

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені Ігоря Сікорського"
Факультет електроенерготехніки та автоматики

Катедра електромеханіки

«До захисту допущено»

В.о. завідувач катедри _____

Михайло КОВАЛЕНКО

« ____ » _____ 2026 р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за освітньо-професійною програмою «Електричні машини і апарати»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка»

на тему: «Моделювання асинхронних двигунів з
урахуванням ефекту витіснення струмів»

Керівник: Вишневський О.В.

прізвище і. п.

"ДОПУЩЕНО ДО ЗАХИСТУ"

Виконав:

Студент: Кучеренко О.В.

прізвище і.п.

2026 р.

підпис керівника

дата

ЗАХИЩЕНО З ОЦІНКОЮ:

Рецензент: асистент

Кат. АЕМС-ЕП

Сернгієнко Олег В'чеславович

_____ (підпис)

Залікова книжка № ЕМ

Засвідчую, що у цій
дипломній роботі немає
запозичень з праць інших
авторів без відповідних посилань.
Студент _____ (підпис)

КИЇВ 2026

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

(назва вищого навчального закладу)

Катедра: Електромеханіки

Спеціальність: Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Курс 4 Група ЕМ-21 Семестр 8

ЗАВДАННЯ

на дипломну роботу студента

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. завідувач катедри

_____ М.А.КОВАЛЕНКО

"20" квітня 2026 р.

Кучеренко Олександр Вікторович

прізвище, ім'я, по батькові

1. Тема проєкту: Моделювання асинхронних двигунів з урахуванням ефекту витіснення струмів.

Затверджена наказом від "25" травня 2026р. N1885-с

2. Термін здачі студентом завершеного проєкту (роботи):
15.06.2026.

3. Вихідні дані по проєкту: $P_n=11$ кВт, $U_n=0.23/0.38$ кВ, $\eta=87.5\%$, $m=3$, $f=50$ Гц, $p=2$, $S_n=2.8\%$, $\cos\phi=0.86$, $h=132$ мм, $M_{start}=2.2$ в.о., $M_{max}=2,5$ в.о. АИ132М4У3.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які підлягають розгляданню): Вступ, 1. Моделювання в електромеханіці 2. Моделювання АД 3. Урахування ефекту витіснення 4. Результат моделювання 5.Висновки.

5. Дата видачі завдання: 15.06.2026.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ п/п	Назва етапів курсового роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітки
1	Титул, Завдання, Реферат, Зміст, Вступ	26.05.2026	
2	Моделювання в електромеханіці	02.06.2026	
3	Моделювання АД	04.06.2026	
4	Урахування ефекту витіснення	07.06.2026	
5	Розрахунок базисних параметрів	07.06.2026	
6	Створення креслення в MathLab	07.06.2026	
7	Моделювання в MathLab	09.06.2026	
8	Висновок, література	09.06.2026	
10			
11			
12			
13			
14			
15			

Студент

Підпис

Кучеренко О.В.

Прізвище, ініціали

Керівник

Підпис

Вишневський О.В.

Прізвище, ініціали

(Дата)

РЕФЕРАТ

У дипломній роботі розглянуто питання математичного моделювання асинхронного двигуна з урахуванням ефекту витіснення струму в обмотці ротора. Проведено аналіз сучасних підходів до моделювання електромеханічних систем та досліджено фізичну природу ефекту витіснення струму, його вплив на електромагнітні та механічні характеристики асинхронного двигуна.

У роботі наведено математичний опис асинхронного двигуна на основі методу узагальненого вектора, розглянуто диференціальні рівняння машини та побудовано структурні моделі в різних системах координат. Особливу увагу приділено розробленню математичної моделі асинхронного двигуна з урахуванням зміни параметрів ротора під впливом ефекту витіснення струму.

На основі розроблених математичних залежностей побудовано структурні схеми моделі в середовищі MATLAB/Simulink та виконано дослідження перехідних процесів. Проведено аналіз отриманих результатів моделювання та оцінено вплив ефекту витіснення струму на пускові характеристики, електромагнітний момент і динамічні показники асинхронного двигуна.

Результати роботи підтверджують доцільність урахування ефекту витіснення струму під час математичного моделювання асинхронних двигунів, що дозволяє підвищити точність розрахунків та наблизити результати моделювання до реальних характеристик електричної машини.

Ключові слова: асинхронний двигун, математичне моделювання, ефект витіснення струму, скін-ефект, ротор, електромагнітний момент, MATLAB/Simulink, перехідні процеси.

ANNOTATION

This bachelor's thesis is devoted to the mathematical modeling of an induction motor taking into account the current displacement (skin) effect in the rotor winding. Modern approaches to the modeling of electromechanical systems are analyzed, and the physical nature of the skin effect as well as its influence on the electromagnetic and mechanical characteristics of induction motors are investigated.

The thesis presents a mathematical description of the induction motor based on the generalized vector method, considers the differential equations of the machine, and develops structural models in different coordinate systems. Special attention is paid to the development of a mathematical model that takes into account the variation of rotor parameters caused by the current displacement effect.

Based on the developed mathematical relationships, structural simulation models were implemented in the MATLAB/Simulink environment and transient operating conditions were studied. The simulation results were analyzed and the influence of the skin effect on starting characteristics, electromagnetic torque, and dynamic performance of the induction motor was evaluated.

The obtained results confirm the importance of considering the current displacement effect in the mathematical modeling of induction motors. This approach improves the accuracy of calculations and provides simulation results that are closer to the actual characteristics of electrical machines.

Keywords: induction motor, mathematical modeling, current displacement effect, skin effect, rotor, electromagnetic torque, MATLAB/Simulink, transient processes.

ЗМІСТ

Вступ.....	8
1 Аналіз ефекту витіснення струму в роторі асинхронного двигуна.....	11
1.1 Особливості математичного моделювання асинхронних двигунів.....	11
1.2 Фізична природа ефекту витіснення струму.....	14
1.3 Вплив ефекту витіснення на пускові характеристики асинхронного двигуна.....	16
2 Математична модель асинхронного двигуна в полярній системі координат.....	19
2.1 Узагальнений вектор у математичній моделі асинхронного двигуна.....	19
2.2 Рівняння електромагнітної та механічної рівноваги двигуна.....	25
2.3 Модель асинхронного двигуна у змінних $\psi_s - \psi_r$	26
2.4 Модель асинхронного двигуна у змінних $i_s - \psi_r$	30
3 Урахування ефекту витіснення струму в математичній моделі двигуна.....	34
3.1 Залежність параметрів ротора від ковзання.....	34
3.2 Структура моделі з урахуванням змінного опору ротора.....	36
3.3 Модель асинхронного двигуна з урахуванням витіснення струму у змінних $\psi_s - \psi_r$	40
4 Реалізація моделі та аналіз результатів моделювання.....	43

4.1 Паспортні та розраховані параметри двигуна АИ132М4У3.....	43
4.2 Реалізація моделі в MATLAB/Simulink.....	46
4.3 Аналіз графіка швидкості обертання.....	48
4.4 Аналіз електромагнітного моменту.....	54
4.5 Порівняння результатів моделювання з паспортними даними.....	56
Висновки.....	58
Список використаних джерел.....	60

ВСТУП

На сьогоднішній день найважливішу роль серед усіх електричних двигунів відіграють асинхронні двигуни(АД). Понад 50% електричної енергії споживають АД, що зумовлено простотою конструкції, простотою запуску, низькою вартістю виробництва та експлуатації. Двигуни масово використовують в електротранспорті та промисловості, особливо на виробничій лінії.

Розвиток цих двигунів пріоритетним для розвитку як на державному, так і на науковому рівні, оскільки характеристики, якість, а також продуктивність, що безпосередньо впливає на виробничі можливості. Є високий запит на низьке споживання електричної енергії, надійність продукту, а також ефективну роботу. Саме за краще вирішення проблем та відповідність запитам споживачів призводить до поліпшення продажів самих електричних машин та зростання виробництва іншої продукції. Завдяки простій конструкції, надійності та відносно низькій вартості асинхронні двигуни залишаються одним із найпоширеніших типів електричних машин у промисловості.

При проектуванні ЕМ виникає проблема точності виробу. Для більшої точності слід створити екземпляр двигуна та перевірити його характеристики фізичним експериментом. Це створює матеріально-фінансове навантаження та займає значний час.

Особливо проблеми ускладнюються потребою перевірки двох і більше варіантів або коли конструкція не відповідає технічним умовам замовника, що призводить до зростання небажаних витрат.

У високорозвинених державах та на підприємствах широко застосовують моделювання. Моделювання — це перенесення реального об'єкта в уявну, тобто в математичну чи віртуальну версію об'єкту. Моделювання об'єкта є значно швидшим та дешевшим методом представлення об'єкта та перевірки характеристики двигуна за рахунок точного комп'ютерного моделювання.

Математичне моделювання полягає в математичному представленні та описі реального об'єкта за допомогою системи рівнянь і математичних залежностей.

Для якісного моделювання вже давно існують пакети програм для моделювання будь-якого об'єкта в будь-якій ситуації та за різних параметрів без витрат простору. Що доволі зручно для інженера. Прикладами таких програм є: MATLAB, Multiphysics, FEMM, ASYNC.

Метою дипломної роботи є розроблення та дослідження математичної моделі АД АИ132М4У3 з урахуванням ефекту витіснення струму в роторі та оцінювання впливу цього явища на пускові й динамічні характеристики двигуна. Для двигунів серії АИ актуальним є уточнення математичних моделей, оскільки паспортні характеристики не завжди дозволяють детально оцінити перехідні процеси під час пуску.

Об'єктом дослідження є електромеханічні процеси в АД з короткозамкненим ротором під час пуску та роботи з постійним моментом навантаження.

Предметом дослідження є математична модель АД в полярній системі координат, у якій параметри роторного кола змінюються залежно від режиму роботи двигуна.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

1. Проаналізувати фізичну природу ефекту витіснення струму в роторі АД.

2. Сформувати систему рівнянь асинхронного двигуна в полярних координатах.
3. Розрахувати базисні та приведені параметри двигуна АИ132М4У3.
4. Реалізувати модель двигуна в середовищі MATLAB/Simulink.
5. Отримати графіки швидкості, електромагнітного моменту, струму статора та механічної характеристики.
6. Порівняти результати моделювання з паспортними характеристиками двигуна та зробити висновок щодо впливу ефекту витіснення.

Таке моделювання має бути ефективним за створення прототипів.

Воно зменшить вартість перевірки та збільшить швидкість переходу від прототипу до масового продукту, а також підвищить точність і допоможе оптимізувати витрати електричної енергії чи міді.

1. АНАЛІЗ ЕФЕКТУ ВИТІСНЕННЯ СТРУМУ В РОТОРІ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА

1.1 Особливості математичного моделювання асинхронних двигунів

Сучасний розвиток науки й техніки характеризується тим, що створення нових технічних систем переважно розпочинається з розроблення їхніх фізичних та математичних моделей. Лише на завершальних стадіях виконуються експериментальні дослідження реальних зразків. Саме тому особливого значення набуває вибір ефективних методів і засобів моделювання технічних об'єктів.

Одним із найважливіших інструментів під час проєктування та аналізу електромеханічних перетворювачів енергії є математичне моделювання їхніх характеристик і режимів роботи із застосуванням сучасних комп'ютерних технологій. Стрімкий розвиток обчислювальної техніки значно підвищив ефективність таких досліджень. Використання математичних моделей дозволяє суттєво скоротити час створення нових електромеханічних систем і зменшити витрати на виготовлення та випробування дослідних зразків. У результаті математичне моделювання сформувалося як самостійний науковий напрям у теоретичній електромеханіці.

Електромеханічні перетворювачі енергії (ЕМПЕ) належать до складних технічних об'єктів, для яких характерні нелінійні залежності параметрів і характеристик. Тому для дослідження таких систем необхідно застосовувати різноманітні математичні методи, реалізація яких потребує використання сучасних комп'ютерних засобів. Важливим завданням є вибір найбільш доцільних чисельних алгоритмів з урахуванням особливостей конструкції та принципу дії конкретного пристрою.

Фахівець, який займається математичним моделюванням електромеханічних систем, повинен володіти знаннями не в одній галузі науки. Зокрема, він має добре розуміти фізичні процеси ЕМПЕ, знати конструктивні особливості різних типів електричних машин, володіти методами прикладної математики та сучасними інформаційними технологіями.

Побудова математичної моделі починається з формування певних припущень щодо властивостей досліджуваного об'єкта. Такі припущення дозволяють спростити опис системи, виділивши її основні та найбільш суттєві характеристики. Отримане спрощене представлення об'єкта називають гіпотетичною моделлю.

Після математичної формалізації, під час якої властивості гіпотетичної моделі описуються за допомогою математичних рівнянь, співвідношень, початкових та граничних умов. Сукупність цих математичних залежностей утворює математичну модель об'єкта.

Важливим завданням є оцінювання адекватності побудованої моделі. Вибір моделі не може здійснюватися лише математичними методами, оскільки необхідно враховувати відповідність отриманих результатів реальним фізичним процесам. Для цього проводять порівняння декількох моделей і обирають ту, яка забезпечує необхідну точність та найбільш повно відображає особливості досліджуваного об'єкта.

У процесі досліджень часто виникає потреба в удосконаленні вже існуючих моделей. Причинами можуть бути необхідність підвищення точності розрахунків, поява нових експериментальних даних або розширення діапазону зміни параметрів системи. Тому для одного й того самого об'єкта можуть існувати різні математичні моделі, які відрізняються рівнем деталізації та точністю результатів.

Для систематизації математичних моделей ЕМПЕ застосовується D-класифікація (Dimension-класифікація). Вона базується на трьох основних ознаках і дозволяє визначити клас моделі за спеціальним кодом виду Dnm#.

Перша цифра коду характеризує просторову розмірність опису електромагнітного поля. Значення «0» відповідає моделям, побудованим лише на схемах заміщення та рівняннях електричних кіл. Значення «1», «2» і «3» відповідають одновимірним, двовимірним та тривимірним польовим моделям відповідно. Зі збільшенням розмірності зростають як складність моделі, так і точність результатів моделювання.

Друга цифра визначає кількість ступенів свободи механічного руху рухомих елементів системи. Наприклад, код «0» використовується для нерухомих пристроїв, таких як трансформатори, тоді як значення від «1» до «6» характеризують різні варіанти руху електромеханічних систем.

Третій символ відображає систему координат, у якій записані рівняння моделі. Буква P відповідає декартовій системі координат, C — циліндричній, а S — сферичній. Вибір системи координат визначається геометрією електромеханічного пристрою та особливостями розподілу електромагнітного поля.

Після побудови математичної моделі необхідно знайти спосіб її розв'язання. Для цього використовують аналітичні або чисельні методи. Аналітичні методи дозволяють отримати розв'язок у вигляді математичних формул та функціональних залежностей. Вони є зручними для теоретичного аналізу, проте застосовні лише до відносно простих моделей.

Кількість ступенів свободи руху	Розмірність рівнянь електромагнітного поля			
	0	1	2	3
	Ланцюгові ММ	Одновимірні коло – польові ММ	Двовимірні коло – польові ММ	Тривимірні коло – польові ММ
	0	D 00	D 10#	D 20#
	1	D 01	D 11#	D 21#
	2	D 02	D 12#	D 22#
	3	D 03	D 13#	D 23#
	4	D 04	D 14#	D 24#
	5	D 05	D 15#	D 25#
	6	D 06	D 16#	D 26#

Де # = P, C, S.

Для більшості сучасних електромеханічних систем через складність конструкції та наявність нелінійностей використовують чисельні методи. У цьому випадку розв'язання здійснюється шляхом обчислень із конкретними числовими значеннями параметрів. Результатом є набір числових даних, отриманих у ході чисельного експерименту. Для повного дослідження об'єкта виконують серію таких експериментів при різних значеннях параметрів.

У сучасній електромеханіці чисельні методи набули особливо важливого значення, оскільки саме вони дозволяють досліджувати складні електромеханічні системи з високою точністю та враховувати реальні особливості їхньої роботи.

Тому переважна більшість сучасних досліджень і розробок у галузі електромеханіки базується на використанні математичного моделювання та чисельних методів аналізу.

1.2 Фізична природа ефекту витіснення струму

Опір провідника при проходженні постійного струму визначається його геометричними розмірами та питомим опором матеріалу. Однак під час роботи в колах змінного струму величина опору стає більшою, ніж у колах постійного струму. Такий опір прийнято називати активним опором провідника.

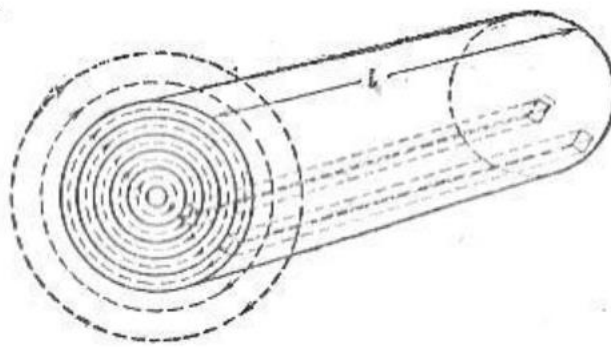


Рисунок 1.1 Вплив ефекту витіснення на провідник

Причиною зростання активного опору є нерівномірний розподіл струму по поперечному перерізу провідника. Якщо при постійному струмі густина струму практично однакова в усіх точках перерізу, то при змінному струмі вона зростає біля поверхні провідника та зменшується в його центральній частині.

Зі збільшенням частоти струму цей ефект стає більш вираженим. На високих частотах струм практично не проникає в центральну частину провідника і проходить переважно через тонкий поверхневий шар, таке явище отримало назву поверхневого ефекту, скін-ефекту, а в обмотках АД ефектом витіснення(ЕВ).

Унаслідок поверхневого ефекту зменшується ефективна площа поперечного перерізу, через яку проходить струм. Це призводить до збільшення електричного опору провідника та додаткових втрат енергії.

Механізм виникнення поверхневого ефекту можна пояснити, розглядаючи циліндричний провідник як сукупність великої кількості елементарних провідників, розташованих концентричними шарами. При проходженні змінного струму навколо кожного з них утворюється змінне магнітне поле як це показано на рис.1.1. Провідники, що знаходяться ближче до осі, охоплюються більшим магнітним потоком порівняно з тими, які розташовані біля поверхні.

У результаті внутрішні шари провідника мають більшу індуктивність та індуктивний опір. За однакової напруги на всіх елементарних провідниках густина струму в центральних шарах буде меншою, ніж у зовнішніх. Саме тому основна частина струму концентрується поблизу поверхні провідника.

Інтенсивність прояву поверхневого ефекту залежить від кількох факторів. Він посилюється зі збільшенням діаметра провідника, електропровідності матеріалу, його магнітної проникності та частоти струму.

Для кількісної оцінки впливу поверхневого ефекту використовують коефіцієнт поверхневого ефекту ξ , який визначається як відношення активного опору провідника при змінному струмі до його опору при постійному струмі:

$$\xi = \frac{R}{R_0} \quad (1.1)$$

Чим більше значення коефіцієнта ξ , тим сильніше проявляється поверхневий ефект і тим більшим є збільшення активного опору провідника порівняно з режимом постійного струму.

1.3 Вплив ефекту витіснення на пускові характеристики асинхронного двигуна

Ефект витіснення струму є важливим явищем, яке суттєво впливає на роботу АД, особливо під час їхнього пуску. Суть цього явища полягає в нерівномірному розподілі змінного струму по перерізу провідників ротора. Під дією змінного магнітного поля струм концентрується переважно в зовнішніх шарах провідника, тоді як у його центральній частині густина струму значно зменшується.

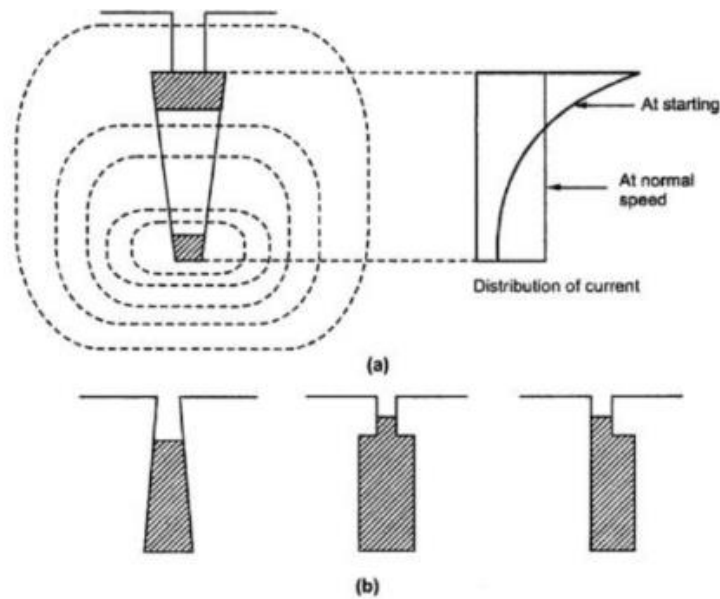


Рисунок 1.2 – Розподіл струму в глибокопазному роторі асинхронного двигуна

В АД ефект витіснення найбільш помітно проявляється у стрижнях короткозамкненого ротора. Під час пуску двигуна ковзання дорівнює або близьке до одиниці, тому частота струму ротора практично збігається з частотою живильної мережі. За цих умов поверхневий ефект проявляється найсильніше.

Внаслідок витіснення струму активний переріз стрижнів ротора зменшується, що призводить до збільшення їхнього активного опору. Одночасно зменшується внутрішній магнітний потік, який зчеплений зі стрижнем, а отже знижується індуктивність та індуктивний опір ротора.

Зростання активного опору ротора під час пуску має позитивний вплив на пускові характеристики АД. Відомо, що пусковий електромагнітний момент двигуна досягає максимального значення за умови наближення активного опору ротора до його реактивного опору. Тому збільшення опору внаслідок ефекту витіснення сприяє підвищенню пускового моменту та покращує розгін двигуна.

Саме на використанні цього явища базується робота АД із глибокими пазами ротора та подвійною короткозамкненою кліткою. У таких конструкціях під час пуску струм проходить переважно через верхню частину стрижнів, що забезпечує великий активний опір ротора. Після розгону двигуна ковзання зменшується, частота роторного струму стає низькою, ефект витіснення слабшає, а струм рівномірніше розподіляється по всьому перерізу провідника. У результаті опір ротора зменшується, що сприяє підвищенню коефіцієнта корисної дії та зменшенню втрат енергії в номінальному режимі роботи.

Таким чином, ефект витіснення струму має подвійний вплив на АД. З одного боку, він збільшує втрати та активний опір провідників, а з іншого — покращує пускові характеристики машини. Завдяки цьому явище широко використовується при проєктуванні АД з підвищеним пусковим моментом, які застосовуються в електроприводах із важкими умовами запуску.

Наведені особливості впливу ефекту витіснення струму на характеристики АД зумовлюють необхідність його врахування під час математичного моделювання. Це дозволяє підвищити точність розрахунків перехідних процесів та забезпечити більш адекватне відтворення реальних режимів роботи електричної машини.

2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

2.1 Узагальнений вектор у математичній моделі асинхронного двигуна

Одним із найбільш ефективних методів дослідження електромагнітних процесів в АД є метод узагальненого вектора. Цей підхід дозволяє перейти від розгляду трьох фазних струмів, напруг і потокозчеплень до аналізу одного комплексного вектора, який містить всю необхідну інформацію про стан трифазної системи. У реальній трифазній машині обмотки статора розташовані у просторі під кутом 120° . При симетричному живленні в кожній фазі протікають синусоїдальні струми, зміщені один відносно одного на третину періоду. Безпосередній аналіз таких величин потребує розв'язання системи рівнянь для кожної фази окремо, що значно ускладнює математичний опис електромагнітних процесів. Для усунення цієї складності використовується поняття узагальненого вектора.

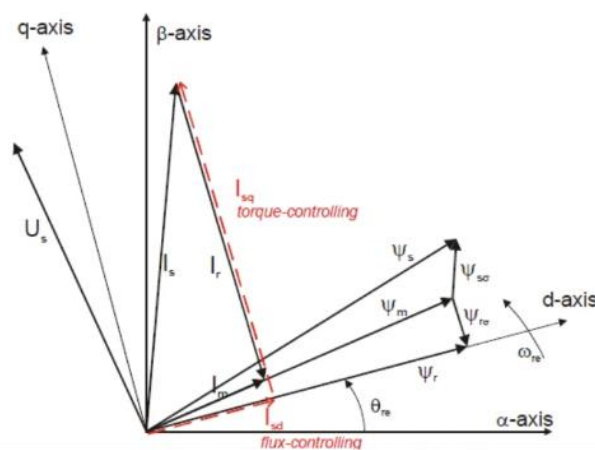


Рисунок 2.1 – Векторна діаграма асинхронного двигуна в системі координат α - β

Суть методу полягає в тому, що миттєві значення фазних струмів розглядаються як проекції деякого вектора, який обертається у просторі з кутовою швидкістю живильної мережі. Довжина цього вектора відповідає амплітуді фазного струму, а його положення визначається миттєвою фазою електромагнітного процесу. Таким чином, замість трьох окремих струмів фаз А, В і С можна використовувати один комплексний вектор струму.

Узагальнений вектор статора визначається як векторна сума миттєвих значень фазних струмів з урахуванням їх просторового розташування. Для симетричної системи він повністю характеризує електромагнітний стан трифазної обмотки. Аналогічно можуть бути побудовані узагальнені вектори напруг, магнітних потоків і потокозчеплень.

Фізично узагальнений вектор відображає дійсне магнітне поле машини. Якщо трифазна система живлення є симетричною, то узагальнений вектор магніторушійної сили має постійну величину та рівномірно обертається у повітряному зазорі машини. Саме це обертове магнітне поле створює електромагнітний момент і забезпечує перетворення електричної енергії в механічну.

Використання узагальненого вектора дозволяє перейти від опису процесів у трьох фазах до опису процесів у двох взаємно перпендикулярних координатних осях. У цьому випадку складна трифазна система замінюється еквівалентною двофазною системою, що значно спрощує математичне моделювання. Такий підхід широко застосовується в сучасній теорії електричних машин, системах частотного керування та векторного регулювання електроприводів.

Для симетричної трифазної системи струмів узагальнений вектор струму статора можна представити у вигляді комплексної величини. Його модуль визначає амплітуду результативного струму, а аргумент характеризує його просторове положення відносно нерухомої системи координат. Аналогічні вирази можуть бути записані для напруги статора, струму ротора та потокозчеплень.

Однією з головних переваг методу є можливість компактного запису рівнянь електричної рівноваги АД. Замість трьох окремих диференціальних рівнянь для фаз статора отримується одне комплексне рівняння для узагальненого вектора напруги. Аналогічне рівняння формується для ротора. Це суттєво зменшує кількість змінних та спрощує чисельне інтегрування системи рівнянь при моделюванні перехідних процесів.

Важливим є те, що за допомогою узагальнених векторів легко описується взаємозв'язок між струмами та потокозчепленнями машини. Магнітний потік, створений струмами статора і ротора, також може бути представлений у вигляді комплексного вектора. Завдяки цьому всі електромагнітні процеси в машині описуються єдиною системою векторних рівнянь.

Особливого значення метод узагальненого вектора набуває при дослідженні динамічних режимів роботи АД. Під час пуску, гальмування або різких змін навантаження фазні струми та магнітні потоки змінюються в часі. Використання узагальненого вектора дозволяє наочно простежити траєкторію зміни електромагнітного стану машини та оцінити характер перехідного процесу.

На основі узагальнених векторів будується сучасна теорія векторного керування АД. У таких системах керування виконується окреме регулювання магнітного потоку та електромагнітного моменту двигуна. Для цього узагальнений вектор струму розкладається на дві складові: потоку та моменту. Перша відповідає за формування магнітного поля, а друга – за створення електромагнітного моменту.

Застосування векторного підходу дозволяє досягти високої точності регулювання швидкості та моменту двигуна. Саме тому сучасні частотні перетворювачі практично завжди використовують алгоритми керування, засновані на понятті узагальненого вектора.

Ще однією важливою перевагою методу є його наочність. Усі електромагнітні процеси можуть бути представлені геометрично у вигляді векторних діаграм. Це дозволяє легко аналізувати взаємне положення струмів, напруг і потокозчеплень, визначати кути зсуву фаз та оцінювати енергетичні характеристики машини.

У математичних моделях АД узагальнений вектор, використовується як основна змінна стану. Саме через нього визначаються струми, потокозчеплення, електромагнітний момент та інші параметри машини. Такий підхід забезпечує значне скорочення обчислювальних витрат і підвищує ефективність комп'ютерного моделювання.

Отже, узагальнений вектор є одним із фундаментальних понять сучасної теорії ЕМ. Він дозволяє замінити складну систему трифазних величин одним комплексним вектором, що істотно спрощує математичний опис АД. Використання цього методу забезпечує високу точність моделювання електромагнітних процесів, зручність аналізу динамічних режимів та створює основу для реалізації сучасних систем векторного керування електроприводами.

Нехай миттєві значення фазних струмів статора дорівнюють:

$$I_a = I_m \cos(\omega t) \quad (2.1)$$

$$I_b = I_m \cos(\omega t - (2/3)) \quad (2.2)$$

$$I_c = I_m \cos(\omega t + (2/3)) \quad (2.3)$$

Узагальнений вектор струму статора визначається як:

$$\vec{i}_s = \frac{2}{3} (i_a + a \cdot i_b + a^2 \cdot i_c) \quad (2.4)$$

$$a = e^{\frac{j2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} \quad (2.5)$$

- Оператор повороту на 120°

Для симетричної системи струмів після підстановки фазних величин отримують:

$$i_s = I_m e^{j\omega t} \quad (2.6)$$

тобто узагальнений вектор має постійну амплітуду та рівномірно обертається в просторі з кутовою швидкістю мережі.

Для напруг статора аналогічно записується:

$$u_s = \frac{2}{3} (u_a + a u_b + a^2 u_c) \quad (2.7)$$

а для потокозчеплень:

$$\psi_s = \frac{2}{3} (\psi_a + a \cdot \psi_b + a^2 \cdot \psi_c) \quad (2.8)$$

Рівняння статора через узагальнений вектор

У векторній формі рівняння електричної рівноваги статора має вигляд

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt} \quad (2.9)$$

Де:

- R_s - активний опір обмотки статора;

- I_s - узагальнений вектор струму статора;
- Ψ_s - узагальнений вектор потокозчеплення

Для короткозамкненого ротора:

$$0 = R_r i_r + \frac{d\psi_r}{dt} - j\omega_r \psi_r \quad (2.10)$$

Де:

- R_r - опір ротора;
- ω_r - механічна кутова швидкість ротора.

Рівняння потокозчеплень

Потокозчеплення статора визначається:

$$\psi_s = L_s i_s + L_m i_r \quad (2.11)$$

а потокозчеплення ротора:

$$\psi_r = L_r i_r + L_m i_s \quad (2.12)$$

де:

- L_s – індуктивність статора;
- L_r – індуктивність ротора;
- L_m – взаємна індуктивність

Електромагнітний момент

Однією з найважливіших величин математичної моделі є електромагнітний момент. Через узагальнені вектори він визначається:

$$M_e = \frac{3}{2} p (\psi_\alpha i_\beta - \psi_\beta i_\alpha) \quad (2.13)$$

де:

- p – число пар полюсів;
- Ψ_α, Ψ_β – проєкції вектора потокозчеплення;

- i_a, i_β – проєкції вектора струму.

Рівняння руху ротора

Механічна частина моделі асинхронного двигуна описується рівнянням:

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_e - M_H \quad (2.13)$$

де:

- J – момент інерції;
- ω – кутова швидкість ротора;
- M_e – електромагнітний момент;
- M_H – момент навантаження.

2.2 Рівняння електромагнітної та механічної рівноваги двигуна

При математичному моделюванні АД широко використовуються векторні системи координат, які дозволяють враховувати обертальний характер електромагнітних процесів. Використання полярних координат забезпечує компактний запис рівнянь електромагнітного стану машини та спрощує аналіз взаємодії між статором і ротором.

Під повними змінними розуміють миттєві значення струмів, потокозчеплень, напруг та кутових координат, які безпосередньо характеризують електромагнітний і механічний стан двигуна.

Для АД рівняння електричної рівноваги статора можуть бути записані у векторній формі:

$$\vec{U}_s = R_s \vec{I}_s + \frac{d\vec{\Psi}_s}{dt} \quad (2.14)$$

де:

- U_s — вектор напруги статора;
- I_s — вектор струму статора;
- Ψ_s — вектор потокозчеплення статора;
- R_s — активний опір обмотки статора.

Для короткозамкненого ротора виконується умова:

$$U_r=0;$$

тому рівняння ротора набуває вигляду

$$0 = R_r \vec{I}_r + \frac{d\vec{\Psi}_r}{dt} - j\omega_r \vec{\Psi}_r \quad (2.15)$$

Оператор нижче характеризує зміну потокозчеплення внаслідок обертання ротора $j\omega_r \vec{\Psi}_r$

2.3 Модель асинхронного двигуна у змінних $\psi_s - \psi_r$

Для аналізу електромагнітних процесів в АД широко використовуються математичні моделі, побудовані у різних системах координат. Однією з найбільш поширених є модель у змінних потокозчеплення ротора (Ψ_r) та потокозчеплення статора (Ψ_s). Такий підхід дозволяє суттєво зменшити кількість змінних стану та отримати зручну форму запису рівнянь для дослідження динамічних режимів роботи двигуна.

Основна ідея моделі полягає у використанні потокозчеплення ротора як однієї з основних координат стану. Оскільки магнітне поле АД формується взаємодією струмів статора та ротора, потокозчеплення ротора є інтегральною характеристикою електромагнітного стану машини і безпосередньо впливає на формування електромагнітного моменту.

Ковзання визначається як відносна різниця між синхронною швидкістю обертання магнітного поля та механічною швидкістю ротора:

$$s = \frac{\omega_0 - \omega_r}{\omega_0} \quad (2.16)$$

де:

- s — ковзання;
- ω_0 — синхронна кутова швидкість;
- ω_r — механічна швидкість ротора.

Синхронна швидкість визначається виразом

$$\omega_0 = \frac{2\pi f_1}{p} \quad (2.17)$$

- $f_1=50$ Гц частота мережі
- p - число пар полюсів

Використання ковзання як координати дозволяє безпосередньо враховувати взаємозв'язок між електромагнітними та механічними процесами в двигуні.

Під час побудови моделі приймаються традиційні припущення теорії асинхронних машин:

- магнітна система є лінійною;
- параметри обмоток залишаються сталими;
- втрати в сталі не враховуються;
- трифазна система живлення симетрична;
- магнітне поле в повітряному зазорі є синусоїдально розподіленим.

За цих умов рівняння потокозчеплення ротора можна записати у вигляді

$$T_r \frac{d\psi_r}{dt} + \psi_r = L_m i_s \quad (2.18)$$

де:

- T_r — електромагнітна стала часу ротора;
- L_m — взаємна індуктивність;
- i_s — струм статора.

Стала часу ротора визначається співвідношенням

$$T_r = \frac{L_r}{R_r} \quad (2.19)$$

З наведеного рівняння видно, що потокозчеплення ротора формується під дією струму статора і змінюється за експоненційним законом із постійною часу T_r .

Електромагнітний момент АД визначається взаємодією магнітного потоку та активної складової струму статора. У змінних ψ_r та i_{sq} момент можна подати як

$$M_e = k_M \cdot \psi_r \cdot i_{sq} \quad (2.20)$$

де:

- k_M — конструктивний коефіцієнт двигуна;
- i_{sq} — моментотворна складова струму статора.

Для більшості математичних моделей коефіцієнт моменту записують у вигляді

$$k_M = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \quad (2.21)$$

Тоді рівняння електромагнітного моменту набуває вигляду

$$M_e = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} \psi_r i_{sq} \quad (2.22)$$

З наведеного співвідношення випливає, що момент прямо пропорційний потокозчепленню ротора та активній складовій струму статора.

Механічна частина моделі описується рівнянням руху ротора

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c \quad (2.23)$$

Оскільки в моделі використовується ковзання, рівняння механічного руху доцільно записати через нього. Після диференціювання виразу для ковзання отримуємо

$$-\frac{1}{\omega_0} \frac{d\omega_r}{dt} \quad (2.24)$$

Підставляючи рівняння руху, одержуємо

$$- \frac{M - M_H}{J\omega_0} \quad (2.25)$$

Це рівняння встановлює безпосередній зв'язок між ковзанням і електромагнітним моментом двигуна.

Побудова структурної схеми здійснюється на основі системи отриманих диференціальних рівнянь. Першим елементом схеми є блок формування потокозчеплення ротора. На його вхід надходить струм статора, який через коефіцієнт взаємної індуктивності створює магнітний потік. Після інтегрування формується величина потокозчеплення Ψ_r .

Другим функціональним вузлом є блок обчислення електромагнітного моменту. У ньому реалізується множення потокозчеплення ротора та створює миттєву складову струму статора відповідно до рівняння моменту.

Отриманий електромагнітний момент надходить до механічної частини структурної схеми. Тут від моменту двигуна віднімається момент навантаження, після чого сигнал ділиться на момент інерції ротора і надходить на інтегратор, який формує механічну швидкість.

Далі обчислюється ковзання шляхом порівняння поточної швидкості ротора із синхронною швидкістю обертання магнітного поля. Отримане значення ковзання використовується для корекції параметрів електромагнітної частини моделі.

Структурна схема моделі містить два основні контури:

1. Електромагнітний контур формування потокозчеплення ротора.
Механічний контур формування швидкості та ковзання.
2. Механічний контур формування швидкості та ковзання.

Завдяки використанню змінних ψ та s модель має порівняно невелику кількість рівнянь стану і забезпечує достатньо високу точність опису динамічних процесів. Саме тому вона широко використовується при моделюванні асинхронних двигунів у середовищах MATLAB/Simulink, VisSim та інших програмних комплексах для дослідження електроприводів.

Перевагою даної моделі є можливість безпосереднього аналізу процесів формування магнітного потоку та електромагнітного моменту, що особливо важливо при дослідженні пускових режимів, регулювання швидкості та систем векторного керування. Використання координат ψ_r та ψ_s дозволяє зменшити складність математичного опису без істотної втрати точності моделювання електромеханічних процесів АД.

2.4 Модель асинхронного двигуна у змінних $i_s - \psi_r$

Одним із поширених підходів до математичного опису асинхронного двигуна є використання моделі в полярній системі координат зі змінними струму статора (i_s) та потосцеплення ротора (ψ_r). Такий підхід дозволяє безпосередньо досліджувати взаємозв'язок між електричними параметрами двигуна та механічним рухом ротора, що особливо важливо при аналізі перехідних процесів і побудові систем автоматичного керування.

У даній моделі як основні змінні стану використовуються струм статора та потосцеплення ротора, що характеризує положення узагальненого вектора магнітного поля відносно ротора. Завдяки цьому стає можливим опис електромеханічних процесів за допомогою відносно простої системи диференціальних рівнянь.

Для статора рівняння електричної рівноваги записується у вигляді

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt} \quad (2.26)$$

де:

- (u_s) — напруга статора;
- (R_s) — активний опір обмотки статора;
- (i_s) — струм статора;
- (Ψ_s) — потокозчеплення статора.

Потокозчеплення статора визначається рівнянням

$$\psi_s = L_s i_s + L_m i_r \quad (2.27)$$

Для ротора рівняння електричної рівноваги має вигляд

$$0 = R_\Sigma i_r + \frac{d\phi_r}{dt} \quad (2.28)$$

оскільки короткозамкнений ротор не має зовнішнього джерела живлення.

Потокозчеплення ротора визначається співвідношенням

$$\psi_r = L_r \cdot i_r + L_m \cdot i_s \quad (2.29)$$

Після підстановки рівнянь потокозчеплень у рівняння електричної рівноваги отримують систему диференціальних рівнянь електромагнітного стану двигуна.

Для опису просторового положення магнітного поля використовується радіус-вектор

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.30)$$

(x) та (y) — координати кінця узагальненого вектора магнітного поля.

Зміна положення вектора в часі визначається його кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.31)$$

Механічний рух ротора описується основним рівнянням динаміки:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c \quad (2.32)$$

Положення ротора визначається інтегруванням швидкості:

$$\theta = \int \omega_r dt \quad (2.33)$$

або у диференціальній формі

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_r \quad (2.34)$$

Для побудови структурної схеми моделі всі диференціальні рівняння представляються у формі інтегруючих ланок. Вхідним сигналом електромагнітної частини є напруга статора. Після врахування падіння напруги на активному опорі статора формується сигнал потокозчеплення. Далі через рівняння магнітного зв'язку обчислюється струм ротора та магнітний потік машини.

На наступному етапі за значеннями струму статора та потокозчеплення ротора визначається електромагнітний момент. Цей момент надходить до механічного контуру, де від нього віднімається момент навантаження. Результат ділиться на момент інерції та інтегрується, утворюючи кутову швидкість ротора.

Після повторного інтегрування швидкості визначається кут повороту ротора, який використовується для розрахунку координат узагальненого вектора магнітного поля та потокозчеплення ротора ψ_r .

Структурна схема моделі у змінних i_s та r складається з трьох взаємопов'язаних підсистем:

1. Електричної підсистеми статора.
2. Електромагнітної підсистеми формування потокозчеплень і моменту.
3. Механічної підсистеми формування швидкості та координат ротора.

Перевагою даної моделі є можливість одночасного аналізу електричних, магнітних і механічних процесів у єдиній системі координат. Це дозволяє досліджувати режими пуску, реверсу, гальмування, а також оцінювати вплив параметрів двигуна на його динамічні характеристики.

Таким чином, модель АД у змінних i_s та ψ_r є ефективним інструментом для математичного моделювання та подальшої реалізації систем керування електроприводами. Її використання забезпечує достатню точність опису електромеханічних процесів і дозволяє виконувати чисельні експерименти при дослідженні різних режимів роботи АД.

3. УРАХУВАННЯ ЕФЕКТУ ВИТІСНЕННЯ СТРУМУ В МАТЕМАТИЧНІЙ МОДЕЛІ ДВИГУНА

3.1 Залежність параметрів ротора від ковзання

Однією з особливостей роботи АД є нерівномірний розподіл струму в провідниках ротора під час перехідних режимів роботи. Це явище отримало назву ефекту витіснення струму або поверхневого ефекту. Воно суттєво впливає на електромагнітні та механічні характеристики двигуна, особливо в процесі пуску, коли частота струму ротора досягає найбільших значень.

У міру розгону двигуна ковзання зменшується, відповідно знижується і частота струму ротора. У номінальному режимі ковзання зазвичай становить лише декілька відсотків, тому ефект витіснення струму значно послаблюється.

Основним наслідком витіснення струму є зміна параметрів роторного кола. Активний опір ротора стає залежним від частоти струму і може бути представлений як

$$R = R_{r0} \cdot k \cdot R(s) \quad (3.1)$$

де:

- R_{r0} — активний опір ротора при рівномірному розподілі струму;
- R_s — коефіцієнт поверхневого ефекту.

При зростанні ковзання коефіцієнт $k \cdot R_s$ зростає, що призводить до збільшення ефективного опору ротора.

Одночасно змінюється і індуктивний опір роторної обмотки.

Внаслідок витіснення струму магнітний потік усередині стрижня зменшується, тому ефективна індуктивність ротора стає меншою.

Для врахування поверхневого ефекту в математичній моделі АД параметри ротора розглядаються як функції ковзання. Тоді рівняння ротора набуває вигляду:

$$0 = R_r i_r + \frac{d\Phi_r}{dt} \quad (3.2)$$

Де:

$$\psi_r = L_r(s)i_r + L_m i_s \quad (3.3)$$

Таким чином, система рівнянь стає нелінійною, оскільки параметри залежать від режиму роботи двигуна.

Особливий інтерес становить вплив поверхневого ефекту на пускові характеристики двигуна. Електромагнітний момент АД визначається виразом:

$$M_e = \frac{3}{\omega_0} \cdot \frac{E_2^2 \cdot \frac{R_r}{s}}{\left(\frac{R_r}{s}\right)^2 + X_r^2} \quad (3.4)$$

де:

- E_2 — ЕРС ротора;
- R_r — активний опір ротора;
- X_r — реактивний опір ротора;
- ω_0 — синхронна кутова швидкість.

Зростання активного опору ротора внаслідок витіснення струму приводить до зростання пускового моменту. Саме тому глибокопазні ротори та ротори з подвійною кліткою широко застосовуються в асинхронних двигунах, призначених для роботи з важкими умовами запуску.

У глибоко пазних роторах під час пуску струм концентрується переважно у верхній частині стрижня. Це еквівалентно збільшенню активного опору ротора без збільшення втрат у номінальному режимі. Після розгону двигуна струм рівномірніше розподіляється по перерізу стрижня, а параметри ротора наближаються до своїх номінальних значень.

Для підвищення точності математичного моделювання часто використовується багатополова модель ротора. У цьому випадку

стрижень ротора розбивається на декілька елементарних шарів, для кожного з яких записуються власні рівняння струмів та потокочеплень. Такий підхід дозволяє детально врахувати реальний розподіл струму по висоті стрижня та отримати результати, близькі до експериментальних даних.

Сучасні програмні комплекси електромагнітного аналізу, такі як MATLAB/Simulink, ANSYS Maxwell та JMAG, дозволяють враховувати ефект витіснення струму за допомогою польових моделей, побудованих на основі рівнянь Максвелла. Однак для інженерних розрахунків найчастіше використовуються спрощені моделі із залежними від ковзання параметрами ротора.

Отже, урахування ефекту витіснення струму є важливою складовою побудови адекватної математичної моделі асинхронного двигуна. Поверхневий ефект суттєво впливає на активний та реактивний опір ротора, визначає характер пускових процесів і форму механічної характеристики машини. Включення цього явища до математичної моделі дозволяє підвищити точність розрахунку електромагнітних та механічних характеристик двигуна, особливо в режимах із великими значеннями ковзання.

3.2 Структура моделі з урахуванням змінного опору ротора

При побудові математичних моделей асинхронних двигунів для дослідження перехідних процесів важливо враховувати зміну параметрів ротора під впливом ефекту витіснення струму. Класична модель асинхронного двигуна передбачає сталі значення активного опору та індуктивності ротора. Однак експериментальні дослідження показують, що під час пуску та роботи при великих ковзаннях ці параметри істотно змінюються. Тому для підвищення точності моделювання до структури математичної моделі необхідно включити блоки, які враховують залежність параметрів ротора від частоти його струму або ковзання.

Структурна модель асинхронного двигуна з урахуванням витіснення струму являє собою сукупність взаємопов'язаних

електромагнітних та механічних блоків, що описують процеси перетворення електричної енергії в механічну. На відміну від класичної моделі, у даному випадку параметри роторного кола не є постійними величинами, а змінюються залежно від режиму роботи двигуна.

Основою моделі є система диференціальних рівнянь статора та ротора. Для статора рівняння напруги записується у вигляді

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt} \quad (3.5)$$

де:

- u_s — напруга статора;
- R_s — активний опір статора;
- i_s — струм статора;
- Ψ_s — потокозчеплення статора.

Для ротора з урахуванням витіснення струму рівняння набуває вигляду

$$0 = R_r i_r + \frac{d\phi_r}{dt} \quad (3.6)$$

де параметр

$$R_r = R_{rs} \quad (3.7)$$

є функцією ковзання.

Потокозчеплення ротора визначається рівнянням

$$\vec{\psi}_r = L_r(s) \vec{i}_r + L_m \vec{i}_s \quad (3.8)$$

де індуктивність ротора також залежить від ковзання:

$$L_r = L_{rs} \quad (3.9)$$

Таким чином, електромагнітна частина моделі містить два нелінійних блоки:

- блок змінного активного опору ротора;
- блок змінної індуктивності ротора.

У загальному випадку залежності параметрів ротора від ковзання можуть бути подані як:

$$R_r(s) = R_{r0}k_R(s) \quad (3.10)$$

$$L_r(s) = L_{r0}k_L(s) \quad (3.11)$$

При збільшенні ковзання коефіцієнт ($k_R(s)$) зростає, а коефіцієнт ($k_L(s)$) зменшується.

Побудова структурної схеми починається з формування електромагнітної підсистеми. Вхідною величиною є напруга живлення статора. Після врахування падіння напруги на активному опорі статора формується сигнал потокозчеплення статора. Через взаємну індуктивність визначаються параметри магнітного зв'язку між статором та ротором.

Далі обчислюється струм ротора. Для цього використовується інтегруючий блок, який реалізує розв'язання рівняння ротора. Перед інтегратором встановлюються блоки змінного активного та індуктивного опорів, значення яких визначаються поточним ковзанням двигуна.

Частота струму ротора визначається співвідношенням

$$f_2 = s f_1 \quad (3.12)$$

На основі величини ковзання формується сигнал керування параметрами роторного кола. Таким чином реалізується зворотний зв'язок між механічною та електромагнітною частинами моделі.

Після визначення струмів і потокозчеплень обчислюється електромагнітний момент двигуна:

$$M_e = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r(s)} \psi_r i_s \quad (3.13)$$

У даному випадку момент також стає функцією ковзання через залежність індуктивності ротора від поверхневого ефекту.

Механічна частина структурної моделі описується рівнянням руху

$$J \frac{d\omega_r}{dt} = M - M_c \quad (3.14)$$

Після інтегрування отримується миттєве значення кутової швидкості ротора

$$\omega_r \int \frac{M_e}{M_H} J dt \quad (3.15)$$

Структурно модель можна поділити на чотири основні функціональні блоки:

1. Блок живлення та електромагнітних процесів статора.
2. Блок змінних параметрів ротора з урахуванням поверхневого ефекту.
3. Блок обчислення електромагнітного моменту.
4. Механічний блок формування швидкості та ковзання.

Порівняно з класичною моделлю асинхронного двигуна така структура забезпечує більш точний опис пускових режимів та режимів із великими значеннями ковзання. Особливо суттєві відмінності спостерігаються при аналізі двигунів із глибокими пазами ротора та подвійною короткозамкненою кліткою, конструкція яких спеціально використовує ефект витіснення струму для покращення пускових характеристик.

Використання структурної моделі з урахуванням поверхневого ефекту дозволяє отримати результати моделювання, які значно ближчі до експериментальних характеристик реального двигуна. Така модель може бути реалізована в середовищах MATLAB/Simulink, SimInTech, Scilab Xcos та інших програмних пакетах для дослідження електроприводів і систем автоматичного керування.

Таким чином, включення до структури математичної моделі блоків, що враховують витіснення струму ротора, дозволяє підвищити точність розрахунків електромагнітних процесів,

пускового моменту, пускового струму та динамічних характеристик асинхронного двигуна. Це особливо важливо при моделюванні сучасних високоефективних електроприводів, де вимоги до достовірності результатів є досить високими.

3.3 Модель асинхронного двигуна з урахуванням витіснення струму у змінних $\psi_s - \psi_r$

Для підвищення точності математичного опису електромагнітних процесів в АД використовуються моделі, в яких змінними стану виступають потокозчеплення статора (Ψ_s) та потокозчеплення ротора (Ψ_r). Такий підхід особливо ефективний при врахуванні ефекту витіснення струму ротора, оскільки дозволяє безпосередньо описувати процеси формування магнітного поля машини та їх вплив на електромеханічне перетворення енергії.

У класичній моделі АД параметри роторного кола приймаються сталими. Однак при великих значеннях ковзання, особливо під час пуску, внаслідок поверхневого ефекту відбувається нерівномірний розподіл струму по перерізу стрижнів ротора. Це призводить до зміни активного опору та індуктивності ротора, що повинно бути враховано при побудові математичної моделі.

Основними координатами стану в даній моделі є потокозчеплення статора та ротора:

$$\underline{\psi}_s = \psi_{s\alpha} + j\psi_{s\beta} \quad (3.17)$$

$$\psi_r = \psi_{r\alpha} + j\psi_{r\beta} \quad (3.18)$$

де:

$(\psi_{s\alpha}, \psi_{s\beta})$ — складові потокозчеплення статора;

$(\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta})$ — складові потокозчеплення ротора.

Для статора рівняння електричної рівноваги має вигляд

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt} \quad (3.19)$$

Струм статора визначається через потокозчеплення статора і ротора:

$$i_s = \frac{1}{\sigma L_s} \psi_s - \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \psi_r \quad (3.20)$$

Внаслідок поверхневого ефекту параметри ротора стають функціями ковзання. Для активного опору можна записати

$$R(s) = R_{r0} \cdot k(s) \quad (3.21)$$

Індуктивність ротора також змінюється залежно від режиму роботи:

$$L_r(s) = L_{r0} \cdot k_L(s) \quad (3.22)$$

У структурній схемі моделі цей вираз реалізується за допомогою інтегратора, на вхід якого надходить сума сигналів, що визначають зміну потокозчеплення ротора.

Після інтегрування отримується поточне значення вектора потокозчеплення статора.

Електромагнітний момент двигуна визначається через взаємодію векторів потокозчеплення та струму:

$$M_e = \frac{3}{2} p (\psi_{s\alpha} i_{s\beta} - \psi_{s\beta} i_{s\alpha}) \quad (3.23)$$

Дане рівняння використовується в окремому функціональному блоці структурної схеми для розрахунку моменту двигуна.

Механічна частина моделі описується рівнянням руху ротора

$$J \frac{d\omega_r}{dt} = M - M_c \quad (3.24)$$

Після інтегрування визначається механічна швидкість ротора:

$$\omega_r \int \frac{M_e}{M_H} J dt \quad (3.25)$$

Структурна модель містить декілька взаємозалежних функціональних блоків:

1. Блок формування потокозчеплення статора Ψ_s .
2. Блок формування потокозчеплення ротора Ψ_r .
3. Блок обчислення струмів статора та ротора.
4. Блок корекції параметрів ротора залежно від ковзання.
5. Блок розрахунку електромагнітного моменту.
6. Механічний блок формування швидкості та ковзання.

На відміну від моделі, побудованої у змінних струмів, модель у змінних потокозчеплень дозволяє безпосередньо аналізувати процеси накопичення та перерозподілу електромагнітної енергії в машині. Це особливо важливо при дослідженні пускових режимів, коли поверхневий ефект найбільш істотно впливає на параметри ротора.

Перевагою такої структури є можливість точного відтворення змін електромагнітного моменту, струмів та швидкості в широкому діапазоні навантажень. Урахування залежності параметрів ротора від ковзання дозволяє отримати результати моделювання, які добре узгоджуються з експериментальними даними для двигунів із глибокими пазами ротора та подвійною короткозамкненою кліткою.

Таким чином, структурна модель АД, а у змінних Ψ_r та Ψ_s з урахуванням витіснення струму ротора забезпечує більш повний опис електромагнітних процесів порівняно з класичними моделями. Вона може бути використана для дослідження динамічних режимів роботи електроприводів, розробки систем автоматичного керування та оптимізації конструкцій АМ.

4 РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ МОДЕЛЮВАННЯ

4.1 Паспортні та розраховані параметри двигуна АИ132М4У3

Двигун АИ132М4У3, має такі параметри в табл.4.1 та його розраховані базисні дані в таблиці 4.1 та таблиці 4.3.

Таблиця 4.1 параметри двигуна

Параметр	Одиниця виміру	Чисельна величина
Потужність на валу, P_2	кВт	11
Висота осі обертання, h	мм	132
Номинальна напруга, U	В	230/380
Схема з'єднання обмоток	—	Δ/Y
Кількість фаз, m	—	3
Синхронна частота обертання, n_1	об/хв	1500
Номинальне ковзання, S	%	2,8
Коефіцієнт корисної дії, η	%	87,5
Коефіцієнт потужності, $\cos\phi$	—	0,86
Кратність пускового струму, I_{II}	—	7,5
Кратність пускового моменту, M_{II}	—	2,2
Кратність максимального моменту, M_K	—	2,5
Ступінь захисту	—	IP44
Режим роботи	—	S1
Система охолодження	—	IC0141
Конструктивне виконання	—	IM1081

Таблиця 4.2 Розраховані базисні параметри двигуна

Базисна напруга, В	В	325,27
Базисний струм	А	29,96
Базисний опір	Ом	10,87
Базисна кутова частота	рад/с	314,16
Базисний кут повороту	-	1
Базисний час	с	0.003
Базисна потокозчеплення	Вб	1.035
Базисна індуктивність	Гн	0.035
Базисна інерція	Кг*м ²	0,056

Таблиця 4.3 – Параметри двигуна у відносних одиницях для моделі
MATLAB/Simulink

Параметр	Позначення	Значення параметрів
Активний опір статорного кола	R_s	0,05
Активний опір роторного кола	R_r	0,028
Індуктивність розсіювання обмотки статора	$L_{s\sigma}$	0,08
Індуктивність розсіювання обмотки ротора	$L_{r\sigma}$	0,13
Індуктивність розсіювання обмотки статора	L_m	4,3
Взаємна індуктивність обмотки статора та ротора	L_s	4,38
Повна індуктивність фази обмотки статора	L_r	4,43
Повна індуктивність фази обмотки ротора	R_{rl}	0,005
Активний опір лобової частини ротора	$L_{r\sigma l}$	0,018
Активний опір пазової частини обмотки ротора при рівномірній розподіленні струму по перелізу	$L_{r\sigma p}$	0,013
Коефіцієнт зв'язку статора	K_s	0,98

Розрахунок фазного струму

$$I_{ph} := \frac{P_n}{m \cdot \eta \cdot \cos \varphi \cdot U_{ph}} = 21.185 \quad \text{А} \quad (4.1)$$

Базисна напруга

$$U_b := U_{ph} \cdot \sqrt{2} = 325.269 \quad \text{В} \quad (4.2)$$

Базисний струм

$$I_b := I_{ph} \cdot \sqrt{2} = 29.961 \quad \text{А} \quad (4.3)$$

Базисна кутовий частота

$$\Omega_b := 2 \cdot \pi \cdot f = 314.159 \quad \text{рад/с} \quad (4.4)$$

f - мережова частота яка відповідає 50 Гц;

Базисний час

$$T_b := \frac{1}{\Omega_b} = 0.003 \quad \text{с} \quad (4.5)$$

Базисне потокозчеплення

$$\psi_b := U_b \cdot T_b = 1.035 \quad \text{Вб} \quad (4.6)$$

Базисна індуктивність

$$L_b := \frac{\psi_b}{I_b} = 0.035 \quad \text{Гн}, \quad (4.7)$$

Тепер розрахуємо параметри пазових та лобових частин, які потрібні для блоку коефіцієнтів у схемі АТ з витісненням струму ротора:

$$r_{r.l} := r_R \cdot (10\%) = 0.003 \quad (4.8)$$

$$l_{r\sigma l} := l_{r\sigma} \cdot 20\% = 0.03 \quad (4.9)$$

$$r_{r.n} := r_R - r_{r.l} = 0.019 \quad (4.10)$$

$$l_{r.b.n} := l_{r\sigma} - l_{r\sigma l} = 0.135 \quad (4.11)$$

Еквівалентна глибина проникнення струму в стрижень в режимі короткого замикання при номінальній (базисній) частоті напруги живлення двигуна.

Вона визначається наступним виразом:

$$H_{\text{пр.б}} = 10^{-2} \sqrt{\frac{2\rho}{\mu \cdot \Omega_{s.H}}} = 10^{-2} \sqrt{\frac{\rho}{\mu \pi f_{s.H}}} \quad (4.12)$$

Виконання обмотки ротора з литих алюмінієвих стрижнів базисна еквівалентна глибина проникнення $H_{\text{пр.б}} = 1.41$ см.

Базисний опір:

$$Z_b := \frac{U_b}{I_b} = 10.857 \quad \text{Ом}; \quad (4.13)$$

Базисна потужність:

$$P_b := \frac{3 \cdot U_b \cdot I_b}{2} = 1.462 \cdot 10^4 \quad \text{Вт}; \quad (4.14)$$

Базисна кутова частота обертання ротора:

$$\Omega_{br} := \frac{\Omega_b}{Z_b} = 28.937 \quad \text{рад./с.}; \quad (4.15)$$

Базисна кут повороту ротора:

$$\theta_{br} := \frac{\theta b}{Zb} = 0.092 \quad (4.16)$$

Базисна магніторушійна сила:

$$Mb := \frac{Pb}{\Omega_{br}} = 505.158 \quad \text{Н*м}; \quad (4.17)$$

Базисний момент інерції:

$$Jb := \frac{Mb \cdot Tb \cdot Zb}{\Omega_b} = 0.056 \quad \text{кг*м}^2; \quad (4.18)$$

Розрахунок номінальної швидкості

$$n_n := n_1 \cdot (1 - S) = 1.458 \cdot 10^3 \quad \text{об./хв.} \quad (4.19)$$

Розрахунок обертової швидкості

$$\omega_n = 2\pi \cdot n_n / 60 = 152,68 \text{ рад/с} \quad (4.20)$$

Номінальний момент:

$$M_n = P_n / \omega_n = 11000 / 152,68 = 72,05 \text{ Н*м}; \quad (4.21)$$

Розрахунок пускового та максимального моменту двигуна:

$$M_p = 2,2 \cdot M_n = 2,2 \cdot 72,05 = 158,5 \text{ Н*м} \quad (4.22)$$

$$M_k = 2,5 \cdot M_n = 2,5 \cdot 72,05 = 180,1 \text{ Н*м} \quad (4.23)$$

4.2 Реалізація моделі в MATLAB/Simulink

Моделювання асинхронного двигуна АИ132М4У3 виконано для трьох варіантів математичного опису: моделі у повних змінних рис. 4.1, моделі у змінних потокозчеплень статора і ротора ψ_s - ψ_r рис.4.2, а також моделі у змінних струму статора і потокозчеплення ротора i_s - ψ_r рис.4.3. Такий підхід дозволяє порівняти вплив вибору змінних стану на результати розрахунку перехідних процесів.

У моделі враховано зміну параметрів роторного кола під впливом ефекту витіснення струму. При пуску двигуна ковзання близьке до одиниці, тому частота струму ротора є найбільшою. За цих умов активний опір ротора збільшується, а індуктивність роторного кола зменшується. Після розгону двигуна ковзання зменшується, і параметри ротора наближаються до номінальних значень.

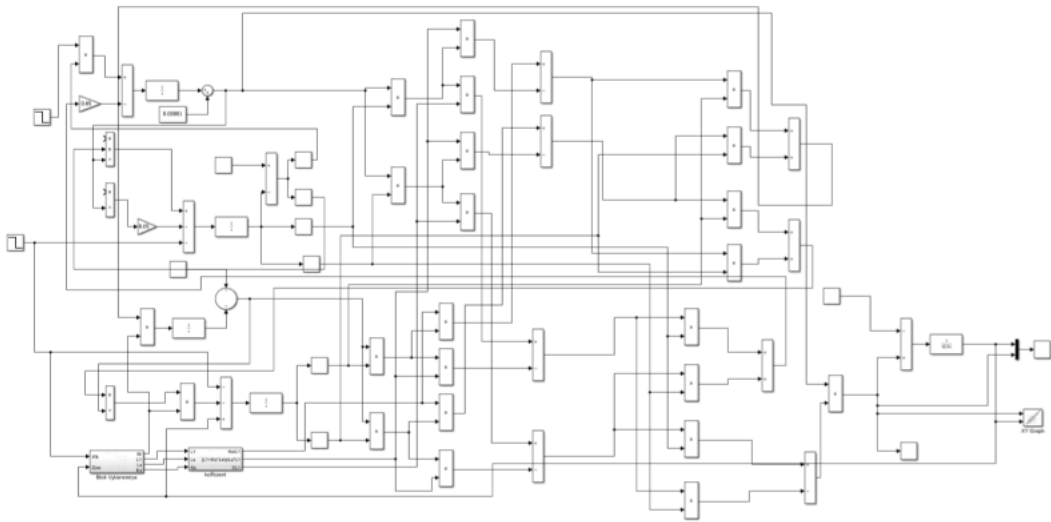


Рисунок 4.1 – Структурна схема математичної моделі асинхронного двигуна у повних змінних з урахуванням ефекту витіснення струму ротора

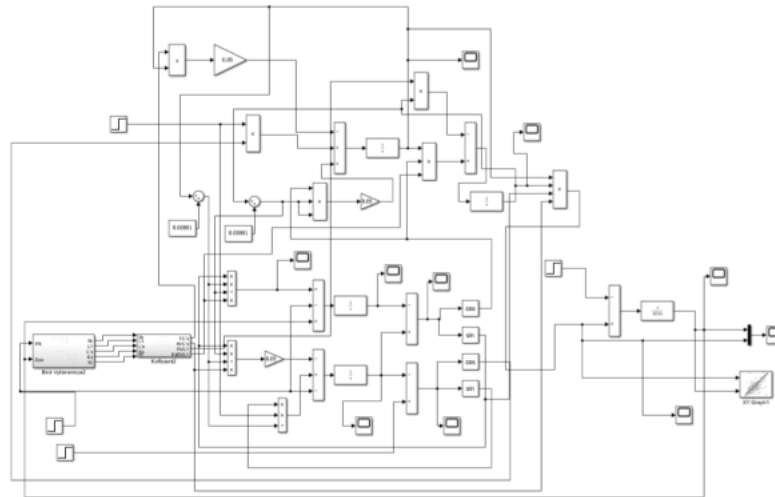


Рисунок 4.2 – Структурна схема математичної моделі асинхронного двигуна у змінних ψ_s – ψ_r з урахуванням ефекту витіснення струму ротора

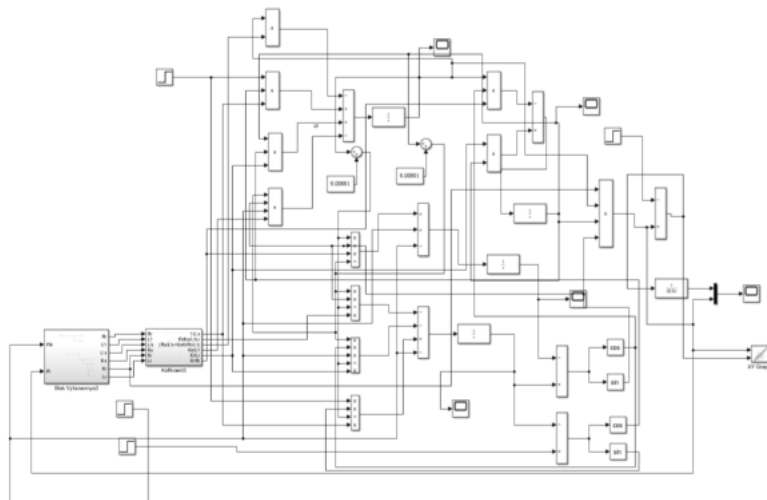


Рисунок 4.3 – Структурна схема математичної моделі асинхронного двигуна у змінних i_s – ψ_r з урахуванням ефекту витіснення струму ротора

4.3 Аналіз графіка швидкості обертання

На рисунках 4.4–4.6 наведено графіки зміни швидкості обертання асинхронного двигуна для трьох варіантів математичної моделі. В усіх випадках двигун розганяється від нульової швидкості до усталеного значення, близького до номінальної швидкості $n_n = 1458$ об/хв.

На початку пуску ковзання двигуна близьке до одиниці, тому частота струму ротора є найбільшою. У цей момент ефект витіснення струму проявляється найсильніше, що призводить до збільшення активного опору роторного кола. Завдяки цьому підвищується пусковий електромагнітний момент і забезпечується розгін двигуна.

Після збільшення швидкості ковзання зменшується, частота струму ротора спадає, а вплив ефекту витіснення поступово послаблюється. У результаті швидкість двигуна наближається до усталеного значення. Отримані графіки підтверджують, що модель коректно відтворює основний характер пускового процесу АД.

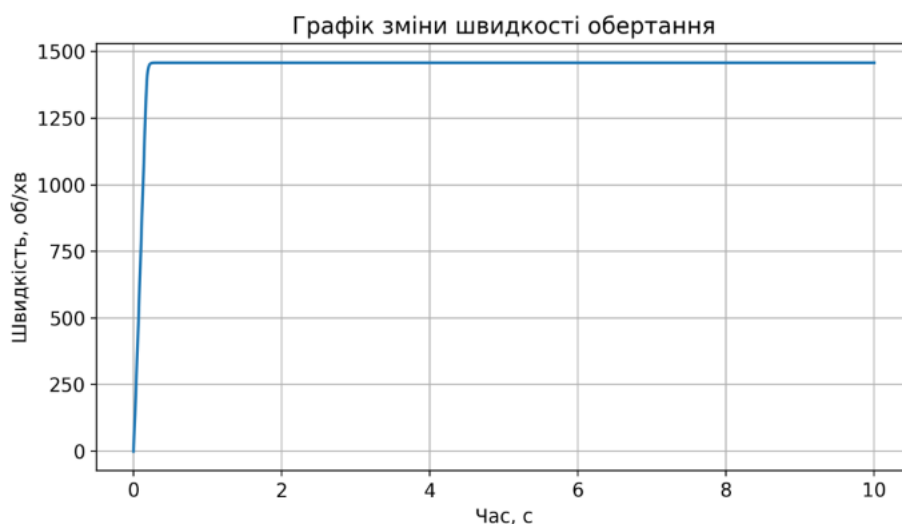


Рисунок 4.4 – Графік зміни швидкості обертання для моделі у повних змінних

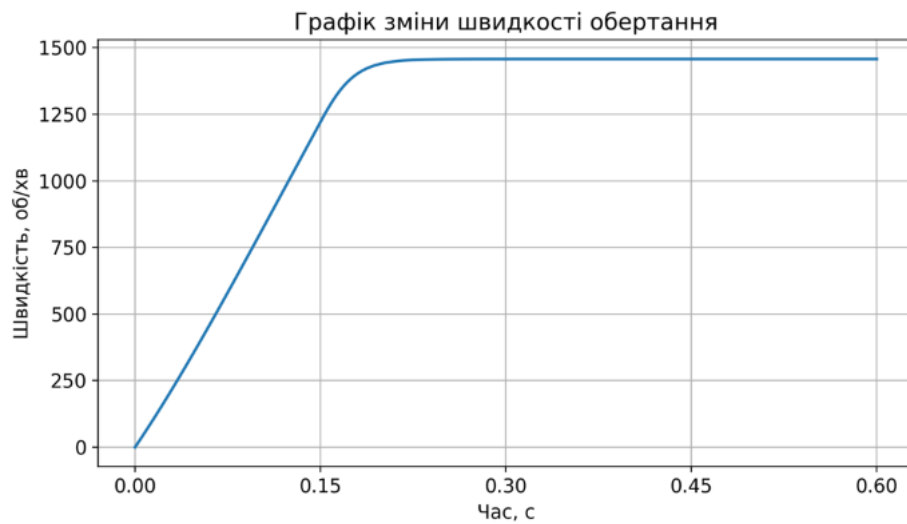


Рисунок 4.5 – Графік зміни швидкості обертання для моделі у змінних ψ_s – ψ_r

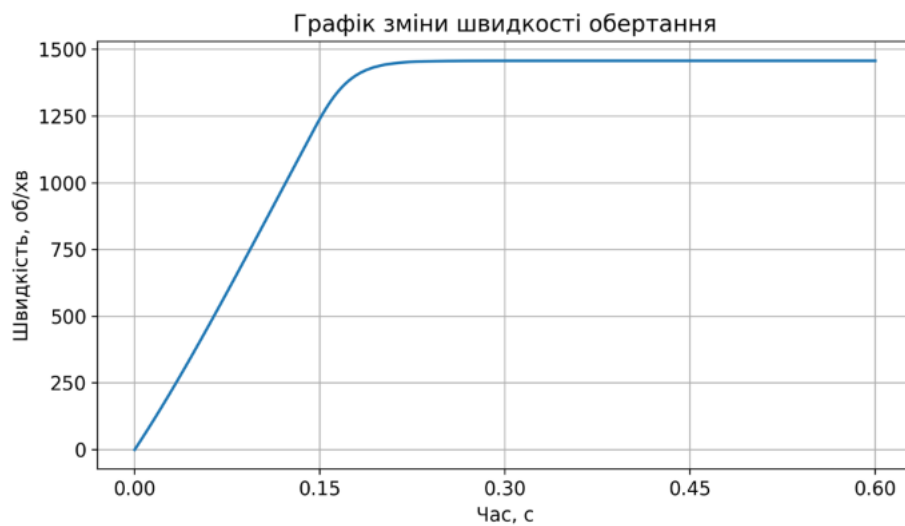


Рисунок 4.6 – Графік зміни швидкості обертання для моделі у змінних i_s – ψ_r

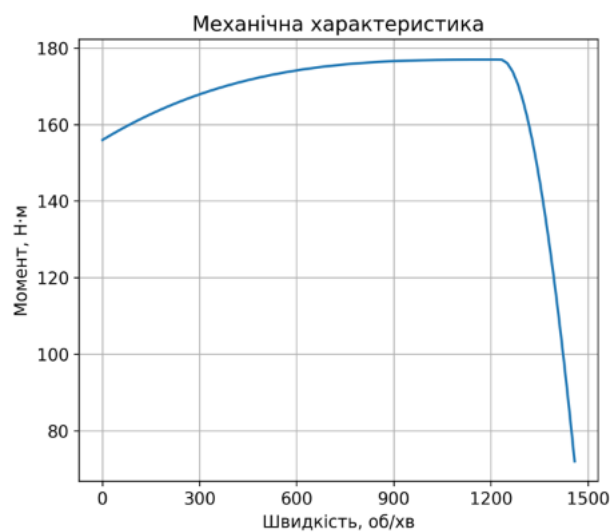


Рисунок 4.7 – Механічна характеристика АД для моделі у повних змінних

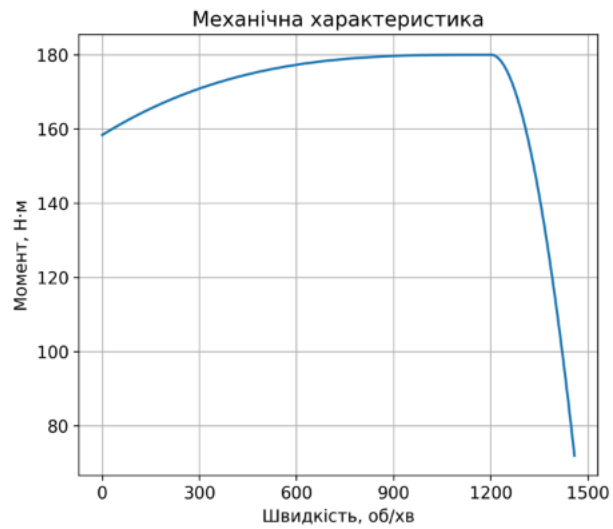


Рисунок 4.8 – Механічна характеристика АД для моделі у змінних $\psi_s - \psi_r$

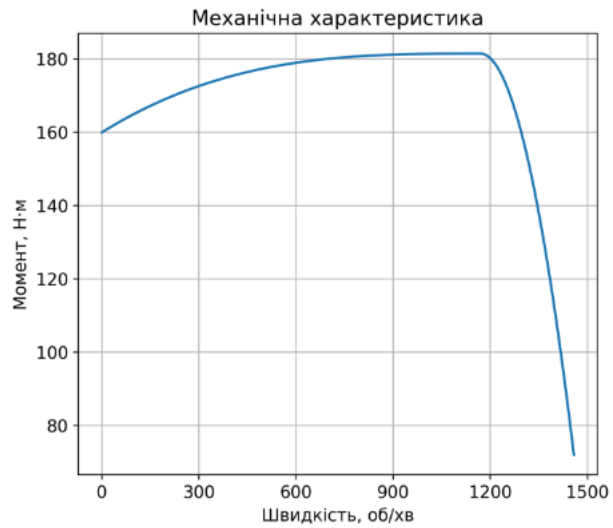


Рисунок 4.9 – Механічна характеристика АД для моделі у змінних $i_s - \psi_r$

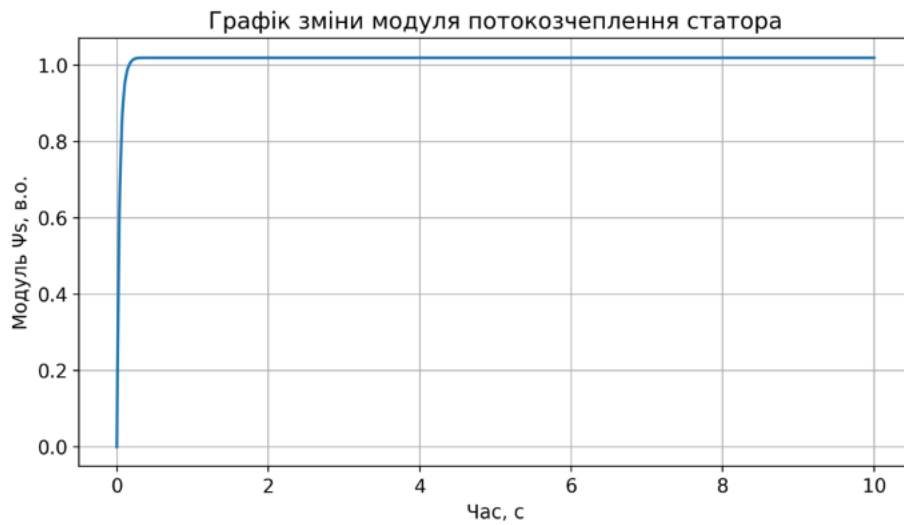


Рисунок 4.10 – Графік зміни модуля потокозчеплення статора для моделі у повних змінних

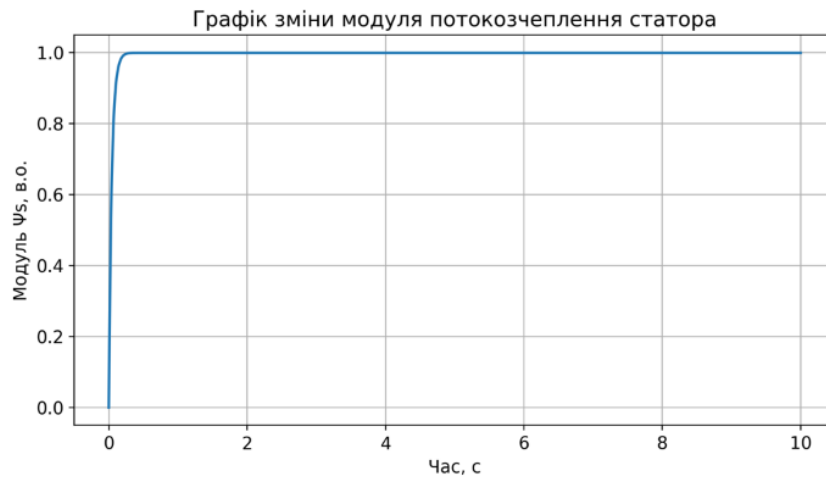


Рисунок 4.11 – Графік зміни модуля потокозчеплення статора для моделі у змінних ψ – φ

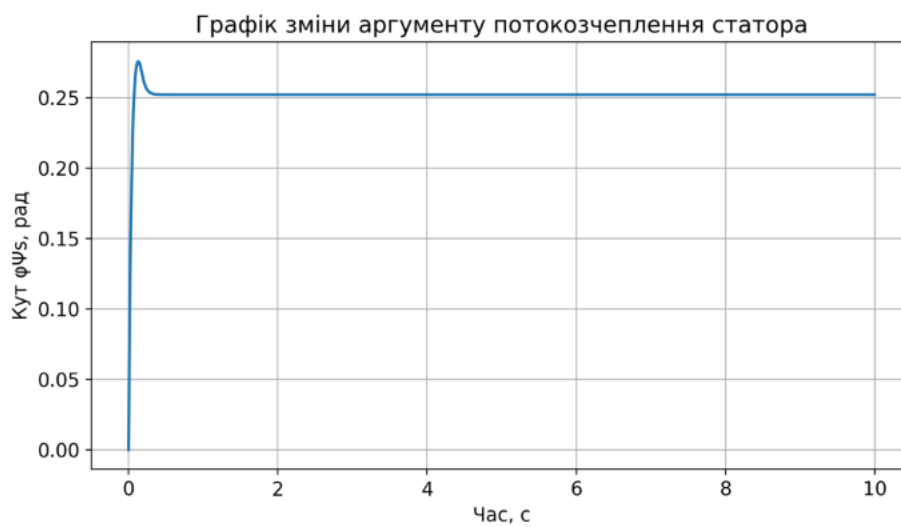


Рисунок 4.12 – Графік зміни аргументу потокозчеплення статора для моделі у повних змінних

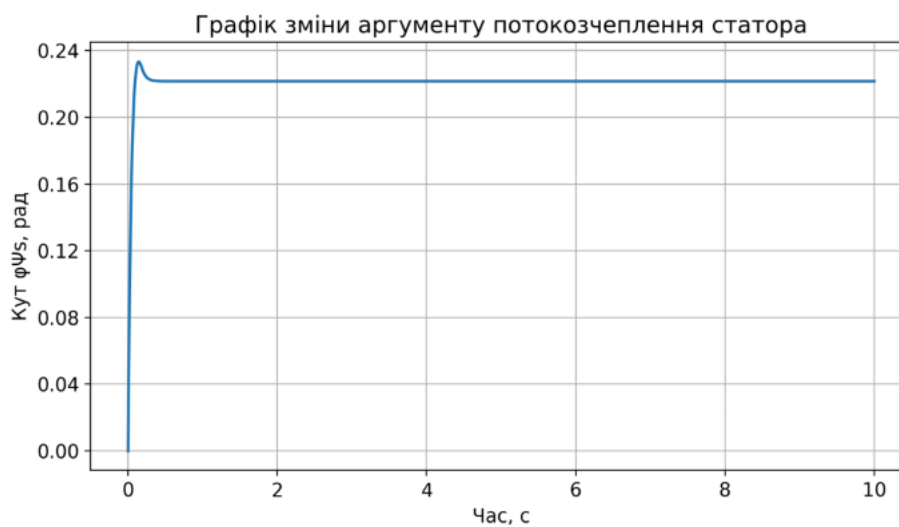


Рисунок 4.13 – Графік зміни аргументу потокозчеплення статора для моделі у змінних

$$\psi_s - \psi_r$$

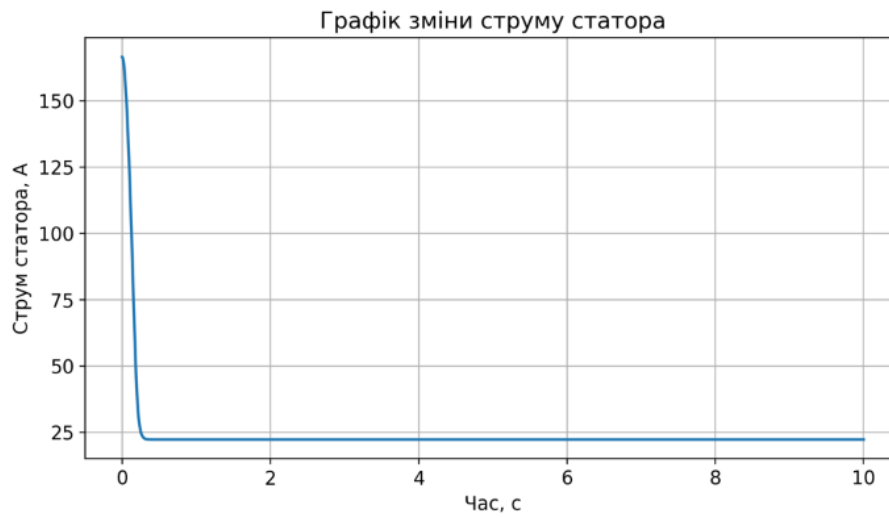


Рисунок 4.14 – Графік зміни аргументу струму статора для моделі у змінних $i_s - \psi_r$

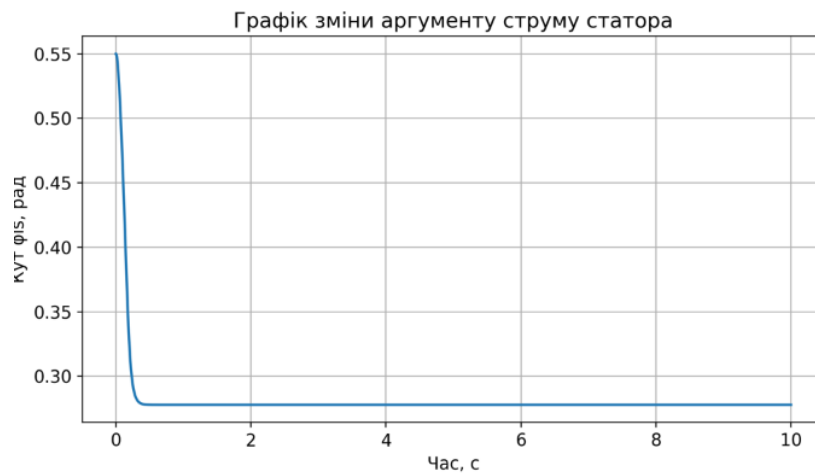


Рисунок 4.15 – Графік зміни модуля потокозчеплення ротора для моделі у повних змінних

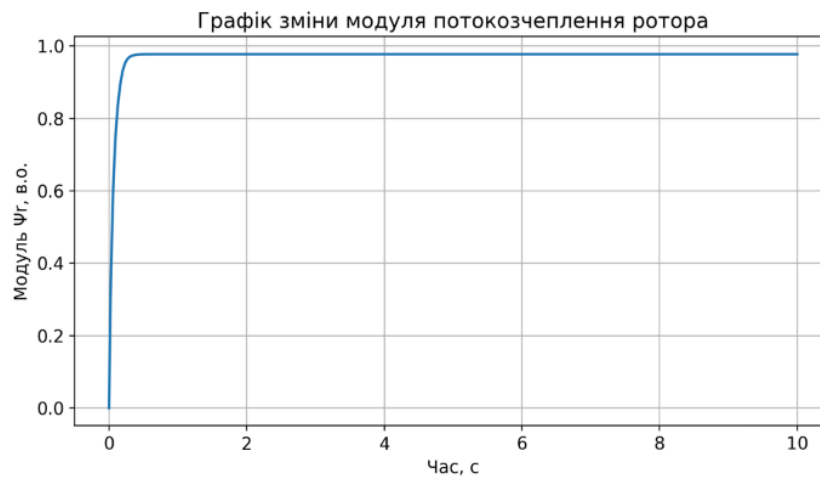


Рисунок 4.16 – Графік зміни модуля потокозчеплення ротора для моделі у повних змінних

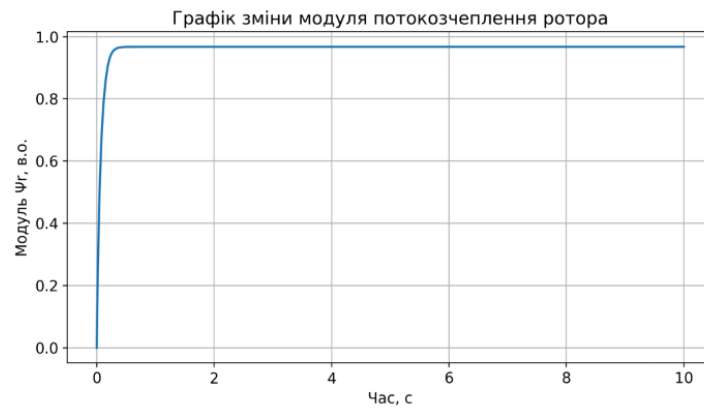


Рисунок 4.17 – Графік зміни модуля потокозчеплення ротора для моделі у змінних ψ_s – ψ_r

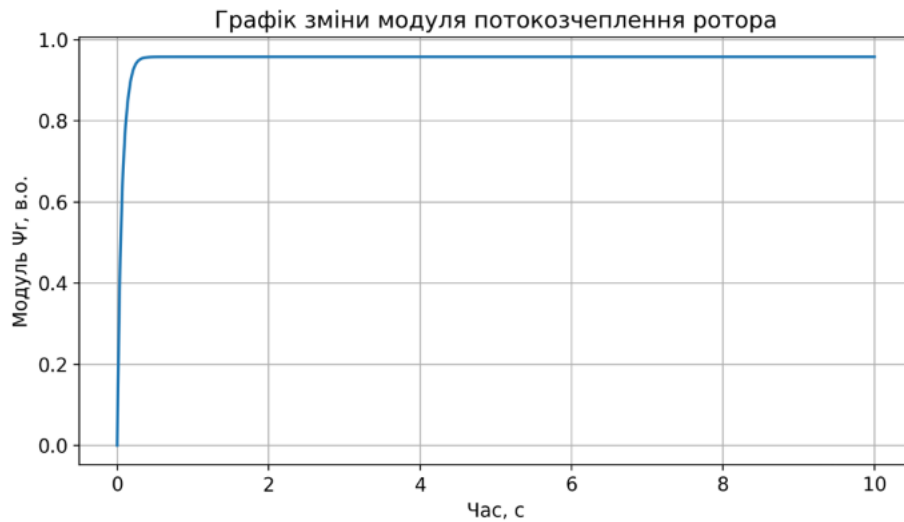


Рисунок 4.18 – Графік зміни модуля потокозчеплення ротора для моделі у змінних i_s – ψ_r

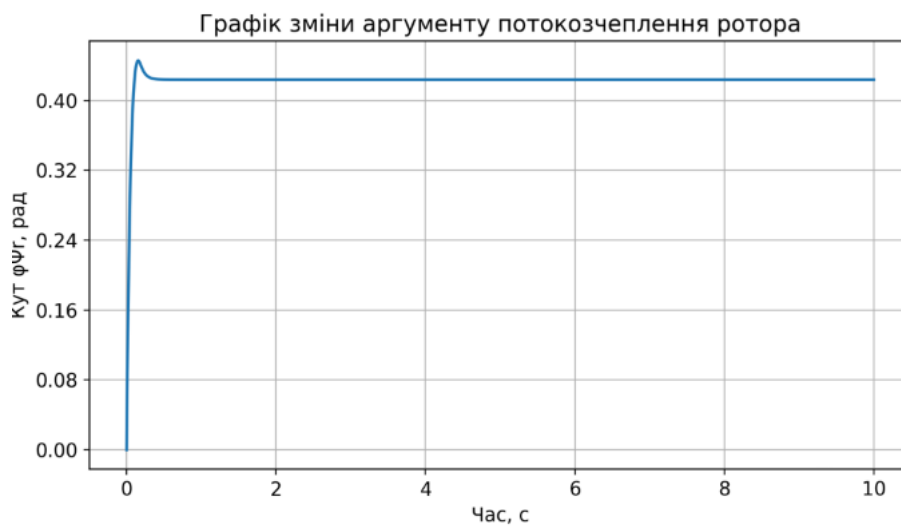


Рисунок 4.19 – Графік зміни аргументу потокозчеплення ротора для моделі у повних змінних

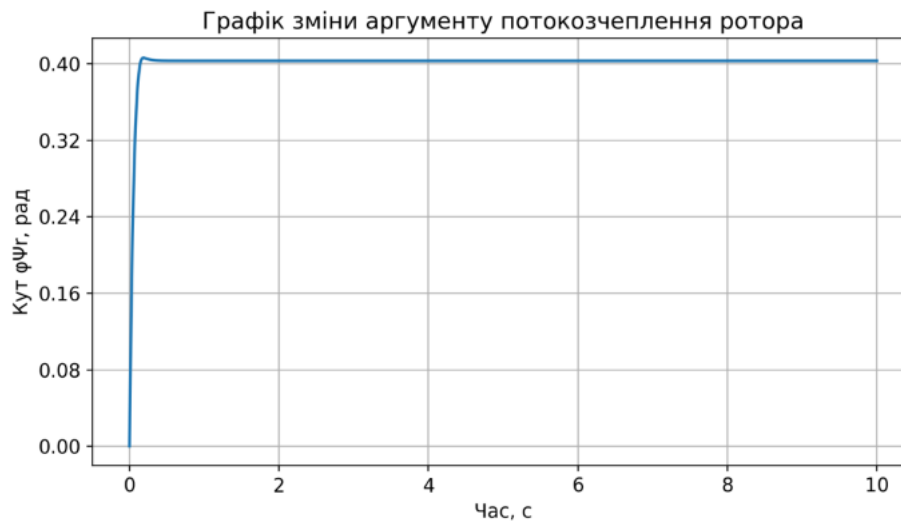


Рисунок 4.20 – Графік зміни аргументу потокозчеплення ротора для моделі у змінних $\psi_s - \psi_r$

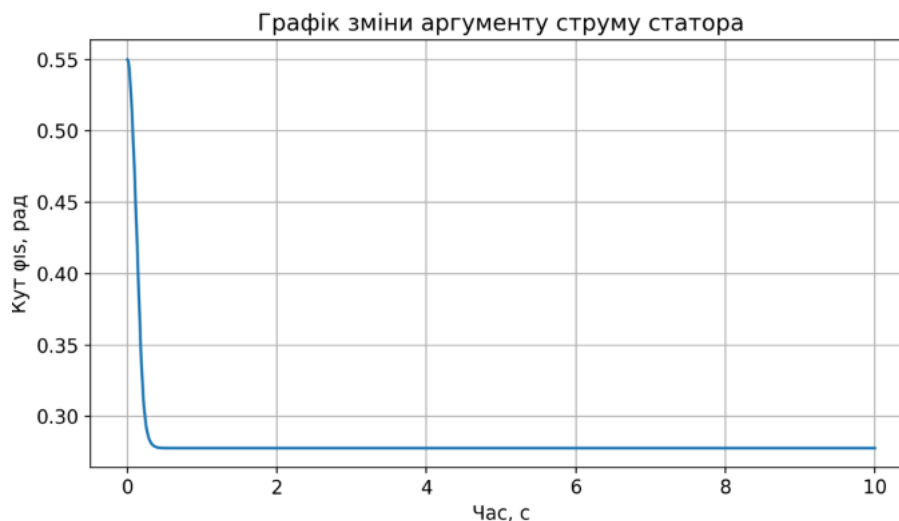


Рисунок 4.21 – Графік зміни аргументу потокозчеплення ротора для моделі у змінних $i_s - \psi_r$

4.4 Аналіз електромагнітного моменту

На рисунках 4.20–4.22 наведено графіки зміни електромагнітного моменту двигуна. У початковий момент пуску електромагнітний момент має підвищене значення, що пояснюється збільшенням активного опору ротора внаслідок ефекту витіснення струму. Це відповідає фізичній природі роботи глибокопазних роторів і роторів із подвійною короткозамкненою кліткою.

У процесі розгону момент змінюється залежно від ковзання. Максимальне значення моменту досягається в області підвищеного ковзання, після чого при наближенні двигуна до номінального режиму електромагнітний момент зменшується до значення, близького до моменту навантаження. Такий характер кривої є типовим для пускового режиму асинхронного двигуна.

Механічна характеристика, наведена на рисунку 4.8, показує залежність електромагнітного моменту від швидкості обертання. У зоні малих швидкостей двигун розвиває значний пусковий момент. При подальшому розгоні момент досягає максимального значення, а потім зменшується до номінального рівня. Це підтверджує, що врахування ефекту витіснення струму дозволяє більш точно описати пускову частину механічної характеристики.

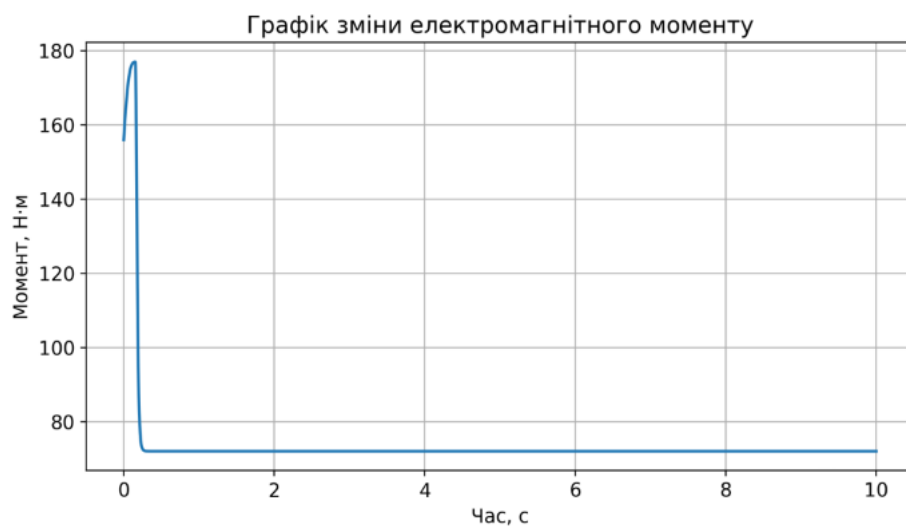


Рисунок 4.21 – Графік зміни електромагнітного моменту для моделі у повних змінних

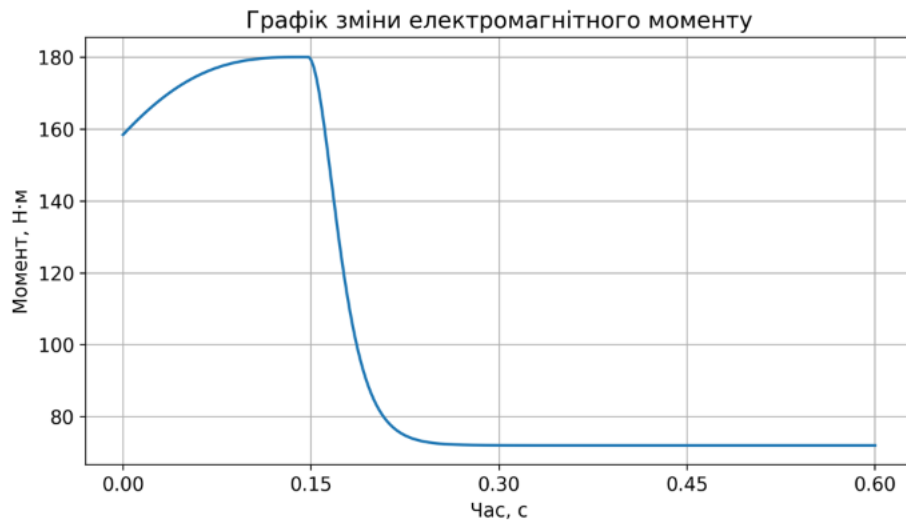


Рисунок 4.22 – Графік зміни електромагнітного моменту для моделі у змінних

$$\psi_s - \psi_r$$

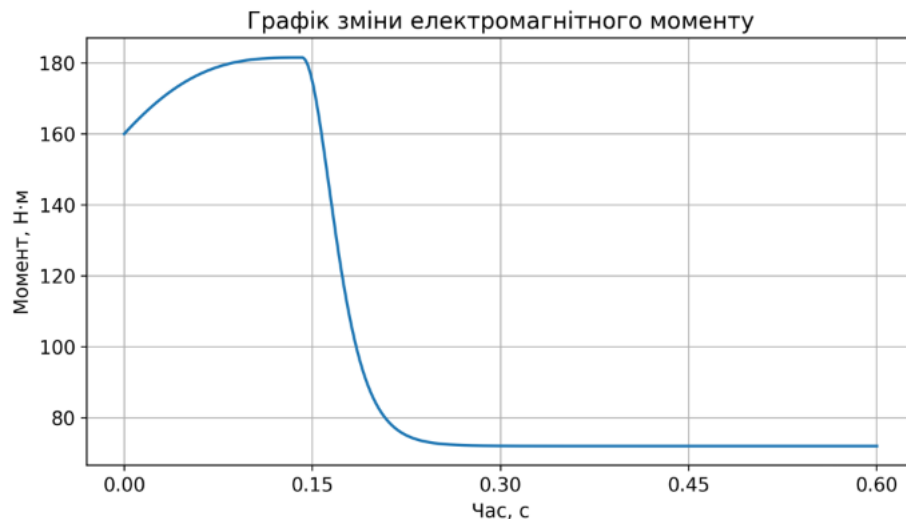


Рисунок 4.23 – Графік зміни електромагнітного моменту для моделі у змінних

$$i_s - \psi_r$$

4.5 Порівняння результатів моделювання з паспортними даними

Для перевірки адекватності моделі результати моделювання порівняно з паспортними характеристиками двигуна АИ132М4У3. Основними параметрами для порівняння обрано номінальну швидкість, пусковий момент, максимальний момент та пусковий струм.

За паспортними даними номінальна швидкість двигуна при ковзанні $S=2,8\%$ становить 1458 об/хв. У всіх трьох варіантах моделі отримано усталене значення швидкості, близьке до цього значення. Це свідчить про

правильне врахування номінального ковзання та механічної частини моделі.

Паспортна кратність пускового моменту становить $M_p/M_n=2,2$, що відповідає пусковому моменту $M_p=158,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Для моделі у повних змінних отримано $156,0 \text{ Н}\cdot\text{м}$, для моделі у змінних $\psi_s - \psi_r$ — $158,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$, а для моделі у змінних $i_s - \Psi_r$ — $160 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Найближчий збіг із паспортним значенням має модель у змінних $\psi_s - \psi_r$.

Паспортна кратність максимального моменту становить $M_k/M_n=2,5$, що відповідає $M_k=180,1 \text{ Н}\cdot\text{м}$. За результатами моделювання максимальний момент становить $177,0 \text{ Н}\cdot\text{м}$ для моделі у повних змінних, $180,1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ для моделі у змінних $\psi_s - \psi_r$ і $181,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$ для моделі у змінних $\psi_s - \psi_r$. Отримані значення добре узгоджуються з каталожними даними.

Таким чином, результати моделювання підтверджують доцільність урахування ефекту витіснення струму ротора при дослідженні пускових режимів АД. Найбільш близькі до паспортних характеристик результати отримано для моделі у змінних $\psi_s - \psi_r$, тому її можна вважати основною для подальшого аналізу двигуна АИ132М4У3.

ВИСНОВОК

У цій дипломній роботі виконано математичне моделювання АД АИ132М4У3 з урахуванням ефекту витіснення струму в роторній обмотці. Розглянуто фізичну природу поверхневого ефекту, його вплив на активний опір та індуктивність роторного кола, а також показано необхідність урахування цього явища під час аналізу пускових режимів асинхронного двигуна.

У роботі сформовано математичний опис АД в полярній системі координат. Розглянуто три варіанти моделі: модель у повних змінних, модель у змінних потокозчеплень статора і ротора Ψ_s - Ψ_r), а також модель у змінних струму статора і потокозчеплення ротора i_s - ψ_r . Такий підхід дозволив порівняти вплив вибору змінних стану на результати моделювання перехідних процесів.

Для двигуна АИ132М4У3 потужністю 11 кВт розраховано основні номінальні та базисні параметри. При номінальному ковзанні $S=2,8\%$ отримано номінальну швидкість 1458) об/хв, номінальний момент 72 Н·м, пусковий момент 158,5 Н·м та максимальний момент 180 Н·м.

Згідно з результатами моделювання отримано графіки зміни швидкості обертання, електромагнітного моменту, механічної характеристики, потокозчеплень та струму статора. Аналіз графіків показав, що під час пуску двигуна ковзання має найбільше значення, тому ефект витіснення струму проявляється найсильніше. У цей момент активний опір ротора збільшується, що сприяє підвищенню пускового електромагнітного моменту та покращує умови розгону двигуна.

Після розгону двигуна ковзання зменшується, частота струму ротора спадає, а вплив ефекту витіснення послаблюється. У результаті параметри роторного кола наближаються до номінальних значень, електромагнітний момент зменшується до рівня, близького до моменту навантаження, а швидкість обертання стабілізується біля номінального значення.

Порівняння результатів моделювання з паспортними даними показало, що найближчі до каталожних характеристик результати отримано для моделі у змінних ψ_s - ψ_r . Для цієї моделі пусковий момент становить 158,5 Н·м, а максимальний момент — 180,1 Н·м, що відповідає паспортним кратностям $M_p/M_n=2,2$ та $M_k/M_n=2,5$. Модель у повних змінних дала дещо нижчі значення моменту, а модель у змінних i_s - Ψ_r —

незначно вищі, однак усі отримані результати залишаються близькими до паспортних характеристик двигуна.

Отже, урахування ефекту витіснення струму ротора дозволяє точніше описати пускові процеси асинхронного двигуна, особливо в області великих значень ковзання. Розроблена модель може бути використана для аналізу перехідних процесів, оцінювання пускового моменту, побудови механічних характеристик та дослідження впливу параметрів роторного кола на роботу АД.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Проектування електричних машин : навч. посіб. / Д. В. Ципленков, Ю. В. Куваєв, О. Б. Іванов, О. В. Бобров ; за ред. Ф. П. Шкрабця. Дніпро : НТУ «ДП», 2018. 390 с.
2. Міліх В. І. Проектування трифазних асинхронних двигунів з короткозамкненою обмоткою ротора : навч. посіб. Харків : НТУ «ХП», 2009. 99 с.
3. Основи автоматизованого проектування електричних машин : конспект лекцій для студентів напряму підготовки 6.050702 «Електромеханіка». Київ : НТУУ «КП», 2012. 175 с.
4. Копылов И. П., Горяинов Ф. А., Клоков Б. К. и др. Проектирование электрических машин / под ред. И. П. Копылова. Москва : Энергия, 1980. 486 с.
5. Васьковський Ю. М. Математичне моделювання електромеханічних перетворювачів енергії : навч. посіб. Київ : НТУУ «КП», ФЕА, 2003. 164 с.
6. Васьковський Ю. М. Польовий аналіз електричних машин : навч. посіб. Київ : НТУУ «КП», ВПІ ВПК «Політехніка», 2007. 191 с.
7. Васьковський Ю. М., Гераскін О. А. Математичне моделювання електромеханічних перетворювачів енергії : методичні вказівки до виконання комп'ютерних практикумів. Київ : НТУУ «КП», ФЕА, 2016. 86 с.
8. Електричні машини. Проектування асинхронних машин : метод. вказівки до виконання курсового проекту / уклад.: П. Г. Плешков, Н. Ю. Гарасьова, О. А. Козловський. Кропивницький : ЦНТУ, 2019. 125 с.
9. Асинхронные двигатели серии 4А : справочник / А. Э. Кравчик, М. М. Шлаф, В. И. Афонин, Е. А. Соболенская. Москва : Энергоатомиздат, 1982. 504 с.
10. Boldea I., Nasar S. A. Electric Drives. 2nd ed. Boca Raton : CRC Press, 1998. 432 p.
11. Jain S. K., Sharma F., Baliwal M. K. Modeling and Simulation of an Induction Motor. International Journal of Engineering Research and Development. 2014. Vol. 10, Issue 4. P. 57–61.
12. Azab M. A Review of Recent Trends in High-Efficiency Induction Motor Drives. Vehicles. 2025. Vol. 7, No. 1. Article 15. DOI: 10.3390/vehicles7010015.

13. Wang Q., Sun X., Zhu Z. Q. Analysis of Rotor Skin Effect in Induction Machines under Dynamic Operating Conditions. IEEE Transactions on Energy Conversion. 2021. Vol. 36, No. 4. P. 3105–3114. DOI: 10.1109/TEC.2021.3071874.
14. Liu H., Xu L., Ismail N. Improved dq Modeling of Induction Machines Considering Rotor Parameter Variations. Energies. 2020. Vol. 13, No. 18. Article 4762. DOI: 10.3390/en13184762.
15. Choudhury A., Pillay P. Investigation of Rotor Bar Skin Effect on Induction Motor Performance. IEEE Transactions on Industry Applications. 2019. Vol. 55, No. 5. P. 4878–4886. DOI: 10.1109/TIA.2019.2917613.
16. Kotsur M., Yarymbash D. Determination of Induction Motor Parameters by Electromagnetic Field Simulation. IEEE Problems of Automated Electrodrive. 2020. P. 1–4. DOI: 10.1109/PAEP49887.2020.9240811.
17. Дудкін М. Є., Дюженкова О. Ю., Степахо І. В. Вища математика : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 449 с.
18. Simulink Documentation. MathWorks. URL: <https://www.mathworks.com/help/simulink/>
19. Асинхронные двигатели серии 4А : справочник / А. Э. Кравчик, М. М. Шлаф, В. И. Афонин, Е. А. Соболенская. Москва : Энергоатомиздат, 1982. 504 с.
20. Simulink Documentation. MathWorks. URL: <https://www.mathworks.com/help/simulink/index.html>
21. Двигун АІР132М4 11 кВт 1500 об/хв : технічні характеристики. ElMotor. URL: <https://www.elmotor.com.ua/uk/elektrodiviguni/tryfazni/air132m4/>