

ФУНКЦІЇ З ФРАКТАЛЬНИМИ МНОЖИНАМИ РІВНІВ

С.П. РАТУШНЯК

Нехай $0 < e_0 < e_1$, $A_2 \equiv \{e_0, e_1\}$ – алфавіт, $L_2 \equiv A_2 \times A_2 \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту A_2 .

Теорема 1. [1] *Якщо $e_0 e_1 \leq \frac{1}{2}$, то для довільного числа $x \in [d_0; d_1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L_2$ така, що*

$$x = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots \equiv [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], \quad (1)$$

де $d_0 = [0; (e_1, e_0)]$, $d_1 = [0; (e_0, e_1)]$.

Розклад числа x в ланцюговий дріб виду (1) (ланцюговий A_2 -дріб) називається ланцюговим A_2 -представленням числа x , а скорочений запис виду $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ – його ланцюговим A_2 -зображенням.

Якщо $e_0 e_1 < \frac{1}{2}$, то множиною значень усіх ланцюгових A_2 -дробів є відрізок $[d_0; d_1]$, при цьому майже всі числа цього відрізка мають нескінченну кількість різних розкладів у нескінченні ланцюгові A_2 -дробі.

Якщо $e_0 e_1 = \frac{1}{2}$, то числа з $[d_0; d_1]$ розкладаються у нескінченні A_2 -дробі не більш ніж двома способами, причому числа, що мають два представлення, утворюють зліченну всюди щільну множину в $[d_0; d_1]$. Це числа виду $[0; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, e_0, (e_0, e_1)] = [0; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, e_1, (e_1, e_0)]$. Такі числа називаються A_2 -бінарні. Решта чисел (A_2 -унарні) мають єдине представлення.

Ланцюгове A_2 -зображення чисел можна перекодувати засобами класичного двійкового алфавіту за правилом:

$$[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^A, \text{ де } \alpha_n = 2a_n - 1, \alpha_n \in A = \{0; 1\}.$$

Розглядається функція f , означена рівністю

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^{-n}\right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{A_2}, \alpha_n \in A. \quad (2)$$

Теорема 2. *Якщо $e_0 e_1 < \frac{1}{2}$, то функція f є неперервною функцією з фрактальними множинами рівнів.*

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних властивостей функції f .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Prats'ovytyi M.V. *A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry* // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, Київ, УКРАЇНА
Email address: `ratush404@gmail.com`