

УДК 532.3:534.1

О.Ю. Швець, В.О. Сіренко

СТІЙКІСТЬ ПОЛОЖЕНЬ РІВНОВАГИ НЕІДЕАЛЬНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ БАК З РІДИНОЮ—ЕЛЕКТРОДВИГУН

Вступ

Багато сучасних машин, механізмів і технічних пристроїв як конструктивні елементи використовують циліндричні баки, частково заповнені рідиною. Тому дослідження коливань вільної поверхні рідини в циліндричних баках викликає великий науковий інтерес [1, 2].

Починаючи з 70-х років минулого сторіччя, для вивчення таких коливань вільної поверхні було запропоновано так звані маловимірні математичні моделі [3–7]. Для опису коливань вільної поверхні рідини такі моделі дають можливість застосовувати системи звичайних диференціальних рівнянь замість рівнянь у частинних похідних, які виникають при розгляді задачі в найбільш загальній постановці. За допомогою маловимірних моделей вдається отримати достатньо адекватний опис коливань рідини в баках. Але це стосується тільки випадків, коли потужність джерела збудження коливань рідини істотно перевищує потужність, яка споживається коливальним навантаженням (баком з рідиною). Такі випадки називаються ідеальними за Кононенком [8]. У переважній більшості практично важливих випадків потужність джерела збудження порівнювана з потужністю, яку споживає коливальне навантаження. У таких випадках, які називаються неідеальними за Кононенком [8], обов'язково необхідно враховувати взаємодію між джерелом збудження та коливальним навантаженням. Це призводить до суттєвого уточнення відповідних математичних моделей. Нехтування в неідеальних випадках взаємодією між джерелом збудження та коливальним навантаженням призводить до грубих помилок в опису динаміки досліджуваних систем [9].

Вперше математичну модель було побудовано для одного спрощеного неідеального випадку коливань рідини в циліндричному баку в праці [10]. В подальшому цю модель поширено на більш загальні випадки [9, 11–13].

Постановка задачі

Метою даної статті є виведення та аналіз умов стійкості положень рівноваги для одного типу неідеальної динамічної системи бак з рідиною—електродвигун. Такі питання майже не досліджувались у наведених вище працях [9, 11–13].

Математична модель системи бак з рідиною—електродвигун

Розглянемо випадок вертикального збудження електродвигуном обмеженої потужності платформи циліндричного бака, який частково заповнений рідиною. Схематично таку механічну систему наведено на рис. 1. Вал електродвигуна через кривошипно-шатунний механізм з'єднаний з платформою, на якій закріплено жорсткий циліндричний бак радіуса R , частково заповнений рідиною. Коли кривошип a повертається на кут Ψ , платформа отримує переміщення вигляду $v(t) = a \cos \Psi(t)$. Для опису коливань вільної поверхні рідини введемо циліндричну систему координат $Oxr\theta$ з початком на осі бака, на незбуреній поверхні рідини. Рівняння рельєфу вільної поверхні рідини запишемо у вигляді $x = \eta(r, \theta, t)$. Припустимо, що рідина є нев'язкою і нестисливою з щільністю ρ і заповнює циліндричний бак з перерізом S до глибини $x = -d$.

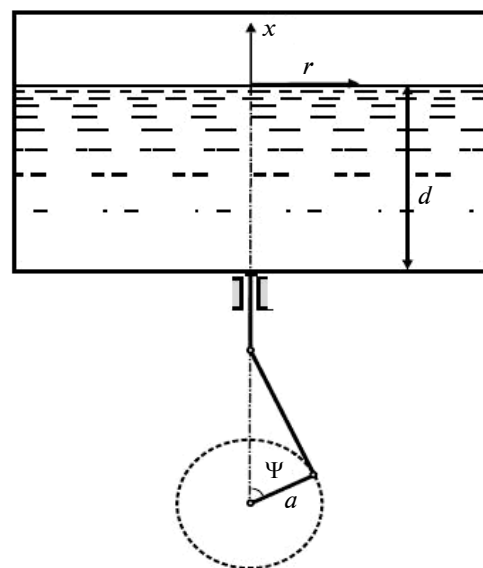


Рис. 1. Схема системи

Шукаємо функцію рельєфу поверхні рідини у вигляді розкладу по власних модах:

$$\eta(r, \theta, t) = \sum_{i,j} [q_{ij}^c(t) k_{ij}(r) \cos i\theta + q_{ij}^s(t) k_{ij}(r) \sin i\theta]. \quad (1)$$

Зберігаючи всі позначення, введені в [9], кінетичну енергію сукупної системи запишемо у вигляді

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{v}^2 + \frac{1}{2} \rho S \sum_{i,j,m,n} a_{ijmn} \dot{q}_{ij}^{c,s} \dot{q}_{mn}^{c,s}. \quad (2)$$

Тут I – момент інерції вала двигуна; m_0 – маса бака з рідиною; a_{ijmn} – нелінійні функції від $q_{ij}^{c,s}(t)$, $q_{mn}^{c,s}(t)$ [6, 7, 9, 13].

У свою чергу, потенціальна енергія переміщень вільної поверхні рідини становить [5, 9]

$$V = \rho \int_S \int_0^\eta (g + \ddot{v}) x dx = \frac{1}{2} \rho S (g + \ddot{v}) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s}, \quad (3)$$

де g – прискорення вільного падіння.

Тому лагранжіан системи набуває вигляду

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} m_0 a^2 \dot{\Psi}^2 \sin^2 \Psi + \frac{1}{2} \rho S \sum_{i,j,m,n} a_{ijmn} \dot{q}_{ij}^{c,s} \dot{q}_{mn}^{c,s} + \frac{1}{2} \rho S a (\dot{\Psi}^2 \cos \Psi + \ddot{\Psi} \sin \Psi) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s} - \frac{1}{2} \rho S g \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s}. \quad (4)$$

В результаті для $\Psi(t)$ одержуємо таке рівняння Лагранжа:

$$I \ddot{\Psi} = -2m_0 a^2 \dot{\Psi}^2 \sin \Psi \cos \Psi - m_0 a^2 \ddot{\Psi} \sin^2 \Psi + a \rho S (\dot{\Psi}^2 \sin \Psi - \ddot{\Psi} \cos \Psi) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s} - 2a \rho S \dot{\Psi} \cos \Psi \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} \dot{q}_{ij}^{c,s} + \Phi(\Psi) - H(\Psi). \quad (5)$$

Останні два доданки в правій частині рівняння (5) – рушійний момент і момент внутрішніх сил опору електродвигуна.

Нехай швидкість обертання вала $\dot{\Psi}(t)$ в усталених сталих режимах двигуна близька до $2\omega_1$, де ω_1 – власна частота основного тону коливань вільної поверхні, що відповідає модам $q_{11}^c(t) k_{11}(r) \cos \theta$ і $q_{11}^s(t) k_{11}(r) \sin \theta$.

Введемо в розгляд малий додатний параметр

$$\varepsilon = \omega_1 \sqrt{\frac{a}{g}}. \quad (6)$$

Припустимо також, що

$$\dot{\Psi} - 2\omega_1 = \varepsilon^2 \omega_1 \beta. \quad (7)$$

Колівання вільної поверхні рідини апроксимуємо коливаннями по основних і вторинних модах, амплітуди яких визначаємо у вигляді [9, 13]

$$q_{11}^c(t) = \varepsilon v \left[p_1(\tau) \cos \frac{\Psi}{2} + q_1(\tau) \sin \frac{\Psi}{2} \right],$$

$$q_{11}^s(t) = \varepsilon v \left[p_2(\tau) \cos \frac{\Psi}{2} + q_2(\tau) \sin \frac{\Psi}{2} \right], \quad (8)$$

$$q_{01}(t) = \varepsilon^2 v [A_{01}(\tau) \cos \Psi + B_{01}(\tau) \sin \Psi + C_{01}(\tau)],$$

$$q_{21}^{c,s}(t) = \varepsilon^2 v [A_{21}^{c,s}(\tau) \cos \Psi + B_{21}^{c,s}(\tau) \sin \Psi + C_{21}^{c,s}(\tau)].$$

Тут τ – повільний час; $\tau = \frac{1}{4} \varepsilon^2 \Psi$; $v =$

$$= \frac{R}{1,8412} \operatorname{th} \left(\frac{1,8412}{R} d \right).$$

Визначивши безрозмірні амплітуди $A_{ij}^{c,s}(\tau)$, $B_{ij}^{c,s}(\tau)$, $C_{ij}^{c,s}(\tau)$ вторинних мод за методом Майлса [6, 9] через амплітуди $p_1(\tau)$, $q_1(\tau)$, $p_2(\tau)$, $q_2(\tau)$ і застосувавши процедуру усереднення лагранжіана за швидким часом $\Psi(t)$, що явно входить до амплітуд домінантних мод, отримаємо таку систему рівнянь [9, 13]:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - \left[\beta + \frac{A}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_1 + \\ &\quad + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_2 + 2q_1, \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + \left[\beta + \frac{A}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 + \\ &\quad + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_2 + 2p_1, \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1 \beta - \mu_1 (p_1 q_1 + p_2 q_2), \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - \left[\beta + \frac{A}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_2 - \\ &\quad - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_1 + 2q_2, \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + \left[\beta + \frac{A}{2} (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_2 - \\ &\quad - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_1 + 2p_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Третє рівняння системи (9) отримано з рівняння для швидкості обертання вала $\dot{\Psi}$ (5) після застосування процедури усереднення і використання співвідношень (7), (8) [9, 12, 13]. Крім того, в системі рівнянь (9) введено такі позначення: $\alpha = -\frac{\delta}{\omega_1}$ – коефіцієнт додаткових сил демпфування $\varepsilon^2 \delta \dot{q}_{ij}^{c,s}$ коливань рідини; N_0, N_1 – сталі лінійної статичної характеристики електродвигуна: $N_3 = \frac{1}{\omega_1}(N_0 + 2N_1\omega_1)$;

$$\mu_1 = \frac{\rho S v R^2}{(1,8412)^2(2I + m_0 a^2)\omega_1^2}; A \text{ і } B - \text{константи, величини яких залежать від діаметра бака і глибини заповнення його рідиною [9, 13].}$$

Система рівнянь (9) використовується як основна математична модель при дослідженні динаміки коливань бака з рідиною, що збуджується електродвигуном обмеженої потужності. Зауважимо, що конкретний тип електродвигуна не є істотним у рамках математичної моделі (9) [8]. Суттєвим тут є концептуальне припущення, що потужність електродвигуна порівнянна з потужністю, яка споживається коливальним навантаженням (баком з рідиною). Зазначимо також, що математичну модель для ідеального збудження можна отримати із системи (9). У випадку ідеального збудження третє рівняння системи (9) треба відкинути, а в тих рівняннях, які залишаються, покласти $\beta = \text{const}$.

Виведення достатніх умов асимптотичної стійкості положень рівноваги

Система рівнянь (9) є нелінійною системою диференціальних рівнянь. Вона залежить від шести параметрів ($\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1$), які визначають вигляд її усталених розв'язків. Одним із важливих типів усталених розв'язків є положення рівноваги. Для визначення положень рівноваги потрібно знайти розв'язки такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \alpha p_1 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_1 + \\ + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_2 + 2q_1 = 0, \\ \alpha q_1 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 + \\ + B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_2 + 2p_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3 + N_1 \beta - \mu_1(p_1 q_1 + p_2 q_2) = 0, \\ \alpha p_2 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_2 - \\ - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) p_1 + 2q_2 = 0, \\ \alpha q_2 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_2 - \\ - B(p_1 q_2 - p_2 q_1) q_1 + 2p_2 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

У загальному випадку система алгебраїчних рівнянь (10) може мати нескінченну кількість розв'язків, кожному з яких відповідає положення рівноваги системи (9). Зрозуміло, що параметри електродвигуна N_1, N_3 та мультипараметр μ_1 (який характеризує взаємозв'язок між електродвигуном та баком з рідиною) мають визначальне значення як на існування та кількість положень рівноваги системи (9), так і на конкретні величини фазових координат можливих положень рівноваги.

Нехай $p_{10}, q_{10}, \beta_0, p_{20}, q_{20}$ – один із можливих розв'язків системи рівнянь (10). Складемо систему рівнянь у варіаціях, що відповідає системі (9). Вона матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta p_1(\tau)}{d\tau} = (\alpha - A p_{10} q_{10} + B p_{20} q_{20}) \delta p_1 - \left[\beta_0 + \right. \\ \left. + \frac{A}{2}(p_{10}^2 + 3q_{10}^2 + p_{20}^2 + q_{20}^2) + B p_{20}^2 - 2 \right] \delta q_1 - \\ - q_{10} \delta \beta - [(A + 2B) p_{20} q_{10} - B p_{10} q_{20}] \delta p_2 - \\ - (A q_{20} q_{10} - B p_{10} p_{20}) \delta q_2, \\ \frac{d\delta q_1(\tau)}{d\tau} = \left[\beta_0 + \frac{A}{2}(3p_{10}^2 + q_{10}^2 + p_{20}^2 + q_{20}^2) + \right. \\ \left. + B q_{20}^2 + 2 \right] \delta p_1 + (\alpha + A p_{10} q_{10} - B p_{20} q_{20}) \delta q_1 + \\ + p_{10} \delta \beta + (A p_{10} p_{20} - B q_{10} q_{20}) \delta p_2 + \\ + [(A + 2B) p_{10} q_{20} - B p_{20} q_{10}] \delta q_2, \\ \frac{d\delta \beta(\tau)}{d\tau} = -\mu_1 q_{10} \delta p_1 - \mu_1 p_{10} \delta q_1 + N_1 \delta \beta - \\ - \mu_1 q_{20} \delta p_2 - \mu_1 p_{20} \delta q_2, \\ \frac{d\delta p_2(\tau)}{d\tau} = -[(A + 2B) p_{10} q_{20} - B p_{20} q_{10}] \delta p_1 - \\ - (A q_{10} q_2 - B p_{10} p_{20}) \delta q_1 - q_{20} \delta \beta + (\alpha - \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 & -Ap_{20}q_{20} + Bp_{10}q_{10})\delta p_2 - \left[\beta_0 + \right. \\
 & \left. + \frac{A}{2}(p_{10}^2 + q_{10}^2 + p_{20}^2 + 3q_{20}^2) + Bp_{10}^2 - 2 \right] \delta q_2, \\
 & \frac{d\delta q_2(\tau)}{d\tau} = (Ap_{10}p_{20} - Bq_{10}q_{20})\delta p_1 + \\
 & + [(A + 2B)p_{20}q_{10} - Bp_{10}q_{20}]\delta q_1 + p_{20}\delta\beta + \\
 & + \left[\beta_0 + \frac{A}{2}(p_{10}^2 + q_{10}^2 + 3p_{20}^2 + q_{20}^2) + \right. \\
 & \left. + Bq_{10}^2 + 2 \right] \delta p_2 + (\alpha + Ap_{20}q_{20} - Bp_{10}q_{10})\delta q_2.
 \end{aligned}$$

Складаючи характеристичне рівняння системи у варіаціях (11) та застосовуючи критерій Гурвіца, отримуємо такі достатні умови асимптотичної стійкості положень рівноваги системи (9):

$$b_5 > 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 & b_1b_2b_3b_4 - b_1b_5b_2^2 - b_1^2b_4^2 + 2b_1b_4b_5 - \\
 & - b_3^2b_4 + b_3b_2b_5 - b_5^2 > 0, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$b_1b_2b_3 - b_4b_1^2 - b_3^2 + b_5b_1 > 0, \quad (14)$$

$$b_1b_2 - b_3 > 0, \quad (15)$$

$$b_1 > 0. \quad (16)$$

У формулах (12)–(16) прийнято такі позначення:

$$b_5 = \det C; \quad C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{42} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{51} & -a_{41} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & -a_{14} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix};$$

$$a_{11} = \alpha - Ap_{10}q_{10} + Bp_{20}q_{20};$$

$$a_{12} = -\left[\beta_0 + \frac{A}{2}(p_{10}^2 + 3q_{10}^2 + p_{20}^2 + q_{20}^2) + Bp_{20}^2 - 2 \right];$$

$$a_{13} = -q_{10};$$

$$a_{14} = -a_{52} = -[(A + 2B)p_{20}q_{10} - Bp_{10}q_{20}];$$

$$a_{15} = a_{42} = -(Aq_{10}q_{20} - Bp_{10}p_{20});$$

$$a_{21} = \beta_0 + \frac{A}{2}(3p_{10}^2 + q_{10}^2 + p_{20}^2 + q_{20}^2) + Bq_{20}^2 + 2;$$

$$a_{22} = \alpha + Ap_{10}q_{10} - Bp_{20}q_{20}; \quad a_{23} = p_{10};$$

$$a_{24} = a_{51} = Ap_{10}p_{20} - Bq_{10}q_{20};$$

$$a_{25} = -a_{41} = (A + 2B)p_{10}q_{20} - Bp_{20}q_{10};$$

$$a_{31} = -\mu_1q_1; \quad a_{32} = -\mu_1p_1; \quad a_{33} = N_1;$$

$$a_{34} = -\mu_1q_2; \quad a_{35} = -\mu_1p_2; \quad a_{43} = -q_{20};$$

$$a_{44} = \alpha - Ap_{20}q_{20} + Bp_{10}q_{10};$$

$$a_{45} = -\left[\beta_0 + \frac{A}{2}(p_{10}^2 + q_{10}^2 + p_{20}^2 + 3q_{20}^2) + Bp_{10}^2 - 2 \right];$$

$$a_{53} = p_{20}; \quad (17)$$

$$a_{54} = \beta_0 + \frac{A}{2}(p_{10}^2 + q_{10}^2 + 3p_{20}^2 + q_{20}^2) + Bq_{10}^2 + 2;$$

$$a_{55} = \alpha + Ap_{20}q_{20} - Bp_{10}q_{10};$$

$$b_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{55});$$

$$b_2 = a_{11}(a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{55}) + a_{22}(a_{33} +$$

$$+ a_{44} + a_{55}) + a_{33}(a_{44} + a_{55}) - 2a_{14}a_{41} -$$

$$- 2a_{51}a_{42} - a_{23}a_{32} - a_{53}a_{35} - a_{43}a_{34} -$$

$$- a_{45}a_{54} + a_{44}a_{55} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31};$$

$$b_3 = a_{11}[a_{32}a_{23} + a_{14}a_{41} - a_{22}(a_{33} + a_{44} + a_{55}) +$$

$$+ a_{53}a_{35} + a_{43}a_{34} + a_{45}a_{54} - a_{44}(a_{33} + a_{55}) -$$

$$- a_{33}a_{55} + a_{42}a_{51}] + a_{42}[a_{41}a_{54} + a_{51}(a_{33} + a_{55}) -$$

$$- a_{23}a_{34}] + a_{32}[a_{53}a_{41} - a_{43}a_{51} + a_{23}(a_{44} + a_{55})] -$$

$$- a_{33}[a_{44}a_{55} - a_{45}a_{54} + a_{22}(a_{44} + a_{55})] +$$

$$+ a_{35}[a_{53}(a_{22} + a_{44}) - a_{43}a_{54} + a_{14}a_{23}] -$$

$$- a_{34}[a_{53}a_{45} - a_{43}(a_{22} + a_{55})] + a_{22}(a_{45}a_{54} -$$

$$- a_{44}a_{55}) + a_{14}a_{41}(a_{33} + a_{44}) + a_{14}a_{51}a_{45} +$$

$$+ a_{21}[a_{12}(a_{33} + a_{44} + a_{55}) - a_{32}a_{13}] +$$

$$+ a_{31}[a_{13}(a_{22} + a_{44} + a_{55}) - a_{43}a_{14} + a_{53}a_{42} -$$

$$- a_{12}a_{23}] + a_{41}[a_{14}(a_{22} + a_{33} + a_{55}) - a_{12}a_{51} -$$

$$- a_{13}a_{34} - a_{42}a_{54}] + a_{51}[a_{33}a_{42} - a_{13}a_{35} +$$

$$+ a_{12}a_{41} + a_{42}(a_{22} + a_{44}) - a_{14}a_{45}];$$

$$\begin{aligned}
b_4 = & -a_{11}\{a_{42}[a_{41}a_{54} + a_{51}(a_{33} + a_{55}) - a_{23}a_{34}] + \\
& + a_{32}[a_{53}a_{41} - a_{43}a_{51} + a_{23}(a_{44} + a_{55})] - \\
& - a_{33}[a_{44}a_{55} - a_{45}a_{54} + a_{22}(a_{44} + a_{55})] + \\
& + a_{35}[a_{53}(a_{22} + a_{44}) - a_{43}a_{54} + a_{14}a_{23}] - \\
& - a_{34}[a_{53}a_{45} - a_{43}(a_{22} + a_{55})] + a_{22}(a_{45}a_{54} - \\
& - a_{44}a_{55}) + a_{14}a_{41}(a_{33} + a_{44}) + a_{14}a_{51}a_{45} + \\
& + a_{55}(a_{22}a_{33}a_{44} + a_{42}a_{23}a_{34}) - a_{14}[a_{23}(a_{35}a_{44} - \\
& - a_{34}a_{45}) - a_{43}(a_{51}a_{35} + a_{41}a_{34}) + a_{33}(a_{51}a_{45} + \\
& + a_{41}a_{44}) - a_{22}a_{35}(a_{53}a_{44} - a_{43}a_{54})] - \\
& - a_{32}[a_{41}(a_{53}a_{44} - a_{43}a_{54}) + a_{51}(a_{53}a_{45} - \\
& - a_{43}a_{55}) + a_{23}(a_{44}a_{55} - a_{45}a_{54})] + \\
& + a_{42}[a_{53}(a_{41}a_{34} + a_{51}a_{35}) - a_{33}(a_{41}a_{54} - \\
& - a_{51}a_{55})] - a_{54}(a_{23}a_{35}a_{42} + a_{22}a_{33}a_{45}) + \\
& + a_{22}a_{34}(a_{53}a_{45} - a_{43}a_{55}) + a_{21}\{a_{12}[a_{53}a_{35} - \\
& - a_{44}a_{55} + a_{43}a_{34} + a_{45}a_{54} - a_{33}(a_{44} + a_{55})] - \\
& - a_{42}(a_{32}a_{53} - a_{14}a_{55} + a_{13}a_{34} + a_{42}a_{54}) + \\
& + a_{14}a_{13}a_{35} + a_{32}(a_{13}a_{44} - a_{43}a_{14} + a_{13}a_{55})\} - \\
& - a_{31}\{a_{22}[a_{13}(a_{44} + a_{55}) - a_{43}a_{14} - a_{53}a_{42}] - \\
& - a_{12}[a_{53}a_{41} - a_{43}a_{51} + a_{23}(a_{44} + a_{55})] - \\
& - a_{53}(a_{42}a_{44} - a_{14}a_{45}) - a_{14}(a_{43}a_{55} + a_{13}a_{41}) - \\
& - a_{13}(a_{45}a_{54} - a_{44}a_{55}) - a_{42}(a_{13}a_{51} - a_{43}a_{54})\} + \\
& + a_{41}\{a_{14}[a_{14}a_{41} + a_{42}a_{51} + a_{32}a_{23} + a_{53}a_{35} - \\
& - a_{33}a_{55}] + a_{12}[a_{51}(a_{33} + a_{55}) + a_{41}a_{54} - \\
& - a_{23}a_{34}] + a_{22}[a_{13}a_{34} + a_{42}a_{54} - a_{14}(a_{33} + \\
& + a_{55})] - a_{13}(a_{32}a_{51} + a_{35}a_{54} - a_{34}a_{55}) + \\
& + a_{42}(a_{33}a_{54} - a_{53}a_{34})\} - a_{51}\{a_{12}[a_{41}(a_{33} + \\
& + a_{44}) + a_{51}a_{45} + a_{23}a_{35}] - a_{42}[a_{43}a_{34} + \\
& + a_{14}a_{41} + a_{42}a_{51} + a_{32}a_{23} - a_{33}(a_{22} + a_{44})] - \\
& - a_{22}(a_{13}a_{35} - a_{42}a_{44} + a_{14}a_{45}) - a_{13}(a_{32}a_{41} + \\
& + a_{35}a_{44} - a_{34}a_{45}) + a_{14}(a_{35}a_{43} - a_{33}a_{45})\}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що умова стійкості (16) збігається з умовою дисипативності системи (9) і, як встановлено в [9, 13], завжди виконується для систем, існування яких можливе з фізичної точки зору.

Навіть поверхневий аналіз отриманих умов стійкості показує їх залежність від параметрів електродвигуна і мультипараметра μ_1 , який характеризує взаємодію між двигуном та баком з рідиною. Це означає, що застосування ідеальної моделі, в якій нехтується взаємозв'язок між коливальною підсистемою та джерелом збудження, може призвести до грубих помилок при визначенні стійкості того чи іншого положення рівноваги. Так, теоретично очікувані стійкі положення рівноваги в реальному експерименті можуть виявитися нестійкими, і навпаки.

Практичне знаходження положень рівноваги та аналіз умов їх стійкості

Отримані умови асимптотичної стійкості положень рівноваги (12)–(16) є надзвичайно громіздкими, що робить практично неможливим аналітичне вивчення впливу різних параметрів системи (9) на стійкість положень рівноваги. Відзначимо, що в загальному випадку неможливе і аналітичне знаходження самих положень рівноваги, оскільки вони є розв'язками нелінійної системи алгебраїчних рівнянь п'ятого порядку. Тому для подолання цих труднощів за допомогою оболонки Borland Delphi 7 [14] було створено комп'ютерний програмний пакет для чисельного дослідження системи (9). У зазначеному програмному пакеті проведено реалізацію чисельного методу найшвидшого спуску [15] для знаходження розв'язків нелінійної системи алгебраїчних рівнянь.

Пакет працює за таким алгоритмом:

- 1) параметрам системи ($\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1$) надаються конкретні чисельні значення;
- 2) задаються початкові умови для фазових змінних $p_1, q_1, \beta, p_2, q_2$;
- 3) за допомогою пакета знаходяться положення рівноваги (в околі початкових умов) та проводиться перевірка виконання кожної з умов стійкості (12)–(16);
- 4) значення координат положень рівноваги та висновок стосовно їх стійкості виводяться на монітор комп'ютера;
- 5) забезпечується збереження отриманих результатів і на електронних носіях інформації.

Створений програмний пакет дає можливість простежити за впливом всіх параметрів системи на існування та стійкість її положень рівноваги. За його допомогою можна побудувати різноманітні області стійкості та нестійкості положень рівноваги. Знання таких областей,

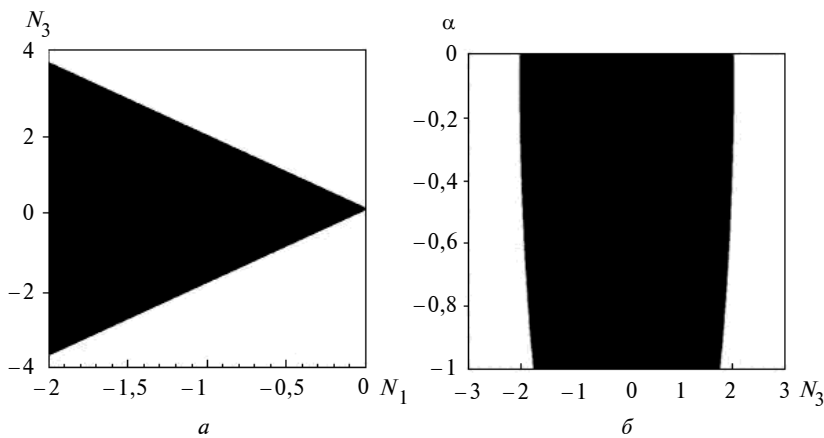


Рис. 2. Области стійкості положення рівноваги типу (18)

крім важливої інформації про стійкість положень рівноваги, дає змогу істотно спростити процедуру знаходження в просторі параметрів системи (9) областей існування детермінованого хаосу.

Як приклад розглянемо вплив параметрів системи (9) на стійкість одного типу її положень рівноваги. Очевидно, що система рівнянь (10) завжди має розв'язок вигляду

$$p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = 0, \beta = -\frac{N_3}{N_1}. \quad (18)$$

Розв'язку (18) відповідає важливий для застосувань тип положення рівноваги системи (9), який характеризується нульовими амплітудами коливань вільної поверхні рідини за домінуючими модами. Таке положення рівноваги завжди існує, оскільки випадок $N_1 = 0$ неможливий з фізичної точки зору [9, 13].

Припустимо, як і в [9, 13], що $A = 1,12$, $B = -1,531$, $\mu_1 = 4,5$. На рис. 2, а наведено побудовані за допомогою створеного програмного

пакета області стійкості положення рівноваги типу (18) залежно від змін параметрів N_1 , N_3 ($\alpha = -0,8$), на рис. 2, б – залежно від змін параметрів α , N_3 ($N_1 = -1$). Білим кольором на цих рисунках позначено області стійкості, а чорним – нестійкості. Рисунки наочно ілюструють вплив зміни вибраних параметрів як джерела збудження, так і коливальної системи на стійкість положень рівноваги з нульовими амплітудами коливань за домінуючими модами.

Висновки

Проведені в статті дослідження свідчать про хибність застосування ідеальних математичних моделей при вивченні регулярних режимів коливань рідини в циліндричних баках. Тільки застосування неідеальних моделей дає можливість зробити правильний висновок про стійкість положень рівноваги динамічної системи бак з рідиною–електродвигун. Створений на основі отриманих у статті достатніх умов асимптотичної стійкості комп'ютерний пакет дає можливість знаходити положення рівноваги зазначеної вище системи та досліджувати стійкість цих положень рівноваги.

У подальших наших дослідженнях надзвичайно важливою для застосувань системи бак з рідиною–електродвигун передбачається широке застосування отриманих умов стійкості для пошуку областей детермінованого хаосу в просторі параметрів системи.

А.Ю. Швець, В.А. Сиренко

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕИДЕАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БАК С ЖИДКОСТЬЮ–ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЬ

Получены достаточные условия асимптотической устойчивости положений равновесия неидеальной динамической системы бак с жидкостью–электродвигатель. Разработан компьютерный пакет для практического нахождения положений равновесия и исследования их устойчивости. Показана ошибочность применения идеальных математических моделей для исследования положений равновесия.

A.Yu. Shvets, V.A. Sirenko

STABILITY OF EQUILIBRIUM POSITIONS OF NONIDEAL DYNAMIC SYSTEM TANK WITH LIQUID–ELECTRIC MOTOR

We obtain the sufficient conditions of asymptotic stability of equilibrium positions of nonideal dynamical system tank with liquid-electric motor. We also develop the computer package for a practical finding of equilibrium positions and research of their stability and show the foulness of application of ideal mathematical models for research of equilibrium positions is shown.

1. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. – 206 с.
2. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1983. – 296 с.
3. Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. – К.: Наук. думка, 1975. – 136 с.
4. Miles J.W. Nonlinear surface waves in closed basins // J. Fluid Mech. – 1976. – 75, N 3. – P. 419–448.
5. Miles J.W. Internally resonant surface waves in circular cylinder // Ibid. – 1984. – 149. – P. 1–14.
6. Miles J.W. Resonantly forced surface waves in circular cylinder // Ibid. – P. 15–31.
7. Miles J.W., Henderson D. Parametrically forced surface waves // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1990. – 22. – P. 143–165.
8. Kononenko V.O. Vibrating system with a limited power-supply. – London, Pliffe, 1969. – 236 p.
9. Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. – М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исследований, 2008. – 280 с.
10. Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Регулярные и хаотические поверхностные волны в жидкости при ограниченном возбуждении колебаний цилиндрического бака // Прикл. механика. – 1990. – 26, № 8. – С. 85–93.
11. Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Свойства хаотических колебаний жидкости в цилиндрических баках // Там же. – 1992. – 28, № 6. – С. 52–61.
12. Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Параметрический резонанс в системе “жидкость в баке–электродвигатель” // Там же. – 1993. – 29, № 9. – С. 52–61.
13. Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // J. Fluids & Structures. – 1994. – 8, N 1. – P. 1–18.
14. Керман М.К. Программирование и отладка в Delphi 7: Учеб. курс. – М.: Диалектика-Вильямс, 2004. – 720 с.
15. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
31 грудня 2008 року