МНОГОЧЛЕНИ ЯКОБІ В ФІЛЬТРАЦІЇ СИГНАЛІВ

В.Ю. БОНДАРЧУК

Обробка сигналів відіграє важливу роль у сучасній техніці, зокрема в телекомунікаціях, електроніці та обчислювальній техніці. Одним із важливих аспектів обробки сигналів є фільтрація, яка дозволяє виокремити потрібні компоненти та позбутися небажаних шумів. Одним із методів аналізу та проєктування фільтрів є використання многочленів Якобі для апроксимації їхніх амплітудно-частотних характеристик (АЧХ).

Як відомо, сигнал — це фізичний процес, що несе інформацію. Сигнали поділяються на детерміновані та стохастичні (випадкові). Також сигнали можуть бути неперервними або дискретними, залежно від способу подачі даних [2].

Фільтрація сигналів — це процес відокремлення корисної частини сигналу від небажаних компонентів. Фільтри класифікують залежно від діапазону частот, які пропускає фільтр: фільтри низьких частот (пропускають сигнали з низькими частотами та пригнічують високі); фільтри високих частот (пропускають високі частоти та пригнічують низькі); смугові фільтри (пропускають сигнали у певному частотному діапазоні); режекторні фільтри (усувають певний діапазон частот). Фільтри низьких частот особливо важливі, оскільки вони дозволяють виділяти корисну низькочастотну компоненту сигналу та усувати високочастотні шуми [2].

Многочлени Якобі є узагальненням ортогональних многочленів, таких як многочлени Лежандра, багаторазові многочлени Чебишева першого та другого родів. Завдяки цьому вони є універсальним інструментом для апроксимації характеристик фільтрів та можуть бути скориговані відповідно до заданих параметрів.

Многочлени Якобі [1] n степеня, які позначаються $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, є ортогональними на інтервалі $[-1,1]$ відносно вагової функції Якобі $w^{(\alpha,\beta)} = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, коли $\alpha,\beta \geqslant -1$.

А саме,

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) w^{(\alpha,\beta)}(x) dx = h_m^{(\alpha,\beta)} \delta_{n,m},$$

де

$$h_m^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

$\delta_{n,m}$ — дельта-символ Кронекера, а $\Gamma(\cdot)$ — добре відома гамма-функція.

Саме ця властивість ортогональності дозволяє використовувати їх у спектральному аналізі та фільтрації сигналів. Для цих многочленів є відношення симетрії [3]:

$$P_n^{(\beta,\alpha)}(x) = (-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(-x).$$

Для отримання апроксимуючої функції необхідно використовувати модифіковані многочлени Якобі:

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + P_n^{(\beta,\alpha)}(x),$$

нормованих на деяку величину $C_n^{(\alpha,\beta)}$:

$$\psi_n(\Omega) = \frac{J_n^{(\alpha,\beta)}(\Omega)}{C_n^{(\alpha,\beta)}}, \tag{1}$$

яка визначається як значення модифікованого многочлена Якобі при $x = 1$ і рівна

$$C_n^{(\alpha,\beta)} = J_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left[\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)}\right].$$

Для нормованого фільтра низьких частот функція квадрата АЧХ має вигляд

$$|H_n(x)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2\psi_n^2(x)},$$

де x — частотна змінна, $\psi_n(x)$ — характеристичний многочлен n степеня, визначений рівністю (1), а ϵ є параметром, який відповідає за нерівномірність в смузі пропускання. Функція $|H_n(x)|$ приймає максимальне значення, рівне 1, у нулях функції $\psi_n(x)$ і монотонно спадає за межами інтервалу $x \in [-1, 1]$.

Многочлени Якобі є потужним математичним інструментом у фільтрації сигналів. Вони дозволяють створювати фільтри з покращеними характеристиками, які можна адаптувати до конкретних вимог за допомогою параметрів α і β. Використання цих многочленів є перспективним напрямком у створені високоточних цифрових і аналогових фільтрів.

Література

[1] M. Abramowitz and I. Stegun. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* New York, Dover: National Bureau of Standards applied Mathematics Series 55.

[2] Квєтний Р. Н. (2012). *Комп'ютерне моделювання систем та процесів.* Методи обчислень. Частина 1. Навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ.

[3] Przemysław Gospodarczyk, Paweł Woźny, (2017). *Efficient modified Jacobi-Bernstein basis transformation* arXiv.org

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна

Email address: bondarchuk.volodymyr2024@vnu.edu.ua