

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»  
(КПІ ім. Ігоря Сікорського)

ФАКУЛЬТЕТ БІОМЕДИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ  
кафедра БІОМЕДИЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

«До захисту допущено»

В.о. завідувач кафедри БМК

\_\_\_\_\_ Євген НАСТЕНКО

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2023р.

**Дипломна робота**  
на здобуття ступеня бакалавра  
за освітньо-професійною програмою  
«Комп'ютерні технології в біології та медицині»  
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»

на тему: \_\_\_\_\_ **Частотно-часовий аналіз біомедичних сигналів** \_\_\_\_\_

Виконав: студент IV курсу, групи БС-93

**СТАНІСЛАВСЬКИЙ ЮРІЙ ВЛАДИСЛАВОВИЧ**

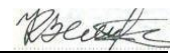
(прізвище, ім'я, по батькові)



(підпис)

Керівник: *професор. каф. біомедичної кібернетики (БМК)*  
*доцент., д.т.н., Зеленський Кирило Харитонович*

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ім'я, по батькові)




(підпис)

Рецензент: *доцент каф. біомедичної інженерії, доцент,*  
*к.ф-мат.н., Соломін Андрій Вячеславович*

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент \_\_\_\_\_  \_\_\_\_\_  
(підпис)

Київ – 2023 року

**Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

**Факультет біомедичної інженерії**

**Кафедра біомедичної кібернетики**

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 122 «Комп'ютерні науки»

Освітньо-професійна програма «Комп'ютерні технології в біології та медицині»

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

В.о. завідувач кафедри БМК

 Євген НАСТЕНКО

« 30 » травня 2023 р.

**ЗАВДАННЯ**

**на дипломну роботу студенту**

**СТАНІСЛАВСЬКОМУ ЮРІЮ ВЛАДИСЛАВОВИЧУ**

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи

**Частотно-часовий аналіз біомедичних сигналів**

Керівник роботи

***Зеленський Кирило Харитонович, д.т.н., доцент***

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «31 » травня 2023 р. №2106-с

2. Термін подання студентом роботи

**06-08 червня 2023р.**

3. Вихідні дані до роботи: *сигнал електроенцефалограми.*

4. Зміст роботи: *анотації (на двох мовах), вступ, огляд літературних джерел, практична частина, висновки, список використаних джерел.*

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо)

- 10 слайдів,
- 23 рисунок,
- 1 таблиця.

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання **30 травня 2023 року.**

### Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Отримати завдання за темою ДР на практику	До 15.02.2023р.	<i>виконано</i>
2	Переддипломна практика	За графіком	<i>виконано</i>
3	Виконання розділів ДР (Вступ, аналітичний огляд літературних джерел, теоретична частина)	До кінця практики	<i>виконано</i>
4	Виконання розділів ДР (практична частина, загальні висновки, список джерел)	Не пізніше 1 тижня до засідання каф-ри	<i>виконано</i>
5	Перевірка ДР науковим керівником	Не пізніше 1 тижня до засідання каф-ри	<i>виконано</i>
6	Подання в електронному вигляді ДР та анотації до неї на перевірку нормоконтролера та плагіат (UNICHECK).	---- « -----	<i>виконано</i>
7	Надання документів на засідання кафедри	За день до засідання	<i>виконано</i>
8	Предзахист ДР та допуск до захисту дисертації	Згідно плану каф.	<i>виконано</i>
9	Подання ДР рецензенту. Отримання рецензії.	До подання пакету документів до ЕК	<i>виконано</i>
10	Подання пакету документів по ДР та супровідних до неї документів до захисту в ЕК <sup>1</sup>	За 5 днів до дати захисту ДР за графіком	<i>виконано</i>
11	Захист ДР в ЕК		

Студент




(підпис)

**Юрій СТАНІСЛАСЬКИЙ**

(ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

Керівник ДР



(підпис)

**Кирило ЗЕЛЕНСЬКИЙ**

(ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

Нормоконтролер

(підпис)

**Галина КОРНІЄНКО**

(ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

<sup>1</sup> не пізніше ніж за 5 днів до затвердженої дати захисту ДР в ЕК

## АНОТАЦІЯ

Дипломна робота на тему «Частотно-часовий аналіз біомедичних сигналів» була виконана студентом 4 курсу, групи БС-93 *Станіславським Юрієм Владиславовичем* із спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» за освітньо-професійною програмою «Комп'ютерні технології в біології та медицині» ФБМІ. Дана робота складається із анотацій (на двох мовах), вступу, огляд літературних джерел, теоретичної частини, практичної частини, висновків та списку використаних джерел. Також за даною темою було проведено розрахунок економічного ефекту. Список літературних джерел налічує 29 джерел. У роботі міститься 23 рисунка та 1 таблиця. Загальний обсяг роботи становить 69 сторінок.

**Актуальність теми.** Загальною тенденцією сучасного етапу розвитку методів та інструментальних засобів вимірювання і опрацювання біосигналів є підвищення достовірності та оперативності результатів дослідження. Частотно-часовий аналіз біомедичних сигналів є одним з основних підходів, що дозволяє отримати детальне уявлення про зміни в часі та частотному домені цих сигналів. Він використовується для виявлення характерних особливостей сигналу, які можуть містити важливу інформацію про функціональний стан органів та систем організму.

### **Мета і завдання роботи.**

Метою даної дипломної роботи є виявлення, обґрунтування та програмна реалізація найефективніших методів аналізу сигналів електроенцефалографії.

Для досягнення поставленої мети вирішувалися такі задачі:

- аналіз відомих методів дослідження сигналів електроенцефалографії;
- дослідження ефективності методів аналізу сигналів електроенцефалографії;
- дослідження електроенцефалографії методами вейвлет аналізу.
- програмна реалізація вейвлет аналізу.

**Використані методи.** Для створення програми було написано кодову реалізацію програми мовою програмування та середовище MATLAB.

**Отримані результати.** Створено програмний додаток, що реалізує частотно-часовий аналіз, на основі обраних методів дослідження, сигналу електроенцефалографії.

**Ключові слова.** Електроенцефалографія, вейвлет, Морле, аналіз, сигнал.

***Бібліографічний опис ДР***

Станіславський Ю.В. Частотно-часовий аналіз біомедичних сигналів : дипломна роб. бакалавра : 122 Комп'ютерні науки / Станіславський Юрій Владиславович. – Київ, 2023. – 69 с.

## ABSTRACT

Diploma work on the topic "Frequency-time analysis of biomedical signals" was performed by the 4th year student, group BS-93 Stanislavskiy Yurii, specialty 122 "Computer Science" under the educational and professional program "Computer Technologies in Biology and Medicine" of FBMI. This work consists of abstracts (in two languages), introduction, literature review, theoretical part, practical part, conclusions and references. Also, the economic effect was calculated on this topic. The list of references includes 29 sources. The paper contains 23 figures and 1 table. The total volume of the work is 69 pages.

***Actuality of theme.*** The general trend in the current stage of development of methods and tools for measuring and processing bio signals is to increase the reliability and efficiency of research results. Time-frequency analysis of biomedical signals is one of the main approaches that allows to get a detailed understanding of changes in the time and frequency domain of these signals. It is used to identify signal characteristics that may contain important information about the functional state of organs and body systems.

***The purpose and tasks of the work.***

The purpose of this thesis is to identify, substantiate and implement the most effective methods for analysing electroencephalography signals.

To achieve this goal, the following tasks were solved:

- analysis of known methods for studying electroencephalography signals;
- studying the effectiveness of methods for analysing electroencephalography signals;
- study of electroencephalography by wavelet analysis;
- software implementation of wavelet analysis;

***Used methods.*** To create the program, we wrote a code implementation in the programming language and MATLAB environment.

***Obtained results.*** A software application has been created that implements time-frequency analysis of the electroencephalography signal based on the selected research methods.

***Keywords.*** Electroencephalography, wavelet, Morlet, analysis, signal

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, ТЕРМІНІВ .....	10
ВСТУП.....	11
РОЗДІЛ 1 ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД ДЖЕРЕЛ.....	14
1.1. Визначення біомедичних сигналів .....	14
1.2. Види біомедичних сигналів та їх джерела .....	15
Висновки до розділу 1.....	19
РОЗДІЛ 2 ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА .....	21
2.1 Електроенцефалографія .....	21
2.2 Частотно-часовий аналіз біомедичних сигналів.....	23
2.3 Вейвлет-аналіз .....	24
2.4 Неперервне вейвлет-перетворення.....	25
2.4.1 Ознаки вейвлету .....	28
2.4.2 Базисні вейвлети.....	29
2.4.3 Обчислення та візуалізація вейвлет-перетворення.....	31
2.5 Дискретне вейвлет-перетворення.....	36
2.5.1 Кратно-масштабний аналіз сигналів .....	37
2.5.2 Вейвлет-перетворення в частотній області .....	39
Висновки до розділу 2.....	42
РОЗДІЛ 3 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА .....	44
3.1 Вибір інструментів для розробки інформаційної системи.....	44
3.2 Програмна реалізація та аналіз її роботи .....	45
3.2.1 Дискретне вейвлет-перетворення .....	46
3.2.2 Вейвлет Морле.....	51
3.2.3 Перетворення Фур'є.....	51

3.2.4 Неперервне вейвлет-перетворення .....	60
3.4 Розрахунок економічного ефекту .....	64
Висновки до розділу 3.....	64
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ .....	66
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	67

## **ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, ТЕРМІНІВ**

ОС – Операційна система;

ЕЕГ – Електроенцефалографія;

ДВП – Дискретне вейвлет-перетворення;

ДПФ – Дискретне перетворення Фур'є;

НВП – Неперервне вейвлет-перетворення;

КМА - Кратно-масштабний аналіз;

## ВСТУП

У сучасному світі біомедична інженерія є важливою галуззю, що поєднує медичні науки та інженерію для розробки і застосування новітніх технологій у медицині. Одним з ключових аспектів цієї галузі є біомедичні сигнали, аналіз яких дозволяє отримати цінну інформацію про стан здоров'я людини, діагностувати захворювання та встановлювати ефективні методи лікування.

Ця робота зосереджена на дослідженні характеристик електроенцефалографії, які становлять інтегральну частину частотно-часового аналізу сигналу. Електроенцефалографія (ЕЕГ) продовжує бути актуальною технологією, використовуваною в медицині, нейронауці, психології та навіть у галузі розвитку інтерфейсів мозку-комп'ютер.

Сигнал, що отримується за допомогою ЕЕГ, являє собою відображення електричної активності мозку. Коли нейрони у мозку спілкуються між собою, вони створюють електричні імпульси, які можна засікти зовні шкіри голови. Сигнал, отриманий в результаті ЕЕГ, характеризується за допомогою частоти та амплітуди.

Електроенцефалограми (ЕЕГ) активно використовуються у медицині для діагностики неврологічних хвороб, таких як епілепсія, хвороба Паркінсона та інших. Традиційні методи аналізу ЕЕГ, які застосовуються у клінічній діагностиці, базуються на вимірюванні амплітуди ЕЕГ впродовж певного часу після стимулювання, і це залежить від частоти квантування сигналу.

На основі швидкості реакції на стимулювання, викликані потенціали поділяються на компоненти, які викликають швидку, середню або тривалу реакцію мозку. Зміни в амплітуді та латентності цих компонентів можуть свідчити про наявність різних хвороб у ранніх стадіях. Такі дослідження можуть бути довгими та дорогими, і мають ризик суб'єктивної оцінки дослідника.

Тому, сучасні методи діагностики зосереджуються на автоматизації аналізу ЕЕГ. Зазвичай, це здійснюється шляхом отримання спектральних характеристик ЕЕГ сигналу за допомогою Фур'є-перетворень, але такий підхід

не враховує нестационарність ЕЕГ сигналів, на відміну від перетворень Фур'є, які призначені для аналізу стаціонарних сигналів.

Тому, сьогодні актуальним є розробка алгоритмів для класифікації ЕЕГ сигналів, що використовують вейвлет-перетворення. З урахуванням сучасних обчислювальних можливостей, використовують дискретне та неперервне вейвлет-перетворення для розкладання ЕЕГ сигналу на різні рівні роздільної здатності. Такий підхід дозволяє класифікувати ЕЕГ з урахуванням відсоткового розподілу енергії сигналу, застосовуючи нейронні мережі для цієї мети.

**Актуальність теми.** Загальною тенденцією сучасного етапу розвитку методів та інструментальних засобів вимірювання і опрацювання біосигналів є підвищення достовірності та оперативності результатів дослідження. Частотно-часовий аналіз біомедичних сигналів є одним з основних підходів, що дозволяє отримати детальне уявлення про зміни в часі та частотному домені цих сигналів. Він використовується для виявлення характерних особливостей сигналу, які можуть містити важливу інформацію про функціональний стан органів та систем організму.

**Вихідні данні.** Сигнал електроенцефалографії.

**Мета і завдання роботи.**

Метою даної дипломної роботи є виявлення, обґрунтування та програмна реалізація найефективніших методів аналізу сигналів електроенцефалографії.

Для досягнення поставленої мети вирішувалися такі задачі:

- аналіз відомих методів дослідження сигналів електроенцефалографії;
- дослідження ефективності методів аналізу сигналів електроенцефалографії;
- дослідження електроенцефалографії методами вейвлет аналізу.
- програмна реалізація вейвлет аналізу.

**Структура роботи.**

Дана робота складається із анотацій (на двох мовах), вступу, огляду літературних джерел, теоретичної частини, практичної частини, висновків та списку використаних джерел. Також за даною темою було проведено розрахунок економічного ефекту. Список літературних джерел налічує 29 джерел. У роботі

міститься 23 рисунки та 1 таблиця. Загальний обсяг роботи становить 70 сторінок машинописного тексту.

*Апробація результатів за темою дипломної роботи на практику*

Не заплановано.

*Публікації*

Не заплановано.

## РОЗДІЛ 1

### ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД ДЖЕРЕЛ

#### 1.1. Визначення біомедичних сигналів

Біомедичні сигнали - це сигнали, що відображають різні фізіологічні процеси, які відбуваються в організмі людини. Вони можуть бути отримані з різних джерел, таких як серце, мозок, м'язи, очі та інше. Ці сигнали можуть вимірювати електричну активність, хімічні рівні, акустичні характеристики, механічні властивості та інше.

Використання біомедичних сигналів широке і багатогранне. Вони використовуються для діагностики та лікування різних захворювань, моніторингу здоров'я пацієнтів, розробки і вдосконалення медичного обладнання та технологій.

Саме через аналіз біомедичних сигналів медичні професіонали можуть виявляти аномалії або зміни в нормальному функціонуванні органів чи систем. Це може вказувати на певні захворювання, як-то серцево-судинні розлади, неврологічні захворювання, мускулатурні розлади тощо.

Основні характеристики біомедичних сигналів включають частоту, амплітуду, фазу, форму сигналу та інші. Ці параметри допомагають визначити специфічні особливості фізіологічного стану людини або конкретного органа.

Для аналізу біомедичних сигналів використовуються різні методи, включаючи часовий аналіз, частотний аналіз, статистичний аналіз та інші. Всі вони допомагають інтерпретувати дані, отримані в процесі збору сигналів, і використовуються для встановлення діагнозу, прогнозу або відстеження ефективності лікування.

Враховуючи надзвичайно велику важливість біомедичних сигналів в сучасній медицині, важливо зрозуміти їх властивості, особливості інтерпретації та способи застосування.

За означенням, біомедичний сигнал є сигналом, що виникає у живих

організмах і може бути постійно виміряним та контрольованим. Хоча термін "біосигнал" часто використовується для опису біоелектричних сигналів, він також може включати як електричні, так і неелектричні сигнали. Зазвичай, під біосигналами розуміють сигнали, які змінюються в часі, але іноді до них можуть відносити також зміни у просторових параметрах, наприклад, послідовності нуклеотидів, що визначають генетичний код, але ми більш детально зупинимось на електричних біосигналах [**Ошибка! Источник ссылки не найден., Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Вони можуть бути отримані з різних джерел, таких як електрокардіограми (ЕКГ), електроенцефалограми (ЕЕГ), електроміограми (ЕМГ), кардіосигнали, сигнали кровообігу та інші.

## 1.2. Види біомедичних сигналів та їх джерела

Біомедичні сигнали можуть мати різне походження і вимірювати різні фізіологічні параметри. Вони можуть представляти електричну активність органів (як у випадку електрокардіограми або електроенцефалограми), механічні характеристики (наприклад, кров'яний тиск або об'єм дихання, вимірюваний спірографією), оптичні властивості (наприклад, в лазерній доплерівській флоуметрії), акустичні властивості (як у аудіограмі), хімічні рівні (як у випадку вимірювання глюкози в крові) та інше.

Ці сигнали допомагають нам зрозуміти функціонування органів і систем організму, виявити аномалії і захворювання, а також відстежувати ефективність лікування. Використання цих сигналів забезпечує важливий контекст для нашого розуміння здоров'я і хвороби.

Більш детально розглянемо електричні біосигнали, які також називають біоелектричними часовими сигналами. Вони відносяться до змін електричного струму, що виникають внаслідок різниці електричних потенціалів у спеціалізованій тканині, органі або клітинній системі. Ці сигнали зазвичай спостерігаються в нервовій системі та пов'язані з функціонуванням і передачею імпульсів [1, 2, 3]. Найвідоміші джерела біоелектричних сигналів описані нижче.

ЕЕГ або електроенцефалографія – це неврологічний тест, призначений для вивчення електричної активності мозку. ЕЕГ записує електричні сигнали з мозку через електроди, що накладаються на шкіру голови. Це неінвазивний тест, який широко використовується в медицині для визначення проблем з нервовою системою, таких як епілепсія, порушення сну, а також для моніторингу стану мозку під час хірургічних операцій (рис. 1.1).

ЕЕГ дозволяє медичним спеціалістам "подивитися" на роботу мозку в режимі реального часу. Це означає, що вони можуть спостерігати за тим, як електрична активність мозку змінюється із часом. Якщо певні шаблони цієї активності відрізняються від того, що вважається нормальним, це може свідчити про проблеми з нервовою системою або мозком. Крім того, ЕЕГ може допомогти медичним спеціалістам виявити конкретне місце у мозку, де ці проблеми виникають.

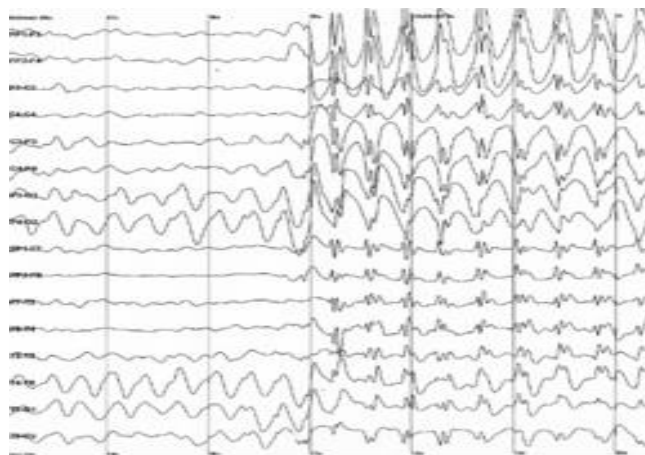


Рисунок 1.1 – Електроенцефалограма. Множинні комплекси пік-хвиля при епілепсії

ЕКГ або електрокардіограма - це тест, який використовується для запису електричної активності серця. Це неінвазивний, безпечний і швидкий метод визначення здоров'я серця. ЕКГ робиться за допомогою електродів, які накладаються на шкіру грудей, рук і ніг.

ЕКГ відображає, як серцевий м'яз стискається і розслабляється в процесі кожного серцевого циклу (рис. 1.2). Зміни в звичайних шаблонах електричної

активності можуть вказувати на проблеми з серцем, такі як ішемія (недостатність кровопостачання), аритмія (неправильний ритм серця), чи проблеми з серцевими клапанами.

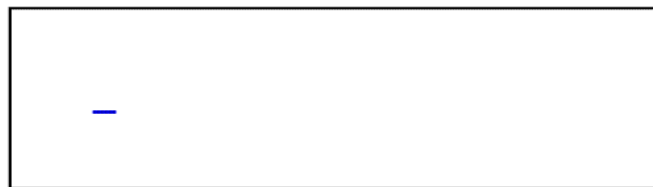
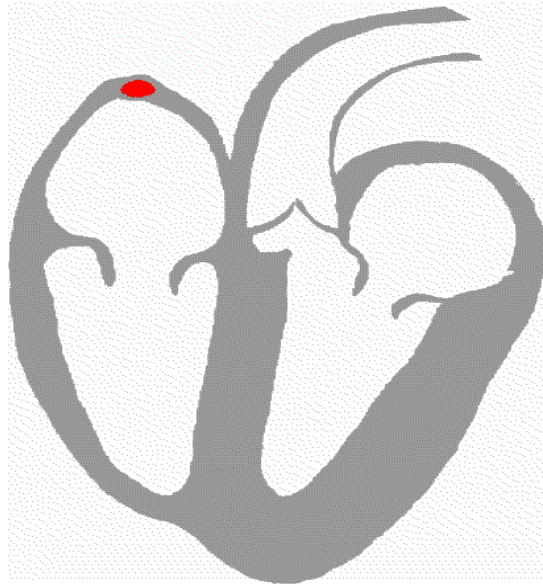


Рисунок 1.2 – Відповідність ділянок ЕКГ з відповідною фазою роботи серця

ЕМГ або електроміографія – це діагностичний тест, що вимірює електричну активність м'язів. Це процедура допомагає визначити, чи працюють м'язи і нерви, що їх контролюють, належним чином. ЕМГ часто використовується для виявлення причин слабкості м'язів, спазмів, парестезій (відчуття "повзучого") або інших відхилень.

Є два основних методи проведення ЕМГ: через поверхневу електроміографію, коли електроди накладаються прямо на шкіру, та інвазивну електроміографію, коли тонкі голки вводяться безпосередньо в м'яз (рис. 1.3). Ці дві методикки надають важливі дані про роботу м'язів і нервових шляхів, що їх

СТИМУЛЮЮТЬ.

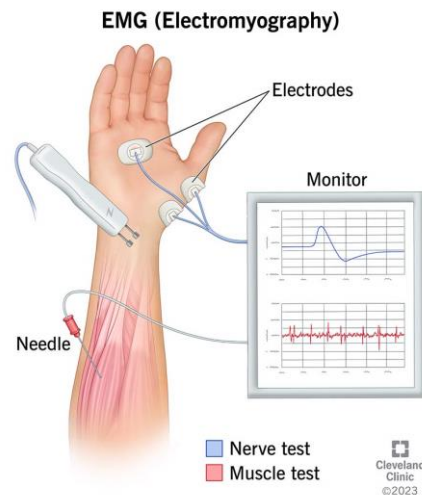


Рисунок 1.3 – Проведення електроміографії

ЕОГ або електроокулографія - це спеціальний тест, що вимірює електричну активність, яка виникає при русі очей. Це допомагає визначити, наскільки добре функціонують м'язи і нерви, що контролюють рухи наших очей.

Під час проведення тесту ЕОГ лікар використовує спеціальні датчики, які прикріплюються під і над кожним оком. Ці датчики реєструють електричну активність при русі очей. Ця інформація може допомогти виявити проблеми, пов'язані з рухом очей, такі як слабкість окулярних м'язів або проблеми з нервами (рис. 1.4).

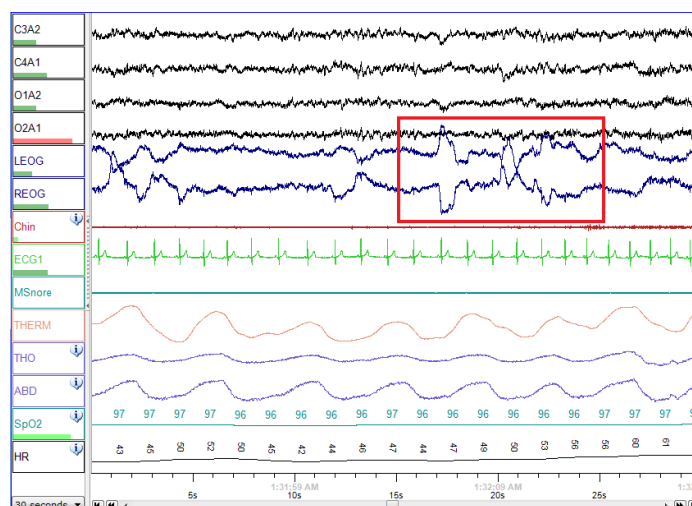


Рисунок 1.4 – Електроокулограми лівого ока (LEOG) та правого ока

(REOG) для періоду швидкого сну

## Висновки до розділу 1

У рамках нашого вивчення біомедичних сигналів, ми розглянули їх визначення, характеристики та різні види. Нижче наведено головні висновки з оглянутої літератури.

Перш за все ми дізнались, що біомедичні сигнали представляють собою важливий інструмент для вимірювання та аналізу різноманітних фізіологічних процесів в організмі. Вони дають можливість оцінювати стан різних систем та органів організму, включаючи серце, мозок, м'язи та інше.

Ці сигнали містять величезний обсяг цінної інформації, який може допомогти медичним фахівцям більше дізнатися про нормальні та патологічні стани організму, що в свою чергу може привести до виявлення та лікування різних захворювань.

У розумінні того, як працюють наші органи та системи, біомедичні сигнали слугують як важливий засіб, який дозволяє нам оцінити внутрішні процеси нашого тіла. Через детальний аналіз цих сигналів, ми можемо зрозуміти, як наші тіла реагують на різні стимули, зміни у довкіллі, а також вплив різних факторів, таких як стрес або хвороба.

Таким чином, біомедичні сигнали допомагають не лише у діагностиці та лікуванні, але й у прогнозуванні можливих медичних проблем та моніторингу ефективності лікування. Вони стають все більш важливими у медичному дослідженні та практиці, допомагаючи покращити якість та продовження життя пацієнтів. Існує багато різних видів біомедичних сигналів, включаючи ЕКГ, ЕЕГ, ЕМГ, ЕОГ і багато інших. Кожен з них має свої властивості та специфічне застосування, але всі вони мають спільну мету - забезпечити детальний і точний аналіз фізіологічних станів.

Не дивлячись на свою складність та варіативність, біомедичні сигнали є важливим інструментом у руках медичних професіоналів, науковців та

інженерів, які працюють над покращенням здоров'я і добробуту людей.

В цілому, біомедичні сигнали є необхідним і важливим складником сучасної медицини, і їх вивчення продовжує бути важливим.

## РОЗДІЛ 2

### ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

#### 2.1 Електроенцефалографія

Електроенцефалографія, або ЕЕГ, це методологія, яка дозволяє відстежувати та записувати електричну діяльність мозку. За допомогою ЕЕГ можна з'ясувати, що електричні сигнали, які ми здатні вимірювати, відбивають роботу нейронів в певних областях мозку, зокрема в неокортексі та алокортексі.

Основний принцип ЕЕГ полягає в тому, що вона не втручається в тіло людини: спеціальні датчики (електроди) просто розміщуються на шкірі голови відповідно до міжнародного стандарту, відомого як "система 10-20". Хоча є і варіанти ЕЕГ, які вимагають хірургічного втручання для встановлення електродів, вони використовуються менш часто і відомі як "внутрішньочерепна ЕЕГ".

Важливою частиною процесу ЕЕГ є аналіз отриманих даних, який здебільшого здійснюється шляхом вивчення візуальних графіків сигналів мозку або за допомогою комп'ютерного аналізу.

Щодо того, що саме вимірює ЕЕГ, це коливання електричної активності мозку. Ці коливання відображають діяльність нейронів, які знаходяться близько до поверхні головного мозку. Цікаво, що розташування та відстань датчиків від джерела активності може змінювати записи. Також треба зазначити, що м'які тканини і кістки голови можуть дещо спотворити вимірювання.

Зазвичай ЕЕГ виявляє активність тих нейронів, що розташовані біля поверхні голови. Вплив нейронів, які розташовані глибше, на ЕЕГ менш виражений.

Коли людина здорова, ЕЕГ показує відповідні шаблони активності, які відповідають стану людини, чи вона спить або бадьора. Частоти, які можна виявити, рухаються в діапазоні від 1 до 30 Гц, з амплітудою від 20 до 100 мкВ.

Ці частоти поділяють на чотири категорії: альфа (8-13 Гц), бета (13-30 Гц), дельта (0,5-4 Гц) та тета (4-7 Гц). Альфа-хвилі, як правило, спостерігаються, коли людина розслаблена, але не спить, а бета-хвилі стають видимими під час активної ментальної діяльності. Щодо тета- і дельта-хвилі, то їх зазвичай не бачать під час бадьорості, а їх поява може свідчити про проблеми з мозком.

Електроенцефалографія (ЕЕГ) відіграє важливу роль у виявленні аномалій у мозковій активності, таких як нехарактерні електричні вибухи, що проявляються у формі гострих хвиль або пікових комплексів, типових для станів, подібних до епілепсії. Внаслідок цього, ЕЕГ стала важливим інструментом в медичному діагностуванні, дозволяючи виявити точку початку та динаміку епілептичних нападів, а також інші стани, такі як епілептичний статус. ЕЕГ також широко використовується для діагностики різних проблем зі сном, визначення глибини анестезії, діагностики станів коми, різних форм енцефалопатії, а також церебральної гіпоксії, що виникає після зупинки серця, або визначення смерті мозку.

У минулому ЕЕГ була основним засобом діагностики таких умов, як мозкові пухлини, інсульту і інші фокусні порушення мозку, але із появою більш сучасних методів візуалізації, таких як магнітно-резонансна томографія (МРТ) та комп'ютерна томографія (КТ), її значення зменшилося. Однак, незважаючи на обмежену просторову роздільну здатність, ЕЕГ залишається важливим засобом діагностики і досліджень, оскільки вона є одним з небагатьох портативних методів, що надають часову роздільну здатність на рівні мілісекунд, що недосяжне для КТ, ПЕТ або МРТ.

Похідні від ЕЕГ включають в себе викликані потенціали (ВП), що представляють середній результат ЕЕГ-реакції на певний стимул, будь то візуальний, соматосенсорний або аудітивний. Потенціали, асоційовані з подіями (ERP), є середніми ЕЕГ-відповідями, що часово пов'язані з більш складним стимулюванням. Ця методика використовується в когнітивних науках, когнітивній психології та психофізіологічних дослідженнях.

## 2.2 Частотно-часовий аналіз біомедичних сигналів

Частотно-часовий аналіз - це метод обробки сигналів, що дозволяє досліджувати зміни спектру частот сигналу в часі. Це особливо корисно для аналізу нестационарних сигналів, тобто сигналів, які змінюються в часі.

Більшість біомедичних сигналів, таких як ЕЕГ, ЕКГ, ЕМГ, є нестационарними, тому методи частотно-часового аналізу є дуже цінними для їхнього аналізу. Ці методи дозволяють відслідковувати, як частотні складові сигналу змінюються з часом, що може бути корисно для виявлення епізодів патологічної активності або для вивчення динаміки фізіологічних процесів.

Серед методів частотно-часового аналізу можна відзначити декілька основних це перетворення Фур'є та вейвлет-аналіз.

Перетворення Фур'є - це математичний метод, який використовується для розбиття сигналу на його частотні складові. Це може бути особливо корисно для аналізу періодичних сигналів, таких як ЕКГ або ЕЕГ. Однак, звичайне перетворення Фур'є не враховує зміни в часі. Для вирішення цього обмеження можна використовувати короткочасне перетворення Фур'є (STFT), яке виконує перетворення Фур'є на коротких відрізках часу, дозволяючи отримати інформацію про зміни частотного складу протягом часу.

Вейвлет-аналіз - це ще один метод частотно-часового аналізу, який дозволяє аналізувати сигнали на різних масштабах. Це досягається за допомогою вейвлет-функції, яка може бути "розтягнута" або "стиснена" для аналізу високих або низьких частот відповідно. За допомогою вейвлет-аналізу можна отримати детальну інформацію про зміни частотного складу в різних масштабах часу, що може бути особливо корисно для аналізу нестационарних або багатомасштабних сигналів.

В цілому, частотно-часовий аналіз - це важливий інструмент в біомедичній обробці сигналів, що дозволяє отримати детальну інформацію про динаміку частотних складових сигналу в часі. І як перетворення Фур'є та вейвлет-аналіз, так і інші методи є важливими складовими частотно-часового аналізу

біомедичних сигналів. Однак, вибір між ними залежить від конкретного застосування та властивостей сигналу, що аналізується.

### 2.3 Вейвлет-аналіз

В даній роботі для частотно-часового аналізу ЕЕГ сигналів використовується вейвлет-аналіз.

Вейвлет-аналіз став незамінним інструментом у великій кількості наукових та інженерних застосувань, як-от обробка сигналів, комунікації, стиснення відео та зображень, а також в медичній та науковій візуалізації. Це поняття можна вважати злиттям різних ідей, що виникли внаслідок інтенсивних досліджень у галузях механіки, фізики та чистої математики. Однак вейвлети - це простий математичний інструмент, не дивлячись на різноманіття можливих застосувань, і їх розуміння часто вимагає досить високого рівня математичної складності. Мета цього розділу - розвиток базового розуміння вейвлетів, їхнього походження та взаємозв'язку з апроксимацією функцій за допомогою мультипозиційного аналізу.

Від самого початку 1930-х років, основні математичні інструменти для розв'язання наукових та інженерних проблем були засновані на теорії частотного аналізу Жозефа Фур'є (1807). Він стверджував, що будь-яка функція з 20 періодами ( $t$ ) може бути представлена як лінійна комбінація косинусів та синусів з коефіцієнтами ряду Фур'є.

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{inf} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad (2.1)$$

Коефіцієнти  $a_0, a_k, b_k$  є коефіцієнтами ряду Фур'є

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int f(t) dt; \quad a_k = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \cos(kt) dt; \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \sin(kt) dt.$$

У 1909 році А. Хаар вперше згадав про вейвлети у своїй дисертації. Однією з ключових особливостей вейвлетів, якими він користувався, була їх компактна підтримка, тобто функція стає нульовою за межами певного інтервалу. Але на жаль, вейвлети Хаара не є постійно диференційованими, що обмежує їхнє використання.

Між 1930-ми та 1960-ми роками декілька груп, які працювали незалежно, досліджували різні способи представлення функцій з використанням різних базових функцій. Використовуючи одну з них, основну функцію Хаара, Пол Леві досліджував броунівський рух, заклавши основу для сучасної теорії випадкових процесів [21]. Він виявив, що для нестационарних сигналів основна функція Хаара є кращою за функції Фур'є.

В 1980-х роках Давід Маар розробив ефективний алгоритм обробки цифрових зображень за допомогою вейвлетів. Між 1960 та 1980 роками Гвідо Вайс та Рональд Койфман вивчали простіші елементи функціонального простору, відомі як атоми, з метою виявлення правила побудови, що дозволяють реконструювати всі елементи функціонального простору за допомогою цих атомів [15]. У 1980 році Гроссман і Морле перенесли вивчення квантової фізики в контекст вейвлетів за допомогою концепції фреймів.

У 1985 році Стефан Малла використав вейвлети для обробки сигналів і виявив зв'язок між квадратурними дзеркальними фільтрами, алгоритмом піраміди та ортонормальними вейвлет-базисами. На основі цих результатів Ю. Мейєр створив перші нетривіальні вейвлети. На відміну від вейвлетів Хаара, вейвлети Мейєра неперервно диференційовані, але вони не мають компактної підтримки [9]. У 1990-х роках Інґрід Добеши використала роботу Малла для створення набору ортогональних вейвлет-базисних функцій, які зараз широко використовуються в різних областях.

## **2.4 Неперервне вейвлет-перетворення**

Вейвлет-аналіз є потужним інструментом для вивчення часових рядів з

вираженою неоднорідністю. Ці ряди ілюструють зміни основних атрибутів, таких як середнє значення, дисперсія та періоди амплітуд, відповідно до часу. Одним з переваг вейвлет-аналізу перед перетворенням Фур'є є змінні значення часових і частотних "вікон", що дозволяють проводити більш точний аналіз частотно-часових характеристик для короткотривалих високочастотних і довготривалих низькочастотних компонентів ЕЕГ-сигналу.

Вейвлет-перетворення включає розкладання сигналу на базис, створений з альтернативної функції з компактним носієм, тобто функції, що є ненульовою лише на визначеному інтервалі. Відмінно від перетворення Фур'є, вейвлет-перетворення забезпечує двовимірне представлення одновимірного сигналу в частотно-часовому просторі, де частота і координата є незалежними змінними. Це дозволяє відслідковувати динаміку сигналу як в часі, так і в частотному спектрі.

Таким чином, неперервне вейвлет-перетворення (НВП) - це ефективний метод частотно-часового аналізу, який дає можливість проводити аналіз на вибраних частотах з можливістю коригувати розмір вікна перетворення для кожної аналізованої частоти.

НВП сигналу  $x(t)$  здійснюється шляхом згортки [28]

$$W_x(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_{a,b}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2.2)$$

Коефіцієнт масштабування  $a$  встановлює величину і висоту вейвлета  $\psi(t)$ . Параметр зсуву  $b$  встановлює специфічне положення вейвлета в часовому просторі. Базисний вейвлет, що ще зветься материнським, позначається як  $\psi(t)$ :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.3)$$

Вагова функція  $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$  обирається із міркувань збереження енергії, тобто забезпечується на кожному масштабі одна і та сама енергія [26].

Фактично вейвлет-перетворення - можна визначити як крос-кореляцію сигналу із мережею вейвлетів, які мають різні "вагові" коефіцієнти. На рис. 2.1 наведено графік ізометричної поверхні НВП синусоїди при  $a = 1/4$ .

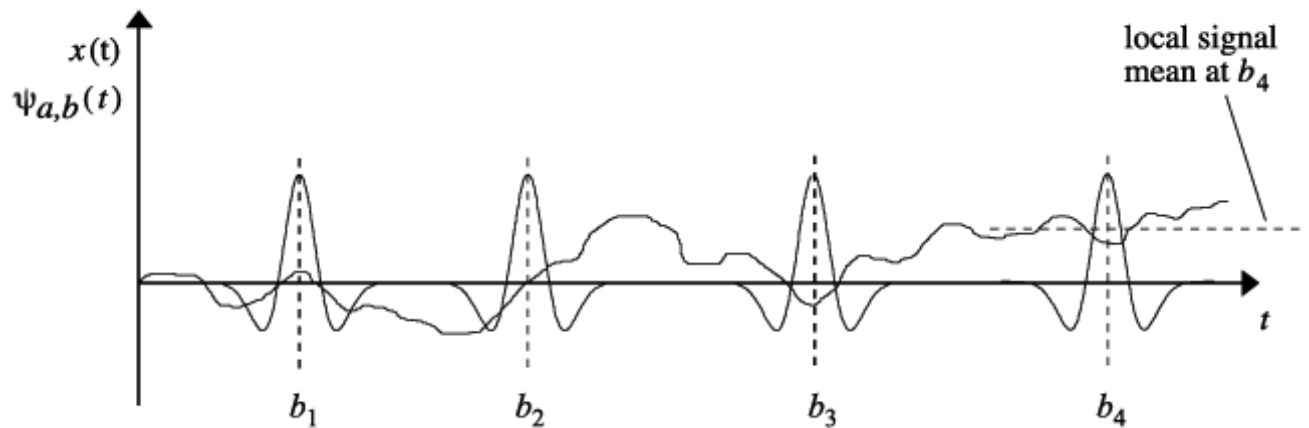


Рисунок 2.1 – Графік ізометричної поверхні НВП синусоїди при  $a = 1/4$

Процес зворотного інтегрального вейвлет-перетворення полягає у відтворенні (або синтезі) сигналу на основі вейвлет-коефіцієнтів цього сигналу і визначається як:

$$x(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} T(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (2.3)$$

Коефіцієнт нормалізації  $C_g$  має задовольняти умову допустимості і залежить від типу вейвлету

$$C_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty \quad (2.4)$$

де  $\Psi(\omega)$  – перетворення Фур'є від  $\psi(t)$ .

Вейвлет-перетворення надає змогу відтворити початковий сигнал за допомогою інтегрування вздовж усіх зсувів і стисків, змінних  $a$  і  $b$ . Зазначимо, що для зворотного перетворення ми використовуємо вейвлет-функцію, відмінну від тієї, яку використовували під час прямого перетворення. Якщо ми обмежимо

інтегрування за параметром  $a$ , ми зможемо фільтрувати початковий сигнал.

Загалом неперервне вейвлет-перетворення є корисним для виявлення низькочастотних і високочастотних характеристик сигналів

### 2.4.1 Ознаки вейвлету

Вейвлетом може бути функція кінцевої енергії, що задовольняє умову допустимості і має такі основні ознаки [18].

*Локалізація.* Вейвлет-перетворення використовує базову функцію, обмежену в часі та частоті, що дає йому властивість локалізації. Це означає, що вейвлет  $\psi(t)$  і його Фур'є перетворення  $\Psi(\omega)$  мають значимі відмінності від нуля лише протягом обмежених інтервалів часу і частоти, тоді як у інших ділянках вони знаходяться близько до нуля або дорівнюють йому.

*Нульове середнє.* Графік вейвлета має бути знакозмінним навколо нульового значення на осі часу та мати площу, яка дорівнює нулю (тобто момент нульового порядку):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.6)$$

У певних ситуаціях потрібно, щоб  $m$  вищих моментів також були нульовими (це відноситься до вейвлета  $m$ -го порядку).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \psi(t) dt = 0 \quad (2.7)$$

*Обмеженість.* Квадрат норми вейвлету має бути кінцевим

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (2.8)$$

*Автомодельність базису.* Всі вейвлети одного типу мають однакову кількість коливань, як і материнський вейвлет  $\psi(t)$ , оскільки вони були отримані за допомогою масштабних перетворень і зміщень від нього.

### 2.4.2 Базисні вейвлети

Декілька вейвлетів, та їх аналітичний опис, вказано у табл. 2.1.

Таблиця 2.1

#### Приклади вейвлет-функцій

Вейвлет	Аналітичний запис $\psi(t)$	Спектральна щільність $\Psi(\omega)$
WAVE	$-t \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$	$j\omega\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{-\omega^2}{2}\right)$
МНАТ	$(1 - t^2) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$	$(j\omega)^2\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{-\omega^2}{2}\right)$
Морле	$e^{j\omega_0 t} e^{\frac{-t^2}{2\sigma}}$	$\sigma(\omega)\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{-(\omega-\omega_0)^2}{2}\right)$
НААР	$\geq \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0, & t < 0, t > 1 \end{cases}$	$j \exp\left(\frac{j\omega}{2}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\frac{\omega}{4}}$

Вейвлети, які базуються на похідних Гауссової функції, часто використовуються у різних областях. Використання похідних вищих порядків створює додаткові нульові моменти, що дозволяє отримати більше деталізації щодо властивостей сигналу вищого порядку.

WAVE-вейвлет визначається як перша похідна Гауссової функції. Цей вейвлет має асиметричну форму, і його нульовий момент рівний нулю.

З іншого боку, МНАТ-вейвлет є похідною другого порядку Гауссової функції, він також відомий як "мексиканський капелюх". Цей вейвлет має нульовий і перший моменти рівні нулю.

Важливо відмітити, що Фур'є перетворення МНАТ-вейвлета має вузький носій порівняно з WAVE-вейвлетом, що свідчить про його кращу часово-частотну локалізацію. Вейвлети WAVE і МНАТ, а також модулі їх спектральної щільності, ілюструються на рис. 2.2.

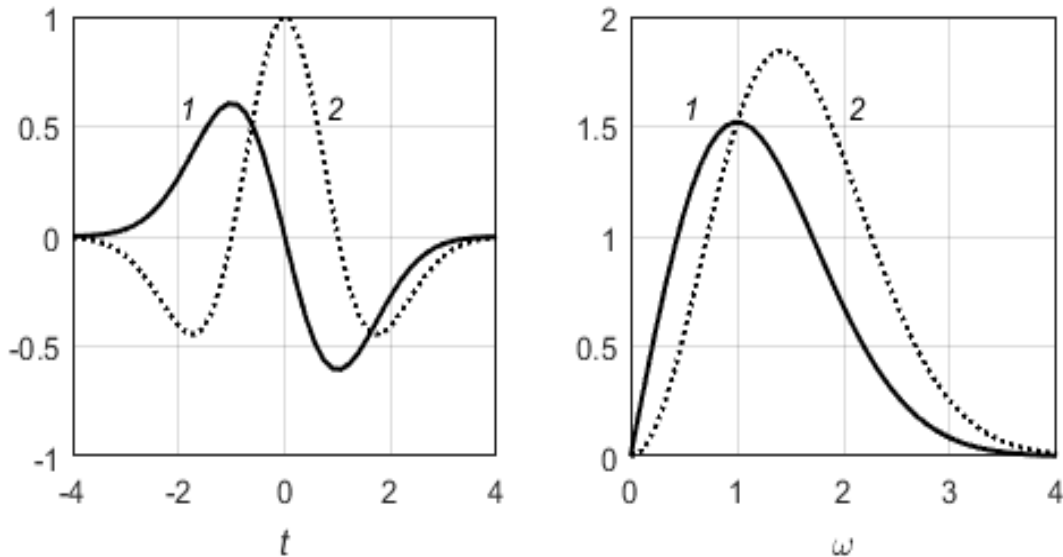


Рисунок 0.2 – Вейвлети WAVE (1) та МНАТ (2): а – часова область; б – частотна область

Морле вейвлет - це один з перших вейвлетів, які були запропоновані для аналізу сигналів. Це комплексна функція, де дійсна і уявна частини є гармонічними сигналами з частотою  $\omega_0$ , модульованою за допомогою Гауссової функції. Частота  $\omega_0$  вейвлета Морле може бути змінена, що дозволяє контролювати його частотну селективність.

Параметр масштабування  $\sigma$  має вплив на ширину вейвлета, що дозволяє контролювати діапазон частот, які вейвлет може розглянути.

На рис. 2.3 показані графіки вейвлета Морле для частоти  $\omega_0 = 5$  і параметра масштабу  $\sigma = 1$  у часовій і частотній областях.

Вейвлет Хаара представляє собою дискретний вейвлет, який має деякі обмеження, такі як нерівномірність форми та відсутні границі у часовій сфері. Ці фактори викликають появу "пелюсток" в частотному діапазоні, а також деяку несиметрію форми. Однак, для певних застосувань ці недоліки можуть виявитися незначними.

Вейвлет-аналіз також пропонує концепцію "псевдочастоти". Ця величина залежить від типу вейвлета і обернено пропорційна масштабу, виражена як відношення центральної частоти вейвлета до масштабованого періоду дискретизації [7].

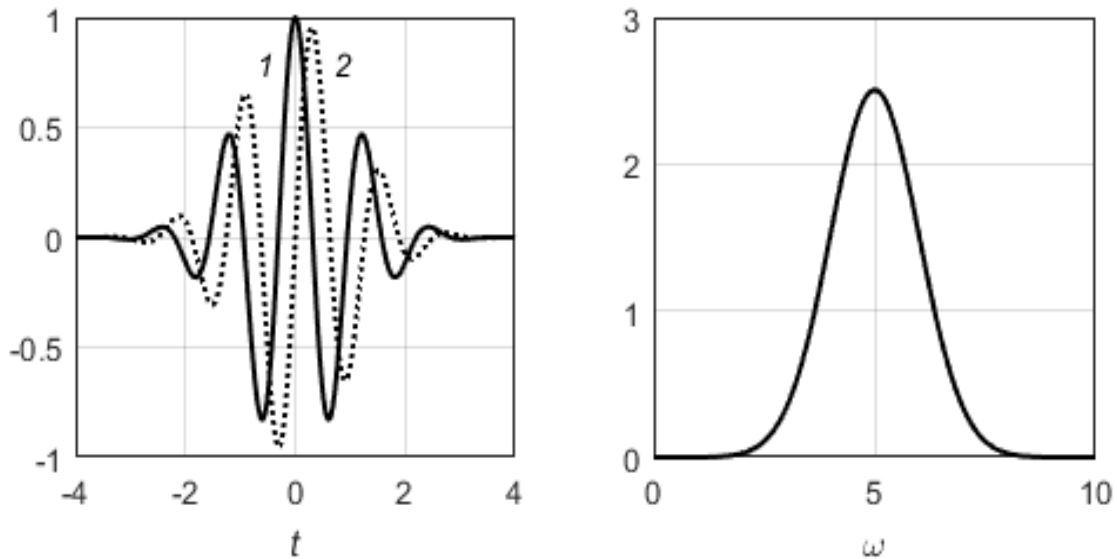


Рисунок. 0.3 – Характеристики вейвлету Морле: а – часова область (1 – дійсна частина; 2 – уявна частина); б – частотна область

На центральній частоті  $F_c$ , модуль Фур'є перетворення вейвлету досягає свого максимального значення,  $|\Psi(f)|$  максимізується при  $f = F_c$ . В частотному спектрі,  $|\Psi(f)|$  вейвлетів показують піки на частоті  $F_a$  із смугою  $\Delta F$ .

Для аналізу сигналів використовуються і інші вейвлети, які описуються аналітично за допомогою однієї формули. Втім, більшість типів вейвлетів, які використовуються в реальних умовах, не мають аналітичного виразу у вигляді формули, а розраховуються за допомогою числових методів, використовуючи ітераційні формули.

#### 2.4.3 Обчислення та візуалізація вейвлет-перетворення

На рис. 2.4 наведено графік спектру синусоїди, що промодельована вейвлетом МНАТ, що фактично є друга похідна від розподілу Гауса  $e^{-t^2/2}$ . Усі похідні від функції Гауса можуть бути використані в якості вейвлетів [23].

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2} \quad (2.9)$$

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \left[1 - \left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right] e^{-[(t-b)/a]^2/2} \quad (2.10)$$

Спектральні компоненти зворотно пропорційні  $a$ , тобто  $f: 1/a$ .  
Центральна частота материнського вейвлету ( $a = 1$ )  $f_c = 1$ .

Енергетичний спектр МНАТ:

$$E_F(f) = |\hat{\psi}(f)|^2 = 32\pi^5 f^4 e^{-4\pi^2 f^2} \quad (2.11)$$

На рис. 2.4 та рис. 2.5 наведено графік материнського вейвлету МНАТ та спектр енергії,  $f_p = \sqrt{2}/(2\pi)$ .

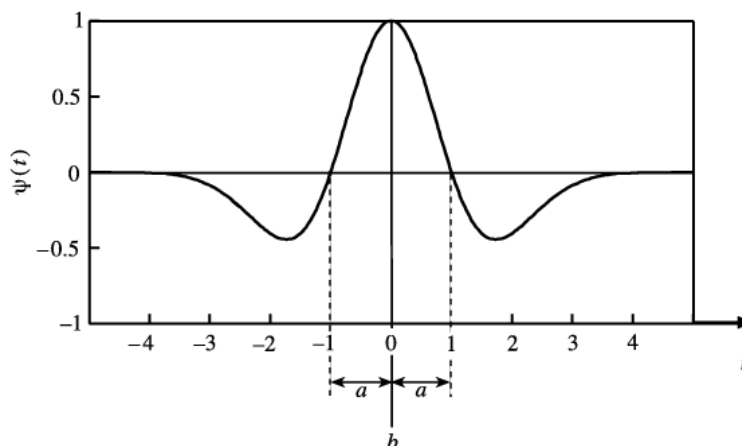


Рисунок 2.4 – Материнський МНАТ

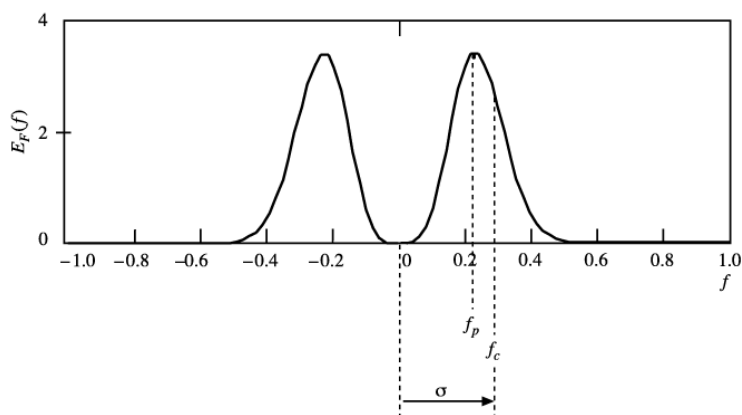


Рисунок 2.5 – Спектр енергії

На рис. 2.6 - рис. 2.8 наведено графік вейвлету МНАТ з різними масштабами та спектр енергії,  $f_p = \sqrt{2}/(2\pi)$ .

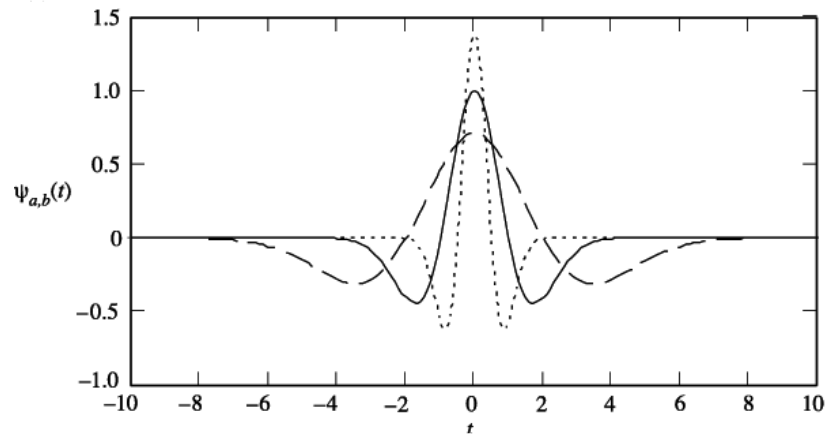


Рисунок 2.6 – МНАТ:  $a = 0,5$ ,  $a = 1$ ,  $a = 2$ ,  $b = 0$

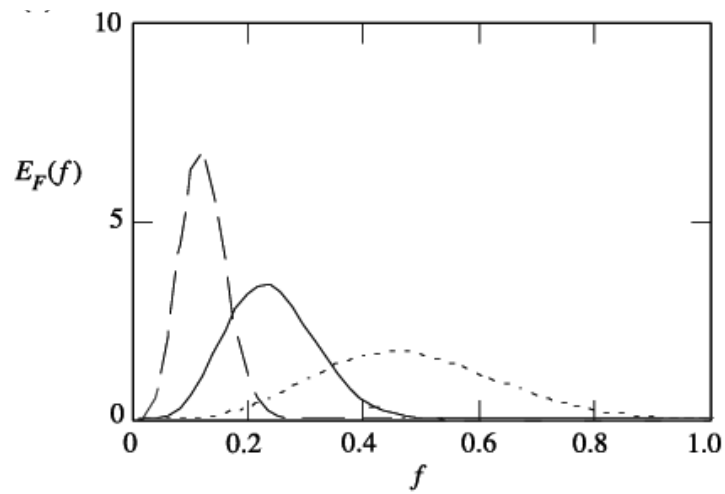


Рисунок 2.7 – Спектр енергії

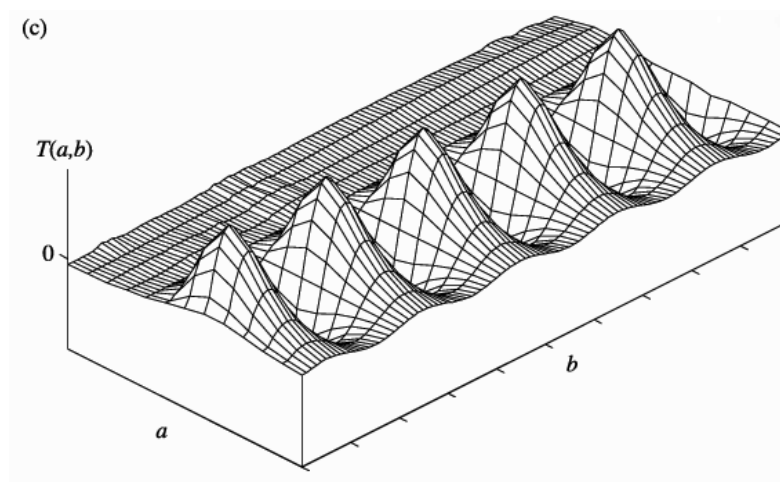


Рисунок. 2.8 – Спектр  $T_{m,n}$  синусоїди

Відновлення сигналу  $x(t)$  в ортогональному базисі:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (2.12)$$

або:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x, \psi_{m,n}) \psi_{m,n}(t) \quad (2.13)$$

Енергію сигналу  $x(t)$  можна виразити як:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |T_{m,n}|^2 \quad (2.14)$$

Величину

$$E(s, t_0) = |W(s, b)|^2 \quad (2.15)$$

називають густиною спектру енергії. Цей параметр визначає спектральну характеристику не лише для масштабу, але і для параметра зсуву  $s$ . На протилежність цьому параметру

$$E_{\omega}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} |W(s, b)|^2 db \quad (2.16)$$

цей параметр називається глобальним спектром енергії. Він визначає розподіл енергії за масштабами і є аналогом густини спектру енергії.

Оскільки ми обробляємо часові ряди, довжина яких завжди обмежена, до цих понять ми прив'язуємо їх оцінки.

Розглядається часовий ряд, що заданий значеннями

$$f_k = f(t_k), \quad t_k = k\Delta t, \quad k = \overline{1, N-1} \quad (2.17)$$

Оцінка, яка відображає локальний спектр енергії

$$\hat{S}(a_i, b_j) = |\hat{W}(a_i, b_j)|^2 \quad (2.18)$$

відома як скалограма, що підкреслює її здатність представляти розподіл енергії по масштабам. Оцінка глобального спектру енергії виглядає наступним чином

$$\hat{G}(a_i) = \frac{1}{N^*} \sum_j \hat{S}(a_i, b_j) \quad (2.19)$$

де  $N^*$  - це кількість точок, по яких робиться усереднення. Цю функцію також називають скейлограмою.

Часовий масштаб  $s$  визначає ширину вейвлета  $\psi_{s,t_0}(t)$ ,  $t_0$  - це зміщення вейвлетної функції вздовж осі часу, а «\*» вказує на комплексне сполучення.

Коли ми проводимо вейвлет-аналіз, ми використовуємо термін "часовий масштаб"  $s$  замість "частоти"  $f$  (або відповідного періоду  $T = 1/f$ ), як це зазвичай відбувається при традиційному фур'є-перетворенні.

Вейвлетний спектр

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| e^{i\phi_s(t_0)} \quad (2.20)$$

описує поведінку сигналу на кожному часовому масштабі  $s$  в будь-який момент часу  $t_0$ . Значення  $|W(s, t_0)|$  відображає присутність та інтенсивність відповідного часового масштабу  $s$  у момент часу  $t_0$ .

Проведення аналізу за допомогою неперервного вейвлет-перетворення (НВП), що включає в себе введення фази, дозволяє ефективно аналізувати поведінку систем з нечітко визначеною фазою, коли важко коректно визначити неперервну фазу сигналу.

## 2.5 Дискретне вейвлет-перетворення

Неперервне вейвлет-перетворення перетворює сигнал  $x(t)$ , що триває неперервно у часі, в функцію з двома параметрами,  $W(a, b)$ . Коли ми беремо відліки з сигналу  $x(t)$  у дискретних моментах часу, отримуємо дискретний сигнал  $x(n)$ , який складається з  $N$  чисел. Після неперервного вейвлет-перетворення цей дискретний сигнал перетворюється на матрицю чисел розміром  $M \times N$ .

Це додаткова інформація може бути вельми корисною для детального аналізу сигналів, оскільки вона надає більш глибокий розгляд властивостей сигналу. Втім, ця додаткова інформація не є необхідною для відтворення оригінального сигналу і може значно підвищити обчислювальну складність.

Якщо ми оберемо певний вейвлет  $\psi(t)$  і певні масштабні коефіцієнти  $a$ , для відтворення сигналу вистачить одного рядка з матриці коефіцієнтів  $W(a, b)$  за вибраним значенням  $a$ . Це означає, що в площині  $(a, b)$  ми можемо обрати таку дискретну підмножину вейвлет-коефіцієнтів, що дозволить нам повністю відтворити сигнал з обчислених  $N$  значень на цій підмножині. Такий підхід використовується в алгоритмах дискретного вейвлет-перетворення (ДВП).

При обробці параметрів  $a$  і  $b$ , зазвичай вибирають логарифмічну дискретизацію для масштабу  $a$ , встановлюючи таким чином пропорційний зв'язок між масштабом та кроками зсуву  $b$ .

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) \quad (2.21)$$

де  $m, n$  - контролюють стиск (розтягування) і зсув;  $a_0 > 1$  - визначений крок стиску;  $b_0 > 0$ . З виразу (2.17) бачимо,  $\Delta b = b_0 a_0^m$  є пропорційне масштабу вейвлету  $a_0^m$ .

Неперервне вейвлет-перетворення (НВП) сигналу  $x(t)$  із використанням дискретних вейвлетів задається як:

$$T_{m,n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{a_0^{m/2}} \psi(a_0^{-m}t - nb_0) dt \quad (2.22)$$

або як скалярний добуток

$$T_{m,n}(t) = (x, \psi_{m,n}) \quad (2.23)$$

де  $T_{m,n}$  – це вейвлет-коефіцієнти, що представляють значення дискретного вейвлет-перетворення (ДВП) і визначаються на сітці із індексами  $m, n$ .

Часто вибір дискретних параметрів встановлюється як  $a_0 = 2, b_0 = 1$ , що представляє собою систему, яка відома як діадична сітка, завдяки її масштабуванню.

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{t-n2^m}{2^m}\right) \quad (2.24)$$

або у компактній формі

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n) \quad (2.25)$$

Із використанням виразу (2.20) ДВП можна записати як

$$T_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{m,n}(t) dt \quad (2.26)$$

### 2.5.1 Кратно-масштабний аналіз сигналів

Кратно-масштабний аналіз (КМА) - це метод, що дозволяє розкласти сигнал на окремі частотні компоненти для більш детального вивчення кожної з них. Використовуючи вейвлети як частотні фільтри, ми можемо розглядати сигнал як сукупність апроксимаційних і деталізованих складових.

У цьому процесі, сигнал  $x(t)$  представляється як комбінація різних апроксимацій  $A_m(t)$  і деталізацій  $D_k(t)$ , які поступово уточнюються за допомогою ітераційного методу:

$$x(t) = A_m(t) + \sum_{k=0}^m D_k(t) \quad (2.27)$$

Кожен етап удосконалення асоціюється з конкретним масштабом, а саме, рівнем  $m$  аналізу та відтворення сигналу. Із зростанням кількості рівнів розкладання  $m$ , точність представлення сигналу покращується.

Дискретний сигнал можна вважати послідовністю коефіцієнтів  $a_{0k}$ , пов'язаних із скейлінг-функцією  $\varphi_{0k}$ . На найбільш базовому рівні ( $m = 0$ ) сигнал може бути описаний:

$$x(t) = A_0(t) = \sum_{k=0}^m a_{0k} \varphi_{0k}(t) \quad (2.28)$$

де  $a_{0k}$  – коефіцієнти апроксимації.

При переході на наступний рівень ( $m = 1$ ), сигнал розкладається на дві складові:

$$x(t) = A_1(t) + D_1(t) = \sum_{k=0}^m a_{1k} \varphi_{1k}(t) + \sum_{k=0}^m d_{1k} \psi_{1k}(t) \quad (2.29)$$

При цьому отримані послідовності  $a_{1k}$  і  $d_{1k}$  мають вдвічі меншу довжину, ніж  $a_{0k}$ . Цей процес декомпозиції продовжується, поки ми не досягнемо потрібного рівня деталізації.

На кожному рівні  $m$  сигнал можна представити за допомогою коефіцієнтів  $a_{mk}$  і  $d_{mk}$ , які базуються на функціях  $\varphi(t)$  і  $\psi(t)$ .

Тут  $\varphi_{mk}(t)$  і  $\psi_{mk}(t)$  виступають як високочастотний і низькочастотний фільтри відповідно і визначені через коефіцієнти

$$\varphi(t) = 2 \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \varphi(2t - k) \quad (2.30)$$

$$\psi(t) = 2 \sum_{k=0}^{2M-1} g_k \varphi(2t - k); \quad g_k = (-1)^k h_{2M-k-1} \quad (2.31)$$

де  $M$  – порядок вейвлета.

Отже, для обчислення коефіцієнтів  $g_k$  вейвлета, вони вираховуються через коефіцієнти  $h_k$ , що використовуються для скейлінг-функції. Коефіцієнти, що задають наближення і детальність, пов'язані з коефіцієнтами вейвлет-фільтрів:

$$a_{m,k} = \sum_l h_{l-2k} a_{m-1,l} \quad (2.32)$$

$$d_{m,k} = \sum_l g_{l-2k} a_{m-1,l} \quad (2.33)$$

Мінімальний масштаб, який можна використати, визначається кількістю  $N$  дискретних значень сигналу. Коли масштаб найменший, коефіцієнти наближення  $a_{0k}$  стають просто значеннями сигналу. Якщо ми переходимо від масштабу  $m$  до масштабу  $(m + 1)$ , кількість коефіцієнтів вейвлета зменшується вдвічі, і їх можна обчислити за допомогою рекурентних формул.

Що стосується реконструкції сигналу, то цей процес починається з найвищого масштабу і продовжується до найнижчого, з використанням вейлет-коефіцієнтів на кожному кроці:

$$a_{m-1,k} = \sum_l (h_{k-2l} a_{m,l} + g_{k-2l} d_{m,l}) \quad (2.34)$$

Все це забезпечує зменшення обчислювального навантаження на обробку сигналів за допомогою ДВП (дискретне вейлет-перетворення), оскільки ми обчислюємо лише вейлет-коефіцієнти.

### 2.5.2 Вейлет-перетворення в частотній області

Кратно-масштабний аналіз (КМА) в частотній області розглядається як послідовний процес фільтрування. У процесі розкладання сигналу за допомогою КМА використовуються два види фільтрів - фільтри нижньої частоти (ФНЧ) та фільтри вищої частоти (ФВЧ). Значення, отримані після ФНЧ, називаються коефіцієнтами апроксимації, тоді як значення, отримані після ФВЧ, називаються коефіцієнтами деталізації.

Використання набору фільтрів для розділення сигналу на окремі спектральні частини називається субсмуговим кодуванням. Коли ряд фільтрів та їхніх дециматорів (або інтерполяторів перед ними) використовуються разом, це відомо як банк фільтрів. Для основного виконання дискретного вейлетного

аналізу використовується простий банк з двома фільтрами.

Вхідний сигнал  $x(n)$  розділяється на низькочастотну  $y_{\text{нч}}(n)$  та високочастотну  $y_{\text{вч}}(n)$  частини під час аналізу. Фільтр  $H_0(\omega)$  є фільтром нижньої частоти і використовує скейлінг-функцію  $\phi(t)$ , яка згладжує сигнал. Натомість фільтр  $H_1(\omega)$  є фільтром вищої частоти і застосовує вейвлет  $\psi(t)$  до вхідного сигналу (рис. 2.9).

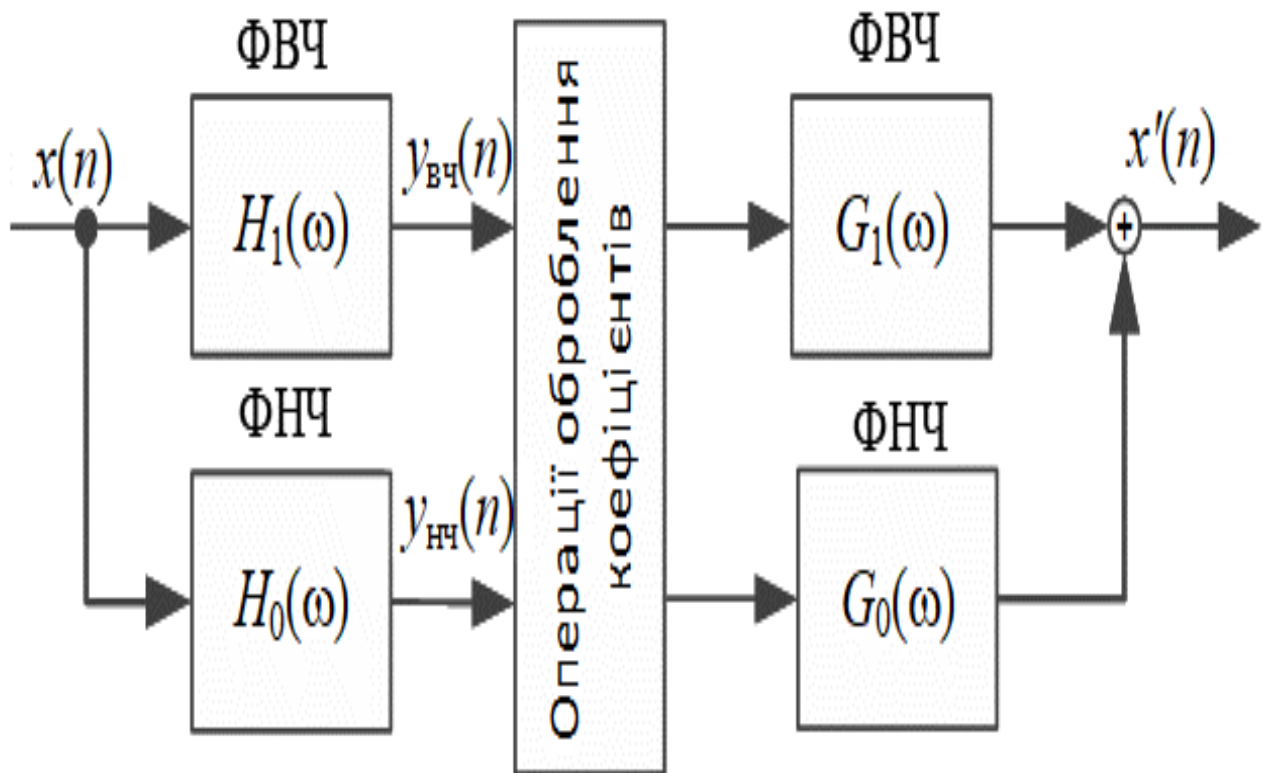


Рисунок 0.9 – Банк фільтрів

Сигнали, що вийшли з фільтрів, обробляються відповідно до визначених алгоритмів. Фільтри  $G_0(\omega)$  та  $G_1(\omega)$  у банку фільтрів допомагають відновити оригінальний сигнал. Зазвичай в банках фільтрів використовують фільтри із скінченною імпульсною характеристикою, оскільки вони стабільні та легші у використанні. Структуру декомпозиції сигналів для процедури КМА показано на рис. 2.10.

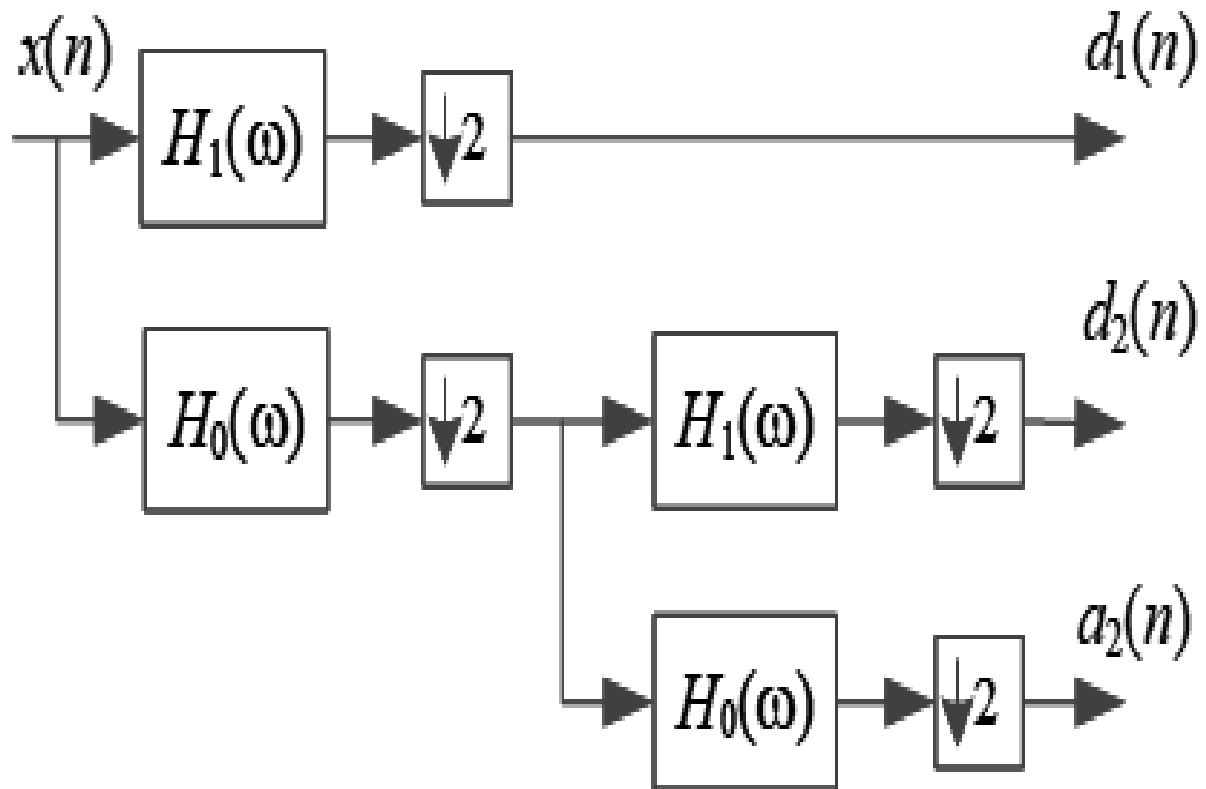


Рисунок 0.10 – Структура процедури КМА (декомпозиція)

З діаграми видно, що сигнали, що виходять з двох фільтрів, містять вдвічі більше відліків, ніж оригінальний вхідний сигнал. Якщо в банку більше фільтрів, то кількість відліків ще більше збільшується. Очевидно, що низько- та високочастотні сигнали  $y_{нч}(n)$  та  $y_{вч}(n)$  мають зайву інформацію: обидва ці сигнали потрібні для відтворення  $x(n)$  і мають вдвічі більше відліків, ніж  $x(n)$ .

Але, якщо вибрати правильні аналізуючі фільтри, то можна скоротити довжину сигналів  $y_{нч}(n)$  та  $y_{вч}(n)$  вдвічі, при цьому зберегти можливість відновлення вхідного сигналу  $x(n)$ . Для цього застосовують децимацію цих сигналів із коефіцієнтом 2. Структуру реконструкції сигналу за коефіцієнтами деталізації та апроксимації показано на рис. 2.11. При застосуванні децимації до сигналів  $y_{нч}(n)$  та  $y_{вч}(n)$ , для відновлення вхідного сигналу  $x(n)$  потрібно використовувати операцію інтерполяції.

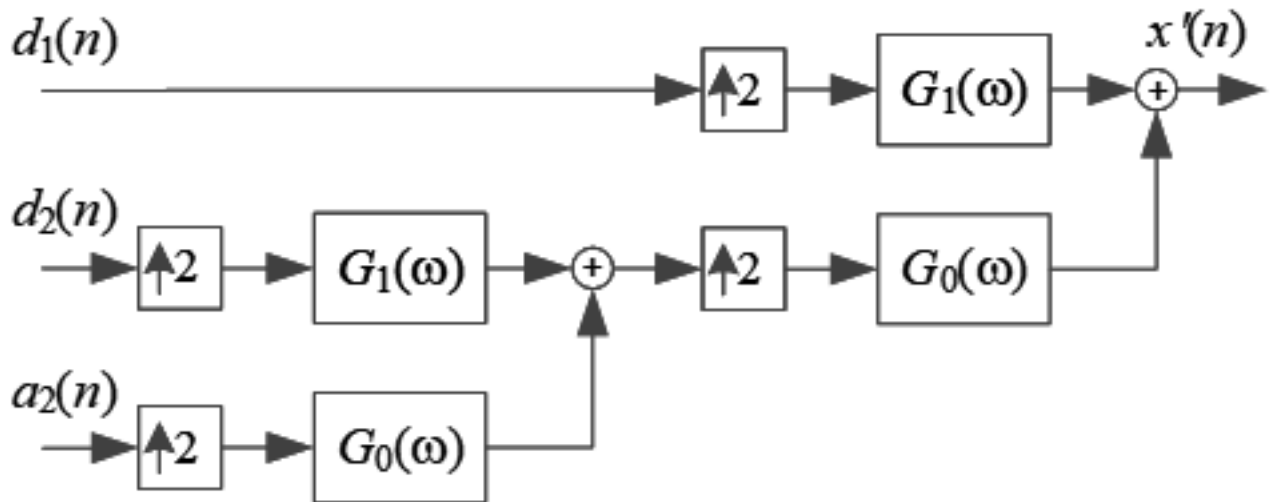


Рисунок 2.11 – Структура процедури КМА (реконструкція)

## Висновки до розділу 2

Підведемо підсумки. В ході теоретичного розгляду було вивчено електроенцефалографію (ЕЕГ) як ключовий інструмент для збору даних про мозкову активність. ЕЕГ представляє собою запис електричної активності мозку, яка вимірюється за допомогою електродів, розташованих на поверхні голови. Основні характеристики ЕЕГ-сигналу, такі як "шпильки" та "бугорки", відображають нейронну активність мозку.

Для аналізу ЕЕГ-сигналів було обрано та обґрунтовано найефективніший метод вейвлет-аналізу. Вейвлет-аналіз дозволяє розглядати часові та частотні характеристики сигналу одночасно, що особливо корисно для нестационарних сигналів, таких як ЕЕГ. Вейвлет-аналіз використовує різноманітні вейвлети, або короткочасові вікна, для аналізу сигналу на різних рівнях деталізації.

Вейвлети, або як їх ще називають "маленькі хвилі" (з французької), становлять основу цього методу. Це функції, що визначають, як буде виглядати сигнал після проведеного перетворення.

Вейвлет - це хвильова функція, що накладається на вихідний сигнал, дозволяючи аналізувати його властивості на конкретному відрізку. Він фактично працює як "шаблон" або "фігурний ніж", що накладається на графік сигналу і

"вирізає" ту його частину, яка потрапляє під дію вейвлета, щоб потім вивчати її.

Важливо розуміти, що кожен вейвлет має власну формулу, яка визначає, яку частину сигналу буде виділено і перетворено з усієї сукупності отриманого сигналу. Таким чином, кожен вейвлет адаптує сигнал до певних характеристик, що визначає вибір різних вейвлетів для аналізу сигналів різної природи.

## РОЗДІЛ 3

### ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

#### 3.1 Вибір інструментів для розробки інформаційної системи

Для програмної реалізації було обрано Matlab.

Matlab (Matrix Laboratory) - це високорівнева мова програмування і інтерактивне середовище для числових обчислень, візуалізації та програмування. Matlab відомий своїми потужними інструментами для аналізу даних, і він є популярним вибором у науковій та інженерній галузях, включаючи область аналізу ЕЕГ-сигналів.

Matlab є досить важливим вибором для частотно-часового аналізу через його універсальність, потужність і багатий набір інструментів для обробки сигналів. Matlab є лідером серед наукових програмного забезпечення, яке широко використовується у багатьох галузях науки і техніки. Він інтегрується з багатьма типами обладнання для збору даних, що робить його особливо зручним для роботи з ЕЕГ даними. Однією з ключових особливостей Matlab є його багатий набір вбудованих функцій для обробки сигналів. Це включає функції для виконання перетворення Фур'є та вейвлет-перетворення, що є основними методами для частотно-часового аналізу. Завдяки цим функціям, можна виконувати складний аналіз без необхідності розробляти власні алгоритми від початку. Крім того, Matlab володіє великою обчислювальною потужністю, що є критично важливим для ефективної обробки великих наборів даних, що характерні для ЕЕГ. Це дозволяє швидко та ефективно обробляти дані, забезпечуючи тим самим високу продуктивність аналізу. Нарешті, Matlab підтримує широкий спектр вейвлет-функцій і алгоритмів для швидкого перетворення Фур'є. Це робить Matlab особливо гнучким інструментом, що надає дослідникам можливість вибрати найбільш підходящий метод для конкретного аналізу. Таким чином, вибираючи Matlab для частотно-часового аналізу ЕЕГ-сигналів, ми отримуємо інструмент, який володіє потрібними можливостями,

гнучкістю і ефективністю для виконання цього складного завдання.

### 3.2 Програмна реалізація та аналіз її роботи

Для перевірки роботи програми для частотно-часового аналізу, на основі інструментів описаних вище, було взято дані ЕЕГ, що представляють собою часовий ряд вольтажів (рис. 3.1).

Рисунок 3.1 – ЕЕГ сигнал

Перш за все зчитуються дані з файлу. В програмі, для більш детального аналізу всього ряду, створюється вибірка з 99 значеннями:

$$k=0; N = 99;$$

$$\text{for } n=1:N$$

$$y(n)=bt(n+k*N);$$

де  $k$  – це параметр, який вказує на крок у вибірці даних. Тобто проаналізувавши перших 99 елементів файлу, ми можемо змінити  $k$  на 1, або на будь яке число, для аналізу певної частини сигналу.

Першим ми відображаємо наш вектор сигналу  $y(n)$  в часовій області (рис.3.2)

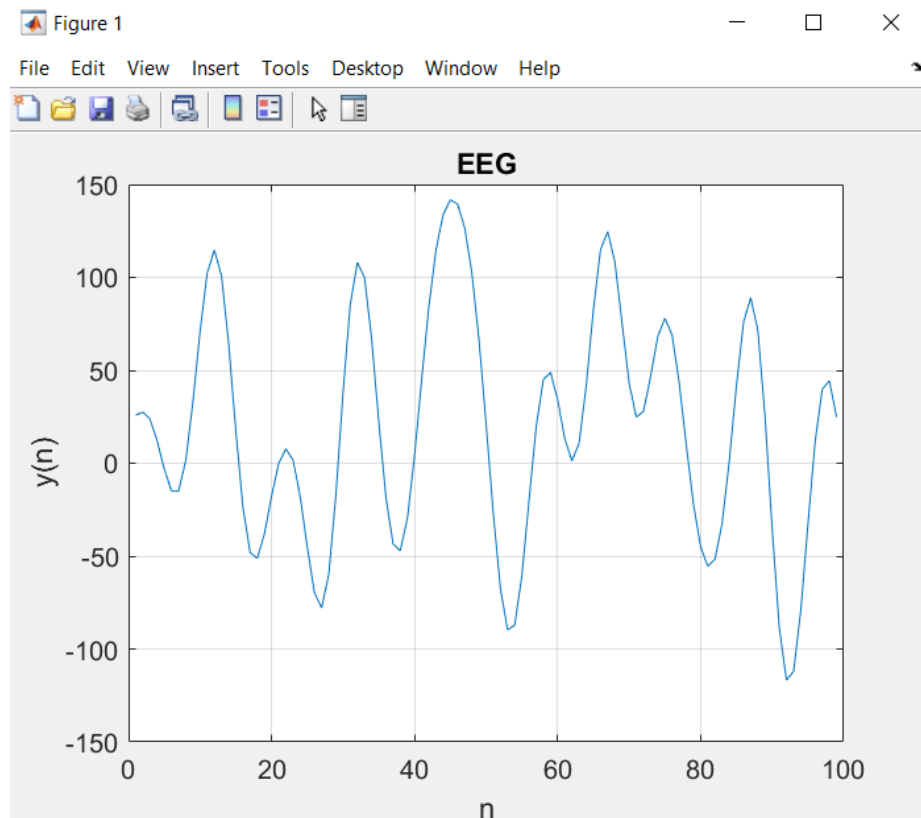


Рисунок 3.2 – Графік вибірки  $y(n)$  EEG сигналу

### 3.2.1 Дискретне вейвлет-перетворення

Ми маємо, частину EEG сигналу, яку нам треба проаналізувати. Тепер використовуючи дискретне вейвлет-перетворення, ми можемо розкласти сигнал на складові: апроксимацію (що дозволяє отримати приблизну оцінку) та деталізацію (для точнішої оцінки). Також, маючи ці дані, ми можемо відновити сигнал. Цей метод є дуже корисним інструментом для аналізу EEG сигналу, оскільки він допомагає виявляти у сигналі специфічні зони (відхилення).

Результатом застосування дискретного вейвлет-перетворення є ряд коефіцієнтів апроксимації та коефіцієнтів деталізації.

Отже для реалізації, перш за все, нам необхідно обрати вейвлет. Вибір конкретного вейвлету залежить від природи даних і завдання. В результаті аналізу, відповідно до наших цілей було обрано вейвлет 'db8', або Daubechies 8. Це член сім'ї вейвлетів Daubechies, названої на честь Інґрід Добеши, видатного математика, яка зробила значний внесок у розвиток теорії вейвлетів. Daubechies

вейвлети характеризуються максимально можливою кількістю нульових моментів, або, інакше кажучи, максимальною гладкістю. Число в назві вейвлета вказує на кількість нульових моментів: 'dbN' вейвлет має N нульових моментів. Вибір 'db8' означає, що використовується вейвлет з восьма нульовими моментами. Це і робить його досить гладким і придатним для аналізу сигналів з розглядуваною структурою.

Також нам необхідно зазначити рівень розкладу LevelMax. Він визначає глибину рекурсивного розкладу сигналу. Це, по суті, визначає детальність аналізу в частотно-часовому просторі. За кожен рівень розкладу сигнал розбивається на дві частини: апроксимацію (згладження) та деталізацію (деталі). Апроксимація відображає низькочастотну частину сигналу, тобто загальну тенденцію, а деталізація представляє високочастотну частину сигналу, або деталі. Таким чином, більш високий рівень розкладу дозволяє отримати більш детальну інформацію про сигнал на високих частотах, але це також означає, що більше часу потрібно на обробку даних. Крім того, при високих рівнях розкладу можуть виникнути проблеми зі стабільністю або переоснащенням. Вибір правильного рівня розкладу залежить від конкретного застосування та характеру сигналу. У нашому випадку, сигнал ЕЕГ має різні компоненти, які можна виявити на різних рівнях розкладу. Рівень LevelMax=5 був обраний для забезпечення балансу між деталізацією і часом обробки.

Тепер для вейвлет-розкладу було використано функцію `wavedec`, що є частиною Wavelet Toolbox у MATLAB. Цей пакет надає ряд функцій для роботи з вейвлет-трансформаціями, включаючи вейвлет-розклад (як в функції `wavedec`), вейвлет-реконструкцію (як в `waverec`), та багато інших функцій для аналізу та обробки сигналів та зображень.

Отже ми виконуємо розклад:

```
wavname = 'db8'; % використуваний вейвлет
```

```
LevelMax = 5; % рівень розкладу
```

```
[Coefs, Lengths]=wavedec(y, LevelMax, wavname); % розклад сигналу
```

Тут `wavedec` приймає 3 аргументи, це сам графік «у», рівень розкладу «LevelMax» та обраний вейвлет «wawname». На виході це нам дає вихідні параметри `Coefs` та `Lengths`, де `Coefs` є масивом, що містить коефіцієнти вейвлет-розкладу. Ці коефіцієнти представляють інформацію про вхідний сигнал на різних частотних діапазонах. А `Lengths` - це вектор довжин, який відповідає кожному рівню розкладу. `Lengths` містить довжини апроксимаційних і детальних коефіцієнтів для кожного рівня розкладу. Особливо важливо зазначити, що довжина кожного рівня зменшується при переході від низького рівня до вищого. Як вже було зазначено вище, ці коефіцієнти в подальшому можна використовувати для реконструкції оригінального сигналу або його частин. В результаті маємо наступний графік.

Отже далі ми проходимо через всі рівні розкладу і для кожного ми створюємо 2 графіки: один для апроксимаційних коефіцієнтів і один для деталізаційних. Ці графіки допомагають візуально оцінити як апроксимацію, так і деталі сигналу на кожному рівні розкладу. Для цього використовуються методи `Wavelet Toolbox` такі як `appcoef()` для визначення апроксимаційних коефіцієнтів цього рівня. Апроксимаційні коефіцієнти представляють наближення сигналу на даному рівні розкладу. І також метод `detcoef()` для визначення деталізаційних коефіцієнтів на даному рівні. Деталізаційні коефіцієнти представляють деталі сигналу на відповідному рівні. Також Для кожного набору коефіцієнтів, ми знаходимо мінімальне та максимальне значення, для масштабування. Виглядає це все наступним чином.

```
figure(2)
for level=1:LevelMax
    coefA = appcoef(Coefs,Lengths,wawname,level); % апроксимація
    сигналу
    coefD = detcoef(Coefs,Lengths,level); % деталізація сигналу
    Amin=min(coefA);
    Amax=max(coefA);
    Dmin=min(coefD);
    Dmax=max(coefD);

    subplot(LevelMax,2,2*(level-1)+1), plot(coefA,'k')
```

```

axis([0,      length(coefA),Amin,Amx]),      title(['coefA_',
num2str(level)])
subplot(LevelMax,2,2*(level-1)+2), plot(coefD,'k')
axis([0,      length(coefA),Dmin,Dmax]),      title(['coefD_',
num2str(level)])
end

```

Ця частина коду відображає результати розкладу вейвлетів сигналу, який допомагає в аналізі сигналу. Апроксимація (зображена за допомогою коефіцієнтів `coefA`) представляє грубе наближення сигналу на певному рівні розкладу. Це дозволяє зрозуміти загальну структуру сигналу, ігноруючи дрібні деталі. Деталізація (зображена за допомогою коефіцієнтів `coefD`) показує детальну інформацію сигналу на певному рівні розкладу. Це дозволяє розглянути тонкі відмінності в сигналі, які можуть бути приховані при грубій апроксимації.

Таким чином, використовуючи цю частину коду, можна одночасно досліджувати загальну структуру сигналу та його детальну інформацію на різних рівнях розкладу. Це дуже корисно для аналізу ЕЕГ, де важливо зрозуміти як загальні тенденції, так і детальні відмінності.

На графіку (рис. 3.3.) це виглядає наступним чином

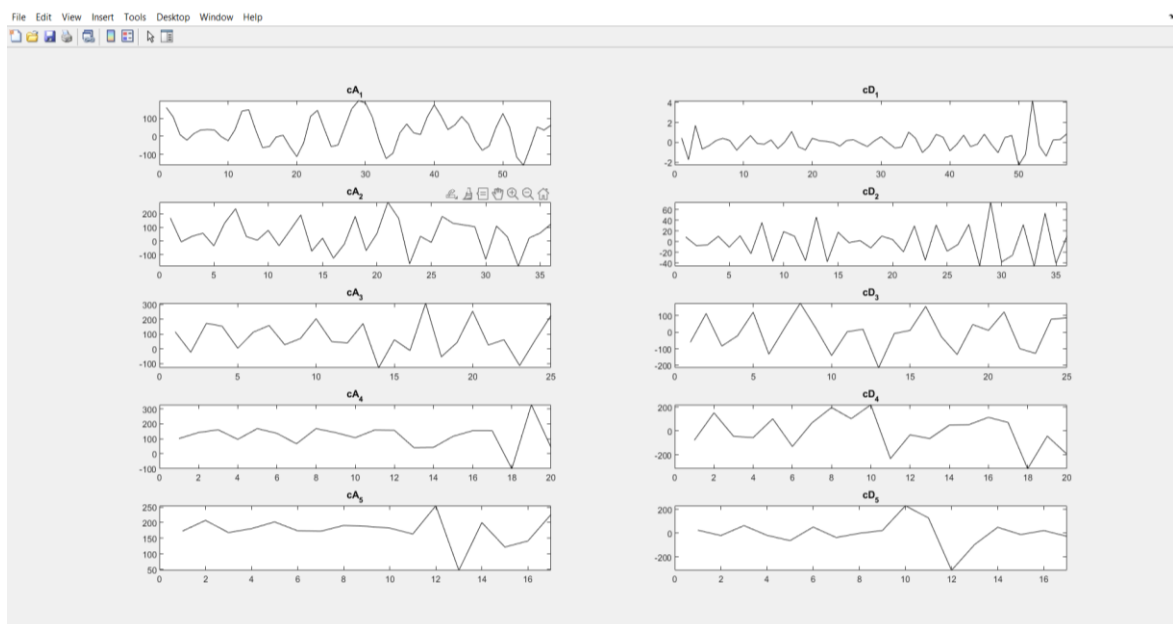


Рисунок 3.3 – Апроксимація та деталізація сигналу на кожному рівні

Також проведено реконструкцію сигналу (рис. 3.4.). Це є важливою частиною процесу вейвлет-аналізу. Це перевірка якості розкладу. Після розкладу сигналу за допомогою вейвлет-перетворення, ми можемо спробувати відновити оригінальний сигнал з отриманих коефіцієнтів. Якщо відновлений сигнал добре відтворює оригінал, це показує, що розклад був виконаний правильно і що ми не втратили важливої інформації в процесі розкладу. І також для відновлення сигналу після обробки. Вейвлет-перетворення часто використовується для обробки сигналів, таких як денойзінг (видалення шуму) або компресія. Після таких обробок, ми можемо відновити сигнал до його первісного просторового (чи часового) представлення за допомогою процесу реконструкції.

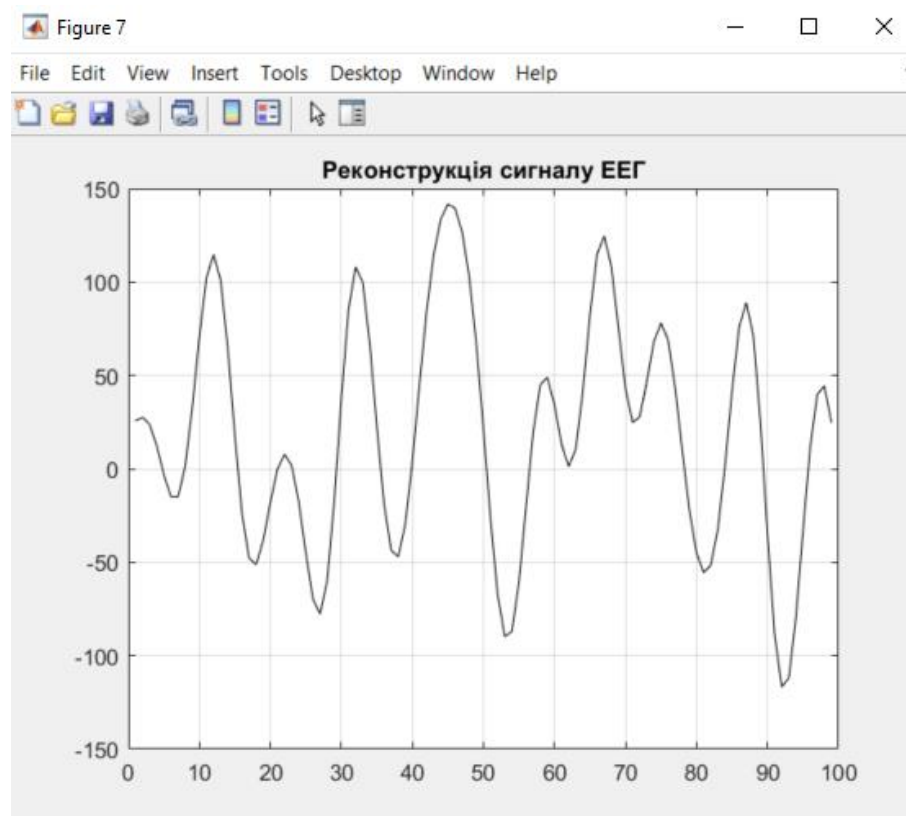


Рисунок 3.4 – Реконструкція сигналу ЕЕГ

Реконструкція також дозволяє нам краще розуміти, як вейвлет-перетворення впливає на сигнал. Наприклад, ми можемо спостерігати, як різні частини сигналу (такі як високочастотні деталі або низькочастотні апроксимації) впливають на загальний вигляд відновленого сигналу. Оскільки ніяких змін

вейвлет-перетворення не відбувалось, ми маємо отримати графік який мали на вході.

### 3.2.2 Вейвлет Морле

Наступним етапом роботи програми є неперервне вейвлет-перетворення. Як і для дискретного вейвлет-перетворення для неперервного необхідно обрати найбільш підходящий вейвлет. Кожна програма, яка використовує вейвлет-перетворення, потребує налаштування або визначення конкретного виду вейвлет-функції. Перша вимога до вибору вейвлету ґрунтується на кореляції між вейвлет-функцією та сигналом, який аналізується. Вигляд кореляційної функції дозволяє встановити лише групу вейвлет-функцій, але не надає інформацію про кількість вейвлет-коефіцієнтів. Цю інформацію можна отримати за допомогою додаткових досліджень.

На сьогоднішній день існує більше 400 різних типів вейвлетів, але в контексті досліджень ЕЕГ, найчастіше застосовують гармонійні вейвлети Морле.

У той же час, існують можливості використання інших видів вейвлетів для аналізу ЕЕГ, таких як вейвлети Добеші, які були використані для ДВП. Проте, цей підхід не є поширеним, і на сьогоднішній день наукових досліджень, що використовують інші вейвлети для аналізу ЕЕГ, майже не існує.

Вейвлет Морле привабливий завдяки наявності двох параметрів:  $\sigma$  (масштабний параметр, що керує шириною вікна) і  $\xi$  (переважна частота, що дозволяє налаштувати виборчу здатність базису) [29]. Регулюючи ці параметри, можна досягти:

- 1) бажаної ширини для частотних та часових вікон (через параметр  $\sigma$ );
- 2) високої точності апроксимації за допомогою невеликої кількості коефіцієнтів НВП, що стає можливим завдяки "резонансу" між сигналом та вейвлетом (через параметр  $\xi$ ).

Важливою рисою вейвлета Морле є його використання модулюючого функціонального компоненту, який базується на гармонійних функціях. Частота цих осциляцій визначається параметром  $\xi$ , що дозволяє вейвлет-функції бути

локалізованою як у низькочастотному, так і високочастотному діапазонах відповідно до варіації параметра  $\xi$ .

Вейвлет Морле задається виразом:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^4 \sqrt{\pi} \|\psi(t)\|}} e^{-t^2/\sigma^2} [e^{i\xi t} - e^{\xi^2 \sigma^2/4}] \quad (3.1)$$

$$\|\psi(t)\|^2 = 1 + e^{-\xi^2 \sigma^2} - 2e^{-3\xi^2 \sigma^2/4} \quad (3.2)$$

або

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} [e^{i2\pi f_0 t} - e^{-(2\pi f_0)^2/2}] e^{-t^2/2} \quad (3.3)$$

де  $f_0$  є основною частотою материнського вейвлету. Є ще друга компонента, яку можна назвати компонентом корекції. Але в практичних ситуаціях, коли  $f_0 \gg 0$ , цей коректуючий член стає незначним і його можна ігнорувати.

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{i2\pi f_0 t} e^{-t^2/2} \quad (3.4)$$

Цей вейвлет представляє собою комплексну синусоїду, що модулюється за допомогою гауссівської кривої.

Що стосується частотної області, то вейвлет Морле має вигляд гауссівського вікна з основною частотою  $f_0$  і шириною  $\sigma$ :

$$\hat{\psi}(f) = \Psi^*(f) = \sqrt[4]{\pi} e^{-(\pi^2/\sigma^2)(f-f_0)^2} = \sqrt{2\sqrt{\pi}} e^{-[2\pi f - 2\pi f_0]^2/2} \quad (3.5)$$

де  $\Psi(f)$  - перетворення Фур'є вейвлету Морле.

Відносно частотної смуги, вейвлет Морле, покриває обмежений діапазон, який визначається інтервалом  $[f_0 - \frac{\sigma}{2}, f_0 + \frac{\sigma}{2}]$ .

Спектр енергії:

$$|\hat{\psi}(f)|^2 = 2\sqrt{\pi}e^{-[2\pi f - 2\pi f_0]^2} \quad (3.6)$$

Перетворення Фур'є

$$\hat{\psi}(\omega) = \sigma\sqrt{\pi}[e^{\sigma^2(\xi-\omega)^2/4} - e^{\sigma^2(\xi+\omega)^2/4}] \quad (3.7)$$

Параметр  $\sigma$  відіграє важливу роль у визначенні частотно-часової роздільності вейвлету Морле. Зокрема, використовуючи одне й те ж значення масштабу, вейвлет-функція може бути розташована в області як низьких, так і високих частот при відповідній зміні  $\sigma$ . Таким чином, цей параметр дозволяє більш точно налаштувати оптимальне розрізнення в частотно-часовому діапазоні.

$$f = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 2}}{4\pi a} \quad (3.8)$$

НВП сигналу  $u(t)$  набуває вигляду

$$W_u(a, b) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^4 \sqrt{\pi} \sqrt{|a|}}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp\left(-\frac{(t-b)^2}{2\sigma^2 a^2} - i\xi \frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.9)$$

Щоб розглянути параметри  $\xi$  і  $\sigma$  базового вейвлету  $\psi(t)$ , ми скористаємося формулами, які показують відношення між масштабом та частотою:

$$a = \frac{\omega_n}{\omega} = \frac{f_n}{f} \quad (3.10)$$

де  $\omega_n, f_n$  - це нормовані кругова і лінійна частоти відповідно. Для вейвлету Морле, вони розраховуються за формулами:

$$\omega_n = \frac{1}{2}(\xi + \sqrt{\sigma^2 + 2/\sigma^2}); \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (3.11)$$

Маємо:

$$\sigma \cdot a = \sigma \frac{\omega_n}{\omega} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 2}}{2\omega}; \quad \frac{\xi}{a} = \xi \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\omega}{1 + \sqrt{1 + 2/\beta^2}} \quad (3.12)$$

де параметр, що характеризує НВП,  $\beta = \xi \cdot \sigma$ . Оскільки, при значенні  $\beta > 2\sqrt{5}$ , забезпечене виконання умови  $\xi^2 \sigma^2 \gg 2$ , тоді

$$\sigma \cdot a \approx \beta/\omega, \quad \xi/a \approx \omega \quad (3.13)$$

А значення параметра  $\beta$  за умови  $\xi \geq 4,5$  у більшості випадків доцільно обирати рівним 5.

Перевагою НВП із використанням комплексного материнського вейвлету (як і перетворення Фур'є) є те, що модуль цього перетворення не буде мати періодичної структури, на відміну від використання дійсних материнських вейвлетів. Замість цього, він представить собою амплітудні складові відповідних гармонік, або спектральних компонент. Щоб аналізувати сигнали, зручно використовувати локальний спектр неперервного вейвлет-перетворення:

$$E_u(a, b) = |W_u(a, b)|^2 \quad (3.14)$$

У практичних ситуаціях ми зазвичай маємо сигнал, який представлений рядом значень:

$$x_j = x(t_j) = x(j \cdot \Delta), \quad j = \overline{1, N-1} \quad (3.15)$$

де  $N$  - кількість значень.

Для швидкого виконання неперервного вейвлет-перетворення цього сигналу, ми можемо використати алгоритм, що базується на рівнянні, яке впливає з Парсеваля:

$$W_u(a, b) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \Psi^*(a \cdot \omega) e^{i\omega b} d\omega \quad (3.16)$$

де  $X(\omega)$ ,  $\Psi(\omega)$  - це перетворення Фур'є для  $x(t)$  і  $\psi(t)$  відповідно. Це означає, що зсув функції Морле  $b$  у просторі вихідних даних відповідає множенню  $W_x(a, b)$  на  $e^{i\omega b}$  при проведенні перетворення Фур'є вейвлету Морле.

Для вейвлету Морле перетворення Фур'є

$$\Psi(\omega \cdot a) = \sqrt{2\pi}\sigma \exp\left(-\frac{1}{2}[\sigma^2(\xi - \omega \cdot a)^2]\right) \quad (3.17)$$

Вираз для  $W_u(a, b)$  для дискретних значень:

$$W_u(m, n) = \frac{\sqrt{a_m}}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} C_k \Psi_\omega^*(k, m) e^{i(2\pi n k)/N} \quad (3.16)$$

де

$$C_{k,n} = (U_k, \Psi^*(k, n)) \quad (3.18)$$

Для вейвлету Морле

$$\Psi_\omega(k, m) = \sqrt{2\pi}\sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\left[\xi - \frac{2\pi \cdot k \cdot a_m}{N \cdot \Delta}\right]^2\right) \quad (3.19)$$

### 3.2.3 Перетворення Фур'є

Для візуалізації математичного змісту вейвлет-перетворення з вейвлетом Морле, було розроблено код для перетворення Фур'є вейвлету Морле та самого сигналу. Перетворення Фур'є, використовується для того щоб від часової області перейти до частотної. Для цього ми використовуємо вбудовано в Matlab функцію `fft()`, що використовує алгоритм FFT для обчислення перетворення Фур'є.

Для перетворення вейвлету Морле було написано наступний код:

```
% Параметри вейвлета Морле
```

```
omega0 = 5;
```

```

t = -10:0.1:10;

% Вейвлет Морле в часовій області
morlet_wavelet = exp(-t.^2/2).*exp(1i*omega0*t);

% Виконуємо перетворення Фур'є
morlet_spectrum = fftshift(fft(morlet_wavelet));

% Вісь частоти
freq_axis = linspace(-pi,pi,length(t));

% Побудова графіків
figure;
subplot(2,1,1);
plot(t,real(morlet_wavelet)); % реальна частина вейвлета
title('Морле вейвлет в часовій області');
xlabel('Час');
ylabel('Амплітуда');

subplot(2,1,2);
plot(freq_axis,abs(morlet_spectrum)); % модуль спектру
title('Морле вейвлет в частотній області');
xlabel('Частота');
ylabel('Амплітуда');

```

Було зазначено частоту  $\omega_0 = 5$  і параметра масштабу  $\sigma = 1$ , на проміжку від -10 до 10, умовно, секунд. Це має наступний вигляд (рис. 3.5):

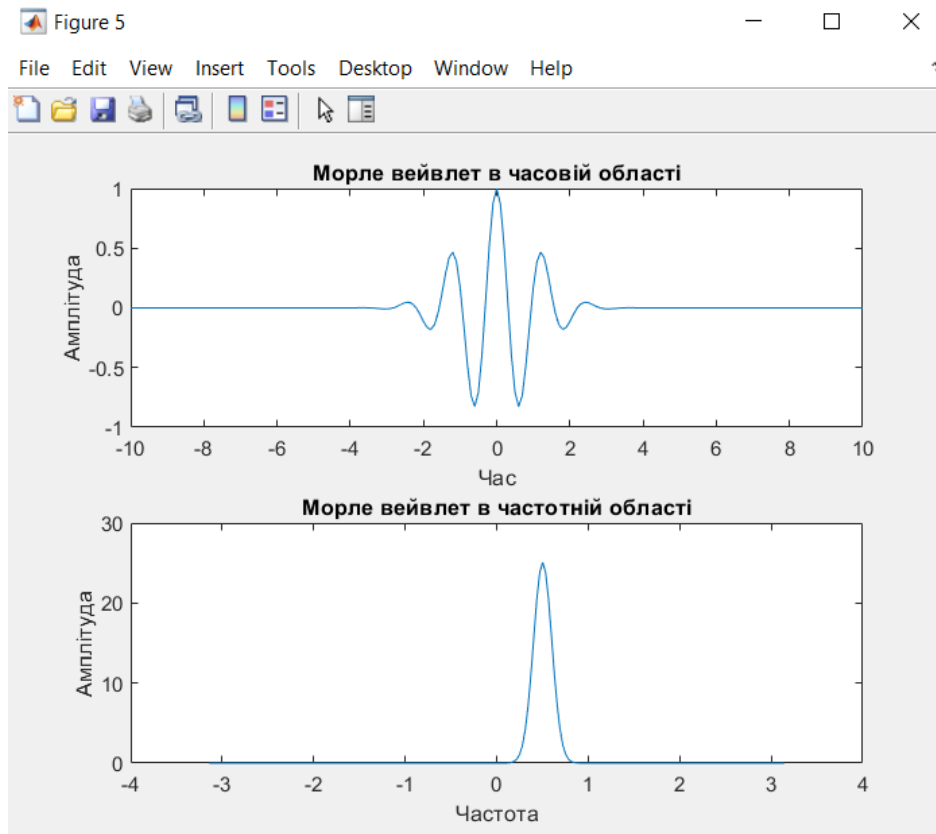


Рисунок 3.5 – Вейвлет Морле в часовій та частотній області

Аналогічно, але більш детально було виконано перетворення Фур'є самого сигналу, для цього було виконано наступний код:

```
figure(5)
z=fft(y);
q=fftshift(z);
rr=real(q); ri=imag(q);
freq_axis = linspace(-pi,pi,length(q));
a=abs(q); plot(freq_axis, a); grid
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',12);
xlabel('n'), ylabel('fft(Y(t))')
title("Перетворення Фур'є ЕЕГ сигналу");
```

де  $z$  – це результат перетворення Фур'є (FFT).  $\text{fftshift}(z)$  використовується для зсуву нульової частоти в центр спектра, що робить спектр симетричним щодо нульової частоти. Ну і  $\text{abs}(q)$  використовується для визначення модулів

комплексних чисел, які представляють спектр сигналу. Модуль комплексного числа представляє амплітуду відповідної частотної компоненти сигналу. Маємо результат (рис. 3.6):



Рисунок 3.6 – Перетворення Фур'є EEG сигналу

Ми можемо спостерігати перетворення Фур'є нашого EEG сигналу. Це нам дає можливість побачити, які частоти є домінуючими в сигналі. Це може бути особливо корисним, коли аналізується сигнал, який складається з різних частот.

Перетворення Фур'є працює з комплексними числами. В результаті перетворення Фур'є кожен вихідний компонент відповідає певній частоті в сигналі і є комплексним числом. Комплексне число складається з двох частин: реальної та уявної. Ми їх також можемо відобразити графічно. Для цього можемо скористатись, також вбудованими, `real()` та `imag()`. Ці методи дозволяють витягнути реальну та уявну частини, відповідно, кожного комплексного числа в векторі.

```

figure(5)
z=fft(y);
q=fftshift(z);
rr=real(q); ri=imag(q);
freq_axis = linspace(-pi,pi,length(q));
a=abs(q); plot(freq_axis, a); grid
set(gca,'FontName','Arial Cyr','FontSize',12);
xlabel('n'), ylabel('fft(Y(t))')
title("Перетворення Фур'є ЕЕГ сигналу");

```

Як аргумент використовується ряд комплексних чисел, отриманих в результаті перетворення Фур'є. Це має наступний вигляд. Реальна частина комплексного числа відображає косинусну складову частотного компоненту, тобто частоту, що змінюється відповідно до косинуса. Уявна частина комплексного числа відображає синусну складову частотного компоненту, тобто частоту, що змінюється відповідно до синуса (рис. 3.7).

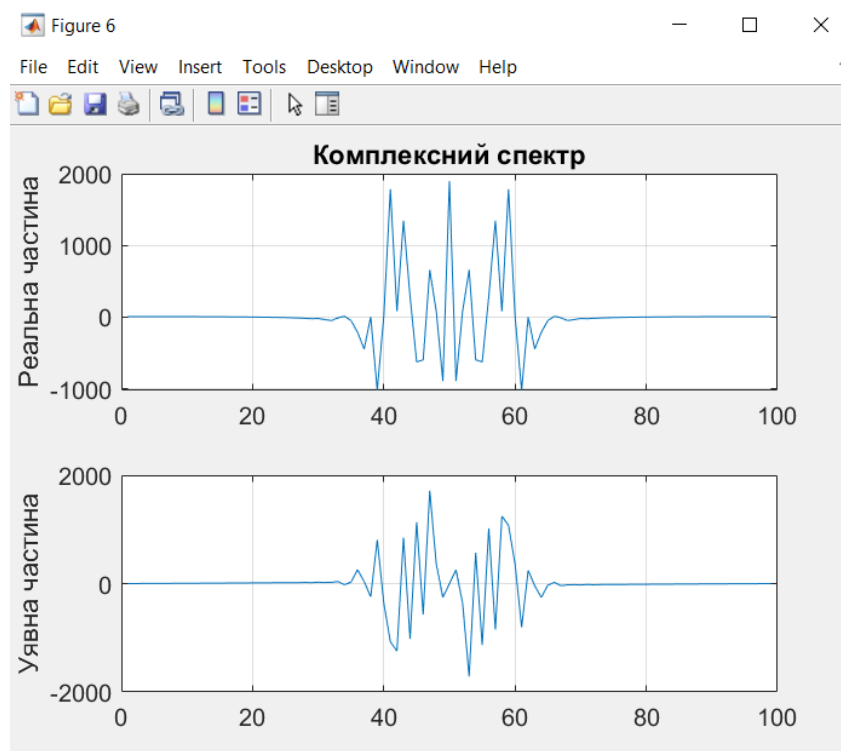


Рисунок 3.7 – Комплексний спектр (реальна та уявна частини)

### 3.2.4 Неперервне вейвлет-перетворення

Тепер слідуючи математичному змісту, ми маємо всі дані для виконання неперервного вейвлет-перетворення з використанням вейвлету Морле.

виконаємо вейвлет-аналіз, включаючи перетворення Морле, що є важливим інструментом в обробці сигналів, таких як ЕЕГ. Вони використовуються для вивчення залежності сигналу від часу та частоти одночасно, що особливо корисно для аналізу нестационарних сигналів, які можуть змінюватися з часом. Таке перетворення дозволяє виявляти локальні зміни в ЕЕГ, такі як піки або спалахи, які можуть вказувати на патологічні стани, такі як епілепсія. Також вони дозволяють виявляти та вивчати ритми мозку, такі як альфа, бета, тета та дельта хвилі. Ці хвилі відповідають різним станам свідомості та ментальних процесів, і вони можуть бути змінені в різних умовах здоров'я або хвороби, а перетворення Морле дозволяє більш детально це все дослідити.

В програмному середовищі для проведення даного перетворення перш за все було визначено необхідні параметри. Перш за все це назва відповідна назва вейвлету `wname`. Потім за допомогою метода `centfrq()` ми обчислюємо центральну частоту вейвлета  $F_c$ . Центральна частота - це та частота, де вейвлет має максимальну амплітуду. Потім задаємо межі досліджуваних частот було обрано 2 та 32 як мінімальну та максимальну відповідно. Також для подальших обчислень визначаємо частоту квантування  $F_s$ , яка відповідає довжині нашої вибірки. І з цими даними визначаємо період квантування та час. Тепер нам, для якісного аналізу, оскільки ми маємо діло з вейвлет перетворенням, ми налаштуємо масштаб відповідно до центральної частоти вейвлета, максимуму та мінімуму діапазону частот і часу.

Було, для порівняння побудовано наш графік ЕЕГ сигналу в, масштабованому по осі  $x$ , діапазоні. Для побудови двовимірного графіку перетворення Морле було використано функцію `imagesc()`. В MATLAB вона використовується для створення двовимірного кольорового графіка, в якому кольори відповідають значенням в матриці. Вона схожа на функцію `image()`, але

вона автоматично налаштовує відображення кольорів таким чином, щоб кольори відповідали мінімальному та максимальному значенням даних. Вона також може масштабувати осі координат так, щоб вони відповідали дійсним координатам даних.

```
wawname = 'mor1'; % використовуваний вейвлет (Морле)
Fc = centfrq(wawname); % центральна частота вейвлета (Морле)

% діапазон частот
Fmin = 2;% мінімум
Fmax = 32;% максимум

Fq = N; % частота квантування
T = 1; % тривалість запису
dt = 1/Fq; % період квантування
t = 0:dt:T-dt; % час

% так як вейвлет перетворення має справу
% з масштабом, а не з частотою, переводимо частоту в масштаб
a_max = Fc/Fmin/dt;
a_min = Fc/Fmax/dt;

% значення масштабів для яких буде виконано вейвлет перетворення
a = a_min:1:a_max;

Coefs = cwt(y,a,wawname); % виконуємо саме перетворення

% побудова вейвлет перетворення
figure(7)
subplot(2,1,1), plot(t,y,'k')
xlabel('time'), ylabel('y(t)')
title('Сигнал ЕЕГ');
subplot(2,1,2), imagesc(t,a,abs(Coefs))
axis xy, grid on
title('Перетворення Морле');
xlabel('t, s'), ylabel('a (scale)')
```

В контексті коду, `imagesc(t,a,abs(C))` використовується для відображення

результатів вейвлет-перетворення. Вхідні дані  $t$  і  $a$  визначають осі координат, а  $\text{abs}(C)$  - матриця значень, яка відображається за допомогою кольору. Значення  $\text{abs}(C)$  відповідають абсолютним значенням коефіцієнтів вейвлет-перетворення. В результаті ви отримуєте двовимірне відображення вейвлет-перетворення, де час відображено по горизонтальній осі, масштаб по вертикальній осі, а інтенсивність кольору відповідає величині коефіцієнтів вейвлет-перетворення. Як результат маємо наступне зображення (рис. 3.8)

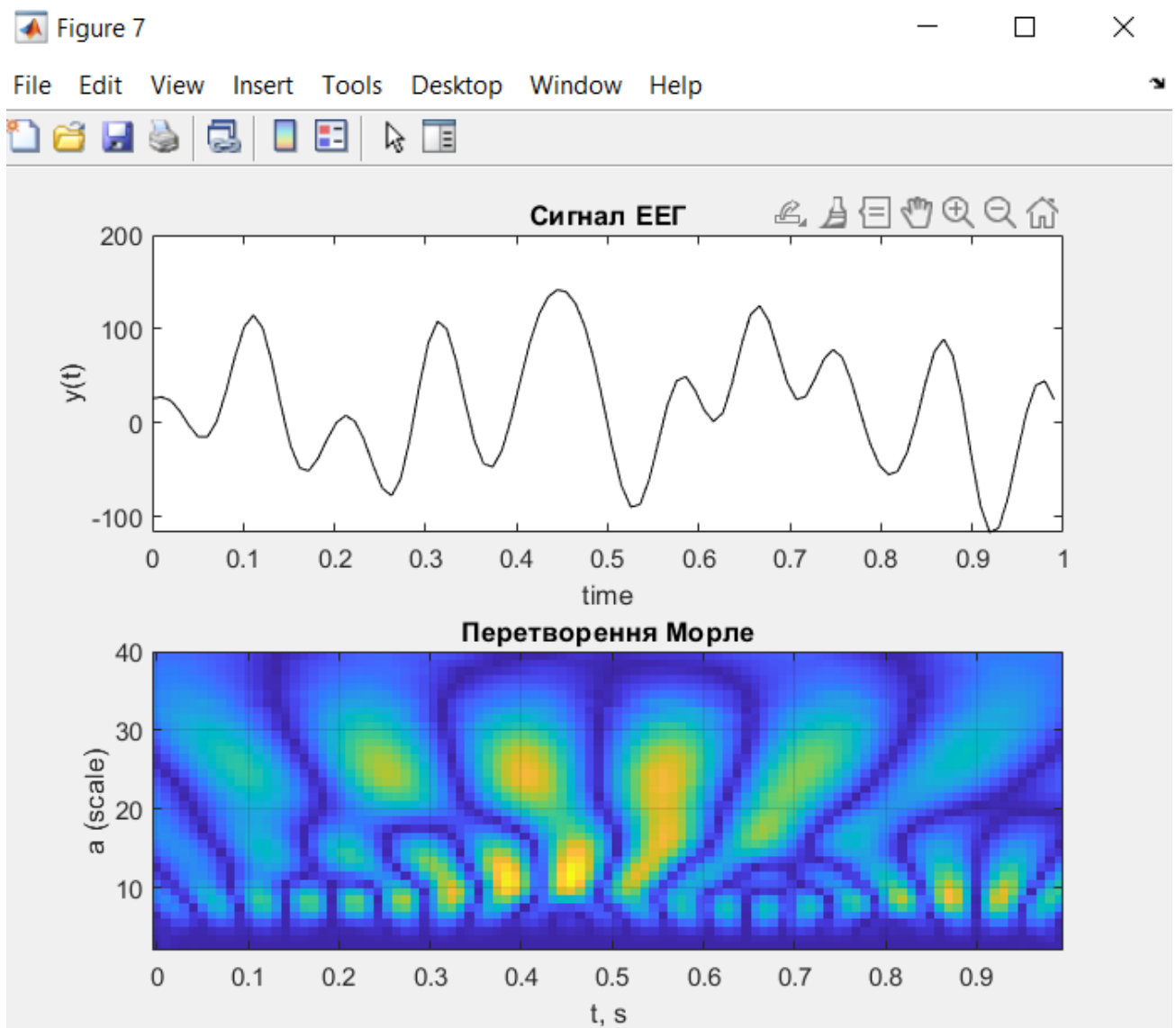


Рисунок 3.8 – Перетворення Морле

Також для більш зручного аналізу, додатково було побудовано тривимірну поверхню, використовуючи функцію `surf()`:

```

figure(8)
surf(t, a, abs(Coefs))
grid on
axis tight, shading flat
title(['Перетворення Морле EEG сигналу'] )
xlabel('t, s'), ylabel('a (scale)'), zlabel('Розклад, амплітуда')

```

Візуально це має наступний вигляд (рис. 3.9):

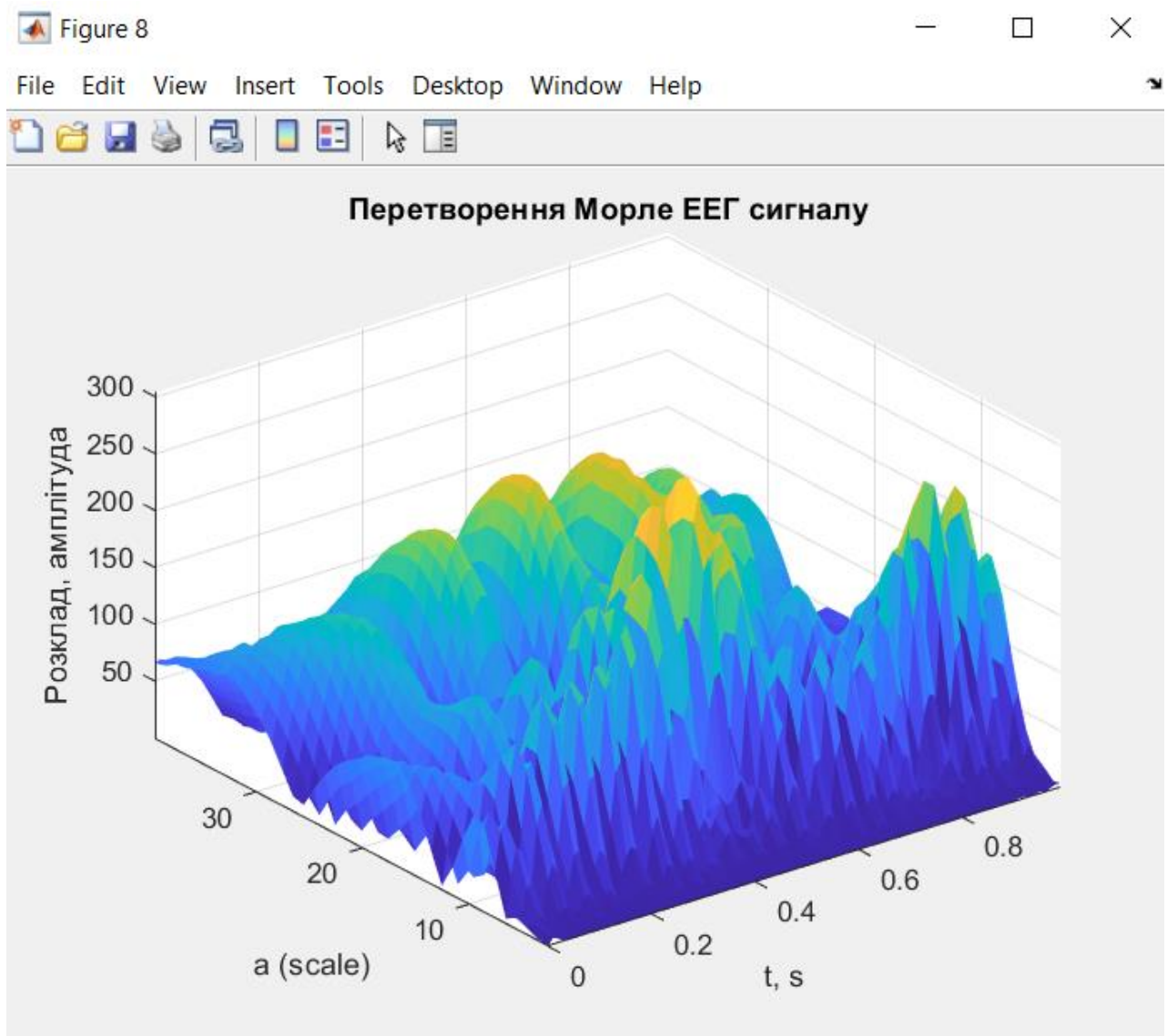


Рисунок 3.9 – Перетворення Морле (тривимірна поверхня)

### 3.4 Розрахунок економічного ефекту

Підсумком виконання економічної частини дипломного проекту стало утвердження теоретичних засад, які безпосередньо пов'язані з економічною сферою та організацією виробничих процесів, а також застосування цих знань для практичного рішення завдання техніко-економічного обґрунтування за допомогою методик функціонально-вартісного аналізу.

На основі інформації про ключові функції програмного рішення, що створюється, було встановлено чотири варіанти додатка, з яких потрібно було обрати найбільш прогресивний та ефективний і четвертий варіант функціонального застосування був визнаний найкращим. Цей варіант забезпечує максимальне збільшення технічних та економічних показників. Його застосування передбачає:

- мову програмування – MATLAB;
- реалізацію інтерфейсу користувача у середі розробки MATLAB;
- найбільш оптимальну швидкодію програмного продукту.

В ході проведення розрахунків було визначено вартість розробки цього програмного продукту, що складає 85 464,29 грн.

### Висновки до розділу 3

Matlab - це високорівнева мова програмування та інтерактивне середовище для наукових та інженерних розрахунків. Вибір Matlab для аналізу сигналів ЕЕГ обумовлений кількома ключовими причинами:

В роботі для програмної реалізації аналізу ЕЕГ сигналу було використано такі методи: перетворення Фур'є, вейвлет-аналіз та перетворення Морле.

Перетворення Фур'є: Це математичний метод, який дозволяє розкласти комплексний сигнал на його складові частоти. В даному випадку використовується швидке перетворення Фур'є (FFT), що є ефективнішим

алгоритмом обчислення дискретного перетворення Фур'є. Після застосування FFT, основна частота сигналу ЕЕГ може бути визначена як максимальна амплітуда.

Вейвлет-аналіз: Цей метод дозволяє аналізувати нестационарні дані, використовуючи вейвлети, що дозволяє розкласти сигнал на його складові частоти з визначенням часового розташування кожної складової. В цьому коді було використано вейвлет Добеші 8 порядку ('db8') для аналізу ЕЕГ сигналу.

Перетворення Морле: Це ще один вид вейвлет-аналізу, який використовує вейвлет Морле. Він особливо корисний для аналізу сигналів з часовою структурою, як то сигнал ЕЕГ.

У використаному коді аналізувалися апроксимації та деталізації складових сигналу на різних рівнях розкладу. Застосування цих методів дозволяє розглянути сигнал ЕЕГ з різних точок зору і відкриває можливості для детального аналізу характеристик сигналу.

Загалом, ці три методи дають можливість виконати детальний аналіз сигналу ЕЕГ, що може бути використано для виявлення патологій, дослідження стану мозку під час сну, медитації та інших станів, а також для розробки інтерфейсів типу мозок-комп'ютер.

Також результатом виконання економічної частини дипломного проекту є закріплення теоретичних знань, безпосередньо пов'язаних з галуззю економіки та організацією виробництва, та використання цих знань для вирішення практичного завдання техніко-економічного обґрунтування з використанням методологій функціонально-вартісного аналізу.

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В ході виконання дипломної роботи було зроблено глибокий аналіз ЕЕГ сигналів за допомогою перетворення Фур'є та вейвлет-аналізу. Дослідження показало, що ці два методи є дуже ефективними для виявлення та аналізу характеристик сигналів ЕЕГ, що виявляються в частотно-часовому просторі.

Тим не менш, однією з основних проблем перетворення Фур'є є відсутність інформації про часову структуру сигналу. Для вирішення цієї проблеми було застосовано вейвлет-аналіз. Вейвлет-аналіз дозволяє нам дослідити як частотну, так і часову структуру сигналу, що є критично важливим для аналізу ЕЕГ, де різні патологічні стани можуть проявлятися у вигляді змін у частотних характеристиках протягом часу.

Основною метою дослідження було отримання детального уявлення про частотну структуру сигналу в різні моменти часу, що може бути корисним у багатьох застосуваннях, включаючи вивчення мозкової активності, діагностику різних станів мозку та дослідження різних медичних умов.

Було підтверджено, що вейвлет-аналіз є ефективним методом аналізу ЕЕГ сигналів. Вейвлет-перетворення Морле враховує часові зміни в частотно-просторовій структурі, але реалізація цього підходу до аналізу просторово-часових сигналів потребує більше обчислювальних ресурсів.

Було використано програмне забезпечення MATLAB для реалізації методу аналізу, що підтверджує його гнучкість і потужність у науковому обчисленні та аналізі даних. Результати показали, що метод може бути ефективно використаний для аналізу ЕЕГ сигналів.

В загальному, дана робота підкреслює важливість використання частотно-часового аналізу для вивчення ЕЕГ сигналів. Обидва методи, перетворення Фур'є та вейвлет-аналіз - доповнюють один одного і разом дають більш повну картину структури ЕЕГ сигналів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Akay M. (2001). "Biomedical Signal Processing and Signal Modeling". Wiley-IEEE Press.
2. Addison P. S. (2010). The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance. CRC press.
3. Bishop C. M. (2006). Pattern Recognition and Machine Learning. Springer.
4. Briggs F., Mangun G. R., & Usrey W. M. (2013). Attention enhances synaptic efficacy and the signal-to-noise ratio in neural circuits. *Nature*, 499(7459), 476-480.
5. Cohen M. X. (2014). Analyzing neural time series data: theory and practice. MIT press.
6. Enderle J., Blanchard S., & Bronzino J. (2012). "Introduction to Biomedical Engineering". Academic Press.
7. Le Van Quyen M., Foucher J., Lachaux J., Rodriguez E., Lutz A., Martinerie J., & Varela F. J. (2001). Comparison of Hilbert transform and wavelet methods for the analysis of neuronal synchrony. *Journal of neuroscience methods*, 111(2), 83-98.
8. Liu Chengyu, Springer David, Li Qiao, Moody Benjamin, Abad Juan RicAPdo, Chorro Francisco J, Castells Francisco, Roig José Millet, Silva IkAPo, Johnson Alistair E W, Syed Zeeshan, Schmidt Samuel E, Papadaniil Chrysa D, Hadjileontiadis Leontios, Naseri Hosein, Moukadem Ali, Dieterlen Alain, Brandt Christian, Tang Hong, Samieinasab MAPyam, Samieinasab Mohammad Reza, Sameni Reza, Mark Roger G, Clifford GAPi D. (2016). An open access database for the evaluation of heart sound algorithms. *Physiological Measurement*, 37(12), 2181-2213.
9. Mallat S. (2009). A wavelet tour of signal processing: The Sparse Way. Academic press.
10. Oostenveld R., Fries P., Maris E., & Schoffelen J. M. (2011). FieldTrip: Open source software for advanced analysis of MEG, EEG, and invasive electrophysiological data. *Computational intelligence and neuroscience*, 2011, 1.

11. Oppenheim A. V., & Schafer R. W. (2010). *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall.
12. Percival D. B., & Walden A. T. (1993). *Spectral analysis for physical applications: multitaper and conventional univariate techniques*. Cambridge university press.
13. Rangayyan R. M. (2015). "Biomedical Signal Analysis: A Case-Study Approach". Wiley-IEEE Press.
14. Samieinasab M., & Sameni R. (2015). Fetal phonocardiogram extraction using single channel blind source separation, 2015 23rd Iranian Conference on Electrical Engineering, Tehran, 2015, pp. 78-83. doi: 10.1109/IranianCEE.2015.7146186.
15. Saltzman W. Mark. (2012). "Biomedical Engineering: Bridging Medicine and Technology". Cambridge University Press.
16. Subasi A. (2007). EEG signal classification using wavelet feature extraction and a mixture of expert model. *Expert Systems with Applications*, 32(4), 1084-1093.
17. Sundararajan D. & Sivanandam S. N. (2000). "Biomedical Signal Processing: Principles and Techniques". CRC Press.
18. Torrence C., & Compo G. P. (1998). A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological society*, 79(1), 61-78.
19. Vanrullen R. (2011). Four common conceptual fallacies in mapping the time course of recognition. *Frontiers in psychology*, 2, 365.
20. Welch P. (1967). The use of Fast Fourier Transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2), 70-73. <https://doi.org/10.1109/TAU.1967.1161901>.
21. Zikov T., Bibian S., Dumont G. A., Huzmezan M., & Ries C. R. (2006). A wavelet based de-noising technique for ocular artifact correction of the electroencephalogram. In 2006 International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (pp. 3562-3567). IEEE.

22. Абакумов В.Г. Біомедичні сигнали. Генезис, обробка, моніторинг / В.Г. Абакумов, О.І. Рибін, Й. Святош. – К.: Нора-прінт, 2001. – 516 с.
23. Буриченко М.Ю. Оброблення біомедичних сигналів / М.Ю. Буриченко, О.В. Булигіна, Ю.Ю. Оникієнко, М.В. Архирей. – К.: НАУ, 2017. – 208 с.
24. Живандрова, Ю., Сиропятов, А., & Буряк, В. (2016). "Комплексная биометрическая аутентификация личности". *Systems of Information Processing*, 4(141), pp. 104–107.
25. Медицинские приборы. Разработка и применение / Дж.Г. Вебстер, И.В. Камышко, Д.А. Калашник. – М.: Медицинская книга, 2004. – 720 с.
26. Рангайан Р.М. Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход / Р.М. Рангайан. – М.: Физматлит, 2007. – 440 с.
27. Реєстрація, обробка та контроль біомедичних електрографічних сигналів: навч. посіб. / В. Вуйцік, З.Ю. Готра, О.З. Готра та ін. – Львів: Ліга-Прес, 2009. – 308 с.
28. Таланчук П.М., Зеленський К.Х., Кіт Г.В., Сердаковський В.С. (2018). Аналіз ЕЕГ із застосуванням вейвлет-перетворень. Серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика, №2 (20), с. 101—110. [Електронний ресурс]. Доступно на: <https://visn-it.uu.edu.ua>.
29. Зеленський К.Х., Рудніков Є.Г., Сирота О.І. (2022). Аналіз ППК-хвильових розрядів ЕЕГ із застосуванням вейвлет-перетворень. Біомедична інженерія і технологія, №7, с. 35--43.