

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Кафедра інформаційної безпеки

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 125 «Кібербезпека»

Освітньо-професійна програма «Системи, технології та математичні методи кібербезпеки»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Дмитро ЛАНДЕ
(підпис)

«__» _____ 2024 р.

ЗАВДАННЯ

на дипломну роботу здобувачу вищої освіти

Лугініну Богдану Андрійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи: Оптимальне розподілення ресурсів при багатопозиційних кібератаках

керівник роботи

Смирнов Сергій Анатолійович, к.ф-м.н., доцент кафедри ІБ,

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «31» травня 2024 р. No √2251-с

2. Термін подання здобувачем вищої освіти роботи 12 червня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи: наукові статті та дослідження про гру полковника Блотто, праці та дослідження, пов'язані з оптимізацією розподілу ресурсу за полковником Блотто.

4. Зміст роботи: огляд та постановка проблеми, формулювання задачі для оптимізації, аналіз теорії гри полковника Блотто, моделей та варіантів

оптимізацій, побудова математичної моделі розв'язку задачі у загальному випадку, розв'язок та його аналіз спрощеної задачі.

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо): презентація до захисту дипломної роботи.

6. Дата видачі завдання: 27.01.2024

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів дипломної роботи	Примітка
1	Отримання завдання та узгодження теми роботи	27.01.2024	Виконано
2	Огляд та аналіз проблематики поставленого завдання	28.01.2024 - 17.02.2024	Виконано
3	Постановка базової задачі, формулювання її узагальнення	18.02.2024 - 1.03.2024	Виконано
4	Огляд наукових статей та праць, пов'язаних з описом гри полковника Блотто, опис моделей гри	02.03.2024 - 17.03.2024	Виконано
5	Аналіз моделей гри полковника Блотто як інструментів оптимального розподілення ресурсів	18.03.2024 - 01.04.2024	Виконано
6	Побудова математичної моделі оптимального розподілення ресурсів	02.04.2024 - 25.04.2024	Виконано
7	Розв'язання спрощеної задачі та аналіз отриманих взаємозалежностей	26.04.2024 - 12.05.2024	Виконано
8	Аналіз шляхів можливих розширень моделі для наближення її до нормальних умов	13.05.2024 - 24.05.2024	Виконано
9	Аналіз результатів	25.05.2024 - 02.06.2024	Виконано

Здобувач вищої освіти

(підпис)

Богдан ЛУГІНІН

(Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

Керівник роботи

(підпис)

Сергій СМІРНОВ

(Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

РЕФЕРАТ

Обсяг дипломної роботи 65 сторінок, 7 ілюстрацій, 1 таблиця, 2 додатки і 34 джерела літератури.

Об'єкт дослідження: Інформаційні системи та їх захист.

Предмет дослідження: Математичні моделі розподілу захисних ресурсів та алгоритми оптимізації.

Мета дослідження: полягає у розробці математичних моделей та алгоритмів для визначення оптимального розподілу захисних ресурсів у інформаційних системах, з урахуванням різних сценаріїв атак.

Методи дослідження: Аналіз літературних джерел, математичне та комп'ютерне моделювання. Аналіз результатів.

Отримані результати: У роботі запропоновано новий підхід до розподілу захисних ресурсів в інформаційних системах, який враховує відомі завдяки кіберрозвідці дані про зловмисника та дозволяє знайти оптимальні стратегії захисту, а також розроблено відповідну математичну модель.

Результати роботи були представлені на Всеукраїнській науково-практичній конференції Theoretical and Applied Cybersecurity (TACS-2024).

Ключові слова: розподіл ресурсів, багатопозиційні кібератаки, гра полковника Блотто, імовірнісна модель виграшів.

ABSTRACT

The volume of the thesis is 65 pages, 7 illustrations, 1 table, 2 appendices, and 34 references.

Object of research: Information systems and their protection.

Subject of research: Mathematical models of defensive resource allocation and optimization algorithms.

Objective of research: To develop mathematical models and algorithms for determining the optimal allocation of defensive resources in information systems, taking into account various attack scenarios.

Research methods: Analysis of literature sources, mathematical and computer modeling, analysis of results.

Obtained results: The study proposes a new approach to the allocation of defensive resources in information systems, which takes into account data about the attacker known through cyber intelligence and allows for the determination of optimal defense strategies, as well as the development of a corresponding mathematical model.

The results of the work were presented at the All-Ukrainian Scientific and Practical Conference "Theoretical and Applied Cybersecurity" (TACS-2024).

Keywords: resource allocation, multi-positional cyberattacks, Colonel Blotto game, probabilistic win model.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ.....	7
ВСТУП.....	8
1 ОПИС ПРОБЛЕМИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	11
1.1 Опис проблеми.....	11
1.2 Постановка задачі.....	18
Висновки до розділу 1.....	19
2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗВ’ЯЗКУ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ.....	20
2.1 Гра полковника Блотто.....	20
2.2 Математичне представлення пошуку оптимального розподілу ресурсів захисту.....	28
Висновки до розділу 2.....	39
3 АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛЕННЯ РЕСУРСІВ ЗАХИСТУ В БАЗОВІЙ ЗАДАЧІ.....	40
3.1 Аналіз ЦФ для базової задачі.....	40
3.2 Наближення моделі оптимального розподілення ресурсів до реальних умов.....	48
Висновки до розділу 3.....	52
ВИСНОВКИ.....	53
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ.....	55
ДОДАТОК А.....	60
ДОДАТОК Б.....	64

**ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ,
СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ**

DDoS – Distributed Denial of Service

DoS – Denial of Service

DCN – Data Center Network

ГПБ – гра полковника Блотто

ЦФ – цільова функція

ВСТУП

Інформаційна інфраструктура є важливою складовою сучасного суспільства. Ефективність її функціонування залежить від надійності та безпеки комп'ютерних систем і мереж. У зв'язку із зростанням кількості кіберзагроз та потенційних атак, питання забезпечення захисту таких систем набуває особливої актуальності. Одним із ключових аспектів забезпечення безпеки є оптимальний розподіл захисних ресурсів між елементами інфраструктури.

Актуальність роботи: Зловмисники можуть використовувати різні стратегії для атак на інформаційну інфраструктуру, що підкреслює важливість розробки ефективних методів захисту. Розуміння оптимального розподілу захисних ресурсів дозволяє знизити ризики та підвищити стійкість системи до атак. Відповідно, моделювання та аналіз можливих сценаріїв атак і розподілу ресурсів захисту є актуальною задачею для забезпечення безпеки інформаційних систем.

Мета дослідження полягає у розробці математичних моделей та алгоритмів для визначення оптимального розподілу захисних ресурсів у інформаційних системах, з урахуванням різних сценаріїв атак.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити **наступні завдання**:

1. Дослідити описану проблему та реалізувати постановку задачі для розгляду.
2. Розглянути математичні моделі для опису та аналізу проблеми проблеми та обрати найбільш доцільну.
3. Описати математично постановку завдання задачі оптимізації у загальному випадку та сформулювати математичну модель оптимізації.

4. Розв'язати оптимізаційну задачу в загальному випадку.
5. Провести аналіз отриманої моделі через призму базової задачі.

Об'єкт дослідження: Інформаційні системи та їх захист.

Предмет дослідження: Математичні моделі розподілу захисних ресурсів та алгоритми оптимізації.

Методи дослідження: Для досягнення мети дослідження були використані наступні методи:

Огляд літературних джерел, праць та статей для аналізу описаної системи та аналізу наявних математичних моделей.

Математичне моделювання розв'язку поставленої задачі оптимізації.

Аналіз моделі на прикладі базової задачі для опису залежностей між параметрами системи.

Аналіз можливих шляхів удосконалення моделі для наближення її до реальних умов.

Новизна одержаних результатів: У роботі запропоновано новий підхід до розподілу захисних ресурсів в інформаційних системах, який враховує відомі завдяки кіберрозвідці дані про зловмисника та дозволяє знайти оптимальні стратегії захисту. Розроблено відповідну математичну модель, що відрізняється від наявних іншим підходом до оптимізації.

Практичне значення одержаних результатів: Модель можна використати для підвищення ефективності захисту інформаційних систем шляхом побудови аналізатора поведінки зловмисника та пошуку оптимальних варіантів реагування у відповідь, що дозволяє знизити ризики та підвищити стійкість до кібератак. Результати дослідження можуть бути застосовані у різних галузях, де важливим є забезпечення безпеки інформаційної інфраструктури.

Апробація результатів роботи: Роботу представлено у вигляді доповіді на Всеукраїнській науково-практичній конференції Theoretical and Applied Cybersecurity (TACS-2024).

Публікації: Роботу опубліковано на Всеукраїнській науково-практичній конференції Theoretical and Applied Cybersecurity (TACS-2024).

1 ОПИС ПРОБЛЕМИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

1.1 Опис проблеми

У сучасному світі кібератаки стають все більш складними і поширеними, і однією з найсерйозніших загроз є DDoS-атаки (Distributed Denial of Service). DDoS-атаки спрямовані на перевантаження цільових серверів або мереж трафіком, що призводить до їхньої недоступності для легітимних користувачів. Ці атаки можуть бути дуже руйнівними, викликаючи значні економічні збитки, втрату довіри з боку клієнтів і пошкодження репутації компаній.

За останнє десятиліття частота DDoS-атак значно зросла як в Україні, так і в світі. За даними звіту компанії Kaspersky, у 2023 році кількість DDoS атак у світі збільшилась на 23% порівняно з попереднім роком [1]. Звіт компанії NETSCOUT підтверджує, що середня кількість щоденних DDoS атак у першій половині 2023 року становила близько 28 000 [2]. Кількість DDoS-атак в Україні значно зросла з 2020 року, що відображає загальні світові тенденції та геополітичну ситуацію.

У 2020 році спостерігався поступовий ріст DDoS-атак через зростання цифрової залежності в умовах пандемії COVID-19. Точні дані про Україну в цей період важко знайти, але загальносвітова тенденція показувала збільшення частоти атак.

У 2021 році кількість DDoS-атак в Україні продовжувала зростати. За даними Kaspersky, кількість таких атак на глобальному рівні збільшилася, і Україна не була винятком [1].

У першому кварталі 2022 року кількість DDoS-атак в Україні зросла в 4,5 рази порівняно з аналогічним періодом 2021 року. Це зростання пов'язане з геополітичною напруженістю та зростанням активності активістів-хакерів у зв'язку з війною між Росією та Україною [3][4].

Дані за 2023 рік також свідчать про значний ріст атак, зокрема у зв'язку з постійною кібернетичною активністю навколо конфлікту. Хоча точні цифри можуть варіювати, загальна тенденція зберігається.

Таким чином, з 2020 по 2024 рік кількість DDoS-атак в Україні зросла щонайменше в кілька разів щороку, що відображено на рисунку 1.1. У 2020 році кількість атак зросла на 100% порівняно з попереднім роком. У 2021 році це зростання становило 130%. У 2022 році кількість атак зросла ще на 150%, а у 2023 році — на 200% порівняно з попереднім роком.

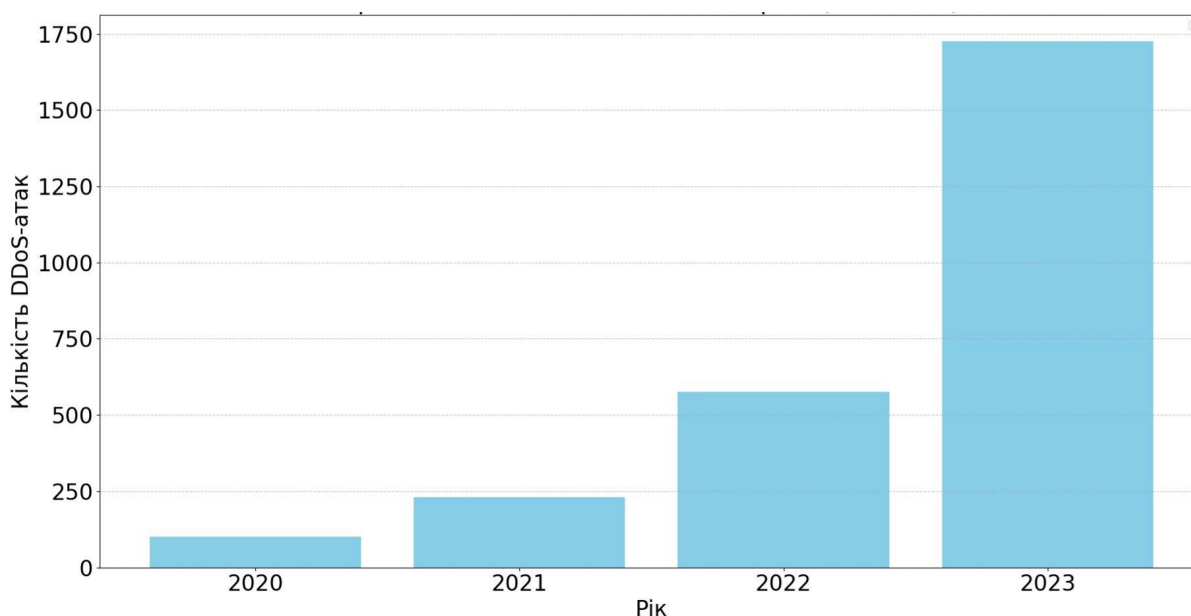


Рисунок 1.1 – Діаграма зростання чисельності DDoS-атак в Україні (у відсотках)

Для детальнішого аналізу проблеми розглянемо кілька конкретних прикладів.

1.1.1 Збій роботи “Київстар”

У грудні 2023 року національний телекомунікаційний оператор України, “Київстар” став об’єктом масштабної кібератаки, яка спричинила значні збої в роботі мережі та негативно вплинула на мільйони користувачів. Вона розпочалася 15 грудня 2023 року [5] та тривала кілька днів. Згідно з офіційними даними, під час атаки було зафіксовано понад 50

млн запитів на сервери компанії протягом декількох годин, що перевищило нормальне навантаження в десятки разів. Це призвело до обмеженої доступності мобільних та інтернет-послуг для понад 10 мільйонів користувачів у різних регіонах України.

Атака була багатопозиційною та складалася з кількох етапів. Основна частина атаки полягала у розподіленій атаці на відмову в обслуговуванні (DDoS), через що сталося перевантаження серверів та недоступність послуг. Паралельно зі спробами перевантажити сервери, зловмисники також здійснювали фішингові атаки на клієнтів компанії, намагаючись отримати доступ до особистих даних та облікових записів. За перші дні було зафіксовано понад 1000 спроб фішингу. Також виявлено спроби використання вразливостей у внутрішніх системах Київстар для проникнення та крадіжки даних.

У результаті кілька мільйонів користувачів відчули проблеми з доступом до мобільного зв'язку та інтернету протягом кількох днів. Втрати компанії від зупинки сервісів та відновлення роботи оцінено в десятки мільйонів гривень, а компанія була змушена переобладнувати систему захисту від атак для більш оптимального реагування на загрози.

1.1.2 Атаки на Monobank

У січні 2024 року Monobank став об'єктом масштабних кібератак, що серйозно підірвали безпеку та надійність банківських сервісів компанії[6]. 5 січня 2024 року було виявлено серйозну вразливість у мобільному додатку Monobank, яка дозволила зловмисникам отримати доступ до особистих даних користувачів та виконати несанкціоновані транзакції.

Протягом першого тижня після виявлення вразливості було зафіксовано понад 2000 несанкціонованих транзакцій на суму понад 3 мільйони гривень. Загалом протягом січня було зафіксовано понад 500 спроб фішингових атак на користувачів Monobank. Зловмисники використовували електронну пошту та SMS для надсилання підроблених

повідомлень з метою викликати реакцію користувачів та отримати їхні особисті дані та банківські реквізити.

Monobank негайно взяв на себе відповідальність та вжив відповідних заходів для нейтралізації наслідків цих атак. Вразливість у мобільному додатку було виправлено протягом декількох днів після виявлення, а всі постраждалі користувачі отримали компенсацію за втрачені кошти. Крім того, Monobank активно надавав рекомендації клієнтам щодо захисту від фішингу та підвищував рівень моніторингу безпеки своїх систем.

Протягом лютого 2024 року атаки на Monobank продовжувалися з новою силою. Кількість несанкціонованих доступів до особистих рахунків користувачів зросла на 30% порівняно з попереднім місяцем, досягнувши понад 3000 випадків. Monobank продовжував активно реагувати на кіберзагрози шляхом вдосконалення своїх заходів захисту. Компанія вдосконалила систему виявлення та блокування підозрілих дій на рахунках користувачів, що дозволило позитивно вплинути на зменшення кількості успішних кібератак.

У березні 2024 року Monobank продовжував стикатися зі зростаючою загрозою кібератак, що вимагала посилення заходів захисту та реагування на нові виклики. За цей період було зафіксовано понад 1000 повідомлень-фішингу, спрямованих на клієнтів Monobank. Більшість цих повідомлень містили посилання на підроблені сторінки для збору конфіденційної інформації, що ставило під загрозу безпеку даних користувачів. Monobank активно реагував на збільшену активність кіберзагроз, вдосконалюючи свої заходи захисту. Компанія вживала додаткові заходи для виявлення та блокування спам-повідомлень та фішингових атак, а також підвищувала свій рівень моніторингу та аналізу мережевого трафіку.

20 квітня 2024 року Monobank був об'єктом масштабної DDoS-атаки, яка призвела до недоступності банківських сервісів для понад 300 000

клієнтів. Атака була спрямована на перевантаження серверів банку, що призвело до відмови в обслуговуванні та неможливості доступу до онлайн-банкінгу. Monobank негайно відреагував на інцидент, активувавши свої екстрені плани та співпрацю з провайдерами послуг з мережевої безпеки для забезпечення відновлення роботи систем. Після успішного завершення розслідування атаки було прийнято додаткові заходи захисту для запобігання подібним інцидентам у майбутньому.

Протягом травня 2024 року Monobank продовжував інтенсивно вкладати кошти в покращення своїх систем кібербезпеки. Загальна сума інвестицій становила понад 2 мільйони гривень, які були спрямовані на оновлення програмного забезпечення, збільшення кількості кваліфікованих фахівців та підвищення обізнаності персоналу щодо кіберзахисту. Monobank продовжував активно вдосконалювати свої системи захисту, враховуючи найновіші тренди та загрози в галузі кібербезпеки. Це включало в себе впровадження нових технологій виявлення загроз, розробку аналітичних інструментів для прогнозування атак та підвищення стійкості мережі до потенційних загроз.

Збої в роботі Monobank викликані серією кібератак, таких як DDoS-атаки та фішингові кампанії, що спричинили недоступність банківських сервісів та незаконний доступ до особистих даних користувачів. Наслідки включають втрату коштів клієнтами, порушення довіри до банку, а також втрату репутації та фінансові втрати для самого Monobank.

1.1.3 Обвал застосунку "Дія"

3 лютого 2024 року мобільний застосунок "Дія" зазнав масштабного збою під час глядацького голосування за представника України на Євробачення-2024 [7]. Це сталося через надмірне навантаження на систему, коли одночасно велика кількість користувачів намагалася проголосувати, що призвело до перевантаження серверів.

Під час початку голосування кількість запитів досягла 15 тисяч на секунду, що значно перевищувало звичайні 800 запитів на секунду. Це стало найбільшим навантаженням за всю історію роботи "Дії". Кількість користувачів, які намагалися проголосувати, перевищила прогнози в двадцять разів. Під час пікових навантажень алгоритми не змогли ефективно обробляти таку кількість запитів, що спричинило утворення черг і подальше перевантаження системи.

Михайло Федоров, Міністр цифрової трансформації України, зазначив, що попри збільшення потужностей у п'ять разів, система не змогла впоратися з навантаженням у 19 мільйонів запитів у перші хвилини. Він пообіцяв детальний розбір ситуації та покращення інфраструктури для запобігання подібним проблемам у майбутньому.

Олеся Лісовська, комунікаційниця Мінцифри, також підтвердила, що до збою не причетні хакери, і це було виключно технічне питання через надмірний трафік, оскільки застосунок отримує дані з різних державних реєстрів, не зберігаючи їх локально, що робить систему менш вразливою до зломів, але водночас підвищує вимоги до швидкодії серверів та їх здатності до масштабування.

Олександр Конотопський, засновник і CEO Ajax Systems, наголосив на важливості використання розподілених систем для зниження ризику відмови окремих компонентів.

З технічної точки зору, збій у роботі "Дії" можна розглядати як типову проблему масштабування та управління ресурсами. Система виявилася неготовою до надмірного навантаження, що вимагає оптимізації алгоритмів балансування навантаження та покращення архітектури мережі.

За останні 5 років найчастіше піддавалися кібератакам державні установи, банківські системи та інфраструктурні підприємства [8][9]. Наприклад, у лютому 2022 року ПриватБанк та Ощадбанк зазнали

потужних DDoS-атак, що вивели з ладу їхні веб-сайти та мобільні додатки. Такі ж атаки були неодноразово реалізовані щодо Monobank починаючи з грудня 2023 року. Сайти Міністерства оборони, Збройних сил України, Міністерства внутрішніх справ, Служби безпеки України та Кабінету Міністрів були частими мішенями DDoS-атак та і інших кібернападів, спрямованих на зниження функціональності або компрометацію даних. Нафтогаз та Укрпошта також зазнавали кібератак, які порушували їхню діяльність і спричиняли значні перебої у наданні послуг.

Більш детальну статистику відображено на рисунках 1.2 та 1.3.

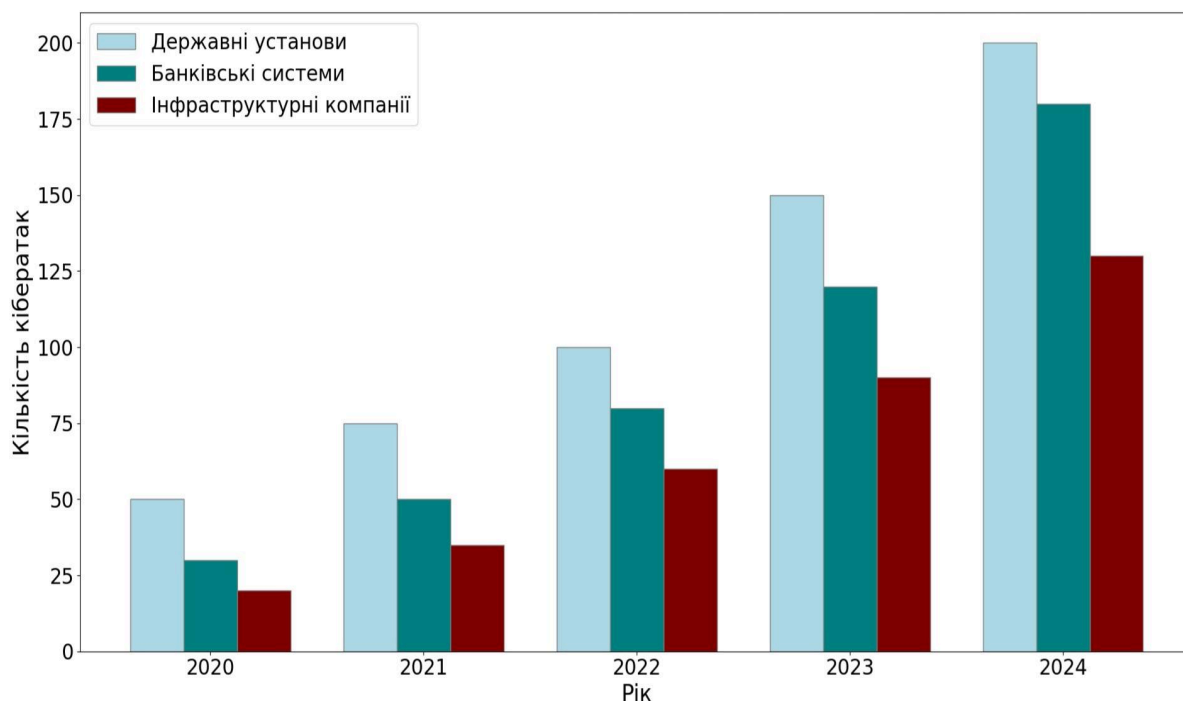


Рисунок 1.2 – діаграма кількості кібератак на українські сервіси (2020-2024 рр)

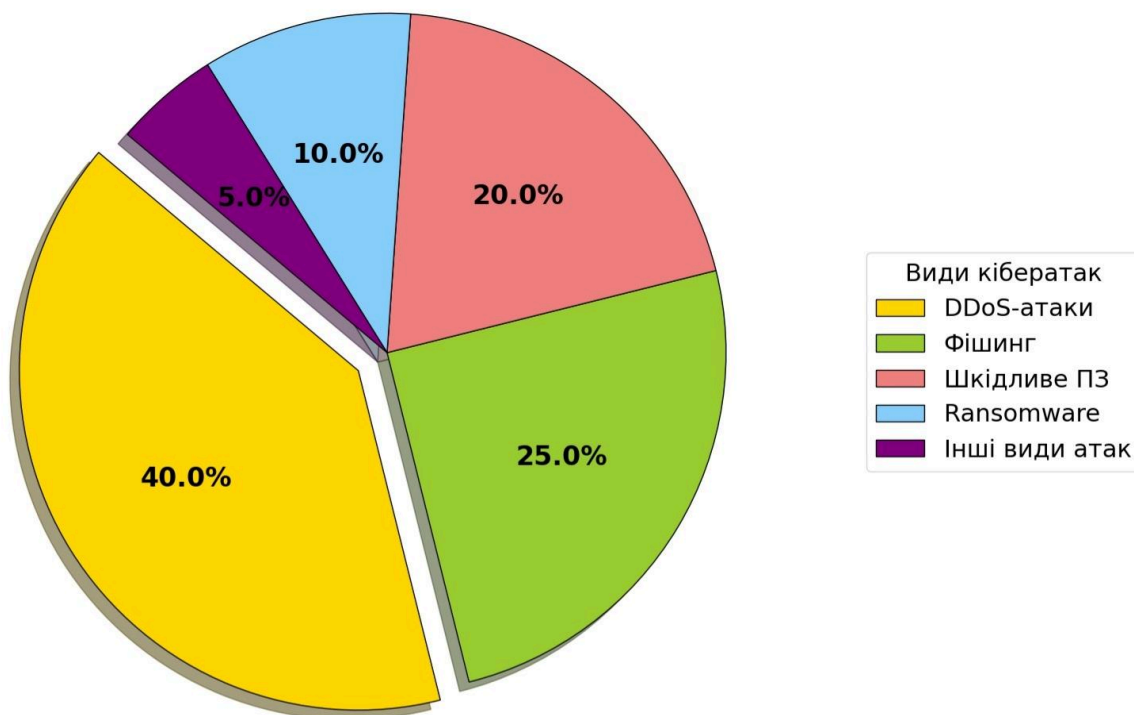


Рисунок 1.3 – Діаграма розподілу видів кібератак на українські сервіси (2020-2024 рр)

Кібератаки на українські сервіси постійно збільшуються за інтенсивністю і складністю. Більшість з них була спрямована переважно з боку російських хакерів у рамках масштабної гібридної війни між Україною та росією. Наприклад, у період з січня 2022 року по вересень 2023 року в Україні було зафіксовано майже 4 000 кіберінцидентів, переважно з боку росії[10]. Ці дані свідчать про постійні загрози кібербезпеці в Україні та підкреслюють необхідність посилення захисту національних цифрових ресурсів, для чого необхідно забезпечити динамічне масштабування серверних ресурсів у реальному часі залежно від навантаження, використовувати удосконалені алгоритми балансування навантаження для більш ефективного розподілу запити між серверами та здійснювати постійний моніторинг трафіку та його аналіз для передбачення пікових навантажень та своєчасного реагування на них.

1.2 Постановка задачі

У зв'язку із тенденцією на зростання чисельності кібератак на українські сервіси зростає необхідність оптимально розподіляти власні ресурси захисту для зменшення ризиків, що виникають при багатопозиційних атаках. Тому для розв'язання цієї проблеми поставимо для себе базову задачу, на основі якої можна буде проілюструвати алгоритм оптимізації.

1.2.1 Базова задача

Розглянемо мережу дата-центру (далі – DCN), що складається з трьох серверів А, В та С. На цю мережу реалізовується хакерська DoS-атака, покликана викликати відмову в обслуговуванні. Мережа за нормальних умов має в розпорядженні 100 одиниць захисних ресурсів. Як стало відомо завдяки кіберрозвідці, на перший сервер зловмисник направляє 60 своїх ресурсів, на другий – 30, на третій – 70 відповідно. Потрібно знайти такий оптимальний розподіл 100 одиниць захисних ресурсів між серверами, аби шанс успіху DoS-атаки був мінімально можливим.

“Перемогою” серверу вважатимемо ситуацію, за якої кількість атакуючих ресурсів не перевищує кількості захисних.

1.2.2 Загальна постановка задачі

У загальному випадку наша мережа буде складатися з n серверів S_1, S_2, \dots, S_n . Захисник (центральний сервер) та зловмисник розподіляють свої (неперервно подільні) ресурси захисту x_i та y_i , $i = \overline{1, n}$, між цими n

серверами. Запаси ресурсів кожного учасника обмежені: $\sum_{i=1}^n x_i \leq R_x$,

$\sum_{i=1}^n y_i \leq R_y$. Необхідно, знаючи розподіл зловмисника y_i , знайти такий

оптимальний розподіл ресурсів x_i для захисника, за якого шанс успішної реалізації DoS-атаки буде найменшим.

Висновки до розділу 1

Було розглянуто найбільші багатопозиційні атаки за період грудня 2023 року – травня 2024 року. Розглянуто статистичні дані, що стосуються такого типу атак в Україні за період 2020-2024 років.

Проаналізовано атаки на Київстар, Monobank, обвал застосунку “Дія”, що краще допомогло зрозуміти важливість проблеми, що розглядається.

Сформульовано базову задачу про оптимальне розподілення ресурсів, а також наведено її узагальнене формулювання.

2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗВ'ЯЗКУ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ

Для розв'язання поставленої задачі необхідно для початку побудувати її математичну модель. Для цього було прийнято рішення звернутися за допомогою до теорії ігор. Найбільше описаним умовам задачі відповідає гра полковника Блотто, тому вирішено використати її математичну модель для розв'язання поставленої задачі.

2.1 Гра полковника Блотто

Гра полковника Блотто — це різновид гри з постійною сумою для двох осіб, у якій гравці (офіцери) мають завдання одночасно розподіляти обмежені ресурси між кількома об'єктами (полями бою). У класичній версії гри гравець, який виділяє найбільше ресурсів на поле бою, виграє це поле бою, а виграш дорівнює загальній кількості виграних полів бою.

Гру вперше запропонував Еміль Борель [11] у 1921 році. У 1938 році Борель і Вілле опублікували конкретну оптимальну стратегію (рішення «диск»). [12] Гру вивчали після Другої світової війни вчені з дослідження операцій і вона стала класикою в теорії ігор. Дослідницький меморандум Гросса та Вагнера 1950 року [13] містить оптимальну стратегію Бореля та придумав вигадані імена полковника Блотто та ворога. Для трьох або більше полів битв простір чистих стратегій є багатовимірним (два виміри для трьох полів битв), і змішана стратегія, таким чином, є розподілом ймовірностей у безперервному наборі. Гра є рідкісним прикладом нетривіальної гри такого типу, де можна явно знайти оптимальні стратегії.

У загальному випадку гру полковника Блотто можна описати таким чином [14]. Полковник зобов'язаний знайти оптимальний розподіл своїх солдатів за N полями битв, знаючи що:

- А. на кожному полі сторона, яка виставила більше солдатів, виграє, але

В. жодна сторона не знає, скільки солдатів виставить протилежна сторона на кожному полі, і

С. обидві сторони прагнуть максимізувати кількість полів, на яких битву буде виграно.

У математичному трактуванні гри полковника Блотто можна розглядати як набір $N = [1, 2, \dots, n]$ об'єктів, між якими два гравці розподіляють свої набори ресурсів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, причому $x_i \geq 0, y_i \geq 0$ – кількість ресурсу, виділеного кожним із гравців на i -тий об'єкт, $i = \overline{1, n}$. Обмеження наявних у кожного з гравців ресурсів можна задати наступною формулою.

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq R_x, \quad \sum_{i=1}^n y_i \leq R_y \quad (2.1).$$

Розглянемо класичний *приклад гри* [14], де два гравці записують три додатних цілих числа x_1, x_2, x_3 та y_1, y_2, y_3 в неспадному порядку, тобто $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ та $y_1 \leq y_2 \leq y_3$, причому сума кожної трійки S заздалегідь задана й відома. Потім обидва гравці порівнюють числа за порядком. Гравець, у якого у двох позиціях числа більші, виграє.

Нехай $S = 6$. Тоді не складно побачити, що існують лише три можливі варіанти таких наборів трійок, що йдуть у неспадному порядку та дають у сумі 6: (2, 2, 2), (1, 2, 3) та (1, 1, 4).

Легко побачити, що будь-яка трійка чисел у підсумку дає нічию, якщо використана проти такої ж трійки. Розглянемо тепер інші варіанти трійок:

(1, 1, 4) проти (1, 2, 3) призводить до нічиєї;

(1, 1, 4) проти (2, 2, 2) призводить до поразки;

(1, 2, 3) проти (2, 2, 2) призводить до нічиєї.

Як бачимо, трійка (2, 2, 2) єдина, яка має виграшний варіант розвитку подій в одному з варіантів та не призводить до поразок у жодних інших випадках, а отже це – оптимальна стратегія. Однак, якщо обидва гравці оберуть трійки (2, 2, 2) та (1, 2, 3) одночасно (не має значення, який гравець яку), то жоден із гравців не зможе виграти в іншого. Тому кожна така пара є рівновагою Неша.

При збільшенні числа S стає важче провести аналіз. Для $S = 12$ можна показати, що (2, 4, 6) є оптимальною стратегією, проте для $S > 12$ детерміновані стратегії не оптимальні. Для $S = 13$ оптимальною змішаною стратегією є набори трійок (3, 5, 5), (3, 3, 7) та (1, 5, 7) зі ймовірністю успіху $\frac{1}{3}$ для кожної трійки.

У простішому випадку двох полів бою Макдонелл і Мастронарді у 2015 році [15] надають вперше повну характеристику всіх рівноваг Неша для канонічної найпростішої версії гри полковника Блотто. Цей розв’язок включає графічний алгоритм для характеристики всіх стратегій рівноваги Неша та раніше невідомі стратегії рівноваги Неша, а також допомагає визначити, якої поведінки ніколи не слід очікувати раціональним гравцям. Стратегії рівноваги за Нешем у цій версії гри — це набір двовимірних розподілів ймовірностей: розподіли за набором можливих розподілів ресурсів для кожного гравця, які часто називають змішаними рівновагами за Нешем (які, наприклад, можна знайти в моделях Paper-Rock-Scissors або Matching Pennies як набагато простіших прикладах).

Розв’язання Макдонелла та Мастронарді, доведення й графічний алгоритм для визначення стратегій рівноваги Неша також стосуються узагальнених версій гри, наприклад, коли полковник Блотто має різні оцінки полів битв, різну ефективність ресурсів на двох полях битв (наприклад, одне поле битви містить висадку у гірській місцевості, або ж

ресурси полковника Блотто — це морські піхотинці чи снайпери), а також надає інформацію про версії гри з трьома або більше полями бою.

Для більш кращого розуміння розглянемо двох гравців (полковника Блотто (B) та ворога(E)), два поля бою, обидва однакові. Обидва гравці (B та E) знають загальний рівень ресурсів один одного, які розполюються. В один момент вони повинні прийняти одночасне рішення щодо розподілу своїх ресурсів. Найчастіше вважають, що полковник Блотто є більш забезпеченим офіцером, тобто його рівень ресурсу можна визначити як 1, а ворог має частку ресурсів, меншу за 1, відповідно. Стратегії розподілу рівноваги Неша та виграші залежать від співвідношення рівня ресурсів, що можна побачити на рисунку 2.1.

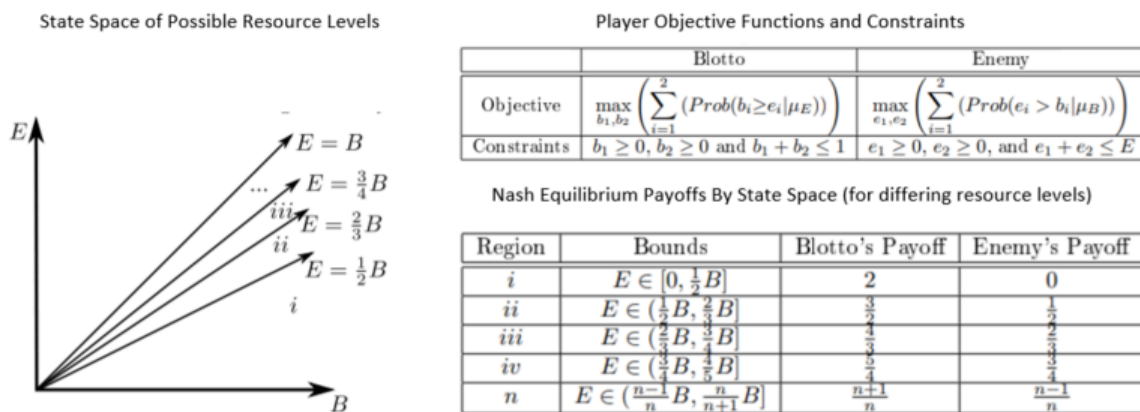


Рисунок 2.1 – Графічна ілюстрація розв’язку, наведеного Макдонеллом та Мастронарді у 2015 році [14]

Як можна побачити із запропонованого розв’язку, що при наближенні значення ресурсу ворога E до значення ресурсу полковника Блотто B значення очікуваної перемоги (за Нешем) для полковника та ворога наближаються до рівності.

Для загальної оцінки виграшу у грі полковника Блотто можна розглянути дві різні моделі гри: аукціонну та ймовірнісну.

2.1.1 Аукціонна модель гри

Аукціонна модель гри полковника Блотто перемогу на об'єкті віддає тому гравцеві, який виділив на цей об'єкт більшу кількість ресурсів. У разі рівності ресурсів кожен з гравців здобуває перемогу з імовірністю $\frac{1}{2}$. Цінність i -го об'єкта для першого та другого гравців позначимо через X_i та Y_i . Тоді функцію вигравів кожного з гравців у цій моделі можна визначити таким чином:

$$f_x(x, y) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot I(x_i > y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i \cdot I(x_i = y_i) \quad (2.2),$$

$$f_y(x, y) = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot I(x_i < y_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Y_i \cdot I(x_i = y_i) \quad (2.3),$$

де $I()$ – функція-індикатор, що показує, кому належить перемога на полях. Більш загальним є випадок, коли обмеження типу (2.1) відсутні, але з виграшу (2.2) та (2.3) віднімаються витрати, монотонні за сумарною кількістю використаного гравцем ресурсу.

Випадки для $n = 1$ та $n = 2$ є тривіальними. Справді, не важко зрозуміти, за $n = 1$ перемагає гравець, який має більшу кількість ресурсу (у разі рівності ресурсів перемога кожного рівноймовірна). При $n = 2$ оптимальною стратегією кожного гравця є пріоритетне виділення ресурсу на найцінніший йому об'єкт.

Найпростішим вважається симетричний ($X_i = Y_i$, $i = \overline{1, n}$, $R_x = R_y$) варіант дискретної (ресурси гравців дискретні) гри полковника Блотто, що є матричною грою (з нульовою сумою). Тобто кількість виграних полів першим гравцем рівна кількості програних другим, а кількість ресурсів вимірюється цілими значеннями (наприклад, солдатами). Вперше розв'язок для рівноваги Неша в змішаних стратегіях цієї гри для випадку $n = 3$ було описано в [12], у [16] були знайдені розв'язки для

симетричного випадку для довільного кінцевого n та для випадку $X_i = Y_i, i \in N, R_x \neq R_y$ при $n = 2$.

Наступним кроком була часткова характеристика в [17] рівноваги Неша для випадку $X_i = Y_i, i \in N, R_x \neq R_y$ для довільного кінцевого n . У подальшому, як правило (див. огляд в [18]) дослідники обмежувалися або дискретними (скінченними), або симетричними (рівність для обох гравців) безперервними випадками. Істотне просування у характеристиці аукціонної моделі було отримано в праці Робертсона у 2006 році [18], наступними кроками можна вважати статтю [19], де характеризується рівновага Неша в чистих стратегіях для несиметричного випадку, та [20], де здійснено узагальнення гри полковника Блотто на стохастичний випадок. Опис експериментальних досліджень ІПБ можна знайти в [21, 22].

2.1.2 Ймовірнісна модель гри

У ймовірнісній моделі гри полковника Блотто ймовірність $p_x(x_i, y_i)$ перемоги першого гравця на i -му об'єкті не залежить від інших об'єктів і «пропорційна» до кількості виділеного першим гравцем на цей об'єкт ресурсу x_i та «обернено пропорційна» зваженій сумі ресурсів, виділених на цей об'єкт кожним із гравців. Наприклад, так це подає у своїй праці Александер Робсон [23]:

$$p_x(x_i, y_i) = \frac{\alpha_i x_i^{r_i}}{\alpha_i x_i^{r_i} + \beta_i y_i^{r_i}}, \quad p_y(x_i, y_i) = 1 - p_x(x_i, y_i) \quad (2.4),$$

де $r_i \in (0; 1], i > 0, p_x(x_i = 0, y_i = 0) = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + 1}$ (див. [17, 21],

загальне обговорення властивостей подібних залежностей у [25, 26], а також огляд [27]). Варто зауважити, що коефіцієнти $\{\alpha_i\}$ дозволяють

порівнювати ефективності використання гравцями ресурсів на тому самому об'єкті.

Виграші гравців у запропонованій ймовірнісній моделі визначаються як математичне очікування сумарного виграшу, тобто наступним чином:

$$F_x(x, y) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot p_x(x_i, y_i) \quad (2.5),$$

$$F_y(x, y) = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot p_y(x_i, y_i) \quad (2.6).$$

У контексті розв'язання задач Блотто для пошуку найбільш оптимальних варіантів розвитку гри найчастіше дослідники звертаються до рівноваги Неша.

Рівновага Неша — це такий набір стратегій оптимального розподілення, ресурсів, за якого жодний із гравців не може покращити очікуване значення перемоги, змінюючи при цьому в односторонньому порядку свою стратегію, за умови, що стратегії інших гравців залишаються незмінними. Іншими словами, це ситуація, коли стратегія кожного гравця є оптимальною з урахуванням стратегій усіх інших гравців [28, с. 103-115][29].

У грі полковника Блотто гравці розподіляють свої ресурси (наприклад, війська, гроші) між кількома полями битв. Мета полягає в тому, щоб максимізувати ймовірність перемоги на кожному полі бою, зважену за важливістю кожного поля бою. Рівновага Неша в цьому контексті означає, що розподіл ресурсів для кожного гравця є таким, що жоден гравець не може покращити свою загальну зважену ймовірність виграшу шляхом перерозподілу ресурсів, припускаючи, що розподіл для іншого гравця залишається таким самим [30][31].

Щоб знайти рівновагу Неша, кожен гравець повинен вирішити задачу оптимізації з урахуванням своїх загальних ресурсів R_x та R_y :

$$\max F_x(x, y) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\alpha_i \cdot x_i^{r_i}}{\alpha_i \cdot x_i^{r_i} + \beta_i \cdot y_i^{r_i}} \text{ за умови (2.1)} \quad (2.7),$$

$$\max F_y(x, y) = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot \frac{\beta_i \cdot y_i^{r_i}}{\alpha_i \cdot x_i^{r_i} + \beta_i \cdot y_i^{r_i}} \text{ за умови (2.1)} \quad (2.8).$$

Рівновагою Неша у чистих стратегіях (x^*, y^*) є пара векторів, що задовольняють умовам (2.1), таких, що для $\forall(x, y)$, що задовольняють умовам (2.1), виконується наступне:

$$F_x(x^*, y^*) \geq F_x(x, y^*) \quad (2.9),$$

$$F_y(x^*, y^*) \geq F_y(x^*, y) \quad (2.10).$$

Імовірнісна модель у певному сенсі є «простішою», ніж аукціонна – як показано в [17], єдиною рівновагою Неша для випадку $X_i = Y_i = Const$, $r_i = 1$, $\alpha_i = \beta_i = 1$, $i = \overline{1, N}$, $R_x \neq R_y$ є використання гравцями чистих стратегій, що полягають у рівному розподілі наявних у них ресурсів між об'єктами. У [23] також було знайдено рівновагу у чистих стратегіях для випадку $X_i = Y_i$ для довільних $r_i \in (0, 1]$, $\alpha_i > 1$, $\beta_i > 1$, $i = \overline{1, N}$.

Хоча рівновага Неша теоретично здатна забезпечити оптимальну стратегію розподілу, вона має кілька практичних обмежень, через які її застосування стає менш зручним.

Насамперед, у сценаріях реального світу гравцям часто бракує повної інформації про цінності та ресурси суперника, а пошук рівноваги Неша потребує досконалих відомостей про стратегії супротивника, що

рідко стає відомо [30]. Крім того, суперники можуть застосовувати стратегії, які відхиляються від рівноваги через помилку або навмисну непередбачуваність. Такі дії можуть порушити стратегію рівноваги та призвести до поразки навіть за умови досягнутого за рівновагою Неша оптимального розподілу [31]. Неточна оцінка цінностей суперника може призвести до неправильного розподілу ресурсів, підриваючи ефективність стратегії рівноваги Неша [32].

Важливо, що пошук рівноваги Неша включає розв'язання складних задач оптимізації, які можуть бути обчислювально інтенсивними та непрактичними в швидкоплинних середовищах прийняття рішень [33], через це їх розв'язання може вартувати зусиль та ресурсів, особливо якщо один з таких ресурсів – час.

Враховуючи ці обмеження, вкрай важливо прийняти більш гнучкий і оперативний підхід. Використання функції Лагранжа забезпечує метод оптимізації розподілу захисника на основі спостережуваних розподілів ресурсів опонента та чіткого розуміння власних стратегічних цінностей та інтересів. Цей підхід дозволяє приймати адаптивні та динамічні рішення, що краще підходить до невизначеного та змагального характеру гри полковника Блотто.

2.2 Математичне представлення пошуку оптимального розподілу ресурсів захисту

У стратегічних іграх, таких як гра полковника Блотто, досягти рівноваги Неша може виявитися надскладною задачею, особливо в умовах неповної інформації та невизначеності. Метод Лагранжа надає потужний математичний інструмент для оптимізації прийняття рішень у таких сценаріях. Включаючи обмеження безпосередньо в задачу оптимізації, метод Лагранжа дозволяє гравцям ефективно розподіляти ресурси відповідно до власних стратегічних цілей і спостережуваних дій їхніх опонентів.

2.2.1 Метод Лагранжа

Метод Лагранжа, названий на честь італійського математика Жозефа-Луї Лагранжа, використовується в задачах оптимізації для знаходження максимуму або мінімуму функції з обмеженнями. Цей метод перетворює обмежену проблему на необмежену шляхом включення обмежень у цільову функцію за допомогою множників Лагранжа.

Розглянемо задачу оптимізації, у якій ми прагнемо максимізувати функцію $f(x)$, що підлягає набору обмежень $g_i(x) = 0$ при $i = \overline{1, m}$ та $h_j(x) \leq 0$ при $j = \overline{1, k}$ [34].

Тоді функцію Лагранжа L можна визначити наступним чином:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x) + \sum_{j=1}^k \mu_j \cdot h_j(x) \quad (2.11),$$

де:

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ є множниками Лагранжа для обмежень рівності;

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ є множниками Лагранжа для обмежень нерівності.

Щоб знайти оптимальний розв'язок, потрібно розв'язати систему рівнянь:

1. Градієнт L відносно x має дорівнювати нулю (умова стаціонарності):

$$\nabla_x(x, \lambda, \mu) = 0 \quad (2.12).$$

2. Повинні бути виконані обмеження:

$$g_i(x) = 0 \quad \forall i \text{ та } h_j(x) \leq 0 \quad \forall j \quad (2.13).$$

3. Додаткова умова нерівності для обмежень нерівності:

$$\mu_j h_j(x) = 0 \quad \forall j, \mu_j \geq 0 \quad \forall j \quad (2.14).$$

У грі полковника Блотто гравцям потрібно оптимально розподілити свої обмежені ресурси між кількома полями битв. Мета полягає в тому, щоб максимізувати загальну очікувану вигоду, дотримуючись обмеження загальних ресурсів [28, с. 155-160].

Для гравця 1 цільову функцію $F_x(x, y)$, яку потрібно максимізувати, ми записали раніше (2.7), загальне обмеження ресурсів описане в (2.1). Тоді можна записати функцію Лагранжа для задачі оптимізації гравця 1:

$$L_1(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\alpha_i \cdot x_i^{r_i}}{\alpha_i \cdot x_i^{r_i} + \beta_i \cdot y_i^{r_i}} + \lambda \cdot \left(R_x - \sum_{i=1}^n x_i \right) \quad (2.15),$$

де λ – множник Лагранжа, пов'язаний із заданими обмеженням ресурсу R_x . Розглянемо тепер детальніше описані раніше в (2.12–2.14) умови оптимізації.

1. Часткові похідні L_1 відносно кожного x_i мають дорівнювати нулю:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_i} = \frac{X_i \cdot \alpha_i \cdot r_i \cdot x_i^{r_i-1} \cdot (\alpha_i \cdot x_i^{r_i} + \beta_i \cdot y_i^{r_i}) - X_i \cdot \alpha_i \cdot x_i^{r_i} \cdot (\alpha_i \cdot r_i \cdot x_i^{r_i-1})}{(\alpha_i \cdot x_i^{r_i} + \beta_i \cdot y_i^{r_i})^2} - \lambda = 0 \quad (2.16).$$

Дещо спростивши (2.16), отримуємо наступне:

$$X_i \cdot \alpha_i \cdot r_i \cdot x_i^{r_i-1} \cdot \beta_i \cdot y_i^{r_i} = \lambda \cdot (\alpha_i \cdot x_i^{r_i} + \beta_i \cdot y_i^{r_i})^2 \quad (2.17).$$

2. Задане обмеження ресурсів (2.1) має бути дотримано.
3. Множник Лагранжа λ має бути невід'ємним: $\lambda \geq 0$.
4. Умова додаткової слабкості гарантує, що якщо обмеження не є обов'язковим, множник дорівнює нулю.

$$\lambda \cdot \left(R_x - \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0 \quad (2.18).$$

2.2.2 Розв'язування лагранжіана

Щоб знайти оптимальне розподілення за Лагранжем, ми можемо виконати такі кроки:

1. Визначити часткові похідні лагранжіана відносно кожного x_i і порівняти їх до нуля (2.16).
2. Розв'язати отриману систему рівнянь для x_i та λ .
3. Перевірити, чи знайдений розподіл задовольняє умовам основної здійсненності та додатковим умовам слабкості.

У випадку нашої сформульованої задачі розглядається ситуація, коли коефіцієнт еластичності накладених умов $r_i = 1$, тобто розглядається класична трактовка лінійної оцінки ефективності впливу вкладеного ресурсу на результат. Розв'яжемо тепер наш лагранжіан.

Насамперед, перепишемо (2.4) для захисника із урахуванням того, що коефіцієнт еластичності накладених умов $r_i = 1$.

$$p_x(x_i, y_i) = \frac{\alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i} \quad (2.19),$$

α_i та β_i представляють коефіцієнти ефективності для захисника та атакуючого відповідно для сервера S_i . Метою захисника є максимізація загальної ймовірності успішного захисту на всіх серверах:

$$\text{ЦФ: } \max_x F_x(x, y) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i} \text{ за умови (2.1)} \quad (2.20).$$

Тоді функція Лагранжа для задачі оптимізації захисника (центрального сервера) матиме наступний вигляд:

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i} + \lambda \cdot \left(R_x - \sum_{i=1}^n x_i \right) \quad (2.21),$$

де λ – множник Лагранжа, пов'язаний з обмеженням ресурсу.

Обчислимо тепер часткові похідні L по кожній змінній x_i та прирівняємо їхні значення до нуля.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(x, \lambda) = X_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \quad (2.22),$$

або:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(x, \lambda) = X_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i} \right) - \lambda; \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = 1 \quad (2.23).$$

Використовуючи правило частки для обчислення похідних, знайдемо похідну зменшуваного:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i} \right) = \frac{\alpha_i \cdot (\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i) - \alpha_i^2 \cdot x_i}{(\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^2} = \frac{\alpha_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{(\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^2} \quad (2.24).$$

Таким чином, часткова похідна набуває наступного вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(x, \lambda) = X_i \cdot \frac{\alpha_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{(\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^2} - \lambda \quad (2.25).$$

Прирівнявши часткову похідну до нуля та перенісши λ по іншу сторону знаку рівності, отримуємо:

$$\lambda = X_i \cdot \frac{a_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{(\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^2} \quad (2.26),$$

Виразимо тепер з (2.26) змінну x_i як функцію від множника Лагранжа λ .

$$(\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^2 \cdot \lambda = X_i \cdot a_i \cdot \beta_i \cdot y_i \quad (2.27),$$

$$\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i = \sqrt{\frac{X_i \cdot a_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\lambda}} \quad (2.28),$$

$$\alpha_i \cdot x_i = \sqrt{\frac{X_i \cdot a_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\lambda}} - \beta_i \cdot y_i \quad (2.29),$$

і розділивши обидві частини рівності на ненульове значення α_i , отримаємо наступне:

$$x_i = \frac{\sqrt{\frac{X_i \cdot a_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\lambda}} - \beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} \quad (2.30).$$

Перепишемо тепер загальне обмеження ресурсів (2.1) у вигляді рівності (вважаємо використання наявного ресурсу захисту повністю вичерпним) із використанням отриманого в (2.30) значення x_i :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\frac{X_i \cdot a_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\lambda}} - \beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} = R_x \quad (2.31).$$

Оскільки у (2.31) єдиною невідомою залишається λ , то для її знаходження перепишемо цей вираз наступним чином та виконаємо ряд математичних перетворень:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\frac{X_i \cdot a_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\lambda}}}{\alpha_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} = R_x \quad (2.32),$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\frac{X_i \cdot a_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\lambda}}}{\alpha_i} = R_x + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} \quad (2.33).$$

Для зручності винесемо множник $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ перед знак суми:

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{X_i \cdot a_i \cdot \beta_i \cdot y_i}}{\alpha_i} = R_x + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} \quad (2.34),$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату та отримаємо шукане значення множника Лагранжа λ :

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{X_i \cdot a_i \cdot \beta_i \cdot y_i}}{\alpha_i} \right)^2 = \left(R_x + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} \right)^2 \quad (2.35),$$

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{X_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\alpha_i}} \right)^2 = \left(R_x + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} \right)^2 \quad (2.36),$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{X_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\alpha_i}} \right)^2}{\left(R_x + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} \right)^2} = \lambda \quad (2.37),$$

Підставляючи отримане значення λ назад у (2.30), виконаємо ряд математичних перетворень:

$$x_i = \frac{\sqrt{\frac{X_i \cdot a_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{X_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\alpha_i}} \right)^2 - \left(R_x + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} \right)^2}}}{\alpha_i} \cdot \beta_i \cdot y_i \quad (2.38),$$

$$x_i = \sqrt{\frac{X_i \cdot \alpha_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{X_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\alpha_i}}\right)^2} - \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i}} \cdot (\alpha_i)^2 \quad (2.39),$$

$$x_i = \frac{R_x + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{X_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\alpha_i}}} \cdot \sqrt{\frac{X_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{\alpha_i}} - \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} \quad (2.40),$$

і, зрештою, отримуємо очікуваний розподіл для x_i із урахуванням заданих в (2.1) обмеженнях для ресурсу захисту x_i :

$$x_i = \left(R_x + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} \right) \cdot \frac{\sqrt{X_i \cdot \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i}}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i \cdot \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i}}} - \frac{\beta_i \cdot y_i}{\alpha_i} \quad (2.41).$$

Отриманий вираз (2.41) забезпечує оптимальний розподіл $\{x_i\}$ ресурсу захисту відповідно до отриманих «розвідданих» щодо розподілу $\{y_i\}$ ресурсів атаки зловмисника. Результат, як і було очікувано на початку дослідження, залежить не окремо від значень коефіцієнтів ефективності, а саме від їх відношення, внаслідок того, що ймовірність перемоги так само визначається за їх відношенням.

2.2.3 Лема про унікальність оптимального розподілу

Для пояснення унікальності отриманого оптимального розподілу ресурсів захисту $\{x_i\}$ було сформульовано наступну лему.

Лема. Існує єдиний оптимальний розподіл ресурсу $\{x_i\}$, описаний у (2.41). Функція перемоги $F_x(x, y)$ досягає свого максимально можливого значення за цим розподілом.

Доведемо цю лему.

Щоб довести унікальність та оптимальність розподілу ресурсу $\{x_i\}$, ми покажемо, що функція Лагранжа L має унікальну критичну точку, а також те, що ця точка максимізує значення функції перемоги $F_x(x, y)$. Це передбачає демонстрацію строга увігнутості $F_x(x, y)$ та забезпечення того, що матриця Гессе L є негативно визначеною.

1. Строга увігнутість $F_x(x, y)$

Функцію перемоги $F_x(x, y)$ було визначено раніше в (2.20). Нам тепер потрібно показати, що $F_x(x, y)$ є строга увігнутою функцією відносно x_i . Для цього обчислимо значення другої похідної $F_x(x, y)$ відносно x_i .

Перша похідна функції $F_x(x, y)$ відносно x_i обчислена в (2.25). Далі, використовуючи (2.25), знайдемо другу похідну $F_x(x, y)$ по x_i :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(X_i \cdot \frac{\alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(X_i \cdot \frac{a_i \cdot \beta_i \cdot y_i}{(\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^2} \right) \quad (2.42).$$

Винесемо множник $X_i \cdot a_i \cdot \beta_i \cdot y_i$ перед знак похідної та обчислимо значення похідної від отриманого виразу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{(\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^{-2} = \quad (2.43). \\ &= -2 \cdot (\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^{-3} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i) = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{(\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^3} \cdot \alpha_i \end{aligned}$$

Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{X_i \cdot \alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i} \right) &= X_i \cdot \alpha_i \cdot \beta_i \cdot y_i \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{(\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^3} \cdot \alpha_i \right) = \\ &= -2 \cdot X_i \cdot \frac{\alpha_i^2 \cdot \beta_i \cdot y_i}{(\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^3} \end{aligned} \quad (2.44).$$

Оскільки $\forall i$ справедливо, що $\alpha_i^2 > 0$, ($\alpha > 0$), X_i, β_i, y_i – набувають додатних значень, то друга похідна $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{X_i \cdot \alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i} \right)$ набуває від'ємного значення, що означає, що функція $\frac{X_i \cdot \alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i}$ є строго увігнутою функцією відносно x_i .

2. Негативна визначеність матриці Гессе

Матриця Гессе H функції Лагранжа L відносно x_i складається з других часткових похідних. Для строгої увігнутості матриця Гессе має бути негативно визначеною.

Для записаної в (2.21) функції Лагранжа L матриця Гессе H є квадратною матрицею часткових похідних другого порядку:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.45).$$

Діагональні елементи матриці H задані другими частковими похідними L по x_i :

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F_x(x, y)}{\partial x_i \partial x_j} = -2 \cdot X_i \cdot \frac{\alpha_i^2 \cdot \beta_i \cdot y_i}{(\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i)^3} \quad (2.46).$$

Як було встановлено раніше, значення цих елементів є від'ємними. Недіагональні елементи H_{ij} , де $i \neq j$ дорівнюють нулю, оскільки другі змішані часткові похідні $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}$ теж набувають нульового значення.

Таким чином, матриця Гессе H є діагональною з від'ємними елементами на діагоналі, що робить її негативно визначеною матрицею. Ця негативна визначеність підтверджує строгу увігнутість L .

3. Умови першого порядку

Умови першого порядку для лагранжіана вимагають, щоб часткові похідні за x_i та λ дорівнювали нулю, що власне і було використано при пошуку значень розподілу $\{x_i\}$.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow X_i \cdot \frac{a_i \cdot \beta_i y_i}{(\alpha_i x_i + \beta_i y_i)^2} = \lambda \quad (2.47).$$

Розв'язуючи x_i , у результаті було отримано (2.41) для пошуку оптимального розподілення ресурсів $\{x_i\}$.

4. Глобальний максимум і унікальність:

Оскільки матриця Гессе є негативно визначеною, критична точка, де задовольняються умови першого порядку, є глобальним максимумом функції. Строга увігнутість забезпечує наявність лише однієї такої максимальної точки. Таким чином, розподіл $\{x_i\}$, який ми отримали в (2.41), є єдиним оптимальним рішенням поставленої задачі, за яким функція перемоги $F_x(x, y)$ досягає свого максимально можливого значення, що і завершує доведення.

Висновки до розділу 2

Розглянуто гру полковника Блотто як інструмент аналізу оптимального розподілу ресурсів. Проаналізовано класичне трактування моделі ГПБ, а також розглянуто можливі варіанти моделей ГПБ: аукціонної, де виграш визначається за кількістю виграних полів бою, та ймовірнісної, де загальний виграш залежить від ймовірностей перемоги гравця на кожному з майданчиків. Для побудови розв'язку сформульованої задачі оптимізації було обрано ймовірнісну модель через її наближеність до реальних умов.

Розглянуто метод оптимізації шляхом пошуку рівноваги Неша, яку зазвичай використовують для пошуку найкращого вирішення задач. Проаналізовано основні недоліки використання такого методу для розв'язання сформульованої задачі оптимізації. Обрано для пошуку рішення метод Лагранжа.

Розглянуто основні аспекти розв'язку задачі оптимізації за допомогою методу Лагранжа. Сформульовано алгоритм пошуку рішення задачі оптимізації (розв'язку ЦФ) за Лагранжем. Після врахування умов поставленої узагальненої задачі, знайдено оптимальний розподіл $\{x_i\}$ ресурсу захисту відповідно до отриманих «розвідданих» щодо розподілу $\{y_i\}$ ресурсів атаки зловмисника. Сформульовано та доведено лему про унікальність оптимального розподілу ресурсів $\{x_i\}$.

3 АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛЕННЯ РЕСУРСІВ ЗАХИСТУ В БАЗОВІЙ ЗАДАЧІ

Повернемося до нашої базової задачі, сформульованої раніше, та проведемо її аналіз через призму отриманої у попередньому розділі математичної моделі оптимального розподілення ресурсів захисту.

3.1 Аналіз ЦФ для базової задачі

Згідно з умовою базової задачі, кількість майданчиків “бою” – серверів DCN – $i = 3$. DCN за нормальних умов має у розпорядженні щонайбільше $R_x = 100$ одиниць захисних ресурсів. Розподіл зловмисника $\{y_i\}$ відомий та має такі значення: $y_1 = 60$, $y_2 = 30$, $y_3 = 70$.

Завдання. Знайти оптимальний розподіл захисних ресурсів між серверами DCN, щоб шанс успіху DoS-атаки був мінімально можливим.

Розв’язання.

Згідно з умовою постановки задачі, оптимізації підлягає математичне очікування перемоги зловмисника, тобто шукається *min* для цільової функції (ЦФ) $F_y(x, y)$. Іншими словами, для досягнення мети необхідно дослідити наступне:

$$\text{ЦФ: } \max_x F_x(x, y) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{\alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i} \quad (3.1).$$

Для нашої задачі ЦФ матиме такий вигляд:

$$\text{ЦФ: } \max_x F_x(x, y) = \frac{X_1 \cdot \alpha_1 \cdot x_1}{\alpha_1 \cdot x_1 + \beta_1 \cdot y_1} + \frac{X_2 \cdot \alpha_2 \cdot x_2}{\alpha_2 \cdot x_2 + \beta_2 \cdot y_2} + \frac{X_3 \cdot \alpha_3 \cdot x_3}{\alpha_3 \cdot x_3 + \beta_3 \cdot y_3} \quad (3.2).$$

Для пошуку максимального значення ЦФ у попередньому розділі було отримано формулу для розрахунку оптимального розподілу $\{x_i\}$ у загальному випадку (рівняння 2.41). Підставимо вхідні значення з умови в

рівняння (2.41) для розрахунку кожного з x_i окремо: $R_x = 100$, $y_1 = 60$, $y_2 = 30$, $y_3 = 70$, змінні α_i , β_i та X_i залишаються невідомими.

$$x_1 = \left(100 + \frac{\beta_1 \cdot 60}{\alpha_1} + \frac{\beta_2 \cdot 30}{\alpha_2} + \frac{\beta_3 \cdot 70}{\alpha_3}\right) \times \frac{\sqrt{X_1 \cdot \frac{\beta_1 \cdot 60}{\alpha_1}}}{\sqrt{\frac{X_1 \cdot \beta_1 \cdot 60}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{X_2 \cdot \beta_2 \cdot 30}{\alpha_2}} + \sqrt{\frac{X_3 \cdot \beta_3 \cdot 70}{\alpha_3}}} - \frac{\beta_1 \cdot 60}{\alpha_1} \quad (3.3),$$

$$x_2 = \left(100 + \frac{\beta_1 \cdot 60}{\alpha_1} + \frac{\beta_2 \cdot 30}{\alpha_2} + \frac{\beta_3 \cdot 70}{\alpha_3}\right) \times \frac{\sqrt{X_2 \cdot \frac{\beta_2 \cdot 30}{\alpha_2}}}{\sqrt{\frac{X_1 \cdot \beta_1 \cdot 60}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{X_2 \cdot \beta_2 \cdot 30}{\alpha_2}} + \sqrt{\frac{X_3 \cdot \beta_3 \cdot 70}{\alpha_3}}} - \frac{\beta_2 \cdot 30}{\alpha_2} \quad (3.4),$$

$$x_3 = \left(100 + \frac{\beta_1 \cdot 60}{\alpha_1} + \frac{\beta_2 \cdot 30}{\alpha_2} + \frac{\beta_3 \cdot 70}{\alpha_3}\right) \times \frac{\sqrt{X_3 \cdot \frac{\beta_3 \cdot 70}{\alpha_3}}}{\sqrt{\frac{X_1 \cdot \beta_1 \cdot 60}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{X_2 \cdot \beta_2 \cdot 30}{\alpha_2}} + \sqrt{\frac{X_3 \cdot \beta_3 \cdot 70}{\alpha_3}}} - \frac{\beta_3 \cdot 70}{\alpha_3} \quad (3.5).$$

Оскільки нам невідомі точні значення α_i , β_i та X_i , отримати необхідні значення для розподілу $\{x_i\}$ ми не можемо. Однак, проаналізувавши (3.3-3.5), ми бачимо, що шукане значення x_i залежать від відношень $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$ та значень X_i .

Розглянемо співвідношення коефіцієнтів $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$. Кожен із коефіцієнтів показує ступінь впливу виділеного ресурсу на обраний об'єкт, причому задаються ці коефіцієнти такою умовою:

$$\forall i \in \mathbb{N}: \alpha_i > 0, \beta_i > 0 \quad (3.6).$$

Тоді співвідношення цих коефіцієнтів покажуть, у скільки разів ступінь впливу зловмисника перевищує ступінь впливу захисника. Якщо покласти $\beta_i = 1$, то отримаємо обернену пропорційність $x_i \sim \frac{1}{\alpha_i}$, тобто чим більший ступінь впливу α_i виділеного захисником ресурсу x_i , тим менше ресурсу x_i йому потрібно на цей i -й майданчик для покриття своїх потреб у захисті.

Для подальшого аналізу ми досліджуватимемо залежність функції перемоги $F_x(x, y)$ від коефіцієнту ступеня впливу α_i та від ваги кожного з майданчиків X_i для захисника.

3.1.1 Залежність ЦФ від α_i

Розглянемо першу залежність функції перемоги $F_x(x, y)$ від параметра α_i , покладаючи $X_i = 1$ і $\beta_i = 1$. Підставимо ці значення у формули (3.3-3.5):

$$x_1 = \left(100 + \frac{60}{\alpha_1} + \frac{30}{\alpha_2} + \frac{70}{\alpha_3}\right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{60}{\alpha_1}}}{\sqrt{\frac{60}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{30}{\alpha_2}} + \sqrt{\frac{70}{\alpha_3}}} - \frac{60}{\alpha_1} \quad (3.7),$$

$$x_2 = \left(100 + \frac{60}{\alpha_1} + \frac{30}{\alpha_2} + \frac{70}{\alpha_3}\right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{30}{\alpha_2}}}{\sqrt{\frac{60}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{30}{\alpha_2}} + \sqrt{\frac{70}{\alpha_3}}} - \frac{30}{\alpha_2} \quad (3.8),$$

$$x_3 = \left(100 + \frac{60}{\alpha_1} + \frac{30}{\alpha_2} + \frac{70}{\alpha_3}\right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{70}{\alpha_3}}}{\sqrt{\frac{60}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{30}{\alpha_2}} + \sqrt{\frac{70}{\alpha_3}}} - \frac{60}{\alpha_3} \quad (3.9).$$

Тоді ЦФ $F_x(x, y)$, що розглядається, враховуючи $X_i = 1$, $\beta_i = 1$ та задані значення в умові, визначається таким чином:

$$\text{ЦФ: } \max_x F_x(x, y) = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i \cdot x_i}{\alpha_i \cdot x_i + y_i} \quad (3.10).$$

Підставимо тепер вирази для знаходження x_i (3.7-3.9) у функцію $F_x(x, y)$ (3.10) і отримаємо таке:

$$\text{ЦФ: } \max_x F_x(x, y) = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i \cdot \left(\left(100 + \sum_{i=1}^3 \frac{y_i}{\alpha_i} \right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{y_i}{\alpha_i}}}{\sum_{i=1}^3 \sqrt{\frac{y_i}{\alpha_1}}} - \frac{y_i}{\alpha_1} \right)}{\alpha_i \cdot \left(\left(100 + \sum_{i=1}^3 \frac{y_i}{\alpha_i} \right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{y_i}{\alpha_i}}}{\sum_{i=1}^3 \sqrt{\frac{y_i}{\alpha_1}}} - \frac{y_i}{\alpha_1} \right) + y_i} \quad (3.11).$$

Для спрощення аналізу можна ввести змінні:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{y_i}{\alpha_i} = S \quad (3.12),$$

$$\sum_{i=1}^3 \sqrt{\frac{y_i}{\alpha_1}} = T \quad (3.13).$$

Тоді вирази для x_i спрощуються до наступних:

$$x_1 = (100 + S) \cdot \frac{\sqrt{\frac{60}{\alpha_1}}}{T} - \frac{60}{\alpha_1} \quad (3.14),$$

$$x_2 = (100 + S) \cdot \frac{\sqrt{\frac{30}{\alpha_2}}}{T} - \frac{30}{\alpha_2} \quad (3.15),$$

$$x_3 = (100 + S) \cdot \frac{\sqrt{\frac{70}{\alpha_3}}}{T} - \frac{60}{\alpha_3} \quad (3.16).$$

Тоді ЦФ $F_x(x, y)$ приймає вигляд:

$$\text{ЦФ: } \max F_x(x, y) = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i \cdot \left((100+S) \cdot \frac{\sqrt{\frac{y_i}{\alpha_i}}}{T} - \frac{y_i}{\alpha_i} \right)}{\alpha_i \cdot \left((100+S) \cdot \frac{\sqrt{\frac{y_i}{\alpha_i}}}{T} - \frac{y_i}{\alpha_i} \right) + y_i} \quad (3.17).$$

Для знаходження екстремумів ЦФ $F_x(x, y)$ знайдемо часткові похідні $F_x(x, y)$ за α_i та прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial F_x(x, y)}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (3.18).$$

Обчислимо прирівняні до нуля часткові похідні та знайдемо значення α_i , при яких цільова функція $F_x(x, y)$ досягає свого максимуму. Для більш точного обчислення та пошуку було реалізовано програмний код на *python*, який реалізує розв'язання задачі на екстремум, а також візуалізує графічно розв'язок задачі. Результати виконання програми виведені на рисунках 3.1 та 3.2, повний код програми – у додатку А.

Оптимальні значення alpha_i: 1.00, 1.00, 1.00
Оптимальні значення x_i: 33.28, 35.96, 30.76
Максимальне значення F_x: 1.21

Рисунок 3.1 – Виведення результату виконання програми. Програма обчислює оптимальні значення α_i , знаходить максимальне значення ЦФ

$F_x(x, y)$, а також для отриманого набору даних обраховує значення оптимального розподілу $\{x_i\}$ ресурсів захисту.

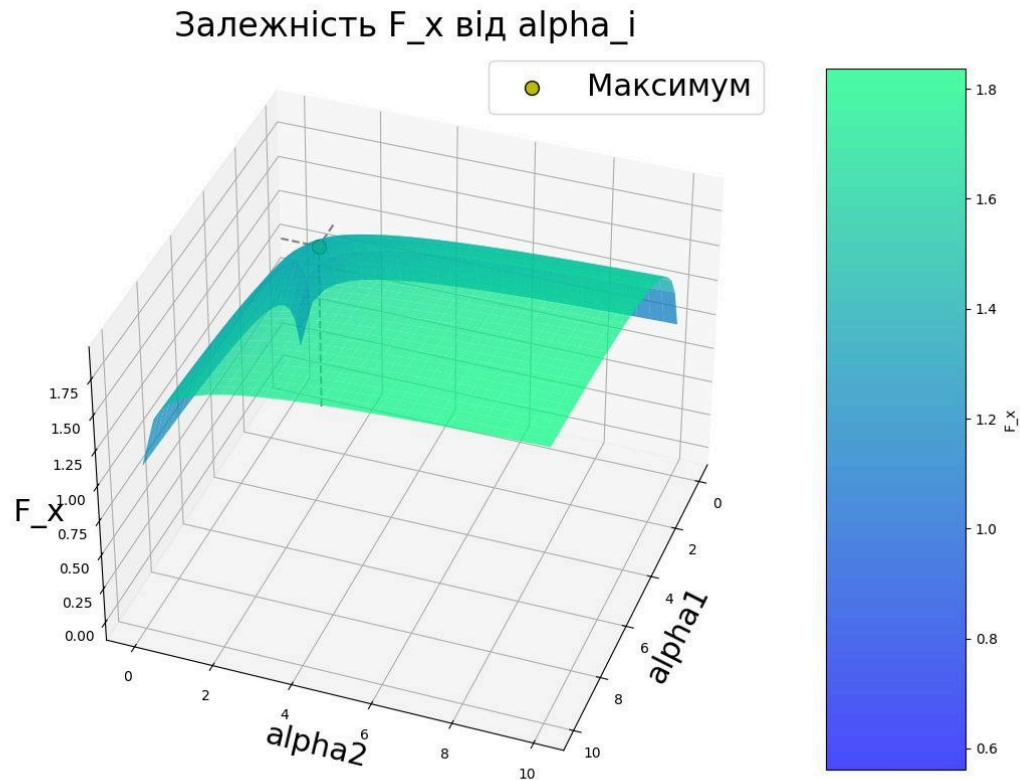


Рисунок 3.2 – Графічна ілюстрація залежності ЦФ $F_x(x, y)$ від значень α_1 та α_2 при фіксованому $\alpha_3 = 1$. На графіку відображено точку максимуму

ЦФ, яка досягається за умови $\forall i = \overline{1, 3}: \alpha_i = 1$

3.1.2 Залежність ЦФ від X_i

Розглянемо іншу залежність – функції перемоги $F_x(x, y)$ від параметра X_i , покладаючи $\alpha_i = 1$ і $\beta_i = 1$. Підставимо ці значення у формули (3.3-3.5):

$$x_1 = \left(100 + \frac{60}{1} + \frac{30}{1} + \frac{70}{1}\right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{60}{1} \cdot X_1}}{\sqrt{\frac{60}{1} \cdot X_1} + \sqrt{\frac{30}{1} \cdot X_2} + \sqrt{\frac{70}{1} \cdot X_3}} - \frac{60}{1} = \quad (3.19),$$

$$= 260 \cdot \frac{\sqrt{60X_1}}{\sqrt{60X_1} + \sqrt{30X_2} + \sqrt{70X_3}} - 60$$

$$x_2 = \left(100 + \frac{60}{1} + \frac{30}{1} + \frac{70}{1}\right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{30}{1} \cdot X_2}}{\sqrt{\frac{60}{1} \cdot X_1} + \sqrt{\frac{30}{1} \cdot X_2} + \sqrt{\frac{70}{1} \cdot X_3}} - \frac{30}{1} = \quad (3.20),$$

$$= 260 \cdot \frac{\sqrt{30X_2}}{\sqrt{60X_1} + \sqrt{30X_2} + \sqrt{70X_3}} - 30$$

$$x_3 = \left(100 + \frac{60}{1} + \frac{30}{1} + \frac{70}{1}\right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{70}{1} \cdot X_3}}{\sqrt{\frac{60}{1} \cdot X_1} + \sqrt{\frac{30}{1} \cdot X_2} + \sqrt{\frac{70}{1} \cdot X_3}} - \frac{70}{1} = \quad (3.21).$$

$$= 260 \cdot \frac{\sqrt{70X_3}}{\sqrt{60X_1} + \sqrt{30X_2} + \sqrt{70X_3}} - 70$$

Тоді ЦФ $F_x(x, y)$, що розглядається, враховуючи $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 1$ та задані значення в умові, визначається таким чином:

$$\text{ЦФ: } \max F_x(x, y) = \sum_{i=1}^3 X_i \cdot \frac{x_i}{x_i + y_i} \quad (3.22).$$

Підставимо тепер вирази для знаходження x_i (3.19-3.21) у функцію $F_x(x, y)$ (3.22) і отримаємо таке:

$$\begin{aligned} \text{ЦФ: } \max F_x(x, y) &= \sum_{i=1}^3 X_i \cdot \frac{\left(260 \cdot \frac{\sqrt{y_i \cdot X_i}}{\sum_{i=1}^3 \sqrt{y_i \cdot X_i}} - y_i\right)}{\left(260 \cdot \frac{\sqrt{y_i \cdot X_i}}{\sum_{i=1}^3 \sqrt{y_i \cdot X_i}} - y_i\right) + y_i} = \quad (3.23). \\ &= \sum_{i=1}^3 X_i \cdot \frac{260 \cdot \frac{\sqrt{y_i \cdot X_i}}{\sum_{i=1}^3 \sqrt{y_i \cdot X_i}} - y_i}{260 \cdot \frac{\sqrt{y_i \cdot X_i}}{\sum_{i=1}^3 \sqrt{y_i \cdot X_i}}} = \end{aligned}$$

$$\text{ЦФ: } \max_x F(x, y) = \sum_{i=1}^3 X_i \cdot \left(1 - \frac{y_i}{260 \cdot \frac{\sqrt{y_i \cdot X_i}}{\sum_{i=1}^3 \sqrt{y_i \cdot X_i}}} \right)$$

Нехай вага кожного серверу різна, тобто $X_1 \neq X_2 \neq X_3$. Це означає, що існує певна пріоритетність захисту якогось із серверів. За такої умови введемо деяке узагальнене позначення.

Не обмежуючи загальностей, виразимо кожне з X_i (для $i > 1$) як залежність від X_1 . Тоді $X_2 = k_2 \cdot X_1$, $X_3 = k_3 \cdot X_1$, $k_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. У загальному випадку $X_i = k_i \cdot X_1$, $k_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Тоді розподіл ресурсів $\{x_i\}$ із (2.41) можна переписати наступним чином:

$$\begin{aligned} x_i &= \left(R_x + \sum_{i=1}^n y_i \right) \cdot \frac{\sqrt{X_i \cdot y_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i \cdot y_i}} - y_i = & (3.24), \\ &= \left(R_x + \sum_{i=1}^n y_i \right) \cdot \frac{\sqrt{k_i \cdot X_1 \cdot y_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{k_i \cdot X_1 \cdot y_i}} - y_i = \\ &= \left(R_x + \sum_{i=1}^n y_i \right) \cdot \frac{\sqrt{X_1} \cdot \sqrt{k_i \cdot y_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{X_1} \cdot \sqrt{k_i \cdot y_i}} - y_i = \\ &= \left(R_x + \sum_{i=1}^n y_i \right) \cdot \frac{\sqrt{X_1} \cdot \sqrt{k_i \cdot y_i}}{\sqrt{X_1} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{k_i \cdot y_i}} - y_i = \\ &= \left(R_x + \sum_{i=1}^n y_i \right) \cdot \frac{\sqrt{k_i \cdot y_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{k_i \cdot y_i}} - y_i \end{aligned}$$

Як бачимо, вага кожного сервера для захисника не впливає на розподіл ресурсів $\{x_i\}$, він залежатиме лише від коефіцієнтів k_i . Дослідимо

тепер залежність ЦФ $F_x(x, y)$. Оскільки ваги серверів не впливатимуть на розподіл $\{x_i\}$, то можна аналізувати вигляд ЦФ, описаної у (3.22):

$$\begin{aligned} \text{ЦФ: } \max F_x(x, y) &= \sum_{i=1}^3 X_i \cdot \frac{x_i}{x_i + y_i} = \\ &= \sum_{i=1}^3 k_i \cdot X_1 \cdot \frac{x_i}{x_i + y_i} = \\ &= X_1 \cdot \sum_{i=1}^3 k_i \cdot \frac{x_i}{x_i + y_i} \end{aligned} \quad (3.25).$$

Як бачимо, залежність ЦФ від ваги перемоги на першому сервері є лінійною, тобто її можна задати формулою $f(x) = a \cdot x + b$. Оскільки наше значення необмежено зростає ($X_1 > 0$), то справедливим буде такий висновок: $\forall X_1 > 0: \neg \exists \max F_x(x, y)$, тому, для спрощення аналізу можна вважати ваги рівними “1”, а для такого варіанту розподіл $\{x_i\}$ та значення ЦФ було представлено раніше (рисунок 3.1).

Спробуємо тепер описати, яким чином можна наблизити запропоновану модель до реальних умов.

3.2 Наближення моделі оптимального розподілення ресурсів до реальних умов

У реальних умовах існує дуже багато варіантів розвитку подій, тому важливо адаптувати дії нашої системи захисту до дій зловмисника, аби передбачати можливі сценарії атак.

Описана вище модель дозволяє знаходити оптимальне розподілення ресурсів захисту за умови статичного вичерпно повного набору відомостей про систему “сервер-зловмисник”, де невідомими залишаються лише значення розподілу $\{x_i\}$.

Аби краще зрозуміти, як наблизити модель до реальних умов, опишемо кілька реальних ситуацій, а результати покажемо у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Ілюстрація можливих удосконалень моделі

№ з/п	Математичний опис	Тлумачення
1.	$(\forall i \in \mathbb{N}): \{y_i\} \neq \{y_{i+1}\}$	Розподілення ресурсів відбувається динамічно в часі, кожна одиницю часу i зловмисник реалізовує перерозподіл своїх ресурсів для досягнення відмови в обслуговуванні серверів захисника.
2.	$(\forall i \in \mathbb{N}): y_i = [y_{i_*}; y_i^*]$	Кіберрозвідка надає неповну інформацію про розподіл ресурсів зловмисника, а саме діапазони можливих значень виділеного ресурсу замість конкретного значення.
3.	$(\exists i \in \mathbb{N})(\exists a): x_i \leq a$ Для функції Лагранжа: $L(x, \lambda, \mu): \sum_{j=1}^k \mu_j \cdot h_j(x) \neq 0$	Через певні обставини якийсь із серверів не може обробляти більше певного a запитів за одиницю часу, тому таким чином можна задавати обмеження на максимально можливі значення ресурсів на кожному із серверів.
4.	$(\exists i \in \mathbb{N})(\forall j \in \mathbb{N}: i \neq j): X_i \gg X_j$	Цей варіант моделює ситуації, коли деякі сервери є критично важливими і їх втрата призведе до значно більших втрат, ніж втрата інших.

Кінець таблиці 3.1

5.	$(\exists i \in \mathbb{N}): \alpha_i \in (0; 1]$	<p>Через, наприклад, застаріле програмне забезпечення сервер може бути більш вразливим до атак, тому для досягнення такої ж ефективності захисту, як на інших серверах, необхідно використати більше ресурсу захисту.</p>
6.	<p>Нехай $P_a(t)$ – ймовірність атаки в момент часу t, $R_i(t)$ – ресурс на сервер i в момент часу t, $S_i(t)$ – стратегія розподілу для сервера i в момент часу t.</p> <p>Прогнозування ймовірності атаки: $P_a(t) = f(H(t)),$ де $H(t)$ – історичні дані про атаки до моменту часу t, f – залежність між історичними даними та ймовірністю атаки.</p> <p>Визначення оптимальних стратегій розподілу ресурсів: $S_i(t) = g(D_i(t)),$ де $D_i(t)$ – дані про атаки та використання ресурсів на сервері i до моменту часу t, g – розподіл ресурсів на основі цих даних.</p> <p>Адаптивні стратегії захисту: $R_i(t + 1) = h(R_i(t), S_i(t), P_a(t)),$ де h – кількість ресурсів, необхідна для серверу i у момент часу $t + 1$ на основі поточного розподілу ресурсів, оптимальної стратегії розподілу та прогнозу ймовірності атаки.</p>	<p>Використання машинного навчання для прогнозування ймовірності атак та визначення оптимальних стратегій розподілу ресурсів на основі історичних даних про атаки, а також ускладнення шляхом введення адаптивних стратегій захисту, які змінюються у відповідь на дії зловмисника. Це дозволить захиснику вчитися та коригувати свої дії на основі попередніх атак.</p>

Таблицю 3.1 можна доповнювати та розширювати, враховуючи різні нові параметри, за допомогою яких можна більше наблизити наведену модель (2.41) оптимального розподілення ресурсів захисту $\{x_i\}$ до реальних умов. У результаті, за допомогою програмного середовища, було розв'язано задачу про заданий діапазонами розподіл ресурсів $\{x_i\}$ (3.1.2).

3.2.1 Дослідження моделі при наданих неповних відомостях про дії зловмисника

Розглянемо випадок, коли нам надано інформацію не про чіткий розподіл ресурсів зловмисника, а лише приблизні межі, в яких може знаходитися значення цього розподілу. Тобто розподіл $\{y_i\}$ буде заданий таким чином:

$$y_i = [y_{i*}; y_i^*] \quad (3.26),$$

Для заданої базової задачі подамо розподіл зловмисника у вигляді діапазону:

$$\{y_i\} = \{[50; 70]; [20; 40]; [60; 80]\} \quad (3.26),$$

Оскільки кількість можливих комбінацій для наборів y рівна 2^n у загальному випадку, ($2^3 = 8$ – у нашому), то для щобільшого n аналізувати всі можливі варіанти розвитку подій стає складною задачею. Тому пропонуємо звернутися до теореми про мінімакс, сформульованої у 1945 році Оскаром Моргенштерном і Джоном фон Нейманом. За цією теоремою, сторона захисту мінімізує максимально можливе значення функції перемоги для зловмисника, що рівнозначне (ГПБ – гра з нульовою сумою) максимізації очікуваного виграшу. Тобто з усіх можливих варіантів подій захисник обирає найкращий варіант для зловмисника (найгірший для себе) та максимізує значення очікуваного виграшу, тобто:

$$\text{ЦФ: } \min F_y(x, y) = \max F_x(x, y) \Rightarrow \{y_i\} = \{y_i^*\} \quad (3.27).$$

У результаті було описано програму, яка рахує та виводить значення ЦФ $F_x(x, y)$ та розподіл захисту $\{x_i\}$ для найгіршого з можливих варіантів розподілу $\{y_i\}$ та порівнює очікуваний виграш для цього випадку з іншими. Результат виконання програми наведено на рисунку 3.3, повний код – у додатку Б.

```

Розглянемо найгірший варіант для сторони захисту
Для розподілу {y_i}=(70, 40, 80) оптимальний розподіл ресурсів захисту рівний {x_i}=(32.66, 37.60, 29.74). ЦФ F_x(x, y) = 1.07
Для інших варіантів значення ЦФ будуть рівні:
ЦФ F_x = 1.38 при {y_i}=(50, 20, 60)
ЦФ F_x = 1.32 при {y_i}=(50, 20, 80)
ЦФ F_x = 1.21 при {y_i}=(50, 40, 60)
ЦФ F_x = 1.15 при {y_i}=(50, 40, 80)
ЦФ F_x = 1.31 при {y_i}=(70, 20, 60)
ЦФ F_x = 1.24 при {y_i}=(70, 20, 80)
ЦФ F_x = 1.14 при {y_i}=(70, 40, 60)

```

Рисунок 3.3 – Виведення оптимального розподілу $\{x_i\}$ при наданих неповних відомостях про дії зловмисника.

Висновки до розділу 3

Було здійснено аналіз сформульованої раніше базової задачі на предмет залежності від не заданих в умові параметрів. Встановлено, що коефіцієнт впливу виділеного ресурсу захисту на сервер відіграє вагоме значення при обчисленні значень ЦФ $F_x(x, y)$ та розподілу $\{x_i\}$. Також встановлено, що на обчислення впливають не конкретні значення ваг, а лише їх співвідношення. За умови рівноважного розподілу ваги серверів на розподіл ресурсу захисту не впливають.

Проаналізовано можливі варіанти наближення задачі до більш реальних умов. Розглянуто випадок, коли надано неповну інформацію про дії зловмисника, також розв'язано видозмінену на основі цього задачу та отримано оптимальний розподіл ресурсів захисту.

ВИСНОВКИ

У ході дослідження було детально проаналізовано проблему розподілу захисних ресурсів в інформаційних системах. Виявлено, що оптимальний розподіл захисних ресурсів є критично важливим для мінімізації ризиків та підвищення стійкості систем до кібератак. Була сформульована базова задача розподілу ресурсів з урахуванням різних сценаріїв атак, а також наведено її формулювання для загального випадку.

Розглянуто гру полковника Блотто як інструмент дослідження розподілу ресурсів. Описано кілька математичних моделей ГПБ, що описують залежність між розподілом захисних ресурсів і ефективністю захисту. Обрано імовірнісну модель як найбільш доцільну, яка є більш наближеною до реальних умов у порівнянні з іншими.

Сформульовано математичну постановку задачі оптимізації розподілу захисних ресурсів та проведено її розв'язання в загальному випадку. Знайдено розв'язок задачі оптимального розподілу ресурсів захисту у моделі ГПБ за відомим розподілом ресурсів атакуючої сторони. Розглянуто випадок ймовірнісної моделі виграшу для двох гравців без обмежень по значеннях цінності перемог і ефективності вкладання ресурсів.

Показано, що відхід від концепції пошуку рівноваги у ГПБ дозволяє розширити сферу використання моделі разом зі спрощенням математичної задачі, яку вдалося розв'язати в аналітичному вигляді, що також спрощує застосування розв'язку.

Проведено аналіз отриманої моделі на прикладі базової задачі. Здійснено аналіз залежностей моделі від невідомих в умові параметрів, розглянуто сценарій розподілу атакуючих ресурсів, за якого точна інформація про дії зловмисника невідома, і визначено оптимальні стратегії розподілу захисних ресурсів для такого сценарію.

Було визначено можливі шляхи удосконалення моделі для наближення її до реальних умов. Запропоновано врахувати додаткові фактори, такі як динамічні зміни в розподілі атакуючих ресурсів та адаптивні стратегії захисту. Це дозволить підвищити точність моделі та її застосовність у реальних умовах.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

- [1] Kaspersky. (2023). DDoS attacks in Q1 2023. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://www.kaspersky.com/resource-center/threats/ddos-attacks>
- [2] NETSCOUT. (2023). Threat Intelligence Report 2023. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://www.netscout.com/threatreport>
- [3] ItPro. (2022). DDoS attacks surge to record numbers in 2022 as a result of Russia-Ukraine war. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://www.itpro.com/security/distributed-denial-of-service-ddos/367500/ddos-attacks-surge-to-record-numbers-in-2022>
- [4] Securelist. (2022). DDoS attacks in Q1 2022. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://securelist.com/ddos-attacks-in-q1-2022/106358/>
- [5] "Кібератака на «Київстар» (2023)" [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://uk.m.wikipedia.org/wiki/>
- [6] "monobank пережив масштабну DDoS-атаку із навантаженням 580 млн запитів" [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://forbes.ua/innovations/tse-prosto-kosmos-monobank-perezhiv-masshtabnu-ddos-ataku-iz-navantazhennyam-580-mln-zapitiv-yak-podibni-ataki-vplivayut-na-biznes-22012024-18687>
- [7] "Євробачення 2024: у роботі Дія стався збій під час голосування за переможця нацвідбир" [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://tsn.ua/video/video-novini/skandali-dovkola-yevrobachennya-chomu-obvalilasya-diya-ta-chim-vraziv-nacvidbir-cogo-roku.html>

[8] "Ukrainian government and banks once again hit by DDoS attacks" [Электронный ресурс]. Режим доступа:

<https://www.bleepingcomputer.com/news/security/ukrainian-government-and-banks-once-again-hit-by-ddos-attacks/>

[9] "Massive cyber attack hits Ukrainian e-services" [Электронный ресурс]. Режим доступа:

<https://euromaidanpress.com/2024/01/25/massive-cyber-attack-hits-ukrainian-e-services/>

[10] "Remarks by Assistant Secretary Graham Steele at the Federal Insurance Office and NYU Stern Volatility and Risk Institute Conference on Catastrophic Cyber Risk and a Potential Federal Insurance Response" [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://home.treasury.gov/news/press-releases/jy1922>

[11] Borel E. La théorie du jeu les équations intégrales á noyau symétrique // Comptes Rendus de l'Académie. 1921. [Текст] Vol. 173. P. 1304 – 1308.

[12] Еміль Борель і Жан Віль. Application de la théorie des probabilités aux jeux de hasard. Gauthier-Villars, Paris, 1938. [Текст] Передруковано в: E. Borel і A. Chéron Théorie mathématique du bridge à la portée de tous. Editions Jacques Gabay, Paris, 1991.

[13] RAND Corporation. RM-408. 1950. [Электронный ресурс] Режим доступа:

https://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/research_memoranda/2006/RM408.pdf

[14] "Blotto game." Wikipedia. [Электронный ресурс] Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Blotto_game

[15] Macdonell, M., & Mastronardi, N. (2015). Waging simple wars: a complete characterization of two-battlefield Blotto equilibria. [Электронный ресурс] Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/271404962_Waging_simple_wars_a_complete_characterization_of_two-battlefield_Blotto_equilibria

[16] Gross, O., & Wagner, R. A. (1950). A Continuous Colonel Blotto Game. RAND Corporation RM-408. [Текст] Режим доступа: https://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/research_memoranda/2006/RM408.pdf

[17] Friedman, L. (1958). Game-theory Models in the Allocation of Advertising Expenditure. *Operations Research*, [Текст] 6, 699 – 709.

[18] Roberson, B. (2006). The Colonel Blotto Game. *Economic Theory*, [Текст] 29, 1 – 24.

[19] Hortala-Vallve, R., & Llorente-Saguer, A. (2011). Pure strategy Nash equilibria in non-zero sum colonel Blotto games. *International Journal of Game Theory*, [Текст].

[20] Hart, S. (2008). Discrete Colonel Blotto and General Lotto Games. *International Journal of Game Theory*, [Текст] 36, 441 – 460.

[21] Chowdhury, S., Kovenock, D., & Sheremeta, R. (2009). An Experimental Investigation of Colonel Blotto Game. CESifo Working Paper Series, [Текст] 2688, 31.

[22] Modzelewski, K., Stein, J., & Yu, J. (2009). An Experimental Study of Classic Colonel Blotto Games. MIT Report, [Текст] 6.207/14.15, 19.

[23] Robson, R. W. (2005). Multi-Item Contest. Australian National University Working Paper, 446. [Электронный ресурс] Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/4980074_Multi-Item_Contests

[24] Boix-Adserà, E., Edelman, B. L., & Jayanti, S. (2020). The Multiplayer Colonel Blotto Game. [Электронный ресурс] Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/2002.05240v3>(<https://arxiv.org/abs/2002.05240v3>

[25] Garfinkel, M., & Skaperdas, S. (2006). Economics of conflict: An Overview. In T. Sandler and K. Hartley (Eds.), Handbook of Defense Economics, [Текст] Chapter 3.

[26] Tullock, G. (1980). Efficient rent seeking. In *Toward a theory of rent-seeking society.* College Station: Texas A&M University Press, [Текст] 97 – 112.

[27] Corchón, L. (2007). The theory of contests: a survey. *Review of Economic Design*, [Текст] 11, 69 – 100.

[28] Osborne, M. J., & Rubinstein, A. (1994). *A Course in Game Theory*. MIT Press. [Электронный ресурс] Режим доступа: <https://mitpress.mit.edu/books/course-game-theory>

- [29] Myerson, R. B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press. [Текст] P. 245-256. Режим доступа: <https://www.hup.harvard.edu/catalog.php?isbn=9780674341166>
- [30] Tadelis, S. (2013). *Game Theory: An Introduction*. Princeton University Press. [Текст] P. 78-88. Режим доступа: <https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691129082/game-theory>
- [31] Kaplan, T. R., & Zamir, S. (2012). Asymmetric Colonel Blotto Games. *Economic Theory*, [Текст] 41-52.
- [32] Camerer, C. F. (2003). Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interaction. Princeton University Press. [Текст] P. 301-325.
- [33] Fudenberg, D., & Tirole, J. (1991). Game Theory. MIT Press. [Текст] P. 200-225. Режим доступа: <https://mitpress.mit.edu/books/game-theory>
- [34] Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E., & Vazirani, V. V. (2007). Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press. [Текст] P. 337-340

ДОДАТОК А

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Вхідні дані
y = np.array([60, 30, 70])
R_x = 100
X = np.array([1, 1, 1])
beta = np.array([1, 1, 1])

# Функція для обчислення x_i
def compute_x(alpha):
    S = np.sum(beta * y / alpha)
    T = np.sum(np.sqrt(beta * y / alpha))
    x = (R_x + S) * np.sqrt(beta * y / alpha) / T - (beta * y / alpha)
    return x

# Функція для обчислення F_x
def compute_F_x(alpha):
    x = compute_x(alpha)
    F_x = np.sum(X * (alpha * x) / (alpha * x + beta * y))
    return -F_x # Мінімізуємо -F_x для пошуку максимального F_x

# Проста оптимізація з використанням градієнтного спуску
def gradient_descent(func, initial_guess, learning_rate=0.01, max_iter=1000, tolerance=1e-6):
    alpha = initial_guess
    for i in range(max_iter):
        grad = np.zeros_like(alpha)
        for j in range(len(alpha)):
            alpha_eps = np.copy(alpha)
            alpha_eps[j] += 1e-8
            grad[j] = (func(alpha_eps) - func(alpha)) / 1e-8

        alpha_new = alpha - learning_rate * grad

        if np.linalg.norm(alpha_new - alpha) < tolerance:

```

```

        break

    alpha = alpha_new
    return alpha

# Початкові значення alpha_i
initial_guess = np.array([1, 1, 1])
optimal_alpha = gradient_descent(compute_F_x, initial_guess)

# Обчислення оптимальних значень x_i
optimal_x = compute_x(optimal_alpha)
optimal_F_x = -compute_F_x(optimal_alpha)

# Вивід результатів
print(f"Оптимальні значення alpha_i: {optimal_alpha[0]:.2f}, {optimal_alpha[1]:.2f},
{optimal_alpha[2]:.2f}")
print(f"Оптимальні значення x_i: {optimal_x[0]:.2f}, {optimal_x[1]:.2f},
{optimal_x[2]:.2f}")
print(f"Максимальне значення F_x: {optimal_F_x:.2f}")

# Побудова графіка залежності F_x від alpha_i
alpha1_range = np.linspace(0.1, 10, 30)
alpha2_range = np.linspace(0.1, 10, 30)
alpha3_range = np.linspace(0.1, 10, 30)

A1, A2, A3 = np.meshgrid(alpha1_range, alpha2_range, alpha3_range)
F_x_values = np.zeros_like(A1)

for i in range(A1.shape[0]):
    for j in range(A1.shape[1]):
        for k in range(A1.shape[2]):
            F_x_values[i, j, k] = -compute_F_x([A1[i, j, k], A2[i, j, k], A3[i, j, k]])

# Візуалізація
fig = plt.figure(figsize=(14, 10))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

```

```

# Побудова поверхні
surf = ax.plot_surface(A1[:, :, 0], A2[:, :, 0], F_x_values[:, :, 0], cmap='winter',
edgecolor='none', alpha=0.7)

# Додавання точки максимуму
ax.scatter(optimal_alpha[0], optimal_alpha[1], optimal_F_x, color='y', s=100,
label='Максимум', edgecolors='k')
ax.text(optimal_alpha[0], optimal_alpha[1], optimal_F_x, f'({optimal_alpha[0]:.2f},
{optimal_alpha[1]:.2f}, {optimal_alpha[2]:.2f})", color='w')

# Додавання штрихпунктирної лінії до точок максимуму
ax.plot([optimal_alpha[0], optimal_alpha[0]], [optimal_alpha[1], optimal_alpha[1]], [0,
optimal_F_x], linestyle='--', color='gray')
ax.plot([optimal_alpha[0], optimal_alpha[0]], [0, optimal_alpha[1]], [optimal_F_x,
optimal_F_x], linestyle='--', color='gray')
ax.plot([0, optimal_alpha[0]], [optimal_alpha[1], optimal_alpha[1]], [optimal_F_x,
optimal_F_x], linestyle='--', color='gray')

# Вивід результатів на графіку
fig.suptitle(f'Оптимальні значення alpha_i: {optimal_alpha[0]:.2f}, {optimal_alpha[1]:.2f},
{optimal_alpha[2]:.2f}\n"
f'Оптимальні значення x_i: {optimal_x[0]:.2f}, {optimal_x[1]:.2f},
{optimal_x[2]:.2f}\n"
f'Максимальне значення F_x: {optimal_F_x:.2f}',
fontsize=24, ha='center', va='top', y=0.95)

# Налаштування осей
ax.set_xlabel('alpha1', fontsize=22)
ax.set_ylabel('alpha2', fontsize=22)
ax.set_zlabel('F_x', fontsize=22)
ax.set_title('Залежність F_x від alpha_i', fontsize=24)
ax.legend(fontsize=22)

# Колірна шкала
fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.5, aspect=5, label='F_x')

plt.show()

```

ДОДАТОК Б

```
import numpy as np

# Умова задачі
R_x = 100
y_ranges = [
    (50, 70),
    (20, 40),
    (60, 80)
]

# Генерація всіх можливих комбінацій y_i
y_combinations = [
    (y1, y2, y3)
    for y1 in y_ranges[0]
    for y2 in y_ranges[1]
    for y3 in y_ranges[2]
]

# Функції для обчислення x_i та F_x
def compute_x(y, R_x=100):
    X = np.ones(3)
    S = np.sum(y)
    T = np.sum(np.sqrt(X * y))
    return (R_x + S) * np.sqrt(X * y) / T - y

def compute_F_x(x, y):
    return np.sum(x / (x + y))

# Обчислення результатів для всіх комбінацій y_i
results = []
for y in y_combinations:
    y = np.array(y)
    x = compute_x(y)
    F_x = compute_F_x(x, y)
    results.append((y, x, F_x))
```

```

# Пошук найгіршого варіанту для сторони захисту
worst_result = min(results, key=lambda r: r[2])
worst_y = worst_result[0]
worst_x = worst_result[1]
worst_F_x = worst_result[2]

# Вивід результатів для всіх комбінацій
print("Розглянемо найгірший варіант для сторони захисту\n")

print(f"Для розподілу  $\{y_i\} = (\{worst\_y[0]\}, \{worst\_y[1]\}, \{worst\_y[2]\})$  оптимальний
розподіл ресурсів захисту рівний  $\{x_i\} = (\{worst\_x[0]\} \cdot 2f, \{worst\_x[1]\} \cdot 2f, \{worst\_x[2]\} \cdot 2f)$ .
ЦФ  $F_x(x, y) = \{worst\_F\_x\} \cdot 2f$ ")

print("\nДля інших варіантів значення ЦФ будуть рівні:")
for result in results:
    if not np.array_equal(result[0], worst_y):
        y = result[0]
        F_x = result[2]
        print(f"ЦФ  $F_x = \{F\_x\} \cdot 2f$  при  $\{y_i\} = (\{y[0]\}, \{y[1]\}, \{y[2]\})$ ")

```