Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
„Київський політехнічний інститут”

ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ. ДОВЖИНА ДУГИ І КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ 1 РОДУ. ІНТЕГРАЛ РІМАНА-СТІЛТЬЄСА

Методичні вказівки
до виконання типової розрахункової роботи
з математичного аналізу
для студентів І курсу
фізико-математичного факультету

Затверджено Методичною радою НТУУ “КПІ”

Київ
НТУУ “КПІ”
2006

Функції обмеженої варіації. Довжина дуги і криволінійні інтеграли 1 роду.Інтеграл Рімана-Стілтьєса : Метод. вказівки до викон. типової розрахунк. роботи з мат. аналізу для студ. І курсу фіз.-мат. ф-ту /Уклад.:З. П. Ординська, С. О. Рущицька, В. О. Гайдей та ін. – К.: НТУУ "КПІ", 2006. – 63 с.

Навчальне видання

Функції обмеженої варіації.

Довжина дуги і криволінійні інтеграли І роду.

Інтеграл Рімана – Стілтьєса

Методичні вказівки

до виконання типової розрахункової роботи
з математичного аналізу
для студентів І курсу
фізико-математичного факультету

Укладачі: *Ординська Зоя Павлівна,* канд. фіз.-мат. наук, доц
Рущицька Світлана Остапівна, канд. фіз.-мат. наук, доц
Гайдей Віктор Олександрович, канд. фіз.-мат. наук
Репета Леся Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук, доц

Відповідальний редактор *В. В. Булдигін*, д-р. фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент *Ю. П. Буценко,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

За редакцією укладачів

Темплан 2006 р.

ЗМІСТ

Передмова.....3
1. Теоретичні питання.....3
2. Функції обмеженої варіації.....5
Завдання 1.....14
Завдання 2 19
Завдання 3.....22
Завдання 4.....23
3. Довжина дуги.....27
4. Криволінійні інтеграли 1 роду та їх застосування.....29
Завдання 5.....33
Завдання 6.....36
Завдання 7.....39
5. Інтеграл Рімана-Стілтьєса.....40
Завдання 8.....49
Завдання 9.....54
Завдання 10.....57
Завдання 11.....58
Завдання 12.....60
6. Відповіді 61
Література 63

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки містять теоретичні питання до колоквіуму і завдання типової розрахункової роботи „Функції обмеженої варіації. Довжина дуги і криволінійні інтеграли I роду. Інтеграл Рімана-Стілтьєса” для студентів 1 курсу фізико-математичного факультету. Робота виконується у 2 семестрі. Кожен студент готує і здає усно теоретичний матеріал на колоквіумі і у письмовій формі завдання типової роботи, які вказує викладач. Зошит з розв’язаними задачами повинен бути зданий на перевірку викладачеві, який проводить практичні заняття, до контрольної роботи.

Студент, який не здав колоквіум і типову розрахункову роботу, не допускається до екзамену, як такий, що не виконав навчальний графік.

1. Теоретичні питання

1.Означення монотонно неспадної, монотонної функції на сегменті, стрибка функції $f(x)$ в точці x_0. Довести, що у випадку монотонно неспадної функції $f(x)$ на $[a;b]$ і для множини довільних різних точок $\{x_k\}_{k=1}^{n} \in [a;b]$ виконується нерівність $\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k+0)-f(x_k-0)\right] \le f(b)-f(a)$.

2. Довести, що монотонна функція на сегменті може мати тільки точки розриву першого роду (стрибки).

3. Довести, що монотонна функція на сегменті має не більше ніж зліченне число точок розриву.

4. Довести, що монотонно неспадна функція на $[a;b]$ $f(x)=g(x)+h(x)$, де $g(x)$- функція стрибків на $[a;b]$, яка має стрибки тої ж самої величини і в тих самих

точках, що і $f(x)$; $h(x) \in \mathbb{C}[a;b]$ і монотонно неспадна на $[a;b]$.

5. Означення функції обмеженої варіації на $[a;b]$. Приклад функції, яка є неперервною на $[a;b]$, але не є функцією обмеженої варіації на $[a;b]$.

6. Основні властивості функції обмеженої варіації (довести одну з них).

7. Теорема Жордана для функції обмеженої варіації.

8. Класи функцій обмеженої варіації.

9. Довести, що якщо $f(x) \in \mathrm{BV}[a;b] \cap \mathbb{C}[a;b]$, тоді $F(x) = \bigvee_a^x f(x) \in \mathbb{C}[a;b]$.

10. Довести, що при $f(x) \in \mathrm{BV}[a;b] \cap \mathbb{C}[a;b]$ має місце представлення $f(x) = g(x) - h(x)$, де $g(x), h(x)$ - неперервні монотонно неспадні функції на $[a;b]$.

11. Означення простої жорданової кривої, дуги в $\mathbb{R}_n$, спрямлюваної дуги та її довжини. Гладка дуга та її довжина.

12. Довести теорему Жордана:

для того щоб неперервна дуга $\vec{f} : [a;b] \to \mathbb{R}_1$, $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$ спрямлювалася, необхідно і достатньо, щоб $x(t), y(t) \in \mathrm{BV}[a;b]$.

13. Означення криволінійного інтеграла 1 роду. Задача про знаходження маси дуги, якщо в кожній точці дуги задана густина маси.

14. Формули обчислення криволінійного інтеграла 1 роду. Знаходження маси (заряду) дуги, центра мас дуги.

15. Означення інтегральних сум: Рімана-Стілтьєса, верхньої та нижньої сум Дарбу-Стілтьєса. Властивості сум Дарбу-

Стілтьєса, означення верхнього та нижнього інтегралів Дарбу-Стілтьєса.
16. Означення інтеграла Рімана-Стілтьєса. Приклад функції $f(x)$ відносно функції $\alpha(x)$ на $[a;b]$, для якої не існує інтеграл Рімана-Стілтьєса.
17. Необхідна і достатня умова існування інтеграла Рімана-Стілтьєса. Достатні умови існування інтеграла Рімана-Стілтьєса (довести одну з теорем).
18. Інтеграл Рімана-Стілтьєса відносно функції обмеженої варіації: довести одну з теорем про існування інтеграла.
19. Геометричний зміст і основні властивості інтеграла Рімана-Стілтьєса.
20. Інтегрування частинами в інтегралі Рімана-Стілтьєса.
21. Формули обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса.
22. Теорема Хеллі про граничний перехід в інтегралі Рімана-Стілтьєса.
23. Застосування інтеграла Рімана-Стілтьєса для знаходження статичних моментів і моментів інерції мас.

2. Функції обмеженої варіації

Функцію $f: \ [a;b] \to \mathbb{R}_1$ називають *монотонно неспадною* на $[a;b]$, якщо для $\forall x_1, x_2 \in [a;b]$: $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$. Будемо вважати, що $f(a) = f(a-0)$ і $f(b) = f(b+0)$. Якщо для $x_0 \in [a;b]$ $f(x_0+0) - f(x_0-0) > 0$, то величину $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ називають *стрибком* $f(x)$ *у точці* x_0. Монотонна функція може мати тільки точки розриву I роду (стрибки) і їх може бути не більше ніж зліченне число. При розв'язуванні задач використовується наступна теорема.

Теорема. (Про представлення монотонно неспадної функції). Якщо $f(x)$ монотонно неспадна на $[a;b]$, тоді $f(x)=g(x)+h(x)$, де $g(x)$ - функція стрибків на $[a;b]$, яка має стрибки тої ж самої величини, що і $f(x)$ і в тих самих точках, що і $f(x)$; $h(x)$- неперервна і монотонно неспадна на $[a;b]$.

Будемо вважати, що $g(a)=0$ і $\{x_k\}$ є множиною точок розриву $f(x)$ на $[a;b]$, тоді

$$\begin{cases} g(x)=\sum\limits_{k:\ x_k<x}\left[f(x_k+0)-f(x_k-0)\right]+\left[f(x)-f(x-0)\right]; \\ \qquad\qquad a<x\le b \end{cases}$$

і $h(x)=f(x)-g(x)$.

Функцію $f:[a,b]\to\mathbb{R}_1$ називають *функцією обмеженої варіації (зміни)* на $[a;b]$, якщо для довільного поділу

$$P_\lambda[a,b]:\quad \left\{\begin{matrix} a=x_0<\dots<x_n=b \\ \Delta x_k=x_{k+1}-x_k\ \left(k=\overline{0;n-1}\right) \end{matrix}\quad \lambda=\max\limits_k \Delta x_k\right\}$$

$\exists M>0$ таке що $v=\overset{b}{\underset{a}{v}}f=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|\le M.$

Варіацією $f(x)$ на $[a;b]$ називають $\sup\limits_\lambda \overset{b}{\underset{a}{v}}f$ і позначають

$$\sup_\lambda \overset{b}{\underset{a}{v}}f=\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}f(x)=\mathrm{V}(f,[a,b]).$$

Через $\mathrm{BV}[a,b]$ позначають множину функцій обмеженої варіації на $[a;b]$. Якщо $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}f(x)=\infty$, тоді $f(x)$ не є функцією обмеженої варіації на $[a;b]$.

Сформулюємо властивості функції обмеженої варіації.

1. Якщо $f(x)$ монотонно неспадна (не зростаюча) на $[a;b]$, тоді $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) = f(b) - f(a)$ $\left(\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) = f(a) - f(b)\right)$.

2. Якщо $f(x) \in \mathrm{BV}[a,b]$, тоді $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}} f(x)$, де $a < c < b$.

3. Якщо $f(x), g(x) \in \mathrm{BV}[a,b]$, тоді $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{|g(x)|}$ (за умови $\exists \alpha : |g(x)| > \alpha$ для $x \in [a;b]$) є функціями обмеженої варіації на $[a;b]$.

Теорема Жордана.

Для того, щоб $f(x) \in \mathrm{BV}[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб $f(x)$ була різницею двох монотонно неспадних функцій:

$$f(x) = g(x) - h(x).$$

Звичайно за $g(x)$ вибирають $g(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)$ для $\forall x \in (a,b]$ і $g(a) = 0$. Тоді $h(x) = g(x) - f(x)$.

Для того, щоб $f(x) \in \mathrm{BV}[a,b]$ була різницею двох монотонно зростаючих функцій $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, досить взяти $\varphi(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) + (x-a)$, $\varphi(a) = 0$, $\psi(x) = g(x) + (x-a)$, $g(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) - f(x)$ і $x \in (a,b]$.

4. Якщо $f(x) \in \mathrm{BV}[a,b] \cap \mathbb{C}[a,b]$, тоді

$$F(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) \in \mathbb{C}[a,b].$$

5. Якщо $f(x) \in \mathrm{BV}[a,b] \cap \mathbb{C}[a,b]$, тоді $f(x) = g(x) - h(x)$, де $f(x), h(x)$ неперервні і монотонно неспадні на $[a;b]$.

6. Якщо $f(x) \in \mathrm{BV}[a,b] \cap \mathbb{C}[a,b]$, тоді

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x) = \lim_{\lambda \to 0} \overset{b}{\underset{a}{v}} f = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right|.$$

Приклад 1. Монотонно неспадну функцію $f(x)$ на $[0;2]$ представити у вигляді суми неперервної функції та функції стрибків на $[0;2]$, якщо

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 1 + x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Побудувати графіки отриманих функцій.

$\triangleleft$ Побудуємо графік $f(x)$ і зауважимо, що маємо одну точку розриву $x = 1$ функції на $[0;2]$.

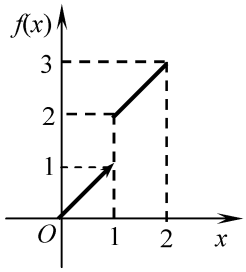

Рис. 1.

Побудуємо функцію стрибків, прийнявши $g(0) = 0$ і для $\{x_k\}$ - множини точок розриву

$$\begin{cases} g(x) = \sum\limits_{k:\, x_k < x} \left[f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \right] + \left[f(x) - f(x - 0) \right]; \\ \qquad\qquad 0 < x \le 2. \end{cases}$$

У нашому випадку

$$\begin{cases} g(x) = \sum\limits_{\substack{x_k < x \\ x_k = 1}} \left[f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \right] + \left[f(x) - f(x - 0) \right] = \\ \qquad = 0 + 0 = 0, \\ \qquad 0 < x < 1, \end{cases}$$

$$g(1) = \sum_{x_k < x} \left[f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \right] + \left[f(1) - f(1 - 0) \right] =$$

$$= 0 + [2 - 1] = 1,$$

$$\begin{cases} g(x) = \sum\limits_{x_k < x} \left[f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \right] + \left[f(x + 0) - f(x - 0) \right] = \\ \qquad = [3 - 2] + 0 = 1, \\ \qquad 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Таким чином, $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$

Знайдемо $h(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ x, & 1 \le x \le 2, \end{cases}$

тобто $h(x) = x$ є неперервною функцією на сегменті $[0;2]$ і крім цього $f(x) = g(x) + h(x)$.

Побудуємо графіки $g(x)$ та $h(x)$ на $[0;2]$.

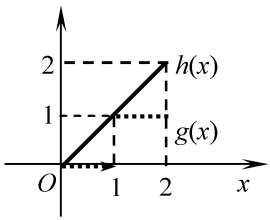

Рис. 2.

На рисунку $g(x)$ позначена пунктиром. ▷

Приклад 2. Довести, що функція $f(x)$ є функцією обмеженої варіації на $[0,1]$. Знайти повну варіацію $f(x)$ на $[0,1]$, користуючись а) означенням $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)$; б) властивостями повної варіації, якщо $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 1-x, & 0<x<1, \\ 5, & x=1. \end{cases}$

$\triangleleft$ Побудуємо графік $f(x)$ на $[0,1]$:

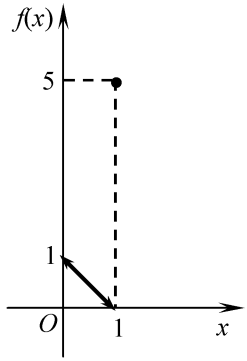

Рис. 3.

Для того, щоб довести, що $f(x)\in \mathrm{BV}[a,b]$, покажемо, що множина $\left\{\overset{b}{\underset{a}{v}} f\right\}$ є обмеженою при довільному поділі $P_\lambda[a,b]$.

Тоді за означенням $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)=\sup\limits_{\lambda} \overset{b}{\underset{a}{v}} f$.

а) Приймемо

$$P_\lambda[0;1]:\ \left\{\begin{matrix} 0=x_0<\cdots<x_n=1 \\ \Delta x_k=x_{k+1}-x_k\ \left(k=\overline{0;n-1}\right) \end{matrix}\quad \lambda=\max\limits_k \Delta x_k\right\}.$$

Знайдемо

$$\overset{b}{\underset{a}{v}} f = \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(x_{k+1}\right) - f\left(x_k\right) \right| =$$

$$= \left|(1-x_1) - f(x_0)\right| + \left|(1-x_2) - (1-x_1)\right| + \cdots + \left|(1-x_{n-1}) - (1-x_{n-2})\right| +$$

$$+ \left|5 - (1-x_{n-1})\right| = \left|1-x_1\right| + \left|x_1 - x_2\right| + \cdots + \left|x_{n-2} - x_{n-1}\right| + \left|4 + x_{n-1}\right| =$$

$$= \left(1-x_1\right) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (4 + x_{n-1}) = 5 + 2(x_{n-1} - x_1).$$

Оскільки $x_1, x_{n-1} \in [0,1]$, то, очевидно, що множина $\left\{ \overset{1}{\underset{0}{v}} f \right\}$ обмежена (наприклад, числом 8) для $\forall P_\lambda [a, b]$. Знайдемо

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f(x) = \sup_\lambda \overset{1}{\underset{0}{v}} f = \sup_\lambda \left[5 + 2(x_{n-1} - x_1)\right] = 5 + 2(1-0) = 7$$

б) Знайдемо повну варіацію $f(x)$ на $(0;1)$:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f(x) = \left[f(0+0) - f(0)\right] + \left|f(1-0) - f(0+0)\right| +$$

$$+ \left[f(1) - f(1-0)\right] = \left[1-0\right] + \left|0-1\right| + \left|5-0\right| = 1 + 1 + 5 = 7.$$

▷ ***Приклад 3***. Довести, що функція $f(x) = 1 - x^2$ є функцією обмеженої варіації на $[-1, 1]$. Представити $f(x)$ у вигляді різниці двох неперервних монотонно неспадних функцій. Побудувати графіки отриманих функцій.

◁ 1) Побудуємо графік $f(x)$ на $[-1, 1]$.

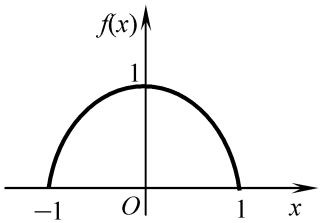

Рис. 4.

$f(x) \in BV[-1,1]$: дійсно $f(x)$ монотонно зростає на $[-1,0]$, монотонно спадає на $[0,1]$ і кожна монотонна функція є функцією обмеженої варіації. Повна варіація

$$\overset{1}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f(x) = \overset{0}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f(x) + \overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f(x) =$$
$$= [f(0) - f(-1)] + |f(1) - f(0)| = (1-0) + |0-1| = 2.$$

Зауважимо, що достатньою умовою того, що $f(x) \in \mathrm{BV}[a,b]$ є обмеженість модуля $f'(x)$ на $[a,b]$. У нашому випадку $f'(x) = -2x$ і $|f'(x)| = |-2x| < 3$ на $[-1,1]$, отже

$$f(x) \in BV[-1,1].$$

2) Знайдемо $\overset{x}{\underset{-1}{V}} f(x)$ для $\forall x \in [-1,1]$. Використовуючи монотонність $f(x)$ отримуємо

$$\begin{cases} \overset{x}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f = (1-x^2) - 0 = 1 - x^2, \\ \qquad -1 \le x < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{x}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f = \overset{0}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f + \overset{x}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f = 1 + \overset{x}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f = 1 + [1 - (1-x^2)] = 1 + x^2, \\ \qquad 0 < x < 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{x}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f = \overset{0}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f = f(0) - f(-1) = 1, \\ \qquad x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{x}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f = \overset{1}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f = (1-0) + (1-0) = 2, \\ \qquad x = 1. \end{cases}$$

Таким чином, $\overset{x}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \le x \le 0, \\ 1 + x^2, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

Функція $\varphi(x) = \overset{x}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f(x)$ неперервна і монотонно зростає на $[-1, 1]$.

3) Знайдемо

$$\psi(x) = \overset{x}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f(x) - f(x) = \varphi(x) - f(x) =$$

$$= \begin{cases} (1-x^2)-(1-x^2) = 0, & -1 \le x \le 0, \\ (1+x^2)-(1-x^2) = 2x^2, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Функція $\psi(x)$ неперервна і монотонно неспадна на $[-1, 1]$. Крім цього $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ є різницею монотонних неперервних на $[-1, 1]$ функцій. Побудуємо графіки $\varphi(x)$ і $\psi(x)$.

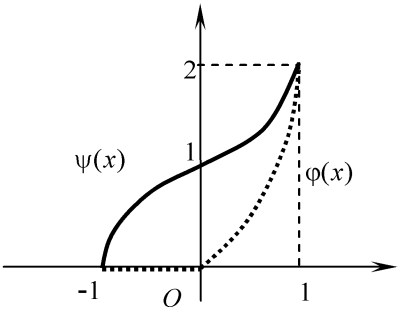

Рис. 5.

Завдання 1

Задана монотонно неспадна функція $f(x)$ на $[a, b]$.

1) Представити $f(x)$ у вигляді суми функції стрибків $g(x)$ і неперервної функції $h(x)$ на $[a, b]$. Побудувати графіки $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ на $[a, b]$.

2) Довести, що $f(x)$ є функцією обмеженої варіації на сегменті $[a,b]$. Знайти повну варіацію: а) за означенням повної варіації; б) користуючись властивостями варіації.

Функція $\varphi(x)=\overset{x}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f(x)$ неперервна і монотонно зростає на $[-1,1]$.

3) Знайдемо

$$\psi(x)=\overset{x}{\underset{-1}{\mathrm{V}}} f(x)-f(x)=\varphi(x)-f(x)=$$

$$=\begin{cases}(1-x^2)-(1-x^2)=0, & -1\le x\le 0,\\ (1+x^2)-(1-x^2)=2x^2, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Функція $\psi(x)$ неперервна і монотонно неспадна на $[-1,1]$. Крім цього $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ є різницею монотонних неперервних на $[-1,1]$ функцій. Побудуємо графіки $\varphi(x)$ і $\psi(x)$.

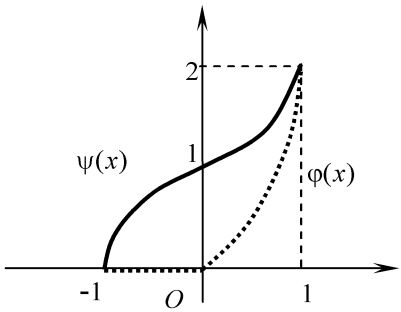

Рис. 5.

Завдання 1

Задана монотонно неспадна функція $f(x)$ на $[a,b]$.

Представити $f(x)$ у вигляді суми функції стрибків $g(x)$ і неперервної функції $h(x)$ на $[a,b]$. Побудувати графіки $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ на $[a,b]$.

2) Довести, що $f(x)$ є функцією обмеженої варіації на сегменті $[a,b]$. Знайти повну варіацію: а) за означенням повної варіації; б) користуючись властивостями варіації.

1. $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 2, & 1\le x<2, \\ 3, & x=2, \\ x+2, & 2<x\le 3; \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} x^3, & 0\le x<1, \\ 3, & 1\le x<2, \\ 4, & x=2, \\ \sqrt{x-2}+5, & 2<x\le 3. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} -1-x^2, & -1\le x<0, \\ 0, & x=0, \\ e^x, & 0<x\le 1, \\ 5+\ln x, & 1<x\le 3; \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} x-4, & -2\le x<0, \\ -3, & x=0, \\ x-2, & 0<x<2, \\ 1, & x=2, \\ 2^x, & 2<x\le 3; \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x<0, \\ e^x, & 0\le x<1, \\ 4, & x=1, \\ 5, & 1<x\le 2; \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 2, & x=1, \\ x+3, & 1<x\le 2; \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 0\le x<1, \\ x+3, & 1<x<2, \\ 6, & x=2; \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x<1, \\ 3, & x=1, \\ 2+2x^2, & 1<x<2, \\ 11, & x=2; \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 2, & x=1, \\ x+2, & 1<x<2, \\ 5, & x=2; \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 1, & 1\le x<2, \\ 2, & x=2, \\ 4-(x-3)^2, & 2<x<3, \\ 5, & x=3; \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 2, & 1\le x<2, \\ 3, & x=2, \\ 5-(x-3)^2, & 2<x\le 3; \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 3, & x=1, \\ x+4, & 1<x<2, \\ 7, & x=2; \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x<0, \\ 2, & x=0, \\ x+3, & 0<x<1, \\ 5, & x=1; \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x\le 0, \\ x^2+1, & 0<x\le 1, \\ x+3, & 1<x\le 2; \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} e^x, & -1\le x<0, \\ 2, & x=0, \\ x+3, & 0<x\le 1, \\ x^2+4, & 1<x\le 2; \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & 0\le x<1, \\ 1, & x=1, \\ 4x-1-x^2, & 1<x<2, \\ 4, & x=2, \\ x+3, & 2<x\le 3; \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0\le x<\dfrac{1}{2}, \\ x+1, & 0,5\le x<1, \\ 2,5, & x=1, \\ x+2, & 1<x\le 2; \end{cases}$

18.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 2, & 1\le x<2,\\ x^2-4x+7, & 2\le x<3,\\ 5, & x=3;\end{cases}$$

19. $$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 2x+1, & 0<x\le 1,\\ x+3, & 1<x\le 2;\end{cases}$$

20. $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ x+1, & 1\le x<2,\\ x^2, & 2\le x\le 3;\end{cases}$$

21.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & 0\le x<1,\\ 4, & x=1,\\ 5+\sin\dfrac{\pi}{x}, & 1<x<2,\\ x+5, & 2\le x<3,\\ 9, & x=3;\end{cases}$$

22. $$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1,\\ 2, & x=1,\\ e^x, & 1<x<2,\\ 8, & x=2;\end{cases}$$

23. $$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1,\\ x+2, & 1<x\le 2;\end{cases}$$

24. $$f(x)=\begin{cases}x^3, & 0\le x<1,\\ 2, & x=1,\\ 2x+1, & 1<x<2,\\ 6, & x=2;\end{cases}$$

25. $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x<1, \\ 2, x=1, \\ x+2, 1<x<2, \\ 6, x=2; \end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases} x^3, 0\le x\le 1, \\ x+1, 1<x<2, \\ 4+\sqrt{x-2},\ 2\le x\le 3; \end{cases}$

27.

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 2, & 1\le x<2, \\ 3, & x=2, \\ 5-(x-3)^2, & 2<x\le 3; \end{cases}$$

28. $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 1, & 1\le x<2, \\ 2, & x=2, \\ x+1, & 2<x<3, \\ 5, & x=3; \end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, 1\le x<2, \\ 4, \quad x=2, \\ x+3, 2<x\le 3; \end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 2+\ln x, & 1\le x<2, \\ x+3, & 2\le x\le 3. \end{cases}$

Завдання 2

Задана немонотонна функція $f(x)$ на $[a,b]$.

1) Довести, що $f(x)\in \mathrm{BV}[a,b]$.

2) Знайти $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)$, $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)=g(x)$, $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)-f(x)=h(x)$, $x\in[a,b]$.

3) Представити $f(x)$ на $[a,b]$ як різницю двох:

а) монотонно неспадних ; б) монотонно зростаючих функцій.

4) Побудувати графіки отриманих функцій.

Варіанти

1. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ (x-2)^2, & 1\le x\le 2,\\ x-1, & 2<x<3,\\ 3, & x=3;\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}x^4, & 0\le x<1,\\ 2, & x=1,\\ 3+(x-1)^2, & 1<x\le 2;\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & -0,5\pi\le x<0,\\ 3, & x=0,\\ \ln(1+x), & 0<x\le 3;\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}-x, & -1\le x<0,\\ 2, & x=0,\\ \sin x, & 0<x\le 0,5\pi;\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2, & 0\le x<1,\\ 6, & x=1,\\ 5-x, & 1<x\le 3;\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}4-(x-2)^2, & 0\le x<2,\\ 3, & x=2,\\ 2-(x-2)^2, & 2<x\le 4;\end{cases}$

7.

$$f(x)=\begin{cases} x^3,\ 0\le x<1, \\ 6, \quad x=1, \\ x^2+2, 1<x\le 2; \end{cases}$$

8.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, \quad 0\le x<1, \\ 4, \quad x=1, \\ 3+(x-1)^2, 1<x\le 2; \end{cases}$$

9.

$$f(x)=\begin{cases} x,\ 0\le x<2, \\ 1, \quad x=2, \\ x-2,\ 2<x\le 4; \end{cases}$$

10.

$$f(x)=\begin{cases} -x-1, -1\le x<0, \\ \sin x,\ 0\le x<0,5\pi, \\ 2, \quad x=0,5\pi; \end{cases}$$

11.

$$f(x)=\begin{cases} 1-x,\ 0\le x<1, \\ x^2,\ 1\le x<2, \\ 5,\ x=2; \end{cases}$$

12. $$f(x)=\begin{cases} x^2, \quad 0\le x<1, \\ 6, \quad x=1, \\ x+4,\ 1<x\le 2; \end{cases}$$

13.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2, \quad 0\le x<1, \\ 4, \quad x=1, \\ 3x+2,\ 1<x\le 2; \end{cases}$$

14. $$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, -1\le x<1, \\ 4, \quad x=1, \\ x+2, 1<x\le 3; \end{cases}$$

15.

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, -1\le x<0, \\ x^2, \quad 0\le x\le 1; \end{cases}$$

16. $$f(x)=\begin{cases} x^2,\ 0\le x<1, \\ 3, \quad x=1, \\ 3-x,\ 1<x\le 2; \end{cases}$$

17.

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2, -1\le x<0, \\ 1-x^2, \quad 0\le x<1, \\ 1, \quad x=1; \end{cases}$$

18.

$$f(x)=\begin{cases} \sin x,\ 0\le x<0,5\pi, \\ 4, \quad x=0,5\pi, \\ x, \quad 0,5\pi<x\le\pi; \end{cases}$$

19.

$$f(x)=\begin{cases} x+2, -2\le x<-1, \\ -x-1, -1\le x<0, \\ x, \quad 0\le x<1, \\ 1-x, \quad 1\le x\le 2; \end{cases}$$

20.

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3, \quad 0\le x<1, \\ 4, \quad x=1, \\ 2+\cos\dfrac{\pi}{x}, \ 1<x<2, \\ 3, \quad x=2; \end{cases}$$

21. $$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, \ -1\le x<1, \\ 1, \quad x=1, \\ x+1, \ 1<x\le 2; \end{cases}$$

22.

$$f(x)=\begin{cases} 7-0,5x^2, \ 0\le x<2, \\ 3, \quad x=2, \\ 3+0,5x, \ 2<x\le 4; \end{cases}$$

23.

$$f(x)=\begin{cases} \cos^2 x, \ 0\le x<0,5\pi, \\ 2, \quad x=0,5\pi, \\ \sin^2 x, \ 0,5\pi<x\le \pi; \end{cases}$$

24. $$f(x)=\begin{cases} x^4, \ 0\le x<1, \\ 3, \quad x=1, \\ x^2+1, \ 1<x\le 2; \end{cases}$$

25. $$f(x)=\begin{cases} x^2, \quad 0\le x<1, \\ 3, \quad x=1, \\ x+1, 1<x\le 2; \end{cases}$$

26. $$f(x)=\begin{cases} 2x^2, \quad 0\le x\le 1, \\ 4-x, \ 1<x<2, \\ 3, \quad x=2; \end{cases}$$

27.

$$f(x)=\begin{cases} 1+2x, \quad -1\le x<0, \\ x^2-4x+4, 0\le x<1, \\ 2, \quad x=1; \end{cases}$$

28.

$$f(x)=\begin{cases} 2(x+1)^2-2, -1\le x<0, \\ 1, \quad x=0, \\ 2-x^2, \quad 0<x\le 1; \end{cases}$$

29. $$f(x)=\begin{cases} x, \quad 0\le x<1, \\ x-1, 1\le x<2, \\ 0, x=2; \end{cases}$$

30. $$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, 0\le x<1, \\ x^3, 1\le x<2, \\ 9, \quad x=2. \end{cases}$$

Завдання 3

Довести , що функція $f(x) \in \mathrm{BV}[a,b]$. Представити $f(x)$ на $[a,b]$ у вигляді різниці двох неперервних:

а) монотонно неспадних; б) монотонно зростаючих функцій; в) побудувати графіки отриманих функцій.

1. $\begin{cases} f(x) = \cos x \\ x \in [-0,5\pi; 0,5\pi]; \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x) = \sin x \\ x \in [0;\pi]; \end{cases}$

3. $\begin{cases} f(x) = 1-(1-x)^2 \\ x \in [0;2]; \end{cases}$

4. $\begin{cases} f(x) = 2\sin^2 0,5x \\ x \in [-\pi;\pi]; \end{cases}$

5. $\begin{cases} f(x) = 4-x^2 \\ x \in [-2,2]; \end{cases}$

6. $\begin{cases} f(x) = \sin^2 x \\ x \in [0;\pi]; \end{cases}$

7. $\begin{cases} f(x) = \sin^2 x \\ x \in [-0,5\pi; 0,5\pi]; \end{cases}$

8. $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ x \in [-1;1]; \end{cases}$

9. $\begin{cases} f(x) = 1-x^2 \\ x \in [-1;1]; \end{cases}$

10. $\begin{cases} f(x) = |x+2| \\ x \in [-4;0]; \end{cases}$

11. $\begin{cases} f(x) = |x|^3 \\ x \in [-1;1]; \end{cases}$

12. $\begin{cases} f(x) = 9-x^2 \\ x \in [-3;3]; \end{cases}$

13. $\begin{cases} f(x) = \operatorname{ch} x \\ x \in [-1;1]; \end{cases}$

14. $\begin{cases} f(x) = \sin^2 x \\ x \in [0;\ 2\pi]; \end{cases}$

15. $\begin{cases} f(x) = \cos^2 x \\ x \in [0;2\pi]; \end{cases}$

16. $\begin{cases} f(x) = \cos^2 x \\ x \in [0;\pi]; \end{cases}$

17. $\begin{cases} f(x) = \cos^2 x \\ x \in [-0,5\pi; 0,5\pi]; \end{cases}$

18. $\begin{cases} f(x) = e^{-x^2} \\ x \in [-1;1]; \end{cases}$

19. $\begin{cases} f(x) = \operatorname{arctg} x^2 \\ x \in [-1;1]; \end{cases}$

20. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ x \in [-1;1]; \end{cases}$

21. $\begin{cases} f(x) = 2x - x^2 \\ x \in [0;2]; \end{cases}$

22. $\begin{cases} f(x) = 4x - x^2 \\ x \in [0;4]; \end{cases}$

23. $\begin{cases} f(x) = e^{-(x-1)^2} \\ x \in [0,2]; \end{cases}$

24. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{1+x^2} \\ x \in [-1;1]; \end{cases}$

25. $\begin{cases} f(x) = 16 - x^2 \\ x \in [-4;4]; \end{cases}$

26. $\begin{cases} f(x) = |\operatorname{sh} x| \\ x \in [-1;1]; \end{cases}$

27. $\begin{cases} f(x) = e^{-4x^2} \\ x \in [-1;1]; \end{cases}$

28. $\begin{cases} f(x) = 4 - (2-x)^2 \\ x \in [0;4]; \end{cases}$

29. $\begin{cases} f(x) = 25 - x^2 \\ x \in [-5;5]; \end{cases}$

30. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{4+x^2} \\ x \in [-1;1]. \end{cases}$

Завдання 4

Знайти повну варіацію $f(x)$ на сегменті $[0,2]$. Як треба змінити значення $f(x)$ у точці $x = 1$, щоб варіація була найменшою?

1. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1, \\ 10, & x=1, \\ x^2, & x>1; \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x-2, & x<1, \\ 13, & x=1, \\ x^2, & x>1; \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1, \\ 5, & x=1, \\ x^2, & x>1; \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} x-3, & x<1, \\ 12, & x=1, \\ x^2, & x>1; \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1, \\ 4, & x=1, \\ x^2+1, & x>1; \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1, \\ 8, & x=1, \\ x^2-1, & x>1; \end{cases}$

7.

$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<1, \\ 8, & x=1, \\ x^2+1, & x>1. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<1, \\ 5, & x=1, \\ x^2-1, & x>1. \end{cases}$

9. Функція $f(x)$ має обмежену варіацію на $[0,1]$. Довести, що $F(x)=f(Ax+B)$, де $A>0$ $(A,B-const)$ має обмежену варіацію на $[a,b]$ і $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f(x)=\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} F(x)$, де $a=-\dfrac{B}{A}$, $b=\dfrac{1-B}{A}$.

Перевірити твердження сформульовані в задачі 9 для функцій

10. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 2-x, & 0<x<1, \\ 3, & x=1. \end{cases}$ і $F(x)=f(x-1)$;

11. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 1-2x, & 0<x<1, \\ 2, & x=1. \end{cases}$ і $F(x)=f(x-2)$;

12. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ x-1, & 0<x<1, \\ 2, & x=1. \end{cases}$ і $F(x)=f(x+1)$;

13. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 2x-1, & 0<x<1, \\ 3, & x=1. \end{cases}$ і $F(x)=f(x+2)$.

14. Функція $f(x)$ має обмежену варіацію на $[0,1]$, а $\varphi(x)$ строго зростає і неперервна на $[a,b]$ і така, що $\varphi(a)=0, \varphi(b)=1$. Довести, що $F(x)=f(\varphi(x))$ має обмежену варіацію на $[a,b]$ і $\bigvee\limits_0^1 f(x)=\bigvee\limits_a^b F(x)$.

Перевірити твердження сформульовані в задачі 14 для функцій:

15. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 2-x, & 0<x<1, \\ 3, & x=1. \end{cases}$ і $\varphi(x)=x^2$ на $[0;1]$;

16. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 1-2x, & 0<x<1, \\ 2, & x=1. \end{cases}$ і $\varphi(x)=x^3$ на $[0;1]$;

17. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ x-1, & 0<x<1, \\ 2, & x=1. \end{cases}$ і $\varphi(x)=x^2$ на $[0;1]$;

18. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 2x-1, & 0<x<1, \\ 3, & x=1. \end{cases}$ і $\varphi(x)=x^3$ на $[0;1]$.

19. Довести , що функція, яка задовольняє умову Ліпшиця першого порядку на $[a,b]$, має на цьому відрізку обмежену варіацію.

20. Перевірити, що функція $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{\ln x}, & 0<x\le 0,5, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ неперервна і має обмежену варіацію на $[0;0,5]$, але не задовольняє умову Ліпшиця на $[0;0,5]$ при будь-якому α.

21. Довести , що з умови $f(x)\in \mathrm{BV}[a,b]$ випливає $|f(x)|\in \mathrm{BV}[a,b]$.

22. Чи вірне твердження: „ Якщо $|f(x)|\in \mathrm{BV}[a,b]$, тоді $f(x)\in \mathrm{BV}[a,b]$? “.

23. Припустимо, що $f(x)\in \mathrm{C}[a,b]$. Чи вірне твердження : „ Якщо $|f(x)|\in \mathrm{BV}[a,b]$, тоді $f(x)\in \mathrm{BV}[a,b]$?”.

24. Припустимо, що $f(x)\in \mathrm{BV}[a,b]$ і $f(x)\ge c>0$ для $\forall x\in[a,b]$. Довести, що $\dfrac{1}{f(x)}\in \mathrm{BV}[a,b]$.

25. Навести приклад неперервної функції на $[a,b]$ і такої, що не є функцією обмеженої варіації на $[a,b]$.

3. ДОВЖИНА ДУГИ

Наведемо означення кривої (дуги) та її довжини.

Означення 1. (Жордан) Точки площини M(x,y), координати яких описуються неперервними функціями $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]$, називають *кривою*. Крива є простою, якщо різним значенням t відповідають різні точки на кривій.

Означення 2. (Кантор) Компактну зв'язну множину на площині без внутрішніх точок називають *кривою*.

Означення 3. (Урисон) Одновимірну зв'язну компактну множину називають *кривою*.

Означення 4. В $\mathbb{R}_n$ відображення $f:[a,b] \to \mathbb{R}_n$, яке є неперервним і бієктивним, називають *дугою* в $\mathbb{R}_n$: $f = \vec{f}(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$.

Розглянемо дугу Г в $\mathbb{R}_2$: $\vec{f}(t) = (x(t),\ y(t))$ (див. означ. 4). Побудуємо поділ $\mathrm{P}_\lambda[a,b]: a = t_0 < ... < t_n = b$. Тоді кожному значенню t_k відповідає точка $\mathrm{M}_k(x(t_k),\ y(t_k))$ на дузі Г. Знайдемо довжину ламаної, побудованої по точках $\mathrm{M}_k\,(k = \overline{0,n})$,

$$l(\Gamma(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2}\ .$$

Зауважимо, що при $\vec{f}(t) = (x(t),\ y(t))$,

$$\Delta\vec{f}_k = \vec{f}(t_{k+1}) - \vec{f}(t_k) = (x(t_{k+1}) - x(t_k), y(t_{k+1}) - y(t_k)) \quad \text{і}$$

$$l(\Gamma(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\Delta\vec{f}_k\right|.$$

Означення 5. Неперервну дугу Γ в $\mathbb{R}_2$ називають *спрямлюваною*, якщо $\exists \sup_{\lambda} l\left(\Gamma(\lambda)\right) < \infty$, і число $l(\Gamma) = \sup_{\lambda} l(\Gamma(\lambda))$ називають *довжиною дуги* Γ .

Це означення еквівалентне наступному:

Означення 6. Неперервну дугу Γ в $\mathbb{R}_2$ називають *спрямлюваною*, якщо $\exists \lim_{\lambda \to 0} l(\Gamma(\lambda)) = l(\Gamma) < \infty$.

Зауважимо, що для функції однієї змінної $y = f(t)$ $\Delta f = f(t_{k+1}) - f(t_k)$,

$\left|\Delta f\right| = \left|\Delta f_k\right| = \left|f(t_{k+1}) - f(t_k)\right| = \sqrt{(f(t_{k+1}) - f(t_k))^2}$,

$\overset{b}{\underset{a}{v}} f = \sum_{k=0}^{n-1} \left|f(t_{k+1}) - f(t_k)\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\Delta f_k\right|$ і повна варіація $f(t)$ на $\left[a, b\right]$: $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(t) = \sup_{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\Delta f_k\right|$.

Для векторної функції запишемо подібні формули і твердження.

Означення 7. Якщо $\vec{f} : \left[a, b\right] \to \mathbb{R}_n$ і $\exists \sup_{\lambda} \left|\Delta\vec{f}_k\right| < \infty$,

тоді $\vec{f} \in \mathrm{BV}\left[a, b\right]$ і $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \vec{f}(t) = \sup_{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \left|\Delta\vec{f}_k\right|$.

Отже, правомірне наступне означення спрямлюваної дуги в $\mathbb{R}_n$.

Означення 8. Неперервну дугу Γ в $\mathbb{R}_n$ називають спрямлюваною, якщо $\vec{f} \in \mathrm{BV}\left[a, b\right]$, і $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \vec{f}(t)$ називають

довжиною дуги $\Gamma : l(\Gamma) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \vec{f}(t)$.

Теорема (Жордан). Для того, щоб неперервна дуга Γ: $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a, b]$ спрямлювалася, необхідно і достатньо, щоб $x = x(t),\ y = y(t) \in \mathrm{BV}[a, b]$.

У випадку гладкої дуги, довжина її може бути знайдена за допомогою інтеграла Рімана.

Означення 9. Дугу Γ в R_3: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, $t \in [a, b]$ називають гладкою, якщо

$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ і $x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2 > 0$.

Теорема. Гладка дуга спрямлюється і її довжина дорівнює $l(\Gamma) = \int\limits_a^b dl$, де $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$ є диференціалом дуги.

Наведемо вигляд диференціала дуги в $\mathbb{R}_2$ у випадках, коли дуга задана явно і в полярній системі координат :

1) $\Gamma : y = f(x),\ x \in [a, b],\ dl = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$ і

$l(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$.

2) $\Gamma : \begin{cases} \rho = \rho(\varphi) \\ \varphi \in [a, b] \end{cases},\quad dl = \sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}d\varphi$ і

$l(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}d\varphi$.

4. КРИВОЛІНІЙНІ ІТЕГРАЛИ 1 РОДУ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Якщо Γ є спрямлювана дуга в $\mathbb{R}_2$ (або $\mathbb{R}_n$) і в кожній точці $\mathrm{M}(x, y) \in \Gamma$ визначена функція $f(\mathrm{M}) = f(x, y) \in \mathbb{C}(\Gamma)$,

тоді $\int\limits_{\Gamma} f(x,y)dl$, де dl - диференціал дуги Γ, є криволінійним інтегралом I роду. Наведемо формули його обчислення і застосування.

1) Γ задана параметрично: $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]$, ріст довжини дуги $l = l(t)$ відповідає росту параметра.

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x(t),y(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt\,.$$

2) Γ задана явно: $y = y(x),\ x \in [a,b]$

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(t))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx\,.$$

3) Γ задана в полярних координатах: $\rho = \rho(\varphi),\quad \varphi \in [a,b]$

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi$$

4) Маса (заряд) дуги в $\mathbb{R}_2$, якщо $\gamma(x,y)$ є густина маси (заряду) і dl є диференціал дуги $m = \int\limits_{\Gamma} \gamma(x,y)\,dl$.

5) Центр мас $C(x_C, y_C)$ дуги в $\mathbb{R}_2$, якщо $\gamma(x,y)$ є густина маси $x_C = \dfrac{1}{m}\int\limits_{\Gamma} x\gamma(x,y)\,dl,\quad y_C = \dfrac{1}{m}\int\limits_{\Gamma} y\gamma(x,y)\,dl$.

Приклад 1. Довести, що дуга

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

описується неперервною функцією на $[0;1]$, але не є спрямлюваною.

$\triangleleft$ 1) Покажемо, що $f(x)\in\mathbb{C}[0;1]$, тобто функція є неперервною на $[0;1]$. Дійсно, якщо функція $f(x)$ є розривною, то точкою розриву може бути хіба що $x=0$. Тому знайдемо $f(0+0)=\lim\limits_{x\to+0} x\cos\dfrac{\pi}{2x}=0$ [добуток нескінченно малої функції x на обмежену функцію $\left|\cos\dfrac{\pi}{2x}\right|\le 1$]. Але $f(0)=0$. Отже, $f(0)=f(0+0)$, тобто $f(x)\in\mathbb{C}[0;1]$.

2) Покажемо, що $f(x)\notin \mathrm{BV}[0;1]$, тобто функція має необмежену варіацію на $[0;1]$ і, отже, за означенням 8 і теоремою Жордана, не є спрямлюваною на $[0;1]$. Для цього досить знайти такий поділ $P_\lambda[0;1]$ для якого $\overset{b}{\underset{a}{v}} f\to\infty$ при $\lambda\to 0$.

Виберемо певний поділ

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\cdots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1.$$

Знайдемо

$$\overset{b}{\underset{a}{v}} f=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|=\left|\frac{1}{2n}\cos\left(\frac{\pi}{2}(2n)\right)-f(0)\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{2n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\right)-\frac{1}{2n}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot(2n)\right)\right|+\cdots$$

$$\cdots+\left|\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)-\frac{1}{3}\cos(\frac{\pi}{2}\cdot 3)\right|+\left|1\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos\pi\right|.$$

Враховуючи, що $\cos(n\pi)=(-1)^n$ і $f(0)=0$, отримуємо

$$\overset{1}{\underset{0}{v}} f=(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n})+\cdots+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2}+1=H_n,$$

де H_n — часткова сума гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним, тобто $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$. Отже, $\sup_{\lambda} \overset{1}{\underset{0}{v}} f = \overset{1}{\underset{0}{V}} f(x) = \infty$.

Таким чином, функція $f(t)$ є неперервною функцією на сегменті $[0;1]$, але не є функцією обмеженої варіації: дуга, яку описує $f(x)$ на відрізку $[0;1]$, не спрямлюється. ▷

Приклад 2. Знайти довжину дуги
$\Gamma : x = a\cos^4 t, y = a\sin^4 t \ (a > 0)$.

◁ Дуга Γ є бієктивним відображенням відрізка $[0; 0,5\pi]$ $(x > 0, y > 0)$. Тоді, використовуючи формули для параметрично заданої кривої, знайдемо

$$x'(t) = -4a\cos^3 t\sin t; \qquad y'(t) = 4a\sin^3 t\cos t;$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 16a^2\cos^6 t\sin^2 t + 16a^2\sin^6 t\cos^2 t =$$

$$= 16a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^4 t + \sin^4 t) =$$

$$= 4a^2\sin^2 2t[(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t] =$$

$$= 4a^2\sin^2 2t\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t\right) = 4a^2\sin^2 2t\left[1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2t)\right] =$$

$$= 2a^2\sin^2 2t(1 + \cos^2 2t);$$

$$dl = a\sqrt{2}\sin 2t\sqrt{1 + \cos^2 2t}\,dt; \quad l(\Gamma) = a\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 + \cos^2 2t}\sin 2t dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1 + y^2}\,dy = \sqrt{2}a\int_0^1\sqrt{1 + y^2}\,dy =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\left[y\sqrt{1 + y^2} + \ln(y + \sqrt{1 + y^2})\right]_0^1 = a + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1 + \sqrt{2}). \ ▷$$

$\triangleleft$ Дуга Γ є бієктивним відображенням відрізка $[0; 0,5\pi]$ $(x > 0, y > 0)$. Тоді, використовуючи формули для параметрично заданої кривої, знайдемо

$$x'(t) = -4a\cos^3 t\sin t; \qquad y'(t) = 4a\sin^3 t\cos t;$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 16a^2\cos^6 t\sin^2 t + 16a^2\sin^6 t\cos^2 t =$$

$$= 16a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^4 t + \sin^4 t) =$$

$$= 4a^2\sin^2 2t[(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t] =$$

$$= 4a^2\sin^2 2t\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t\right) = 4a^2\sin^2 2t\left[1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2t)\right] =$$

$$= 2a^2\sin^2 2t(1 + \cos^2 2t);$$

$$dl = a\sqrt{2}\sin 2t\sqrt{1 + \cos^2 2t}\,dt; \quad l(\Gamma) = a\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 + \cos^2 2t}\sin 2t dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1 + y^2}\,dy = \sqrt{2}a\int_0^1\sqrt{1 + y^2}\,dy =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\left[y\sqrt{1 + y^2} + \ln(y + \sqrt{1 + y^2})\right]_0^1 = a + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1 + \sqrt{2}). \ \triangleright$$

Завдання 5

Довести, що дуга Γ, яка описується неперервною функцією на $[a; b]$, не є спрямлюваною на $[a; b]$. Вказати поділ, при якому $\underset{a}{\overset{b}{v}} f \to \infty$ при $\lambda \to 0$ і $f(x) \notin BV[a; b]$.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{7}\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $[a; b] = [0; 1]$;

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $[a; b] = [0; 2]$;

3. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{2x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $[a;b]=[0;1]$;

4. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}\sin\dfrac{\pi}{2x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $[a;b]=[0;2]$;

5. $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{4x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $[a;b]=[0;1]$;

6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{6}\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $[a;b]=[0;2]$;

7. $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $[a;b]=[0;1]$;

8. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $[a;b]=[0;2]$;

9. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $[a;b]=[0;1]$;

10. $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $[a;b]=[0;1]$;

11. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $[a;b]=[0;1]$;

12. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{\pi}{x^3}, x\neq 0, \\ 0, \qquad x=0, \end{cases}$ $[a;b]=[0;1]$;

13. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{\pi}{x^2}, \quad x\neq 0 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}$ $[a;b]=[0;1]$;

14. $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, x\neq 0, \\ 0, \qquad x=0, \end{cases}$ $[a;b]=[0;1]$;

15. $f(x)=\begin{cases} (x-2)\sin\dfrac{\pi}{2(x-2)}, \ x\neq 2, \\ 0, \qquad x=2, \end{cases}$ $[a;b]=[2;3]$.

16. З'ясувати, для яких значень параметрів α і β дуга Γ, яка описується функцією

$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, \quad x\neq 0, \\ 0, \qquad x=0, \end{cases}$ спрямлюється на $[0;1]$.

17. Змінна точка $M(x;y)$ описує відрізок прямої $y=x$, причому

$x=\begin{cases} t\sin\dfrac{1}{t}, \quad t\neq 0, \\ 0, \qquad t=0, \end{cases}$ $y=\begin{cases} t\sin\dfrac{1}{t}, \quad t\neq 0, \\ 0, \qquad t=0, \end{cases}$ $t\in[0;1]$.

Відрізок прямої від точки $A(a;a)$ $(t=0)$ до точки $B(b;b)$ $(t=1)$, де $a=\min\limits_{0<t\leq 1}\left(t\sin\dfrac{1}{t}\right)$, $b=\max\limits_{0<t\leq 1}\left(t\sin\dfrac{1}{t}\right)$, завжди має скінченну довжину. Проте дуга, яка задана параметрично, не спрямлюється. Пояснити цю з першого погляду суперечність.

18. Довести, що за умови обмеженості $f'(x)$ на $[0;1]$, графік функції $y = f(x)$ є кривою, яка спрямлюється на $[0;1]$

19. Довести, що за умови існування і обмеженості $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ на $[0;1]$, крива $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ спрямлюється на $[0;1]$.

20. Довести, що крива, яку описує функція $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ спрямлюється на $[0;1]$.

21. Довести, що крива, яку описує функція $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ спрямлюється на $[0;1]$.

Завдання 6

Знайти довжину кривої, якщо

1. $\Gamma : x = \dfrac{t^6}{6}, y = 2 - \dfrac{t^4}{4}$, яка лежить у 1-й чверті і відтинається осями координат.

2. $\Gamma : x = 3(\cos t + \ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}), y = 3\sin t$, яка лежить між точками, що відповідають значенням параметра $t_1 = \pi/2$ та $t_2 = 2\pi/3$.

3. $\Gamma : x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t,\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t,$ яка лежить між точками, що відповідають значенням параметра $t_1 = 0$ та $t_2 = \pi$.

4. $\Gamma : y = a\ln\dfrac{a^2}{a^2 - x^2}$, яка лежить між точками, що мають абсциси $x_1 = 0$ та $x_2 = a/2$, $a > 0$.

5. $\Gamma : y = \ln\cos x$, яка лежить між точками, що мають абсци-си $x_1 = 0$ і $x_2 = \pi/4$.

6. $\Gamma: y = \ln\sin(x-1)$, яка лежить між точками, що мають абсциси $x_1 = 1 + (\pi/3)$ та $x_2 = 1 + (2\pi/3)$.

7. $\Gamma: y = \ln x$, яка лежить між точками, що мають ординати $y_1 = \ln\sqrt{3}$ та $y_2 = \ln\sqrt{8}$.

8. $\Gamma: y = \ln\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, яка лежить між точками, що мають абсциси $x_1 = a$ і $x_2 = b$ $(b > a > 0)$.

9. $\Gamma: y = \dfrac{1}{2}e^{2x}$, яка лежить між точками, що мають абсциси $x_1 = 0$ та $x_2 = 1$.

10. $\Gamma: y^2 = \dfrac{4}{9}(2-x)^3$, яка відтинається від неї прямою $x = -1$.

11. $\Gamma: x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y^2}{2} - \ln y\right)$, яка лежить між точками з ординатами $y_1 = 1, y_2 = e$.

12. $\Gamma: \rho = e^{\alpha\varphi}$ $(\alpha \neq 0)$ від початку координат до точки $M(\varphi;\rho)$.

13. $\Gamma: y = \arcsin x \pm \sqrt{1-x^2}$.

14. $\Gamma: x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t,\ z = e^{-t}$ $(0 < t < \infty)$.

15. $\Gamma: x = t^2, y = t - \dfrac{1}{3}t^3$ (петлі цієї лінії).

16. $\Gamma: \rho = 2(1 + \cos\varphi)$.

17. $\Gamma: \rho = \sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, яка лежить між точками, що відповідають $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2$.

18. $\Gamma: y = \ln\sin x$, яка лежить між точками з абсцисами $x_1 = \pi/3, x_2 = \pi/2$.

19. $\Gamma: y = t^2 + 2,\ x = \frac{1}{3}t^3 - t,$ яка лежить між точками, що відповідають $t_1 = 0, t_2 = 3.$

20. $\Gamma: x = e^t \cos t, y = e^t \sin t,$ яка лежить між точками, що відповідають $t_1 = 0, t_2 = \ln \pi.$

21. $\Gamma: \rho = a(1 - \cos\varphi) \quad (a > 0).$

22. $\Gamma: y = \ln x,$ яка лежить між точками з абсцисами $x_1 = \sqrt{3},$ $x_2 = 2\sqrt{2}.$

23. $\Gamma: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (a > 0).$

24. $\Gamma: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ (першої арки).

25. $\Gamma: y^2 = x^3,$ яка відтинається від неї прямою $x = 4/3.$

26. $\Gamma: x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t \quad (a > 0).$

27. Показати, що довжина дуги еліпса $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ дорівнює довжині одного періоду синусоїди $y = \sin x.$

28. На циклоїді $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0)$ знайти точку, яка ділить довжину дуги однієї арки у співвідношенні $1:3.$

29. Знайти криву, довжина якої l між точками з абсцисами $x_1 = 0$ і $x_2 = x$ дорівнює $l = \int_0^x \sqrt{\frac{2 - x^2}{1 - x^2}}dx.$

30. Пряма $x = t \quad (t > 0)$ перетинає криві $y = a\,\mathrm{sh}\frac{x}{2}$ і $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{2}$ $(a > 0)$ відповідно в точках M_1 і M_2, а вісь Ox – у точці M. Показати, що довжина відрізка MM_1 дорівнює довжині дуги кривої $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a},$ яка лежить між точками $T(0; a)$ і $M_2.$

Завдання 7

Знайти масу (заряд), розподілену вздовж дуги Γ, якщо задана лінійна густина розподілу маси (заряду) $\gamma = \gamma(M), M \in \Gamma$.

1. Γ – відрізок прямої $y = x$ між точками $A(0;0)$ та $B(1;1)$, $\gamma(x,y) = x$.

2. Γ – верхня половина кола $x^2 + y^2 = a^2$ між точками $A(a;0)$ та $B(-a;0)$ $(a > 0)$, $\gamma(x,y) = y^2$.

3. Γ – дуга параболи $y^2 = 2x$ між точками $A(0;0)$ та $B(4;\sqrt{8})$, $\gamma(x,y) = y$.

4. Γ – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$, $\gamma(x,y) = \sqrt{2y}$.

5. Γ – дуга кривої $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 3 - t + 2\operatorname{arctg} t$ між точками, які відповідають $t_1 = 0, t_2 = 1$, $\gamma(x,y) = ye^{-x}$.

6. Γ – відрізок прямої $y = \dfrac{x}{2} - 2$ між точками $A(0;-2)$ і $B(4;0)$, $\gamma(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

7. Γ – контур прямокутника зі сторонами, які утворені прямими $x = 0, y = 0, x = 4, y = 2, \gamma(x,y) = xy$.

8. Γ – контур трикутника з вершинами у точках $O(0;0)$, $A(1;0), B(0;1)$, $\gamma(x,y) = x + y$.

9. Γ – дуга гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ від точки $A(\varphi = \sqrt{3})$ до точки $B(\varphi = 2\sqrt{2})$, $\gamma(x,y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$.

10. Γ – дуга циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ між точками $A(t = 0), B(t = 2\pi), \gamma(x,y) = y^2$.

11. Γ – дуга кривої $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(a > 0)$ між точками $A(t = 0), B(t = 2\pi)$, $\gamma(x,y) = x^2 + y^2$.

12. Г – дуга логарифмічної спіралі $\rho = ae^{k\varphi}$ $(a, k > 0)$, яка лежить всередині кола $\rho = a, \gamma(x, y) = x$.

13. Г – дуга кривої $x = t, y = \dfrac{\sqrt{8t^3}}{3}, z = \dfrac{t^2}{2}$ між точками $A(t = 0), B(t = 1)$, $\gamma(x, y, z) = xyz$.

14. Г – дуга спіралі $x = a\cos t, y = a\sin t$, $z = bt$ $(a, b > 0)$ між точками $A(t = 0)$, $B(t = 2\pi)$, $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

15. Г – коло $x^2 + y^2 = ax$ $(a > 0)$, $\gamma(x, y) = x - y$.

16. Г – коло, що є перетином поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$, $x + y + z = 0$, $\gamma(x, y, z) = x^2$.

17. Знайти координати центра мас однорідної дуги циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, $(a > 0)$, $0 \le t \le 2\pi$.

18. Знайти координати центра мас однорідного півкола $y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$.

19. Знайти координати центра мас однорідної дуги ланцюгової лінії $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ $(0 \le x \le a)$.

20. Знайти координати центра мас однорідної дуги астроїди $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ $(a > 0)$, що лежить вище осі Ox.

5. ІНТЕГРАЛ РІМАНА – СТІЛТЬЄСА

Означення. Розглянемо дві функції $f : [a; b] \to \mathbb{R}_1$ – обмежену і $\alpha : [a; b] \to \mathbb{R}_1$ – монотонну (для визначеності монотонно неспадну). Побудуємо поділ

$$P_\lambda[a;b]:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$\Delta_k = [x_k; x_{k+1}],\quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k\ (k = \overline{0, n-1}), \lambda = \max_k \Delta x_k\ , \xi_k \in \Delta_k\ ,$$

інтегральну суму Рімана – Стілтьєса

$$S_n(f,\alpha,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta\alpha(x_k), \text{ де } \Delta\alpha\left(x_k\right)=\alpha\left(x_{k+1}\right)-\alpha\left(x_k\right),$$

та верхню і нижню суми Дарбу – Стілтьєса

$$U(f,\alpha,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta\alpha(x_k), \quad L(f,\alpha,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta\alpha(x_k),$$

де $M_k=\sup\limits_{\Delta_k} f(x), \quad m_k=\inf\limits_{\Delta_k} f(x).$

Множини $\{U(f,\alpha,\lambda)\}_\lambda, \{L(f,\alpha,\lambda)\}_\lambda$ обмежені і при здрібненні поділу перша монотонно спадає, а друга – монотонно зростає, тому

$\exists \inf\limits_\lambda U(f,\alpha,\lambda)=I^*$ – верхній інтеграл Дарбу – Стілтьєса і

$\exists \sup\limits_\lambda L(f,\alpha,\lambda)=I_*$ – нижній інтеграл Дарбу – Стілтьєса.

Якщо $I^*=I_*$, тоді $f(x)$ називають *інтегровною по* $\alpha(x)$ *за Ріманом – Стілтьєсом на* $[a;b]$ і позначають $(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$

Клас функцій, інтегровних за Ріманом – Стілтьєсом по $\alpha(x)$ на $[a;b]$, позначають $RS(\alpha,\left[a;b\right])$

Теорема. Нехай $f(x)$ обмежена на $[a;b]$ і $\alpha(x)$ монотонно неспадна на $[a;b]$. Для того, щоб

$$f(x)\in RS(\alpha,\left[a;b\right]) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists P_\lambda[a;b]:$$
$$U(f,\alpha,\lambda)-L(f,\alpha,\lambda)<\varepsilon.$$

Тоді $\exists \lim\limits_{\lambda\to 0} S_n(f,\alpha,\lambda)=(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x).$

Класи функцій, інтегровних за Ріманом – Стілтьєсом.

I. Функція $f\left(x\right)\in\mathbb{C}[a;b]$, функція $\alpha\left(x\right)$ монотонно зростає на $[a;b]$.

II. Функція $f(x)$ монотонно зростає на $[a;b]$, функція $\alpha(x)$ неперервна і монотонно зростає на $[a;b]$.

III. Функція $f(x)\in\mathbb{C}[a;b]$, функція $\alpha(x)\in \mathrm{BV}[a;b]$.

IV. Функція $f(x)\in \mathrm{BV}[a;b]$, функція $\alpha(x)\in\mathbb{C}[a;b]\cap \mathrm{BV}[a;b]$.

В усіх цих випадках $\exists(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$.

Основні властивості інтеграла Рімана – Стілтьєса

B1. $(S)\int\limits_a^b d\alpha(x)=\alpha(b)-\alpha(a)$ (функція $\alpha(x)$ монотонно зростає на $[a;b]$).

B2. Функція $f(x)\in RS(\alpha_k,[a;b])$, функції $\alpha_k(x)$ монотонно неспадні, $k=1,2$, тоді

$$(S)\int\limits_a^b f(x)d(\alpha_1+\alpha_2)=(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha_1+(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha_2 .$$

B3. Функція $f(x)\in RS(\alpha,[a;b])$, і $\exists(S)\int\limits_a^c f(x)d\alpha$,

$\exists(S)\int\limits_c^b f(x)d\alpha$ ($a<c<b$). Тоді

$$(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)=(S)\int\limits_a^c f(x)d\alpha+(S)\int\limits_c^b f(x)d\alpha .$$

B4. Функції $f_1(x), f_2(x)\in RS(\alpha,[a;b])$ і виконуються умови I або II, тоді $(S)\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))d\alpha=(S)\int\limits_a^b f_1(x)d\alpha+(S)\int\limits_a^b f_2(x)d\alpha$.

B5. (*Інтегрування частинами*) Функції $f(x)\in\mathbb{C}[a;b]\cap \mathrm{BV}[a;b]$, $\alpha(x)\in \mathrm{BV}[a;b]$, тоді з існування

$(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$ випливає існування $(S)\int\limits_a^b \alpha(x)d(f(x))$

(і навпаки) і справедлива формула інтегрування частинами

$$(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = f(x)\alpha(x)\Big|_a^b - (S)\int\limits_a^b \alpha(x)d(f(x)). \quad (1)$$

Формули обчислення інтеграла Рімана – Стілтьєса

Теорема 1. Якщо $f(x) \in R[a;b]$, $\alpha(x) \in \mathbb{C}[a;b]$, $\exists\alpha'(x) \in R[a;b]$ крім, можливо, скінченного числа точок розриву I роду, тоді

$$(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = (R)\int\limits_a^b f(x)\alpha' dx. \quad (2)$$

Теорема 2. Якщо $f(x) \in \mathbb{C}[a;b]$, функція $\alpha(x)$ непе-рервна на $[a;b]$ крім, можливо, скінченного числа точок розриву I роду $\{z_k\}_{k=1}^m$ ($z_1 = a, z_m = b$) $\exists\alpha'(x)$ крім, можливо, скінченного числа точок і $\alpha'(x) \in R[a;b]$, тоді

$$(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = (R)\int\limits_a^b f(x)\alpha' dx + f(a)[\alpha(a+0) - \alpha(a)] +$$

$$+\sum_{s=2}^{m-1} f(z_k)[\alpha(z_k+0) - \alpha(z_k-0)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(b-0)]. \quad (3)$$

$(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$ випливає існування $(S)\int\limits_a^b \alpha(x)d(f(x))$

(і навпаки) і справедлива формула інтегрування частинами

$$(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x) = f(x)\alpha(x)\Big|_a^b - (S)\int\limits_a^b \alpha(x)d(f(x)). \quad (1)$$

Формули обчислення інтеграла Рімана – Стілтьєса

Теорема 1. Якщо $f(x)\in R[a;b]$, $\alpha(x)\in\mathbb{C}[a;b]$, $\exists\alpha'(x)\in R[a;b]$ крім, можливо, скінченного числа точок розриву I роду, тоді

$$(S)\int_a^b f(x)d\alpha(x)=(R)\int_a^b f(x)\alpha' dx\,. \qquad (2)$$

Теорема 2. Якщо $f(x)\in\mathbb{C}[a;b]$, функція $\alpha(x)$ неперервна на $[a;b]$ крім, можливо, скінченного числа точок розриву I роду $\{z_k\}_{k=1}^m$ ($z_1=a, z_m=b$) $\exists\alpha'(x)$ крім, можливо, скінченного числа точок і $\alpha'(x)\in R[a;b]$, тоді

$$(S)\int_a^b f(x)d\alpha(x)=(R)\int_a^b f(x)\alpha' dx+f(a)[\alpha(a+0)-\alpha(a)]+$$

$$+\sum_{s=2}^{m-1} f(z_k)[\alpha(z_k+0)-\alpha(z_k-0)]+f(b)[\alpha(b)-\alpha(b-0)]. \qquad (3)$$

Приклад 1. Знайти $\int_0^2 x^2 d\ln(1+x)$.

$\lhd$ $f(x)=x^2\in\mathbb{C}[0;2]$, $\alpha(x)=\ln(1+x)\Rightarrow\alpha'(x)=\dfrac{1}{1+x}$,

$\alpha'(x)\in\mathbb{C}[0;2]\subset R[0;2]$.

Згідно з формулою (2)

$$\int_0^2 x^2 d\ln(1+x)=(R)\int_0^2 x^2\frac{dx}{x+1}=\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right]_0^2=\ln 3. \ \rhd$$

Приклад 2. Обчислити $(S)\int\limits_{-1}^{3} x d\alpha(x)$, якщо

$$\alpha(x)=\begin{cases} 0, & x=-1, \\ 1, & -1<x<2, \\ -1, & 2\le x\le 3. \end{cases}$$

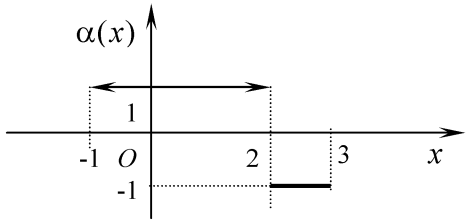

Рис. 6.

◁ Функція $f(x)=x$, функція $\alpha(x)$ має стрибки у точках $x_1=z_1=-1, x_2=z_2=2$, а у всіх інших точках є диферецій-овною. Тому, згідно з формулою (3) маємо

$$(S)\int_{-1}^{3} x d\alpha(x)=$$
$$=f(-1)[\alpha(-1+0)-\alpha(-1)]+f(2)[\alpha(2+0)-\alpha(2-0)]=$$
$$=-1\cdot(1-0)+2\cdot(-1-1)=-5. \ \triangleright$$

Приклад 3. Обчислити $(S)\int\limits_{0}^{2} e^x d\left(x\,\mathrm{sgn}\left(\cos\pi x\right)\right)$.

◁ $f(x)=e^x$, $\alpha(x)=x\,\mathrm{sgn}\left(\cos\pi x\right)$; $T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$ є пе-

ріодом функції $\alpha(x)$; $x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=\dfrac{3}{2}$ є точками розриву функції $\alpha(x)$.

Перш ніж обчислювати інтеграл, зручно спочатку побудувати графіки функцій $\mathrm{sgn}\left(\cos\pi x\right)$ і $x\,\mathrm{sgn}\left(\cos\pi x\right)$.

$$\operatorname{sgn}(\cos \pi x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1/2), \\ 0, & x = 1/2, \\ -1, & x \in (1/2;3/2), \\ 0 & x = 3/2, \\ 1, & x \in (3/2;2). \end{cases}$$

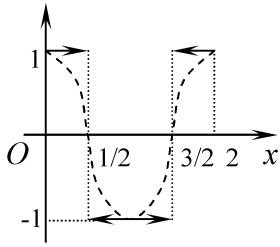

Рис. 7.

$$\alpha(x) = x\left(\operatorname{sgn}(\cos \pi x)\right) =$$

$$= \begin{cases} x, & x \in [0;1/2), \\ 0, & x = 1/2, \\ -x, & x \in (1/2;3/2), \\ 0 & x = 3/2, \\ x, & x \in (3/2;2). \end{cases}$$

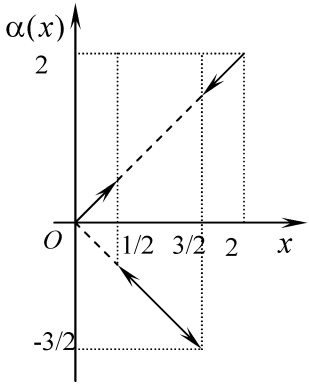

Рис. 8.

Тоді

$$(S)\int_0^2 e^x d\alpha(x) = \int_0^{1/2} e^x dx + \int_{1/2}^{3/2} e^x d(-x) + \int_{3/2}^{2} e^x dx +$$

$$+e^{1/2}\left[\alpha\left(\frac{1}{2}+0\right) - \alpha\left(\frac{1}{2}-0\right)\right] + e^{3/2}\left[\alpha\left(\frac{3}{2}+0\right) - \alpha\left(\frac{3}{2}-0\right)\right] =$$

$$= (e^{1/2} - 1) - (e^{3/2} - e^{1/2}) + (e^2 - e^{3/2}) + e^{1/2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+e^{3/2}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = \cancel{e^{1/2}} - 1 - \underline{e^{3/2}} + e^{1/2} + e^2 - \underline{e^{3/2}} - \cancel{e^{1/2}} + 3\underline{e^{3/2}} =$$

$$= e^2 - 1 + e^{3/2} + e^{1/2} = (1+e)\left(\sqrt{e} + e - 1\right). \qquad \triangleright$$

Приклад 4. Обчислити $(S)\int_{-2}^{2} x d\alpha(x)$ а) безпосередньо; б) інтегруванням частинами, якщо

$$\alpha(x)=\begin{cases} x+2, & -2\le x\le -1,\\ 2, & -1<x<0,\\ x^2+3, & 0\le x\le 2.\end{cases}$$

◁ а) $(S)\int_{-2}^{2} x d\alpha(x)=\int_{-2}^{-1} x dx+\int_{0}^{2} x2x dx+$

$+f(-1)[\alpha(-1+0)-\alpha(-1-0)]+f(0)[3-2]=$

$$=\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{-1}+2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{2}+(-1)[2-(-1+2)]+0\cdot 1=\frac{1}{2}\left(1-4\right)+\frac{2}{3}\cdot 8-1=\frac{17}{6}.$$

б) $(S)\int_{-2}^{2} x d\alpha(x)=x\alpha(x)\Big|_{-2}^{-2}-\int_{-2}^{2}\alpha(x)dx=$

$$=2(4+3)-(-2)(-2+2)-\int_{-2}^{-1}(x+2)dx-\int_{-1}^{0}2dx-\int_{0}^{2}(x^2+3)dx=$$

$$=14-\frac{1}{2}-2-\frac{8}{3}-6=\frac{11}{2}-\frac{8}{3}=\frac{17}{6}.\quad ▷$$

Приклад 5. На відрізку $[a;b]$, який лежить на осі Ox, розташовані маси, що як розподілені неперервно з лінійною густиною $\gamma(x)$, так і зосереджені в окремих точках $\{x_k\}_{k=1}^{r}$ з величинами відповідно рівними $\{m_k\}_{k=1}^{r}$. Позначимо при $x>a$ суму всіх мас $m(x)$ на проміжку $[a;x]$, при цьому вважаємо, що $m(a)=0$. Тоді статичний момент мас і момент інерції мас відносно початку координат відповідно рівні

$$M_O=(S)\int_a^b x dm(x)=(R)\int_a^b x\gamma(x)dx+\sum_{k=1}^{r}x_k m_k$$

$$I_O=(S)\int_a^b x^2 dm(x)=(R)\int_a^b x^2\gamma(x)dx+\sum_{k=1}^{r}x_k^2 m_k.$$

Записати аналітично $m(x)$, якщо відомо, що в точках $x = 1; 2; 3$ зосереджено одиничні маси, а на проміжку $[1; 3]$ маса рівномірно розподілена з густиною $\gamma(x) = 2$. Знайти статичний момент і момент інерції відносно початку координат.

$\lhd$ Покладемо $m(1) = 0$. У точках неперервності $m(x)$ маємо $m'(x) = \gamma(x) = 2$, тоді $m(x) = \int 2dx = 2x + C$.
Оскільки $m(1+0) = 1$, то $m(x) = 2x - 1$ при $1 < x < 2$.

Отже,

$$m(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ 2x - 1, & 1 < x < 2 \\ 2x, & 2 \le x < 3, \\ 7, & x = 3. \end{cases}$$

Тоді

$$M_O = \int_1^2 x2dx + \sum_{k=1}^{3} x_k m_k = x^2\Big|_1^3 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 14,$$

$$I_O = \int_1^3 x^2 2dx + 1^2\cdot 1 + 2^2\cdot 1 + 3^2\cdot 1 = \frac{2}{3}\cdot 26 + 14 = \frac{94}{3}. \quad \rhd$$

Приклад 6. У точках $x_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \ge 1)$ зосереджені маси $m_n = \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}$ $(\lambda > 0)$ і $m(x)$ – маса, що розташована на $[0; x]$, $0 \le x \le 1$. Обчислити $(S)\int_0^1 dm(x)$ і $(S)\int_0^1 xdm(x)$.

$\lhd$

$$(S)\int_0^1 dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\cdot m_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1,$$

$$(S)\int_0^1 x dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot m_n = (\text{ врахуємо, що } m(0) = 0 \text{ }) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{n(n-1)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \frac{1}{\lambda} e^{\lambda} = \frac{1}{\lambda}. \qquad \triangleright$$

Завдання 8

Обчислити $(S)\int_a^b f(x) d\alpha(x)$, якщо

1. $\alpha(x) = \begin{cases} -2, & 0 \le x < 2, \\ -1, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x = 3, \\ 3, & 3 < x < 5, \\ 2, & 5 \le x \le 7; \end{cases} \quad f(x) = 2x - 3; \quad a = 0, b = 7;$

2. $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & 2 \le x < 3, \\ -2, & x = 3, \\ 4, & 3 < x < 5, \\ 2, & 5 \le x \le 7, \end{cases} \quad f(x) = x^3 + 17x - 25; \quad a = 2, b = 7;$

3. $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 3, & 1 < x < 2, \\ 5, & 2 \le x < 3, \\ -1, & x = 3. \end{cases} \quad f(x) = x^2 + 1; \quad a = 0, b = 3;$

4. $\alpha(x)=\begin{cases} 0, & x=-1, \\ -2, & -1<x\le 0, \\ 1, & 0<x<1, \\ 3, & 1\le x<2, \\ 5, & 2\le x<3, \\ 8, & x=3. \end{cases}$ $f(x)=x^3-3x^2+6x-15;$ $a=-1, b=3;$

5. $\alpha(x)=\begin{cases} 0, & -2\le x<-1, \\ 2, & -1\le x<0, \\ -2, & 0\le x<2, \\ 4, & x=2, \end{cases}$ $f(x)=x^2-1;\quad a=-2, b=2;$

6. $\alpha(x)=\begin{cases} 1, & -2\le x<-1, \\ 3, & x=-1, \\ 2, & -1<x<1, \\ 0, & 1\le x\le 2, \end{cases}$ $f(x)=x^2-2;\quad a=-2, b=2;$

7. $\alpha(x)=\begin{cases} 1, & -1\le x<0, \\ 3, & 0\le x<1, \\ 4, & 1\le x\le 2, \end{cases}$ $f(x)=x-1;\quad a=-1, b=2;$

8. $\alpha(x)=\begin{cases} 0, & -2\le x<0, \\ 2, & 0\le x<1, \\ 3, & x=1, \\ 4, & 1<x\le 2, \end{cases}$ $f(x)=x^2-2x+1;\quad a=-2, b=2;$

9. $\alpha(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<1, \\ -1, & 1\le x<2, \\ 2, & 2\le x\le 3, \end{cases}$ $f(x)=x^2+1;\quad a=0, b=3;$

10. $\alpha(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x<0,\\ 1, & 0\le x<2,\\ 0, & 2\le x\le 3,\end{cases}\qquad f(x)=x^2;\quad a=-1, b=3;$

11. $\alpha(x)=\begin{cases}-2, & -4\le x<-1,\\ 2, & -1\le x<0,\\ 1, & x=0,\\ 0, & 0<x\le 1,\\ -3, & 1<x\le 4,\end{cases}\qquad f(x)=x^3;\quad a=-4, b=4;$

12. $\alpha(x)=\begin{cases}-3, & -2\le x<1,\\ 0, & 1\le x<2,\\ 1, & x=2,\\ 2, & 2<x\le 3,\end{cases}\qquad f(x)=x^3;\quad a=-2, b=3;$

13. $\alpha(x)=\begin{cases}0, & x=-2,\\ 2, & -2<x\le 0,\\ 4, & 0<x<1,\\ 5, & 1\le x\le 2,\end{cases}\qquad f(x)=3x-3;\quad a=-2, b=2;$

14. $\alpha(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 3, & 0<x<2,\\ 4, & 2\le x<3,\\ 6, & x=3,\end{cases}\qquad f(x)=2x+1;\quad a=0, b=3;$

15. $\alpha(x)=\begin{cases}-1, & 0\le x<1,\\ 0, & 1\le x\le 2,\\ 3, & 2<x<3,\\ 2, & x=3,\end{cases}\qquad f(x)=x^3;\quad a=0, b=3;$

16. $\alpha(x)=\begin{cases}-2, & x=-2,\\ 0, & -2<x\le -1,\\ 1, & -1<x<0,\\ 0, & 0\le x<1,\\ -2, & x=1,\end{cases}$ $f(x)=1-x^2$; $a=-2, b=1$;

17. $\alpha(x)=\begin{cases}0, & x=2,\\ 3, & 2<x\le 3,\\ 1, & 3<x<5,\\ 4, & x=5,\end{cases}$ $f(x)=3x^2+x+1$; $a=2, b=5$;

18. $\alpha(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ 3, & 1\le x<3,\\ 4, & 3\le x\le 4,\end{cases}$ $f(x)=x^2+2$; $a=0, b=4$;

19. $\alpha(x)=\begin{cases}-3, & x=0,\\ 0, & 0<x\le 1,\\ 2, & x=1,\\ -1, & 1<x<3,\\ -3, & x=3,\\ -1, & 3<x\le 4,\end{cases}$ $f(x)=e^{-x}$; $a=0, b=4$;

20. $\alpha(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x<0,\\ 0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1,\\ 2, & 1<x<2,\\ 1, & x=2,\end{cases}$ $f(x)=x^3+x+1$; $a=-1, b=2$;

21. $\alpha(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 2, & 0<x<1,\\ 5, & x=1,\\ 8, & 1<x<4,\\ 10, & x=4,\end{cases}\quad f(x)=\dfrac{x}{x^2+1};\quad a=0, b=4;$

22. $\alpha(x)=\begin{cases}-2, & x=-2,\\ 1, & -2<x<1,\\ 2, & 1\le x<3,\\ 3, & x=3,\\ 4, & 3<x\le 4,\end{cases}\quad f(x)=x^3;\quad a=-2, b=4;$

23. $\alpha(x)=\begin{cases}-3, & -3\le x<-2,\\ -1, & x=-2,\\ 0, & -2<x\le 0,\\ 1, & 0<x<1,\\ 3, & x=1,\end{cases}\quad f(x)=x^2+3;\quad a=-3, b=1;$

24. $\alpha(x)=\begin{cases}-2, & -1\le x<0,\\ 4, & x=0,\\ 1, & 0<x<1,\\ 3, & 1\le x<2,\\ 4, & x=2,\\ -1, & 2<x<3,\\ 1, & x=3,\end{cases}\quad f(x)=x^3+2x;\quad a=-1, b=3;$

$$25.\ \alpha(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x<-1,\\ -2, & x=-1,\\ 1, & -1<x\le 0,\\ 2, & 0<x<1,\\ 0, & x=1,\\ 4, & 1<x<2,\\ 0, & x=2,\end{cases}\qquad f(x)=x^2+1;\quad a=-2,\ b=2.$$

Завдання 9

Обчислити $(S)\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$: а) безпосередньо ; б) частинами, якщо

$$1.\ \alpha(x)=\begin{cases}x+1, & 1\le x<2,\\ x^2+1, & 2\le x<3,\\ 12, & x=3.\end{cases}\quad f(x)=x-1;\quad a=1, b=3;$$

$$2.\ \alpha(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1,\\ 3, & 1\le x<2,\\ x^2+1, & 2\le x\le 3.\end{cases}\quad f(x)=x-1;\quad a=0, b=3;$$

$$3.\ \alpha(x)=\begin{cases}2, & x=-1,\\ x+5, & -1<x<0,\\ 2x^2+6, & 0\le x\le 2.\end{cases}\quad f(x)=x+1;\quad a=-1, b=2;$$

$$4.\ \alpha(x)=\begin{cases}0, & x=1,\\ x+1, & 1<x\le 2,\\ x^2, & 2<x\le 3.\end{cases}\quad f(x)=x-1;\quad a=1, b=3;$$

5. $\alpha(x)=\begin{cases} x+1, & 1\le x<2, \\ 4, & 2\le x<3, \\ 2x+1, & 3\le x\le 5. \end{cases}$ $f(x)=x^3;\quad a=1, b=5;$

6. $\alpha(x)=\begin{cases} x+1, & 1\le x<2, \\ 4, & 2\le x\le 3, \\ 2x+1, & 3<x<5, \\ 12, & x=5. \end{cases}$ $f(x)=x^2;\quad a=1, b=5;$

7. $\alpha(x)=\begin{cases} 0, & x=1, \\ x^2+1, & 1<x\le 2, \\ 2x+2, & 2<x<3, \\ 9, & x=3. \end{cases}$ $f(x)=x+1;\quad a=1, b=3;$

8. $\alpha(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x<0, \\ 2x^2+2, & 0\le x<1, \\ 7, & 1\le x\le 2. \end{cases}$ $f(x)=(x-3)^2;\quad a=-1, b=2;$

9. $\alpha(x)=\begin{cases} -1, & -1\le x<0, \\ x^2, & 0\le x<1, \\ 3, & 1\le x\le 2, \\ 3x, & 2<x\le 3. \end{cases}$ $f(x)=(x+1)^2;\quad a=-1, b=3;$

10. $\alpha(x)=\begin{cases} x^2+2, & -1\le x<0, \\ x+4, & 0\le x<1, \\ 6, & 1\le x\le 2, \end{cases}$ $f(x)=x+1;\quad a=-1, b=2;$

11. $\alpha(x)=\begin{cases} x^3, & 0\le x<1, \\ 3, & 1\le x<2, \\ x^2+1, & 2\le x\le 3, \end{cases}$ $f(x)=x^2;\quad a=0, b=3;$

12. $\alpha(x)=\begin{cases} x^2+1, & 0\le x<1, \\ 5x, & 1\le x<2, \\ 18, & x=2, \end{cases}$ $f(x)=x^2;\quad a=0, b=2;$

13. $\alpha(x)=\begin{cases} -2-x, & -2\le x<-1, \\ 1-x^2, & -1\le x\le 0, \\ (x-1)^2-2, & 0<x<1, \\ 2, & x=1, \\ 2x-2, & 1<x\le 2, \end{cases}$ $f(x)=x-1;$ $a=-2, b=2;$

14. $\alpha(x)=\begin{cases} x+3, & -3\le x\le -2, \\ 1, & -2<x<0, \\ x^2+4, & 0\le x\le 3, \end{cases}$ $f(x)=x-3;\quad a=-3, b=3;$

15. $\alpha(x)=\begin{cases} x+2, & -2\le x\le -1, \\ 2, & -1<x<0, \\ x^2+5, & 0\le x\le 2. \end{cases}$ $f(x)=1+x;\quad a=-2, b=2;$

16. $\alpha(x)=\begin{cases} 0, & x=-1, \\ 2x+1, & -1<x<2, \\ x^2+3, & 2\le x\le 3, \end{cases}$ $f(x)=x;\quad a=-1, b=3;$

17. $\alpha(x)=\begin{cases} 2x+3, & -1\le x<0, \\ x^2+4, & 0\le x\le 1, \end{cases}$ $f(x)=x-1;\quad a=-1, b=1;$

18. $\alpha(x)=\begin{cases} 0, & x=-2, \\ x+3, & -2<x<-1, \\ 4, & -1\le x<0, \\ x^2+6, & 0\le x\le 2, \end{cases}$ $f(x)=1-x;\quad a=-2, b=2;$

19. $\alpha(x)=\begin{cases} x^3+1, & 0\le x<1, \\ 5x, & 1\le x<2, \\ 12, & x=2, \end{cases}$ $f(x)=x^2-1;\quad a=0, b=2$;

20. $\alpha(x)=\begin{cases} x+2, & -3\le x<-2, \\ 1, & -2\le x<2, \\ x^2+1, & 2\le x\le 3, \end{cases}$ $f(x)=x+1;\quad a=-3, b=3$;

21. $\alpha(x)=\begin{cases} x+3, & -3\le x\le -2, \\ 1, & -2<x<0, \\ x^2+4, & 0\le x\le 3, \end{cases}$ $f(x)=x-3;\quad a=-3, b=3$;

22. $\alpha(x)=\begin{cases} x+2, & 0\le x\le 1, \\ 5, & 1<x<2, \\ x^2+4, & 2\le x\le 3, \end{cases}$ $f(x)=x-1;\quad a=0, b=3$;

23. $\alpha(x)=\begin{cases} x+3, & 0\le x<2, \\ x^2+3, & 2\le x\le 3, \end{cases}$ $f(x)=x^2+1;\quad a=0, b=3$;

24. $\alpha(x)=\begin{cases} x+2, & -2\le x\le -1, \\ 2, & -1<x<0, \\ x^2+5, & 0\le x\le 2, \end{cases}$ $f(x)=1+x;\quad a=-2, b=2$;

25. $\alpha(x)=\begin{cases} 0, & x=-1, \\ 2x+1, & -1<x<2, \\ x^2+3, & 2\le x\le 3, \end{cases}$ $f(x)=x;\quad a=-1, b=3$.

Завдання 10

Обчислити $\int\limits_0^{2\pi} f(x)d\left(x\,\mathrm{sgn}(\sin x)\right)$, якщо

1. $f(x)=x$; 2. $f(x)=x^2$; 3. $f(x)=x^3$;
4. $f(x)=\sin x$; 5. $f(x)=\cos x$; 6. $f(x)=x-\pi$;

7. $f(x) = x + \pi$; 8. $f(x) = (x - \pi)^2$; 9. $f(x) = (x + \pi)^2$;
10. $f(x) = x - 2\pi$.

Обчислити $\int\limits_0^{\pi} f(x) d\left(x \operatorname{sgn}(\cos x)\right)$, якщо

11. $f(x) = \sin x$; 12. $f(x) = \sin \frac{3x}{2}$; 13. $f(x) = \cos x$;

14. $f(x) = \cos 2x$; 15. $f(x) = \sin 2x$; 16. $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$;

17. $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$; 18. $f(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$; 19. $f(x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2$.

Обчислити $\int\limits_0^{2\pi} f(x) d\left(x^2 \operatorname{sgn}(\sin x)\right)$, якщо

20. $f(x) = x$; 21. $f(x) = x^2$; 22. $f(x) = x^3$;
23. $f(x) = x - \pi$; 24. $f(x) = x + \pi$; 25. $f(x) = (x - \pi)^2$.

Обчислити $\int\limits_0^{\pi} f(x) d\left(x^2 \operatorname{sgn}(\cos x)\right)$, якщо

26. $f(x) = x$; 27. $f(x) = x^2$; 28. $f(x) = x^3$;

29. $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$; 30. $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$.

Завдання 11

На відрізку $[a; b]$, який лежить на осі Ox, розташовані маси, що як розподілені неперервно з густиною $\gamma(x)$, так і зосереджені в окремих точках x_k і рівні m_k $(k = \overline{1,n})$. Позначимо при $x > a$ суму всіх мас $m(x)$ на проміжку $[a; x]$ $(x \le b)$ і вважатимемо $m(a) = 0$.

а) Записати аналітичний вираз функції $m(x)$ і побудувати її графік.

б) Знайти моменти 1-го та 2-го порядків $m(x)$ відносно точки $x = 0$.

1. $a = -2, \quad b = 2; \quad \gamma(x) = 2; \quad x_k = -1; 0; 1; \quad m_k = 1; 2; 1$;
2. $a = -3, \quad b = 3; \quad \gamma(x) = 3; \quad x_k = -3; 1; 2; \quad m_k = 2; 1; 3$;
3. $a = -1, \quad b = 1; \quad \gamma(x) = 3; \quad x_k = -1; 0; 1; \quad m_k = 1; 2; 1$;
4. $a = -1, \quad b = 3; \quad \gamma(x) = 3; \quad x_k = -1; 1; 2; \quad m_k = 1; 2; 3$;
5. $a = -2, \quad b = 2; \quad \gamma(x) = 2; \quad x_k = -2; -1; 2; \quad m_k = 2; 1; 3$;
6. $a = 0, \quad b = 3; \quad \gamma(x) = 3; \quad x_k = 0; 1; 2; \quad m_k = 1; 3; 2$;
7. $a = 0, \quad b = 2; \quad \gamma(x) = 3; \quad x_k = 0; 1; 2; \quad m_k = 1; 2; 3$;
8. $a = -2, \quad b = 2; \quad \gamma(x) = 2; \quad x_k = -1; 1; 2; \quad m_k = 1; 2; 1$;
9. $a = -2, \quad b = 2; \quad \gamma(x) = 2; \quad x_k = -1; 1; 2; \quad m_k = 1; 1; 1$;
10. $a = -1, \quad b = 3; \quad \gamma(x) = 3; \quad x_k = -1; 1; 3; \quad m_k = 1; 2; 3$;
11. $a = 1, \quad b = 3; \quad \gamma(x) = 2; \quad x_k = 1; 2; 3; \quad m_k = 1; 2; 3$;
12. $a = -2, \quad b = 1; \quad \gamma(x) = 3; \quad x_k = -2; -1; 1; \quad m_k = 1; 2; 1$;
13. $a = -3, \quad b = 3; \quad \gamma(x) = 3; \quad x_k = -3; 1; 3; \quad m_k = 1; 2; 3$;
14. $a = 0, \quad b = 3; \quad \gamma(x) = 2; \quad x_k = 0; 1; 2; 3; \quad m_k = 1; 2; 1; 1$;
15. $a = 0, \quad b = 2; \quad \gamma(x) = 3; \quad x_k = 1; 2; \quad m_k = 3; 4$;
16. $a = -2, \quad b = 2; \quad \gamma(x) = 2; \quad x_k = -2; -1; 1; \quad m_k = 1; 2; 1$;
17. $a = -3, \quad b = 3; \quad \gamma(x) = 4; \quad x_k = -3; 2; 3; \quad m_k = 1; 2; 1$;
18. $a = -1, \quad b = 2; \quad \gamma(x) = 3; \quad x_k = -1; 1; 2; \quad m_k = 1; 2; 1$;
19. $a = 0, \quad b = 3; \quad \gamma(x) = x; \quad x_k = 0; 1; 2; \quad m_k = 1; 1; 1$;
20. $a = 1, \quad b = 3; \quad \gamma(x) = x; \quad x_k = 1; 2; 3; \quad m_k = 1; 2; 1$;
21. $a = 0, \quad b = 2; \quad \gamma(x) = 2x; \quad x_k = 0; 1; \quad m_k = 2; 3$;
22. $a = -1, \quad b = 2; \quad \gamma(x) = 2x; \quad x_k = -1; 0; 1; \quad m_k = 1; 2; 1$;
23. $a = -1, \quad b = 3; \quad \gamma(x) = 2x; \quad x_k = 0; 1; 2; \quad m_k = 1; 2; 2$;
24. $a = 0, \quad b = 4; \quad \gamma(x) = 2x; \quad x_k = 0; 1; 3; \quad m_k = 1; 3; 1$;
25. $a = -2, \quad b = 1; \quad \gamma(x) = 2x; \quad x_k = -2; -1; 0; \quad m_k = 1; 3; 3$.

Завдання 12

Обчислити:

1. $\int\limits_1^e \frac{d(x\,\mathrm{sgn}\cos x)}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

2. $\int\limits_0^1 \frac{x^2 d(x\,\mathrm{sgn}\cos 2x)}{(1+x^2)^2}$;

3. $\int\limits_2^3 \frac{d(x\,\mathrm{sgn}\sin 2x)}{x(1-x)}$;

4. $\int\limits_1^2 \frac{d(x\,\mathrm{sgn}\cos x)}{x+x^3}$;

5. $\int\limits_2^3 \frac{d(x\,\mathrm{sgn}\sin 2x)}{x^2-1}$;

6. $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x d\left(x\,\mathrm{sgn}\cos 2x\right)$;

7. $\int\limits_1^2 \frac{d(x\,\mathrm{sgn}\cos x)}{x^2+x}$;

8. $\int\limits_0^1 xe^{-x} d\left(x\,\mathrm{sgn}\sin 4x\right)$;

9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} d\left(x\,\mathrm{sgn}\cos 6x\right)$;

10. $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2} e^{1/x} d\left(x\,\mathrm{sgn}\cos x\right)$;

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin 2x d\left(x\,\mathrm{sgn}\cos 3x\right)$;

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x} d\left(x\,\mathrm{sgn}\cos 4x\right)$.

Відповіді

Завдання 6

1. $\frac{13}{3}$; **2.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}$; **3.** $\frac{\pi^3}{3}$; **4.** $a\left(\ln 3-\frac{1}{2}\right)$; **5.** $\ln \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$; **6.** $\ln 3$;

7. $1+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}$; **8.** $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$;

9. $\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+e^4}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{1+e^4}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{1+e^4}\right)}\right]$; **10.** $\frac{28}{3}$.

11. $\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$; **12.** $\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{|\alpha|}e^{\alpha\varphi}$; **13.** 8; **14.** $\sqrt{3}$; **15.** $4\sqrt{3}$; **16.** $8a$;

17. $\frac{1}{8}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$; **18.** $\frac{1}{2}\ln 3$; **19.** 12; **20.** $\frac{\sqrt{2}}{\pi-1}$; **21.** $8a$;

22. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **23.** $6a$; **24.** $8a$; **25.** $\frac{112}{27}$; **26.** $6a$;

28. $M\left(a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\frac{3a}{2}\right)$; **29.** $y=C\pm\arcsin x$.

Завдання 7

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **2.** $\frac{\pi}{2}a^2$; **3.** $\frac{26}{3}$; **4.** $4a\pi\sqrt{a}$; **5.** $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}$;

6. $\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$; **7.** 24; **8.** $1+\sqrt{2}$; **9.** $\frac{19}{3}$; **10.** $\frac{256}{15}a^3$;

11. $2\pi^2a^3\left(1+2\pi^2\right)$; **12.** $\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$; **13.** $\frac{16\sqrt{2}}{143}$;

14. $\frac{2\pi}{3}\left(3a^2+4\pi b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}$; **15.** πa^2; **16.** $\frac{2}{3}\pi a^2$;

17. $m = 8a; C\left(\pi a; \frac{4}{3}a\right)$; **18.** $C(0;2)$; **19.** $x = a\left(1 - \text{th}\frac{1}{2}\right)$,

$y = \frac{a}{4} \cdot \frac{2 + \text{sh}\,2}{\text{sh}\,1}$; **20.** $x = 0, y = \frac{2}{5}a$.

Завдання 8

1. 20; **2.** 688; **3.**–104; **4.**–22; **5.** 144; **6.** 0; **7.**–2; **8.** 1; **9.**13; **10.** –4; **11.** –7; **12.** 19; **13.** –24; **14.** 22; **15.** 25; **16.** –7; **17.** 226; **18.** 17; **19.** $3 - e^x$; **20.** 5; **21.** 8/15; **22.** 31; **23.** 32; **24.** 24; **25.** –11.

Завдання 9

1. $\frac{85}{6}$; **2.** $\frac{28}{3}$; **3.** $\frac{121}{6}$; **4.** $\frac{55}{6}$; **5.** $28{,}5$; **6.** $\frac{371}{3}$; **7.** $\frac{77}{3}$; **8.** $\frac{133}{3}$;

9. $\frac{455}{6}$; **10.** $\frac{31}{6}$; **11.** $43{,}1$; **12.** $\frac{283}{6}$; **13.** $2{,}5$; **14.** $-23{,}5$; **15.** $11\frac{5}{6}$;

16. $20\frac{2}{3}$; **17.** $-4\frac{1}{3}$; **18.** $10\frac{1}{6}$; **19.** $12\frac{4}{15}$; **20.** $\frac{163}{6}$; **21.** $-\frac{47}{2}$;

22. $\frac{61}{6}$; **23.** $\frac{313}{6}$; **24.** $\frac{71}{6}$; **25.** $\frac{62}{3}$; **26.** $\frac{251}{6}$; **27.** $\frac{245}{6}$; **28.** $\frac{184}{15}$;

29. $\frac{119}{6}$; **30.** 51.

Завдання 12.

1. $\frac{\pi}{2}$; **2.** $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$; **3.** $\ln\frac{3}{4}$; **4.** $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$; **5.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **6.** $\frac{\pi}{2} - 1$; **7.** $\ln\frac{4}{3}$;

8. $1 - \frac{2}{e}$; **9.** $\frac{1}{2}(\ln 3 - 1)$; **10.** $e - \sqrt{e}$; **11.** $\frac{2}{5}$; **12.** $\frac{\pi}{2}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дороговцев А.Я.* Математичний аналіз. Ч. 1. – К.: Либідь; 1993.–320 с.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс интегрального и дифференциального исчисления. Т. 3. – М.: Физматгиз, 1963.– 624 с.
3. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: ГИТТЛ, 1956.– 628 с.
4. *Березин Ф.А., Гвишиани А.Д., Горин Е.А., Кириллов А.А.* Сборник задач по функциональному анализу. - М.: Изд-во МГУ, 1977.– 288 с.
5. *Очан Ю.С.* Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. –М.: Просв., 1965.– 324 с.
5. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. - М.: Наука, 1980.– 340 с.
6. *Макаров И.П.* Теория функций действительного переменного. – М.: Высш. шк., 1962.– 420 с.
7. *Рудин У.* Основы математического анализа - М.: Мир, 1966.– 240 с.
8. *Фролов Н.А.* Теория функций действительного перемен-ного. - М.: Учпедгиз РСФСР, 1961.– 480 с.