УДК 51-73

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ТОЧКОВИХ ВИХОРІВ

В. О. Дідковський[1, a], І. І. Ніщенко[2]

[1] *Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Фізико-технічний інститут*

[2] *Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Фізико-технічний інститут*

Анотація

Для системи взаємодіючих точкових вихорів на площині, що функціонує в дискретному часі, доведено існування стаціонарного режиму, при якому вихори рухаються по колу зі сталою кутовою швидкістю. При наявності випадкових збурень, розв'язано задачу оцінки параметрів системи та досліджено вплив параметрів керування на поведінку центра завихреності та моменту завихреності системи. Встановлено орбіти обертання в стаціонарному режимі за спостереженими даними за допомогою поєднання алгоритмів машиного навчання DBSCAN та Random Forest.

Ключові слова: вихори, оптимальне керування,завихреність, еволюція, кластеризація, класифікація, DBSCAN, Random Forest

Вступ

Дослідження динаміки точкових вихорів, розпочате Г.Гельмгольцем ще у 19 ст., та продовжене Томсоном, Хавелоком та багатьма іншими [1], залишається актуальним і сьогодні. Рівняння руху взаємодіючих вихорів виникають в гідродинаміці, аеродинаміці, електродинаміці, метеорології. В даній роботі розглянуто систему взаємодіючих точкових вихорів на площині, що функціонує в дискретному часі. Вивчено стаціонарний режим функціонування такої системи . При наявності випадкових збурень розв'язано задачу оцінки параметрів системи.

1. Поведінка системи двох взаємодіючих вихорів

Розглянемо систему двох взаємодіючих вихорів на площині, рух яких задається системою рівнянь

$$\begin{cases} z_1^{n+1} = \gamma z_1^n + \beta \frac{U(z_1^n - z_2^n)}{||z_1^n - z_2^n||^2} \\ z_2^{n+1} = \gamma z_2^n - \beta \frac{U(z_1^n - z_2^n)}{||z_1^n - z_2^n||^2} \end{cases} \tag{1}$$

$z_1^0 = (x_1^0,\ y_1^0)$, $z_2^0 = (x_2^0,\ y_2^0)$ є заданими початковими положеннями вихорів в момент часу n. U - ортогональна матриця:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\beta > 0$ та $\gamma \in (0, 1)$ параметри керування вихорами. Поведінку вихорів змодельовано за допомогою програмного забезпечення Python та відповідних бібліотек. Необхідний код знаходиться на репозиторії GitHub [2].

На рис. 1а, 1б, 1в зображено траєкторії вихорів при однакових початкових умовах та різних параметрах керування. Використання параметра керування γ (притягуючої сили в початку координат) та β (управління циркуляцією) забезпечує обертання вихорів по колу з центром в початку координат, радіус якого залежить від значень параметрів керування.

1.1. Характеристики системи двох точкових вихорів

Позначимо через r_n відстань між вихорами в момент часу n:

$$r_n = ||z_1^n - z_2^n|| = \sqrt{(x_1^n - x_2^n)^2 + (y_1^n - y_2^n)^2} \tag{2}$$

Через $L_n = ||z_1^n||^2 + ||z_2^n||^2$ - момент завихреності в момент часу n. Доведено існування границь для характеристик:

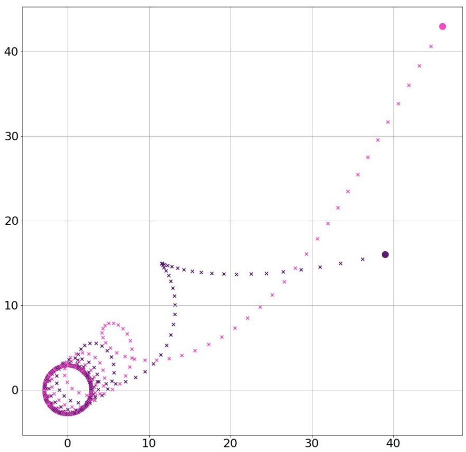
$$r^2 = \lim_{n\to\infty} r_n^2 = \frac{2\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} \tag{3}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} \tag{4}$$

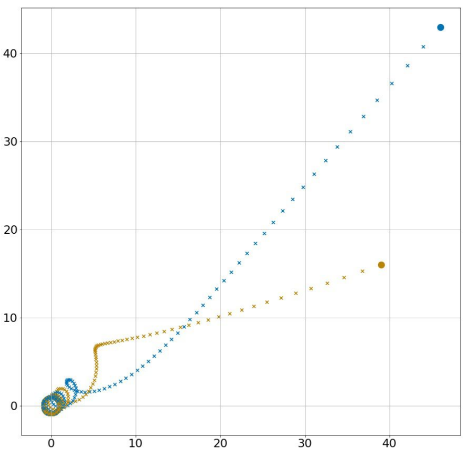
Встановлено, що в стаціонарному режимі функціонування вихори обертаються по колу радіуса $R = \sqrt{\frac{L}{2}}$ з центром в початку координат зі сталою кутовою швидкістю φ, для якої:

$$\cos\varphi = \gamma \tag{5}$$

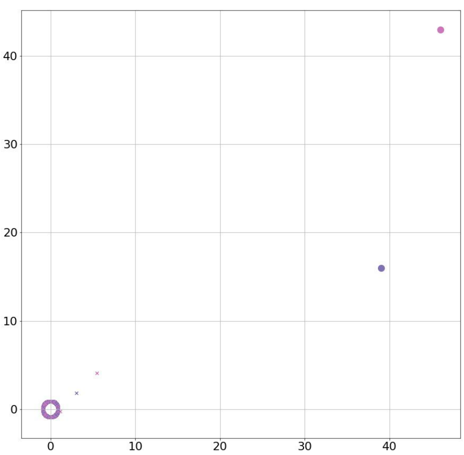
[a] vik.didkovskiy@gmail.com



(а) З параметрами β=0.9, γ=0.95

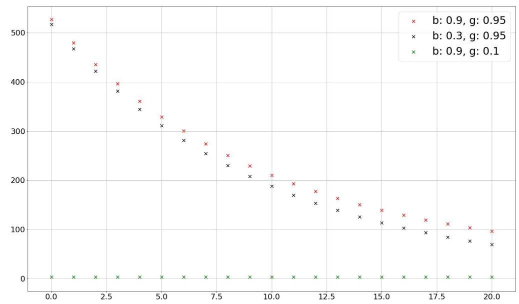


(б) З параметрами β=0.3, γ=0.95

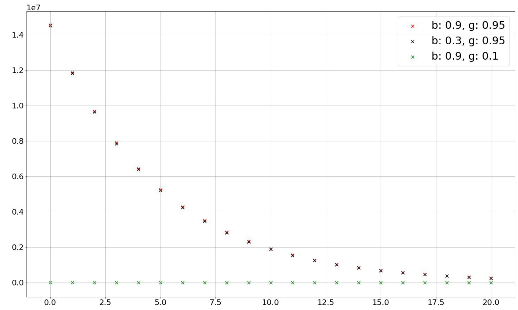


(в) З параметрами β=0.9, γ=0.1

Рис. 1. Еволюція двох вихорів з $z_1^0 = (46, 43)$ $z_2^0 = (39, 16)$



(а) Відстань між вихорами r_n



(б) Момент завихреності L_n

Рис. 2. Характеристики еволюції двох вихорів

На графіках 2а, 2б зображено поведінку характеристик вихорів з ростом n при різних значеннях параметрів керування β та γ.

1.2. Поведінка системи двох взаємодіючих вихорів за наявності шуму

Розглянемо систему при наявності шуму:

$$\begin{cases} z_1^{n+1} = \gamma z_1^n + \beta \frac{U(z_1^n - z_2^n)}{||z_1^n - z_2^n||^2} + \xi^{n+1} \\ z_2^{n+1} = \gamma z_2^n - \beta \frac{U(z_1^n - z_2^n)}{||z_1^n - z_2^n||^2} + \xi^{n+1} \end{cases} \tag{6}$$

$\{\xi^n\}_{n\geq 1}$ - послідовність незалежних випадкових величин з нормальним розподілом:

$$\forall n \ \xi^n \sim N\{(0,\ 0); \sigma^2 I\},$$

де I - одинична матриця, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Зауважимо, що оскільки шум є однаковим для обох вихорів, то на величину $r_n^2 = ||z_1^n - z_2^n||^2$ – відстань між вихорами – шум не впливає. Доведено, що

$$r^2 = \lim_{n\to\infty} r_n^2 = \frac{2\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} \tag{7}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \frac{4\sigma^2}{1-\gamma^2} \tag{8}$$

Також, доведено, що статистика $\hat{\sigma^2}$ є незміщеною змістовною оцінкою для σ^2, де Q_k - центр завихреності

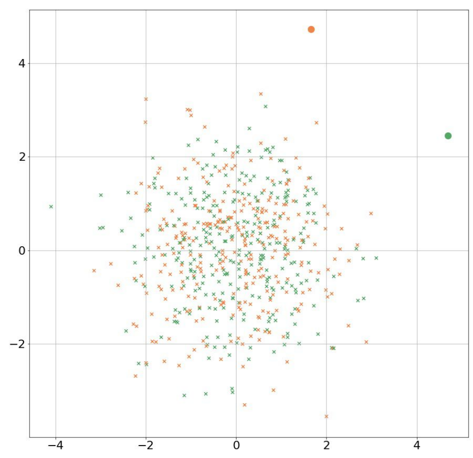


Рис. 3. Еволюція двох вихорів з параметрами β=0.3, γ=0.95 за наявності шуму

в момент часу k.

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} \| \, Q_k - \gamma Q_{k-1} \, \|^2$$

$$Q_k = \frac{z_1^k + z_2^k}{2}$$

Також запропоновано алгоритм, оцінювання невідомої дисперсії та параметрів керування за спостереженими даними.

На рис. 3 зображено траєкторії вихорів при наявності випадкових збурень.

1.3. Задача оптимального керування еволюцією вихорів

Нехай система з двох взаємодіючих вихорів за наявності шуму з відомою дисперсією σ^2 керується парою (β_0, γ_0) так, що відстань між ними R_0. Хочемо знайти таку пару керування (β, γ), щоб відстань між вихорами стала R. Пару (β, γ) шукаємо як розв'язок наступної задачі оптимізації:

$$\begin{cases} (\gamma - \gamma_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 + (r_T^2 - R^2)^2 + \frac{\sigma^2}{1-\gamma^2} \to \min \\ R^2 = \frac{2\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \end{cases} \tag{9}$$

де σ^2 оцінка дисперсії побудованої за попередніми спостереженнями. T - часовий проміжок, в якому розглядається еволюція системи.

Використовуючи python та алгоритм Sequential Least Squares Programming (SLSQP)[4] вдалося знайти оптимальну пару (β, γ) [2].

2. Поведінка системи N взаємодіючих вихорів

Розглянемо систему з N взаємодіючих частинок – вихорів, еволюція яких описується в дискретному

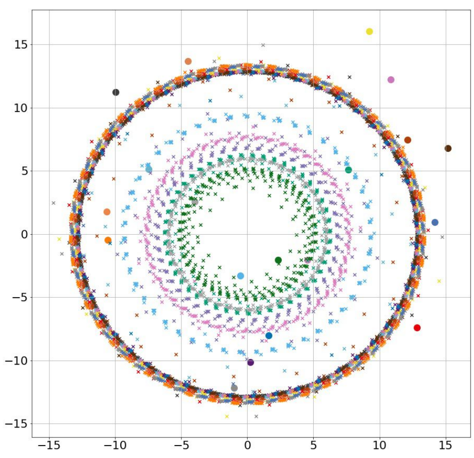


Рис. 4. Еволюція з 20 вихорів з параметрами β=0.3, γ=0.95

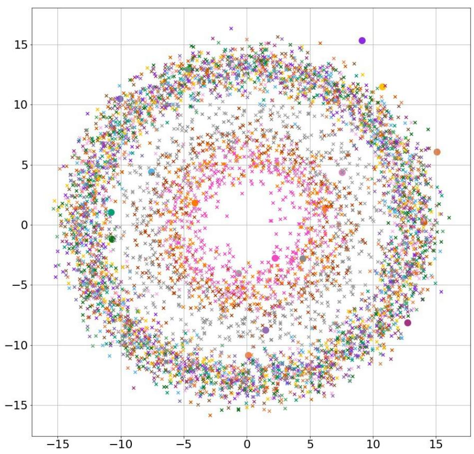


Рис. 5. Еволюція з 20 вихорів з параметрами β=0.3, γ=0.95 за наявності шуму

часі рівнянням:

$$z_i^{n+1} = \gamma z_i^n + \beta \sum_{j=1,\ i\neq j}^{N} U \frac{z_i^n - z_j^n}{||z_i^n - z_j^n||^2} \tag{10}$$

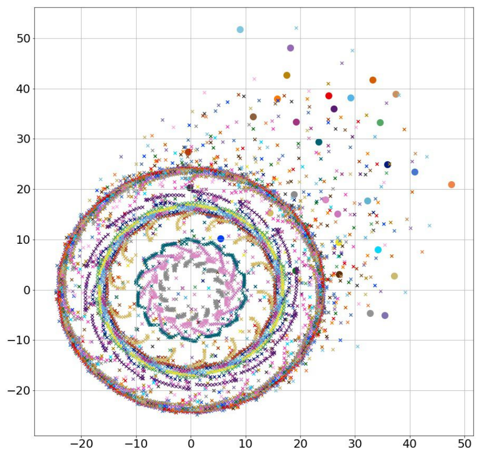
На рис. 4 зображено траєкторії вихорів.

На рис. 5 зображено траєкторії вихорів за наявності шуму, коли еволюція системи описується рівнянням:

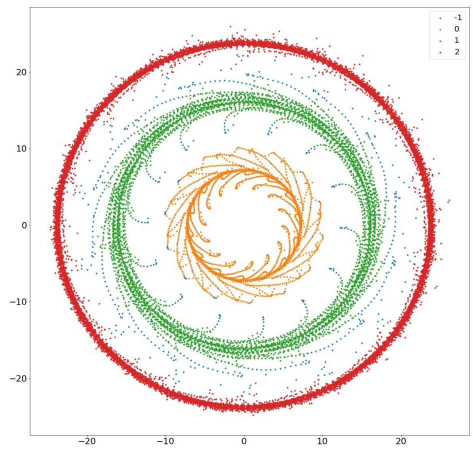
$$z_i^{n+1} = \gamma z_i^n + \beta \sum_{j=1,\ i\neq j}^{N} U \frac{z_i^n - z_j^n}{||z_i^n - z_j^n||^2} + \xi^n \tag{11}$$

де $\{\xi^n\}_{n\geq 1}$ - послідовність незалежних випадкових величин з нормальним розподілом в R^N.

Кількість орбіт обертання в стаціонарному режимі залежить від кількості вихорів у початковий момент часу, їх взаємному розташуванню та параметрів керування [3].



(а) Еволюція з 35 вихорів з параметрами β=0.4, γ=0.9



(б) Результат кластеризації за орбітами обертання

Рис. 6. Кластеризація вихорів

3. Класифікація вихорів за орбітами обертання

На рис. 5 видно, що кількість орбіт обертання в стаціонарному режимі може бути різна. Була побудована модель, яка по спостереженій еволюції вихорів здатна віднести вихор до відповідної орбіти обертання. Для навчання моделі був використаний алгоритм класифікації Random Forest рис. [5]. Для отримання навчальної вибірки для моделі класифікації був використаний алгоритм кластеризації DBSCAN [6], який по наявній еволюції вихорів (рис. 6а) виділив рівні обертання (рис. 6б). Якість класифікатора (рис. 7) досить висока (оскільки кластер -1 є шумом, та є не важливим).

	precision	recall	f1-score	support
-1	0.93	0.62	0.74	202
0	0.99	1.00	0.99	924
1	0.98	1.00	0.99	2172
2	1.00	1.00	1.00	4682
micro avg	0.99	0.99	0.99	7980
macro avg	0.97	0.90	0.93	7980
weighted avg	0.99	0.99	0.99	7980

Рис. 7. Оцінка якості класифікатора Random Forest

Робоча програма наявна на репозиторії GitHub [2].

Висновки

В цій роботі розглянуто системи вихорів, які еволюціонують в дискретному часі. Встановлено вплив параметрів керування на момент завихреності та кутову швидкість обертання системи двох вихорів у стаціонарному режимі функціонування. Розв'язано задачу оцінки невідомих параметрів керування за наявності випадкових збурень. Запропоновано алгоритм машинного навчання, який за даними спостережень для багатоточкової системи вихорів здатен виділити стаціонарні орбіти обертання та знайти для кожного вихора його орбіту. Наступним кроком може стати розв'язання задачі знаходження орбіт обертання багатоточкової системи вихорів за заданою початковою конфігурацію та параметрами керування.

Перелік використаних джерел

1. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. — 2005. — С. 368 с. — Режим доступа: `http://window.edu.ru/resource/935/67935/files/ics16.pdf`.
2. Код проекту— `https://github.com/ViktorDidkovskyi/RL_whirlwind`.
3. Ареф Х., Мелешко В. В.., Губа А. А.., Гуржий А. А. Равномерно-вращательные конфигурации точечных вихрей— Прикладна гідромеханіка. — 2007. — Т. 9, № 2-3. — С. 5–24.
4. Paul T. Boggs., Jon W. Tolle Sequential Quadratic Programming. — 2005. — 368 p. — Access mode: `https://www.researchgate.net/publication/230872679_Sequential_Quadratic_Programming`.
5. Leo Breiman Random Forest. — Statistics Department University of California Berkeley, CA94720. — 2001. — Access mode: `https://www.stat.berkeley.edu/~breiman/randomforest2001.pdf`.
6. Martin Ester, Hans-Peter Kriegel, Jiirg Sander, Xiaowei Xu ADensity-BasedAlgorithmfor DiscoveringClusters in LargeSpatial Databaseswith Noise. — Institute for ComputerScience, University of Munich Oettingenstr. 67, D-80538Miinchen, German. — 1996. — Access mode: `http://window.edu.ru/resource/935/67935/files/ics16.pdf`.