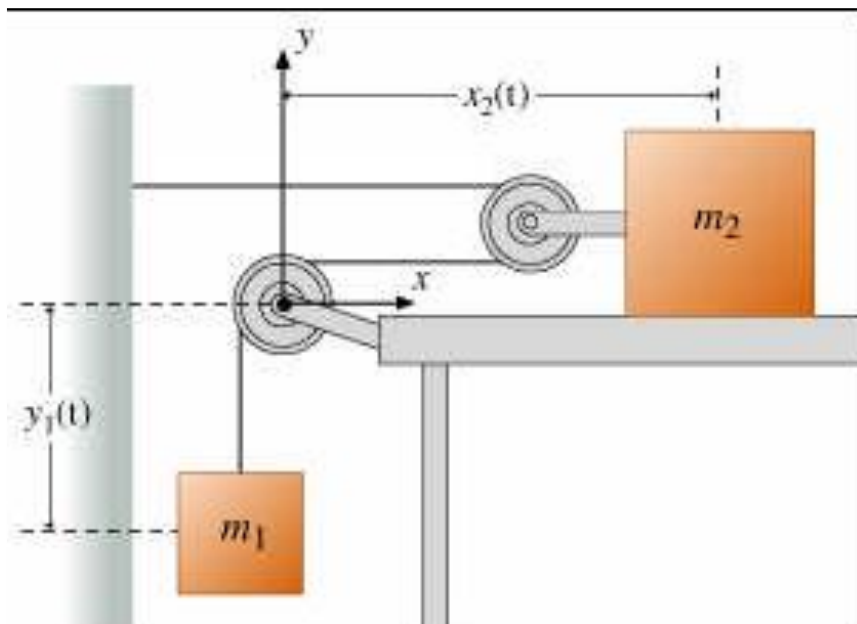


**В. Ф. РУСАКОВ**

**ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА.**

**МЕХАНІКА**





МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**В. Ф. Русаков**

# **ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА.**

## **МЕХАНІКА**

**Навчальний посібник**

Видання друге, виправлене і доповнене

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою  
програмою «Комп'ютерне моделювання фізичних процесів» спеціальності 104  
«Фізика та астрономія» і інженерно-технічних спеціальностей вищих  
навчальних закладів*

Електронне мережне навчальне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2022

**УДК 530 (075.8)**  
**В2я73**  
**Р 882**

Рецензент *Савченко Д.В.*, д-р. фіз.-мат. наук, доцент кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів КПІ ім. Ігоря Сікорського.

Відповідальний редактор *Решетняк С.О.*, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 3 від 01.12.2022 р.)  
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету  
(протокол № 08 від 09.11.2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

### **ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА. МЕХАНІКА**

Русаков В. Ф. Загальна фізика. Механіка. [Електронний ресурс]: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Комп'ютерне моделювання фізичних процесів» спеціальності 104 «Фізика та астрономія» і інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Електронні текстові дані (1 файл: 820 Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 149 с.

Посібник містить матеріал з механіки курсу загальної фізики, що викладається студентам спеціальності «Фізика та астрономія» і інженерно-технічних спеціальностей. Найскладніші питання викладені досить детально, частина матеріалу відповідно до вимог Болонського процесу запропонована для самостійного вивчення.

Посібник може бути використаний студентами інших спеціальностей під час вивчення курсу загальної фізики.

Реєстр. № 22/23-307. Обсяг 8,4 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© В.Ф. Русаков  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

## ВСТУП

Посібник призначений студентам, які починають вивчати фізику в університеті. Слова «починають вивчати» зовсім не означають, що в школі вивчали не фізику, а щось інше. Сенс цього висловлювання в тому, що всі наукові твердження по суті судження наближені. Фізика не виняток, її методи і закони правильні лише з певною точністю; тим, хто починає навчання у вузі, ці закони відомі на тому рівні, який дає середня школа. Причому треба підкреслити, що цей рівень – науковий, хоча й не дуже глибокий. Необхідно розуміти, що перевага науки не в її міфічній непорушності, а в тому, що вона готова будь-яку істину піддати сумніву, перевірити і або відкинути, якщо вона не витримає перевірки, або ще міцніше утвердитися у ній до того часу, поки не буде виконана ще більш ретельна перевірка. Навіть цілком очевидні, на перший погляд, співвідношення не є точними, містять припущення, про які або забувають, або не знають, або навіть не підозрюють. Підвищення точності під час повторної перевірки, як правило, виявляє дефект, виправлення якого приводить до виникнення більш точної теорії, придатної в ширшій області явищ.

Фізика є провідною галуззю природознавства. Завдання її, як і природознавства взагалі – пізнання світу природи.

Розвиток фізики складним чином переплітається з розвитком інших наук (математики, хімії, астрономії) і з усім ходом історії суспільства.

*Структурна схема фізики* складається з таких елементів:

1. Основні поняття, вироблені дотепер. В основі фізики лежать такі фундаментальні поняття, як рух, матерія, простір і час. Зміст цих понять змінюється у процесі розвитку науки.

2. Методи, які застосовуються у фізичних дослідженнях, і отримані з їх допомогою найважливіші результати.

3. Основні проблеми і напрями досліджень. Вони відображають як рівень розвитку фізики, так і потреби суспільства. Найбільш актуальними наразі є: розвиток фізики елементарних частинок і атомного ядра з метою подальшого

пізнання будови матерії; розвиток ядерної та створення основ термоядерної енергетики; вдосконалення методів перетворення і передачі енергії; створення нових матеріалів; створення теорії високотемпературної надпровідності.

4. Відгалуження фізики, що ведуть в інші галузі наук і в практику.

Перед курсом фізики стоять такі завдання:

1. Ознайомити студента з основними фізичними явищами, методами їх спостереження й експериментального дослідження. Вивчити основні принципи і закони фізики і їх математичний вираз. Навчити правильно висловлювати фізичні ідеї, кількісно формулювати і вирішувати фізичні задачі, оцінювати порядки фізичних величин, дати уявлення про межі застосування фізичних теорій і моделей.

2. Сформувати певні навички експериментальної роботи; ознайомити з головними методами точного вимірювання фізичних величин, найпростішими

методами обробки результатів експерименту й основними фізичними приладами.

3. Дати правильне уявлення про роль фізики у науково-технічному прогресі, розвивати інтерес до вирішення науково-технічних та інших прикладних питань.

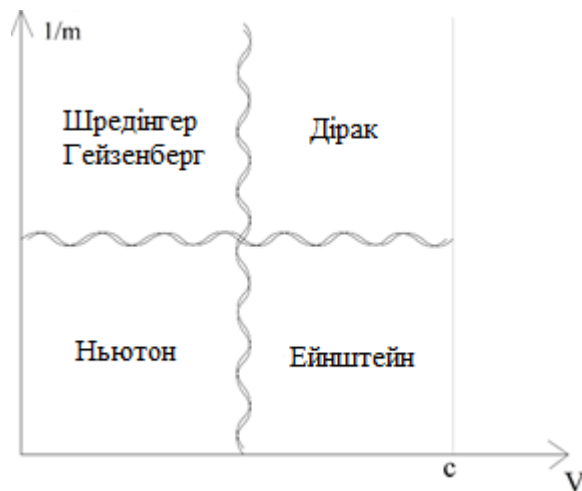


Рис. 1

У своєму розвитку механіка пройшла три епохи: класичну (Ньютон), релятивістську (Ейнштейн) і квантову (Шредінгер, Гейзенберг, Дірак), що схематично можна представити діаграмою (рис. 1), тут  $m$  – маса об'єкта,  $V$  – швидкість його руху,  $c$  – швидкість світла.

З кожним новим етапом закони ставали все більш точними, все більш загальними. Треба чи не треба враховувати релятивістські поправки у кожній задачі, вирішується окремо з урахуванням точності вимірювань.

Зауважимо, що нові теорії не відкидають старі, а включають їх у себе як граничний випадок, нове приймається не тому що воно новіше, а тому, що воно точніше. Біля витоків кожної науки стоїть експеримент. Дані дослідів піддаються теоретичному аналізу, створюються абстрактні поняття, які відображають суть явища. Роль теорії: створення абстрактних понять і встановлення законів, що зв'язують їх одне з одним.

Експериментальний і теоретичний етапи в пізнанні природи чергуються; дослід створює передумови для аналізу, теорія втілює їх в закони і передає експерименту для перевірки, нові дані знову аналізуються і так далі, – знання розширює свої межі та уточнюється.

Одна з основних переваг фізики полягає в єдності теорії й експерименту.

У своїх міркуваннях ми завжди користуємося ідеалізованими модельними об'єктами: замість тіл розглядаємо матеріальні точки, нитки – нерозтяжні, тіла – абсолютно тверді. Модель є абстрактною системою, яка у спрощеному вигляді представляє систему, що досліджується. Ідеалізація об'єкта є відсторонення від несуттєвого. Наша мета полягає у тому, щоб розкрити закон, а закон – це істотне в явищі. Тому при створенні моделей беруться до уваги тільки суттєві для даного кола явищ властивості і зв'язки. Моделі створюються на основі «фізичного підходу», а він виробляється у процесі вирішення задач. Щоб вирішувати задачі, необхідно знати теорію, до викладення якої ми і перейдемо.

# I. КІНЕМАТИКА

## § 1. Основні положення

Механіка – наука про рух тіл.

Сукупність тіл, виділена для розгляду, називається механічною системою.

Механічний рух – процес зміни взаємного розташування тіл.

Простір – форма існування матерії. Простір тривимірний – щоб задати положення точки у просторі, необхідно задати три числа.

Система координат (декартова) – три взаємно перпендикулярні осі. (Існують і інші системи, наприклад, сферична, циліндрична зі своїм набором координат для визначення положення точки у просторі).

Час – властивість матеріальних процесів мати певну тривалість (внутрішня характеристика процесу).

У більш загальному визначенні час - форма протікання фізичних процесів, умова можливості зміни. Час є одним з основних понять фізики. Це міра тривалості існування усіх об'єктів, характеристика послідовної зміни їх станів у процесах і самих процесів.

Тіло відліку – матеріальне тіло, відносно якого визначається положення точок простору.

Система координат разом з тілом відліку і годинником складають систему відліку.

Лінія, уздовж якої рухається тіло, називається траєкторією. Залежно від форми траєкторії розрізняють рух: прямолінійний і криволінійний.

Тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати, називається матеріальною точкою.

Кінематика – розділ механіки, який вивчає рух тіл, без урахування причин, які його породжують. Тобто, кінематика відповідає на питання *як* рухається тіло, але при цьому не ставиться питання *чому* воно рухається. Усі системи відліку в кінематиці рівноправні. У кінематиці розрізняють пряму і обернену задачі.

Пряма задача кінематики – за заданим положенням тіла в просторі у будь-який момент часу визначити швидкість і прискорення (також у будь-який момент часу). Метод розв’язання – диференціювання за часом функції, що визначає положення тіла у просторі.

Обернена задача – за заданим прискоренням, як функції часу, знайти швидкість і координати або радіус-вектор частинки у будь-який момент часу. Метод розв’язання – інтегрування за часом функцій, що визначають прискорення і швидкість. Для однозначного розв’язання оберненої задачі необхідно задати початкові умови, тобто початкове положення тіла і його швидкість у початковий момент часу.

Розрізняють три способи завдання руху: векторний, координатний і природний.

Розглянемо їх більш детально.

## § 2. Векторний спосіб завдання руху

1. *Пряма задача кінематики:* задана залежність від часу радіус-вектора, що характеризує положення матеріальної точки  $\vec{r}(t)$ . Необхідно знайти швидкість  $\vec{V}(t)$  та прискорення  $\vec{w}(t)$ . За визначенням

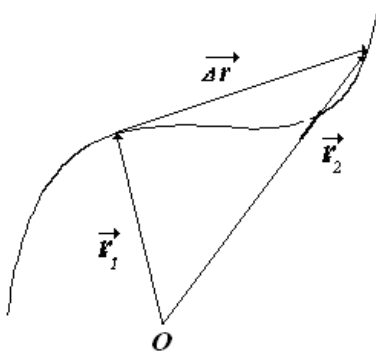


Рис. 2

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.1)$$

Похідні за часом у фізиці прийнято позначати крапкою над літерою.

Співвідношення (1.1) визначає миттєву швидкість. Якщо нас цікавлять середні значення за певний проміжок часу  $\Delta t$ , тоді:

$$\langle V(t) \rangle = \frac{S}{\Delta t}, \quad (1.2)$$

$$\langle \vec{V}(t) \rangle = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}, \quad (1.3)$$

тут  $S$  та  $\Delta \vec{r}(t)$  – шлях та переміщення тіла за час  $\Delta t$  (рис. 2).

Прискорення (миттєве), оскільки воно визначає швидкість зміни швидкості, знаходиться зі співвідношення:

$$\vec{w}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.4)$$

Для визначення середніх значень прискорення можна скористатися формулами аналогічними (1.2) та (1.3).

2. *Обернена задача кінематики*: задано прискорення тіла, як функція часу  $\vec{w}(t)$ , знайти його швидкість і радіус-вектор, якщо початкові умови мають вигляд:

$$\vec{V}(0) = \vec{V}_0, \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0.$$

Помноживши обидві частини рівності (1.4) на  $dt$ , отримаємо:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} dt = d\vec{V} = \vec{w}(t) dt. \quad (1.5)$$

Проінтегруємо з урахуванням початкових умов:

$$\int_{\vec{V}_0}^{\vec{V}(t)} d\vec{V} = \int_0^t \vec{w}(t) dt. \quad (1.6)$$

У випадку рівноприскореного руху  $\vec{w} = const$  замість (1.6) матимемо:

$$\vec{V}(t) - \vec{V}_0 = \vec{w}t,$$

або

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{w}t. \quad (1.7)$$

Далі помножимо (1.1) на  $dt$  і проінтегруємо:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{V}(t)dt. \quad (1.8)$$

У разі рівноприскореного руху, підставивши (1.7) в (1.8), отримаємо:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_0^t (\vec{V}_0 + \vec{w}t)dt = \vec{V}_0t + \frac{\vec{w}t^2}{2},$$

або

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0t + \frac{\vec{w}t^2}{2}. \quad (1.9)$$

Співвідношення (1.7) та (1.9) дають добре відомі зі шкільного курсу фізики співвідношення для рівноприскореного руху. Якщо ж прискорення залежить від часу  $\vec{w} = \vec{f}(t)$ , треба скориставшись співвідношенням (1.6) знайти швидкість, як функцію часу  $\vec{V}(t)$ , отриманий результат підставити у (1.8) і виконати інтегрування.

Шлях, пройдений тілом,  $s$ :

$$S(t) = \int_0^t |\vec{V}(t)|dt. \quad (1.10)$$

### § 3. Координатний спосіб завдання руху

1. *Пряма задача кінематики*: у декартовій системі координат задані координати матеріальної точки як функції часу, необхідно знайти проєкції швидкості і прискорення:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1.11)$$

Діючи, як і у попередньому випадку, отримаємо:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt}, & w_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ V_y &= \frac{dy}{dt}, & w_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ V_z &= \frac{dz}{dt}, & w_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Співвідношення (1.12) вирішують поставлену задачу. Модулі векторів швидкості і прискорення знайдемо, скориставшись визначенням модуля вектора:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \quad |\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

Від координатного способу завдання руху можна перейти до векторного, вводячи орти відповідних осей координат:  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \\ \vec{V}(t) &= V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}, \\ \vec{w}(t) &= w_x(t)\vec{i} + w_y(t)\vec{j} + w_z(t)\vec{k}. \end{aligned}$$

2. *Обернена задача кінематики*: задані проекції прискорення, необхідно знайти проекції вектора швидкості і координати матеріальної точки. Початкові умови мають вигляд:

$$V_x(0) = V_{x0}; \quad x(0) = x_0; \dots$$

Діючи як і у випадку розгляду векторного способу завдання руху, знайдемо:

$$V_x(t) = V_{x0} + \int_0^t w_x(t) dt,$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t V_x(t) dt. \quad (1.13)$$

Аналогічно для проєкцій  $y, z$  і  $V_y, V_z$ .

У випадку рівноприскореного руху замість (1.13) за аналогією з (1.7) та (1.9) матимемо:

$$\begin{aligned} V_x(t) &= V_{x0} + w_x t, \\ x(t) &= x_0 + V_{x0} t + \frac{w_x t^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Рівняння лінії, уздовж якої рухається тіло, називається рівнянням траєкторії. Якщо з (1.11) виключити час, отримаємо рівняння траєкторії в явному вигляді. Рівняння (1.11) називають рівнянням траєкторії у параметричному вигляді.

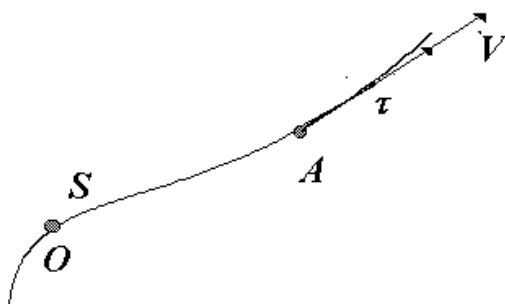


Рис.3

#### § 4. Природний спосіб завдання руху

Цей спосіб застосовується тоді, коли заздалегідь відома траєкторія точки, положення її визначається дуговою координатою  $S$ , яка відраховується уздовж траєкторії від обраного початку  $O$

(рис. 3). Рух визначено, якщо відомі: траєкторія, початок відліку, додатний напрям і закон руху  $S(t)$ .

Швидкість при криволінійному русі можна записати у вигляді:

$$\vec{V} = V_\tau \vec{\tau}, \quad (1.15)$$

де  $\vec{\tau}$  – одиничний вектор дотичної до траєкторії. Позначимо  $S$  – відстань від початку відліку до положення тіла в довільний момент часу, яка відрахована уздовж траєкторії, тобто шлях пройдений тілом. Тоді

$$V_\tau = \frac{dS}{dt}; \quad |\vec{V}| = |\vec{V}_\tau| = V_\tau.$$

Модуль вектора швидкості дорівнює його проекції на напрям одиничного вектора, дотичного до траєкторії.

Прискорення за визначенням є похідна від вектора швидкості. При диференціюванні необхідно врахувати, що в процесі руху може змінюватися як модуль вектора швидкості, так і напрям вектора  $\vec{\tau}$ :

$$\vec{w} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt} \vec{\tau} + V_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}, \quad (1.16)$$

$\frac{dV_\tau}{dt} = w_\tau$  – характеризує зміну швидкості за величиною і називається тангенціальним прискоренням, воно спрямоване по дотичній до траєкторії. Розглянемо другий доданок (1.16), помноживши і поділивши його на  $dS$ . Тоді

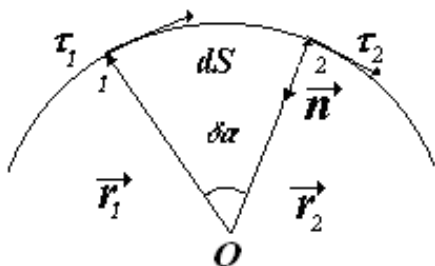


Рис. 4

$$V_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} \frac{dS}{dS} = V_\tau \frac{dS}{dt} \frac{d\vec{\tau}}{dS} = V_\tau^2 \frac{d\vec{\tau}}{dS}. \quad (1.17)$$

Щоб зрозуміти сенс отриманого результату, зробимо так: візьмемо малу ділянку траєкторії (рис. 4), яку можна розглядати як дугу деякого кола  $r = r_1 = r_2$ .

За час  $dt$  частинка перейде з точки 1 у точку 2, пройшовши шлях  $dS$ , вектор  $\vec{\tau}$

отримає приріст  $d\vec{\tau}$ . Визначимо кут, на який повернеться радіус-вектор:  $\delta\alpha = \frac{dS}{r}$ , з іншого боку (рис. 5):  $\sin\frac{\delta\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = \frac{1}{2}|d\vec{\tau}| = \frac{1}{2}\delta\alpha$ . Тут ми скористались тим, що синус малого кута дорівнює самому куту, якщо останній виражений у радіанах:  $\sin\alpha \approx \alpha$ ,  $\alpha \ll 1$ . Тоді  $|d\vec{\tau}| = \frac{dS}{r}$ ;  $\frac{1}{r} = \frac{|d\vec{\tau}|}{dS}$ .

Якщо довжина дуги прямує до нуля  $dS \rightarrow 0$ , то вектор  $d\vec{\tau}$  стає перпендикулярним до  $\vec{\tau}$ :  $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$  (рис. 5) і, отже, вектор  $d\vec{\tau}$  спрямований уздовж нормалі до траєкторії, тобто  $\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{\vec{n}}{r}$ .

Підставляючи отримане співвідношення в (1.17), знайдемо:

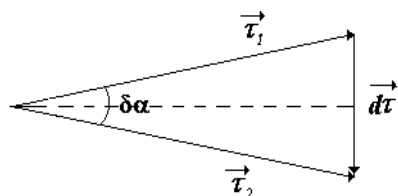


Рис. 5

$$V_{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{V_{\tau}^2}{r} \vec{n} = w_n \vec{n}. \quad (1.18)$$

Ця складова прискорення завжди спрямована до центру кривизни траєкторії і

називається доцентровим прискоренням, модуль якого дорівнює:  $w_n = \frac{V_{\tau}^2}{r}$ .

Повне прискорення точки що рухається вздовж криволінійної траєкторії, запишеться у вигляді:

$$\vec{w} = w_{\tau} \vec{\tau} + w_n \vec{n} = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} + \frac{V^2}{r} \vec{n},$$

$$|w| = \sqrt{w_{\tau}^2 + w_n^2}. \quad (1.19)$$

Величина  $\frac{1}{r} = k$  називається кривизною, а  $r$  – радіусом кривизни траєкторії.

## § 5. Кінематика твердого тіла

Твердим тілом у механіці називають тіло, яке не деформується під дією зовнішніх сил, інакше кажучи воно є абсолютно твердим.

Розрізняють п'ять видів руху твердого тіла: 1) поступальний; 2) обертальний навколо нерухомої осі; 3) плоский рух; 4) рух навколо нерухомої точки; 5) вільний рух.

Основними є перші два види рухів, інші можна, в загальному випадку, звести до їх сукупності. Розглянемо перші два види рухів.

1. *Поступальний рух.* Поступальним рухом твердого тіла називається такий, при якому усі його точки рухаються по однаковим траєкторіям. Це означає, що швидкості і прискорення точок у будь-який момент часу однакові. Будь-яка пряма, проведена між будь-якими точками тіла, переміщується паралельно самій собі. Таким чином, цей рух повністю характеризується заданням руху будь-якої однієї точки тіла, тобто ця задача зводиться до задачі кінематики точки, способи розв'язання якої наведені у попередніх параграфах.

2. *Обертання навколо нерухомої осі.* Обертальний рух навколо нерухомої осі – це такий рух, при якому принаймні дві точки тіла залишаються весь час нерухомими. Пряма, що проходить через ці точки, називається віссю обертання. Усі точки, що лежать на осі обертання, нерухомі. Інші точки рухаються по колах,

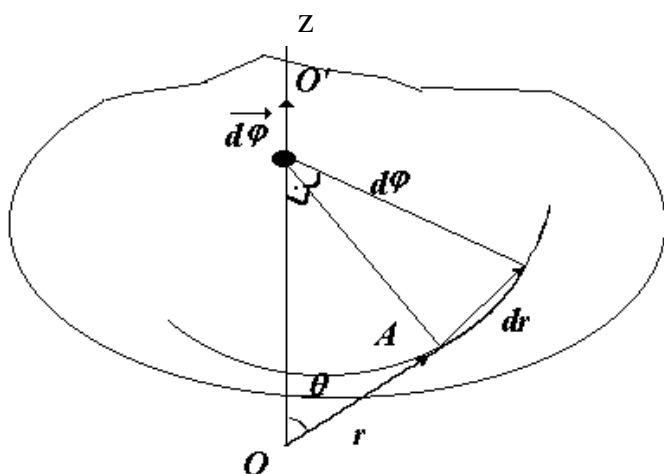


Рис. 6

центри яких лежать на осі обертання, а площини, які містять кола, перпендикулярні до осі обертання.

Нехай тверде тіло, обертаючись навколо нерухомої осі  $OO'$ , за час  $dt$  здійснило нескінченно малий поворот. Відповідний кут повороту будемо

характеризувати вектором  $d\vec{\varphi}$ , модуль якого дорівнює куту повороту, а напрямок пов'язаний з напрямком обертання тіла правилом правого гвинта, причому спрямований цей вектор уздовж осі обертання.

Знайдемо елементарне переміщення будь-якої точки  $A$  твердого тіла при такому повороті (рис. 6). Положення точки  $A$  задається радіус-вектором  $\vec{r}$ , проведеним з точки  $O$  на осі обертання (точка  $O$  – початок системи відліку, з метою спрощення рисунку показана тільки вісь  $OZ$ ). Тоді лінійне переміщення кінця радіус-вектора  $\vec{r}$  пов'язане з кутом повороту  $d\varphi$  співвідношенням:

$$|d\vec{r}| = r d\varphi \sin \theta, \quad (1.20)$$

з урахуванням напрямку векторів, вектор  $d\vec{r}$  можна виразити через векторний добуток векторів  $d\vec{\varphi}$  і  $\vec{r}$ :

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]. \quad (1.21)$$

Співвідношення (1.21) справедливе лише для нескінченно малого кута повороту, оскільки тільки такі кути можна розглядати як вектори. Легко показати, що введений вектор елементарного кута повороту задовольняє правило векторного додавання.

Вектор  $d\vec{\varphi}$ , як зазначено вище, спрямований уздовж осі обертання, його напрямок пов'язаний з напрямком обертання, такі вектори називаються аксіальними.

Вектор кутової швидкості і прискорення можна ввести за аналогією з лінійними характеристиками.

Кутова швидкість:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.22)$$

За напрямком  $\vec{\omega}$  збігається з напрямком вектора  $d\vec{\varphi}$ .

Зміна кутової швидкості з часом характеризується вектором кутового прискорення:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \quad (1.23)$$

Напрямок вектора кутового прискорення  $\vec{\beta}$  збігається з напрямком зміни вектора кутової швидкості  $d\vec{\omega}$ . Кутове прискорення  $\vec{\beta}$ , як і кутова швидкість, – псевдовектор.

Можна ввести проєкції  $\vec{\omega}$  і  $\vec{\beta}$  на вісь обертання, вибравши додатний її напрямок відповідно до правила правого гвинта.

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (1.24)$$

$$\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt}, \quad (1.25)$$

$\omega_z$  та  $\beta_z$  – алгебраїчні величини, їх знак характеризує напрямок відповідного вектора відносно осі. Таким чином, знаючи  $\varphi(t)$  можна, використовуючи (1.24) і (1.25), знайти  $\omega_z$  та  $\beta_z$  у будь-який момент часу – аналог прямої задачі кінематики для твердого тіла, можна поставити і вирішити обернену задачу.

## § 6. Зв'язок між лінійними і кутовими кінематичними характеристиками руху

Поставимо питання про визначення лінійних характеристик обертального руху. Нехай нас цікавить лінійна швидкість  $\vec{V}$  довільної точки  $A$  твердого тіла, яке здійснює обертання навколо нерухомої осі  $OO'$  з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Положення точки  $A$  відносно точки  $O$  характеризується радіус-вектором  $\vec{r}$  (рис.7). Скористаємося формулою (1.21), розділивши обидві її частини на  $dt$ :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} \right],$$

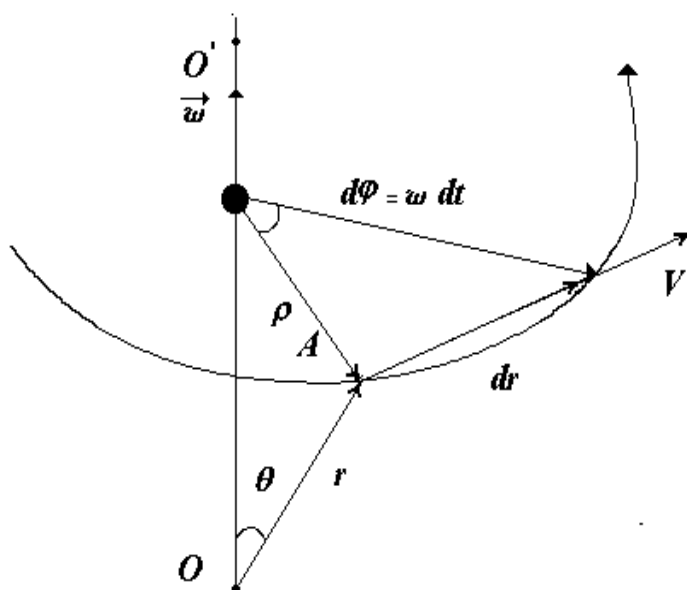


Рис.7

Або

$$\vec{V}(t) = [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}]. \quad (1.26)$$

Модуль лінійної швидкості є

$$V = \omega r \sin \theta = \omega \rho,$$

де  $\rho = r \sin \theta$  – радіус кола, по якому рухається точка  $A$ .

Продиференціювавши (1.26) за часом, отримаємо

лінійне прискорення довільної точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{w}(t) = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[ \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right],$$

або

$$\vec{w}(t) = [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]. \quad (1.27)$$

Оскільки розглядається випадок нерухомої осі, кутове прискорення і кутова швидкість тіла паралельні одне одному  $\vec{\beta} \parallel \vec{\omega}$ , перший доданок (1.27) є тангенціальне прискорення, другий – нормальне.

$$w_\tau = |[\vec{\beta} \times \vec{r}]| = \beta r \sin \theta = \beta \rho,$$

$$w_n = |[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]| = \omega^2 \rho.$$

Покажемо, як отримується останнє співвідношення. Враховуючи, що  $\vec{V}(t) = [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}]$  і підставляючи це значення в останнє співвідношення, отримаємо:

$$w_n = |[\vec{\omega} \times \vec{V}]| = \omega V = \omega^2 \rho,$$

або можна скористатися визначенням подвійного векторного добутку:

$$\begin{aligned} w_n &= |\vec{\omega} \omega r \cos \theta - \vec{r} \omega^2| = \sqrt{\omega^4 r_x^2 + \omega^4 r_y^2 + (\omega^2 r \cos \theta - \omega^2 r_z)^2} = \\ &= \sqrt{\omega^4 r_x^2 + \omega^4 r_y^2} = \omega^2 \rho = \sqrt{\omega^4 r^2 (1 - \cos^2 \theta)}, \\ r_z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Модуль повного прискорення  $\epsilon$

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \rho \sqrt{\beta^2 + \omega^4}. \quad (1.28)$$

## II. ПРИНЦИП ВІДНОСНОСТІ

Розглянемо рух відносно різних систем відліку. Нехай маємо дві системи відліку  $K$  та  $K'$ . Нехай система  $K'$  рухається відносно системи  $K$  з постійною швидкістю  $\vec{V}$  у напрямку осі  $X$ . Осі в системах  $K$  та  $K'$  орієнтовані як показано на рис. 8. Можна показати, виходячи з однорідності і ізотропності простору, що загальний випадок взаємного розташування координатних осей можна звести до випадку, що розглядається. Припускається, що система  $K$  – інерціальна, тоді і  $K'$  – інерціальна.

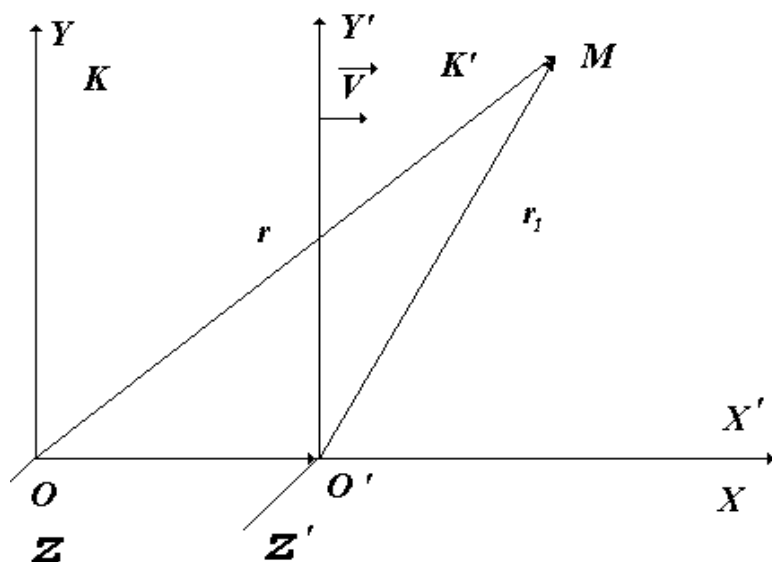


Рис. 8

Система відліку, в якій усі вільні тіла рухаються рівномірно і прямолінійно, називається інерціальною (нижче визначення буде уточнено).

Узагальнивши результати вивчення течії фізичних процесів у різних системах відліку, які рухаються одна відносно одної, Галілей сформулював *принцип відносності*: в усіх

інерціальних системах відліку усі *механічні* явища протікають однаково. (Галілей вважав, що час в усіх інерціальних системах тече однаково).

Цей принцип підтверджується усім різноманіттям застосувань класичної механіки до руху тіл, швидкості яких значно менші за швидкість світла.

Знайдемо формули перетворення координат при переході від нерухомої системи координат  $K$  до рухомої системи  $K'$ . Рухома система координат у кожен момент часу займає певне положення відносно нерухомої. Якщо початки обох систем збігаються в початковий момент часу  $t = 0$ , то в момент  $t$  початок рухомої

системи координат знаходиться у точці  $x = Vt$  нерухомої системи. Перетворення Галілея припускають, що для координат і часу систем  $K$  і  $K'$  існує таке співвідношення, яке існувало б між ними, якби ці системи у даний момент часу знаходились у стані спокою одна відносно одної.

Нехай у момент часу  $t$ , точка, що рухається, знаходилася у положенні  $M$ . Її положення визначається радіус-вектором  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ . За час  $t$  початок координат перейшов з точки  $O$  в точку  $O'$ ,  $\overrightarrow{OO'} = \vec{V}t$  (рис. 8).

Тоді

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t, \quad t = t'. \quad (2.1)$$

У проекціях на координатні осі:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (2.2)$$

Формули зворотних перетворень легко отримати з принципу відносності. За нерухому систему відліку можна обрати систему  $K'$ , тоді система  $K$  буде рухатися у протилежний бік зі швидкістю  $-\vec{V}$ . Отже, зворотне перетворення отримаємо зі співвідношень (2.1) та (2.2) заміною  $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t, \quad t = t'. \quad (2.3)$$

У координатній формі:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (2.4)$$

Ці формули дають розв'язок поставленої задачі і називаються *перетвореннями Галілея*.

Продиференціювавши (2.1) за часом, отримаємо нерелятивістський закон додавання швидкостей:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{V}. \quad (2.5)$$

або

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}.$$

Тут враховано, що тривалості подій в обох системах відліку співпадають. Інакше кажучи, час інваріантний стосовно перетворень Галілея.

Продиференціювавши (2.5), з урахуванням того, що  $\vec{V} = const$ , отримаємо

$$\vec{w} = \vec{w}', \quad (2.6)$$

тобто прискорення *інваріантне щодо перетворень Галілея*.

## § 7. Принцип відносності Ейнштейна

Спеціальна теорія відносності (СТВ) будується на двох основних принципах або постулатах:

1. Закони, згідно з якими змінюються стани фізичних систем, не залежать від того, до якої з двох систем відліку, які рухаються одна відносно одної рівномірно і прямолінійно, відносяться ці зміни.

Іншими словами: основні закони **фізичних** явищ незмінні в усіх інерціальних системах відліку.

2. Швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху його джерела.

На цих двох постулатах Ейнштейн побудував усю СТВ. У своїй першій статті «До електродинаміки тіл, що рухаються» (1905) він перед формулюванням цих принципів навів міркування про відносність одночасності. Ми зробимо трохи інакше: спочатку отримаємо перетворення координат і часу

при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, які будуть задовольняти цим постулатам (перетворення Лоренца), і вже потім повернемося до питання про одночасність.

Отже, нехай маємо дві системи координат  $K$  та  $K'$ , у кожній з них є система синхронізованих годинників. Враховуючи, що простір однорідний та ізотропний, час є однорідним і що в момент  $t = 0$  було  $t' = 0$  і початки систем координат збігалися, можемо записати зв'язок між координатами, якщо масштаби в обох системах координат однакові, то

$$\begin{cases} y' = y, & z' = z \\ x' = \alpha(x - Vt), \\ t' = \gamma t - \delta x \end{cases} \quad (2.7)$$

оскільки при  $x' = 0$  завжди буде  $x = Vt$ . При  $V = 0$  повинно бути  $\delta = 0$ , оскільки годинники, які знаходяться у стані спокою один відносно одного йдуть з однаковою швидкістю, тому коефіцієнт  $\delta$  повинен бути пропорційний швидкості  $\delta = \gamma kV$ , тоді:

$$\begin{cases} y' = y, & z' = z \\ x' = \alpha(x - Vt) . \\ t' = \gamma(t - kVx) \end{cases} \quad (2.8)$$

Використовуючи принцип відносності, можемо відразу записати зворотне перетворення (змінивши знак швидкості руху системи на протилежний):

$$\begin{cases} y = y', & z = z' \\ x = \alpha(x' + Vt') . \\ t = \gamma(t' + kVx') \end{cases} \quad (2.9)$$

Вирішимо систему (2.8) відносно  $x$  та  $t$  і потім порівняємо отриманий результат з відповідними виразами у (2.9):

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \alpha V t \\ t' = \gamma t - \gamma k V x \end{cases} ; \Rightarrow t = \frac{1}{\gamma} (t' + \gamma k V x);$$

$$x' = \alpha x - \alpha V \frac{1}{\gamma} t' - \alpha k V^2 x;$$

$$x' + \frac{\alpha V}{\gamma} t' = \alpha x (1 - k V^2).$$

Виражаючи звідси  $x$  і порівнюючи з виразом для  $x$  із (2.9), легко отримати:

$$\alpha = \frac{\gamma}{\gamma \alpha (1 - k V^2)}; \frac{\alpha V}{\gamma \alpha (1 - k V^2)} = \alpha V;$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - k V^2}}; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - k V^2}}. \quad (2.10)$$

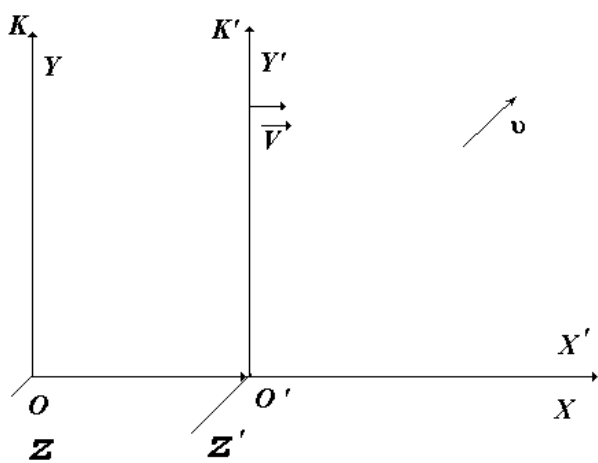


Рис.9

Підставляючи знайдені вирази у (2.9), отримаємо:

$$\begin{cases} y' = y, z' = z \\ x' = \frac{x - V t}{\sqrt{1 - k V^2}} \\ t' = \frac{t - k V x}{\sqrt{1 - k V^2}} \end{cases} \quad (2.11)$$

Співвідношення (2.11) пов'язують координати і час у системі, що рухається, з відповідними величинами у нерухомій системі відліку, вони називаються перетвореннями Лоренца для координат і часу. Останнє рівняння (2.11) показує, що швидкість плину часу залежить від швидкості руху хронометра.

Розглянемо, як зв'язані швидкості тіла у рухомій і нерухомій системах відліку, тобто з'ясуємо, як додаються швидкості.

Тіло має швидкість  $v$  відносно системи  $K$ . Якою буде його швидкість відносно системи  $K'$ , якщо система  $K'$  має по відношенню до системи  $K$  швидкість  $V$  (рис. 9):

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - kV^2}}}{\frac{\Delta t - kV\Delta x}{\sqrt{1 - kV^2}}} = \frac{v - V}{1 - kvV}. \quad (2.12)$$

Оскільки ми розглядаємо механічний рух, координати і час повинні бути дійсними, отже, підкореневий вираз у співвідношеннях (2.11) має бути додатним  $1 - kV^2 \geq 0$ , звідки випливає існування граничної швидкості  $V \leq \frac{1}{\sqrt{k}} = v_{\text{гранич}}$ .

Нехай у системі  $K$  частинка має граничну швидкість  $\frac{1}{\sqrt{k}}$ , знайдемо її швидкість у  $K'$ :  $v'_{\text{гранич}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{k}} - V}{1 - k\frac{1}{\sqrt{k}}V} = \frac{1}{\sqrt{k}} = v_{\text{гранич}}$ , тобто в усіх інерціальних системах відліку гранична швидкість однакова.

Із законів поширення електромагнітних хвиль випливає, що швидкість їх поширення в усіх системах однакова, відповідно до другого постулату вона не залежить від стану руху джерела світла, це швидкість світла у вакуумі  $c$ , тобто гранична швидкість.

Зі співвідношення (2.11) у граничному випадку  $V \ll c$  легко отримати перетворення Галілея, тобто вони є граничним випадком перетворень Лоренца, і, отже, Ньютонова механіка – граничний випадок механіки Ейнштейна.

## § 8. Релятивістські ефекти

### Уповільнення часу

Нехай в  $K$ -системі точка  $A$  знаходиться у стані спокою і у цій точці відбувається певний процес (наприклад, крапає вода, рис. 10). Вимірємо тривалість цього процесу в  $K$  і  $K'$ -системах.

Скористаємося перетвореннями Лоренца для часу:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - kV\Delta x}{\sqrt{1 - kV^2}}.$$

Оскільки точка  $A$  у  $K$ -системі перебуває у стані спокою, то  $\Delta x = 0$ . Тоді з попереднього рівняння отримаємо:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - kV^2}}. \quad (2.13)$$

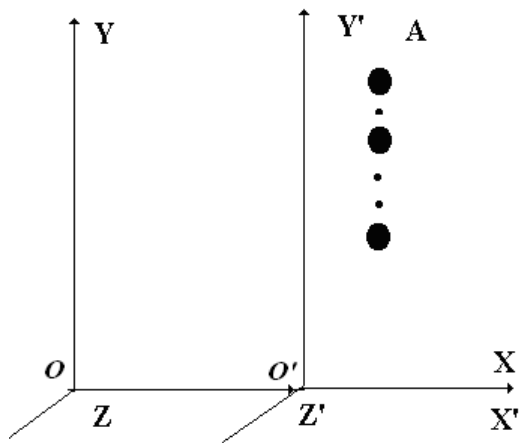


Рис. 10

Зауважимо, що значення часових інтервалів не повинні залежати від значень просторових координат у будь-якій системі відліку, інакше ми б могли змінювати швидкість ходу годинників, просто переміщуючи їх у різні точки простору однієї й тієї ж системи відліку, але тоді порушувалася б однорідність простору, і, крім того, була б неможлива

синхронізація годинників.

Аналізуючи формулу (2.13), бачимо, що тривалість подій у різних системах різна. Позначимо  $\Delta t = \tau_0$  – час, виміряний нерухомим годинником,  $\Delta t' = \tau'$  – час, виміряний рухомим годинником, тобто

$$\tau' = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - kV^2}}. \quad (2.14)$$

Час, який виміряно нерухомим годинником, називається власним часом. Тоді: інтервал часу, який вимірюється у рухомій системі, *довше* інтервалу у системі, яка перебуває у стані спокою.

Тобто годинник, що рухається, йде повільніше, ніж той, що перебуває у стані спокою. Слово уповільнення означає подовження інтервалу часу.

Підтвердженням цього ефекту служать експерименти з  $\mu$ -мезонами, які з'являються в результаті розпаду  $\pi$ -мезонів і момент народження  $\mu$ -мезона можна досить точно зафіксувати. Власний час життя  $\mu$ -мезона:  $\tau_0 \approx 2 \cdot 10^{-6}$  с. Тоді максимальна довжина його пробігу повинна дорівнювати  $l_{\max} \approx 3 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \approx 6 \cdot 10^4$  см = 600 м.

Істинна довжина пробігу  $l_{\text{екс}}$  значно більша.

Покажемо, що явище уповільнення часу є наслідком інваріантності швидкості світла. Помістимо в системі відліку  $K$  еталонний годинник. Цей годинник будемо використовувати для визначення інтервалу часу  $\tau_0$ , за який світловий сигнал проходить відстань від нерухомого джерела  $S$  до нерухомого

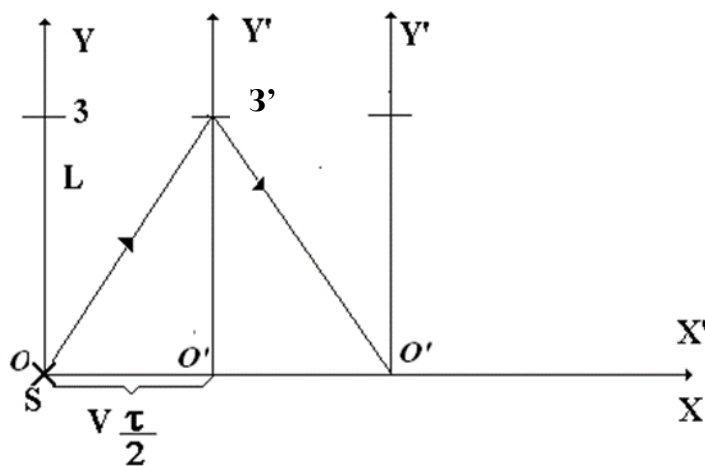


Рис. 11

дзеркала  $Z$  і назад (рис. 11). Нехай промінь рухається уздовж осі  $Y$ . Тоді:

$$\tau_0 = \frac{2L}{c}.$$

Такий час покаже нерухомий у  $K$ -системі годинник. Час проходження сигналу можна виміряти у

системі  $K'$ , яка рухається відносно  $K$  зі швидкістю  $V$  у напрямку осі  $X$ . Шлях, який проходить світло у системі  $K'$ , довший, оскільки за час проходження сигналу від джерела до дзеркала  $Z'$  джерело і дзеркало змістяться на відстань

$V \cdot \frac{\tau}{2}$  і за час руху у зворотному напрямку ще на таку ж відстань: тут  $\tau$  – час

виміряний у рухомій системі (рис. 11). Тоді повний шлях  $L'$ , відповідно до рисунка, буде дорівнювати

$$L' = 2\left(L^2 + \frac{V^2\tau^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Ця відстань повинна дорівнювати добутку  $c\tau$ , оскільки світловий сигнал завжди рухається зі швидкістю світла  $c$ . Отже,

$$(c\tau)^2 = 4L^2 + V^2\tau^2,$$

або

$$\tau = \frac{2L}{(c^2 - V^2)^{1/2}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Враховуючи, що  $\frac{2L}{c} = \tau_0$ , отримаємо вираз (2.14), який зв'яже тривалості подій в рухомій і нерухомій системах координат:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

### Скорочення довжини

Нехай якесь тіло, розмір якого у напрямку осі  $X - AB$ , знаходиться у стані спокою у  $K$ -системі (рис. 12). Довжина його у цій системі відліку

$$l_0 = X_b - X_a,$$

у  $K'$ -системі відліку

$$l' = X'_b - X'_a.$$

Використовуючи перетворення Лоренца, отримаємо:

$$l' = \frac{l_0 - V(t_b - t_a)}{\sqrt{1 - kV^2}}. \quad (2.15)$$

Визначення координат початку і кінця потрібно проводити одночасно, за рухомими годинниками.

Тоді

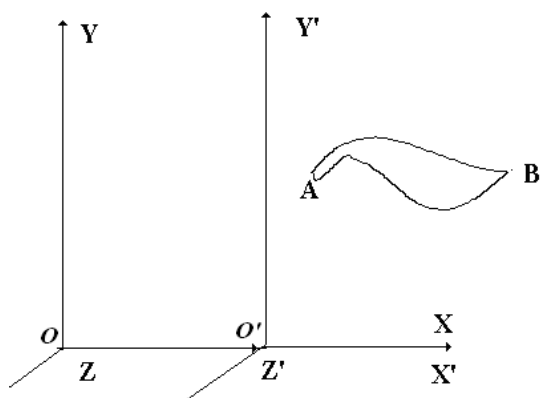


Рис. 12

$$\Delta t' = 0 = \frac{\Delta t - kV\Delta x}{\sqrt{1 - kV^2}}. \quad (2.16)$$

Звідки

$$\Delta t = kV\Delta x = kVl_0. \quad (2.16a)$$

Співвідношення (2.16, 2.16a) показують, що одночасність подій відносна. Підставивши (2.16a) у (2.15), отримаємо:

$$l' = \frac{l_0(1 - kV^2)}{\sqrt{1 - kV^2}} = l_0\sqrt{1 - kV^2}. \quad (2.17)$$

Довжина, яка виміряна нерухомою відносно предмета лінійкою, називається власною, ця довжина максимальна. Таким чином, довжина тіла, що рухається, скорочується:

$$l' = l_0\sqrt{1 - kV^2}. \quad (2.18)$$

У класичній механіці Ньютона час був інваріантним відносно перетворень Галілея, виникає питання: чи існують інваріанти відносно перетворень Лоренца? Не вдаючись у подробиці, скажемо, що інваріантом є величина, яка називається чотиривимірним інтервалом

$$S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2.$$

Існують *часоподібні* і *просторовоподібні* інтервали.

$S^2 > 0$  – *просторовоподібний* інтервал.

$S^2 = \Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 > 0$  – події можуть відбуватися одночасно у різних точках простору, але не існує такої системи відліку, де б вони відбувалися в одній точці. Це має місце для причинно не зв'язаних подій.

$S^2 < 0$  – *часоподібний* інтервал.

$S^2 = \Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 < 0$  – існує така система відліку, в якій події відбуваються послідовно в одній і тій же точці простору, але немає системи, де б вони могли відбутися одночасно. Часоподібним інтервалом розділені причинно зв'язані події.

$S^2 = 0$  – називається нульовим, або *світлоподібним* інтервалом, події зв'язані світловим сигналом  $\Delta r^2 = c^2 \Delta t^2$ .

### III. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

#### § 9. Закон механічного руху

Сутність руху – взаємодія тіл.

Міра взаємодії – сила.

Розділ механіки, що вивчає рух тіл з *урахуванням причин*, що його породжують, називається динамікою.

Рух тіл визначається силами взаємодії. Основні типи взаємодій у природі:

1. *Гравітаційна* – далекодіюча. Обертається у нуль тільки при нескінченній відстані між тілами, що взаємодіють. Визначає взаємодію тіл, які мають масу.

2. *Електромагнітна* – далекодіюча. Також обертається у нуль на нескінченності. Визначає взаємодію заряджених тіл.

3. *Сильна* – короткодіюча. Визначає взаємодію нуклонів у ядрі. Проявляється на відстанях порядку розмірів ядра.

4. *Слабка* – короткодіюча. Визначає взаємодію і розпад елементарних частинок, проявляється на відстанях порядку розмірів частинок.

Із зазначених взаємодій тільки електромагнітна взаємодія істотно проявляється на тих просторових масштабах, які визначають життя людського суспільства. Електромагнітна взаємодія визначає всі сили, з якими ми стикалися в механіці (пружності, тертя, в'язкості та ін.), крім сили тяжіння, яка має гравітаційну природу. Електромагнітні явища лежать в основі роботи усіх електрорадіотехнічних і електронних пристроїв та приладів, без яких життя сучасного людського суспільства уявити неможливо. Сила електромагнітної взаємодії між двома електронами у  $10^{40}$  разів перевершує силу їхньої гравітаційної взаємодії.

Уся класична механіка базується на трьох законах Ньютона.

У динаміці, на відміну від кінематики, не всі системи відліку рівноправні.

*Перший закон Ньютона* встановлює факт існування виділеного класу систем відліку – інерціальних систем відліку.

Існують такі системи відліку, в яких тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на нього не діють інші тіла або їх дія скомпенсована. Такі системи відліку називаються *інерціальними* системами відліку.

Це твердження називається *першим законом Ньютона*.

Назвемо імпульсом матеріальної точки вектор, який дорівнює добутку маси точки на її швидкість:

$$\vec{p} = m\vec{V}.$$

Сутність фізичного явища завжди виражається законом. Одним із фундаментальних узагальнень класичної механіки є встановлення співвідношення:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (3.1)$$

де  $\vec{F} = f(\vec{r}, \vec{V}, t)$  – сила.

Швидкість зміни імпульсу тіла дорівнює силі, що на нього діє. Це положення називається *другим законом Ньютона*. Він справедливий в інерціальних системах відліку. Якщо на тіло діє кілька сил, то під  $\vec{F}$  у рівнянні (3.1) треба розуміти рівнодіючу цих сил. Нагадаємо, що векторне рівняння (3.1) еквівалентне трьом скалярним, які є його проєкціями на відповідні осі.

Реакція тіла на діючу силу визначається його масою, яка є мірою інертності тіла.

Як і у кінематиці, усі задачі динаміки можна розбити на два класи: 1) за заданим рухом тіл обчислити сили, що на них діють; 2) за заданими силами визначити рух тіл.

Задачі першого типу прості, вони зводяться до знаходження прискорень матеріальних точок, з яких складається система.

Завдання другого типу набагато складніші і є основними в механіці. Їх розв'язок зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь, для однозначного розв'язання яких необхідно задати початкові умови.

## § 10. Застосування основного закону динаміки

Взаємодія тіл визначає вид сил. У механіці основними видами сил є такі:

а)  $m\vec{g}$  – однорідна сила тяжіння (постійна сила);

б)  $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$  – сила гравітаційної взаємодії;

в)  $-\lambda \vec{V}$  – сила в'язкого тертя;

г)  $-k\vec{r}$  – сила пружності;

д)  $\frac{q^2 \vec{r}}{r^3} = \frac{q^2}{r^2} \vec{e}_r$  – сила Кулона;

е)  $q[\vec{V} \cdot \vec{B}]$  – сила Лоренца.

Розглянемо рух тіл за наявності тих чи інших сил.

1.  $\vec{F} = 0$ . Вільне тіло, або тіло, дія на яке усіх сил скомпенсована.

Другий закон Ньютона запишеться у вигляді  $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ ,  $\vec{p} = const$ , імпульс тіла залишається постійним, при постійній масі тіла  $m = const$  швидкість тіла буде постійною  $\vec{V} = const$ , тобто у цьому випадку тіло рухається рівномірно і прямолінійно.

Може бути так, що рівнодіюча усіх сил не дорівнює нулю  $\vec{F} \neq 0$ , але її проекція, наприклад на вісь  $X$ , дорівнює нулю  $F_x = 0$ , тоді уздовж осі  $X$  рух рівномірний, а в інших напрямках – ні (наприклад, рух тіла, кинутого під кутом до горизонту).

2.  $\vec{F} = const$ . Рівноприскорений рух. При постійній масі  $m = const$  маємо:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{w} = const.$$

Отримуємо диференціальне рівняння, розв'язуючи його, як у випадку оберненої задачі кінематики, з урахуванням початкових умов  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ ,  $\vec{V}(0) = \vec{V}_0$ , отримаємо:

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{w}t,$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{w}t^2}{2}.$$

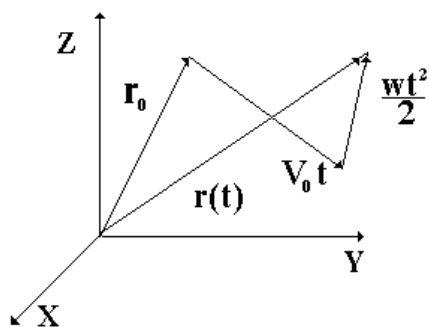


Рис. 13

На рисунку 13 вектор  $\vec{r}(t)$  представлений у вигляді суми трьох векторів  $\vec{r}_0$ ,  $\vec{V}_0 t$  і  $\frac{\vec{w}t^2}{2}$ . Причому враховано, що у загальному випадку усі три вектори можуть бути спрямовані довільним чином.

До такого типу руху відноситься рух в однорідному полі тяжіння тіла, кинутого під кутом  $\alpha$  до горизонту зі швидкістю  $V_0$ . Спроектувавши отримані вище співвідношення на координатні осі, отримаємо систему рівнянь, які описують рух, що розглядається.

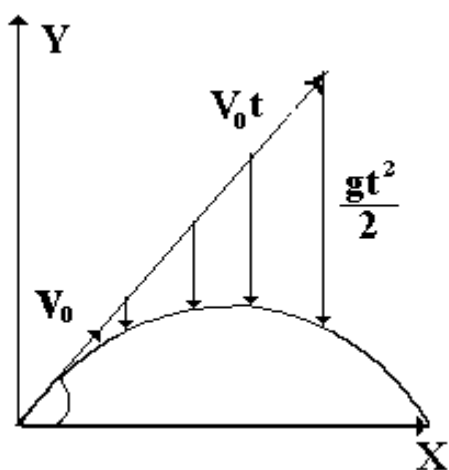


Рис. 14

$$y(t) = V_{0y}t + \frac{w_y t^2}{2},$$

$$x(t) = V_{0x}t,$$

$$w_y = -g,$$

$$\vec{r}(t) = \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Тут ми маємо додавання рівномірного і рівноприскореного рухів.  $\vec{V}_0 t$  спрямований по дотичній до початкової точки траєкторії,

$\frac{\vec{g}t^2}{2}$  – протилежно осі  $OY$ . Дія сили тяжіння ніби зносить тіло униз. Чим більший час, тим більший знос. Якщо виключити з отриманих рівнянь час, отримаємо рівняння траєкторії:

$$y = xtg\alpha - x^2 \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Очевидно, це парабола зі зміщеною з початку координат вершиною і спрямованими униз гілками (рис. 14).

Аналогічно розглядається рух заряду в однорідному електричному полі  $\vec{E}$ . Сила, що діє на заряд  $q$ , є  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

3. Розглянемо рух під дією змінних сил.

3.а. Сили, що залежать від часу  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ . При сталій масі другий закон Ньютона запишеться у вигляді:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}(t).$$

Розділяючи змінні та інтегруючи, вважаючи, що початкова швидкість тіла дорівнює нулю, знайдемо

$$\vec{V}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \vec{F}(t) dt.$$

Звідки видно, що для отримання розв'язку в явному вигляді функція  $\vec{F}(t)$  повинна бути задана. Визначення  $\vec{r}(t)$  після того як  $\vec{V}(t)$  знайдена складності не викликає, оскільки задача зводиться до другої частини оберненої задачі кінематики.

3.б. Сили, що залежать від швидкості  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{V})$ .

Почнемо з сили Лоренца  $\vec{F} = q[\vec{V} \cdot \vec{B}]$ .

Тут  $q$  – заряд частинки,  $\vec{B}$  – індукція однорідного магнітного поля. З рівняння видно, що прискорення частинки весь час у процесі руху

перпендикулярне до швидкості  $\frac{\vec{F}}{m} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\omega} \perp \vec{V}$ . (Вектор, що дорівнює векторному добутку двох векторів, перпендикулярний до площини, яка містить вектори-множники). Така сила змінює тільки напрям швидкості, але не її величину. Частинка рухається по колу з постійною за модулем швидкістю. У цьому випадку прискорення частинки дорівнює нормальному прискоренню і може бути, як показано у кінематиці, представлено у вигляді:

$$w_n = \omega V.$$

Якщо  $\vec{V} \perp \vec{B}$ , то  $w_n = \frac{q}{m} BV$ , звідки  $\omega = \frac{qB}{m}$ .

Ця частота називається циклотронною частотою. З такою частотою рухаються частинки у прискорювачі елементарних частинок, який називається циклотроном. При постійній індукції магнітного поля  $\vec{B} = const$  буде сталою і частота обертання частинки  $\omega = const$ .

Розглянемо рух тіла під дією тільки сили в'язкого тертя:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -\lambda \vec{V}.$$

При  $V_0 = 0$ ,  $\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$  тіло буде знаходитися у стані спокою, тобто сила в'язкого тертя не може вивести тіло зі стану спокою. Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$\int_{V_0}^{V(t)} \frac{dV}{V} = -\frac{\lambda}{m} \int_0^t dt,$$

звідки отримуємо:

$$\ln \frac{V(t)}{V_0} = -\frac{\lambda}{m} t,$$

або

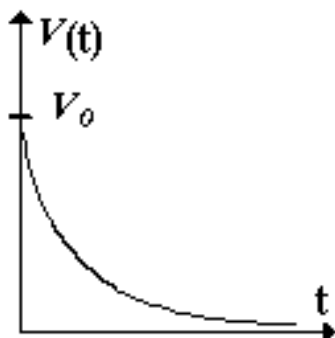


Рис. 15

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t}.$$

Залежність швидкості від часу  $V(t)$  представлена на рис. 15. Враховуючи, що  $V(t) = \frac{dr(t)}{dt}$ , розділяючи змінні та інтегруючи з урахуванням початкових умов, отримаємо:

$$r(t) = r_0 + V_0 \frac{m}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right).$$

Вираз для  $r(t)$  отримати самостійно. Швидкість є спадна функція, як і повинно бути у разі дії лише сили тертя.

3.в. Розглянемо сили, що залежать від положення тіла:  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ .

Як приклад розглянемо силу пружності:  $\vec{F} = -k\vec{r}$ .

Враховуючи, що  $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , отримаємо рівняння другого порядку

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}.$$

В одновимірному випадку

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

або

$$m \frac{dV}{dt} = -kx.$$

У цьому рівнянні три невідомих величини  $V, x, t$ . Щоб розділити змінні, виключимо з нього час, враховуючи що  $V = \frac{dx}{dt}$ , виразимо звідси  $dt$ :  $dt = \frac{dx}{V}$  і підставимо його в останнє рівняння:

$$mVdV = -kxdx.$$

Проінтегрувавши з урахуванням початкових умов  $V(0) = V_0$ ,  $x(0) = x_0$ , отримаємо:

$$V = \sqrt{V_0^2 - \frac{k}{m}(x^2 - x_0^2)}.$$

Це залежність швидкості від координати. Щоб знайти залежність швидкості від часу  $V(t)$ , необхідно спочатку визначити залежність координати від часу  $x(t)$ , розв'язавши рівняння  $V = \frac{dx}{dt}$ , підставивши сюди знайдене значення  $V(x)$  і розділивши змінні.

Розв'язок провести самостійно для випадку  $x_0 = 0$ . Відповідь очевидна, оскільки це коливальний рух:  $x(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – частота коливань.

Другий закон Ньютона, записаний у формі (3.1), зберігається у незмінному вигляді у теорії відносності, якщо підставити в нього релятивістський вираз для імпульсу:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (3.2)$$

де  $m_0$  – маса спокою.

Розглянемо частинку, яка рухається у прискорювачі частинок. Магнітне поле перпендикулярне площині руху частинки (рис. 16). Запишемо другий закон Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = eBV,$$

$$dp = p d\varphi.$$

Тоді

$$p \frac{d\varphi}{dt} = eVB. \quad (3.3)$$

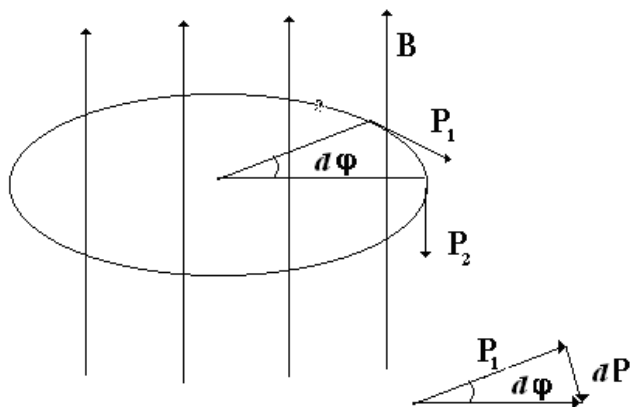


Рис. 16

Враховуючи, що кутова швидкість  $\omega = d\varphi/dt = 2\pi/T$ ,  $T$  – період обертання частинки, перепишемо (3.3) у вигляді

$$p \frac{2\pi}{T} = eVB,$$

або

$$T = \frac{2\pi p}{BeV}. \quad (3.4)$$

Якби імпульс був пропорційний швидкості ( $p \sim V$ ), як у класичній механіці, то період обертання електрона був би постійним, при постійній індукції магнітного поля  $B$ . Однак експеримент показує, що при високих енергіях період збільшується зі збільшенням енергії. Щоб він залишався постійним, необхідно щоб магнітне поле змінювалося згідно із законом  $B = \frac{B_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , що підтверджує співвідношення (3.2), а, отже, і теорію відносності.

## § 11. Рух системи тіл

Розглянемо систему двох матеріальних точок, що взаємодіють між собою. Із досліду відомо, що сили взаємодії між ними спрямовані уздовж прямої, яка з'єднує ці точки. Для розгляду систем взаємодіючих тіл *Ньютон сформулював*

*третьій закон*: сили взаємодії двох матеріальних точок однакові за величиною, протилежно спрямовані і діють уздовж прямої, яка з'єднує ці матеріальні точки.

Одну із сил називають дією, іншу – протидією. Тоді третій закон Ньютона можна сформулювати так: кожній дії відповідає рівна і протилежно спрямована протидія.

У разі системи довільного числа матеріальних точок взаємодія зводиться до попарної взаємодії між матеріальними точками. Тобто вони взаємодіють так само, як і за відсутності усіх інших матеріальних точок. Нехай  $\vec{F}_{ik}$  – сила, з якою  $k$ -та матеріальна точка діє на  $i$ -ту,  $\vec{F}_{ki}$  – навпаки, причому відповідно до третього закону Ньютона  $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ . Третій закон Ньютона дає можливість перейти від механіки окремої частинки до механіки системи матеріальних точок.

Сили, що діють на матеріальні точки системи, можна розділити на *внутрішні* і *зовнішні*. *Внутрішні сили* – це сили взаємодії між матеріальними точками самої системи  $\vec{F}_{ik}$ . *Зовнішні сили* – це такі, з якими на матеріальні точки системи діють зовнішні тіла.

Позначимо  $\vec{F}_1^{(i)}$  – повну внутрішню силу, що діє на першу частинку (intra),  $\vec{F}_1^{(e)}$  – повну зовнішню силу, що діє на ту ж частинку (extra). Тоді для другої відповідно буде  $\vec{F}_2^{(i)}$  і  $\vec{F}_2^{(e)}$ , і так далі. Запишемо другий закон Ньютона для кожної частинки:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_1^{(i)} + \vec{F}_1^{(e)}, \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_2^{(i)} + \vec{F}_2^{(e)}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \tag{3.5}$$

Склавши почленно ці рівняння і врахувавши, що усі внутрішні сили попарно компенсуються, отримаємо:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n) = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_2^{(e)} + \dots + \vec{F}_n^{(e)}.$$

Тут ми врахували, що сума імпульсів частинок, які складають систему, дорівнює повному імпульсу системи. Тоді

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)}. \quad (3.6)$$

Таким чином, похідна за часом від імпульсу системи матеріальних точок дорівнює геометричній сумі усіх зовнішніх сил, що діють на систему.

Якщо  $\sum \vec{F}_i^{(e)} = 0$ , то  $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ , звідки отримуємо, що імпульс системи матеріальних частинок  $\vec{p} = const$ . Отже, якщо геометрична сума зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то імпульс системи зберігається, тобто не змінюється з часом. Це твердження називається *законом збереження імпульсу*. Зокрема він має місце, коли система замкнена. Рівняння (3.6) векторне, воно еквівалентне трьом скалярним

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^{(e)} .$$

... ..

Якщо  $\sum \vec{F}_i^{(e)} \neq 0$ , а  $\sum F_{ix}^{(e)} = 0$ , то це означає, що зберігається  $X$ -компонента імпульсу.

Закон збереження імпульсу є наслідком однорідності простору і належним чином узагальнений, є фундаментальним законом природи, з якого немає виключень.

## § 12. Теорема про рух центру мас системи

У нерелятивістській механіці, де маса не залежить від швидкості  $m \neq f(\vec{V})$ , імпульс системи  $\vec{p} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 + \dots + m_n \vec{V}_n$  може бути виражений

через швидкість її *центру мас*, тут  $m_i$  і  $\vec{V}_i$  маса і швидкість частинок, які складають систему.

Центром мас, або центром інерції системи матеріальних точок, називається така уявна точка, радіус-вектор якої  $\vec{R}$  виражається через радіус-вектори  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$  матеріальних точок за формулою:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}. \quad (3.7)$$

Продиференціюємо вираз (3.7) за часом і помножимо на повну масу системи  $m = \sum m_i$ . Для спрощення запису похідні за часом у фізиці, як зазначено у § 2, прийнято позначати точками над відповідними літерами, тоді отримаємо:

$$m \dot{\vec{R}} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 + \dots + m_n \dot{\vec{r}}_n,$$

або

$$m \vec{V} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 + \dots + m_n \vec{V}_n,$$

де  $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$  – швидкість центру мас системи, отже, повний імпульс системи матеріальних точок можна виразити через швидкість її центру мас:

$$\vec{p} = m \vec{V}. \quad (3.8)$$

Підставляючи (3.8) у (3.6), отримаємо:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)}.$$

Звідси виходить: центр мас системи матеріальних точок рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює сумарній масі всієї системи, а діюча сила

– геометричній сумі усіх зовнішніх сил, які діють на систему. Це твердження називається *теоремою про рух центру мас системи*.

### § 13. Реактивний рух.

#### Рівняння Мещерського, формула Циолковського

Розглянемо рух тіла зі змінною масою на прикладі ракети, яка рухається у полі зовнішніх сил  $\vec{F}$ . Ракета з великою швидкістю викидає газ, який утворюється під час згоряння палива, діючи на нього з великою силою, оскільки в камері згоряння встановлюється високий тиск. Речовина, яка викидається, відповідно до третього закону Ньютона, з тією ж, але протилежно спрямованою силою, діє на ракету і надає їй прискорення у протилежному напрямку (рис. 17).

Нехай  $m(t)$  – маса ракети у довільний момент часу  $t$ ,  $\vec{V} = \vec{V}(t)$  – її швидкість, відповідно. Імпульс ракети  $m\vec{V}$ . Через проміжок часу  $dt$  він буде дорівнювати:  $(m + dm)(\vec{V} + d\vec{V})$ , водночас газ отримав імпульс  $\vec{V}_{газ}dm_{газ}$ . З другого закону Ньютона витікає, що зміна імпульсу ракети дорівнює імпульсу сили, яка на неї діє:

$$(m + dm)(\vec{V} + d\vec{V}) + \vec{V}_{газ}dm_{газ} - m\vec{V} = \vec{F}dt. \quad (3.10)$$

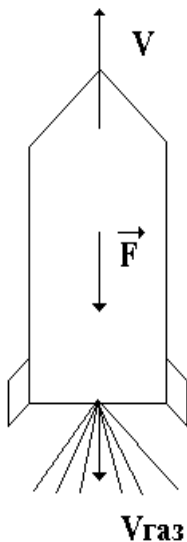


Рис. 17

Розкриємо дужки і знехтуємо величинами другого порядку малості, тоді отримаємо, з урахуванням того, що маса газу дорівнює зменшенню маси ракети  $dm_{газ} = -dm$ :

$$m d\vec{V} = (\vec{V}_{газ} - \vec{V})dm + \vec{F}dt, \quad (3.11)$$

позначивши  $\vec{V}_{газ} - \vec{V} = \vec{V}_{відн}$  – відносна швидкість витікання газів із сопла ракети, отримаємо (після ділення на  $dt$ ):

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}_{\text{відн}} \frac{dm}{dt} + \vec{F}. \quad (3.12)$$

Рівняння (3.12) вперше було отримано І. В. Мещерським (1858–1935 рр.) і носить його ім'я. Перший доданок у правій частині (3.12) називається реактивною силою. Її величина визначається швидкістю зміни маси системи і відносною швидкістю речовини, що відокремлюється.

Застосуємо рівняння (3.12) до аналізу руху ракети, на яку не діють зовнішні сили  $\vec{F} = 0$ :

$$m d\vec{V} = \vec{V}_{\text{відн}} dm.$$

Нехай ракета рухається прямолінійно у напрямку, протилежному напрямку газового струменя. Якщо вісь  $X$  направити у напрямку польоту, то проекція  $\vec{V}_{\text{відн}}$  буде від'ємною:  $-V_{\text{відн}}$ . Тоді

$$m dV = -V_{\text{відн}} dm,$$

або

$$\frac{dV}{dm} = -\frac{V_{\text{відн}}}{m},$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dV}{V_{\text{відн}}}.$$

Розглянемо випадок, коли швидкість газового струменя відносно ракети не змінюється

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -\frac{1}{V_{\text{відн}}} \int_0^V dV,$$

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{V}{V_{\text{відн}}},$$

або

$$m = m_0 e^{-V/V_{\text{відн}}}. \quad (3.13)$$

Рівняння (3.13) було вперше отримано для випадку нерелятивістського руху К. Е. Ціолковським (1857–1935 рр.) і носить його ім'я. Залежність маси ракети від її швидкості представлена на рис. 18.

Приклад. Яким має бути відношення мас  $m_0/m(V)$ , щоб надати ракеті

першу космічну швидкість 8 км/с, при  $V_{\text{відн}} = 1$  км/с?

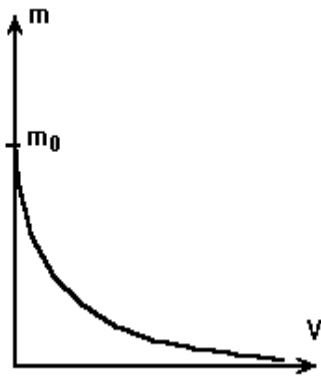


Рис.18

$$\frac{m_0}{m(V)} = e^8 \approx 2980,$$

тобто маса палива у 2980 разів перевершує масу ракети, яка досягає першої космічної швидкості.

Інакше кажучи, на кожен кілограм маси, яка досягла першої космічної швидкості, необхідно витратити

2 980 кілограмів палива.

Якщо  $V_{\text{відн}} = 2$  км/с, то співвідношення мас  $\frac{m_0}{m(V)} = e^4 = 54,6$ . Таке

співвідношення вже є більш реальним з точки зору космічних польотів.

Водночас треба зважати на те, що збільшення удвічі швидкості витікання газу з сопла ракети передбачає збільшення у чотири рази температури згоряння палива, що ставить додаткові вимоги як до палива, так і до матеріалу камери згоряння.

#### IV. РОБОТА Й ЕНЕРГІЯ

Якщо на тіло, яке рухається, діє сила, то в процесі руху вона здійснює роботу. Робота величина скалярна, знайдемо її.

Елементарною роботою сили  $\vec{F}$  на нескінченно малому переміщенні  $d\vec{r}$  називається скалярний добуток сили  $\vec{F}$  на переміщення  $d\vec{r}$  (рис. 19):

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \alpha dr = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (4.1)$$

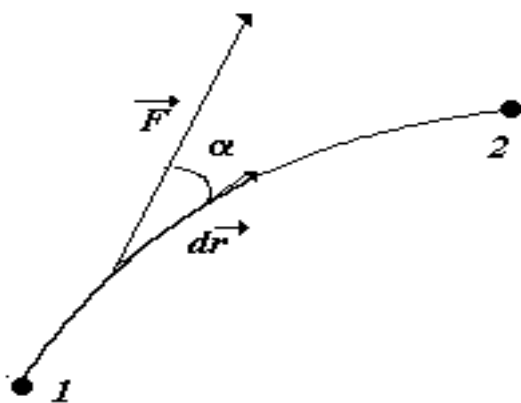


Рис. 19

У загальному випадку, якщо матеріальна точка проходить кінцевий шлях від точки 1 до точки 2, його можна розбити на нескінченно малі ділянки і підсумувати, тобто взяти інтеграл:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F} d\vec{r}). \quad (4.2)$$

Інтеграл у (4.2) потрібно брати уздовж траєкторії, за якою рухається тіло, такий інтеграл називається *криволінійним*.

Якщо на тіло діє декілька сил, то потрібно говорити про роботу рівнодіючої цих сил. У разі двох сил рівнодіюча дорівнює  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , тоді  $dA = \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r}$ , тобто елементарна робота рівнодіючої двох сил дорівнює сумі елементарних робіт цих сил. Ця властивість називається *адитивністю*. Очевидно, вона справедлива і для робіт на кінцевих переміщеннях.

Отримаємо вираз для роботи через величини, які характеризують тіло. За другим законом Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

тоді

$$dA = \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \vec{V} d\vec{p} = dK. \quad (4.3)$$

У нерелятивістському випадку  $\vec{p} = m\vec{V}$ , тоді при  $m = \text{const}$

$$A = m \int_{V_1}^{V_2} \vec{V} d\vec{V} = m \int_{V_1}^{V_2} V dV = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}, \quad (4.4)$$

(з векторного аналізу відомо, що  $\vec{V} d\vec{V} = V dV$ ).  $V_1$  і  $V_2$  – початкова і кінцева швидкості частинки. Величина

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (4.5)$$

називається *кінетичною енергією тіла*, тобто це енергія, яку має тіло, яке рухається. Тоді співвідношення (4.4) можна переписати у вигляді  $A = K_2 - K_1$ , тобто робота сили при переміщенні частинки дорівнює приросту кінетичної енергії цієї частинки. Це твердження називається *теоремою про зміну кінетичної енергії частинки*. Її легко узагальнити на випадок системи матеріальних точок.

*Кінетичною енергією системи* називається сума кінетичних енергій частинок, що складають цю систему. Тоді для системи матеріальних точок будемо мати: приріст кінетичної енергії системи дорівнює сумарній роботі *усіх* сил, що діють на систему матеріальних точок.

Тут дуже важливе слово «усіх», тобто і зовнішніх, і внутрішніх, на відміну від другого закону Ньютона, де йдеться тільки про зовнішні сили, оскільки внутрішні компенсуються.

Вираз (4.3) дає змогу узагальнити поняття роботи на випадок релятивістської механіки, якщо скористатися релятивістським виразом для імпульсу:

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} V,$$

тут  $m_0$  – маса спокою частинки,  $c$  – швидкість світла у вакуумі. Виразимо звідси швидкість

$$p^2 = \frac{m_0^2 V^2}{1 - V^2/c^2}, \Rightarrow p^2 - \frac{p^2 V^2}{c^2} = m_0^2 V^2,$$

$$p^2 = V^2 \left( m_0^2 + \frac{p^2}{c^2} \right).$$

Розв'язуючи останнє рівняння, будемо мати:

$$V = \frac{p}{\sqrt{m_0^2 + p^2/c^2}}. \quad (4.6)$$

Підставляючи вираз для швидкості (4.6) у вираз для елементарної роботи (4.3), отримаємо:

$$dA = \frac{p dp}{\sqrt{m_0^2 + p^2/c^2}} = dE. \quad (4.6a)$$

Тут  $dE$  – приріст повної енергії тіла. Проінтегруємо (4.6a):

$$A = \int_0^p \frac{p dp}{\sqrt{m_0^2 + p^2/c^2}} = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2 = E - E_0 = K. \quad (4.7)$$

Величина  $E_0 = m_0 c^2$  – енергія спокою,  $E$  – повна релятивістська енергія, частина, пов’язана з рухом, називається релятивістською кінетичною енергією. Виразимо кінетичну енергію  $K$  через швидкість, підставивши у співвідношення (4.7) вираз для релятивістського імпульсу:

$$K = \sqrt{m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 c^2 V^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) дає вираз для кінетичної енергії у релятивістській механіці, очевидно, у границі  $V \ll c$  він повинен переходити у звичайний вираз (4.5). Розклавши у ряд знаменник у першому доданку виразу (4.8), отримаємо:

$$K = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{V^4}{c^4} + \dots \right) - m_0 c^2 = \frac{m_0 V^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{m_0 V^4}{c^2} + \dots, \quad (4.9)$$

тобто з точністю до перших неznикаючих доданків, релятивістський вираз для кінетичної енергії переходить у класичний, поправки до цього виразу мають

порядок  $\frac{V^2}{c^2}$ . Формулу  $E_0 = m_0 c^2$  уперше ввів Ейнштейн, вона означає еквівалентність маси та енергії.

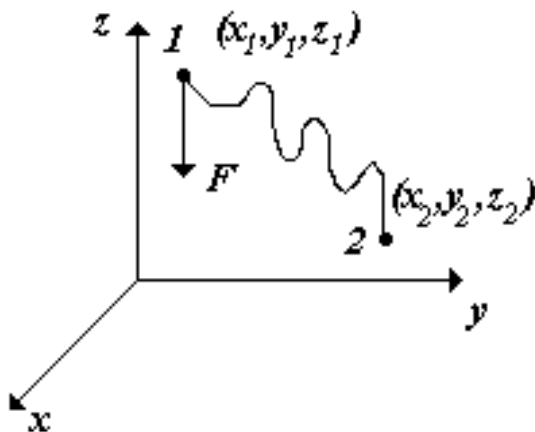


Рис. 20

#### § 14. Закон збереження енергії

Розглянемо роботу сили тяжіння при переміщенні тіла з точки 1 у точку 2 (рис. 20). Сила тяжіння спрямована вертикально униз, у векторній формі її

можна представити у вигляді  $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ . Під час руху тіла вздовж довільної

траєкторії на нього можуть діяти й інші сили, однак нас буде цікавити тільки робота сили тяжіння.

Тоді, виходячи з визначення роботи, отримаємо

$$dA = F_z dz = -mgdz,$$

$$A_{12} = - \int_{(1)}^{(2)} mgdz = -mg(z_2 - z_1) = mgh. \quad (4.10)$$

Таким чином, робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії, вона визначається тільки початковим і кінцевим положеннями тіла, такі сили називаються *консервативними*, або *потенціальними*. Можна дати інше визначення: якщо робота сили уздовж замкненої траєкторії дорівнює нулю  $\oint dA = 0$ , то сила потенціальна.

У полі потенціальних сил можна ввести поняття потенціальної енергії у заданому положенні – це робота, що здійснюються консервативними силами при переході системи з даного положення у деяке положення, прийняте за нульове, тобто таке, потенціальна енергія в якому приймається рівною нулю.

Тоді

$$A = U_1 - U_2, \quad (4.11)$$

отже, робота консервативної сили з переміщення тіла дорівнює зменшенню його потенціальної енергії. У диференціальній формі:

$$dA = -dU. \quad (4.12)$$

Враховуючи, що, як показано вище,  $dA = dK$ , отримаємо  $dK = -dU$ , або

$$d(K + U) = 0,$$

звідки

$$E = K + U = \text{const.}$$

Сума кінетичної і потенціальної енергій  $E$  називається *повною механічною енергією*. Отриманий результат можна сформулювати так: у полі консервативних сил механічна енергія зберігається. Це твердження називається *законом збереження механічної енергії*.

Отже, якщо в замкнутій системі діють тільки потенціальні сили, то механічна енергія зберігається. Сила може бути потенціальною і не потенціальною, отже, механічна енергія може не зберігатися. Тобто замкнутості системи недостатньо для виконання закону збереження механічної енергії.

Закон збереження енергії є фундаментальним законом природи, він є наслідком однорідності часу.

Якщо задано закон, за яким змінюється у просторі сила  $\vec{F}(\vec{r})$ , яка діє на матеріальні тіла, то кажуть, що задано *силове поле*. Силкові поля бувають консервативні і неконсервативні. Умову консервативності наведено вище. У полі консервативних сил можна знайти потенціальну енергію.

Як приклад розглянемо потенціальну енергію гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок. Сила, що діє між ними, є:

$$F = -\gamma \frac{Mm}{r^2},$$

де  $\gamma$  – гравітаційна стала. Знак мінус говорить про те, що за своєю природою це сила притягання. Сила гравітаційної взаємодії є центральною, тобто лінія її дії завжди проходить через силовий центр. Можна показати, що будь-яка центральна сила консервативна. Будемо вважати, що тіло маси  $M$  нерухоме (силовий центр), а тіло маси  $m$  переміщується з нескінченності у дану точку простору, тоді

$$A = - \int_{\infty}^r \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \int_r^{\infty} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma \frac{Mm}{r}. \quad (4.13)$$

За визначенням, ця робота дорівнює зменшенню потенціальної енергії:

$$A = U_{\infty} - U(r). \quad (4.14)$$

Приймаючи  $U_{\infty} = 0$  і підставляючи (4.13) в (4.14) отримаємо:

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії у будь-якій кінцевій точці поля негативна, цей факт має просте пояснення. Максимальну енергію мають тіла, які притягуються, при нескінченній відстані між ними. Вважається, що у цьому положенні потенціальна енергія дорівнює нулю. У будь-якому іншому положенні вона менша, тобто від'ємна.

## § 15. Сили і потенціальна енергія

Взаємодію тіл можна описувати або за допомогою сил, або за допомогою потенціальної енергії як функції координат тіл, що взаємодіють.

Природно, що опис мовою сил є більш загальним, оскільки він може бути застосований і до непотенціальних силових полів.

Знаючи силу як функцію координат матеріальних точок системи, можна обчислити потенціальну енергію цієї системи у довільній точці поля. Таке завдання вирішується інтегруванням. Приклад наведено вище. Можна поставити й обернену задачу: обчислити сили, якщо задана потенціальна енергія як функція координат частинок, що взаємодіють. Ця задача вирішується диференціюванням.

Розглянемо елементарне переміщення  $d\vec{r}$  матеріальної точки у полі консервативних сил  $\vec{F}$ , тоді:

$$\vec{F}d\vec{r} = -dU.$$

Це співвідношення справедливе за будь-яких  $d\vec{r}$ , якщо при цьому потенціальна енергія  $U(\vec{r})$  відома, то можна однозначно визначити силу  $\vec{F}$ . Дійсно, за визначенням скалярного добутку:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU. \quad (4.15)$$

З іншого боку  $dU$  – це диференціал функції кількох змінних  $U(x, y, z)$ . За означенням диференціалу:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{x,y} dz. \quad (4.16)$$

Індекси біля дужок означають, що похідні беруться при сталих значеннях відповідних змінних. Підставляючи (4.16) у (4.15) отримаємо:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{x,y} dz\right]. \quad (4.17)$$

Порівнюючи ліві і праві частини, знайдемо:

$$\begin{aligned} F_x &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y,z}, \\ F_y &= -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x,z}, \\ F_z &= -\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{x,y}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Таким чином, якщо потенціальна енергія  $U(x, y, z)$  відома, то обчислення складових сили  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  зводиться до обчислення частинних похідних.

*Приклад.* Вимірюючи потенціальну енергію стиснутої пружини, знайшли, що вона дорівнює  $U = \frac{1}{2} kx^2$ , де  $x$  – подовження пружини,  $k$  – стала величина,

коефіцієнт жорсткості пружини (рис. 21). Закріпимо один кінець пружини, вісь  $X$  спрямуємо вздовж пружини, тоді сила, з якою пружина буде діяти на прикріплене до іншого її кінця тіло:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx.$$

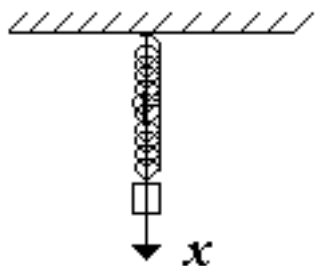


Рис. 21

Знак мінус вказує на те, що сила спрямована протилежно зміщенню. Співвідношення (4.18) можна об'єднати в одне:

$$\vec{F} = -gradU = -\vec{\nabla}U, \quad (4.19)$$

де символ  $grad$  або  $\vec{\nabla}$  означає векторний диференціальний оператор:

$$grad = \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Він називається оператором Гамільтона, в результаті його дії на скалярну функцію отримуємо вектор.

## § 16. Зіткнення

Зіткнення – короткочасна взаємодія тіл, (час взаємодії малий порівняно з характерним часом задачі, наприклад, часом вільного руху).

Розрізняють абсолютно пружний і непружний удари.

*Абсолютно пружним* називається зіткнення тіл, у результаті якого їх внутрішні енергії не змінюються. Абсолютно пружне зіткнення – це ідеалізація, у природі такого зіткнення при взаємодії макроскопічних тіл не зустрічається, проте бувають взаємодії, досить близькі до абсолютно пружних, наприклад,

зіткнення бильярдних куль. Ступінь пружності взаємодії можна характеризувати коефіцієнтом відновлення, який визначається відношенням механічної (кінетичної) енергії після взаємодії до енергії до взаємодії.

$$\eta = \frac{E_2}{E_1} = \frac{K_2}{K_1}. \quad (4.20)$$

Чим ближче  $\eta$  до 1, тим вищий ступінь пружності взаємодії. Для абсолютно пружної взаємодії  $\eta = 1$ .

У процесі взаємодії відбувається перетворення кінетичної енергії у потенціальну і навпаки, причому за абсолютно пружного зіткнення це перетворення відбувається без втрат.

Розглянемо задачу про абсолютно пружне зіткнення двох тіл. Будемо вважати, що вони взаємодіють тільки у момент зіткнення, тобто тільки в цей момент потенціальна енергія відмінна від нуля, та що одна з частинок до взаємодії знаходилася у стані спокою. Це завжди можна зробити, зв'язавши з

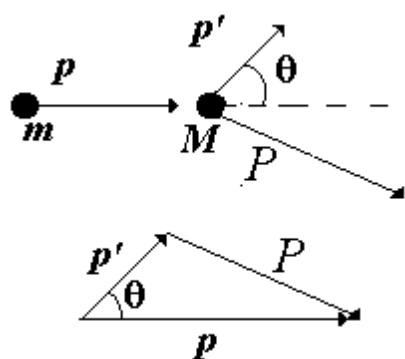


Рис. 22

нею систему відліку. Увесь розгляд проводиться в інерціальній системі відліку.

Нерухому частинку будемо називати мішенню. Кут  $\theta$ , на який відхиляється частинка, що налітає, називається кутом розсіювання (рис. 22). Знайдемо залежність імпульсу частинки, що налітає, після взаємодії  $p'$ , від кута розсіювання.

Імпульс мішені після взаємодії  $\vec{P}$ .

Систему частинок, що взаємодіють, вважатимемо замкнутою. У нижній частині рис. 22 представлена векторна діаграма, що ілюструє закон збереження імпульсу.

Оскільки взаємодія абсолютно пружна, мають місце закони збереження механічної енергії та імпульсу:

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{p}' + \vec{P} \\ E_1 = E_1' + E_2' \end{cases} \quad (4.21)$$

Будемо вважати, що маса в процесі руху не змінюється. Тоді

$$E_2' = \frac{P^2}{2M} = \frac{(\vec{p} - \vec{p}')^2}{2M} = E_1 - E_1' = \frac{p^2}{2m} - \frac{p'^2}{2m}. \quad (4.22)$$

Знайдемо  $P^2$ , використовуючи (4.21) та (4.22)

$$P^2 = \frac{M}{m}(p^2 - p'^2) = (\vec{p} - \vec{p}')^2 = p^2 - 2pp' \cos \theta + p'^2. \quad (4.23)$$

Звідки

$$p'^2 \left(1 + \frac{M}{m}\right) - 2pp' \cos \theta + p^2 \left(1 - \frac{M}{m}\right) = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо:

$$p' = \frac{p \cos \theta \pm \sqrt{p^2 \cos^2 \theta - p^2 \left(1 - \frac{M^2}{m^2}\right)}}{1 + \frac{M}{m}}.$$

Або остаточно

$$p' = p \frac{\cos \theta \pm \sqrt{\frac{M^2}{m^2} - \sin^2 \theta}}{1 + \frac{M}{m}}. \quad (4.24)$$

Дослідимо (4.24) у різних граничних випадках.

1. Маса мішені більша за масу частинки, що налітає  $\frac{M}{m} > 1$ , фізичний зміст має тільки знак «+», оскільки в іншому випадку  $p' < 0$ , а за змістом  $p'$  додатньо визначено.

Знайдемо значення імпульсу частинки, що налітає, після взаємодії залежно від кута розсіювання:

$$a) \theta = 0, p = p', P = 0;$$

$$б) \theta = \frac{\pi}{2}, p' = p \frac{\sqrt{\frac{M^2}{m^2} - 1}}{1 + \frac{M}{m}} = p \frac{\sqrt{\frac{M}{m} - 1}}{\sqrt{\frac{M}{m} + 1}} < p; \quad (4.25)$$

$$в) \theta = \pi, p' = p \frac{\frac{M}{m} - 1}{\frac{M}{m} + 1} < p.$$

Таким чином, у випадку, коли маса мішені більша за масу частинки, що налітає, можливі будь-які значення кута розсіювання, також і розсіювання назад. Саме такий результат отримав Резерфорд, досліджуючи розсіювання альфа-частинок на золотій фользі. Ретельне дослідження результатів цього експерименту дало змогу Резерфорду запропонувати правильну модель атома.

2. Маса мішені менша за масу частинки, що налітає  $\frac{M}{m} < 1$ , в цьому випадку існує граничний кут розсіювання (рис. 23). Оскільки значення імпульсу



Рис. 23

в реальному фізичному процесі  $p'$  не може бути комплексним, підкореневий вираз в (4.24) повинен

бути додатним  $\frac{M^2}{m^2} - \sin^2 \theta \geq 0$ ; тоді  $\sin \theta_{\text{гранич}} =$

$$\frac{M}{m}.$$

*Непружні зіткнення* – це такі, у процесі яких механічна енергія не зберігається, або інакше: змінюється внутрішня енергія тіл, що взаємодіють.

Окремим випадком є *абсолютно непружний удар* – це зіткнення двох тіл, в результаті якого вони з'єднуються одне з одним і далі рухаються як одне ціле. Прикладом може бути зіткнення пластилінових кульок.

У процесі непружних зіткнень втрати механічної енергії відбуваються в результаті дії дисипативних сил. Фізика зіткнення досить складна – у процесі взаємодії виникають сили пружності, сили в'язкого тертя, у тілах збуджуються коливання і хвилі і так далі. Однак, у разі абсолютно непружного удару, усі ці процеси зрештою припиняються і тіла рухаються як одне ціле.

Тіла, що взаємодіють, можна розглядати як замкнуту систему, але наявність дисипативних сил призводить до незбереження механічної енергії, імпульс, проте, зберігається.

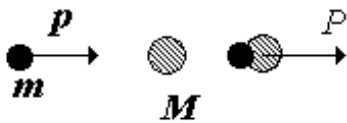


Рис.24

Розрахуємо втрати енергії при абсолютно непружних взаємодіях.

Нехай частинка маси  $m$ , яка має імпульс  $p$ , стикається з частинкою маси  $M$ , що знаходиться у стані спокою (рис. 24). Знайдемо втрати механічної енергії. Імпульс системи після взаємодії дорівнює імпульсу частинки, що налітає  $\vec{p} = \vec{P}$ . Втрати енергії визначаються як різниця між початковим і кінцевим її значеннями

$$E_n = \frac{p^2}{2m}; \quad E_k = \frac{P^2}{2(M+m)} = \frac{p^2}{2(M+m)};$$

$$\Delta E = E_n - E_k = p^2 \frac{M}{2m(m+M)} = E_n \cdot \frac{M}{(m+M)}. \quad (4.26)$$

Відносні втрати:

$$\eta = \frac{\Delta E}{E_n} = \frac{M}{m+M} = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}}.$$

При  $\frac{m}{M} = \frac{1}{10}$ ,  $\eta = \frac{10}{11} \cong 0,9$ , тобто 90 % енергії втрачається непружно. З

(4.26) видно, що максимальна величина енергії, що перетворюється в інші

форми, залежить від співвідношення мас, у границі  $M \rightarrow \infty$  (зіткнення зі стіною) уся початкова енергія втрачається непружно.

У загальному випадку, коли до взаємодії обидві частинки рухаються з імпульсами  $\vec{p}_1$  і  $\vec{p}_2$ , для втрат отримаємо:

$$\Delta E = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2M} - \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}{2(m+M)}.$$

Звідки після простих перетворень знайдемо:

$$\Delta E = \frac{mM}{2(m+M)} (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2 = \frac{\mu}{2} (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2. \quad (4.27)$$

Тут  $\mu = \frac{mM}{(m+M)}$  – зведена маса частинок, що взаємодіють. Таким чином, втрати визначаються зведеною масою і квадратом відносної швидкості частинок до взаємодії.

Непружне зіткнення тіл завжди супроводжується втратою кінетичної енергії макроскопічного руху.

## § 17. Розсіювання на дзеркальній кулі

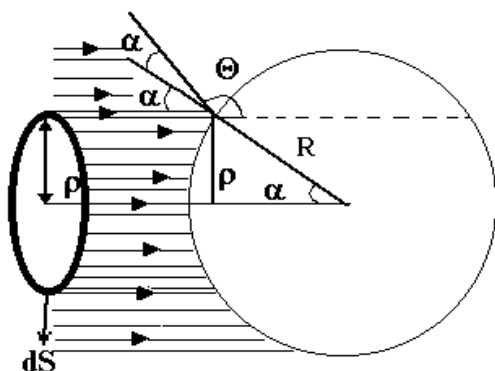
У процесі розсіювання не всі значення кутів рівноймовірні. Розподіл числа розсіяних частинок залежно від кута розсіювання характеризується *перерізом розсіювання*. Для характеристики перерізу розсіювання вводять *диференціальний переріз розсіювання*: відношення числа частинок, розсіяних в елемент тілесного кута  $d\Omega$  до густини потоку частинок:

$$d\sigma = \frac{dN}{j},$$

де  $dN$  – кількість частинок, розсіяних в елемент тілесного кута  $d\Omega$ ;  $j$  – густина потоку частинок – число частинок, що проходять через одиничну площину, перпендикулярну швидкості руху частинок в одиницю часу.

Розглянемо розсіювання частинок на абсолютно твердій кулі радіусом  $R$  (рис. 25). Знайдемо диференціальний переріз розсіювання.

Кут розсіювання  $\theta = \pi - 2\alpha$ , оскільки кут падіння, дорівнює куту відбиття.  $\rho$  – прицільний параметр, це мінімальна відстань на якій би пройшла



частинка, що налітає, від геометричного центру мішені у разі відсутності розсіювання:

$$\rho = R \sin \alpha = R \sin \frac{\pi - \theta}{2} = R \cos \frac{\theta}{2},$$

тобто

$$\rho = R \cos \frac{\theta}{2}.$$

Рис. 25

Співвідношення, яке зв'язує кут розсіювання  $\theta$ , радіус кулі  $R$  та прицільний параметр  $\rho$  для абсолютно твердої кулі називається *законом дзеркального відбиття*. Легко знайти число частинок, які мають прицільні параметри від  $\rho$  до  $\rho + d\rho$ :

$$dN = j2\pi\rho d\rho.$$

Інакше кажучи, це число частинок, які проходять через кільце радіусом  $\rho$  і товщиною  $d\rho$ . Тоді для диференціального перерізу розсіювання отримаємо:

$$d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi\rho d\rho.$$

Виразимо  $d\sigma$  через кут розсіювання:

$$d\sigma = 2\pi R^2 \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2\pi \frac{R^2}{4} \sin \theta d\theta.$$

Оскільки в цьому випадку елемент тілесного кута може бути представлений у вигляді  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ , для диференціального перерізу розсіювання знайдемо:

$$d\sigma = \frac{R^2}{4} d\Omega.$$

Отримане співвідношення називається *ізотропним законом розсіювання*.

Можна отримати повний переріз розсіювання, проінтегрувавши останнє співвідношення. Враховуючи, що  $\int d\Omega = 4\pi$ :

$$\sigma = \pi R^2,$$

тобто повний переріз розсіювання визначається площею поперечного перерізу кулі.

Вимірювання перерізів розсіювання дає змогу визначити сили, що діють між частинками, які взаємодіють, і у такий спосіб визначити їх структуру і склад. На такому принципі побудовано роботу Великого адронного колайдера, найбільшого експериментального пристрою, побудованого у Європейському центрі ядерних досліджень (CERN), на якому, зокрема, було відкрито бозон Хіггса – першоцеглинку будови матерії.

## V. ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Твердим тілом у механіці називають незмінну систему матеріальних точок, тобто систему, за будь-яких рухів якої взаємні відстані між частинами системи залишаються незмінними, як було зазначено при розгляді кінематики. Таким чином, тверде тіло є абсолютно твердим, тобто таким, що не деформується. Очевидно, що такий підхід є ідеалізацією. Чи припустима така ідеалізація, визначається як властивостями реальних тіл, так і змістом питань, що розглядаються. У будь-якому разі будемо припускати, що деформації, які виникають, не змінюють характер досліджуваних явищ.

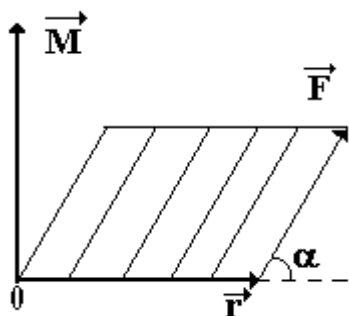


Рис. 26

Закони руху твердого тіла пов'язані з поняттями моменту сили і моменту імпульсу.

Моментом сили  $\vec{F}$ , відносно точки  $O$ , називається векторний добуток радіус-вектора  $\vec{r}$  точки прикладання сили відносно точки  $O$  на силу  $\vec{F}$  (рис. 26):

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]. \quad (5.1)$$

Точка, відносно якої розглядається момент, називається полюсом.

Із визначення моменту, на підставі властивості векторного добутку, для суми сил  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  можна написати

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = [\vec{r}\vec{F}_1] + [\vec{r}\vec{F}_2].$$

Момент рівнодіючої сил, що діють на тіло, відносно полюса  $O$ , дорівнює сумі моментів діючих сил, відносно того ж полюса.

Точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії її дії, момент  $\vec{M}$  при цьому змінюватися не буде.

Плечем сили  $d$  називається найкоротша відстань від полюса до лінії дії сили

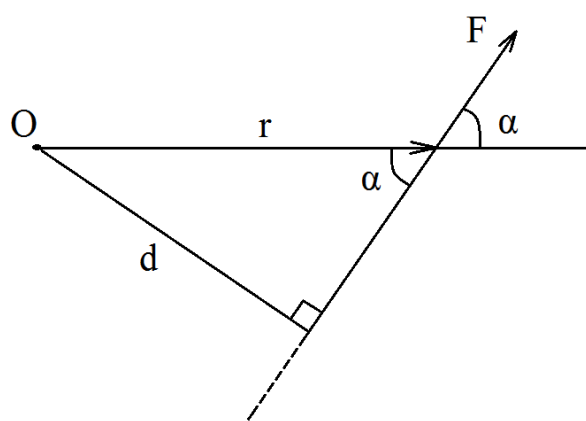


Рис. 26а

$d = r \sin \alpha$  (рис. 26а). Вісь обертання проходить через точку  $O$  перпендикулярно до площини рисунка. Модуль моменту сили у цьому разі можна записати у вигляді  $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = d \cdot F$ . При перенесенні точки прикладання сили уздовж лінії її дії плече  $d$  не змінюється, а, отже, не

змінюється і момент сили.

Моментом імпульсу частинки  $A$  відносно точки  $O$  називають векторний добуток радіус-вектора частинки  $A$  відносно точки  $O$  на імпульс частинки

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]. \quad (5.2)$$

Знайдемо зв'язок між введеними величинами. Продиференціювавши (5.2) за часом, отримаємо:

$$\dot{\vec{L}} = [\dot{\vec{r}}\vec{p}] + [\vec{r}\dot{\vec{p}}]. \quad (5.3)$$

Оскільки  $\vec{L}$  розглядається відносно нерухомого початку  $\dot{\vec{r}} = \vec{V}$  і з урахуванням того, що  $\vec{p} = m\vec{V}$ , перший доданок у (5.3) дорівнює нулю (векторний добуток паралельних векторів дорівнює нулю), другий перетворимо, згадавши, що  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$  (другий закон Ньютона), тоді

$$\dot{\vec{L}} = [\vec{r}\dot{\vec{p}}] = [\vec{r}\vec{F}],$$

або

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (5.4)$$

Це рівняння називається *рівнянням моментів*: швидкість зміни моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого початку дорівнює моменту діючої на нього сили відносно того ж початку. Таким чином, швидкість зміни моменту імпульсу характеризує відгук тіла на момент, прикладених до нього сил.

Це рівняння, як і другий закон Ньютона, залишається справедливим і в релятивістській механіці.

Узагальнимо отримане співвідношення на випадок довільної системи матеріальних точок.

*Моментом імпульсу* системи матеріальних точок відносно деякого початку називається векторна сума моментів імпульсів матеріальних точок, що входять у систему, відносно того ж початку:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i .$$

Аналогічно для моментів сил:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i .$$

Під  $\vec{M}$  у цьому співвідношенні треба розуміти сумарний момент усіх сил, як внутрішніх, так і зовнішніх. Однак, легко показати, використовуючи третій закон Ньютона, що моменти внутрішніх сил попарно компенсуються. Таким чином, для системи матеріальних точок замість (5.4) будемо мати:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{зовн}}, \quad (5.5)$$

тобто похідна за часом моменту імпульсу системи матеріальних точок відносно нерухомого початку дорівнює геометричній сумі моментів усіх зовнішніх сил відносно того ж початку.

З рівняння (5.5) видно, що якщо  $\vec{M}_{зовн} = 0$ , то  $\vec{L} = const$ . Якщо момент зовнішніх сил відносно нерухомого початку  $O$  дорівнює нулю, то момент імпульсу системи відносно того ж початку залишається постійним у часі. Це твердження називається *законом збереження моменту імпульсу*. Зокрема він має місце для ізольованої системи і для системи, в якій діють тільки центральні сили, що проходять через нерухомий центр  $O$ .

Закон збереження моменту імпульсу – фундаментальний закон природи, він є наслідком ізотропності простору.

Отже, ми встановили факт існування трьох законів збереження (імпульсу, енергії і моменту імпульсу), кожен з яких пов'язаний з відповідними властивостями простору і часу. Існує теорема Ньотера, яка стверджує, що кожній неперервній симетрії фізичної системи відповідає деякий закон збереження.

Встановлені закони мають, як вказано, фундаментальний характер. Це означає, що у природі не можуть протікати процеси з порушенням цих законів.

Векторне рівняння (5.5) еквівалентне трьом скалярним:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_{зовн}^x, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_{зовн}^y, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_{зовн}^z. \quad (5.6)$$

Величини  $L_i$  та  $M_i$ , які сюди входять, називаються відповідно моментами імпульсу і сил відносно  $i$ -ої осі. Моментами імпульсу і сили відносно довільної осі називають проекції векторів  $\vec{L}$  та  $\vec{M}$  на цю вісь, у припущенні, що початок  $O$  лежить на цій осі. Співвідношення

$$\frac{dL_x}{dt} = M_{зовн}^x, \quad (5.6a)$$

називається *рівнянням моментів відносно нерухомої осі  $X$* . Якщо момент сил відносно будь-якої осі дорівнює нулю, то момент імпульсу системи, відносно тієї ж осі, зберігається. Це *закон збереження моменту імпульсу відносно осі*.

Розглянемо обертальний рух навколо нерухомої осі, яка спрямована перпендикулярно до площини (рис. 27) і проходить через точку  $O$ . За нерухому

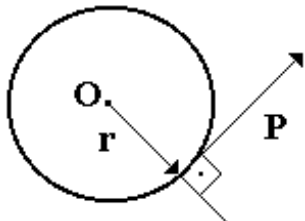


Рис. 27

вісь моментів виберемо вісь обертання. У такому випадку будь-яка матеріальна точка буде обертатися по колу (рис. 27), тоді  $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$ ,  $\alpha = 90^\circ$  і, отже, модуль моменту імпульсу запишеться у вигляді  $L = rmV$ . Виразимо лінійну швидкість через кутову  $V = \omega r$  і підставимо у вираз для моменту імпульсу:

$$L = m\omega r^2 = mr^2\omega.$$

Якщо навколо осі  $O$  обертається система матеріальних точок з однією і тією ж кутовою швидкістю, то сумарний момент імпульсу буде дорівнювати сумі моментів імпульсів усіх матеріальних точок і матиме вигляд:

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I\omega, \quad (5.7)$$

де

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (5.8)$$

Величина, що дорівнює сумі добутків мас матеріальних точок на квадрати їх відстаней до осі обертання, називається *моментом інерції* системи матеріальних точок відносно цієї осі.

Співвідношення (5.7) показує, що при обертанні системи момент її імпульсу відносно осі обертання дорівнює добутку моменту інерції відносно тієї ж осі на кутову швидкість.

У випадку суцільного тіла, його треба розбити на елементарні маси  $dm$  і суму у (5.8) замінити інтегралом по всьому об'єму тіла:

$$I = \int_{(V)} r^2 dm.$$

Підставляючи (5.7) у (5.6а), отримаємо основне рівняння обертального руху навколо нерухомої осі:

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = M, \quad (5.9)$$

тут  $M$  – момент зовнішніх сил відносно осі обертання.

Якщо розглядається обертання твердого тіла або системи матеріальних точок з незмінною конфігурацією навколо нерухомої осі, момент інерції  $I$  залишається незмінним і рівняння (5.9) набуває вигляду:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M. \quad (5.9a)$$

Враховуючи, що  $\frac{d\omega}{dt} = \beta$  – кутове прискорення, запишемо:

$$I\beta = M.$$

Добуток моменту інерції твердого тіла відносно нерухомої осі обертання на кутове прискорення дорівнює моменту зовнішніх сил відносно тієї ж осі.

У такому вигляді рівняння обертального руху твердого тіла повністю аналогічне рівнянню поступального руху матеріальної точки. Цю аналогію можна простежити і далі. При обертанні матеріальної точки по колу елементарна робота при повороті на кут  $d\varphi$  дорівнює  $dA = Fds = Frd\varphi = Md\varphi$ , такий же вираз отримаємо і для твердого тіла, оскільки його можна розглядати як систему матеріальних точок з незмінною конфігурацією. Кінетична енергія твердого тіла, що здійснює обертальний рух, може бути представлена у вигляді:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega r_i)^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}, \quad (5.10)$$

або

$$K = \frac{L^2}{2I}. \quad (5.10a)$$

Ці вирази нагадують відповідні вирази для матеріальної точки і можуть бути отримані з них формальною заміною:  $r \rightarrow \varphi$ ,  $F \rightarrow M$ ,  $m \rightarrow I$ ,  $V \rightarrow \omega$ ,  $p \rightarrow L$ .

### § 18. Теорема Гюйгенса–Штейнера

Знайдемо зв'язок між моментами інерції відносно двох різних паралельних осей. Він встановлюється *теоремою Гюйгенса–Штейнера*: момент інерції твердого тіла відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції цього тіла відносно осі, що проходить через центр мас, паралельно даній і добутку маси на квадрат відстані між осями.

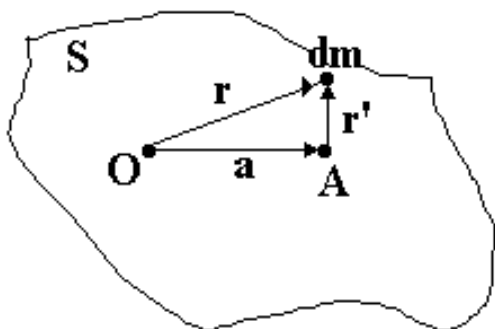


Рис. 28

Доведемо цю теорему. Нехай  $S$  переріз тіла площиною, яка перпендикулярна до осей обертання (рис. 28). Будемо вважати, що центр мас знаходиться в точці  $O$  і осі, які проходять через точки  $O$  та  $A$ , перпендикулярні до рисунка. Уявно розіб'ємо тіло на елементарні маси  $dm$ . Момент інерції тіла

знайдемо, проінтегрувавши по всьому об'єму тіла. Радіус-вектор елементарної маси  $dm$  відносно точки  $A$   $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$ , де  $\vec{r}$  – її радіус-вектор відносно точки  $O$ ,  $\vec{a}$  – радіус-вектор  $\overline{OA}$ , його модуль дорівнює відстані між осями. Таким чином,

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2(\vec{a}\vec{r}). \quad (5.11)$$

Помноживши обидві частини рівності (5.11) на  $dm$  та інтегруючи по всьому об'єму тіла, отримаємо:

$$\int_{(V)} r'^2 dm = \int_{(V)} r^2 dm + a^2 \int_{(V)} dm - 2(\vec{a} \int_{(V)} \vec{r} dm). \quad (5.12)$$

Оскільки вісь  $O$  проходить через центр мас, останній інтеграл у (5.12) обертається у нуль.

$$\vec{R}_c = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm = 0.$$

Інтеграл у лівій частині рівності (5.12) дає момент інерції відносно осі  $A$ , перший інтеграл у правій частині – момент інерції відносно осі  $O$ , другий – дає повну масу тіла. Звідки

$$I_A = I_0 + ma^2. \quad (5.13)$$

Це і є аналітичний вираз теореми Гюйгенса–Штейнера.

## § 19. Приклади обчислення моментів інерції

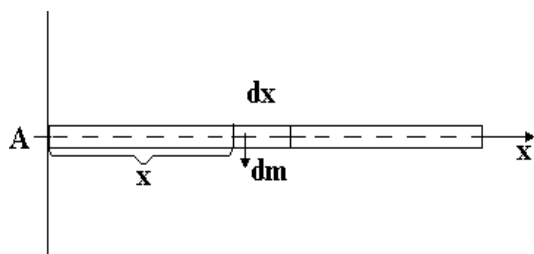


Рис. 29

1. Розрахуємо момент інерції тонкого однорідного стрижня, розташованого перпендикулярно до осі обертання, що проходить через один із його кінців. Довжина стрижня –  $l$ , маса –  $m$ .

Спрямуємо вісь  $X$  уздовж стрижня.

Стрижень будемо вважати тонким (рис. 29).

Виділимо елементарну масу  $dm$ , яка має довжину  $dx$  і розташовується на відстані  $x$  від осі обертання. Причому, оскільки стрижень однорідний,  $dm =$

$\frac{m}{l} dx$ . Маса, яка припадає на одиницю довжини однорідного тіла, називається лінійною густиною  $\rho_l$ . Тоді

$$dI_A = x^2 dm = x^2 \rho_l dx = \frac{m}{l} x^2 dx.$$

Проінтегрувавши по усій довжині стрижня, отримаємо:

$$I_A = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} ml^2. \quad (5.14)$$

Скориставшись теоремою Гюйгенса–Штейнера, знайдемо момент інерції стрижня відносно осі, що проходить через його центр мас, який розташований від осі  $A$  на відстані  $a = \frac{l}{2}$ :

$$I_O = I_A - m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (5.14a)$$

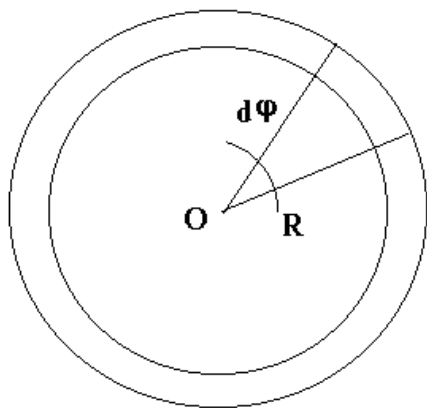


Рис. 30

2. Тонке однорідне кільце. Розрахуємо його момент інерції відносно осі, що проходить через його центр мас (геометричний центр) перпендикулярно площині кільця.

Виділимо елементарну дугу масою  $dm$  і довжиною  $ds = R d\varphi$  (рис. 30), тоді  $dm = \frac{m}{2\pi R} R d\varphi$ , тут  $\frac{m}{2\pi R}$  – лінійна густина маси, тобто

маса, яка припадає на одиницю довжини кільця.

Оскільки усі елементарні маси розташовані на однаковій відстані від осі обертання (кільце тонке),  $dI_O = R^2 \frac{m}{2\pi} d\varphi$ .

Проінтегрувавши по усій довжині кільця (по  $\varphi$  від 0 до  $2\pi$ ), знайдемо:

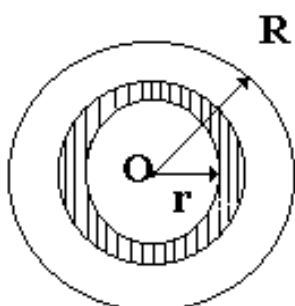


Рис.31

$$I_O = \frac{m}{2\pi} R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = mR^2. \quad (5.15)$$

3. Тонкий однорідний диск. Знайдемо його момент інерції відносно осі, що проходить через його центр мас перпендикулярно площині диска. Радіус диска –  $R$ , маса –  $m$ . Використовуючи симетрію задачі, розіб'ємо диск на елементарні маси у вигляді тонких кілець радіусом  $r$  і товщиною  $dr$  (рис. 31). Маса

кілець –  $dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$ , тут  $\frac{m}{\pi R^2}$  – поверхнева

густина маси диска (маса, яка припадає на одиницю площі поверхні),  $2\pi r dr$  – площа кілець. Використовуючи результат попереднього прикладу, напишемо:

$$dI_O = r^2 dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r^3 dr.$$

Інтегруючи цей вираз по  $r$  у границях від  $0$  до  $R$ , отримаємо:

$$I_O = \frac{m}{R^2} 2 \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}. \quad (5.16)$$

Порівнюючи вирази (5.15) і (5.16) бачимо, що при однакових масах кілець і диска однакових радіусів момент інерції кілець вдвічі перевищує момент інерції диска. Цей факт має просте пояснення. У разі кілець маса розташована на більшій відстані від осі.

Зауважимо, що момент інерції однорідного циліндра відносно його осі симетрії також виражається формулою (5.16).

Наведемо без доведення ще одну корисну формулу. У разі плоского розподілу мас

$$I_z = I_x + I_y,$$

де  $I_z$  – момент інерції відносно осі, перпендикулярної до площини тіла,  $I_x$  та  $I_y$  – моменти інерції відносно взаємно перпендикулярних осей, які лежать у цій площині.

## § 20. Тензор інерції

З'ясуємо, як пов'язані вектори моменту імпульсу  $\vec{L}$  і кутової швидкості  $\vec{\Omega}$  тіла у загальному випадку. Кутова швидкість  $\vec{\Omega}$  може бути орієнтована довільно відносно координатних осей. Розіб'ємо тіло на елементарні маси  $i$ , підсумувавши їх моменти імпульсу, отримаємо момент імпульсу тіла:

$$\vec{L} = \sum_k [\vec{r}_k \vec{p}_k] = \sum_k m_k [\vec{r}_k [\vec{\Omega} \vec{r}_k]] = \sum_k m_k \{ \vec{\Omega} r_k^2 - \vec{r}_k (\vec{r}_k \vec{\Omega}) \}. \quad (5.17)$$

Тут ми врахували, що для усіх елементарних мас кутова швидкість  $\vec{\Omega}$  однакова, що  $\vec{V}_k = [\vec{\Omega} \vec{r}_k]$ , а також розкрили подвійний векторний добуток за правилом:

$$[\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{a} \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \vec{b}).$$

Векторне рівняння (5.17) еквівалентне трьом скалярним, які представляють його проекції на вибрані осі.

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_k m_k \{ \Omega_x r_k^2 - x_k^2 \Omega_x - x_k y_k \Omega_y - x_k z_k \Omega_z \} = \\ &= \Omega_x \sum_k m_k (r_k^2 - x_k^2) - \Omega_y \sum_k m_k x_k y_k - \Omega_z \sum_k m_k x_k z_k, \\ L_y &= \sum_k m_k \{ \Omega_y r_k^2 - y_k x_k \Omega_x - y_k^2 \Omega_y - y_k z_k \Omega_z \} = \end{aligned}$$

$$= \Omega_y \sum_k m_k (r_k^2 - y_k^2) - \Omega_x \sum_k m_k x_k y_k - \Omega_z \sum_k m_k y_k z_k. \quad (5.18)$$

Аналогічно для  $L_z$ . Ці рівняння можна представити у більш компактній формі, ввівши позначення:

$$I_{xx} = \sum_k m_k (r_k^2 - x_k^2), \quad I_{xy} = - \sum_k m_k x_k y_k, \quad I_{xz} = - \sum_k m_k x_k z_k,$$

$$I_{yx} = - \sum_k m_k y_k x_k, \quad \dots$$

Із визначення видно симетрію:  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$  і так далі. Тоді рівняння (5.18) можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx} \Omega_x + I_{xy} \Omega_y + I_{xz} \Omega_z, \\ L_y &= I_{yx} \Omega_x + I_{yy} \Omega_y + I_{yz} \Omega_z, \\ L_z &= I_{zx} \Omega_x + I_{zy} \Omega_y + I_{zz} \Omega_z. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Із (5.19) видно, що у загальному випадку напрямки  $\vec{L}$  та  $\vec{\Omega}$  не збігаються, як це було у випадку обертання навколо закріпленої осі.

Сукупність дев'яти величин  $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$ , ...,  $I_{zz}$  називають *тензором другого рангу*, а операцію, що виражається формулами (5.19), називають множенням тензора  $\hat{I}$  на вектор  $\vec{\Omega}$ .

Тензор прийнято записувати у вигляді квадратної таблички:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Цей тензор характеризує інертні властивості тіла при обертанні.

Діагональні компоненти тензора інерції  $\hat{I}$  називаються осьовими, а недіагональні – відцентровими моментами інерції. У силу симетрії різними будуть тільки 6 компонент. Такий тензор називається симетричним тензором 2 рангу і може бути приведений до діагонального виду. Тензор  $\hat{I}$ , приведений до діагонального виду, називається тензором, приведеним до головних осей.

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

Головні осі взаємно перпендикулярні і перетинаються у центрі інерції тіла. Таким чином, компоненти тензора інерції залежать від вибору системи координат.

Рівняння (5.19) у головних осях приводяться до виду:

$$L_x = I_x \Omega_x, \quad L_y = I_y \Omega_y, \quad L_z = I_z \Omega_z.$$

Якщо кутова швидкість  $\vec{\Omega}$  напрямлена уздовж однієї з головних осей (наприклад, осі  $OX$ ), то  $\vec{\Omega} = (\Omega_x, 0, 0)$ ,

тоді

$$L_x = I_x \Omega_x, \quad L_y = 0, \quad L_z = 0,$$

тобто  $\vec{L} = I\vec{\Omega}$ , напрямки  $\vec{L}$  та  $\vec{\Omega}$  співпадають, як у випадку закріпленої осі. Величини  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  називаються головними моментами інерції.

Якщо  $I_x \neq I_y \neq I_z$ , то обертання навколо різних осей буде мати різну стійкість. Не вдаючись у деталі, скажемо, що стійким є обертання навколо осей з максимальним і мінімальним моментами інерції, обертання навколо осі з проміжним моментом інерції є нестійким.

Легко написати вираз для кінетичної енергії у разі обертання відносно довільної осі

$$K = \frac{1}{2} (I_x \Omega_x^2 + I_y \Omega_y^2 + I_z \Omega_z^2) = \sum_{i=1}^3 I_i \Omega_i^2. \quad (5.20)$$

## § 21. Гіроскоп

*Гіроскопом* називається тверде тіло, яке швидко обертається і вісь якого може змінювати свій напрям у просторі.

Явища, обумовлені швидким обертанням гіроскопа, називаються *гіроскопічними*.

Найбільш широке застосування у науці і техніці мають симетричні гіроскопи – це гіроскопи, що мають симетрією обертання відносно деякої осі, яка називається геометричною віссю, або віссю фігури гіроскопа.

Одна з точок осі фігури гіроскопа буває закріплена, її називають точкою опори гіроскопа. У загальному випадку точкою опори гіроскопа називають таку точку  $O$  осі фігури гіроскопа, відносно якої розглядають обертання гіроскопа.

Прикладом гіроскопа з рухомою точкою опори може слугувати дитяча дзига.



Рис. 32

Щоб вісь фігури гіроскопа мала змогу вільно повертатися у просторі, гіроскоп зазвичай поміщають у карданів підвіс (рис.32). Це пристрій, який дає змогу закріплено в ньому об'єкту обертатися одночасно у декількох площинах. Тобто вісь фігури гіроскопа може вільно змінювати орієнтацію у просторі. Маховик гіроскопа закріплюється на осі його фігури, яка

спирається на підшипники.

Якщо центр карданового підвісу (точка опори) співпадає з центром мас гіроскопа, гіроскоп називається врівноваженим.

Уся теорія гіроскопів побудована на рівнянні моментів

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (5.21)$$

Причому моменти беруться відносно нерухомої точки опори гіроскопа. Якщо момент сил, що діють на гіроскоп, дорівнює нулю  $\vec{M} = 0$ , то момент імпульсу гіроскопа зберігається  $\vec{L} = const$ .

Якщо обертання відбувається навколо осі фігури гіроскопа, то кутова швидкість  $\vec{\omega}$  та момент імпульсу  $\vec{L}$  спрямовані уздовж осі.

Гіроскоп з достатньо великим моментом інерції, приведений у швидке обертання, буде мати великий момент імпульсу. Приріст моменту імпульсу, як це впливає з рівняння моментів (5.21), визначається інтегралом:

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M} dt. \quad (5.22)$$

Якщо зовнішня сила діє протягом короткого проміжку часу, то приріст моменту імпульсу буде малим, тобто якщо дія навіть дуже великих сил буде короткочасною, то рух гіроскопа зміниться мало, отже, гіроскоп має стійкість руху після приведення його у швидке обертання.

Одним із видів руху гіроскопа є *вимушена прецесія*. Це повільне обертання осі фігури гіроскопа навколо напрямку вертикальної осі під дією зовнішньої сили.

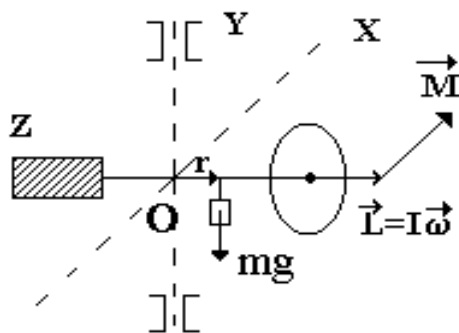


Рис. 32а

Розглянемо неврівноважений гіроскоп. Оскільки момент зовнішньої сили  $\vec{F}$  (тут це некомпенсована сила тяжіння) перпендикулярний до моменту імпульсу  $\vec{L}$ , то і похідна моменту імпульсу буде перпендикулярна до моменту імпульсу  $\vec{L} \perp \dot{\vec{L}}$ , тоді змінюється тільки напрямок моменту

імпульсу  $\vec{L}$ , але не змінюється його величина (рис. 32а). Тобто, якщо зовнішня

сила постійна, то вектор  $\vec{L}$ , а з ним і вісь гіроскопа буде здійснювати рівномірне обертання навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю  $\vec{\Omega}$  (рис. 33). Знайдемо

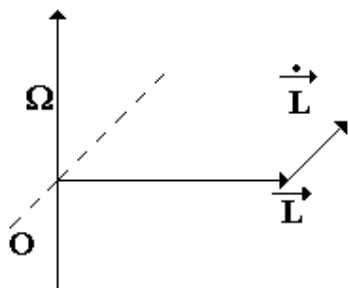


Рис.33

величину вектора  $\vec{\Omega}$ . За аналогією з лінійною швидкістю обертального руху  $\vec{V} = [\vec{\omega}\vec{r}]$  можна написати:

$$\dot{\vec{L}} = [\vec{\Omega}\vec{L}] = \vec{M}. \quad (5.23)$$

З цього рівняння легко знайти  $\vec{\Omega}$  – швидкість вимушеної прецесії. Якщо врахувати, що у нашому прикладі всі три вектори взаємно перпендикулярні, з (5.23) легко отримати:

$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{I_{\parallel}\omega}. \quad (5.24)$$

Тут  $I_{\parallel}$  – момент інерції гіроскопа відносно осі його фігури. Наведений розгляд є правильним, якщо  $\Omega \ll \omega$ , тобто для швидкого гіроскопа. Обертання гіроскопа вважається швидким, якщо кутова швидкість обертання навколо осі його фігури  $\omega$  велика порівняно з кутовою швидкістю обертання навколо перпендикулярної осі  $\Omega$ .

## § 22. Плоский рух твердого тіла

*Плоским рухом* твердого тіла називається такий рух, при якому усі точки тіла рухаються паралельно одній площині. Без обмеження загальності можна вважати саме тіло плоским, і що рух відбувається у площині тіла. Довільний плоский рух можна розглядати як обертання навколо *миттєвої осі*, що рухається як у тілі, так і у просторі.

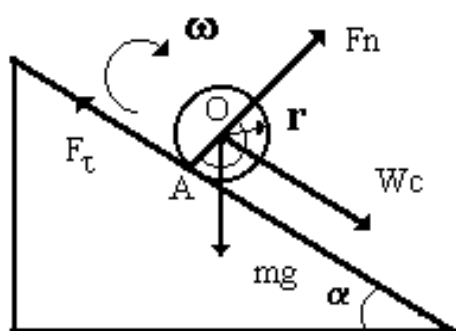
*Миттєва вісь обертання* - це така пряма, відносно якої в даний момент будь-який складний рух твердого тіла можна представити, як обертання навколо цієї прямої. Наприклад, пряма, що проходить через точки тіла, швидкості яких у даний момент дорівнюють нулю, є миттєвою віссю обертання.

Інший спосіб опису плоского руху полягає в такому: описується обертальний рух навколо осі, що проходить через центр мас тіла і поступальний рух центру мас.

Розглянемо обидва способи на прикладі скочування симетричного тіла (диска) з похилої площини.

Диск масою  $m$  і радіусом  $r$  скочується без ковзання з похилої площини, що утворює кут  $\alpha$  з горизонтом. Знайти прискорення його центру мас  $w$ .

**1 спосіб.** На диск діють сила тяжіння, сила тертя і сила нормальної реакції



опори. Використаємо рівняння моментів відносно миттєвої осі, що проходить через точку  $A$  (рис. 34):

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = M_A.$$

Рис. 34

Скористаємося теоремою Гюйгенса–Штейнера для визначення моменту інерції диска відносно осі, що проходить через точку  $A$ , і врахуємо, що відносно точки  $A$  відмінний від нуля тільки момент сили тяжіння:

$$I_A = I_O + mr^2; \quad M_A = mgr \sin \alpha.$$

У загальному випадку лінійна швидкість точки  $O$  складається зі швидкості руху точки  $A$  і швидкості, обумовленої обертанням відносно осі, що проходить через точку  $A$ :  $V_O = V_A + \omega r$ , якщо немає ковзання, то  $V_A = 0$ . Тоді

$$V_O = \omega r; \quad w = \frac{dV_O}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}; \quad w = \frac{mgr^2 \sin \alpha}{I_O + mr^2} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_O}{mr^2}}.$$

**2 спосіб.** Рівняння моментів відносно осі, що проходить через центр мас і рівняння руху центра мас, мають вигляд:

$$\begin{cases} I_O \frac{d\omega}{dt} = M_C = rF_\tau, \\ m \frac{dV_O}{dt} = mg \sin \alpha - F_\tau. \end{cases}$$

Тут  $F_\tau$  – сила тертя між диском і похилою площиною.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, отримаємо:

$$w = \frac{d\omega}{dt} r = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_O}{mr^2}},$$

$$F_\tau = \frac{I_O}{I_O + mr^2} mg \sin \alpha.$$

Цей спосіб дає змогу знайти силу тертя. Як і повинно бути, обидва способи дають однаковий результат для шуканого прискорення.

### § 23. Секторіальна швидкість. Теорема площ

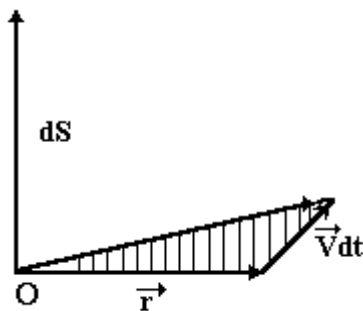


Рис. 35

Нехай є матеріальна точка, яка рухається зі швидкістю  $\vec{V}$ , у момент часу  $t$  її положення характеризується радіус-вектором  $\vec{r}$ , у момент  $t + dt$  буде  $\vec{r} + d\vec{r}$ , де  $d\vec{r} = \vec{V} dt$  (рис. 35). При цьому радіус-вектор описав трикутник. Його площу можна знайти, виходячи зі змісту векторного добутку:

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} [\vec{r} \vec{V}] dt. \quad (5.25)$$

Знайдемо швидкість зміни площі, яка описується («замітається») радіус-вектором:

$$\dot{\vec{S}} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} [\vec{r}\vec{V}] = \vec{\sigma}. \quad (5.26)$$

Вона визначає площу, яка описується радіус-вектором в одиницю часу і називається секторіальною швидкістю. За визначенням  $\vec{L} = m[\vec{r}\vec{V}]$ , тоді

$$\vec{L} = 2m\dot{\vec{S}} = 2m\vec{\sigma}, \quad (5.27),$$

тобто в нерелятивістському випадку, коли маса не залежить від швидкості  $m = const$ , момент імпульсу пропорційний секторіальній швидкості. Якщо сила, що діє на матеріальну точку, є центральною, то вектор  $\vec{L}$  не змінюється з часом, в нерелятивістському випадку не буде змінюватися і секторіальна швидкість  $\vec{\sigma} = const$ .

Із визначення секторіальної швидкості витікає, що площина, яка містить  $\vec{r}$  та  $\vec{V}$ , перпендикулярна до  $\vec{\sigma}$ , але напрямок секторіальної швидкості  $\vec{\sigma}$  фіксований, отже, траєкторія – плоска крива. Зі збереження секторіальної швидкості випливає, що за рівні проміжки часу радіус-вектор описує («замітає») рівні площі. Це твердження називається *теоремою площ*.

Теорема площ справедлива для центральних сил. Справедливе і зворотнє твердження.

## VI. ЕЛЕМЕНТИ НЕБЕСНОЇ МЕХАНІКИ

### § 24. Закон всесвітнього тяжіння. I та II закони Кеплера

Кеплер обробив результати спостережень датського астронома Тіхо Браге і дійшов висновку, що для руху планет справедливі три закони.

1. Кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.
2. Радіус-вектор планети за рівні проміжки часу описує рівні площі.
3. Квадрати періодів обертання планет, відносяться як куби великих півосей еліптичних орбіт, по яких вони рухаються навколо Сонця.

Аналізуючи ці закони, Ньютон прийшов до відкриття закону всесвітнього тяжіння. При цьому Сонце і планета у взаємодії виступають як рівноправні тіла і відрізняються тільки кількісно – величинами мас. Відповідно до *закону всесвітнього тяжіння*: дві матеріальні точки притягуються одна до одної з силою прямо пропорційною їх масам і обернено пропорційною квадрату відстані між ними.

Ці сили називаються гравітаційними, або силами всесвітнього тяжіння:

$$F = -\gamma \frac{Mm}{r^2}, \quad (6.1)$$

де  $\gamma$  – однакова для всіх тіл. Це універсальна стала, одна з найважливіших світових сталих, яка називається *гравітаційною сталою*:

$$\gamma = (6,6732 \pm 0,0030) \cdot 10^{-11} \text{Н м}^2 \text{кг}^{-2}.$$

У такому вигляді закон справедливий і для однорідних тіл сферичної форми, при цьому під відстанню необхідно розуміти відстань між їх геометричними центрами.

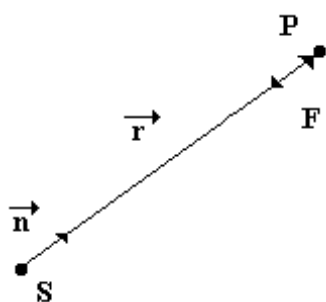
Поле тяжіння є потенціальним полем, його потенціал, як показано вище, легко знайти з умови

$$\vec{F} = -gradU; \Delta U = \gamma \int \frac{m_1 m_2}{r^2} dr,$$

звідки

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}. \quad (6.2)$$

Перейдемо до розгляду законів Кеплера. Нехай положення планети відносно Сонця характеризується радіус-вектором  $\vec{r}$  (рис. 36). Тоді, враховуючи, що сила тяжіння є центральною, можна записати:



$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \vec{n}. \quad (6.3)$$

Рис. 36

Тут  $\vec{n}$  – одиничний вектор радіус-вектора. Запишемо рівняння руху планети у полі тяжіння Сонця:

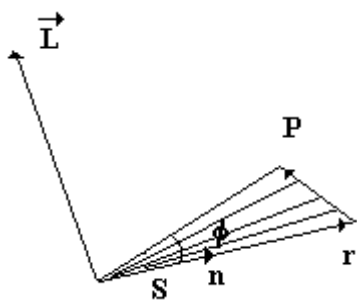


Рис. 37

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \vec{n}. \quad (6.4)$$

Розглянемо закон збереження моменту імпульсу. Момент імпульсу планети відносно Сонця запишеться у вигляді (рис. 37):

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]. \quad (6.5)$$

З рівняння моментів витікає, що  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0$ , оскільки сила центральна. У попередньому розділі було показано, що в цьому випадку

$$|\vec{L}| = 2m\sigma.$$

Зі збереження  $\vec{L}$  випливає, що орбіта є плоска крива (через дві прямі, які перетинаються, можна провести площину),

$$\sigma = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const.} \quad (6.6)$$

Враховуючи, що  $L = I\omega = mr^2\omega = 2m\sigma$ , отримаємо

$$\sigma = \frac{1}{2}r^2\omega = \text{const.}$$

Звідси випливає, що чим ближче планета до Сонця, тим швидше вона рухається по орбіті. Ми довели *другий закон Кеплера*: радіус-вектор планети за рівні проміжки часу описує («замітає») рівні площі.

Для доведення першого закону введемо вектор Кеплера, який зберігається у полі центральних сил  $\sim r^{-2}$ :

$$[\dot{\vec{p}}\vec{L}] - \gamma Mm^2\vec{n} = \vec{K} = \text{const.} \quad (6.7)$$

Перевіримо, що вектор Кеплера зберігається, для цього досить показати, що  $\frac{d\vec{K}}{dt} = 0$ .

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = [\dot{\vec{p}}\vec{L}] - \gamma Mm^2\dot{\vec{n}} = \left[ -\gamma \frac{Mm}{r^2}\vec{n}, mr^2\dot{\vec{\omega}} \right] - \gamma Mm^2\dot{\vec{n}} = \gamma Mm^2([\vec{\omega}\vec{n}] - \dot{\vec{n}}) = 0,$$

оскільки  $\dot{\vec{n}} = [\vec{\omega}\vec{n}]$ . Знайдемо форму орбіти. Помножимо вектор Кеплера  $\vec{K}$  скалярно на  $\vec{n}$  (рис. 38):

$$\vec{K} \cdot \vec{n} = K \cos \varphi = -\gamma M m^2 + \vec{n}[\vec{p}\vec{L}] = -\gamma M m^2 + \vec{L}[\vec{n}\vec{p}] = -\gamma M m^2 + \frac{L^2}{r},$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

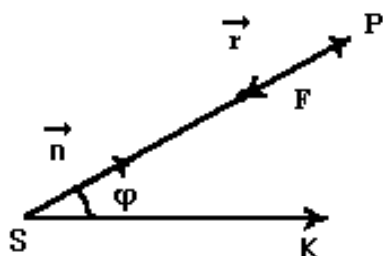


Рис. 38

Звідки:

$$K \cos \varphi = -\gamma M m^2 + \frac{L^2}{r},$$

або

$$r = \frac{L^2}{\gamma M m^2 + K \cos \varphi}. \quad (6.8)$$

Це рівняння можна представити у вигляді рівняння конічного перерізу з ексцентриситетом  $e$  і параметром  $\rho$ :

$$r = \frac{\rho}{1 - e \cos \varphi},$$

де

$$\rho = \frac{L^2}{\gamma M m^2}, e = \frac{K}{\gamma M m^2}, \quad (6.9)$$

при  $e = 0$  виходить коло,  $0 < e < 1$  – еліпс,  $e > 1$  – гіпербола,  $e = 1$  – парабола.

Запишемо зв'язок ексцентриситету  $e$  і параметра  $\rho$  з півосями еліпса.

$\rho = \frac{b^2}{a}$ , де  $a$  та  $b$  – велика і мала півосі еліпса відповідно,  $e =$

$\frac{c}{a}$  – ексцентриситет,  $2c$  – відстань між фокусами еліпса. Ми довели *перший закон*

*Кеплера*. Зі співвідношення (6.8) випливає, що орбіти небесних тіл є кривими другого порядку. Вид кривої визначається параметрами тіла.

## § 25. Третій закон Кеплера

Знайдемо період обертання планети по орбіті. Враховуючи сталість секторіальної швидкості, його можна знайти як відношення площі орбіти до секторіальної швидкості:

$$T = \frac{S_{\text{ел}}}{\sigma} = \frac{\pi ab}{\sigma} = \frac{\pi a \sqrt{a\rho}}{\frac{L}{2m}} = \frac{\pi a^{3/2} 2m}{L} \cdot \frac{L}{\sqrt{\gamma M m^2}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}}.$$

Беручи відношення квадратів періодів для різних планет, отримаємо:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (6.10)$$

Звідси випливає *третій закон Кеплера*: квадрати періодів обертання планет відносяться як куби великих півосей еліптичних орбіт, якими вони рухаються.

Кілька слів про наближення, в яких проведено розгляд:

1. Земля розглядалася як матеріальна точка.
2. Не був врахований той факт, що система відліку, пов'язана з Сонцем, не є інерціальною.
3. Не враховувалася взаємодія планети, яка розглядалася, з іншими планетами.

## VII. КОЛИВАННЯ

Розгляд коливального руху проведемо на прикладі механічних коливань і почнемо з найпростішого з них – гармонічного коливання.

Гармонічне коливання будемо розглядати як одновимірний рух. Тоді з другого закону Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

отримаємо

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x,$$

враховуючи, що рух відбувається тільки уздовж осі  $Ox$ , для спрощення запису опустимо індекс  $x$  у відповідних величин

$$\frac{dp}{dt} = F, \tag{7.1}$$

де  $F = -kx$  – квазіпружна сила. Це потенціальна сила з потенціалом  $U = k \frac{x^2}{2} + const$ , завжди можна вибрати  $const = 0$ . У загальному випадку потенціальну енергію можна розкласти у ряд Тейлора:

$$U(x) = U(0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_0 x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_0 x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3U}{dx^3} \right|_0 x^3 + \dots,$$

$U(0) = 0$  – цього можна досягти відповідним вибором початку відліку енергії,  $\frac{dU}{dx} = 0$ , оскільки для існування коливального руху необхідне існування положення рівноваги, тобто в цьому положенні  $U(x)$  має екстремум (у випадку стійкого положення рівноваги це мінімум). Доданком пропорційним  $x^3$  можна знехтувати у разі малих відхилень від положення рівноваги. Урахування цього

доданка призводить до ангармонізму, рух у цьому випадку носить більш складний характер.

Таким чином, для малих відхилень  $U(x) = \frac{kx^2}{2}$ , а сила квазіпружна  $F = -kx$ , тоді:

$$p = m\dot{x}, \quad \dot{p} = F, \quad m\ddot{x} = -kx, \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (7.2)$$

Останнє рівняння (7.2) називається рівнянням вільних гармонічних коливань. За класифікацією це лінійне, однорідне, диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Його розв'язок у загальному вигляді можна записати:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A \cos(\omega_0 t + \beta). \quad (7.3)$$

Легко перевірити, що це розв'язок основного рівняння динаміки вільних гармонічних коливань. Для цього потрібно знайти першу і другу похідні від виразу (7.3) і підставити їх в останнє рівняння (7.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \\ \ddot{x} &= -x_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha), \\ -x_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha) &= -\frac{k}{m} x_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Порівнюючи коефіцієнти у лівій і правій частинах останньої рівності (7.4),

знайдемо  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  або  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – кругова (кутова) частота, за змістом її

квадрат – це повертаюча сила на одиницю зміщення і на одиницю маси. Бачимо, що частота коливань не залежить від амплітуди.  $x_0$  – амплітуда коливань:

максимальне відхилення від положення рівноваги,  $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$  – частота.

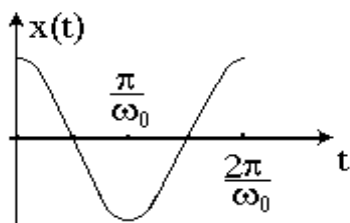
$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (7.5)$$

період вільних гармонічних коливань,  $\omega_0 t + \alpha$  – фаза коливань,  $\alpha$  – початкова фаза коливань.

Розв'язок можна представити в іншій формі, скориставшись формулою для синуса (косинуса) суми:

$$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t. \quad (7.6)$$

Для визначення сталих  $C_1$  та  $C_2$  необхідно задати початкові умови  $\dot{x}(0) = V_0$  та  $x(0) = x_0$ , тоді



$$C_1 = \frac{V_0}{\omega_0}; \quad C_2 = x_0.$$

Ці вирази виходять із співвідношення (7.6) з урахуванням початкових умов.

Розглянемо кілька окремих випадків (рис. 39):

1. Тіло вивели з положення рівноваги і відпустили без початкової швидкості:  $x(0) = x_0$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ ;  $C_1 = 0$ ;  $C_2 = x_0$ ;

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t.$$

Графік залежності координати від часу представлений на верхньому рисунку 39.

2. Тілу надали початкову швидкість у положенні рівноваги:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = V_0; \quad C_2 = 0; \quad C_1 = \frac{V_0}{\omega_0};$$

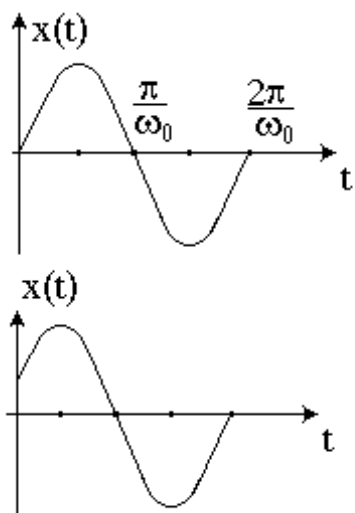


Рис. 39

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Графік залежності координати від часу представлений на середньому рисунку 39.

Випадки 1 і 2 відповідають двом різним способам збудження коливань.

2. У загальному випадку, коли тіло вивели з положення рівноваги і надали початкову швидкість, матимемо:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0; \quad \dot{x}(0) = V_0, \\ x(t) &= x_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Графік залежності координати від часу для цього випадку представлений на нижньому рисунку 39.

## § 26. Механічна енергія тіла при гармонічних коливаннях

Механічна енергія тіла, що коливається, зберігається, оскільки на нього діє консервативна сила. Розглянемо зміни кінетичної і потенціальної енергії тіла в процесі гармонічних коливань.

$$E = T + U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const.} \quad (7.7)$$

Підставивши у (7.7) вирази для координати і швидкості тіла, що коливається

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t + \alpha), \\ \dot{x}(t) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \end{aligned}$$

отримаємо:

$$E = \frac{mA^2}{2} \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (7.8)$$

Амплітудні значення кінетичної і потенціальної енергії співпадають між собою, що випливає з закону збереження енергії:

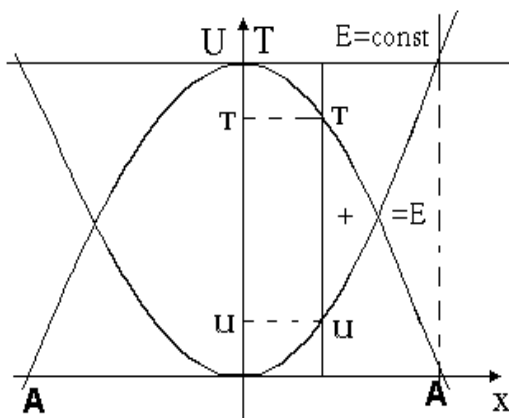


Рис. 40

$$\frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \quad (7.9)$$

оскільки  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

Зобразимо енергетичну діаграму, яка дає залежність кінетичної і потенціальної енергії тіла, що коливається, від величини

його зміщення з положення рівноваги (рис. 40). З наведеної діаграми видно, що у будь-який момент часу сума кінетичної і потенціальної енергій є величина стала.

Для подальшого розгляду введемо ще одне поняття: будь-яка система, яка здійснює коливальний рух, називається *осцилятором*.

## § 27. Математичний маятник

Математичний маятник складається з матеріальної точки масою  $m$ ,

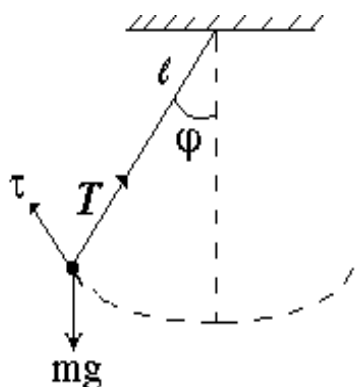


Рис. 41

розташованої на нижньому кінці невагомому нерозтяжного стрижня (нитки), довжиною  $l$ , який вільно обертається навколо осі, що проходить через його верхній кінець (рис. 41).

Завдання полягає в тому, щоб знайти рівняння руху маятника і частоту його власних коливань.

Запишемо основне рівняння динаміки для матеріальної точки, з урахуванням сил що на неї

діють: сили тяжіння  $mg$  і сили натягу нитки  $T$

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{T}. \quad (7.10)$$

Зміщення маятника з положення рівноваги є  $s = l\varphi$ .

Спроектуємо рівняння (7.10) на напрямок дотичної до траєкторії матеріальної точки (рис. 41):

$$m\ddot{s} = -mg \sin \varphi,$$

або, з урахуванням нерозтяжності стрижня

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi, \quad (7.11)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (7.12)$$

Це нелінійне диференціальне рівняння другого порядку, його розв'язок у загальному випадку через елементарні функції не виражається. Проте, в разі малих кутів відхилення, його можна звести до лінійного, якщо врахувати, що при малих значеннях кута  $\varphi$ :  $\sin \varphi \approx \varphi$  ( $\varphi \ll 1$ , якщо кут  $\varphi$  вимірюється у радіанах).

Тоді

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0,$$

позначивши

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (7.12a)$$

отримаємо

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (7.13)$$

Це є рівняння гармонічного коливання, його розв'язок має вигляд:

$$\varphi = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

При початкових умовах:

$$\dot{\varphi}(0) = 0; \quad \varphi(0) = \varphi_m,$$

отримаємо:

$$\varphi = \varphi_m \cos \omega_0 t. \quad (7.13a)$$

Період коливань математичного маятника

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

не залежить від амплітуди у разі малих відхилень, однак, у загальному випадку це не так.

Розглянемо більш строгі теорію математичного маятника.

Період коливань можна визначити, виходячи із закону збереження енергії. Сила тяжіння потенціальна, сила натягу в даному випадку роботи не виконує, оскільки перпендикулярна до швидкості, таким чином, у процесі руху математичного маятника енергія зберігається.

$$\begin{aligned} E = \frac{mV^2}{2} + U &= \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2} + mgh = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) = \\ &= \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \text{const}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Це вже рівняння першого порядку, і хоча воно нелінійне, можна відразу записати його розв'язок в інтегральній формі. Таким чином, застосування закону збереження енергії знижує порядок рівняння. Значення сталої величини

визначимо з початкових умов: маятник відхилили від положення рівноваги і відпустили без початкової швидкості

$$\dot{\varphi}(0) = 0; \quad \varphi(0) = \varphi_m,$$

тоді

$$const = mgl(1 - \cos \varphi_m) = 2mgl \sin^2 \frac{\varphi_m}{2}.$$

Підставляючи це значення сталої величини у вираз (7.14), знайдемо:

$$\dot{\varphi}^2 + \frac{4g}{l} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{4g}{l} \sin^2 \frac{\varphi_m}{2},$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{l} \left( \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right),$$

звідки, позначивши, як і раніше  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , отримаємо

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = 2\omega_0 \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2 \int \omega_0 dt,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2\omega_0 t + const. \quad (7.15)$$

Показати самостійно, що при малих кутах, тобто коли  $\sin \varphi \approx \varphi$ , з виразу (7.15) випливає розв'язок (7.13а) для малих коливань математичного маятника.

Враховуючи, що з нульового положення до положення максимального відхилення математичний маятник рухається чверть періоду, напишемо:

$$\int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2\omega_0 \frac{T}{4}.$$

Оскільки  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ , отримаємо зв'язок між періодом коливань маятника у разі довільного відхилення від положення рівноваги і періодом його малих коливань:

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_m}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (7.16)$$

Цей інтеграл через елементарні функції не виражається. Його можна звести до інтеграла виду  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}$ , який називається еліптичним інтегралом 1 роду. Його значення наведені у відповідних таблицях. Але його можна представити у вигляді ряду, тоді:

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_m}{2} + \dots \right). \quad (7.16a)$$

Таким чином,  $T = f(\varphi_m)$ , тобто у разі довільних відхилень маятника від положення рівноваги період починає залежати від амплітуди, а, отже, і частота коливань також залежить від амплітуди коливань  $\omega = F(\varphi_m)$ . Якщо  $\varphi \ll 1$ , другим і третім доданками у виразі (7.16а) можна знехтувати, і таким чином отримуємо період малих коливань математичного маятника.

## § 28. Поняття фазового портрету

Фазова площина – це площина зміни змінних: імпульсу  $p$  і координати  $x$  або

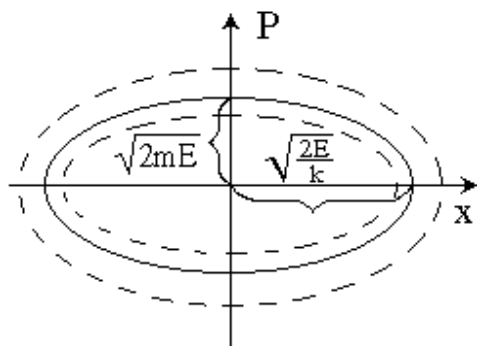


Рис. 42

швидкості  $V$  і координати  $x$ . Графік залежності імпульсу (швидкості) від координати називається *фазовим портретом* системи (рис. 42). Енергія у випадку гармонічного осцилятора зберігається:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2},$$

або

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{kx^2}{2E} = 1.$$

Це є рівняння еліпса, з півсями  $a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ ,  $b = \sqrt{2mE}$ , таким чином, фазовим портретом гармонічного осцилятора є еліпс. Півосі еліпса визначаються енергією і параметрами системи.

## § 29. Фазовий портрет математичного маятника

Енергія математичного маятника, як показано вище, є:

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi). \quad (7.17)$$

Характер руху буде залежати від значення повної механічної енергії маятника. Очевидно, що якщо енергія маятника менша потенціальної енергії у

найвищій точці траєкторії  $E < 2mgl$ , рух буде коливальним, при  $E > 2mgl$  – обертальним, тобто маятник буде обертатися навколо точки підвісу.

Рівняння фазових траєкторій отримаємо з виразу для повної енергії:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2E}{ml^2} - 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (7.17a)$$

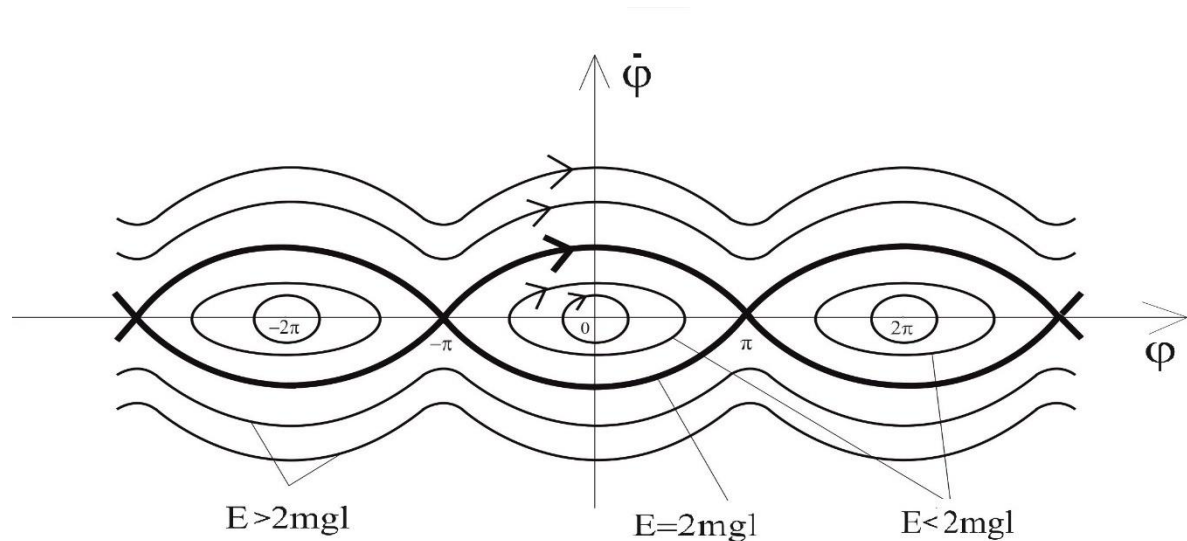


Рис. 43

Видно, що для малих коливань  $\sin \varphi \approx \varphi$  фазові криві мають вигляд еліпсів, як і для гармонічного осцилятора (рис. 42). Таким чином, замкнуті криві навколо точки  $(0,0)$  відповідають значенням енергії, які допускають періодичний рух навколо положення рівноваги (рис. 43). Замкнуті криві навколо точок  $(\pm 2\pi n, 0)$  фізичного сенсу не мають. Незамкнені криві відповідають обертальному руху маятника навколо точки підвісу. Стрілками показано напрям руху маятника уздовж траєкторії. Крива на фазовій площині, що відокремлює коливальний рух від обертального, називається *сепаратрисою*. Їй відповідає енергія  $E = 2mgl$ . Легко отримати рівняння сепаратриси, підставивши у (7.17) вираз для повної енергії  $E = 2mgl$ .

$$2mgl = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi),$$

або

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (7.18)$$

Ця залежність зображена на рисунку жирними лініями.

Як видно з виразу (7.17а), при  $E > 2mgl$  графік буде зображуватися незамкнутими кривими, розташованими вище і нижче сепаратриси. Ці криві, як вказано вище, характеризують обертання маятника у заданому напрямку.

### § 30. Фізичний маятник

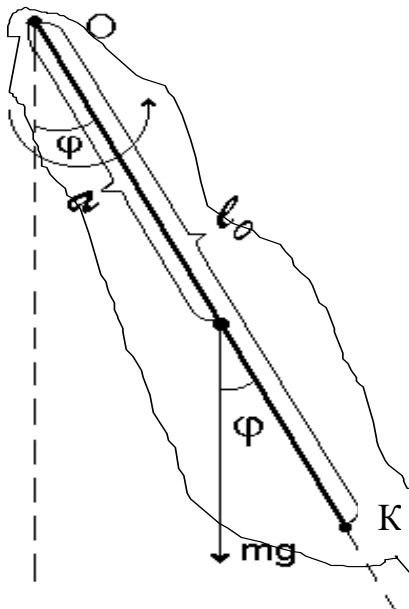


Рис. 44

Фізичним маятником називається тверде тіло, яке може здійснювати рух відносно закріпленої горизонтальної осі, що не проходить через центр мас цього тіла.

Точка перетину осі з вертикальною площиною, що проходить через центр мас маятника, називається точкою підвісу  $O$ .

Нехай тіло  $A$  вільно обертається навколо горизонтальної осі, що проходить через точку  $O$ . Відстань від точки підвісу до центру мас дорівнює  $a$ , відхилення тіла від положення

рівноваги будемо характеризувати кутом  $\varphi$  (рис. 44). Рух тіла  $A$  описується рівнянням моментів:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (7.19)$$

Спроекуємо співвідношення (7.19) на вісь, перпендикулярну рисунку, що проходить через точку  $O$ . На рисунку вказано позитивний напрямок обертання.  $\vec{M}$  – момент сили тяжіння. Його проекція на обрану вісь:

$$M_z = -mga \sin \varphi, \quad (7.20)$$

$m$  – маса тіла. Момент імпульсу маятника відносно закріпленої осі обертання має вигляд:

$$L_z = I\omega.$$

Диференціюючи отримане співвідношення за часом, отримаємо:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\dot{\varphi}, \quad (7.21)$$

де  $I$  – момент інерції тіла.

Підставимо вирази (7.20) та (7.21) у (7.19)

$$I\ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi,$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I} \sin \varphi = 0.$$

Це нелінійне рівняння, його можна ланеаризувати, врахувавши, що при малих кутах  $\sin \varphi \approx \varphi$  (як у випадку математичного маятника)

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I} \varphi = 0.$$

Отримане рівняння є рівнянням гармонічних коливань з частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}. \quad (7.22)$$

Порівнюючи це з частотою гармонічних коливань математичного маятника, бачимо, що математичний маятник, що має довжину:  $l_0 = \frac{I}{ma}$ , матиме такий самий період (частоту), що і даний фізичний.  $l_0$  називається *приведеною довжиною* фізичного маятника.

Отже, приведеною довжиною фізичного маятника називається довжина такого математичного маятника, період (частота) якого співпадає з періодом (частотою) фізичного маятника.

Точка  $K$ , яка знаходиться на відстані  $l_0$  від точки підвісу і лежить на прямій, що з'єднує точку підвісу і центр мас, називається *центром коливань* фізичного маятника (рис. 44).

Центр коливань має таку властивість: якщо вісь обертання помістити у центрі коливань, то частота коливань маятника не зміниться, а центр коливань переміститься у колишню точку підвісу. Це властивість *оборотності* фізичного маятника.

Центр коливань можна визначити інакше: це точка, в якій необхідно зосередити усю масу фізичного маятника, щоб період його коливань не змінився.

### § 31. Загасаючі коливання

Сила опору середовища у деякому наближенні пропорційна швидкості. З урахуванням цього рівняння руху маятника матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}, \quad (7.23)$$

тут  $\lambda$  – коефіцієнт в'язкості середовища, що визначає силу в'язкого тертя, характеризує властивості системи. Перенесемо усі доданки у ліву частину рівняння і розділимо на  $m$ :

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \dot{x} &= 0; \\ \gamma &= \frac{\lambda}{m}.\end{aligned}\tag{7.24}$$

Розв'язок цього рівняння записується у вигляді:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_1 t + \alpha),\tag{7.25}$$

З отриманого співвідношення видно, що амплітуда коливань зменшується з плином часу, такі коливання називаються загасаючими, а частота  $\omega_1 =$

$$\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

– частотою загасаючих коливань.

У тому, що вираз (7.25) є розв'язком рівняння (7.23), легко переконатися, двічі продиференціювавши  $x(t)$  і підставивши  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  та  $x$  у рівняння (7.23) (виконати самостійно).

Порівнюючи  $\omega_1$  з  $\omega_0$ , бачимо, що  $\omega_1 < \omega_0$ , тобто при наявності тертя, частота коливань зменшується.

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  – умовний період загасаючих коливань.

$x(t)$  є добутком експоненти, що убиває, на періодичну функцію. Графік  $x(t)$  має вигляд, представлений на рис. 45.

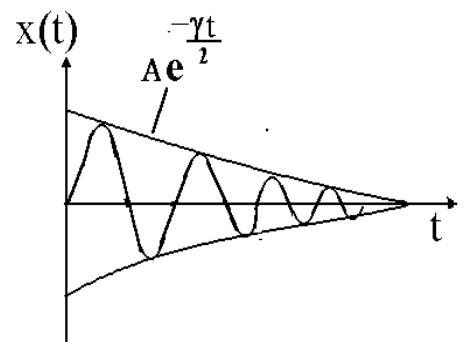


Рис. 45

Швидкість загасання визначається коефіцієнтом  $\gamma/2$ , який називається *коефіцієнтом загасання*. Він визначається відношенням коефіцієнта сили тертя до подвоєної маси.

Для оцінки загасання системи у залежності від числа коливань користуються *декрементом загасання*, який визначається як відношення амплітуд через період:

$$D = \frac{x(t)}{x(t + T_1)} = e^{\frac{\gamma T_1}{2}}. \quad (7.26)$$

Якщо взяти логарифм від виразу (7.26), то отримаємо *логарифмічний декремент загасання*

$$\delta = \ln D = \frac{\gamma T_1}{2} = \frac{\pi \gamma}{\omega_1}. \quad (7.27)$$

Можна ввести *час релаксації*  $\tau = \frac{2}{\gamma}$  – це час, протягом якого амплітуда коливань зменшується у  $e$  разів.

Тоді

$$\delta = \frac{T_1}{\tau}.$$

Величина, зворотна логарифмічному декременту загасання, показує, скільки коливань здійснить система, перш ніж амплітуда зменшиться у  $e$  разів.

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\tau}{T_1} = N. \quad (7.28)$$

Для характеристики осцилюючої системи часто використовується величина  $Q$ , яка називається *добротністю* – це помножене на  $2\pi$  відношення запасеної енергії до середнього значення енергії, яка втрачається за один період:  $T_1 \langle P \rangle$ , тут  $\langle P \rangle$  – середня потужність, яку розвиває сила в'язкого тертя; тобто, чим більше  $Q$ , тим менше загасання осцилятора.

$$Q = \frac{2\pi E}{T_1 \langle P \rangle} = \frac{2\pi E \nu_1}{\langle P \rangle} \approx \omega_0 \tau. \quad (7.29)$$

Останнє співвідношення є справедливим у разі слабкого загасання, коли частоти вільних і згасаючих коливань мало відрізняються.

### § 32. Вимушені коливання

Якщо до розглянутих раніше сил, які діють на осцилятор, додати зовнішню періодичну силу з частотою  $\Omega$  й амплітудою  $F_0$ , то рівняння набуде вигляду:

$$m\ddot{x} + kx + \lambda\dot{x} = F_0 \cos \Omega t. \quad (7.30)$$

Це рівняння лінійне, диференціальне, другого порядку, з постійними коефіцієнтами, неоднорідне.

Щоб були можливі незагасаючі коливання, необхідно, щоб зовнішня (змушуюча) сила компенсувала втрати енергії на здійснення роботи проти сили в'язкого тертя.

Розв'язок рівняння (7.30) в загальному випадку має вигляд:

$$x(t) = x_{з.о}(t) + x_{ч.н}(t),$$

де  $x_{з.о}(t)$  – загальний розв'язок однорідного рівняння, він визначається співвідношенням (7.25),  $x_{ч.н}(t)$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Враховуючи загасаючий характер розв'язку (7.25), можна сказати, що через певний час  $t > \tau$  загальний розв'язок однорідного рівняння повністю загасне і розв'язок рівняння (7.30) буде визначатися тільки частинним рішенням неоднорідного рівняння  $x_{ч.н}(t)$ , який будемо шукати у вигляді:

$$x(t) = x_{\text{ч.н}}(t) = B \sin \Omega t + D \cos \Omega t. \quad (7.31)$$

Підставимо вираз (7.31) у рівняння (7.30), попередньо двічі продиференціювавши його за часом:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= B\Omega \cos \Omega t - D\Omega \sin \Omega t \\ \ddot{x}(t) &= -B\Omega^2 \sin \Omega t - D\Omega^2 \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} -m\Omega^2(B \sin \Omega t + D \cos \Omega t) + k(B \sin \Omega t + D \cos \Omega t) + \\ + \lambda\Omega(B \cos \Omega t - D \sin \Omega t) = F_0 \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Отримана рівність буде справедливою тоді і тільки тоді, коли будуть однаковими коефіцієнти перед функціями  $\sin \Omega t$  та  $\cos \Omega t$  у лівій і правій частинах співвідношення:

$$\begin{cases} -m\Omega^2 B + kB - \lambda\Omega D = 0 \\ -m\Omega^2 D + kD + \lambda\Omega B = F_0 \end{cases}$$

Таким чином отримуємо систему двох рівнянь (алгебраїчних) з двома невідомими. Розв'язуючи її (будь-яким відомим методом), знайдемо:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{F_0}{m} \frac{\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2} \\ D &= \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

тут, як і раніше,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\gamma = \frac{\lambda}{m}$ . Коефіцієнти  $B$  та  $D$  визначають відгук системи на зовнішнє збудження:

$B$  – називається амплітудою поглинання, або абсорбтивною амплітудою;

$D$  – називається пружною або дисперсивною амплітудою.

Рух носить періодичний характер, оскільки потужність, що розсіюється силою тертя, в середньому компенсується потужністю зовнішньої сили. Покажемо це. Миттєва потужність, яка розвивається зовнішньою силою, є  $W(t) = F(t)\dot{x}(t) = F_0 \cos \Omega t (B\Omega \cos \Omega t - D\Omega \sin \Omega t)$ .

Усреднимо  $W(t)$  за періодом, скориставшись визначенням середнього значення функції, що залежить від часу:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt = \frac{F_0 B \Omega}{2}. \quad (7.33)$$

Середня потужність сили тертя за період:

$$\langle W_{\text{тер}} \rangle = \langle F_{\text{тер}} \dot{x}(t) \rangle = -\lambda \langle \dot{x}(t)^2 \rangle = -\frac{\lambda \Omega^2}{2} (B^2 + D^2) = -\frac{1}{2} \Omega F_0 B. \quad (7.34)$$

Розрахунок пропонується провести самостійно.

Вирази (7.33) і (7.34) відрізняються тільки знаком, що і підтверджує зроблене твердження (для отримання виразу (7.34) необхідно скористатися виразами (7.32)).

Зауважимо, що частинний розв'язок неоднорідного рівняння (7.30) можна записати в іншому вигляді:

$$x_{\text{ч.н}}(t) = A \cos(\Omega t + \varphi), \quad (7.31a)$$

де амплітуда  $A$  і фаза коливань  $\varphi$  визначаються, як легко показати, наступними співвідношеннями:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}}, \quad (7.32a)$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{\gamma \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (7.32b)$$

В якому вигляді вибрати розв'язок рівняння (7.30), визначається з міркувань зручності.

### § 33. Резонанс

Будемо спостерігати за зміною амплітуди вимушених коливань у процесі повільної зміни частоти зовнішньої сили  $\Omega$ . Для аналізу скористаємося виразом (7.31а). Видно, що за умови відсутності тертя ( $\gamma = 0$ ) при  $\Omega = \omega_0$  спостерігається необмежене зростання амплітуди вимушених коливань (7.32а). Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при певному значенні частоти зовнішньої сили називається *резонансом*, а ця частота – *резонансною*.

При наявності тертя резонансна амплітуда залишається обмеженою, незважаючи на різке зростання. Визначимо резонансну частоту. Для цього потрібно знайти частоту, яка відповідає максимуму амплітуди, а, отже, мінімуму знаменника у виразі (7.32а):

$$\frac{d}{d\Omega} [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2] = 0.$$

Продиференціювавши і розв'язавши отримане рівняння, знайдемо:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\gamma^2}. \quad (7.35)$$

У разі малого загасання, тобто  $\gamma \ll \omega_0$ , замість виразу (7.35), після розкладання у ряд за малим параметром  $\frac{\gamma}{\omega_0}$ , отримаємо:

$$\Omega_{\text{рез}} = \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} \right). \quad (7.36)$$

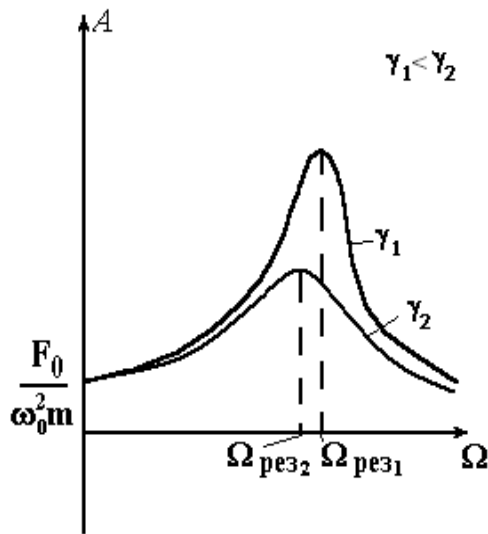


Рис. 46

З виразу (7.36) видно, що за наявності сили тертя резонанс настає при менших частотах, ніж за її відсутності. З ростом сили тертя (коефіцієнта загасання) резонансна частота зменшується, зменшується також і резонансна амплітуда, пік стає більш розмитим (рис. 46).

### § 34. Додавання коливань

Розглянемо додавання коливань і почнемо з коливань, спрямованих уздовж однієї прямої.

Вирішення питання про додавання кількох коливань однакового напрямку стає більш наочним, якщо зобразити коливання у вигляді векторної діаграми.

Нехай коливання описується рівнянням:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (7.37)$$



Рис. 47

Візьмемо вісь  $X$  і з деякої точки  $O$  відкладемо під кутом  $\alpha$  до неї вектор  $\vec{a}$  (рис. 47). Якщо привести цей вектор в обертання з кутовою швидкістю  $\omega_0$  навколо осі, що проходить через точку  $O$ , перпендикулярно площині рисунка, то координата кінця вектора буде змінюватися з часом відповідно до

рівняння (7.37). Зображена схема називається векторною діаграмою (рис. 47).

Розглянемо додавання двох коливань однакового напрямку і однакової частоти:

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad x_2(t) = a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2).$$

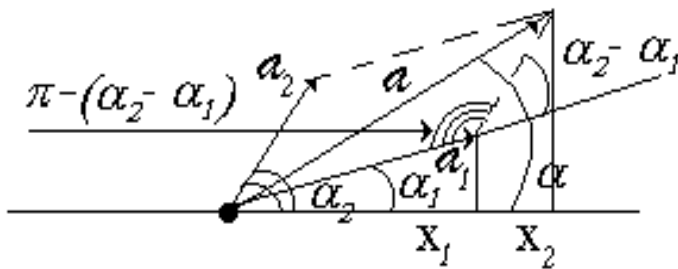


Рис. 48

Представимо обидва коливання за допомогою векторних діаграм (рис. 48). Вектор  $\vec{a}$ , який дорівнює векторній сумі  $\vec{a}_1$  та  $\vec{a}_2$ , при обертанні представляє, як показано на рисунку,

результуюче коливання  $x = x_1 + x_2$ . Амплітуду  $a$  та початкову фазу  $\alpha$  результуючого коливання знайдемо з рисунка

$$\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)) = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \end{aligned} \quad (7.38)$$

та

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}.$$

При отриманні виразу (7.38) була використана теорема косинусів.

Із (7.38) видно, що якщо різниця фаз дорівнює нулю, то амплітуда результуючого коливання  $a = a_1 + a_2$ , тобто дорівнює просто сумі амплітуд коливань. У випадку  $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ , тобто коливання відбуваються у протифазі, амплітуда коливання є  $a = |a_1 - a_2|$ .

Якщо частоти коливань, які додаються, неоднакові  $\omega_1 \neq \omega_2$ , вектори  $\vec{a}_1$  та  $\vec{a}_2$  обертатимуться з різними швидкостями, тоді вектор  $\vec{a}$  обертатиметься з непостійною швидкістю і крім того буде міняти свою довжину, звідки випливає, що результуюче коливання вже не буде гармонічним.

### § 35. Биття

Розглянемо випадок, коли коливання, що додаються, мало відрізняються за частотою ( $\omega \gg \Delta\omega$ ):

$$x_1 = a \cos \omega t, \quad x_2 = a \cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Для спрощення розрахунків будемо вважати амплітуди коливань однаковими, а початкові фази – рівними нулю. Тоді, використовуючи формулу для суми косинусів, отримаємо:

$$x = x_1 + x_2 = \left(2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t.$$

Враховуючи, що  $\Delta\omega \ll \omega$ , покладемо

$$\omega + \frac{\Delta\omega}{2} \approx \omega, \text{ звідки}$$

$$x = \left(2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos \omega t. \quad (7.39)$$

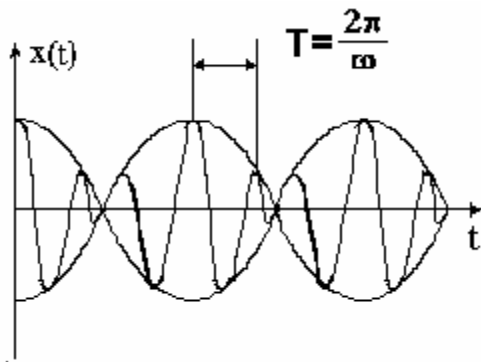


Рис. 49

Перший співмножник у виразі (7.39)

змінюється набагато повільніше, ніж другий.

Це дає можливість розглядати коливання (7.39) як гармонічне коливання з частотою  $\omega$  і амплітудою, яка змінюється за гармонічним законом. Такі коливання називаються *биттям*. Результат додавання розглянутих коливань схематично представлений на рис. 49.

### § 36. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Розглянемо додавання взаємно перпендикулярних коливань. Виберемо початкову фазу одного коливання, скажімо, спрямованого уздовж осі  $X$ , рівною нулю. Спочатку розглянемо випадок однакових частот:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \cos(\omega t + \alpha). \quad (7.40)$$

Рівняння (7.40) представляють собою рівняння траєкторії точки, що коливається, у параметричному вигляді. Виключаючи час, отримаємо його у явному вигляді.

З першого рівняння:  $\frac{x}{a} = \cos \omega t$ ; з другого:  $\frac{y}{b} = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$ , або

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \alpha - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \alpha.$$

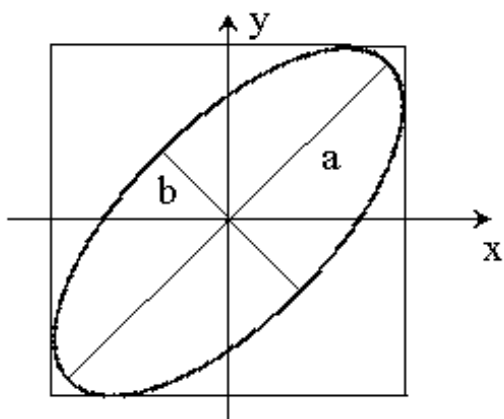


Рис. 50

Позбувшись радикала і виконавши необхідні математичні перетворення, отримаємо співвідношення:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (7.41)$$

Це рівняння еліпса, осі якого орієнтовані довільно відносно координатних осей  $x$  та  $y$ . Таким чином, при додаванні взаємно перпендикулярних коливань з однаковими частотами, траєкторією частинки у загальному випадку, є еліпс (рис. 50).

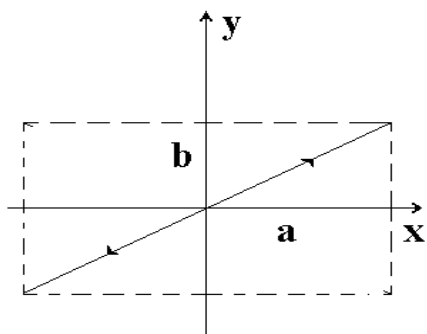


Рис. 51

Розглянемо кілька окремих випадків.

1. Нехай фази коливань співпадають  $\alpha = 0$ .

Підставивши  $\alpha = 0$  у рівняння (7.41), отримаємо:

$$y = \frac{b}{a} x. \quad (7.41a)$$

Це рівняння прямої, яка є діагоналлю прямокутника зі сторонами  $2a$  та  $2b$ . Результат додавання взаємно перпендикулярних коливань з однаковими частотами і співпадаючими фазами представлений на рис. 51.

2. Якщо коливання знаходяться у протифазі  $\alpha = \pi$ , з рівняння (7.41)

отримаємо

$$y = -\frac{b}{a}x. \quad (7.41б)$$

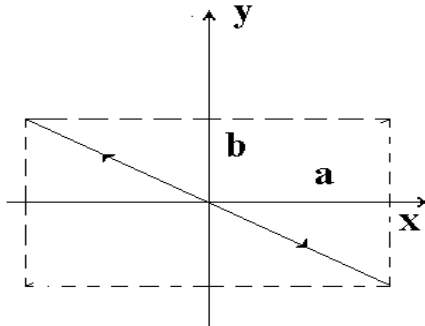


Рис. 52

Це друга діагональ того ж прямокутника (рис. 52).

Таким чином, якщо коливання, які додаються, знаходяться у фазі  $\alpha = 0$  або у протифазі  $\alpha = \pi$ , траєкторія точки, яка коливається, є прямою лінією.

3. Розглянемо випадок  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , коливання, які додаються, запишуться у вигляді:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = -b \sin \omega t.$$

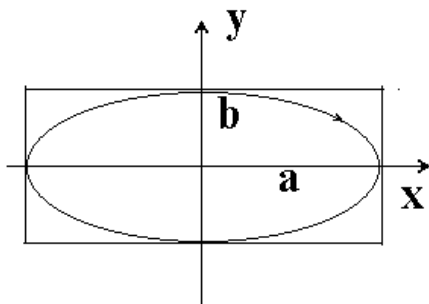


Рис. 53

Виключаючи з цих співвідношень час, отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7.41в)$$

Це еліпс, вписаний у той самий прямокутник. Напрямок руху частинки, яка коливається, по еліпсу вказано стрілкою (рис. 53).

4. Якщо  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ , то  $x = a \cos \omega t$ ,  $y = b \sin \omega t$ .

Знову отримуємо еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (7.41г)$$

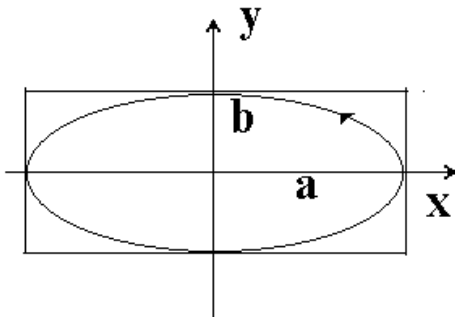


Рис. 54

але частинка рухається по ньому у протилежний бік (рис. 54).

Еліпс у випадку 3 називається лівим, а в разі 4 – правим.

Рівняння (7.41а, б, в, г), є окремими випадками загального розв'язку, що

визначається рівнянням (7.41).

Якщо частоти коливань, що додаються, різні, то у загальному випадку траєкторії набувають досить складного вигляду, який називається *фігурами Ліссажу*. Наприклад, якщо частота коливань уздовж осі  $OY$  вдвічі більша за частоту коливань уздовж осі  $OX$  –  $\omega_y = 2\omega_x$  та  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , отримаємо фігуру, представлену на рис. 55.

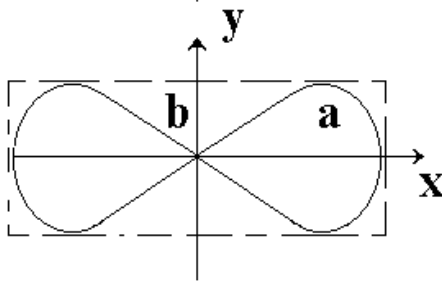


Рис.55

Із співвідношення частот впливає, що кількість перетинів даної кривої з віссю  $X$  удвічі більша, ніж з віссю  $Y$ . Таким чином отримуємо, що відношення частот дорівнює зворотному відношенню числа перетинів траєкторії точки з відповідними осями.

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}. \quad (7.42)$$

Отже, фігури Ліссажу можуть бути використані для визначення частоти невідомого сигналу, наприклад, за допомогою осцилографа. Для цього на один вхід осцилографа необхідно подати сигнал з відомою частотою, а на другий – сигнал, що досліджується. Відому частоту сигналу потрібно підбирати так, щоб легко можна було визначити кількість перетинів отриманої фігури Ліссажу з координатними осями.

При довільному співвідношенні частот фігури Ліссажу мають доволі складну форму.

Знаючи правила додавання взаємно перпендикулярних коливань та коливань, спрямованих уздовж однієї прямої, можна додавати коливання, спрямовані під кутом одне до одного. У цьому разі достатньо одне з них представити у вигляді двох складових: паралельної і перпендикулярної до іншого коливання.

## VIII. ДЕФОРМАЦІЇ. ВИДИ ДЕФОРМАЦІЙ

Якщо на тіло подіяти силою, то форма тіла, взагалі кажучи, зміниться. У такому разі говорять, що тіло деформувалося. При вивченні динаміки твердих тіл ми не враховуємо їх деформації, вважаючи, що деформації достатньо малі і не змінюють характеру явищ, які розглядаються. Однак усі реальні тіла здатні деформуватися. У разі твердих тіл розрізняють два граничних випадки: деформації *пружні* і деформації *пластичні*. *Пружними* називаються деформації, що зникають після припинення дії прикладених сил. *Пластичними* або *залишковими* деформаціями називаються такі, які залишаються у тілі і після припинення дії прикладених сил. Є деформація пружною чи пластичною, залежить не тільки від матеріалу, але і від величини прикладених сил.

Закони, що зв'язують сили і деформації в загальному випадку досить складні, оскільки зв'язок між силами і деформаціями в загальному випадку неоднозначний і залежить від величини і характеру змін, прикладених сил та інших причин.

Розглянемо деформації довгого сталевого дроту.

Якщо матеріал дроту однорідний, то матимемо однорідну деформацію розтягування, яку можна охарактеризувати *відносним подовженням*  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_0}{l_0}, \quad (8.1)$$

де  $\Delta l_0$  – подовження будь-якої ділянки, яка мала початкову довжину  $l_0$ .

Величину сили, що діє на одиницю площі поперечного перерізу, називають *напруженням* і її позначають буквою  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (8.2)$$

Залежність напруження, яке виникає у тілі, від величини деформації представлена на рис. 56. При невеликих значеннях напруження і деформація

приблизно пропорційні одне одному (до точки  $L$ ). На цій ділянці виконується

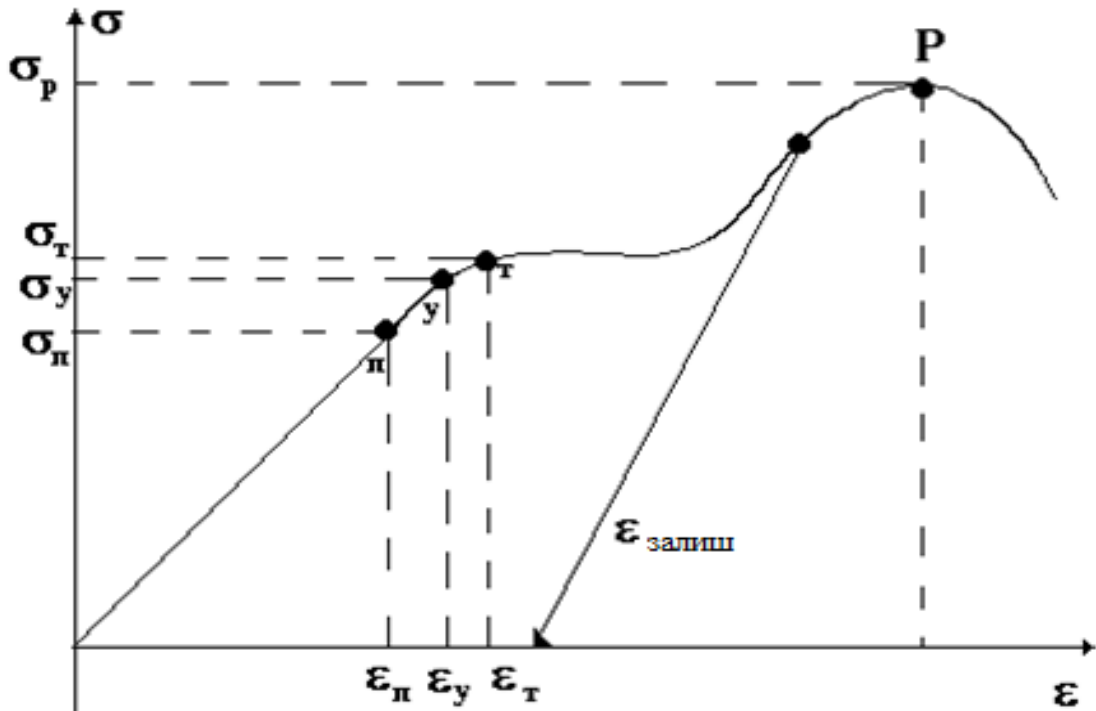


Рис. 56

*закон Гука*: деформація прямо пропорційна напруженню:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (8.3)$$

Коефіцієнт  $E$  називається *модулем Юнга*. Напруження  $\sigma_п$  і деформація  $\varepsilon_п$  називаються *границею пропорційності*. Модуль Юнга  $E$  залежить тільки від матеріалу тіла і його фізичного стану.

До точки  $У$  спостерігається однозначний зв'язок між напруженням і деформацією, тіло повністю відновлює форму після зняття напруження,  $\sigma_у, \varepsilon_у$  – *границя пружності*.

Після точки  $Г$  деформації швидко зростають при незначних змінах напруження, це границя плинності  $\sigma_Г, \varepsilon_Г$ . Якщо деформації більше  $\varepsilon_Г$ , то після зняття навантаження форма вже відновлюється не повністю, виникають залишкові деформації  $\varepsilon_{залиш}$ .

Далі, за точкою  $T$  зі збільшенням деформацій напруження дещо зростає, досягає у точці  $P$  максимуму, і потім крива обривається, що відповідає руйнуванню зразка.

### § 37. Розтягнення і стиснення

Розглянемо однорідний стрижень, до кінців якого прикладені сили, що його розтягують –  $F$ , стрижень буде деформований – *розтягнутий*. Щоб стрижень був у рівновазі, необхідно, щоб на будь-який його переріз діяли протилежно спрямовані, рівні за величиною сили  $\vec{F}_1, \vec{F}'_1$  (рис. 57), тобто

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_1| = |\vec{F}'_1|. \quad (8.4)$$

Якщо стрижень розтягнутий, то напруження називають *натягом*:



$$T = \frac{F}{S}.$$

Якщо стиснутий – *тиском*:

$$P = \frac{F}{S}.$$

Рис. 57

Під дією сили розтягнення або стиснення змінюються не тільки поздовжні, а й поперечні розміри стрижня. У разі сили, що розтягує, вони зменшуються, у разі сили, що стискає – збільшуються.

Позначимо  $-\frac{\Delta a}{a_0}$  – відносне поперечне стиснення. Введемо величину

$$\mu = -\frac{\frac{\Delta a}{a_0}}{\frac{\Delta l}{l_0}} = -\frac{\Delta a}{\Delta l} \frac{l_0}{a_0}, \quad (8.5)$$

яка характеризує відношення відносного поперечного стиснення до відповідного відносного подовження. Ця величина називається *коефіцієнтом Пуассона*. Він

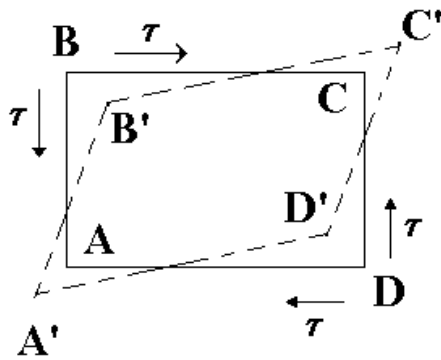


Рис. 58

залежить тільки від матеріалу тіла і є однією з важливих сталих, що характеризують пружні властивості матеріалу.

Модуль Юнга  $E$  та коефіцієнт Пуассона  $\mu$  повністю характеризують пружні властивості ізотропного матеріалу. Усі інші характеристики можуть бути виражені через  $E$  та  $\mu$ . Розглянемо куб з однорідної та ізотропної речовини.

Прикладемо до протилежних його граней рівні і протилежно спрямовані сили (рис. 58). Під дією прикладених напружень куб буде деформуватися і в перерізі замість квадрата буде ромб (рис. 58). Об'єм куба при таких деформаціях практично не змінюється. Якщо повернути ромб так, щоб сторона  $A'D'$  збігалася зі стороною  $AD$  (рис. 59), то видно, що усі шари куба, паралельні основі, зсунулися в одному і тому ж напрямку, паралельному основі. Така деформація

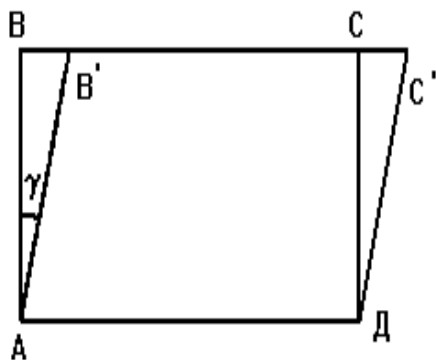


Рис. 59

називається *зсувом*. Величина зсуву пропорційна відстані шару, що зміщується від основи  $AD$ .

Кут  $\gamma$  між  $AB$  та  $AB'$  називається кутом зсуву. Для деформації зсуву, при малих кутах зсуву  $\gamma$ , можна записати закон Гука:

$$\tau = G\gamma, \quad (8.6)$$

де  $\tau$  – дотичне напруження, що діє на грані куба.

$G$  – називається *модулем зсуву* і залежить від матеріалу, з якого виготовлений зразок. Його можна виразити через модуль Юнга  $E$  та коефіцієнт

Пуассона  $\mu$ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (8.7)$$

### § 38. Кручення та згин

Деформації розтягання-стиснення і зсуву належать до однорідних деформацій, тобто усі нескінченно малі елементи тіла деформовані однаково. Деформації *кручення* і *згину* належать до неоднорідних деформацій.

Якщо взяти стрижень, один з його кінців закріпити, а до другого докласти обертаючий момент  $M$ , відносно осі стрижня, стрижень закрутиться, кожен радіус вільної основи повернеться відносно закріпленої основи на кут  $\varphi$ . Це і є *деформація кручення*. Закон Гука для такої деформації записується у вигляді:

$$M = f\varphi, \quad (8.8)$$

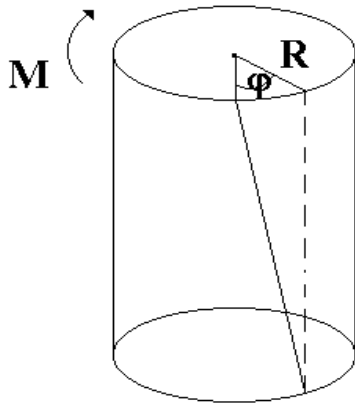


Рис. 60

де  $f$  – модуль кручення. На відміну від уведених раніше модулів  $E$ ,  $\mu$  та  $G$ , модуль кручення залежить не тільки від матеріалу, але і від геометричних розмірів і форми зразка. Для суцільного циліндричного стрижня

$$f = \frac{\pi G}{2l} r^4,$$

де  $l$  – довжина стрижня,  $r$  – його радіус.

Розглянемо *деформацію згину* однорідної балки, довільного перерізу, але так, щоб для всієї довжини балки цей переріз залишався незмінним. Виділимо нескінченно малий елемент довжини  $dl_0$ . У результаті згину всі паралельні прямі перейдуть у дуги кіл (у силу малості виділеного елемента) з центром у точці  $O$ . Вісь, що проходить через  $O$ , перпендикулярно площині рисунка, називається *віссю згину* (рис. 61).

Перетини, що лежать вище лінії  $CC'$ , будуть розтягнуті, нижче – стиснуті.

Довжина лінії  $CC'$  залишається незмінною. Лінія  $CC'$  називається

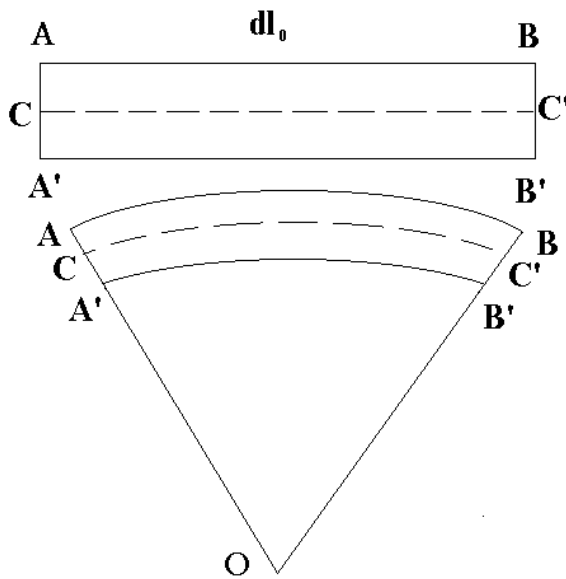


Рис. 61

нейтральною лінією. Ділянки балки, що прилягають до цієї лінії, залишаються недеформованими. Цією властивістю користуються для полегшення конструкцій та економії матеріалів. Балки, розраховані на деформації згину, роблять порожнистими, використовують так звані таврові і двотаврові балки. Згин можна уявити як комбінацію стиснення і розтягнення зі зсувом.

### § 39. Тензор пружних напружень

Розглянемо довільне деформоване тіло. Подумки проведемо переріз  $AB$ ,

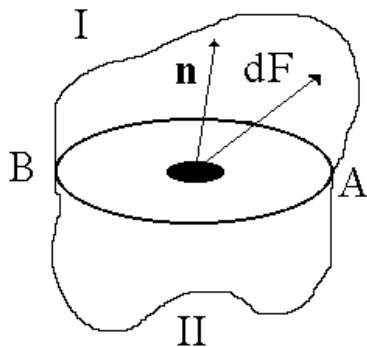


Рис. 62

що ділить тіло на дві частини. Тоді, якщо перша частина діє на другу з силою  $\vec{F}$ , то друга діє на першу також із силою  $\vec{F}$ , оскільки тіло знаходиться у стані рівноваги. Однак для характеристики деформації недостатньо знати сумарну силу, необхідно знати, як сили розподілені по перерізу.

Виберемо нескінченно малу площину  $ds$ ,

сила, що на неї діє  $-d\vec{F}$ , тоді  $\frac{d\vec{F}}{ds} = \vec{\sigma}$  – напруження,

що діє у довільній точці на межі розділу. Орієнтацію площини виберемо, задавши напрям зовнішньої нормалі  $\vec{n}$  до неї, тоді  $\vec{\sigma}_n$  буде відповідне напруження, а  $\vec{\sigma}_{-n}$  – напруження, що діє з протилежного боку площини. Причому, у стані рівноваги  $\vec{\sigma}_n = -\vec{\sigma}_{-n}$ .

Вектор напруження  $\vec{\sigma}_n$  можна розкласти на дві складові: уздовж нормалі і таку, що лежить в площині, перпендикулярній до неї. Тоді перша складова називається *нормальним*, а друга *тангенціальним* напруженнями. Як і будь-який вектор, напруження  $\vec{\sigma}_n$  можна розкласти на складові у прямокутній системі координат  $X, Y, Z$ . Позначимо їх  $\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}$ . Перший індекс указує напрямок зовнішньої нормалі до поверхні тіла, на якій лежить площина  $ds$ , а другий напрямок осі, на яку проектується напруження  $\vec{\sigma}_n$ . Наприклад,  $\vec{\sigma}_x$  – напруження на площинці, зовнішня нормаль до якої паралельна позитивному напрямку осі  $X$ . Тоді  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$  позначають проекції  $\vec{\sigma}_x$  на координатні осі.

Щоб визначити напруження в середовищі на довільно орієнтованій площині у будь-якій точці її, достатньо задати напруження на трьох взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через цю точку. Це справедливо як для середовища, яке знаходиться у стані спокою, так і для середовища, що рухається з довільним прискоренням. Для доведення помістимо початок координат у точку, що розглядається, і виділимо нескінченно малий елемент

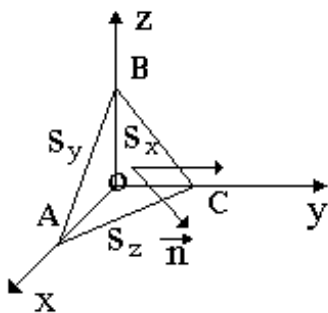


Рис. 63

об'єму. Нехай  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до площини трикутника  $ABC$  (рис. 63). Тоді сила, що діє на площину трикутника  $ABC$ , є  $\vec{\sigma}_n S$ , аналогічно на трьох бічних гранях:

$$\vec{\sigma}_{-x} S_x, \vec{\sigma}_{-y} S_y, \vec{\sigma}_{-z} S_z.$$

Крім зазначених сил, можуть діяти й інші сили, наприклад, сила тяжіння. Сили такого типу належать до масових або об'ємних сил. Нехай рівнодіюча цих сил є  $\vec{f}$ , причому вона пропорційна об'єму виділеного елемента. Якщо маса елемента  $m$ , а прискорення  $\vec{w}$ , то:

$$m\vec{w} = \vec{f} + \vec{\sigma}_n S + \vec{\sigma}_{-x} S_x + \vec{\sigma}_{-y} S_y + \vec{\sigma}_{-z} S_z. \quad (8.10).$$

Якщо виконати граничний перехід, стягуючи об'єм у точку, то, і маса виділеного об'єму, і діюча на нього сила будуть прямувати до нуля  $m \rightarrow 0$  та  $f \rightarrow 0$ , оскільки це нескінченно малі вищого порядку малості порівняно з іншими членами. З геометричних міркувань

$$s_x = sn_x, \quad s_y = sn_y, \quad s_z = sn_z. \quad (8.11)$$

Підставляючи вирази (8.11) у рівняння (8.10) і враховуючи співвідношення між векторами напруження

$$\vec{\sigma}_x = -\vec{\sigma}_{-x}, \quad \vec{\sigma}_y = -\vec{\sigma}_{-y}, \quad \vec{\sigma}_z = -\vec{\sigma}_{-z},$$

отримаємо:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x n_x + \vec{\sigma}_y n_y + \vec{\sigma}_z n_z. \quad (8.12)$$

Оскільки осі  $X, Y, Z$  були обрані довільно, то (8.12) доводить зроблене твердження.

Таким чином, напруження у кожній точці пружно деформованого тіла можна характеризувати трьома векторами  $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$  або дев'ятьма їх проекціями:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Сукупність цих дев'яти компонент називається тензором пружних напружень.

У загальному випадку ці величини є функціями координат.

Тензор пружних напружень є симетричним тензором  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Доказ провести самостійно.

Оскільки це симетричний тензор, то його можна привести до діагонального вигляду або до головних осей

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

## ІХ. МЕХАНІКА РІДИН ТА ГАЗІВ

На відміну від твердих тіл, рідини і гази не мають власної форми і набувають форму тієї посудини, в якій вони знаходяться.

Розподіл на рідини, гази і тверді тіла до деякої міри умовний і цілком виправданий тільки в механіці, оскільки в загальному випадку одна і та ж речовина, наприклад, вода, у залежності від умов, може перебувати у будь-якому із зазначених агрегатних станів.

У курсі механіки не розглядається молекулярна будова тіл, усі вони розглядаються як суцільні і неперервні, причому передбачається, що тверде тіло має певні форму і об'єм, рідке – тільки певний об'єм, газоподібне не має ні форми, ні йому властивого об'єму. Цей факт зазвичай висловлюють словами: у стані рівноваги рідини і гази не мають пружності форми. Вони мають тільки об'ємну пружність.

У стані рівноваги напруження у рідині і газі завжди нормальне до площини, на яку воно діє.

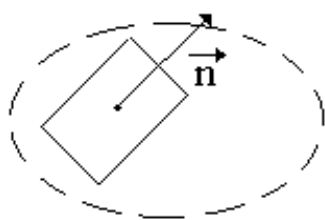


Рис. 64

Дотичні напруження викликають тільки зміни форми об'єму, але не величину об'єму, але для таких деформацій (через відсутність власної форми) зусиль не потрібно, тому з погляду механіки, рідини і гази можна визначити як середовища, в яких у стані рівноваги дотичні напруження існувати не можуть.

Звідси випливає, що в стані рівноваги величина нормального напруження у рідині або газі не залежить від орієнтації площини, на яку воно діє. Для доведення візьмемо довільно орієнтовану площину, із зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$  (рис. 64). Оскільки напруження нормальне до площини, представимо його у вигляді:

$$\vec{\sigma}_n = -P\vec{n}. \quad (9.1)$$

Напруження на площинах, перпендикулярних до координатних осей, запишуться у вигляді ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орти відповідних осей):

$$\vec{\sigma}_x = -P_x \vec{i}, \quad \vec{\sigma}_y = -P_y \vec{j}, \quad \vec{\sigma}_z = -P_z \vec{k}. \quad (9.2)$$

Тут  $P_i$  – тиск на площинах, перпендикулярних відповідним осям. Підставляючи ці значення у формулу (8.12), отримаємо:

$$P\vec{n} = P_x n_x \vec{i} + P_y n_y \vec{j} + P_z n_z \vec{k}. \quad (9.3)$$

Помноживши (9.3) скалярно послідовно на  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , отримаємо:

$$P = P_x = P_y = P_z.$$

Звідки випливає, що у стані рівноваги нормальне напруження (тиск  $P$ ) не залежить від орієнтації площини, на яку воно діє. Це *закон Паскаля*.

У механіці при вивченні руху власне рідин та газів, газ розуміють як граничний випадок рідини. Таким чином, під рідиною в узагальненому сенсі слова розуміють як власне рідину, так і газ. Розділ механіки, що займається вивченням руху і рівноваги рідин, називається *гідродинамікою*.

Рідини дуже мало стисливі, тому дуже часто, коли можна знехтувати зміною об'єму, вводять поняття абсолютно нестисливої рідини.

Ми вже говорили, що у рідині, яка знаходиться у стані спокою, відсутні зсувні (дотичні) напруження. Якщо ж рідина знаходиться у стані руху, то у ній можуть виникати і *дотичні сили*. Вони визначаються швидкостями і деформацією, тому вони належать до класу *сил тертя* або *в'язкості*.

Ці сили називаються дотичними або зсувними силами в'язкості, поряд із ними можуть існувати ще й *об'ємні* (нормальні) сили тертя, від звичайних сил

тиску  $P$  вони відрізняються тим, що визначаються не ступенем стиснення, а швидкістю стиснення.

Рідина, в якій за будь-яких рухів не виникають ніякі сили внутрішнього тертя, називається *ідеальною*.

#### § 40. Основне рівняння гідростатики

Сили, що діють у рідині, поділяють на масові (об'ємні) і поверхневі. Масова сила пропорційна об'єму, на який вона діє. Її можна представити у вигляді  $\vec{f} dv$ , де  $\vec{f}$  – об'ємна густина сили,  $dv$  – елемент об'єму, на який вона діє. До масових сил належать сила тяжіння і сила інерції.

Розглянемо випадок, коли дотичних напружень немає. В ідеальній рідині так буде завжди, в решті випадків – коли рідина знаходиться у стані спокою, тобто у *гідростатиці*. Виділимо у рідині нескінченно малий об'єм рідини  $dv$ ,

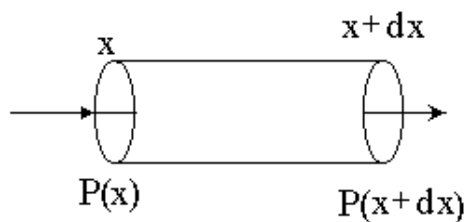


Рис. 65

циліндричної форми, нехай вісь  $X$  співпадає з віссю циліндра (рис. 65). Площа його основи  $dS$ , висота  $dx$ . Визначимо рівнодіючу сил тиску, що діють на цей циліндр. Поперечні розміри такі, що можна вважати, що тиск в усіх

точках основи  $dS$  один і той самий. Тоді результуюча сила буде:

$$[P(x) - P(x + dx)]dS = \left[ P(x) - P(x) - \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{y,z,t} dx \right] dS = - \frac{\partial P}{\partial x} dv, \quad (9.4)$$

оскільки  $dv = dx dS$ .

Тобто величина сили пропорційна величині виділеного об'єму  $dv$ , її можна представити у вигляді  $f'_x dv$ , де  $f'_x$  –  $x$ -складова сили, що діє на одиницю об'єму рідини, що виникає через зміну нормального тиску  $P$  у просторі. Аналогічно для інших осей:

$$f'_x = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad f'_y = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad f'_z = -\frac{\partial P}{\partial z}. \quad (9.5)$$

Тоді сам вектор  $\vec{f}'$  можна представити у вигляді:

$$\vec{f}' = -gradP, \quad (9.6)$$

тобто об'ємна густина результуючої сил тиску  $\vec{f}'$ , які діють на елементи об'єму рідини, дорівнює градієнту тиску, узятому з протилежним знаком.

Якщо рідина знаходиться у стані рівноваги, то сила  $\vec{f}'$  повинна врівноважуватися масовою силою  $\vec{f}$ , тобто  $\vec{f}' = -\vec{f}$ .

Тоді

$$gradP = \vec{f}. \quad (9.7)$$

Це рівняння називається основним рівнянням гідростатики. У проєкціях на координатні осі воно запишеться у вигляді

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = f_z.$$

Рівняння (9.7) показує, якщо рідина знаходиться у стані рівноваги, густина сили повинна виражатися градієнтом однозначної скалярної функції. Це необхідна і достатня умова консервативності. Таким чином, для рівноваги рідини необхідно, щоб силове поле, в якому вона знаходиться, було консервативним.

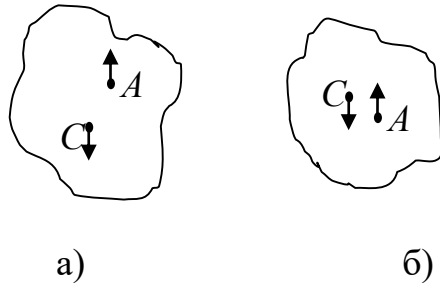
На закінчення розгляду гідростатики зупинимося на *законі Архімеда*.

Якщо тіло, занурене у рідину, утримується в механічній рівновазі, то з боку навколишньої рідини воно піддається дії виштовхуючої сили тиску, що чисельно дорівнює вазі рідини в об'ємі, витісненому тілом. Ця виштовхуюча сила спрямована вгору і прикладена до центру мас рідини, витісненої тілом.

Центр мас рідини, витісненої тілом, називається *центром плавучості*. Для рівноваги тіла, зануреного у рідину, необхідно, щоб вага тіла дорівнювала вазі

витісненої рідини, а центр плавучості  $A$  лежав би на одній вертикалі з центром мас самого тіла  $C$ .

Рівновага може бути стійкою і нестійкою. Для тіла повністю зануреного у



рідину рівновага стійка, якщо центр плавучості лежить вище центру мас, і нестійка, якщо навпаки: а) стійке та б) нестійке положення рівноваги (рис. 66).

На законі Архімеда засновано плавання різних суден.

Судно будують так, щоб центр

Рис. 66

плавучості завжди знаходився вище його центру мас.

#### § 41. Рівняння Ейлера

Розглянемо рідину, яка знаходиться у стані руху. Виділимо одиничний об'єм і запишемо для нього другий закон Ньютона:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} + \vec{f}',$$

де  $\vec{f}$  – густина масової сили;  $\vec{f}'$  – густина сил, пов'язаних зі зміною тиску, враховуючи співвідношення (9.6), знайдемо:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \text{grad}P, \quad (9.8)$$

$\frac{d\vec{V}}{dt}$  – прискорення у даній точці.

Рівняння (9.8) називається рівнянням Ейлера. Застосуємо його до опису руху рідини у посудині, що обертається. Якщо вона обертається як ціле, то у ній не виникають сили внутрішнього тертя, і усі діючі сили зводяться до сил нормального тиску і сили тяжіння, тобто умови, за яких виконується рівняння Ейлера, виконані. При рівномірному обертанні є тільки доцентрове прискорення  $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 \vec{r}$ ,  $\vec{f} = \rho \vec{g}$  – густина сили тяжіння. Тоді замість рівняння (9.8) матимемо:

$$-\rho\omega^2 \vec{r} = \rho \vec{g} - \text{grad}P. \quad (9.9)$$

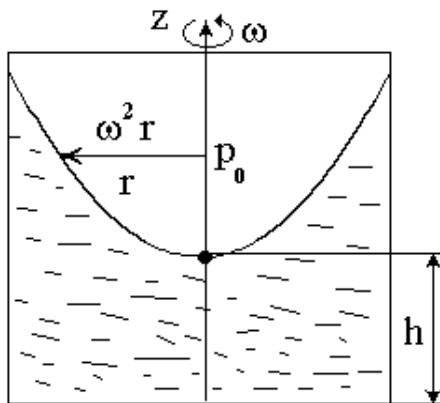


Рис. 67

Або в проекціях (вісь  $z$  співпадає з віссю обертання (рис. 67)):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho\omega^2 x; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho\omega^2 y; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g. \quad (9.9a)$$

Враховуючи, що написані рівняння є рівняннями у частинних похідних, розділяючи у першому з написаних рівнянь змінні і нехтуючи стисливістю, тобто, вважаючи  $\rho = \text{const}$ , після інтегрування отримаємо

$$dP = \rho\omega^2 x dx; \quad P = \rho\omega^2 \frac{x^2}{2} + \varphi(y, z). \quad (9.9b)$$

Оскільки рівняння (9.9a) у частинних похідних, інтегрування по  $x$  визначає тиск з точністю до довільної функції  $\varphi(y, z)$ , яка підлягає визначенню. Для її визначення будемо діяти так: продиференціюємо (9.9b) по  $y$  та, враховуючи друге рівняння (9.9a), отримаємо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho\omega^2 y = \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y},$$

інтегруючи останню рівність по  $y$ , знайдемо  $\varphi(y, z)$ :

$$\varphi(y, z) = \rho\omega^2 \frac{y^2}{2} + \psi(z). \quad (9.9\text{г})$$

Підставляючи знайдене значення функції  $\varphi(y, z)$  (9.9г) у вираз (9.9б), отримаємо

$$P = \rho\omega^2 \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \psi(z). \quad (9.9\text{д})$$

Тут функція  $\psi(z)$  підлягає визначенню. Диференціюючи співвідношення (9.9д) по  $z$ , з урахуванням останнього рівняння (9.9а), можна написати

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = \frac{d\psi(z)}{dz}.$$

Інтегруючи останнє співвідношення, знайдемо функцію  $\psi(z)$

$$\psi(z) = -\rho g z + \text{const.}$$

Підставляючи  $\psi(z)$  у (9.9д), знайдемо тиск:

$$P = \rho\omega^2 \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) - \rho g z + \text{const.} \quad (9.9\text{е})$$

Сталу, яка входить у (9.9е), знайдемо за умови співпадіння тиску у центрі кривизни поверхні рідини з атмосферним тиском:

$$P(0,0,0) = P_0 = \text{const.}$$

Підставляючи знайдене значення сталої величини у (9.9e), остаточно отримаємо вираз для шуканого тиску:

$$P = \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + y^2) - \rho gz + P_0, \quad (9.10)$$

або

$$P = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho gz + P_0,$$

тут  $P_0$  – атмосферний тиск.

Рівняння вільної поверхні отримаємо, поклавши  $P = const$ , тоді:

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho gz = const. \quad (9.11)$$

Це рівняння параболоїда обертання, зверненого опуклістю униз.

Якщо дно посудини плоске, то поклавши  $z = -h$ , отримаємо тиск на дно посудини

$$P - P_0 = \rho gh + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2. \quad (9.12)$$

Тиск у центрі мінімальний і монотонно зростає до країв посудини. Цим пояснюється, наприклад, факт збирання чаїнок у центрі склянки при перемішуванні чаю.

## § 42. Стаціонарна течія ідеальної рідини. Рівняння Бернуллі

Для опису руху рідини можна вчинити двома способами. Можна простежити за рухом кожної окремої частинки рідини, тобто визначити їх траєкторії, або простежити за тим, що відбувається у кожній окремій точці простору, тобто вказати величини і напрямки швидкостей різних частинок рідини, що проходять через одну і ту ж точку простору. Якщо взяти різні точки

простору і вказати швидкості в них в один і той же момент часу, то вийде *поле швидкостей*.

Лінія, дотична до якої у кожній точці вказує напрямок швидкості частинки,

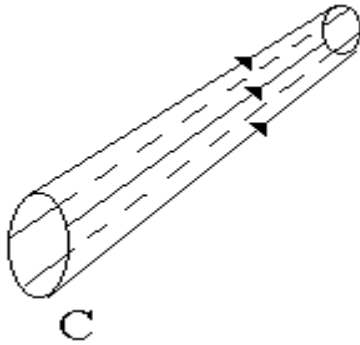


Рис. 68

що проходить через дану точку, називається *лінією струму*. Якщо поле швидкостей (лінії струму) не змінюється з плином часу, рух називається *стаціонарним* або *усталеним*, швидкість залежить тільки від координат  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r})$ . При стаціонарному русі лінії струму збігаються з траєкторіями частинок.

Якщо виділити у рідині замкнутий контур  $C$  і через кожну його точку провести в один і той же момент часу лінії струму, вони утворюють деяку замкнуту поверхню, яка називається *трубкою струму* (рис. 68). Маса рідини, що протікає за час  $dt$  через поперечний переріз трубки струму (якщо він нескінченно малий і швидкість вздовж перерізу можна вважати постійною), є:

$$dm = \rho V S dt. \quad (9.13)$$

Якщо течія стаціонарна, то маса буде однією і тією ж для усіх перерізів трубки струму:

$$\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2. \quad (9.14)$$

Якщо рідина нестислива, то  $\rho_1 = \rho_2$  і матимемо:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_2}{S_1},$$

тобто, швидкість рідини тим більша, чим менша площа поперечного перерізу. Рівняння (9.14) називається *рівнянням нерозривності струменя*.

Розглянемо стаціонарну течію ідеальної рідини у консервативному силовому полі (полі тяжіння). Виділимо трубку струму й обчислимо роботу сил тиску за переміщенням частини рідини  $MNDC$  у нове положення  $M_1N_1D_1C_1$  (рис. 69). При переміщенні межі  $MN$  у положення  $M_1N_1$  здійснюється робота

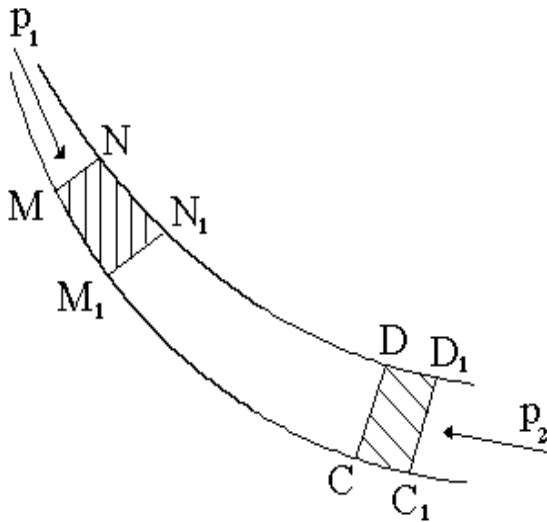


Рис. 69

$$A_1 = P_1 \Delta v_{MNM_1N_1} = P_1 \frac{\Delta m_1}{\rho_1}.$$

Аналогічно для переходу межі  $DC$  у  $D_1C_1$

$$A_2 = P_2 \frac{\Delta m_2}{\rho_2},$$

оскільки рух стаціонарний  $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$ , тоді сумарна робота дорівнює:

$$A = A_1 - A_2 = \left( \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \Delta m. \quad (9.15)$$

З іншого боку сумарна робота  $A$  дорівнює повній зміні механічної енергії  $\Delta E = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \Delta m$ , де  $\varepsilon$  – енергія одиниці маси. Підставляючи  $\Delta E$  у (9.15) і скорочуючи на  $\Delta m$ , отримаємо:

$$\varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \varepsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2}, \quad (9.16)$$

тобто, уздовж однієї і тієї ж лінії струму при стаціонарній течії ідеальної рідини величина  $\varepsilon + \frac{P}{\rho}$  залишається постійною:

$$\varepsilon + \frac{P}{\rho} = B = \text{const}. \quad (9.17)$$

Рівняння (9.17) називається *рівнянням Бернуллі*. Воно виконується для стаціонарної течії ідеальних рідин: як стисливих, так і нестисливих. Для нестислової рідини в однорідному полі тяжіння можна написати:

$$\frac{V^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = B = \text{const},$$

або

$$\rho \frac{V^2}{2} + \rho gh + P = \text{const}. \quad (9.18)$$

Величина  $P$  називається *статичним тиском* і визначає тиск у нерухомій рідині,  $\rho gh$  – *гідростатичний тиск*, визначає зміну тиску при зміні висоти  $h$ ,  $\rho \frac{V^2}{2}$  – *гідродинамічний тиск*, обумовлений рухом рідини.

З рівняння (9.18) видно, що при заданому  $h$  тиск більший там, де швидкість менша, тобто при  $h = \text{const}$ :

$$\rho \frac{V^2}{2} + P = \text{const}.$$

А з іншого боку, як впливає з рівняння нерозривності струменя, швидкість менша там, де більший переріз потоку. При течії рідини по горизонтальних трубах змінного перерізу в широкіх частинах труб тиск максимальний.

### § 43. Стаціонарна течія рідини по прямолінійній трубі. Формула Пуазейля

Розглянемо в'язку нестисливу рідину, яка тече уздовж горизонтальної циліндричної труби радіусу  $R$ . Лінії струму паралельні осі труби. Якщо виділити довільну, нескінченно вузьку трубку струму довжиною  $dx$  і радіусом  $r$ , то з

умови нестисливості впливає, що швидкість течії буде одна і та ж уздовж усієї лінії струму (трубки струму) – отже, швидкість рідини не може змінюватися уздовж труби. Таким чином, швидкість буде функцією відстані від центру труби.

Сумістимо вісь  $X$  з віссю труби. Виділимо довільний об'єм циліндричної форми, висотою  $dx$  і віссю, що збігається з віссю труби (рис. 70). На його бічну поверхню діє дотична сила в'язкості, пропорційна коефіцієнту в'язкості  $\eta$ , градієнту швидкості і площі бічної поверхні циліндра:

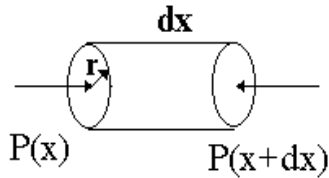


Рис. 70

$$dF = 2\pi r \eta \frac{dV}{dr} dx. \quad (9.19)$$

З іншого боку, є ще сила, яка обумовлена різницею тисків, вона пропорційна площі основи циліндра:

$$dF_1 = \pi r^2 [P(x) - P(x + dx)] = -\pi r^2 \frac{dP}{dx} dx. \quad (9.20)$$

При стаціонарній течії сума сил, що діють на виділений об'єм, дорівнює нулю  $dF_1 + dF = 0$ , таким чином:

$$2\eta \frac{dV}{dr} = r \frac{dP}{dx}.$$

Як швидкість  $V(r)$ , так і  $\frac{dV}{dr}$ , як зазначено вище, від  $x$  не залежать, отже, від  $x$  не залежить  $\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{l}$ , де  $l$  – довжина труби,  $P_1$  і  $P_2$  – тиски на її кінцях. Тоді

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r. \quad (9.21)$$

Розділяючи у рівнянні (9.21) змінні, та інтегруючи, отримаємо:

$$\int dV = - \int \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r dr.$$

Звідки

$$V = - \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C.$$

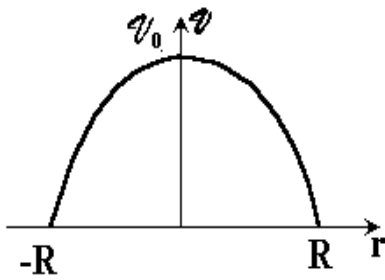


Рис. 71

Враховуючи, що на стінці труби рідина перебуває у стані спокою, тобто при  $r = R$ ,  $V = 0$ , знайдемо значення сталої  $C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2$ . Остаточно матимемо:

$$V = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2), \quad (9.22)$$

тобто швидкість максимальна на осі труби і зменшується за параболічним законом до стінок труби (рис. 71).

Легко підрахувати витрату рідини, тобто кількість рідини, що протікає в одиницю часу через поперечний переріз труби  $Q$ . Виділимо у трубці кільце, товщиною  $dr$  (рис. 72), через нього за одиницю часу протікає маса рідини  $dQ = 2\pi r dr \rho V$ , звідки:

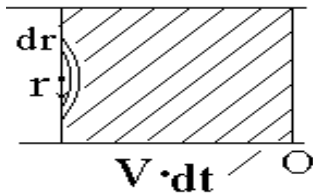


Рис. 72

$$\begin{aligned} Q &= \pi \rho \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr \\ &= \pi \rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Витрата рідини прямо пропорційна її густині, різниці тисків, четвертому ступеню радіуса труби і обернено пропорційна довжині труби і коефіцієнту в'язкості.

Формула (9.23) називається *формулою Пуазейля* і справедлива для ламінарних течій.

Залежно від характеру руху частинок рідини течії поділяють на *ламінарні* і *турбулентні*.

*Ламінарною* називається течія, коли частинки рідини рухаються вздовж траєкторій, що не перетинаються – ліній струму (при ламінарній течії в трубі лінії струму паралельні осі труби). При великих швидкостях ця умова не виконується, у потоці рідини виникають вихори, кажуть, що течія стає *турбулентною*. Можна сказати, що турбулентна течія – це набір вихорів різного розміру, які призводять до перемішування рідини в усьому об’ємі.

Характер руху рідини залежить від співвідношення між повною енергією потоку і її втратами на здійснення роботи проти сил в’язкого тертя. Таким чином, питання про врахування сил тертя пов’язане з дисипацією енергії. Якщо вона мала, сили в’язкого тертя можна не враховувати.

Потужність сил тертя

$$W_{\text{тер}} = \Delta P \pi R^2 \langle V \rangle. \quad (9.24)$$

Кінетична енергія потоку в одиницю часу:

$$K = \int \frac{\rho V^2}{2} V dS = \frac{\rho}{2} \pi R^2 \langle V^3 \rangle. \quad (9.25)$$

Враховуючи, що середні значення швидкості пропорційні її максимальному значенню  $\langle V^n \rangle \sim V_0^n$ , отримаємо:

$$\frac{K}{W_{\text{тер}}} = \frac{\rho \langle V^3 \rangle}{2 \Delta P \langle V \rangle} \sim \frac{\rho V_0^2}{\Delta P}.$$

Підставляючи сюди  $V_0 = \frac{\Delta P R^2}{4 \eta l}$  зі співвідношення (9.22) і виконуючи перетворення, знайдемо:

$$\frac{K}{W_{\text{тер}}} \sim \frac{\rho R^4 \Delta P^2}{16\eta^2 l^2 \Delta P} \sim \frac{\rho R^4}{16\eta^2 l^2} \Delta P \sim \frac{\rho V_0 l}{\eta} \left(\frac{R}{l}\right)^2 = Re \left(\frac{R}{l}\right)^2, \quad (9.26)$$

де  $Re = \frac{\rho V_0 l}{\eta}$  – число Рейнольдса. Отже, число Рейнольдса характеризує роль сил в'язкості при течії рідини.

У процесі течії у круглій циліндричній трубі ламінарний режим зберігається до значень числа Рейнольдса  $Re = 2000$ , при  $Re > 3000$  течія стає турбулентною, для  $2000 < Re < 3000$  спостерігається перехідний режим течії.

## X. НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ. СИЛИ ІНЕРЦІЇ

*Неінерціальною системою відліку* називається система, що рухається прискорено відносно інерціальної. Прискорений рух включає у себе як поступальний рух, так і обертання.

Треба зазначити, якщо швидкості, з якими рухаються тіла, малі і справедливі, з достатньою точністю, перетворення Галілея, то просторово-часові співвідношення у неінерціальній системі такі ж, як і в інерціальній.

В інерціальних системах єдиною причиною прискореного руху тіла є сили, що діють на нього з боку інших тіл. Сила завжди є результат взаємодії тіл.

У неінерціальних системах відліку існують прискорення, які не пов'язані з силами такого ж характеру, які відомі в інерціальних системах відліку. Тому перший закон Ньютона в них не має сенсу. Третій закон Ньютона, взагалі кажучи, виконується, хоч і не має такого явного фізичного сенсу, як в інерціальних системах відліку.

Для опису руху в неінерціальних системах відліку прийнято вважати, що прискорення в них породжуються тільки силами, причому поряд із силами «звичайної» природи існують і так звані сили інерції. Другий закон Ньютона залишається у силі, але поряд із силами взаємодії необхідно врахувати сили інерції.

Сили інерції обумовлені прискоренням рухом системи відліку відносно інерціальної системи, вони беруться такими, щоб забезпечити в неінерціальній системі відліку ті прискорення, які фактично є, але звичайними силами взаємодії повністю не пояснюються.

Другий закон Ньютона у неінерціальних системах відліку має вигляд:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}, \quad (10.1)$$

тут  $\vec{w} = \dot{\vec{V}}$  – прискорення тіла в неінерціальній системі відліку;  $\vec{F}$  – рівнодіюча

звичайних сил взаємодії;  $\vec{F}_{\text{ін}}$  – рівнодіюча сил інерції.

Сили інерції так само реальні, як і прискорення в неінерціальних системах відліку.

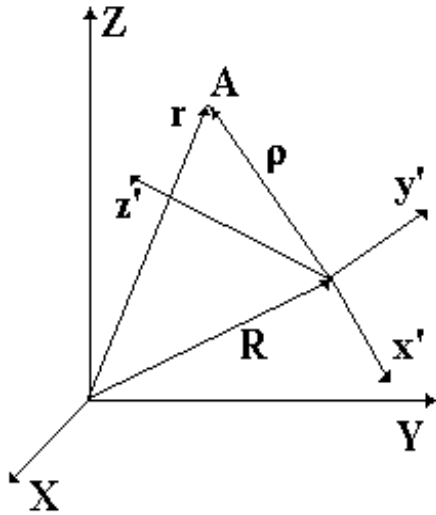


Рис. 73

Розглянемо неінерціальну систему  $X'Y'Z'$ , яка рухається відносно інерціальної  $XYZ$  (рис. 73).

Радіус-вектор частинки (тіла) в неінерціальній системі  $\vec{\rho}$ , в інерціальній –  $\vec{r}$ , радіус-вектор початку координат  $O'$  неінерціальної системи відліку –  $\vec{R}$ .

Тоді

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}. \quad (10.2)$$

Нехай неінерціальна система відліку рухається поступально й обертається. Щоб зв'язати прискорення у різних системах відліку, продиференціюємо співвідношення (10.2) за часом

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}. \quad (10.3)$$

При розгляді кінематики було показано, що похідна радіус-вектора частинки, що рухається поступально і здійснює обертальний рух, є:

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{V} + [\vec{\omega}\vec{\rho}], \quad (10.4)$$

тут  $\vec{V}$  – швидкість поступального руху тіла в неінерціальній системі відліку,  $\vec{\omega}$  – кутова швидкість обертання системи відліку.

Підставимо вираз (10.4) у (10.3):

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{V} + [\vec{\omega}\vec{\rho}]. \quad (10.5)$$

Продиференціюємо (10.5) з урахуванням (10.4) і того факту, що  $\dot{\vec{V}} = \vec{w} + [\vec{\omega}\vec{V}]$ , де  $\vec{w}$  – прискорення (лінійне) в неінерціальній системі відліку. Після виконання необхідних перетворень отримаємо

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{w} + [\vec{\omega}\vec{V}] + [\dot{\vec{\omega}}\vec{\rho}] + [\omega(\vec{V} + [\vec{\omega}\vec{\rho}])]. \quad (10.6)$$

Помножимо (10.6) почленно на  $m$  і врахуємо, що  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ , де  $\vec{F}$  – рівнодіюча звичайних сил взаємодії, оскільки  $\vec{r}$  описує рух тіла в інерціальній системі відліку. Тоді виконуючи елементарні перетворення, отримаємо:

$$m\vec{w} = \vec{F} - m\left\{\ddot{\vec{R}} + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]] + 2[\vec{\omega}\vec{V}] + [\dot{\vec{\omega}}\vec{\rho}]\right\}. \quad (10.7)$$

Вираз (10.7) дає закон руху в неінерціальній системі відліку. Вираз у фігурних дужках називається силами інерції, які залежать від характеристик системи:

$-m\ddot{\vec{R}}$  – лінійна сила інерції, обумовлена поступальним рухом системи відліку (за відсутності обертання це єдина сила інерції, вона визначається лінійним прискоренням неінерціальної системи);

$-m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]]$  – відцентрова сила інерції, обумовлена обертанням системи;

$-2m[\vec{\omega}\vec{V}]$  – сила Коріоліса, обумовлена поступальним рухом тіла у системі відліку, що обертається;

$-m[\dot{\vec{\omega}}\vec{\rho}]$  – сила інерції, яка обумовлена нерівномірністю обертання системи відліку.

Підкреслимо ще раз, що сили інерції – реальні сили з погляду механіки. Вони проявляють себе через реально спостережувані явища.

Джерело сил інерції – тіло, яке надало системі прискорення, джерело сил інерції завжди лежить поза системою відліку.

### § 44. Земля – неінерціальна система відліку

Перше питання, яке виникає при вивченні механічних явищ на Землі, пов'язане з можливістю з'ясування неінерціальності (або інерціальності) системи відліку, пов'язаної з Землею. Чи можна дослідями на Землі встановити неінерціальність пов'язаної з нею системи відліку?

Для вирішення цього питання знову повернемося до рівняння (10.7) і перепишемо його, враховуючи, що Земля обертається рівномірно, тобто  $\dot{\vec{\omega}} = 0$ . Позначимо  $\vec{f} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}$ , де під  $\vec{f}$  потрібно розуміти результуючу усіх сил, що діють на тіло з боку Землі і тіл на Землі, тоді

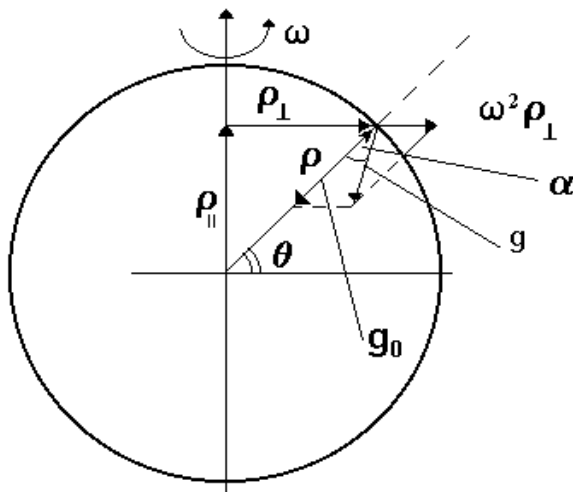


Рис. 74

$$m\vec{w} = \vec{f} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]] + 2m[\vec{V}\vec{\omega}]. \quad (10.8)$$

Перетворимо вираз для відцентрової сили інерції, представивши  $\vec{\rho} = \vec{\rho}_{\parallel} + \vec{\rho}_{\perp}$ , де  $\vec{\rho}_{\parallel}$  – складова радіус-вектора, паралельна  $\vec{\omega}$ ;  $\vec{\rho}_{\perp}$  – перпендикулярна, причому  $|\vec{\rho}_{\perp}|$  – дає радіус кола, що визначає широту, на якій знаходиться тіло (рис. 74).

Тоді

$$\begin{aligned} [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]] &= \vec{\omega}\omega\rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \vec{\rho}\omega^2 = -\vec{\rho}_{\perp}\omega^2 \\ |[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]]| &= \rho_{\perp}\omega^2. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Після підстановки виразу (10.9) у (10.8) отримаємо:

$$m\vec{w} = \vec{f} + m\omega^2\vec{\rho}_{\perp} + 2m[\vec{V}\vec{\omega}]. \quad (10.10)$$

Знайдемо вагу тіла, що знаходиться у стані спокою на поверхні Землі.

Вагою тіла називається сила, з якою тіло тисне на опору або розтягує підвіс. При цьому передбачається, що тіло, підвіс і опора знаходяться у стані спокою у тій системі відліку, в якій проводиться зважування, у нашому випадку вони повинні бути у стані спокою відносно Землі.

Нехай тіло знаходиться на підставці і покоїться відносно Землі. У цьому випадку  $\vec{V} = 0$ ;  $\vec{w} = 0$ ;  $\vec{f} = m\vec{g}_0 - \vec{P}$ . Тут враховано, що сила реакції опори і вага тіла співпадають за величиною і протилежно спрямовані. Підставляючи ці величини у вираз (10.10), отримаємо:

$$\vec{P} = m\vec{g}_0 + m\omega^2\vec{\rho}_\perp. \quad (10.11)$$

Отже, вага є геометрична сума сили гравітаційного притягання Землі  $\vec{F} = m\vec{g}_0$  і відцентрової сили інерції.

З іншого боку  $\vec{P} = m\vec{g}$ , де  $\vec{g}$  – результуюче прискорення вільного падіння. З рисунка видно, що  $\vec{g}$  не спрямоване до центру Землі, хоча легко показати, що кут  $\alpha$  малий (рис. 74). Таким чином, неінерціальність Землі легко встановити, вимірюючи  $\vec{g}$  на різних широтах. Спроектуємо (10.11) на напрямок вертикалі, вважаючи  $\cos \alpha \approx 1$ , тоді матимемо:

$$g = g_0 - \omega^2\rho_\perp \cos \theta = g_0 - \omega^2R \cos^2 \theta, \quad (10.11a)$$

де  $R$  – радіус Землі,  $\theta$  – широтний кут, відрахований від екватора. Напрямок вектора прискорення вільного падіння  $\vec{g}$  визначає напрямок виска, тобто всюди, крім екватора і полюса висок спрямований не до центру Землі.

### § 45. Відхилення тіл, що падають, від напрямку виска

Нехай тіло вільно падає у гравітаційному полі Землі, тоді рівняння (10.7) перепишеться у вигляді:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + 2m[\vec{V}\vec{\omega}]. \quad (10.12a)$$

Або

$$\vec{w} = \vec{g} + 2[\vec{V}\vec{\omega}]. \quad (10.12)$$

Другий доданок визначається силою Коріоліса, він визначає прискорення Коріоліса у (10.12). Прискорення Коріоліса перпендикулярне до  $\vec{V}$  та  $\vec{\omega}$ . Рівняння (10.12) описує вільне падіння з урахуванням обертання Землі,  $\vec{V}$  – швидкість руху тіла. Відцентрова сила інерції врахована тим, що ми написали  $\vec{g}$ , а не  $\vec{g}_0$ .

Щоб з'ясувати характер руху тіла, необхідно розв'язати обернену задачу кінематики, використовуючи для прискорення вираз (10.12). Можливі кілька шляхів розв'язання цього диференціального рівняння. Ми скористаємося так званим методом послідовних наближень, враховуючи малість прискорення Коріоліса. У нульовому наближенні ним можна знехтувати і вважати:  $\vec{w}^{(0)} = \vec{g}$ , звідки  $\vec{V} = \vec{g}t$  – тут ми врахували, що тіло падає без початкової швидкості, тобто  $\vec{V}_0 = 0$ . Користуючись отриманим виразом для швидкості  $\vec{V}$ , врахуємо вплив коріолісового прискорення; для цього підставимо  $\vec{V}$  у (10.12) і отримаємо прискорення у першому наближенні:

$$\vec{w}^{(1)} = \vec{g} + 2t[\vec{g}\vec{\omega}]. \quad (10.13)$$

Інтегруючи (10.13), отримаємо швидкість у першому наближенні:

$$\vec{V}^{(1)} = \vec{g}t + t^2[\vec{g}\vec{\omega}]. \quad (10.14)$$

Підставляючи (10.14) у (10.12), знайдемо прискорення у другому наближенні:

$$\vec{w}^{(2)} = \vec{g} + 2t[\vec{g}\vec{\omega}] + 2t^2[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]. \quad (10.15)$$

Інтегруючи (10.15) знайдемо  $\vec{V}^{(2)}$ :

$$\vec{V}^{(2)} = \vec{g}t + t^2[\vec{g}\vec{\omega}] + \frac{2}{3}t^3[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]. \quad (10.16)$$

Продовжуючи цю процедуру, можна знайти прискорення і швидкість у будь-якому наближенні, щоб задовольнити необхідну точність результату. Інтегруючи (10.16), знайдемо радіус-вектор у будь-який момент часу:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{g}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}t^3[\vec{g}\vec{\omega}] + \frac{1}{6}t^4[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]. \quad (10.17)$$

Для зміщення тіла з початкового положення отримаємо:

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}t^3[\vec{g}\vec{\omega}] + \frac{1}{6}t^4[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]. \quad (10.18)$$

Модулі векторних добутків, які сюди входять, легко визначити:

$$|[\vec{g}\vec{\omega}]| = g\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = g\omega \cos \theta; \quad |[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]| = g\omega^2 \cos \theta.$$

Щоб зрозуміти отриманий результат, уведемо систему координат з початком у точці  $A$ , звідки почало падати тіло, а осі направимо так: вісь  $X$  – по дотичній до паралелі на схід, вісь  $Y$  – по дотичній до меридіану на південь, вісь  $Z$  – у напрямку виска (рис. 75). Очевидно, що векторний добуток  $[\vec{g}\vec{\omega}]$  спрямований вздовж  $X$ , тобто на схід, а  $[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]$  спрямований вздовж  $\rho_{\perp}$ . Проектуючи (10.18) на вибрані осі, отримаємо:

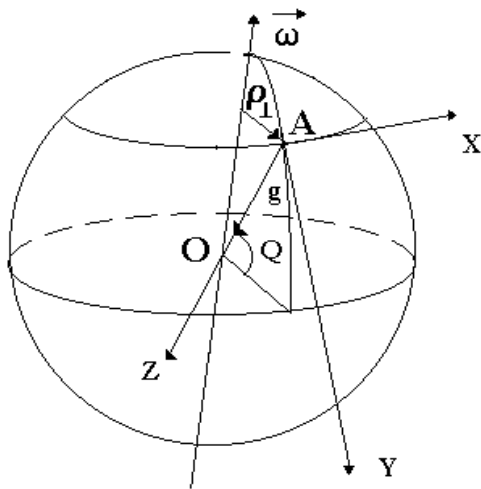


Рис. 75

$$X = S_c = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \theta, \quad (10.19)$$

$$Y = S_n = \frac{1}{12} \omega^2 g t^4 \sin 2\theta, \quad (10.20)$$

$$Z = \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{6} \omega^2 t^4 g \cos^2 \theta. \quad (10.21)$$

З наведених виразів (10.18–10.21) видно, що тіло, яке вільно падає, за рахунок дії сили Коріоліса відхиляється на схід і до екватора.

Необхідно зазначити, що відхилення до екватора значно менше відхилення на схід. Чисельні оцінки проводяться досить легко, їх необхідно виконати самостійно.

Відхилення на схід при падінні з висоти  $h = 100$  метрів на широті Києва ( $\theta \approx 50^\circ$ ) складає  $S_c \approx 1,55$  см.

## § 46. Маятник Фуко

Для доведення неінерціальності системи відліку, пов'язаної із Землею, використовують *маятник Фуко* – це масивна куля, підвішена на досить довгій нитці, яка може здійснювати малі коливання навколо положення рівноваги. Це один із найбільш видовищних і переконливих способів доказу обертання Землі. Виведемо маятник з положення рівноваги і надамо його самому собі. Якби Земля була інерціальною системою відліку, на маятник діяли б лише «звичайні» сили: сила тяжіння  $m\vec{g}$  і сила натягу нитки  $\vec{F}$ , обидві сили лежать у вертикальній площині і, отже, маятник повинен коливатися в одній і тій же площині, нерухомій відносно Землі. Насправді це не так. Досліди показали, що площина

гойдання маятника повільно обертається в тому ж напрямку, що і Сонце. Це і є доказом неінерціальності системи відліку, пов'язаної із Землею. Вперше такий дослід був проведений Фуко у Паризькій обсерваторії у 1850 році. Маятник мав довжину 67 метрів і складався з металевої кулі масою  $m = 28$  кг. Найпростіше зрозуміти причину обертання площини коливань, розглядаючи маятник, що

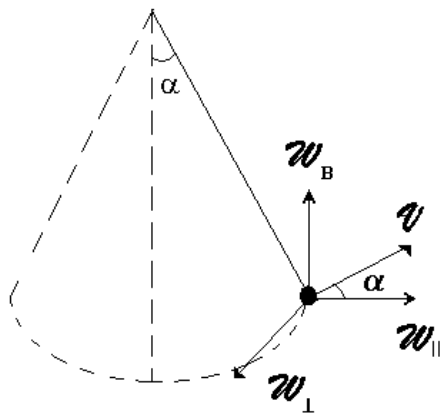


Рис. 76

здійснює коливання на полюсі, однак для скорочення часу розглянемо відразу маятник, розташований на географічній широті  $\theta$ . Розкладемо вектор кутової швидкості на дві складові: вертикальну  $\vec{\omega}_e$  і горизонтальну  $\vec{\omega}_2$  (рис. 76). Горизонтальну складову своєю чергою розкладемо на дві складові:  $\vec{\omega}_{||}$  – що лежить у площині гойдань, і  $\vec{\omega}_\perp$  – перпендикулярну до неї складову. Тоді замість (10.7) матимемо:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F} + 2m[\vec{V}\vec{\omega}_B] + 2m[\vec{V}\vec{\omega}_\perp] + 2m[\vec{V}\vec{\omega}_{||}].$$

Сила  $2m[\vec{V}\vec{\omega}_\perp]$  спрямована уздовж нитки маятника, вона змінює натяг нитки, але змінити положення площини коливань не може. Друга складова горизонтальної сили –  $2m[\vec{V}\vec{\omega}_{||}]$  перпендикулярна площині гойдань, однак, якщо коливання малі, то мала і ця складова у силу малості кута  $\alpha$ . Крім того, вона кожен чверть періоду змінює напрямок, тому вона призводить лише до малих коливань площини гойдань, але не приводить до її систематичного обертання. Найбільш важливу роль відіграє доданок  $2m[\vec{V}\vec{\omega}_B]$ , ця сила перпендикулярна до площини гойдань і приводить до систематичного її обертання, площина буде обертатися навколо вертикалі, з кутовою швидкістю  $\omega_B = \omega \sin \theta$ , де  $\theta$  – широта, на якій відбуваються коливання маятника. Легко знайти час повного оберту маятника:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{2\pi}{\omega \sin \theta} = \frac{T}{\sin \theta}, \quad (10.22)$$

де  $T$  – період обертання Землі навколо власної осі.

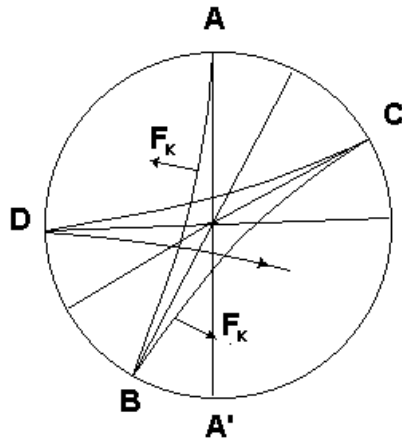


Рис. 77

Розглянемо більш докладно форму траєкторії маятника Фуко при різних способах збудження коливань. Нехай маятник відведений в крайнє положення (точка  $A$ ) і відпущений без початкової швидкості (рис.77). Нехай  $\vec{\omega}_B$  спрямована перпендикулярно площині рисунка угору. Коріолісова сила, що діє на маятник у процесі його руху, спрямована праворуч за ходом маятника, тому маятник прийде не у діаметрально протилежну точку  $A'$ , а відхилиться і прийде у точку  $B$ .

Потім усе повториться. Схематично траєкторія представлена на рис. 77, де відхилення сильно збільшені. В оригінальному досліді Фуко у 1851 році, при діаметрі кола близько 3 м, за один період площина коливання зміщувалася всього на 3 мм, повний оберт відбувався приблизно за 32 години (широта Парижа  $48^\circ 57'$ ), що добре узгоджується з результатом, отриманим з виразу (10.22).

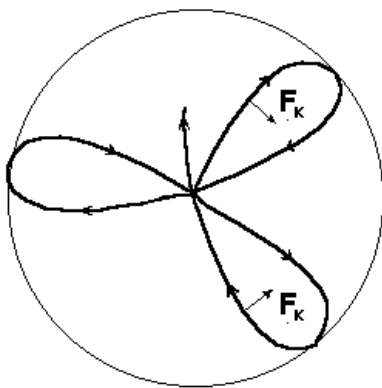


Рис. 78

Якщо маятник вивести з положення рівноваги поштовхом, тобто надати йому початкову швидкість, траєкторія як і раніше буде згинатися у бік дії сили Коріоліса, тобто праворуч, однак маятник весь час буде проходити через початкове положення рівноваги (рис. 78). Заокруглення у крайніх положеннях пояснюються відмінною від нуля перпендикулярною складовою швидкості, що виникає внаслідок дії сили Коріоліса.

Наведемо ще кілька прикладів, у яких наочно проявляється дія сили Коріоліса. На тіло, що рухається уздовж меридіану в північній півкулі у будь-

якому напрямку, діє сила, спрямована праворуч відносно напрямку руху. (У південній півкулі – ліворуч). Це приводить до того, що у річок у північній півкулі правий берег крутіший за лівий, оскільки він весь час підмивається. У південній півкулі навпаки. Ці причини пояснюють неоднаковий знос рейок при двоколінному русі. Артилерійські снаряди і кулі також відхиляються у процесі руху, ці відхилення обумовлені дією коріолісових сил. При пострілі з гармати на північ снаряд буде відхилитися на схід у північній півкулі і на захід у південній півкулі Землі. Дія сили Коріоліса призводить до того, що снаряд, який летить уздовж екватора на захід, притискається до Землі і піднімається догори при пострілі у східному напрямку.

На закінчення розглянемо питання про взаємозв'язок гравітаційних сил і сил інерції. Відомо, що усі тіла, незалежно від їх мас і хімічного складу, отримують у даному гравітаційному полі однакові прискорення, у такому полі вони рухаються абсолютно однаково при однакових початкових умовах. Те ж саме справедливо і для сил інерції. Ця аналогія має настільки глибокий характер, що була зведена у постулат, який отримав назву *принципу еквівалентності гравітаційних сил і сил інерції*, згідно з яким усі фізичні явища у гравітаційному полі відбуваються абсолютно так само, як і у відповідному полі сил інерції, якщо напруженості обох полів у відповідних точках простору співпадають, а початкові умови однакові для всіх тіл замкненої системи.

При цьому необхідно пам'ятати, що йдеться про однорідні поля.

Конкретне поле тяжіння змінюється при переході від однієї точки простору до іншої. Тому, взагалі кажучи, не можна підібрати таку систему відліку, яка рухається таким чином, що її прискорення у кожній точці простору еквівалентно за своєю дією, наявному там полю тяжіння. Однак при розгляді поля тяжіння у достатньо малій області простору у першому наближенні його можна вважати однорідним у цій області. Тому у достатньо малій області простору завжди можна скористатися принципом еквівалентності і зробити цілком певний висновок про хід фізичних процесів.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учебное пособие для студентов вузов / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1974. – 520 с.
2. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учебное пособие для студентов вузов / А. Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1976. – 416 с.
3. Стрелков С. П. Механика / С. П. Стрелков. – М.: Наука, 1965. – 545 с.
4. Иродов И. Е. Основные законы механики / И. Е. Иродов. – М.: Высш. шк., 1978. – 240 с.
5. Киттель Ч. Механика / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. – М.: Наука, 1971. – 480 с.
6. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 1. / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
7. Козицький С. В. Курс загальної фізики. Т.1. Механіка / С. В. Козицький, Д. Ю. Поліщук. – Одеса: Астропринт, 2011. – 472 с.

## Зміст

Вступ .....	3
I. Кінематика .....	6
§1. Основні положення .....	6
§2. Векторний спосіб задання руху .....	7
§3. Координатний спосіб задання руху .....	9
§4. Природний спосіб задання руху .....	11
§5. Кінематика твердого тіла .....	13
§6. Зв'язок між лінійними і кутовими кінематичними характеристиками руху .....	16
II. Принцип відносності .....	19
§7. Принцип відносності Ейнштейна .....	21
§8. Релятивістські ефекти .....	24
III. Динаміка матеріальної точки .....	30
§9. Закон механічного руху .....	30
§10. Застосування основного закону динаміки .....	32
§11. Рух системи тіл .....	38
§12. Теорема про рух центру мас системи .....	40
§13. Реактивний рух. Рівняння Мещерського, формула Ціолковського .....	42
IV. Робота і енергія .....	45
§14. Закон збереження енергії .....	48
§15. Сили і потенціальна енергія .....	51
§16. Зіткнення .....	53
§17. Розсіювання на дзеркальній кулі .....	58
V. Динаміка твердого тіла .....	61
§18. Теорема Гюйгенса-Штейнера .....	67
§19. Приклади обчислення моментів інерції .....	68
§20. Тензор інерції .....	71
§21. Гіроскоп .....	74
§22. Плоский рух твердого тіла .....	76
§23. Секторіальна швидкість. Теорема площ .....	78
VI. Елементи небесної механіки .....	80

§24. Закон всесвітнього тяжіння. I та II закони Кеплера .....	80
§25. Третій закон Кеплера.....	83
VII. Коливання .....	85
§26. Механічна енергія тіла при гармонічних коливаннях.....	88
§27. Математичний маятник .....	89
§28. Поняття фазового портрету .....	94
§29. Фазовий портрет математичного маятника .....	94
§30. Фізичний маятник .....	96
§ 31. Загасаючі коливання .....	98
§ 32. Вимушені коливання .....	101
§33. Резонанс .....	104
§ 34. Додавання коливань .....	105
§35. Биття .....	107
§ 36. Додавання взаємно перпендикулярних коливань .....	107
VIII. Деформації. Види деформацій .....	112
§37. Розтягнення і стиснення .....	114
§38. Кручення та згин .....	116
§39. Тензор пружних напружень .....	117
IX. Механіка рідин та газів .....	121
§40. Основне рівняння гідростатики .....	123
§41. Рівняння Ейлера .....	125
§42. Стаціонарна течія ідеальної рідини. Рівняння Бернуллі .....	128
§43. Стаціонарна течія рідини по прямолінійній трубі. Формула Пуазейля.....	131
X. Неінерціальні системи відліку. Сили інерції .....	136
§44. Земля неінерціальна система відліку .....	139
§45. Відхилення падаючих тіл від напрямку виска .....	141
§46. Маятник Фуко .....	143
Список використаної літератури .....	147
Зміст .....	148

Навчальне видання

**Русаков Володимир Федорович**

**ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА.  
МЕХАНІКА**

Навчальний посібник