НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК ______________

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ О.І. Клесов
«14» травня 2021 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою « Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Умови інтегровності тригонометричних рядів типу Фейєра»

Виконав:
студент ІІ курсу магістратури, групи ОМ-91мн
Хрипко Станіслав Станіславович ___________

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Задерей Петро Васильович
____

Рецензент: Доктор фіз.-мат. наук, снс,
провідний науковий співробітник відділу
обчислювальної математики
Інституту математики НАН України,
А.П. Голуб ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________

Київ – 2021 рік

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ О.І. Клесов

«04» лютого 2021 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Хрипко Станіславу Станіславовичу

1.Тема дисертації «Умови інтегровності тригонометричних рядів типу Фейєра», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Задерей Петро Васильович, затверджені наказом по університету від «26» березня 2021 р. №901-с.

2. Термін подання студентом дисертації 17 травня 2021р.

3. Об'єктом дослідження є тригонометричні ряди та ряди Фур'є.

4. Предмет дослідження є встановлення необхідних і достатніх умов на коефіцієнти тригонометричного ряду при яких суми Фейєра збігаються в середньому до суми даного тригонометричного ряду.

5. Перелік завдань, які потрібно виконати:

1) Ознайомитися з необхідною літературою та навести означення тригонометричного ряду та ряду Фур'є.

2) Навести класичні теореми, що забезпечують необхідні та достатні умови інтегровності тригонометричних рядів.

3) Довести теореми про умови на коефіцієнти комплекснозначних тригонометричних рядів при виконанні яких дані тригонометричні ряди будуть рядами Фур'є.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 13 слайдів.

7. Орієнтовний перелік публікацій

Задерей П. В., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Хрипко С. С. Про ряди Фур'є обмежених функцій// Восьма міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті» 26–27 грудня 2019 року, Київ.

8. Дата видачі завдання 4 лютого 2021 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Огляд літератури	04.02.21-11.02.21	виконано
2	Написання основних означень	12.02.21-21.02.21	виконано
3	Огляд класичних теорем, в яких зазначені необхідні та достатні умови інтегровності тригонометричних рядів	22.02.21-07.03.21	виконано

4	Приведення класичних теорем, в яких зазначені необхідні та достатні умови інтегровності тригонометричних рядів	08.03.21-16.03.21	виконано
5	Лінійні методи сумування рядів Фур'є	17.03.21-21.03.21	виконано
6	Формування та доведення теореми в якій зазначено необхідні та достатні умови інтегровності тригонометричних рядів	22.03.21-18.04.21	виконано
7	Висновки	19.04.21-24.04.21	виконано
8	Оформлення результатів	25.04.21- 11.05.21	виконано

Студент С. С. Хрипко

Науковий керівник дисертації П. В. Задерей

Реферат

Магістерська дисертація: сторінок 43, 13 слайдів, 22 першоджерел.

Магістерська дисертація присвячена встановленню асимптотичних рівностей для відхилень сум Фейєра від суми заданого тригонометричного ряду, обчислених за нормою простору L_1.

Актуальність роботи. Однією з найважливіших задач теорії тригонометричних рядів є встановлення необхідних та достатніх умов на коефіцієнти тригонометричного ряду при виконанні яких даний ряд є рядом Фур'є сумовної функції. Ці умови забезпечують скінченність інтегралів від модулів функцій, що зображаються своїми рядами Фур'є. Їх називають умовами інтегровності тригонометричних рядів

Метою дослідження даної роботи є встановлення необхідних та достатніх умов інтегровності тригонометричних рядів.

Об'єктом дослідження є множина тригонометричних рядів коефіцієнти яких прямують до нуля.

Дисертація має теоретичне значення, її результати можуть використовуватись при встановленні необхідних і достатніх умов (або достатніх) на коефіцієнти тригонометричного ряду, при виконані яких даний тригонометричний ряд буде рядом Фур'є сумовної функції. А також можуть бути використані при наближенні класів періодичних функцій лінійними методами підсумовування рядів Фур'є.

Ключові слова: тригонометричний ряд, ряд Фур'є, коефіцієнти ряду Фур'є, умови інтегровності.

Abstract

Master’s thesis: 43 pages, 13 slides of presentation, 22 primary sources.

Master's dissertation is devoted to the establishment of asymptotic equalities for the deviations of Feier sums from the sum of a given trigonometric series, calculated by the norm of L_1 space.

Relevance of work. One of the most important tasks of the theory of trigonometric series is to establish the necessary and sufficient conditions for the coefficients of a trigonometric series under which this series is a Fourier series of sum sum function. These conditions provide the finiteness of the integrals from the modules of the functions represented by their Fourier series. They are called conditions for the integration of trigonometric series.

The purpose of this study is to establish the necessary and sufficient conditions for the integration of trigonometric series.

The object of study is a set of trigonometric series whose coefficients approaches zero.

The dissertation has theoretical significance, its results can be used to establish the necessary and sufficient conditions (or sufficient) for the coefficients of a trigonometric series, at which this trigonometric series will be a Fourier series of sum function. And they can also be used in the approximation of classes of periodic functions by linear methods of summation of Fourier series.

Keywords: trigonometric series, Fourier series, coefficients of Fourier series, integrability conditions.

Зміст

Вступ

Магістерська дисертація присвячена встановленню асимптотичних рівностей для відхилень сум Фейєра від суми заданого тригонометричного ряду, обчислених за нормою простору L_1.

Теорія тригонометричних рядів, займає значне місце в історії теорії функцій. Найбільш поширеним прикладом наближення періодичних неперервних, або аналітичних в крузі функцій є часткові суми їх рядів Фур'є.

Актуальність роботи. Однією з основних задач теорії тригонометричних рядів є встановлення умов на коефіцієнти тригонометричного ряду при виконанні яких даний ряд буде рядом Фур'є сумовної функції. Такі умови гарантують скінченність інтегралів від модулів функцій, що зображаються своїми рядами Фур'є та називаються умовами інтегровності тригонометричних рядів.

Магістерська дисертація складається з 4-х розділів.

У 1-му розділі магістерської дисертації, наведені основні та допоміжні означення, короткі історичні відомості та проблеми теорії рядів Фур'є.

2-й розділ магістерської дисертації присвячений огляду вже відомих результатів про умови інтегровності тригонометричних рядів.

3-й розділ присвячений деяким прикладам методів сумування рядів Фур'є та історії виникнення даних методів.

В 4-му розділі сформовано та доведено теореми в яких встановлено необхідні та достатні умови на коефіцієнти комплекснозначного тригонометричного ряду, при виконані яких даний ряд є рядом Фур'є сумовної функції.

Розділ 1

Означення тригонометричного ряду та ряду Фур'є. Короткі історичні відомості та проблеми теорії рядів Фур'є

1.1 Означення тригонометричного ряду

Введемо простір $L_p,\ 1 \le p < \infty$ - 2π- періодичних сумовних функцій із скінченною нормою

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Означення 1.1 Ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad (1.1)$$

де $a_0, a_n, b_n,\ n = 1,2, \ldots -$деякі дійсні числа, називається тригонометричним рядом.

Під сумою ряду (1.1) розуміють як, загально прийнято, деяку функцію $f(x)$ яка дорівнює $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$, де $S_n(x)$ – часткові суми ряду (1.1).

Якщо такий ряд збігається для будь-яких $x \in [-\infty; \infty]$, то він зображає функцію періоду 2π. Тому, бажаючи зобразити функцію тригонометричним рядом, розглядають або періодичні функції з періодом 2π, або обирають функцію, задану на відрізку довжини 2π.

Тригонометричні ряди відіграють визначну роль не тільки в самій математиці, але і в численних її застосуваннях. Перш ніж говорити про це, відзначимо відразу зв'язок між тригонометричними і степеневими рядами.

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \qquad (1.2)$$

де $C_n = a_n - ib_n,\ C_0 = \frac{a_0}{2}$. Покладемо $z = re^{ix}$, тоді ряд (1.1), є не що інше, як дійсна частина ряду (1.2) на одиничному колі. Уявною частиною ряду (1.2) є ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx, \tag{1.3}$$

який зазвичай називають рядом, спряженим до ряду (1.1).

Часто буває більш зручно надати тригонометричному ряду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1.1}$$

іншу форму. Помітивши, що

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$sin\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

ми можемо записати ряд (1.1) у вигляді

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx},$$

звідки, вважаючи, що

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \tag{1.4}$$

помітимо, що ряд (1.1) набуває наступного вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}. \tag{1.5}$$

Це так звана комплексна форма тригонометричного ряду.

Часткова сума ряду (1.1) має вигляд

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

а часткова сума ряду (1.5) має вигляд

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx}, \tag{1.6}$$

тобто збіжність ряду (1.5) потрібно розуміти як границю часткової суми (1.6).

1.2 Короткі історичні відомості

Задача про можливість зобразити функцію тригонометричним рядом вперше була поставлена Ейлером у 1753 р. в зв'язку з появою в цей час роботи Даніеля Бернуллі «О колеблющихся струнах».

Якщо струну, закріплену в двох кінцях, вивести зі стані рівноваги і, не даючи її ніякої початкової швидкості, надати їй вільно коливатися, то як стверджує Бернуллі, положення струни в момент часу t визначається формулою

$$y = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p sinp\frac{\pi x}{l} cospkt,$$

де $l -$ довжина струни а $k -$ деякий коефіцієнт який залежить від щільності та натягу струни. Що стосується коефіцієнтів α_p, то це довільні константи, причому їх можна підібрати так, щоб в початковий момент часу струна займала деяке задане положення.

Ейлер помітив, що це твердження Бернуллі приводить до парадоксальних - по думці математиків того часу – результатів. Дійсно, якщо $y = f(x)$ є початковим положенням струни, то вважаючи $t = 0$ ми повинні отримати

$$y = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p sinp\frac{\pi x}{l},$$

тобто «довільна» функція $f(x)$ може бути розкладена в ряд по синусам. Однак Ейлер і його сучасники ділили криві на два класи: ті, які вони називали «неперервними», та інші – «геометричні». Криву - на відміну від прийнятої зараз термінології – називали неперервною, якщо y і x були пов'язані деякою формулою. Навпаки, геометричною кривою називали будь-яку криву, яку можна було накреслити «від руки». При цьому всім здавалося очевидним, що якщо крива задана формулою, то вона будучи визначена на деякому маленькому інтервалі автоматично визначається і всюди далі. Тому вони не сумнівалися, що друга категорія кривих ширше першої, так як, наприклад ламану лінію вони не могли вважати «неперервною» а лише складеною з кусків неперервних ліній.

Якщо б «довільну» функцію можна було б розкласти в ряд синусів, тобто представити формулою – це означало б, що будь-яка «геометрична» крива є «неперервною» кривою, що здавалося зовсім неправдоподібним. Зокрема, д'Аламбер помітив, що найбільш природний спосіб вивести струну зі стану рівноваги, це взяти її за одну з точок і потягнути вверх, завдяки чому вона займе положення зображене двома прямими, утворюючими між собою кут. д'Аламбер вважав, що крива такого роду не може бути сумою ряду із синусів.

Питання про те, які ж функції можуть бути зображенні тригонометричними рядами значно пізніше були знову поставлені в роботах Фур'є. В зв'язку з вивченням проблем теплопровідності йому довелося поставити перед собою наступну задачу: нехай задана функція

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Потрібно представити її у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n sinnx. \tag{1.7}$$

Фур'є вказав формули за допомогою яких потрібно визначати α_n так, щоб ряд (1.7) міг мати $f(x)$ своєю сумою. Це ряд виду

$$\frac{4}{\pi}\left[\frac{sinx}{1} + \frac{sin3x}{3} + \cdots + \frac{\sin(2n+1)\,x}{2n+1} + \cdots\right].$$

Фур'є не довів, що ряд повинен збігатися до функції $f(x)$, проте більш пізнішими дослідженнями це питання було вирішене в позитивному руслі. В будь-якому випадку важливо, що Фур'є вперше вирішив питання, як потрібно визначити коефіцієнти тригонометричного ряду, для того щоб він міг мати сумою задану функцію. Інше питання – чи буде дійсно такий ряд збігатися і мати цю функцію своєю сумою.

1.3 Означення ряду Фур'є

Означення 1.2 Тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1.1}$$

називається рядом Фур'є функції $f(x)$, якщо $\exists\ f(x) \epsilon L_1$ така, що

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx,\ \ k = 0,1,2,\dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx,\ \ k = 1,2,\dots.$$

Якщо ряд (1.1) заданий в комплексній формі (1.5), тобто якщо ми припускаємо, що

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}, \tag{1.8}$$

то коефіцієнти C_n визначаються формулами

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ \ n = 0, \pm 1, \dots \tag{1.9}$$

які можна отримати або з (1.4) підставляючи значення a_n і b_n в формули Фур'є з означення 1.2, або припускаючи, що

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikx}, \tag{1.10}$$

помножити обидві частини рівності (1.10) на e^{-inx} та проінтегрувавши почлено, отримаємо

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x}dx.$$

Але

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x}dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \neq n, \\ 2\pi, & \text{якщо } k = n. \end{cases} \tag{1.11}$$

звідки

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = 2\pi C_n,$$

що і доводить вірність формули (1.9).

1.4 Проблеми теорії рядів Фур'є

Раніше ми вирішили питання про те як повинні бути визначенні коефіцієнти тригонометричного ряду, якщо ми знаємо, що він збігається рівномірно до деякої функції $f(x)$. Виявилося, що в такому випадку цей ряд має коефіцієнти визначені за формулами Фур'є, тобто є рядом Фур'є від функції $f(x)$.

Однак для того, щоб функція могла бути сумою рівномірно збіжного ряду неперервних функцій, необхідно, щоб вона була неперервною. Тому могло б здатися, що бажаючи зобразити функцію рядом Фур'є, ми змушені обмежити себе тим випадком, коли вона неперервна. Ми побачимо, що насправді теорія рядів Фур'є охоплює набагато більш широкий клас функцій. Але насамперед домовимся точніше, що потрібно розуміти під рядом Фур'є.

В формулах Фур'є присутні інтеграли. Ми знаємо, що поняття інтеграла, починаючи з Коші, розвивалося і у зв'язку з цим ставав все ширшим клас інтегровних функцій. У нашому випадку під класом «інтегровних функцій» завжди розуміють функції інтегровні за Лебегом. Такі функції, як відомо, мають назву сумовних, складенні для них ряди називають рядами Фур'є – Лебега. Для зручності ми вже ж будемо казати «ряди Фур'є», але мати на увазі, що завжди розглядаємо сумовні функції.

Нехай $f(x)$ сумовна на $[0,2\pi]$. Тоді для неї завжди можливо визначити числа a_n і b_n за формулами Фур'є і скласти ряд, який ми будемо називати рядом Фур'є цієї функції і писати

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Знак $\sim$ вказує на те, що ми побудували цей ряд чисто формальним чином, виходячи від $f(x)$ та використовуючи формули Фур'є, але ми нічого не знаємо про збіжність цього ряду. Виникає цілий ряд проблем: чи повинен ряд Фур'є збігатися і якщо так, то збігатися до функції $f(x)$ чи ні? В яких випадках збіжність буде абсолютна, а коли вона буда рівномірною? Що можна сказати про розбіжні ряди Фур'є, чи дають вони нам можливість все ж якось судити про функцію?

Варто ще відзначити, що бувають випадки, коли тригонометричний ряд заданий своїми коефіцієнтами, але ми не знаємо, чи є він рядом Фур'є деякої функції. Це одна з дуже цікавих, але важких проблем теорії тригонометричних рядів.

Однією ж з основних задач теорії тригонометричних рядів є знаходження умов на коефіцієнти $a_0, a_k, b_k, k = 1,2, \dots$ ряду (1.1) при яких даний ряд буде рядом Фур'є функції $f(x)$ з простору $L_1 - 2\pi$- періодичних сумовних функцій.

1.5 Допоміжні означення

Означення 1.3 Послідовність $\{a_n\}$ називається нуль-послідовністю, якщо виконується наступне:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.12}$$

Означення 1.4 Послідовність $\{a_n\}$ називається послідовністю обмеженої варіації, якщо виконується наступне:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta a_n| < \infty. \tag{1.13}$$

Означення 1.5 Послідовність $\{a_n\}$ називається випуклою, якщо виконується наступне:

$$\Delta^2 a_n \geq 0, \tag{1.14}$$

де

$$\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) \geq 0.$$

Означення 1.6 Послідовність $\{a_n\}$ називається квазівипуклою, якщо виконується наступне:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|\Delta^2 a_n| < \infty. \tag{1.15}$$

Розділ 2

Огляд відомих результатів про інтегровність тригонометричних рядів

2.1 Огляд відомих результатів про інтегровність тригонометричних рядів

Наведемо деякі класичні теореми, які забезпечують збіжність тригонометричних рядів та умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів.

Одним із перших і важливих результатів є теорема Рісса-Фішера, яка дозволяє встановити, чи належить функція, що є сумою тригонометричного ряду, до простору L_2.

Теорема 2.1 (Рісса-Фішера [1])

Якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty}({a^2}_n + {b^2}_n) < \infty,$$

то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1.1}$$

є рядом Фур'є функції $f \epsilon L_2$ і має місце рівність

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2).$$

Таким чином, для того, щоб ряд (1.1) був рядом Фур'є функції $f(x) \epsilon L_2$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty}({a^2}_n + {b^2}_n) < \infty.$$

Саме це робить теорему Рісса-Фішера дуже важливим досягненням теорії тригонометричних рядів. Природньо запитати: чи не можна довести що-небудь таке ж просте і для класів L_p, з $p \neq 2$ - 2π- періодичних функцій? Нажаль цього зробити не можна.

Перш ніж переходити до вивчення випадків, коли проблема збіжності тригонометричного ряду потребує більш точних досліджень, розглянемо деякі випадки, коли судити про збіжність дуже легко.

В подальшому замість ряду (1.1)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1.1}$$

будемо окремо розглядати два ряди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{2.2}$$

де $a_0, a_n, b_n, n = 1,2, \dots -$ деякі дійсні числа, які досліджуються окремо, оскільки умови інтегровності рядів (2.1) і (2.2) різні. Крім того, відрізняються не тільки умови інтегровності рядів, а і методи їх досліджень. Розглянемо випадок коли коефіцієнти $a_n, b_n,$ рядів (2.1), (2.2) монотонно спадні і прямують до нуля.

Теорема 2.2 [2, гл. 1, § 30]. Якщо $a_n \downarrow 0$, то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

збігається скрізь, крім можливо точок $x \equiv 0(mod\ 2\pi)$; $\forall\ \delta > 0$ збігаються рівномірно на $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$.

Якщо $b_n \downarrow 0$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

збігається скрізь; $\forall\ \delta > 0$ збігаються рівномірно на $\delta \le x \le 2\pi - \delta$.

Дані умови не є достатніми для того, щоб ряди (2.1), (2.2) були рядами Фур'є.

Нехай $a_n \downarrow 0$ та $b_n \downarrow 0$, $c(x), s(x)$ −суми рядів (2.1), (2.2) відповідно:

$$c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,,$$

тоді для того, щоб ряди (2.1) і (2.2) були рядами Фур'є, необхідно і достатньо, щоб функції $c(x), s(x) \in L_1$ [2, гл. X, § 2].

Згідно узагальненої теореми Дюбуа-Реймона [2, гл. XIV, § 4], якщо тригонометричний ряд збігається до скрізь скінченної, крім можливо зліченної множини точок, інтегровної функції то даний ряд буде рядом Фур'є цієї функції. Таким чином, задача про знаходження умов, при виконанні яких ряди (2.1) і (2.2) будуть рядами Фур'є, зводиться до дослідження інтегровності сум тригонометричних рядів (2.1) і (2.2).

Наведемо деякі відомі результати, що стосуються інтегровності тригонометричних рядів (2.1), (2.2).

Однією з перших робіт, в якій зазначені умови на коефіцієнти тригонометричного ряду, при виконанні яких даний ряд збігається скрізь, за виключенням, можливо, однієї точки, до інтегровної функції, належить В. Юнгу. В. Юнг довів [5], що ряд (2.1) буде рядом Фур'є, якщо числа $\{a_n\}$ задовольняють умови (1.12) та (1.14), тобто утворюють випуклу нуль послідовність, то ряд (2.1) збігається до деякої невід'ємної інтегровної функції c(x) скрізь, за виключенням, можливо, точки $\mathrm{x} = 0$, і є рядом Фур'є своєї суми. Також В. Юнг встановив, що у випадку ряду з синусів (2.2), коли числа b_n монотонно прямують до нуля, умова

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}\right| < \infty \qquad (2.3)$$

необхідна і достатня для того, щоб ряд (2.2) був рядом Фур' є.

Зазначимо, що для ряду (2.1), коефіцієнти якого монотонно прямують до нуля, умова (2.3) є достатньою, але не є необхідною для того, щоб ряд був рядом Фур' є [2, гл. X, § 2].

С. Сідон [6] довів, що ряд (2.1) буде рядом Фур'є, якщо виконується наступна умова

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta a_n| \log(n+2) < \infty. \qquad (2.4)$$

Л. Тонеллі [7] довів, що умова (2.4) є достатньою для інтегровності ряду з синусів (2.2). Результат Л. Тонеллі узагальнює твердження В. Юнга для ряду з синусів, оскільки для монотонно спадних послідовностей умови (2.3) і (2.4) еквівалентні.

А.М. Колмогоров [8] узагальнив результат В. Юнга для ряду з косинусів, замінивши умову (1.14) умовою (1.15), тобто умову випуклості послідовності на умову квазівипуклості та отримав наступне твердження: якщо $\{a_n\}$ є квазівипуклою нуль-послідовністю, то ряд (2.1) є рядом Фур'є деякої функції $c(x) \in L_1$, причому справедлива нерівність

$$\int_0^{2\pi} |c(x)|dx \le \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|\Delta^2 a_n|.$$

Набагато пізніше С.О. Теляковський [9] отримав наступні результати для ряду з синусів (2.2), коефіцієнти якого задовольняють умови (1.12) та (1.15), тобто утворюють квазівипуклу нуль-послідовність: нехай $\{a_n\}$ є квазівипуклою нуль-послідовністю, тоді для того, щоб ряд (2.2) був рядом Фур'є деякої функції $s(x) \in L_1$, необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n} < \infty. \tag{2.5}$$

Результат А.М. Колмогорова узагальнили Ч.Н. Мур [10] і Л. Чезарі [12]. які розглянули різниці нецілого порядку. Теорема, доведена Ч.Н. Муром і Л. Чезарі, стверджує, що ряд (2.1) буде рядом Фур'є, якщо послідовність $\{a_n\}$ задовольняє умову (1.12) і для деякого $\sigma > 0$, збігається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\sigma} |\Delta^{n+1} a_n| < \infty, \tag{2.6}$$

де $\sigma > 0$ і

$$\Delta^{\sigma} a_n = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m-\sigma-1}{m} a_{n+m},$$

а

$$\binom{m-r-1}{m} = \frac{\big(1-(\sigma-1)\big)\big(2-(\sigma-1)\big)\dots(m-(\sigma-1))}{m!}.$$

Р. Боас [13, насл. теор.6] довів, що ряд (2.1) буде рядом Фур'є, якщо виконуються умови (1.15), (1.12)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|\Delta^2 a_n| < \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

і, крім того, виконується умова

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{|\Delta a_{n-k}-\Delta a_{n+k}|}{k}<\infty. \tag{2.7}$$

Ця теорема узагальнює всі наведені вище результати про інтегровність рядів із косинусів.

Ч. Станоєвіч [14] показав, що якщо коефіцієнти ряду (2.1) можна представити у вигляді $a_n=\alpha_n\beta_n$, де послідовності $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ задовольняють умови

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta\alpha_n|<\infty, |\beta_n|\le C<\infty, \forall\, k\ge 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|\Delta^2\beta_{n-1}|<\infty, \sum_{n=0}^{\infty}|\beta_n\Delta\alpha_n|\log(n+2)<\infty,$$

то ряд (2.1) є рядом Фур'є. Помітимо, що при $\beta_n\equiv 1$ звідси випливає теорема С. Сідона [6], при $\alpha_n\equiv 1$ – теорема А. Н. Колмогорова. Цей результат Ч. Станоєвіча також є наслідком наведеної вище теореми Р. Боаса.

Теорема 2.3 (С.О. Теляковського [15]). Нехай послідовність коефіцієнтів $a=\{a_k\}$ ряду (2.1) задовольняє умови (1.13) та (1.12), тобто є послідовністю обмеженої варіації та нуль послідовністю і виконується наступне

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\Delta a_{n-k}-\Delta a_{n+k}}{k}\right|<\infty, \tag{2.8}$$

тоді ряд (2.1) є рядом Фур'є функції $c(x)\in L_1$ і справедлива оцінка

$$\int_0^{\pi}|c(x)|dx\le CT(a),$$

де

$$T(a) := \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta a_n| + \sum_{n=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\Delta a_{n-k} - \Delta a_{n+k}}{k} \right|$$

Теорема 2.4 (С.О. Теляковського [15]). Нехай послідовність коефіцієнтів $\{b_k\}$ ряду (2.2) задовольняє умову (1.13), тобто є послідовністю обмеженої варіації, та задовольняє умову (2.8). Тоді ряд (2.2) є рядом Фур'є функції $s(x) \in L_1$ тоді і тільки тоді, коли має місце (2.5). Якщо ряд (2.5) збігається, то справедлива оцінка

$$\int_0^{\pi} |s(x)| dx \le C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} + T(a) \right).$$

Умови (1.13) та (2.8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta a_n| < \infty, \sum_{n=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\Delta a_{n-k} - \Delta a_{n+k}}{k} \right| < \infty \qquad (2.9)$$

називають умовами Боаса-Теляковського інтегровності одновимірних тригонометричних рядів (2.1), (2.2).

Таким чином, С.О. Теляковський отримав досить загальні достатні умови на коефіцієнти рядів (2.1) і (2.2), при виконанні яких дані ряди будуть рядами Фур'є сумовних функцій. Теорема 2.4 узагальнює результат Р. Боаса для рядів з косинусів, а також всі попередні результати, які стосуються інтегровності ряду (2.1).

Підсумовуючи, можна сказати, що умови на коефіцієнти рядів (2.1) і (2.2) при виконані яких вони будуть рядами Фур'є послаблювались, однак ставали більш громіздкими. В застосуваннях, як правило, потрібні умови на коефіцієнти більш зручні для перевірки. Тому після роботи С.О. Теляковського з'явились роботи з менш загальними умовами на коефіцієнти, але разом з тим більш простими.

Т. Кано [16] для доведення теорем про інтегровність представив ряд з синусів як почлено продиференційований ряд з косинусів і довів, що для ряду (2.2) з коефіцієнтами $\{b_n\}$, для яких справедлива нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|\Delta^2\left(\frac{b_n}{n}\right)\right| < \infty, \tag{2.10}$$

ряд (2.2) є рядом Фур'є сумовної функції. Такий прийом спрощує доведення достатньої частини теореми С.О. Теляковського про інтегровність рядів з синусів, коефіцієнти яких утворюють квазівипуклу нуль-послідовність. Т. Кано також показав, що для квазівипуклих послідовностей умови (2.5) і (2.10) еквівалентні.

С. Сідон [17] встановив, що ряд (2.1) буде рядом Фур'є інтегровної функції, якщо його коефіцієнти a_n можна представити у вигляді

$$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{p_k}{k} \sum_{i=n}^{k} a_i, n = 1,2, \dots, \tag{2.11}$$

де

$$|a_i| < 1, \forall\, i \geq 1,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} |p_k| < \infty.$$

Умови (2.11) називають умовами С. Сідона.

Аналізуючи роботу С. Сідона, С.О. Теляковський [18] знайшов умови на послідовність $\{a_n\}$ еквіваленті умовам Сідона (2.11).

Теорема 2.5 (С.О. Теляковського [18]). Нехай $\{a_n\}$ задовольняє умову (1.12), тобто є нуль-послідовністю і існують такі числа A_n, що

$$A_n \downarrow 0, |\Delta a_n| \leq A_n \;\; \forall \text{ n} \geq 0, \;\; \sum_{n=0}^{\infty} A_n < \infty, \tag{2.12}$$

тоді ряд (2.1) є рядом Фур'є функції $\mathrm{c}(x) \in L_1$, і справедлива оцінка

$$\int_0^{\pi} |c(x)|dx \le C \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,.$$

Теорема 2.6 (С.О. Теляковського [18]). Нехай $\{a_n\}$ є нуль-послідовністю і задовольняє умову (2.12), тоді для ряду (2.2) справедлива оцінка

$$\int_{\frac{\pi}{p+1}}^{\pi} |s(x)|dx = \sum_{n=1}^{p} \frac{|b_n|}{n} + O\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Ряд (2.2) буде рядом Фур'є тоді і тільки тоді, коли збігається ряд (2.5).

Умови (2.12) називають умовами Сідона-Теляковського інтегровності тригонометричних рядів (2.1), (2.2).

Умови Сідона-Теляковського (2.12) достатньо прості, і їх перевірка не складніше, ніж скажімо, перевірка квазівипуклості. Зокрема, послідовність $\{A_n\}$ можна обрати таким чином

$$A_n \coloneqq \max_{n\le k} |\Delta a_k|.$$

Множина послідовностей, які задовольняють (2.12) була розширена Г.О. Фоміним [21] до множини F_p, яка визначається таким чином:

$$\{a_n\} \in F_p, p > 1,$$

якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.13}$$

Для будь-якого фіксованого числа $p > 1$ умова (2.13) еквівалентна умові

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^j\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} |\Delta a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.14}$$

де

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Розділ 3

Методи сумування рядів Фур'є

3.1 Лінійні методи сумування

Наприкінці XIX ст. Дюбуа Реймон побудував приклад неперервної функції ряд Фур'є якої розбігається в окремих точках. В першій половині XX ст. А. Колмогоров побудував приклад сумовної функції ряд Фур'є якої розбігається майже скрізь. Фейєр показав, що якщо розглядати суму ряду Фур'є не як границю часткових сум цього ряду а як границю середніх арифметичних сум. Тоді ряд Фур'є неперервної функції збігається до самої функції. Виникає питання, в якій мірі ряд Фур'є може тоді бути використаний для обчислення значень функцій $f(x)$? Тут природно, як завжди, коли зустрічаються з розбіжними рядами, звернутися до тих чи інших методів сумування.

Існує цілий ряд прийомів, що дозволяють приписати «суму» розбіжному ряду, ці прийоми носять назву методів сумування рядів. Найбільш поширеними є лінійні методи сумування, які будуються наступним чином: нехай $A -$ деяка матриця з нескінченою кількістю рядків та стовпців.

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{00} \dots a_{0n} \dots \\ a_{10} \dots . a_{1n} \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots . . \\ a_{n0} \dots a_{nn} \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots . . \end{matrix} \right\|$$

Замість розгляду звичайних частинних сум S_n ряду $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ розглядають числа

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_n, \tag{3.1}$$

припускаючи, що ряди в правій частині цієї рівності збігаються. Якщо при цьому існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S,$$

то число S називають «сумою» ряду $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ і кажуть, що метод, визначений матрицею сумує ряд $\sum u_n$ до числа S.

Методи визначенні таким чином, мають назву лінійних тому, що якщо такий метод сумує $\sum u_n$ до суми S, то ряд $\sum \mathrm{C}u_n$, де C – константа, сумується до CS і якщо ряд $\sum v_n$ сумується до S_1, то ряд $\sum(u_n + v_n)$ сумується до $S + S_1$.

В якості найпростішого прикладу лінійних методів розглянемо класичний випадок, а саме метод середніх арифметичних, введений Чезаро. Чезаро запропонував розуміти під сумою ряду не границю частинних сум, а границю середніх арифметичних частинних сум $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$, де

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0 + \cdots + S_n}{n+1},$$

а S_n −частинні суми ряду.

Застосування цього методу до рядів Фур'є прийнято називати сумування методом Фейєра, так як Фейєр перший звернув увагу на доцільність використання чезаровських сум в цьому випадку.

Ми знаємо, що частинна сума S_n ряду Фур'є від функції $f(x)$ виражається наступною формулою

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \tag{3.2}$$

де $D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ –ядро Діріхле, Тому

чезаровська сума повинна мати вигляд

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)K_n(t)dt, \qquad (3.3)$$

де

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t).\ \ (1.4) \qquad (3.4)$$

Отже

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)K_n(t)dt.\ \ (1.5) \qquad (3.5)$$

Функція $K_n(t)$ називається ядром Фейєра.

Оскільки

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\cos nt - \cos(n+1)\,t}{4\sin^2\frac{t}{2}},$$

то

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kt - \cos(k+1)\,t}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1-\cos(n+1)\,t}{(n+1)4\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Отже, ядро Фейєра набуває наступного вигляду:

$$K_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Відзначимо деякі властивості функцій K_n.

1. $K_n \geq 0$;

2. $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)dt = 1$;

3. Якщо I – довільний відкритий інтервал, що містить точку $x = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\notin I} |K_n(t)| = 0, \ \ |t| < \pi.$$

Зауважимо також, що K_n −парна функція.

Зауваження 1. Говорячи про метод середніх арифметичних необхідно відзначити одну формулу, а саме: якщо S_n −частинні суми, а σ_n −середні арифметичні ряду $\sum u_k$, то

$$S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} ku_k.$$

Дійсно

$$S_n - \sigma_n = S_n - \frac{S_0 + \cdots + S_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(S_n - S_k) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} + \cdots + u_n)$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} ku_k.$$

3.2 Метод сумування трикутними матрицями

Нехай $f(x)$ –довільна сумовна функція з періодом 2π і

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

її ряд Фур'є.

Розглянемо трикутну матрицю Λ, яка складається з дійсних чисел

$$\begin{array}{l} \lambda_0^{(0)} \\ \lambda_0^{(1)} \lambda_1^{(1)} \\ \lambda_0^{(2)} \lambda_1^{(2)} \lambda_1^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_0^{(n)} \lambda_1^{(n)} \dots \lambda_n^{(n)}, \end{array}$$

де $\lambda_0^{(n)} = 1, n = 0,1,2, \dots$. Покладемо

$$U_n(f, x, \Lambda) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{3.6}$$

де a_k та b_k — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Отже, в даному методі розглядаються середні виду

$$\frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

тобто елементи матриці Λ множаться на члени ряду Фур'є, а не на його частинні суми. Таким чином, будь-яка трикутна матриця Λ задає метод побудови поліномів $U_n(f, x, \Lambda)$.

Розділ 4

Умови інтегровності комплекснозначних тригонометричних рядів

4.1 Означення чезаровських середніх та теореми про необхідні та достатні умови при яких заданий тригонометричний ряд буде рядом Фур'є

Означення 4.1 Чезаровським середнім ряду Фур'є функції f називається середнє арифметичне частинних сум $S_n, n = 0,1, \dots k$

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1}(S_0 + \cdots + S_n), \;\; n = 1,2, \dots$$

Якщо функція $f \epsilon L_p, 1 \leq p < \infty$, то чезаровські середні σ_n збігаються до f по L_p-нормі. Якщо f неперервна і $f(0) = f(2\pi)$, то послідовність σ_n збігається до f рівномірно.

Маємо

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\, K_n(t) dt,$$

де $K_n(t) -$ ядро Фейєра ряду

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}.$$

Раніше було показано що для довільної інтегровної функції f на інтервалі $[-\pi, \pi]$ n-е чезаровське середнє її ряду Фур'є рівне

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\, K_n(t) dt,$$

Розглянемо для початку теорему Штейнгауза для дійсних тригонометричних рядів.

Теорема 4.1 (Г. Штейнгауза [3]). Для того щоб тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1.1}$$

належав класу L, тобто був рядом Фур'є функції $f(x) \in L$ необхідно і достатньо щоб

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_m(x) - \sigma_n(x)| dx \to 0, \text{ при } m, n \to \infty. \tag{4.1}$$

Надалі ми будемо розглядати комплекснозначні тригонометричні ряди виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{ikx}. \tag{4.2}$$

Такі тригонометричні ряди є граничними значеннями аналітичних в одиничному крузі функцій.

Буде встановлена аналогічна теорема до теореми 4.1, але розглядатимуться комплекснозначні тригонометричні ряди виду (4.2).

Має місце наступна теорема:

Теорема 4.2 Для того щоб тригонометричний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{ikx} \tag{4.2}$$

був рядом Фур'є функції $f(x) \in L_1$ необхідно і достатньо щоб

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_m(x) - \sigma_n(x)| dx \to 0, \text{ при } m, n \to \infty, \tag{4.3}$$

Доведення

Необхідність. Нехай ряд (4.2) є рядом Фур'є функції $f(x)$. Має місце нерівність

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \le \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| K_n(t) dt.$$

Проінтегрувавши дану нерівність по $x, 0 \leq x \leq 2\pi$ одержимо

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|\, dx \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(t)\, K_n(t) dt,$$

де $\eta(t) = \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|\, dx$. Функція $\eta(t)$ неперервна і обертається в нуль при $t = 0$. Права частина останньої нерівності співпадає з середніми Фейєра для ряду Фур'є функції $\eta(t)$ при $t = 0$, то

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|\, dx \to 0.$$

Оскільки

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_m(x) - \sigma_n(x)| dx \ \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|\, dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_m(x)|\, dx \to 0 \text{ при } m, n \to 0,$$

то необхідність доведена.

Достатність. Нехай $\int_0^{2\pi} |\sigma_m(x) - \sigma_n(x)|\, dx \to 0$, то існує функція $f \in L_1$, така що

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|\, dx \to 0.$$

Для $n > |k|$

$$2\pi\left(1-\frac{|k|}{n}\right)C_k=\int_0^{2\pi}\sigma_n(t)e^{-ikt}dt=\int_0^{2\pi}f(t)e^{-ikt}dt+$$

$$+\int_0^{2\pi}\big(\sigma_n(t)-f(t)\big)e^{-ikt}dt.$$

Спрямовуючи n до нескінченості і відмічаючи, що модуль останнього члена не перевищує $\int_0^{2\pi}\sigma_n(t)-f(t)dt$, бачимо, що C_k є k-й коефіцієнт для $f(t)$.

Таким чином теорема доведена.

Однак у виразі (4.3) важко встановити прямує цей вираз до нуля чи ні при $m,n\to\infty$. Тому буде встановлена ще одна теорема в якій умови будуть накладатись безпосередньо на коефіцієнти C_k.

Розглянемо ліву частину з формули (4.3), отримаємо :

$$\int_0^{2\pi}|\sigma_n(x)-\sigma_m(x)|\,dx=\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)C_ke^{ikx}-\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)C_ke^{ikx}\right|dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=m}^{n-1}C_ke^{ikx}+\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{k}{m}-\frac{k}{n}\right)C_ke^{ikx}-\sum_{k=m}^{n-1}\frac{k}{n}C_ke^{ikx}\right|dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=m}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)C_ke^{ikx}+\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{n-m}{mn}\right)kC_ke^{ikx}\right|dx.$$

Отримаємо

$$\int_0^{2\pi}|\sigma_n(x)-\sigma_m(x)|\,dx=\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(n,m)e^{ikx}\right|dx, \qquad (4.4)$$

де

$$\alpha_k(n,m) = \begin{cases} \dfrac{n-m}{mn} kC_k, & 0 \le k \le m-1, \\ \left(1 - \dfrac{k}{n}\right) C_k, & m \le k \le n-1. \end{cases} \tag{4.5}$$

М. В. Гаєвський і П. В. Задерей [22] встановили наступну асимптотичну рівність для інтеграла від модуля тригонометричного полінома:

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n-1} C_k e^{ikx} \right| dx = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (|C_k| + |C_{n-k}|) \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4\frac{|C_k| \times |C_{n-k}|}{(|C_k| + |C_{n-k}|)^2} sin^2 x}\, dx + O\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} |\Delta^2 C_{k-1}| \right),$$

Оскільки $sin^2 x \le 1$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4\frac{|C_k| \times |C_{n-k}|}{(|C_k| + |C_{n-k}|)^2} sin^2 x}\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4\frac{|C_k| \times |C_{n-k}|}{(|C_k| + |C_{n-k}|)^2}}\, dx \le$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{(|C_k| + |C_{n-k}|)^2 - 4(|C_k| \times |C_{n-k}|)}{(|C_k| + |C_{n-k}|)^2}}\, dx \le$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{|C_k|^2 + 2(|C_k| \times |C_{n-k}|) + |C_{n-k}|^2 - 4(|C_k| \times |C_{n-k}|)}{(|C_k| + |C_{n-k}|)^2}}\, dx \le$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{(|C_k| - |C_{n-k}|)^2}{(|C_k| + |C_{n-k}|)^2}}\, dx \le \frac{\pi}{2} \frac{\big||C_k| - |C_{n-k}|\big|}{\big||C_k| + |C_{n-k}|\big|} \le \frac{\pi}{2}.$$

Має місце наступна теорема:

Теорема 4.3 Для того щоб тригонометричний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{ikx} \tag{4.2}$$

був рядом Фур'є функції $f(x) \in L_1$ необхідно і достатньо щоб

$$\begin{gathered}\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(|\alpha_k(n,m)| + |\alpha_{n-k}(n,m)|\right) \times \\ \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4\frac{|\alpha_k(n,m)| \times |\alpha_{n-k}(n,m)|}{\left(|\alpha_k(n,m)| + |\alpha_{n-k}(n,m)|\right)^2} sin^2 x dx} + \\ + O\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(n-k)}{n}\left|\Delta^2\alpha_{k-1}(n,m)\right|\right) \to 0, \qquad m,n \to \infty,\end{gathered} \tag{4.6}$$

де $\alpha_k(n,m)$ визначаються формулою (4.5).

Доведення.

Згідно результатів М. В. Гаєвський і П. В. Задерей [22]

$$\begin{gathered}\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(|\alpha_k(n,m)| + |\alpha_{n-k}(n,m)|\right) \times \\ \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4\frac{|\alpha_k(n,m)| \times |\alpha_{n-k}(n,m)|}{\left(|\alpha_k(n,m)| + |\alpha_{n-k}(n,m)|\right)^2} sin^2 x d} \\ + O\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(n-k)}{n}\left|\Delta^2\alpha_{k-1}(n,m)\right|\right) = \\ = \int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k(n,m)e^{ikx}\right|dx.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Вираз з правої частини формули (4.7) дорівнює лівій частині виразу (4.3), тобто виконується (4.4)

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k(n,m)e^{ikx}\right|dx=\int\limits_{0}^{2\pi}|\sigma_n(x)-\sigma_m(x)|dx.$$

Тоді згідно теореми 4.2 в якій доводиться, що

$$\int_0^{2\pi}|\sigma_n(x)-\sigma_m(x)|dx\to 0,\ m,n\to\infty,$$

та з формул (4.4), (4,7) виплаває, що

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}(|\alpha_k(n,m)|+|\alpha_{n-k}(n,m)|)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-4\frac{|\alpha_k(n,m)|\times|\alpha_{n-k}(n,m)|}{(|\alpha_k(n,m)|+|\alpha_{n-k}(n,m)|)^2}sin^2xdx}$$

$$++O\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(n-k)}{n}|\Delta^2\alpha_{k-1}(n,m)|\right)\to 0,\qquad m,n\to\infty.$$

Теорема доведена.

Висновки

1) Наведені означення тригонометричного ряду та ряду Фур'є. Розглянуто теорему Рісса-Фішера.

2) Приведенні класичні теореми, що забезпечують збіжність тригонометричних рядів і умови інтегровності тригонометричних рядів та наведені деякі методи сумування рядів Фур'є.

3) Також в роботі приведено теореми в яких доведено необхідні і достатні умови інтегрованості комплекснозначного тригонометричного ряду, тобто встановлені необхідні та достатні умови на коефіцієнти комплекснозначного тригонометричного ряду при виконані яких даний тригонометричний ряд буде рядом Фур'є.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.–481с.

2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.-М.: Физматгиз, 1961.-936с.

3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. Т.1.-М.: Мир, 1965.-615с.

4. Эдрардс Р. Ряды Фурье в современном изложении: В 2-хт. Т.1.-М.: Мир, 1985.-264с.

5. Young W.H. On the Fourier series of bounded functions // Proc. London Math. Soc.-1913.-12, №1.-P.41-70.

6. Sidon S. Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen // Mathematische Zeitschrift.-1921.-10.-P.121-127.

7. Tonelli L. Serie trigonometriche.-1928.

8. Колмогоров А.Н. Sur l'ordre be grandeur des coefficients de la serie be Fourier-Lebesgue // Bull.Acad.pol.sci.(A).-1923.-P.83-86.

9. Теляковский С. А. Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб.-1964.-63, №3.-С.426-444.

10. Moore C. N. On criteria for Fourier constants of L integrable functions // Proc. National Academy of Sciences USA.-1933.-19, №9.-P.846-848.

11. Moore C. N. On the use of Cesaro means in determing criteria for Fourier constans // Bull. Amer. Math. Soc.-1933.-39, №12.-P.907-913.

12. Cesari L. Sulle condizioni sufficenti per le successioni di Fourier // Annali della Scuola Normale Sup. Di Pisa (2).-1934.-3.-P.105-134.

13. Boas R.P. Absolute convergence and inegrability of trigonometric series // Journal of rational mechanics and analysis.-1956.-5, №4.-P.621-632.

14. Станојевић Ч.В. О интеграбилности неких тригонометриских редова // Зборник радова Српска Акад. наука, к. 55.-Математички институт к. 6.-1957.-С.53-57.

15. Теляковский С.А. Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейнiх методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН. СССР, серия матем.-1964.-28.-С.1209-1236.

16. Kano T. Coefficients of some trigonometric series // J. Fac. Sci. Shinshu Univ.-1968.-3, №2.-P.153-162.

17. Sidon S. Hinreichende Bedingungen für den Fourier-Charakter einer trigonometrischen Reihe // J. London Math. Soc.-1939.-14, №2.-P.158-160.

18. Теляковский С.А. Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки.-1973.-14, №3.-С.317-328.

19. Теляковский С.А. Об интегрируемости рядов по синусам // Тр. Мат. ин-та АН СССР.-1984.-163.-С.229-233.

20. Garrett J.W., Rees C.S., Stanojevic C.V. L_1-convergence of Fourier series with coefficients of bounded variation // Proc. Amer Math. Soc.-1980.-80.-P.423-430.

21. Фомин Г.А. Об одном классе тригонометрических рядов // Мат.заметки.-1978.-23, №2.-С.213-222.

22. Гаєвський М. В.Оцінки інтеграла від модуля многочлена на одиничному колі / М. В. Гаєвський, П. В. Задерей // Всеукраїнська літня науково методична мат. шк. "Математичний аналіз та теорія ймовірностей" 4–7 липня 2013 р., с. Плюти, Україна: Тези доповідей. – К. : НТУУ "КПІ", 2013.