

УДК 517.581

Г.О. Южакова

КОМПОЗИЦІЙНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ τ -УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРИЄДНАНИХ ФУНКЦІЙ ЛЕЖАНДРА ПЕРШОГО РОДУ ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$

Вступ

Кожному математику чи інженеру, якому доводиться мати справу з розв'язанням диференціальних рівнянь у різноманітних галузях теоретичних і прикладних наук, добре відомі спеціальні функції — функції, які не виражаються через елементарні (функції Бесселя, Лежандра, ортогональні многочлени, гіпергеометричні функції, функції Мат'є та ін.). Особливо важливим є застосування спеціальних функцій при розв'язанні крайових задач математичної фізики, квантової теорії поля, у багатьох галузях теоретичної і прикладної математики та ін.

Різноманітність задач, які приводять до виникнення спеціальних функцій, стала причиною швидкого зростання протягом останніх десятиліть кількості спеціальних функцій і їх узагальнень ([1–7] та ін.). При цьому особлива увага приділяється вивченню властивостей таких узагальнених спеціальних функцій з метою подальшого ефективного застосування при розв'язанні складніших математичних та практичних задач.

Постановка задачі

Мета статті — встановлення композиційних співвідношень для τ -узагальнених приєднаних функцій Лежандра першого роду.

Означення функції ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ та її зв'язок з τ -узагальненою гіпергеометричною функцією Гаусса

Розглянемо τ -узагальнену (за Райтом) приєднану функцію Лежандра першого роду ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ [8]:

$${}^{\tau}P_k^{m,n}(z) = \frac{(z+1)^{\frac{n}{2}}(z-1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)\Gamma\left(-k - \frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(k - \frac{m+n}{2} + 1\right)} \times$$

$$\times \int_0^1 \left(t^{-k - \frac{m-n}{2} - 1} (1-t)^{k - \frac{m+n}{2}} \times \right. \\ \left. {}_2\Psi_1 \left[\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, 1 \right), (1-m, \tau) \left| \frac{1-z}{2} t^{\tau} \right. \right] dt \right) \quad (1)$$

і вивчимо композиційні співвідношення, що містять такі функції. В (1) ${}_2\Psi_1$ — функція Фокса–Райта [9]; $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$; $|1-z| < 2$; $k + \frac{m+n}{2} \neq -1, -2, \dots$; $k - \frac{m-n}{2} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $m \neq 1, 2, \dots$; $|\arg(z \pm 1)| < \pi$.

Зауважимо, що використання τ -узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1$ [10] у формі

$${}_2F_1(a, b; c; \xi) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \times \\ \times \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, 1), (c, \tau) \\ (c, \tau) \end{matrix} \left| \xi t^{\tau} \right. \right] dt \quad (2)$$

при $a = k - \frac{m-n}{2} + 1$, $b = -k - \frac{m-n}{2}$, $c = 1 - m$, $\xi = \frac{1-z}{2}$ (в (2) $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$; $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$; $a, b, c \in \mathbb{C}$, $\Gamma(c)$ — класична гамма-функція [9]) дає змогу встановити зв'язок між функціями ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ і ${}_2F_1$, а саме:

$${}^{\tau}P_k^{m,n}(z) = \frac{(z+1)^{\frac{n}{2}}(z-1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(1-m)} \times \\ \times {}_2F_1 \left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2} \right). \quad (3)$$

Деякі рекурентні співвідношення між суміжними τ -узагальненими гіпергеометричними функціями Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$, які будуть використані в подальшому при доведенні теорем, подані в [11].

Доведення теорем про композиційні співвідношення для функції Лежандра ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$

Теорема 1. При умовах існування τ -узагальненої (за Райтом) приєднаної функції Ле-

жандра першого роду ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ (1) мають місце такі співвідношення:

$$\begin{aligned} {}^{\tau}P_k^{m,n}(z) &= \left(k - \frac{m+n}{2} + 1\right) \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_k^{m-1,n-1}(z) - \\ &\quad - \frac{k + \frac{m-n}{2}}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)\tau} {}^{\tau}P_{k-1}^{m,n}(z) + \\ &\quad + \frac{\left(k + \frac{m-n}{2}\right) \left(1 - m - \left(k - \frac{m-n}{2}\right)\tau\right)}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)\tau} \times \\ &\quad \times \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_{k-1}^{m-1,n-1}(z), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu + \nu + 1}{\mu} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(k - \frac{m+n}{2}\right) {}^{\tau}P_k^{m,n}(z) &= \\ = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_k^{m+1,n+1}(z) + \frac{k + \frac{m-n}{2}}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)\tau} \times \\ \times \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_{k-1}^{m+1,n+1}(z) + \\ + \frac{\left(k + \frac{m-n}{2}\right) \left(m + \left(k - \frac{m-n}{2}\right)\tau\right)}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)\tau} {}^{\tau}P_{k-1}^{m+1,n+1}(z), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left(k + \frac{m-n}{2} + \left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)\tau\right) {}^{\tau}P_k^{m,n}(z) &= \\ = \frac{k + \frac{m-n}{2}}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)\tau} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_{k-1}^{m+1,n+1}(z) + \\ + \frac{\left(k + \frac{m-n}{2}\right) \left(m + \left(k - \frac{m-n}{2}\right)\tau\right)}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)\tau} {}^{\tau}P_{k-1}^{m,n}(z) - \\ - \frac{\left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)\tau \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_{k+1}^{m+1,n+1}(z) +}{k + 1 + \frac{m-n}{2}} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)\tau \left(k + 1 - \frac{m+n}{2}\right)}{k + 1 + \frac{m-n}{2}} {}^{\tau}P_{k+1}^{m,n}(z), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left(m + \left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)\tau\right) {}^{\tau}P_k^{m,n}(z) &= \\ = -\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_k^{m+1,n+1}(z) - \\ - \frac{\left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)\tau \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} {}^{\tau}P_{k+1}^{m+1,n+1}(z) +}{k + \frac{m-n}{2} + 1} \\ + \frac{\left(k - \frac{m-n}{2} + 1\right)\tau \left(k + 1 - \frac{m+n}{2}\right)}{k + \frac{m-n}{2} + 1} {}^{\tau}P_{k+1}^{m,n}(z). \end{aligned} \quad (7)$$

Доведення. 1. Використаємо відому [10, 11] властивість τ -узагальненої (за Райтом) гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$

$$\begin{aligned} c {}_2F_1(a, b; c; \xi) &= \\ = (c-b) {}_2F_1(a, b; c+1; \xi) + b {}_2F_1(a, b+1; c+1; \xi) \end{aligned} \quad (8)$$

при $a = k - \frac{m-n}{2} + 1$, $b = -k - \frac{m-n}{2}$, $c = 1 - m$ та $\xi = \frac{1-z}{2}$. Тоді з (8) дістанемо

$$\begin{aligned} (1-m) {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2}\right) &= \\ = \left(k - \frac{m+n}{2} + 1\right) {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; \right. \\ \left. 2-m; \frac{1-z}{2}\right) + \left(-k - \frac{m-n}{2}\right) {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, \right. \\ \left. 1 - k - \frac{m-n}{2}; 2-m; \frac{1-z}{2}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Для функції ${}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, 1 - k - \frac{m-n}{2}; 2-m; \frac{1-z}{2}\right)$ з (9) скористаємось іншою відомою властивістю функції ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$ [10, 11]:

$${}_2F_1(a+1, b; c; \xi) = \\ = \frac{c-1}{a\tau} {}_2F_1(a, b; c-1; \xi) - \frac{c-a\tau-1}{a\tau} {}_2F_1(a, b; c; \xi), \quad (10)$$

поклавши в (10) $a = k - \frac{m-n}{2}$, $b = 1 - k - \frac{m-n}{2}$, $c = 2 - m$, $\xi = \frac{1-z}{2}$. Тоді функцію ${}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, 1 - k - \frac{m-n}{2}; 2 - m; \frac{1-z}{2}\right)$ можна записати у формі

$${}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, 1 - k - \frac{m-n}{2}; 2 - m; \frac{1-z}{2}\right) = \\ = \frac{1-m}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)^\tau} {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2}, 1 - k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2}\right) - \\ - \frac{1-m - \left(k - \frac{m-n}{2}\right)^\tau}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)^\tau} {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2}, 1 - k - \frac{m-n}{2}; 2 - m; \frac{1-z}{2}\right). \quad (11)$$

Підставивши вираз (11) в (9), одержимо

$$(1-m) {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2}\right) = \\ = \left(k - \frac{m+n}{2} + 1\right) {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 2 - m; \frac{1-z}{2}\right) - \\ - \frac{\left(k + \frac{m-n}{2}\right)(1-m)}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)^\tau} \times \\ \times {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2}, 1 - k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2}\right) + \\ + \frac{\left(k + \frac{m-n}{2}\right)\left(1 - m - \left(k - \frac{m-n}{2}\right)^\tau\right)}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)^\tau} \times \\ \times {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2}, 1 - k - \frac{m-n}{2}; 2 - m; \frac{1-z}{2}\right). \quad (12)$$

Помноживши обидві частини рівності (12)

на вираз $\frac{(z+1)^{\frac{n}{2}}(z-1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(2-m)}$ і використавши зоб'язування (3) функції ${}_2P_k^{m,n}(z)$ через τ -узагальнену гіпергеометричну функцію, із врахуванням властивості гамма-функції [9] $\Gamma(2-m) = (1-m)\Gamma(1-m)$, отримаємо співвідношення (4).

2. Відома властивість [11]

$$(c-b-1) {}_2F_1(a, b; c; \xi) =$$

$$= (c-1) {}_2F_1(a, b; c-1; \xi) - b {}_2F_1(a, b+1; c; \xi) \quad (13)$$

τ -узагальненої (за Райтом) гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$ для $a = k - \frac{m-n}{2} + 1$, $b = -k - \frac{m-n}{2}$, $c = 1 - m$ та $\xi = \frac{1-z}{2}$ після спрощень матиме вигляд

$$\left(k - \frac{m+n}{2}\right) {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2}\right) = \\ = -m {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; -m; \frac{1-z}{2}\right) + \left(k + \frac{m-n}{2}\right) {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, 1 - k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2}\right). \quad (14)$$

Запишемо функцію ${}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, 1 - k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2}\right)$ згідно з формулою (10), поклавши $a = k - \frac{m-n}{2}$, $b = 1 - k - \frac{m-n}{2}$, $c = 1 - m$, $\xi = \frac{1-z}{2}$:

$${}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, 1 - k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2}\right) = \\ = -\frac{m}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)^\tau} {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2}, 1 - k - \frac{m-n}{2}; -m; \frac{1-z}{2}\right) + \\ + \frac{m + \left(k - \frac{m-n}{2}\right)^\tau}{\left(k - \frac{m-n}{2}\right)^\tau} {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2}, 1 - k - \frac{m-n}{2}; 2 - m; \frac{1-z}{2}\right).$$

$$1 - k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2}). \quad (15)$$

Підставивши вираз (15) в (14) і скориставшись зображенням (3) для функції ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ та властивістю гамма-функції $\Gamma(1-m) = -m\Gamma(-m)$ [9], після перетворень дістанемо композиційне співвідношення (5).

3. Скористаємось ще однією відомою властивістю функції ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$ [10, 11]

$$(b - a\tau) {}_2F_1(a, b; c; \xi) =$$

$$= b {}_2F_1(a, b+1; c; \xi) - a\tau {}_2F_1(a+1, b; c; \xi)$$

для $a = k - \frac{m-n}{2} + 1$, $b = -k - \frac{m-n}{2}$, $c = 1 - m$, $\xi = \frac{1-z}{2}$. Матимемо

$$\begin{aligned} & \left(-k - \frac{m-n}{2} - \left(k - \frac{m-n}{2} + 1 \right) \tau \right) \times \\ & \times {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2} \right) = \\ & = \left(-k - \frac{m-n}{2} \right) {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, 1 - k - \frac{m-n}{2}; \right. \\ & \left. 1 - m; \frac{1-z}{2} \right) - \left(k - \frac{m-n}{2} + 1 \right) \tau {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + \right. \\ & \left. + 2, -k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2} \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Із властивості (13) можна дістати

$$\begin{aligned} & {}_2F_1(a, b+1; c; \xi) = \\ & = \frac{c-1}{b} {}_2F_1(a, b; c-1; \xi) - \frac{c-b-1}{b} {}_2F_1(a, b; c; \xi), \end{aligned}$$

звідки при $a = k - \frac{m-n}{2} + 2$, $b = -k - 1 - \frac{m-n}{2}$, $c = 1 - m$, $\xi = \frac{1-z}{2}$ для функції ${}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 2, -k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2}\right)$ у формулі (16) можна отримати зображення у вигляді

$$\begin{aligned} & {}_2F_1\left((k+1) - \frac{m-n}{2} + 1, -(k+1) - \frac{m-n}{2} + 1; \right. \\ & \left. 1 - m; \frac{1-z}{2} \right) = \frac{m}{k-1 + \frac{m-n}{2}} {}_2F_1\left((k+1) - \frac{m-n}{2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + 1, -(k+1) - \frac{m-n}{2}; -m; \frac{1-z}{2} \right) + \frac{k+1 - \frac{m+n}{2}}{k+1 + \frac{m-n}{2}} \times \\ & \times {}_2F_1\left((k+1) - \frac{m-n}{2} + 1, -(k+1) - \frac{m-n}{2}; \right. \\ & \left. 1 - m; \frac{1-z}{2} \right). \quad (17) \end{aligned}$$

Підставивши в (16) вирази (15) і (17) для відповідних функцій, помноживши обидві час-

тини одержаної рівності на $\frac{(z+1)^{\frac{n}{2}}(z-1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(1-m)}$ та

врахувавши зображення (3) для функції ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ і властивість $\Gamma(1-m) = -m\Gamma(-m)$ гамма-функції [9], отримаємо композиційне співвідношення (6) для τ -узагальнених функцій Лежандра.

4. Скористаємось властивістю (10) для функції ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$ при $a = k - \frac{m-n}{2} + 1$, $b = -k - \frac{m-n}{2}$, $c = 1 - m$, $\xi = \frac{1-z}{2}$. Після деяких перетворень дістанемо

$$\begin{aligned} & \left(-m - \left(k - \frac{m-n}{2} + 1 \right) \tau \right) \times \\ & \times {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2} \right) = \\ & = -m {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; -m; \frac{1-z}{2} \right) - \\ & - \left(k - \frac{m-n}{2} + 1 \right) \tau {}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 2, -k - \frac{m-n}{2}; \right. \\ & \left. 1 - m; \frac{1-z}{2} \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Підставивши у (18) вираз (17) для ${}_2F_1\left(k - \frac{m-n}{2} + 2, -k - \frac{m-n}{2}; 1 - m; \frac{1-z}{2}\right)$, помноживши одержану рівність на вираз $\frac{(z+1)^{\frac{n}{2}}(z-1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(1-m)}$ і скориставшись зображенням (3) для функції ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ та властивістю $\Gamma(1-m) = -m\Gamma(-m)$ [9], отримаємо композиційне співвідношення (7).

Теорема 2. При умовах $|1-z| < 2$, $|\arg(z \pm 1)| < \pi$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $k + \frac{m+n}{2} \neq -1, -2, \dots$, $k - \frac{m-n}{2} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $m \neq 1, 2, \dots$ будуть справді формули диференціювання τ -узагальненої (за Райтом) функції Лежандра ${}^\tau P_k^{m,n}(z)$ (3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}^\tau P_k^{m,n}(z) = & \left(\frac{n}{2(z+1)} - \frac{m}{2(z-1)} - \frac{k + \frac{m-n}{2}}{2\tau} \right) {}^\tau P_k^{m,n}(z) + \\ & + \frac{k + \frac{m-n}{2}}{2\tau^2 \left(k - \frac{m-n}{2} \right)} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} {}^\tau P_{k-1}^{m+1,n+1}(z) + \\ & + \frac{\left(k + \frac{m-n}{2} \right) \left(m + \left(k - \frac{m-n}{2} \right) \tau \right)}{2\tau^2 \left(k - \frac{m-n}{2} \right)} {}^\tau P_{k-1}^{m,n}(z), \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^{k+\frac{n}{2}+1} (z+1)^{-\frac{n}{2}} {}^\tau P_k^{m,n}(z) \right] = & \frac{k+1 - \frac{m-n}{2}}{k+1 + \frac{m-n}{2}} (z-1)^{k+\frac{n}{2}} (z+1)^{-\frac{n}{2}} \left[\left(k+1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{m+n}{2} \right) {}^\tau P_{k+1}^{m,n}(z) - \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} {}^\tau P_{k+1}^{m+1,n+1}(z) \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Доведення. 1. В [11] було показано, що

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}^\tau F_1 \left(a, b; c; \frac{1-z}{2} \right) = & -\frac{b}{2\tau} \left({}^\tau F_1 \left(a, b+1; \right. \right. \\ & \left. \left. c; \frac{1-z}{2} \right) - {}^\tau F_1 \left(a, b; c; \frac{1-z}{2} \right) \right). \quad (21) \end{aligned}$$

Використавши зв'язок (3) τ -узагальненої функції Лежандра ${}^\tau P_k^{m,n}(z)$ і τ -узагальненої гіпергеометричної функції Гауса ${}_2F_1$, запишемо вираз для похідної $\frac{d}{dz} {}^\tau P_k^{m,n}(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}^\tau P_k^{m,n}(z) = & \frac{1}{\Gamma(1-m)} \left[\frac{d}{dz} \left((z+1)^{\frac{n}{2}} (z-1)^{-\frac{m}{2}} \right) \times \right. \\ & \times {}^\tau F_1 \left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2} \right) + \\ & \left. + (z+1)^{\frac{n}{2}} (z-1)^{-\frac{m}{2}} \frac{d}{dz} {}^\tau F_1 \left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2} \right) \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Для похідної $\frac{d}{dz} {}^\tau F_1 \left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2} \right)$ скористаємось формулою (21) при $a = k - \frac{m-n}{2} + 1$, $b = -k - \frac{m-n}{2}$, $c = 1-m$. Тоді (22) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}^\tau P_k^{m,n}(z) = & \frac{(z+1)^{\frac{n}{2}} (z-1)^{-\frac{m}{2}}}{2\Gamma(1-m)} \left[\left(\frac{n}{z+1} - \frac{m}{z-1} \right) \times \right. \\ & \times {}^\tau F_1 \left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2} \right) + \\ & + \frac{k + \frac{m-n}{2}}{\tau} \left({}^\tau F_1 \left(k - \frac{m-n}{2} + 1, 1-k - \frac{m-n}{2}; \right. \right. \\ & \left. \left. 1-m; \frac{1-z}{2} \right) - {}^\tau F_1 \left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; \right. \right. \\ & \left. \left. 1-m; \frac{1-z}{2} \right) \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

Після використання формул (3), (15) і нескладних перетворень із (23) прийдемо до формули (19).

2. Використаємо ще одну [11] формулу диференціювання функції ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} [(p\xi + q)^a {}^\tau F_1(a, b; c; p\xi + q)] = & \\ = pa(p\xi + q)^{a-1} {}^\tau F_1(a+1, b; c; p\xi + q), \quad (24) \end{aligned}$$

яка має місце для довільних $p, q \in \mathbb{R}$. При $\xi = z$, $p = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $a = k - \frac{m-n}{2} + 1$, $b = -k -$

$-\frac{m-n}{2}$, $c = 1 - m$ співвідношення (24) після деяких спрощень матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left[(1-z)^{k-\frac{m-n}{2}+1} \times \right. \\ & \left. \times {}_2F_1 \left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2} \right) \right] = \\ & = \left(-k - \frac{m-n}{2} - 1 \right) (1-z)^{k-\frac{m-n}{2}} \times \\ & \times {}_2F_1 \left(k - \frac{m-n}{2} + 2, -k - \frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2} \right). \quad (25) \end{aligned}$$

Із формули (3) зв'язку між ${}_2F_1$ і ${}^\tau P_k^{m,n}(z)$ дістанемо

$$\begin{aligned} & (1-z)^{k-\frac{m-n}{2}+1} {}_2F_1 \left(k - \frac{m-n}{2} + 1, -k - \frac{m-n}{2}; \right. \\ & \left. 1-m; \frac{1-z}{2} \right) = (-1)^{k-\frac{m-n}{2}+1} \Gamma(1-m) (z-1)^{k+\frac{n}{2}+1} \times \\ & \times (z+1)^{-\frac{n}{2}} {}^\tau P_k^{m,n}(z). \quad (26) \end{aligned}$$

Функцію ${}_2F_1 \left(k - \frac{m-n}{2} + 2, -k - \frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2} \right)$ з (25) запишемо за формулою (17) і підставимо (26) і (17) в (25):

$$\begin{aligned} & (-1)^{k-\frac{m-n}{2}} \Gamma(1-m) \frac{d}{dz} \left[(z-1)^{k+\frac{n}{2}+1} (z+1)^{-\frac{n}{2}} {}^\tau P_k^{m,n}(z) \right] = \\ & = (1-z)^{k-\frac{m-n}{2}} \left[\frac{m \left(k+1 - \frac{m-n}{2} \right)}{k+1 + \frac{m-n}{2}} {}_2F_1 \left((k+1) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{m-n}{2} + 1, -(k+1) - \frac{m-n}{2}; -m; \frac{1-z}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\left(k+1 - \frac{m+n}{2} \right) \left(k+1 - \frac{m-n}{2} \right)}{k+1 + \frac{m-n}{2}} {}_2F_1 \left((k+1) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{m-n}{2} + 1, -(k+1) - \frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2} \right) \right]. \quad (27)$$

Після множення (27) на $\frac{(z+1)^{\frac{n}{2}}(z-1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(1-m)}$ та врахування зв'язку (3) функцій ${}^\tau P_k^{m,n}(z)$ і ${}_2F_1$ дістанемо

$$\begin{aligned} & (-1)^{k-\frac{m-n}{2}} (z+1)^{\frac{n}{2}} (z-1)^{-\frac{m}{2}} \times \\ & \times \frac{d}{dz} \left[(z-1)^{k+\frac{n}{2}+1} (z+1)^{-\frac{n}{2}} {}^\tau P_k^{m,n}(z) \right] = (1-z)^{k-\frac{m-n}{2}} \times \\ & \times \frac{k+1 - \frac{m-n}{2}}{k+1 + \frac{m-n}{2}} \left(\frac{m\Gamma(-m)}{\Gamma(1-m)} (z-1)^{\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}} \times \right. \\ & \left. \times {}^\tau P_{k+1}^{m+1,n+1}(z) + \left(k+1 - \frac{m+n}{2} \right) {}^\tau P_{k+1}^{m,n}(z) \right). \quad (28) \end{aligned}$$

Остаточно, врахувавши, що $\frac{m\Gamma(-m)}{\Gamma(1-m)} = -1$, з (28) після спрощень дістанемо співвідношення (20).

Висновки

Теореми 1 і 2 доведені за умов існування τ -узагальненої (за Райтом) приєднаної функції Лежандра першого роду ${}^\tau P_k^{m,n}(z)$. При доведенні використано відомі властивості τ -узагальненої (за Райтом) гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$ і зв'язок між функціями ${}^\tau P_k^{m,n}$ і ${}_2F_1$. Одержані нові результати є узагальненням співвідношень, отриманих автором в [11] для функції ${}^\tau P_\nu^\mu(z)$, яка є окремим випадком розглянутої функції ${}^\tau P_k^{m,n}(z)$ при $m = n = \mu$.

Із врахуванням перспективності одержаних наукових результатів для ширшого застосування теорії спеціальних функцій при розв'язанні складніших математичних та практичних задач планується дослідження та вивчення композиційних співвідношень для складнішої, τ, β -узагальненої функції Лежандра ${}^{\tau, \beta} P_k^{m,n}(z)$ та інших функцій.

А.А. Южакова

КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ τ -ОБОБЩЕННЫХ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА ПЕРВОГО РОДА ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$

Рассмотрена τ -обобщенная (по Райту) функция Лежандра ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$, сформулированы и доказаны теоремы о композиционных соотношениях и формулах дифференцирования для этой функции. При доказательстве использованы известные свойства τ -обобщенной (по Райту) гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$ и связь функций ${}^{\tau}P_k^{m,n}$ и ${}_2F_1$.

G.O. Yuzhakova

COMPOSITION FORMULAS FOR THE τ -GENERALIZED ASSOCIATED LEGENDRE FUNCTIONS OF THE ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ FIRST KIND

The paper considers τ -generalized (by Wright) ${}^{\tau}P_k^{m,n}(z)$ Legendre functions. By employing the known properties of τ -generalized (by Wright) ${}_2F_1(a, b; c; \xi)$ Gaussian hypergeometric function and the relation between ${}^{\tau}P_k^{m,n}$ and ${}_2F_1$ functions, we formulate and prove the theorem of composition relations and the theorem of differentiation formulas for these functions.

1. Virchenko N., Fedotova I. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications. — Singapore: World Scientific, 2001. — 195 p.
2. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимация. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
3. Saigo M., Glaeske H.-J. Fractional calculus operators involving the Gauss function on spaces $F_{p,\mu}$ and $F_{p,\mu}^1$ // Math. Nachr. — 1990. — **147**. — P. 285–306.
4. Kilbas A.A., Saigo M. H-Transforms: Theory and Applications. — Washington: Charman and Hall/CRC, 2004. — 390 p.
5. Andrews L.C., Askey R., Roy R. Special functions. — New York: Cambridge University Press, 1999.
6. Южакова Г.О. Про системи гібридних парних інтегральних рівнянь // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2005. — № 1. — С. 152–156.
7. Вірченко Н.О., Рум'янцева О.В. (τ, β) -Узагальнена гіпергеометрична функція Гаусса та її застосування // Там же. — 2008. — № 1. — С. 139–143.
8. Virchenko N. On a generalized Laugerre's function and its applications // J. "Fractional Calculus and Appl. Analysis". — 1999. — **2**, N 4. — P. 529–536.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965. — 294 с.
10. Вірченко Н.О. Про гіпергеометричні функції, їх узагальнення та застосування // Наукові записки АН ВШ України. — 2006. — **1**. — С. 20–25.
11. Южакова Г.О. Рекурентні співвідношення з узагальненими функціями Лежандра // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2009. — № 6. — С. 148–153.

Рекомендована Радою
Фізико-технічного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
28 травня 2010 року