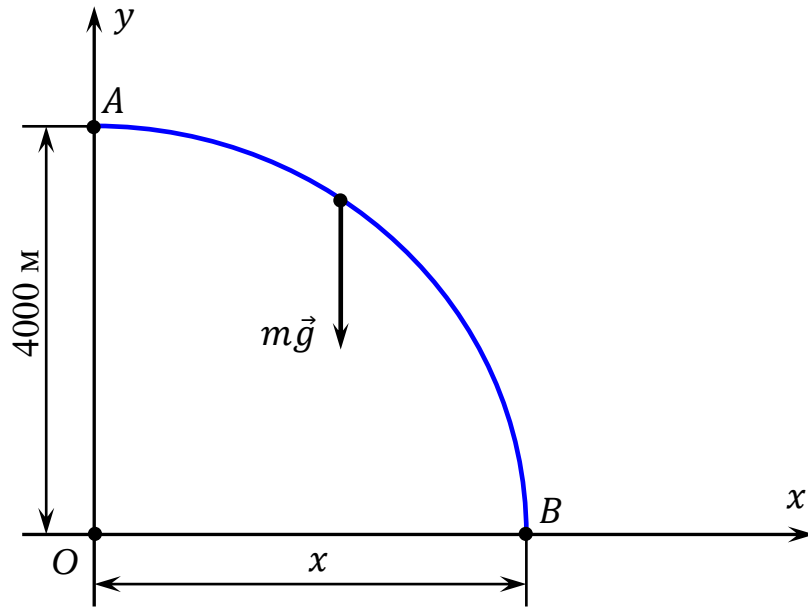


Рис. 7.4.

Розв'яжемо перше диференціальне рівняння системи (7.5):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

Це диференціальне рівняння, що дозволяє зниження порядку, тому маємо:

$$\frac{dx}{dt} = C_1, \quad (7.6)$$

$$x = C_1 t + C_2. \quad (7.7)$$

З формул (7.6) та (7.7) знайдемо сталі C_1 і C_2 , використовуючи початкові умови: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 140$ м/с:

$$\begin{cases} 140 = C_1, \\ 0 = C_1 \cdot 0 + C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 140, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Тоді рівняння (7.6) та (7.7) приймуть вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = 140, \quad (7.8)$$

$$x = 140t. \quad (7.9)$$

Тепер розв'яжемо друге диференціальне рівняння системи (7.5):

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g.$$

Проінтегруємо це диференціальне рівняння:

$$\int d\left(\frac{dy}{dt}\right) = - \int g dt.$$

Одержимо

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_3. \quad (7.10)$$

І знову проінтегруємо останнє рівняння :

$$\int dy = \int (-gt + C_3) dt.$$

Звідки

$$y = -g \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4. \quad (7.11)$$

Для обчислення сталих C_3 і C_4 , підставимо до виразів (7.10) та (7.11) початкові умови: $t = 0, y_0 = 4000$ м, $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$ м/с:

$$\begin{cases} 0 = 0 + C_3, \\ 4000 = -g \frac{0}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = 0, \\ C_4 = 4000. \end{cases}$$

Тоді рівняння (7.10) та (7.11) приймуть вигляд:

$$\frac{dy}{dt} = -gt. \quad (7.12)$$

$$y = -g \frac{t^2}{2} + 4000. \quad (7.13)$$

За формулою (7.13) визначимо час $\tilde{t}$, через який вантаж впаде на землю, тобто коли $\tilde{y} = 0$:

$$0 = -g \frac{\tilde{t}^2}{2} + 4000,$$

$$\tilde{t} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4000}{g}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 4000}{9,8}} \approx 28,6.$$

Підставимо значення $\tilde{t}$ до формули (7.9) і знайдемо відстань, на яку повинен буде скинутий вантаж:

$$x = 140 \cdot 28,6 = 4004 \text{ (м)}.$$

Приклад 7.11. Вантаж масою $m = 2 \text{ кг}$ закріплений на горизонтальній пружині з жорсткістю $k = 50 \text{ Н/м}$. Система знаходиться на гладкій поверхні (тертя не враховується). Вантаж відхилили від положення рівноваги на відстань $x_0 = 0,2 \text{ м}$ і відпустили без початкової швидкості. Складіть диференціальне рівняння руху та знайдіть закон зміни координати від часу.

Розв'язання: Згідно з другим законом Ньютона, рух вантажу описується рівнянням:

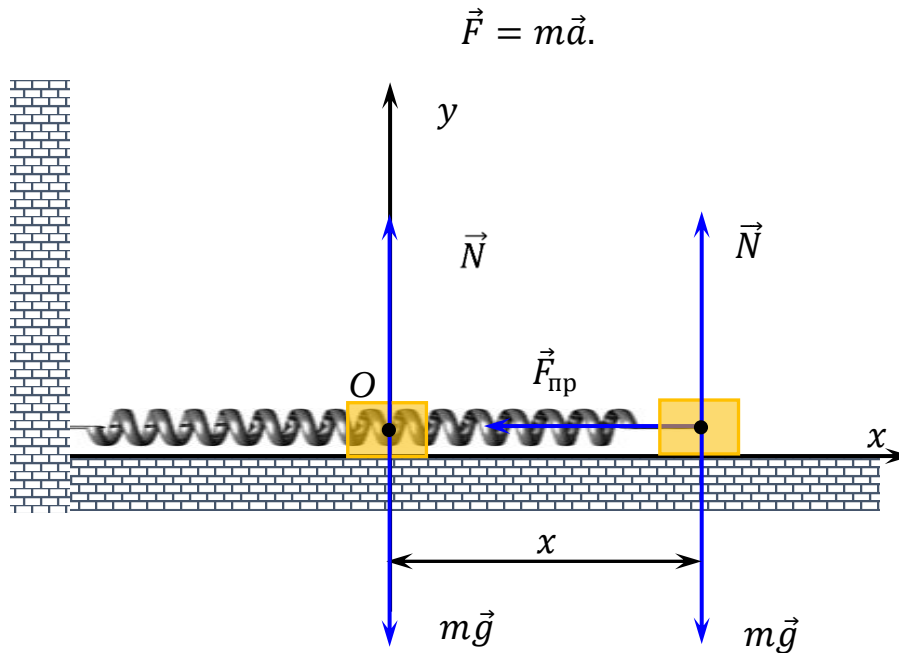


Рис. 7.5.

Єдина сила, що діє на вантаж у напрямку руху – це сила пружності пружини (закон Гука):

$$F_{\text{пр}} = -kx.$$

Знак « - » вказує на те, що сила пружності завжди спрямована протилежно до зміщення.

Прискорення a є другою похідною координати за часом:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Отже, рівняння, що описує другий закон Ньютона матиме вигляд:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Оскільки, з умови $m = 2$, $k = 50$, то маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 25x = 0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Для його розв'язання складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 25 = 0.$$

Звідки

$$\lambda_{1,2} = \pm 5i.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$x(t) = C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t. \quad (7.14)$$

Щоб обчислити сталі C_1 , C_2 , використаємо початкові умови. Початкова координата при $t = 0$ $x_0 = 0,2$, а початкова швидкість $v_0 = x'_0 = 0$.

Знайдемо похідну $x'(t)$:

$$x'(t) = -5C_1 \sin 5t + 5C_2 \cos 5t. \quad (7.15)$$

Підставляючи початкові умови до рівнянь (7.14) і (7.15), отримаємо:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0,2, \\ -5C_1 \sin 0 + 5C_2 \cos 0 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0,2, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Тоді закон руху вантажу матиме вигляд:

$$x(t) = 0,2 \cos 5t.$$

7.4. Геометричні задачі

Приклад 7.12. Знайти криві, які задовольняють наступній властивості: якщо через будь-яку точку кривої провести прямі, що будуть паралельні осям координат, до перетину з цими осями, то площа прямокутника, який утвориться поділяється цією кривою у відношенні 5:3 (див. рис. 7.6).

Розв'язання: Нехай точка $P(x, y)$ – довільна точка шуканої кривої. За визначенням площі криволінійної трапеції

$$S_1 = \int_0^x y(x) dx. \quad (7.16)$$

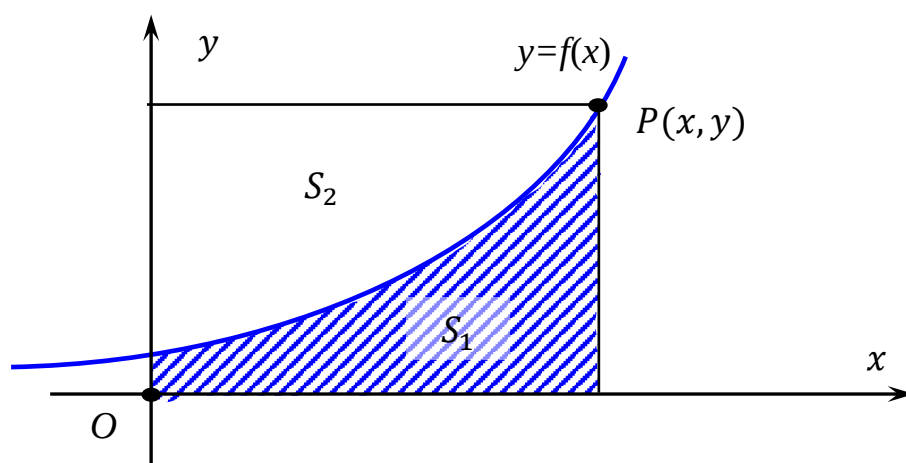


Рис. 7.6.

Площа всього прямокутника обчислюється наступним чином:

$$S = S_1 + S_2 = xy. \quad (7.17)$$

З іншого боку, за умовою задачі:

$$S_1 = \frac{3}{5} S_2. \quad (7.18)$$

З системи рівнянь (7.17), (7.18) отримуємо

$$S_1 = \frac{3}{5} (xy - S_1),$$

$$S_1 + \frac{3}{5} S_1 = \frac{3}{5} xy,$$

$$\begin{aligned}\frac{8}{5}S_1 &= \frac{3}{5}xy, \\ S_1 &= \frac{3}{8}xy.\end{aligned}\tag{7.19}$$

Враховуючи (7.16) та (7.19), отримаємо рівняння:

$$\frac{3}{8}xy = \int_0^x y(x)dx.$$

Продиференціюємо дане рівняння за змінною x :

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}(xy' + y) &= y, \\ xy' &= \frac{5}{3}y, \\ y' &= \frac{5}{3} \cdot \frac{y}{x}.\end{aligned}$$

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{y} = \frac{5}{3} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння і випишемо загальний розв'язок:

$$y = Cx^{\frac{5}{3}}.$$

Приклад 7.13. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, прямою, що проходить через точку дотику паралельно осі ординат та віссю абсцис, є стала величина, що дорівнює 9.

Розв'язання: Нехай точка $P(x, y)$ – деяка точка шуканої кривої (Рис. 7.7).

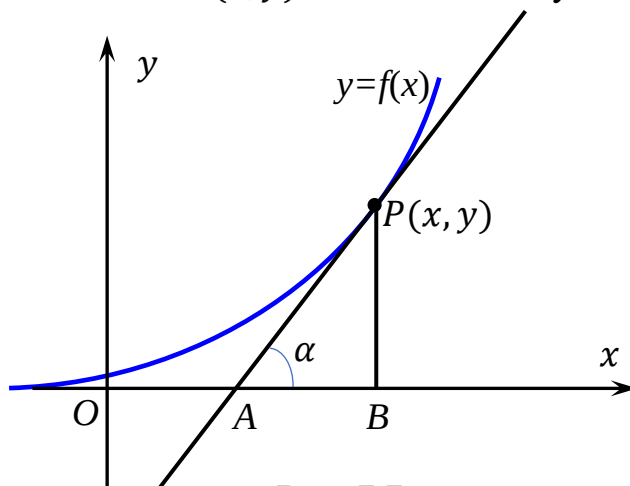


Рис. 7.7.

Рисунок 7.7 стосується випадку гострого кута α . Розглянемо спочатку цей випадок. За визначенням, площа трикутника ABP обчислюється наступним чином:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} AB \cdot PB.$$

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{PB}{AB} = y'$, а $PB = y$, тоді $AB = \frac{y}{y'}$. Підставивши у формулу площі трикутника вирази для PB та AB , отримаємо диференціальне рівняння для визначення шуканих кривих:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \frac{y}{y'} \cdot y = \frac{y^2}{2y'} = 9,$$

або

$$18y' = y^2.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо обидві частини:

$$y' = \frac{1}{18} y^2, \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{18} dx, \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{1}{18} dx.$$

Маємо загальний інтеграл

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{18} x + C.$$

Виразивши з останньої рівності y , отримали рівняння шуканих кривих:

$$y = -\frac{18}{x + 18C}.$$

Тепер перейдемо до випадку тупого кута α (Рис. 7.8). Площа трикутника запишеться у вигляді:

$$S_{ABP} = -\frac{y^2}{2y'} = 9.$$

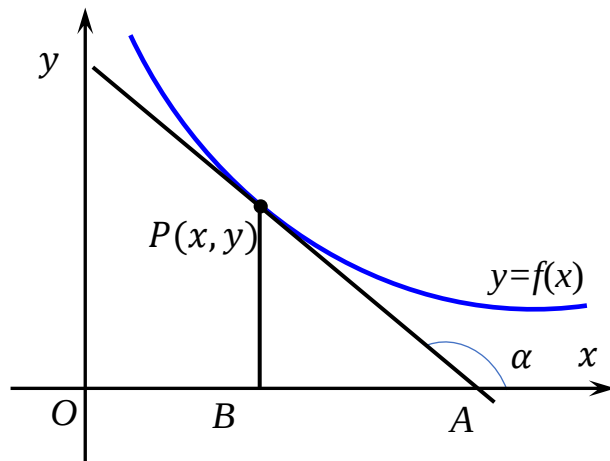


Рис. 7.8.

Аналогічно розв'язавши диференціальне рівняння

$$-\frac{y^2}{2y'} = 9$$

отримаємо рівняння кривих для цього випадку:

$$y = \frac{18}{x + 18C}.$$

Відповідь: $y = \pm \frac{18}{x + 18C}.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Турчина Н.І. Звичайні диференціальні рівняння: методи розв'язування та застосування. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 329 с.
https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/24974/1/Dyferentsialni_rivniannia.pdf
2. Лось В. М., Мальчиков В. В. Звичайні диференціальні рівняння: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 113 Прикладна математика. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 66 с.
https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/45083/1/Los_Malchikov_Zvychaini-dyferentsialni-rivniannia.pdf
3. А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк Диференціальні рівняння. – Київ, Либідь, 2003 - 600с.
4. А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – Київ, В.Школа, 1994 - 455с.
5. Збірник задач з диференціальних рівнянь : навч. посіб. / кол. авт.: П. І. Каленюк, П. П. Костробій, З. М. Нитребич та ін. ; за ред. проф. П. І. Каленюка. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. – 232 с.
6. Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т., Харченко І.І. Диференціальні рівняння для інформатиків: підручник / Ф.Г. Гаращенко, В.Т. Матвієнко, І.І. Харченко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 352 с.
7. Гаращенко Ф.Г., Харченко І.І. Збірник задач і вправ з диференціальних рівнянь. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.
8. Ляшко І.І., Боярчук О.К, Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981.
9. Лопушанська Г.П., Бугрій О.М., Лопушанський А.О. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики. – Львів : Видавець І. Є. Чижиков, 2017. - 372с.

Електронне мережне навчальне видання

Лось Валерій Миколайович, д-р фіз-мат. наук, проф.

Третиник Віолета Вікентіївна, канд. фіз-мат. наук, доц.

Андрусенко Олена Миколаївна, канд. техн., доц.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПРАКТИКУМ ЧАСТИНА 2 Навчальний посібник

Дизайн, комп'ютерна верстка, коректура авторські

Відповідальний за випуск Сирота С.В.



Промислово-торговельна фірма «Просвіта»
у формі товариства з обмеженою відповідальністю.

01032, Київ, бульвар Т. Шевченка, 46,
тел. (067) 440 29 96, E-mail prosvita.kyiv@gmail.com

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Держаного реєстру:
ДК № 221 від 16.10.2000 р.

Підп. до публікації 05.06.2026.

Обл. вид арк. 5,5

Електронні текстові дані (1 файл: 5,0 Мбайт).