НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»
Навчально-науковий фізико-технічний інститут

Кафедра математичних методів захисту інформації

«На правах рукопису»

УДК 519.21

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

__________ Сергій ЯКОВЛЄВ

«__» __________ 2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-професійною програмою
«Математичні методи криптографічного захисту інформації»

зі спеціальності: 113 Прикладна математика
на тему: **«Задача фільтрації для частково спостережуваного процесу міграції частинок в багатоурновій моделі Еренфестів»**

Виконав:
студент II курсу, групи ФІ-22 мн
Ковальчук Ольга Миронівна __________

Керівник:
к.ф.-м.н., доцент
Ніщенко Ірина Іванівна __________

Рецензент:
к.ф.-м.н., н.с. відділу теорії випадкових процесів ІМ НАНУ
Руденко Олексій Володимирович __________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент __________

Київ — 2024

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря СІКОРСЬКОГО»
Навчально-науковий фізико-технічний інститут

Кафедра математичних методів захисту інформації

Рівень вищої освіти — другий (магістерський)

Спеціальність — 113 Прикладна математика,

ОПП «Математичні методи криптографічного захисту інформації»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ Сергій ЯКОВЛЄВ

«__» __________ 2024 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію

Студент: Ковальчук Ольга Миронівна

1. Тема роботи: «*Задача фільтрації для частково спостережуваного процесу міграції частинок в багатоурновій моделі Еренфестів*», науковий керівник дисертації: к.ф.-м.н., доцент Ніщенко Ірина Іванівна,

затверджені наказом по університету №__ від «__» __________ 2024 р.

2. Термін подання студентом роботи: «__» __________ 2024 р.

3. Об’єкт дослідження: багатоурнова модель Еренфестів, в якій динаміка частинок є лише частково спостережуваною.

4. Предмет дослідження: оптимальна оцінка розподілу частинок в неспостережуваній частині урн за заданим розподілом частинок в спостережуваній частині урн.

5. Перелік завдань:

1) Побудувати ланцюги Маркова, якими описується система на мікроскопічному рівні та на макроскопічному рівні, та знайти їхні інваріантні розподіли;

2) Знайти гауссівську апроксимацію для процесу міграції частинок;

3) Розв'язати за допомогою фільтра Калмана-Бьюсі задачу фільтрації.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: презентація доповіді.

7. Орієнтовний перелік публікацій: Публікація в збірнику «Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики: матеріали XXII Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (13-17 травня 2024 р., м. Київ, Україна)»

8. Дата видачі завдання: 10 вересня 2023 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання	Примітка
1	Узгодження теми роботи із науковим керівником	01-15 вересня 2023 р.	Виконано
2	Огляд опублікованих джерел за тематикою дослідження	Вересень-жовтень 2023 р.	Виконано
3	Побудова ланцюгів Маркова, якими описується система на мікроскопічному рівні та на макроскопічному рівні, та знаходження їхніх інваріантних розподілів	Листопад-грудень 2023 р.	Виконано
4	Знаходження гауссівської апроксимації для процесу міграції частинок	Січень-лютий 2024 р.	Виконано
5	Розв'язання за допомогою фільтра Калмана-Бьюсі задачі фільтрації	Березень-квітень 2024 р.	Виконано

Студент ____________ Ольга Ковальчук

Керівник ____________ Ірина Ніщенко

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота містить: 49 стор., 12 джерел літератури.

У роботі розв'язано задачу фільтрації для частково спостережуваного процесу міграції частинок в багатоурновій моделі Еренфестів. У першому розділі наведено два способи опису динаміки частинок в цій моделі – на мікроскопічному рівні та на макроскопічному рівні. Побудовано ланцюги Маркова, які описують еволюцію в кожному з випадків, і знайдено їхні інваріантні розподіли.

У другому розділі запропоновано гауссівську апроксимацію для макроскопічної моделі. Необхідність в такій апроксимації зумовлена тим, що кількість частинок є настільки великою, що спостереження значних змін в розподілі частинок можливе лише в масштабі часу, співмірному з кількістю частинок.

У третьому розділі розв'язано задачу фільтрації для частково спостережуваного процесу міграції частинок в багатоурновій моделі Еренфестів. А саме, вважаючи, що перші K з M урн є недоступними для спостережень, ми знаходимо умовний розподіл частинок в цих урнах в момент часу t за інформацією про розподіл частинок в урнах $K+1,\ldots,M$ в моменти часу $0,1,\ldots,t$.

Метою роботи є розв'язати задачу фільтрації для багатоурнової моделі Еренфестів з частково спостережуваною динамікою частинок.

Об'єктом дослідження є багатоурнова модель Еренфестів, в якій динаміка частинок є лише частково спостережуваною.

Предметом дослідження є оптимальна оцінка розподілу частинок в неспостережуваній частині урн за заданим розподілом частинок в спостережуваній частині урн.

ЛАНЦЮГ МАРКОВА, БАГАТОУРНОВА МОДЕЛЬ ЕРЕНФЕСТІВ, ЗАДАЧА ФІЛЬТРАЦІЇ, ГАУССІВСЬКА АПРОКСИМАЦІЯ, ФІЛЬТР КАЛМАНА-БЬЮСІ

ABSTRACT

The qualification work contains: 49 pages, 12 literature sources.

The paper solves the problem of filtering for the partially observed process of particle migration in the multi-urn Ehrenfest model. In the first chapter, two ways of describing the dynamics of particles in this model are given - at the microscopic level and at the macroscopic level. Markov chains describing the evolution in each of the cases were constructed, and their invariant distributions were found.

In the second section, the Gaussian approximation for the macroscopic model is proposed. The need for such an approximation is due to the fact that the number of particles is so large that the observation of significant changes in the distribution of particles is possible only on a time scale commensurate with the number of particles.

In the third section, the problem of filtering for the partially observed process of particle migration in the multi-urn Ehrenfest model is solved. Namely, assuming that the first K of M urns are not available for observation, we find the conditional distribution of particles in these urns at time t based on the information about the distribution of particles in $K+1, \dots, M$ at time points $0, 1, \dots, t$.

The aim of the work is to solve the filtering problem for the multi-urn Ehrenfest model with partially observed particle dynamics.

The object of research is the Ehrenfest multi-urn model, in which the dynamics of particles is only partially observable.

The subject of research is the optimal estimation of the distribution of particles in the unobserved part of the urn according to the given distribution of particles in the observed part of the urn.

MARKOV CHAIN, MULTI-URN EHRENFEST MODEL, FILTERING PROBLEM, GAUSSIAN APPROXIMATION, KALMAN-BUCY FILTER

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Багатоурнові моделі Еренфестів активно досліджуються і застосовуються в багатьох галузях. Їх використовують і для розв'язування задач у фізиці, і при моделюванні мереж та черг в системах обслуговування, і для опису моделі поширення інфекційних хвороб. Тому роз'язання задачі фільтрації для багатоурнової моделі Еренфестів є актуальною задачею.

Метою дослідження є розв'язати задачу фільтрації для багатоурнової моделі Еренфестів з частково спостережуваною динамікою частинок. Для досягнення мети необхідно розв'язати **задачу дослідження**, яка полягає у тому, щоб побудувати оцінку розподілу частинок у неспостережуваній частині урн на основі інформації про розподіл частинок у спостережуваній частині урн. Для розв'язання задачі необхідно вирішити такі завдання:

1) провести огляд опублікованих джерел за тематикою дослідження;

2) побудувати ланцюги Маркова, якими описується система на мікроскопічному рівні та на макроскопічному рівні, та знайти їхні інваріантні розподіли;

3) знайти гауссівську апроксимацію для процесу міграції частинок;

4) розв'язати за допомогою фільтра Калмана-Бьюсі задачу фільтрації.

Об'єктом дослідження є багатоурнова модель Еренфестів, в якій динаміка частинок є лише частково спостережуваною.

Предметом дослідження є оптимальна оцінка розподілу частинок в неспостережуваній частині урн за заданим розподілом частинок в спостережуваній частині урн.

При розв'язанні поставлених завдань використовувались такі *методи дослідження*: методи теорії імовірностей та теорії випадкових процесів.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що вперше було розглянуто задачу фільтрації для багатоурнової моделі Еренфестів, а також запропоновано використати гауссівську апроксимацію для її розв'язання.

Практичне значення результатів полягає в тому, що вони можуть бути застосовані при моделюванні мереж, в яких виникає необхідність в розв'язуванні задачі фільтрації через велику розгалуженість мережі.

Апробація результатів та публікації. Частину результатів, одержаних в ході виконання дослідження, було представлено на XXII Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики» (13-17 травня 2024 р., м. Київ, Україна) та опублікована в [11].

1 ЛАНЦЮГИ МАРКОВА, ПОВ'ЯЗАНІ З ПРОЦЕСОМ МІГРАЦІЇ ЧАСТИНОК В БАГАТОУРНОВІЙ МОДЕЛІ ЕРЕНФЕСТІВ

У цьому розділі ми зробимо огляд літератури за тематикою роботи. Потім розглянемо два способи опису динаміки руху частинок в багатоурновій моделі Еренфестів. Цю еволюцію ми опишемо ланцюгами Маркова, знайдемо їхні матриці перехідних імовірностей та інваріантні розподіли.

1.1 Дослідження, пов'язані з моделлю Еренфестів

Класична модель Еренфестів була запропонована Полем та Тетяною Еренфестами як модель дифузії молекул газу через мембранну перегородку в певній ємності. Модель описується наступним чином: в початковий момент часу N частинок розподілено між двома урнами I та II. На кожному кроці рівномірно випадковим чином обирається частинка із однієї із урн та переноситься в іншу урну. Марк Кац, який досліджував цю модель, встановив, що при довільному початковому розподілі системи існує її стаціонарний розподіл, який співпадає з біноміальним.

Одне із перших узагальнень моделі Еренфестів було запропоноване Семюелем Карліном та Джеймсом МакГрегором [1]. У їхній моделі час є неперервним, а вибір частинок відбувається в пуассонівські моменти часу. Через декілька років Дональд Іглхарт [2] розглянув модель, в якій кількість урн дорівнює $d + 1$, а ймовірності переходів між урнами залежать лише від номера урни, в яку перекладають частинку. Він довів, що розподіл частинок у такій моделі збігається до процесу Орнштейна–Уленбека при зростанні кількості частинок до нескінченності.

У 1999 році Ґодрече та Лак [3] досліджували модель Backgammon, яка належить до класу «термодинамічних урнових моделей». Ця модель узагальнює класичну модель Еренфестів у двох напрямках. Перше узагальнення полягає у тому, що частинки тепер мають енергію. Переміщення можливе з ймовірністю 1, якщо кількість енергії залишається незмінною або зменшується. Якщо ж кількість енергії збільшується на величину ΔE, то ймовірність переміщення частинки дорівнює $exp\{-\beta\Delta E\}$. Для моделі Backgammon кількість енергії обирають рівною кількості порожніх урн зі знаком мінус. Друга відмінність запропонованої моделі полягає у тому, що розглядається вже M урн, причому кількість урн та частинок одночасно прямують до нескінченності, тобто розглядається термодинамічна границя.

У 2003 році Йі-Моу Као та Пі-Ган Луан [4] запропонували так звану «періодичну урнову модель». У цій моделі розглядається N частинок, які розподілені в M урнах. Ці M урн розташовані по колу та пронумеровані, утворюючи цикл. Тобто $(M+1)$-а урна – це, насправді, 1-ша урна. На кожному кроці рівномірно випадковим чином обирається частинка із однієї із урн та переноситься в урну із наступним номером. Автори виявили, що середня кількість кульок у певній урні коливається кілька разів, перш ніж досягне стаціонарного значення. Као та Луан також обчислили цикл Пуанкаре, тобто середній інтервал часу, необхідний для повернення системи до початкової конфігурації.

У 2015 році Джеймі Кларк, Мігель Ківі та інші [5] дослідили узагальнення моделі Еренфестів для опису складних мереж. У цій модифікації розглядається набір з M вузлів, кожен з яких має $m_i(t)$ пакетів. Конкретний вузол i з'єднано з k_i вузлами, і пакети в i-му вузлі можуть переміщатися лише до k_i вузлів, до яких він підключений. За допомогою моделювання було знайдено асимптотичний розв'язок для систем, де кількість вузлів дорівнює 3 та 5. Автори також встановили для кожної системи час релаксації, тобто час, за який система досягає свого асимптотичного розв'язку. У статті було показано, як за допомогою методу середнього поля отримати ці асимптотичні розв'язки аналітично.

Основна суть цього методу полягає у тому, щоб зменшити складність аналізу великих систем шляхом заміни складної взаємодії між складовими частинками системи на середнє значення або середню характеристику цих частинок. Таке узагальнення моделі Еренфестів для складних мереж є надзвичайно корисним, оскільки за допомогою мереж можна описати рух транспорту у містах, електричні мережі, системи обслуговування тощо.

У 2020 році у статті [6] досліджували N-урнову модель Еренфестів, у якій ймовірність вибору частинки визначається деякою додатною функцією λ, яка визначена на $[0,1] \times [0,1]$. Автор виявив, що в міру того, як кількість частинок збільшується, спосіб їх розподілу стає більш передбачуваним. Такий перехід від мікроскопічного рівня (рух окремих частинок) до макроскопічного рівня (загальна поведінка системи) називається «гідродинамічною границею». У статті також було розглянуто, що відбувається, коли система не є врівноваженою, наприклад, коли в одних урнах кількість частинок більша, ніж в інших. Для цих випадків автор знайшов закономірність у тому, як кількість частинок змінюється з часом.

Одним із останніх досліджень узагальнення моделі Еренфестів є робота Ченга та Лаі [7]. Вони розширили модель Еренфестів, розглянувши урни з внутрішньоурновими взаємодіями, з'єднаними в одновимірне кільце, стрибки частинок між якими відбуваються з напрямленою швидкістю. Автори показали, що така модель забезпечує різні види рівноважних і нерівноважних станів. Незважаючи на те, що ця модель проста, вона може слугувати зручною системою для дослідження різноманітних явищ статистичної фізики, починаючи від станів рівноваги до нерівноважних стаціонарних станів, і навіть далеких від рівноваги ситуацій. Ченг та Луї помітили, що при високих швидкостях руху між урнами та помірній силі взаємодії система не досягає стійкого стану, а натомість демонструє повторюваний шаблон, який називається «граничним циклом». Якщо урн більше ніж три, то система може навіть демонструвати хаотичну поведінку. Це свідчить про те, що ця модель може допомогти ефективно досліджувати системи з різними рівнями дисбалансу.

Отже, як ми бачимо, багатоурнові моделі Еренфестів активно досліджуються і застосовуються в багатьох галузях. Їх використовують і для розв'язування задач у фізиці, і при моделюванні мереж та черг в системах обслуговування, і для опису моделі поширення інфекційних хвороб.

1.2 Опис динаміки частинок в багатоурновій моделі Еренфестів (мікроскопічний рівень)

Розглядаємо узагальнену урнову модель Еренфестів, у якій M урн та N частинок. В початковий момент часу задано розподіл частинок в урнах. В кожний наступний момент часу навмання з ймовірністю $\frac{1}{N}$ вибирається одна з N частинок. І ця частинка переміщується з урни i, в якій вона була, в урну j з ймовірністю $p_{ij} > 0$, де $\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1$ для довільного $i = \overline{1, M}$.

Введемо в розгляд N незалежних ланцюгів Маркова $\{X_1(n)\}_{n\geqslant 0}$, ..., $\{X_N(n)\}_{n\geqslant 0}$, заданих на множині станів $S = \{1, 2, \ldots, M\}$. Кожен із цих ланцюгів має матрицю перехідних імовірностей $P = (p_{ij})_{i=\overline{1,M}, j=\overline{1,M}}$. Оскільки за припущенням $p_{ij} > 0$, $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, M}$, то це означає, що кожен з ланцюгів $\{X_1(n)\}_{n\geqslant 0}, \ldots, \{X_N(n)\}_{n\geqslant 0}$ є нерозкладним і аперіодичним, а отже існує і єдиний інваріантний розподіл $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_M)$:

$$\pi = \pi P, \quad \sum_{i=1}^{M} \pi_i = 1.$$

Надалі вважатимемо, що початковим розподілом цих ланцюгів є інваріантний.

Введемо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$, які рівномірно розподілені на $\{1,\ldots,N\}$. Це означає, що $Pr\{\varepsilon_n = i\} = \frac{1}{N}$ для довільного $n \geqslant 1$ та для довільного $i = \overline{1,N}$. Визначена таким чином випадкова величина ε_n відповідає за вибір частинки на n-тому кроці.

З кожним ланцюгом $\{X_i(n)\}_{n\geqslant 0}$ пов'яжемо послідовність випадкових величин $\{L_i(n)\}_{n\geqslant 0}$ таку, що

$$L_i(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}(\varepsilon_k = i).$$

Визначена таким чином величина $L_i(n)$ веде лічбу вибору i-тої частинки протягом часу n.

Покладемо

$$x(n) = \{X_1(L_1(n)),\ \ldots,\ X_N(L_N(n))\},\quad n \geqslant 0.$$

Зауважимо, що i-та координата вектора $x(n)$ вказує на номер урни, в якій знаходиться i-та частинка в момент часу n.

Лема 1.1. *Координати вектора $x(n)$ є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами.*

Доведення. Згідно критерію незалежності координат випадкового вектора ми повинні переконатися, що

$$\varphi_{x(n)}\left(t_1,\ldots,t_N\right) = \prod_{j=1}^{N} \varphi_{X_j(L_j(n))}\left(t_j\right).$$

Обчислимо характеристичну функцію:

$$\varphi_{x(n)}\left(t_1,\ldots,t_N\right) = M\left[e^{i\sum\limits_{j=1}^{N} t_j X_j(L_j(n))}\right] =$$

$$= M\left[M\left(e^{i\sum\limits_{j=1}^{N} t_j X_j(L_j(n))}\ \middle|\ (L_1(n),\ldots,L_N(n))\right)\right].$$

Для довільного вектора $(k_1, \dots, k_N)$ з невід'ємними координатами і такими, що $\sum\limits_{j=1}^{N} k_i = n$ обчислюємо умовне математичне сподівання:

$$M\left[e^{i\sum\limits_{j=1}^{N} t_j X_j(L_j(n))} \,\middle|\, (L_1(n), \dots, L_N(n)) = (k_1, \dots, k_N) \right] =$$
$$= M\left[e^{i\sum\limits_{j=1}^{N} t_j X_j(k_j)} \,\middle|\, (L_1(n), \dots, L_N(n)) = (k_1, \dots, k_N) \right].$$

Оскільки випадкові процеси $X_1, \dots, X_N$ не залежать від випадкових величин $L_1(n), \dots, L_N(n)$ і є незалежними між собою, то за властивостями умовного математичного сподівання маємо:

$$M\left[e^{i\sum\limits_{j=1}^{N} t_j X_j(k_j)} \,\middle|\, (L_1(n), \dots, L_N(n)) = (k_1, \dots, k_N) \right] =$$
$$= M\left[e^{i\sum\limits_{j=1}^{N} t_j X_j(k_j)} \right] = \prod_{j=1}^{N} \varphi_{X_j(k_j)}\left(t_j\right).$$

Таким чином

$$\varphi_{x(n)}\left(t_1, \dots, t_N\right) = M\left(\prod_{j=1}^{N} \varphi_{X_j(L_j(n))}\left(t_j\right) \right).$$

Оскільки під знаком математичного сподівання стоїть невипадкова величина, то

$$\varphi_{x(n)}\left(t_1, \dots, t_N\right) = \prod_{j=1}^{N} \varphi_{X_j(L_j(n))}\left(t_j\right),$$

що й стверджувалося.

Тепер переконаємося, що всі координати вектора $x(n)$ однаково розподілені. Розглянемо ймовірність

$$Pr\{X_i\left(L_i(n)\right) = j\},\ j = \overline{1, M},\ i = \overline{1, N}.$$

За формулою повної імовірності отримуємо:

$$Pr\{X_i\left(L_i(n)\right) = j\} = \sum_{k=0}^{n} Pr\{L_i(n) = k\} Pr\{X_i(k) = j\}.$$

Оскільки початковий розподіл $\{X_i(n)\}$ співпадає з інваріантним, то для довільного k і для довільного $j = \overline{1, M}$ $Pr\{X_i(k) = j\} = \pi_j$, і таким чином

$$\sum_{k=0}^{n} Pr\{L_i(n) = k\} Pr\{X_i(k) = j\} = \sum_{k=0}^{n} Pr\{L_i(n) = k\} \pi_j = \pi_j \sum_{k=0}^{n} Pr\{L_i(n) = k\}.$$

Оскільки $\sum\limits_{k=0}^{n} Pr\{L_i(n) = k\} = 1$, то остаточно ми отримуємо:

$$Pr\{X_i\left(L_i(n)\right) = j\} = \pi_j,$$

що й доводить однакову розподіленість випадкових величин $X_1(L_1(n)), \ldots, X_N(L_N(n))$.

□

Лема 1.2. *Послідовність* $\{x(n)\}_{n \geqslant 0}$ *є ланцюгом Маркова на множині* $E_x = \{1, \ldots, M\}^N$ *з перехідними ймовірностями*

$$Pr\{x(n+1) = (j_1, \ldots, j_N) \mid x(n) = (i_1, \ldots, i_N)\} =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{N} \cdot \sum\limits_{k=1}^{N} p_{i_k i_k}, & \text{якщо } \vec{i} = \vec{j} \\ \frac{1}{N} \cdot p_{i_r j_r}, & \text{якщо } \vec{i} \text{ і } \vec{j} \text{ відрізняються лише r-тою координатою}, r = \overline{1, N} \\ 0, & \text{якщо } \vec{i} \text{ і } \vec{j} \text{ відрізняються більше, ніж в одній координаті} \end{cases},$$

де $\vec{i} = (i_1, \ldots, i_N) \in \{1, \ldots, M\}^N$, $\vec{j} = (j_1, \ldots, j_N) \in \{1, \ldots, M\}^N$.

Доведення. Те, що $\{x(n)\}_{n \geqslant 0}$ утворює ланцюг Маркова випливає з того, що

$$x_k(n+1) = \begin{cases} x_k(n), & \text{якщо } \varepsilon_{n+1} \neq k \\ \psi_{n+1}\left(x_k(n)\right), & \text{якщо } \varepsilon_{n+1} = k \end{cases},$$

де $\psi_n : \{1, \ldots, M\} \to \{1, \ldots, M\}$, $n \geqslant 1$ – незалежні між собою і від процесу $\{x(n)\}_{n \geqslant 0}$ випадкові відображення такі, що

$$\forall n \geqslant 1 : \; Pr\{\psi_n(1) = i_1, \ldots, \psi_n(M) = i_M\} = \prod_{k=1}^{M} p_{ki_k}.$$

Знайдемо його перехідні ймовірності $\tilde{P}$. Нам потрібно знайти ймовірності виду:

$$Pr\{x(n+1) = (j_1, \ldots, j_N) \mid x(n) = (i_1, \ldots, i_N)\}.$$

Розглянемо можливі випадки.

<u>Випадок, коли $(i_1, \ldots, i_N) = (j_1, \ldots, j_N)$</u>:

Це означає, що зміни стану не відбулося. А це в свою чергу можливо тоді, коли обрали частинку і повернули в ту ж урну, в якій вона була. Тому:

$$Pr\{x(n+1) = (i_1, \ldots, i_N) \mid x(n) = (i_1, \ldots, i_N)\} = \\ = \sum_{k=1}^{N} Pr\{\varepsilon_{n+1} = k\} \cdot p_{i_k i_k} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} p_{i_k i_k}.$$

<u>Випадок, коли $(i_1, \ldots, i_N) \neq (j_1, \ldots, j_N)$</u>:

Оскільки в кожен момент часу лише одна частинка переміщується, то $(j_1, \ldots, j_N)$ може відрізнятися від $(i_1, \ldots, i_N)$ лише в одній координаті. Тоді:

$$(j_1, \ldots, j_N) = (i_1, \; \ldots, \; i_{r-1}, \; j_r, \; i_{r+1}, \; \ldots, \; i_N), \; j_r \neq i_r.$$

Цей запис означає, що частинка з номером r перемістилася із урни i_r в урну з номером j_r.

Для довільного $r = \overline{1, N}$:

$$Pr\{x(n+1) = (i_1, \ldots, j_r, \ldots, i_N) \mid x(n) = (i_1, \ldots, i_r, \ldots, i_N)\} = \frac{1}{N} \cdot p_{i_r j_r}.$$

В загальному випадку маємо:

$$Pr\{x(n+1) = (j_1, \ldots, j_N) \mid x(n) = (i_1, \ldots, i_N)\} =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{N} \cdot \sum\limits_{k=1}^{N} p_{i_k i_k}, & \text{якщо } \vec{i} = \vec{j} \\ \frac{1}{N} \cdot p_{i_r j_r}, & \text{якщо } \vec{i} \text{ і } \vec{j} \text{ відрізняються лише r-тою координатою}, r = \overline{1, N} \\ 0, & \text{якщо } \vec{i} \text{ і } \vec{j} \text{ відрізняються більше, ніж в одній координаті} \end{cases},$$

де $\vec{i} = (i_1, \ldots, i_N)$, $\vec{j} = (j_1, \ldots, j_N)$.

Переконаємося, що матриця $\tilde{P}$ є стохастичною. Враховуючи, що вектори $\vec{i}$ та $\vec{j}$, які є двома послідовними станами ланцюга, і можуть відрізнятися лише в одній координаті, отримуємо

$$\sum_j p_{ij} = p_{\vec{i}\vec{i}} + \sum_{\vec{j} \neq \vec{i}} p_{\vec{i}\vec{j}} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} p_{i_k i_k} + \sum_{j_1 \neq i_1} p_{\vec{i}(j_1, i_2, \ldots, i_N)} + \sum_{j_2 \neq i_2} p_{\vec{i}(i_1, j_2, i_3, \ldots, i_N)} + \ldots +$$
$$+ \sum_{j_N \neq i_N} p_{\vec{i}(i_1, \ldots, i_{N-1}, j_N)} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} p_{i_k i_k} + \frac{1}{N} \sum_{j_1 \neq i_1} p_{i_1 j_1} + \frac{1}{N} \sum_{j_2 \neq i_2} p_{i_2 j_2} + \ldots + \frac{1}{N} \sum_{j_N \neq i_N} p_{i_N j_N}.$$

Згрупуємо елементи цього виразу наступним чином:

$$\left(\frac{1}{N} p_{i_1 i_1} + \frac{1}{N} \sum_{j_1 \neq i_1} p_{i_1 j_1}\right) + \left(\frac{1}{N} p_{i_2 i_2} + \frac{1}{N} \sum_{j_2 \neq i_2} p_{i_2 j_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N} p_{i_N i_N} + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i_N} p_{i_N j_N}\right)$$

Отримуємо:

$$p_{\vec{i}\vec{i}} + \sum_{\vec{j} \neq \vec{i}} p_{\vec{i}\vec{j}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{M} p_{i_1 j} + \ldots + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{M} p_{i_N j}.$$

Оскільки матриця P є стохастичною, то

$$\sum_{j=1}^{M} p_{i_1 j} = 1, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^{M} p_{i_N j} = 1.$$

Таким чином:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M} p_{i_1 j} + \ldots + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M} p_{i_N j} = \underbrace{\frac{1}{N}\cdot 1 + \ldots + \frac{1}{N}\cdot 1}_{N\text{разів}} = \frac{1}{N}\cdot N = 1.$$

Отже, матриця $\tilde{P}$ дійсно є стохастичною.

□

Оскільки за припущенням ланцюги Маркова $\{X_1(n)\}_{n\geqslant 0}$, ..., $\{X_N(n)\}_{n\geqslant 0}$ є нерозкладними та аперіодичними, то й процес $\{x(n)\}_{n\geqslant 0}$ є нерозкладним та аперіодичним. Ми можемо легко в цьому переконатися:

Лема 1.3. *Якщо для довільних i, j $p_{ij} > 0$, то $\{x(n)\}_{n\geqslant 0}$ є нерозкладним аперіодичним ланцюгом.*

Доведення.

1) Аперіодичність

Розглянемо діагональні елементи матриці $\tilde{P}$:

$$Pr\{x(n+1) = (i_1, \ldots, i_N) \ \ | \ \ x(n) = (i_1, \ldots, i_N)\} = \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{N} p_{i_k i_k}.$$

Оскільки за умовою $p_{ii} > 0$, то маємо:

$$Pr\{x(n+1) = (i_1, \ldots, i_N) \ | \ x(n) = (i_1, \ldots, i_N)\} = \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{N} p_{i_k i_k} > 0,$$

а отже, ланцюг $\{x(n)\}_{n\geqslant 0}$ є аперіодичним.

2) Нерозкладність

Для того щоб довести, що ланцюг $\{x(n)\}_{n\geqslant 0}$ є нерозкладним, покажемо, що

$$\forall \left(i_1, \ldots, i_N\right) \text{та} \ \forall \left(j_1, \ldots, j_N\right) \ \exists r : \tilde{p}^{(r)}_{(i_1,\ldots,i_N)(j_1,\ldots,j_N)} > 0.$$

Достатньо показати, що існує хоча б один шлях зі стану $(i_1, \ldots, i_N)$ у стан $(j_1, \ldots, j_N)$, який має додатну імовірність. Розглянемо такий ланцюжок переходів довжини N:

$$(i_1, \ldots, i_N) \longrightarrow (j_1, i_2, \ldots, i_N) \longrightarrow (j_1, j_2, i_3, \ldots, i_N) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (j_1, \ldots, j_N)\,.$$

Використавши рівняння Колмогорова-Чепмена [8], отримуємо таку нерівність:

$$\begin{aligned}\tilde{p}^{(N)}_{(i_1,\ldots,i_N)(j_1,\ldots,j_N)} = Pr\{x(N) = (j_1, \ldots, j_N) \mid x(0) = (i_1, \ldots, i_N)\} \geqslant \\ \geqslant \tilde{p}_{(i_1,\ldots,i_N)(j_1,i_2,\ldots,i_N)} \cdot \tilde{p}_{(j_1,i_2\ldots,i_N)(j_1,j_2,\ldots,i_N)} \cdot \ldots \cdot \tilde{p}_{(j_1,\ldots,j_{N-1},i_N)(j_1,j_2,\ldots,j_N)} = \\ = \left(\frac{1}{N}\right)^N \cdot p_{i_1 j_1} \cdot p_{i_2 j_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_N j_N} > 0,\end{aligned}$$

що й потрібно було показати.

$\square$

Ми переконалися, що послідовність $\{x(n)\}_{n\geqslant 0}$ є нерозкладним аперіодичним ланцюгом Маркова та знайшли його перехідні ймовірності. Тепер знайдемо його інваріантний розподіл, існування і єдиність якого випливає з нерозкладності й аперіодичності ланцюга.

Лема 1.4. *Ланцюг Маркова* $\{x(n)\}_{n\geqslant 0}$ *має єдиний інваріантний розподіл*

$$\pi_x = \left(\pi_x\left(i_1, \ldots, i_N\right)\right)_{(i_1,\ldots,i_N)\in E_x}\,,$$

який має вигляд:

$$\pi_x\left(i_1, \ldots, i_N\right) = \pi_{i_1} \cdot \pi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_N},$$

де $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_M)$ *– інваріантний розподіл матриці* P.

Доведення. Треба перевірити, що для довільного $(j_1, \ldots, j_N) \in E_x$

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_N)} \pi_x (i_1, \ldots, i_N) \cdot \tilde{p}_{(i_1,\ldots,i_N)(j_1,\ldots,j_N)} = \pi_x (j_1, \ldots, j_N) \,.$$

Маємо:

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_N)} \pi_x (i_1, \ldots, i_N) \cdot \tilde{p}_{(i_1,\ldots,i_N)(j_1,\ldots,j_N)} = \pi_x (j_1, \ldots, j_N) \cdot \tilde{p}_{(j_1,\ldots,j_N)(j_1,\ldots,j_N)} + \\ + \sum_{\vec{i} \neq \vec{j}} \pi_x (i_1, \ldots, i_N) \cdot \tilde{p}_{(i_1,\ldots,i_N)(j_1,\ldots,j_N)}.$$

Оскільки в другій сумі ми підсумовуємо за всіма $\vec{i} \neq \vec{j}$, то можемо записати її елементи в залежності від того, яка координата у векторах $\vec{i}, \vec{j}$ не співпадає. Тобто друга сума записується як:

$$\sum_{\vec{i} \neq \vec{j}} \pi_x (i_1, \ldots, i_N) \cdot \tilde{p}_{(i_1,\ldots,i_N)(j_1,\ldots,j_N)} = \\ = \sum_{r=1}^{N} \sum_{i_r=1}^{M} \mathbb{I} (i_r \neq j_r) \cdot \pi_x (j_1, \ldots, i_r, \ldots j_N) \cdot \tilde{p}_{(j_1,\ldots,i_r,\ldots,j_N)(j_1,\ldots,j_r,\ldots,j_N)}.$$

Тому маємо:

$$\pi_x (j_1, \ldots, j_N) \cdot \tilde{p}_{(j_1,\ldots,j_N)(j_1,\ldots,j_N)} + \sum_{\vec{i} \neq \vec{j}} \pi_x (i_1, \ldots, i_N) \cdot \tilde{p}_{(i_1,\ldots,i_N)(j_1,\ldots,j_N)} = \\ = \pi_{j_1} \cdot \pi_{j_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{j_N} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} p_{i_k i_k} + \sum_{i_1 \neq j_1} \pi_{i_1} \cdot \pi_{j_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{j_N} \cdot \frac{1}{N} \cdot p_{i_1 j_1} + \\ + \sum_{i_2 \neq j_2} \pi_{j_1} \cdot \pi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{j_N} \cdot \frac{1}{N} \cdot p_{i_2 j_2} + \ldots + \sum_{i_N \neq j_N} \pi_{j_1} \cdot \pi_{j_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{j_{N-1}} \cdot \pi_{i_N} \cdot \frac{1}{N} \cdot p_{i_N j_N}.$$

За властивістю інваріантного розподілу маємо, що

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{M} \pi_i \cdot p_{ij}$$

Тому

$$\sum_{i\neq j}^{M}\pi_i\cdot p_{ij}=\sum_{i=1}^{M}\pi_i\cdot p_{ij}-\pi_j\cdot p_{jj}=\pi_j-\pi_j\cdot p_{jj}=\pi_j\cdot(1-p_{jj})$$

Таким чином отримуємо:

$$\pi_x\left(j_1,\ldots,j_N\right)\cdot\tilde{p}_{(j_1,\ldots,j_N)(j_1,\ldots,j_N)}+\sum_{\vec{i}\neq\vec{j}}\pi_x\left(i_1,\ldots,i_N\right)\cdot\tilde{p}_{(i_1,\ldots,i_N)(j_1,\ldots,j_N)}=$$
$$=\frac{1}{N}\cdot\pi_{j_1}\cdot\pi_{j_2}\cdot\ldots\cdot\pi_{j_N}\cdot\sum_{k=1}^{N}p_{j_kj_k}+\pi_{j_1}\cdot\pi_{j_2}\cdot\ldots\cdot\pi_{j_N}\cdot(1-p_{j_1j_1})\cdot\frac{1}{N}+$$
$$+\pi_{j_1}\cdot\pi_{j_2}\cdot\ldots\cdot\pi_{j_N}\cdot(1-p_{j_2j_2})\cdot\frac{1}{N}+\ldots+\pi_{j_1}\cdot\pi_{j_2}\cdot\ldots\cdot\pi_{j_N}\cdot(1-p_{j_Nj_N})\cdot\frac{1}{N}=$$
$$=\pi_{j_1}\cdot\pi_{j_2}\cdot\ldots\cdot\pi_{j_N}=\pi_x\left(j_1,\ldots,j_N\right).$$

$\square$

Оскільки кількість частинок в фізичних задачах, як правило, є дуже великою, то описувати динаміку руху частинок між урнами процесом $\{x(n)\}_{n\geqslant 0}$ буде доволі складно через те, що простір станів буде надто великим. Тому розглянемо інший спосіб опису багатоурнової моделі.

1.3 Мірозначний процес, що описує еволюцію розподілу частинок в урнах (макроскопічний рівень)

Нехай в початковий момент часу $t=0$ розподіл частинок задано вектором

$$\mu(0)=(\mu_1(0),\mu_2(0),\ldots,\mu_M(0)),$$

де $\mu_i(0)$ – кількість частинок в i-ій урні в початковий момент часу, $i=\overline{1,M}$.

Позначимо через

$$\mu(n)=(\mu_1(n),\mu_2(n),\ldots,\mu_M(n))$$

розподіл частинок в урнах в момент часу n. Зауважимо, що послідовність $\{\mu(n)\}_{n\geqslant 0}$ визначена на множині

$$E_\mu = \{(k_1, \ldots, k_M) : \ k_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{M} k_i = N\}.$$

Позначимо:

$$\mathcal{K}_r(\vec{i}) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{I}\left(i_j = r\right).$$

Ця величина визначає кількість координат вектора $\vec{i} = (i_1, \ldots, i_N) \in \{1, \ldots, M\}^N, \ r = \overline{1, M}$, які дорівнюють r.

Тоді можна зауважити, що $\mu(n)$ є функціоналом від $x(n)$, а саме

$$\mu(n) = \left(\mathcal{K}_1\left(x(n)\right), \mathcal{K}_2\left(x(n)\right), \ldots, \mathcal{K}_M\left(x(n)\right)\right).$$

Лема 1.5. $\{\mu(n)\}_{n\geqslant 0}$ *утворює ланцюг Маркова на множині* $E_\mu = \{(k_1, \ldots, k_M) : \ k_i \geqslant 0, \ \sum\limits_{i=1}^{M} k_i = N\}$.

Доведення. Означимо функцію $\varphi : \ E_x \to E_\mu$ наступним чином:

$$\varphi(\vec{i}) = \left(\mathcal{K}_1(\vec{i}), \ \ldots, \ \mathcal{K}_M(\vec{i})\right), \ \vec{i} \in E_x.$$

Тоді $\mu(n) = \varphi\left(x(n)\right)$. В роботі [12] було доведено теорему, яка встановлює умови, при яких функція від ланцюга Маркова є ланцюгом Маркова. Згідно з цією теоремою якщо для довільного $\vec{u} \in E_\mu$ і для довільних $\vec{i}, \ \vec{i'} \in E_x$ таких, що $\varphi(\vec{i}) = \varphi(\vec{i'})$, виконується умова

$$\sum_{\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})} \tilde{p}_{\vec{i}\vec{j}} = \sum_{\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})} \tilde{p}_{\vec{i'}\vec{j}},$$

то $\varphi\left(x(n)\right)$ є ланцюгом Маркова на E_μ. Переконаємося, що наведена умова виконується. Нехай $\vec{u} \in E_\mu$. Якщо $\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})$, то це означає, що $\vec{j}$ є деякою перестановкою вектора $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{u_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{u_2}, \ \ldots, \ \underbrace{M, \ldots, M}_{u_M})$. Припустимо, що $\varphi(\vec{i}) = \vec{v} \in E_\mu$. Якщо $\vec{u} = \vec{v}$, то це означає, що $\vec{j}$ є перестановкою вектора

$\vec{i}$, тобто співпадає з $\vec{i}$ при тотожній перестановці, або відрізняється від $\vec{i}$ щонайменше в двох координатах. Оскільки $\tilde{p}_{\vec{i}\vec{j}} = 0$, якщо $\vec{i}$, $\vec{j}$ відрізняються більше, ніж в одній координаті, то при $\vec{u} = \vec{v} = (v_1, \ldots, v_M)$

$$\sum_{\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})} \tilde{p}_{\vec{i}\vec{j}} = \tilde{p}_{\vec{i}\vec{i}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p_{i_k i_k} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{M} v_l \cdot p_{ll}.$$

Якщо $\varphi(\vec{i'}) = \varphi(\vec{i}) = \vec{v}$, то аналогічно

$$\sum_{\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})} \tilde{p}_{\vec{i'}\vec{j}} = \tilde{p}_{\vec{i'}\vec{i'}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p_{i'_k i'_k} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{M} v_l \cdot p_{ll}.$$

Отже потрібна рівність виконується.

Нехай тепер $\vec{u} \neq \vec{v}$. Тоді вектор $\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})$ не може співпадати з $\vec{i} \in \varphi^{-1}(\vec{v})$. Для того, щоб $\vec{j}$ відрізнявся від $\vec{i}$ рівно в одній координаті, повинна виконуватися умова

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{\delta}\,(-1, 1)\,,$$

де $\vec{\delta}\,(-1,1)$ – вектор довжини M, в якого лише дві координати є відмінними від нуля, причому одна з них дорівнює (-1), а інша дорівнює 1. Припустимо, що

$$u_t = v_t - 1,\ u_s = v_s + 1,\ u_k = v_k \text{ при } k \neq t,\ k \neq s.$$

Тоді оскільки $\tilde{p}_{\vec{i}\vec{j}} = \frac{1}{N} p_{i_r j_r}$ при умові, що $\vec{j}$ відрізняється від $\vec{i}$ лише r-тою координатою, то

$$\sum_{\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})} p_{\vec{i}\vec{j}} = \sum_{\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})} \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{N} p_{i_r j_r} \mathbb{I}\{(i_1, \ldots, j_r, \ldots, i_N) \in \varphi^{-1}(\vec{u})\} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N} p_{kl} v_k \cdot u_l \cdot \mathbb{I}\{k = t,\ l = s\} = \frac{1}{N} p_{ts} \cdot v_t \cdot u_s.$$

Аналогічно отримуємо, що при цих самих умовах на $\vec{u}$ та $\vec{v}$ для довільного $\vec{i'} \in \varphi^{-1}(\vec{v})$

$$\sum_{\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})} p_{\vec{i'}\vec{j}} = \frac{1}{N} p_{ts} \cdot v_t \cdot u_s.$$

Нарешті, коли $\vec{u} \neq \vec{v}$ і $\vec{u} \neq \vec{v} + \vec{\delta}(-1, 1)$, то довільний вектор $\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})$ та довільний вектор $\vec{i} \in \varphi^{-1}(\vec{v})$ відрізняються більше ніж в одній координаті, а тому

$$\sum_{\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})} p_{\vec{i}\vec{j}} = \sum_{\vec{j} \in \varphi^{-1}(\vec{u})} p_{\vec{i'}\vec{j}} = 0$$

для довільних $\vec{i}, \vec{i'} \in \varphi^{-1}(\vec{v})$.

$\square$

Лема 1.6. *Ланцюг Маркова* $\{\mu(n)\}_{n \geqslant 0}$ *має єдиний інваріантний розподіл*

$$\pi_\mu = \left(\pi_\mu \left(k_1, \ldots, k_M\right)\right)_{(k_1, \ldots, k_M) \in E_\mu},$$

який має вигляд:

$$\pi_\mu \left(k_1, \ldots, k_M\right) = \frac{N!}{k_1! \ldots k_M!} \cdot \left(\pi_1\right)^{k_1} \cdot \left(\pi_2\right)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \left(\pi_M\right)^{k_M}, \tag{1}$$

де $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_M)$ *– інваріантний розподіл матриці* P.

Доведення. Оскільки ми раніше показали, що $\{x(n)\}_{n \geqslant 0}$ є ланцюгом Маркова з єдиним інваріантним розподілом, то з ергодичної теореми [9] випливає, що:

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{I}\left(\mu(t) = (k_1, \ldots, k_M)\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{I}\left(\mathcal{K}_1\left(x(n)\right) = k_1, \ldots, \mathcal{K}_M\left(x(n)\right) = k_M\right) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{м.н.}}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{\text{м.н.}} \sum_{\substack{(i_1, \ldots, i_N) \\ 1 \leqslant i_j \leqslant M}} \mathbb{I}\left(\sum_{j=1}^{N} \mathbb{I}\left(i_j = 1\right) = k_1, \ldots, \sum_{j=1}^{N} \mathbb{I}\left(i_j = M\right) = k_M\right) \pi_{i_1} \pi_{i_2} \ldots \pi_{i_N}.$$

Зауважимо, що підсумовування ведется по послідовностям, в яких рівно k_1 разів зустрілася 1, рівно k_2 разів зустрілася 2, ..., рівно k_M разів зустрілася M. Таких послідовностей є:

$$C_{k_1,k_2,\ldots,k_M} = \begin{pmatrix} N \\ k_1, k_2, \ldots, k_M \end{pmatrix} = \frac{N!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_M!}$$

і отже:

$$\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_N) \\ 1 \leqslant i_j \leqslant M}} \mathbb{I}\left(\sum_{j=1}^{N} \mathbb{I}\left(i_j = 1\right) = k_1, \ldots, \sum_{j=1}^{N} \mathbb{I}\left(i_j = M\right) = k_M\right) \cdot \pi_{i_1} \cdot \pi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_N} =$$

$$= \frac{N!}{k_1! \ldots k_M!} \cdot (\pi_1)^{k_1} \cdot (\pi_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\pi_M)^{k_M},$$

що й стверджувалося.

$\square$

В якості прикладу розглянемо класичну модель Еренфестів для двох урн.

Приклад 1.1. Класична модель Еренфестів була запропонована як модель дифузії молекул деякого газу через мембранну перегородку в якійсь ємності. Модель описується наступним чином: N куль розподілено певним чином між двома урнами I та II. На кожному кроці рівномірно випадковим чином обирається кулька із однієї із урн та переноситься в іншу урну. Відомо, що для цієї моделі інваріантним розподілом є біноміальний з параметром $p = \frac{1}{2}$.

Скористаємося формулою, яку вивели вище.

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{I}\left(\mu_t = (K, N-K)\right) \xrightarrow[n \to \infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_N)\\ i_j\in\{1,2\}}} \mathbb{I}\left(\sum_{j=1}^{N}\mathbb{I}\left(i_j=1\right)=K, \sum_{j=1}^{N}\mathbb{I}\left(i_j=2\right)=N-K\right)\cdot\pi_{i_1}\cdot\pi_{i_2}\cdot\ldots\cdot\pi_{i_N}.$$

Індикатор $\mathbb{I}\left(\sum\limits_{j=1}^{N}\mathbb{I}\left(i_j=1\right)=K, \sum\limits_{j=1}^{N}\mathbb{I}\left(i_j=2\right)=N-K\right)$ дорівнює одиниці для послідовностей $(i_1,\ldots,i_N)$, які містять K одиниць та $(N-K)$ двійок. Таких послідовностей існує

$$C_{K,N-K}=\begin{pmatrix} N \\ \\ K, N-K\end{pmatrix}=\frac{N!}{K!\cdot(N-K)!}.$$

Тому за формулою (1) отримуємо:

$$\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_N)\\ i_j\in\{1,2\}}} \mathbb{I}\left(\sum_{j=1}^{N}\mathbb{I}\left(i_j=1\right)=K, \sum_{j=1}^{N}\mathbb{I}\left(i_j=2\right)=N-K\right)\cdot\pi_{i_1}\cdot\pi_{i_2}\cdot\ldots\cdot\pi_{i_N}=$$

$$=C_{K,N-K}\cdot\left(\pi_1\right)^K\cdot\left(1-\pi_1\right)^{N-K}.$$

Отримали біноміальний розподіл, що і очікувалося для моделі Еренфестів.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі було зроблено огляд досліджень, пов'язаних з моделлю Еренфестів, запропоновано два способи опису динаміки частинок в багатоурновій моделі Еренфестів на мікроскопічному рівні та на макроскопічному рівні. Для ланцюгів Маркова, які використовуються при описі, знайдено матриці перехідних імовірностей та інваріантні розподіли.

2 ГАУССІВСЬКА АПРОКСИМАЦІЯ ПРОЦЕСУ МІГРАЦІЇ ЧАСТИНОК В БАГАТОУРНОВІЙ МОДЕЛІ ЕРЕНФЕСТІВ

Вважаємо, що кількість частинок N є суттєво великою. В цьому випадку розраховувати на те, що ми в короткі проміжки часу будемо спостерігати якісь значні зміни в розподілах частинок по урнах не доводиться. Ми пропонуємо гауссівську апроксимацію для процесу $\{\mu(n)\}_{n\geqslant 0}$.

Покладемо для довільного $u = 0, 1, 2, \dots$ та $i = \overline{1, M}$

$$\eta_i(u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \left[\mathbb{I}\left(x_k(u) = i\right) - \pi_i\right] = \sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\mu_i(u) - \pi_i\right)$$

і сформуємо вектор

$$\eta_N(u) = (\eta_1(u), \eta_2(u), \dots, \eta_M(u)) \in \mathbb{R}^M.$$

Зауважимо, що $\eta_i(u)$ є сумою незалежних однаково розподілених випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та дисперсією $\pi_i\left(1 - \pi_i\right)$, а отже до них можемо застосувати центральну граничну теорему:

$$\eta_i(u) \xrightarrow{d} N\left(0, \pi_i\left(1 - \pi_i\right)\right), \quad i = \overline{1, M}$$

У наступній теоремі ми доводимо, що вектор $\eta_N(u)$ слабко збігається при $N \to \infty$ до вектора, що має нормальний розподіл. А саме:

Теорема 2.1. *Для довільного $u \in \mathbb{N}_0$ виконується:*

$$\eta_N(u) \xrightarrow[N\to\infty]{d} N\left(\vec{0}; R\right),$$

де R – матриця коваріації така, що

$$R_{ij} = \begin{cases} \pi_i (1 - \pi_i), & i = j \\ -\pi_i \cdot \pi_j, & i \neq j \end{cases}.$$

Доведення. За теоремою про неперервність слабка збіжність вектора $\eta_N(u)$ до випадкового вектора ξ еквівалентна поточковій збіжності відповідних характеристичних функцій.

Оскільки характеристична функція гауссового вектора з розподілом $N(\vec{m}, A)$ має вигляд

$$\varphi(t_1, \ldots, t_M) = e^{i\left(\vec{t}, \vec{m}\right) - \frac{1}{2}\left(A\vec{t}; \vec{t}\right)},$$

то нашою метою зараз є показати, що характеристична функція $\varphi_{\eta_N}(t_1, \ldots, t_M) = Me^{i\vec{t}\eta_N}$ збігається до $e^{-\frac{1}{2}\left(R\vec{t}; \vec{t}\right)}$ при $N \to \infty$, тобто що

$$\varphi_{\eta_N}(t_1, \ldots, t_M) \xrightarrow[N \to \infty]{} e^{-\frac{1}{2}\left(R\vec{t}; \vec{t}\right)}.$$

Запишемо характеристичну функцію φ_{η_N} за означенням. Маємо:

$$\varphi_{\eta_N}(t_1, \ldots, t_M) = Me^{\frac{i}{\sqrt{N}} \sum\limits_{j=1}^{M} t_j \cdot \sum\limits_{k=1}^{N} [\mathbb{I}(x_k(u) = j) - \pi_j]} = Me^{\frac{i}{\sqrt{N}} \sum\limits_{k=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{M} t_j \cdot [\mathbb{I}(x_k(u) = j) - \pi_j]}.$$

Позначимо $Y_k = \sum\limits_{j=1}^{M} t_j \cdot [\mathbb{I}(x_k(u) = j) - \pi_j] = \sum\limits_{j=1}^{M} t_j \cdot \xi_j$, де $\xi_j = [\mathbb{I}(x_k(u) = j) - \pi_j]$.

Оскільки частинки рухаються незалежно одна від одної, то згідно леми 1.1 $Y_1, Y_2, \ldots$ є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами. А тому маємо:

$$Me^{\frac{i}{\sqrt{N}} \sum\limits_{k=1}^{N} Y_k} = \left[\varphi_{Y_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right]^N.$$

Розвинемо функцію $\varphi_{Y_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ в ряд Тейлора до другого члена:

$$\varphi_{Y_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = Me^{i\frac{1}{\sqrt{N}}Y_1} = M\left(1 + \frac{i}{\sqrt{N}}Y_1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2 Y_1^2 + o\left(\frac{1}{N}\right)\right) =$$
$$= 1 + \frac{i}{\sqrt{N}}MY_1 - \frac{1}{2N}MY_1^2 + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Спершу знайдемо математичне сподівання випадкової величини Y_1:

$$MY_1 = M\left(\sum_{j=1}^{M} t_j\xi_j\right) = \sum_{j=1}^{M} t_j M\xi_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{M} t_j \cdot \left((1-\pi_j)\cdot Pr\{x_k(u)=j\} + (-\pi_j)\cdot Pr\{x_k(u)\neq j\}\right).$$

Згідно нашого припущення початковий розподіл є інваріантним. Це означає, що ймовірність виду $Pr\{x_k(u)=j\}$ не змінюється з часом, а отже $Pr\{x_k(u)=j\} = \pi_j$. Тому маємо:

$$MY_1 = \sum_{j=1}^{M} t_j \cdot \left((1-\pi_j)\cdot\pi_j + (-\pi_j)\cdot(1-\pi_j)\right) = 0$$

Оскільки $MY_1 = 0$, то величина MY_1^2 є дисперсією випадкової величини Y_1. Обчислимо цю дисперсію:

$$DY_1 = MY_1^2 = M\left(\left(\sum_{j=1}^{M} t_j\xi_j\right)^2\right) = M\left(\sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} t_j t_l \xi_j \xi_l\right) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} t_j t_l M\left(\xi_j\xi_l\right).$$

Знайдемо $M\left(\xi_j\xi_l\right)$:

$$M\left(\xi_j\xi_l\right) = M\left(\left(\mathbb{I}\left(x_k(u)=j\right)-\pi_j\right)\left(\mathbb{I}\left(x_k(u)=l\right)-\pi_l\right)\right) =$$

$$= M\left(\mathbb{I}\left(x_k(u)=j\right)\mathbb{I}\left(x_k(u)=l\right) - \pi_l\mathbb{I}\left(x_k(u)=j\right) - \pi_j\mathbb{I}\left(x_k(u)=l\right) + \pi_j\pi_l\right).$$

Враховуємо, що

$$\mathbb{I}\left(x_k(u)=j\right)\mathbb{I}\left(x_k(u)=l\right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j=l \text{ і } x_k(u)=j \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}.$$

Тому маємо:

якщо $j = l$, то:

$$M\left(\xi_j \cdot \xi_j\right) = \pi_j - \pi_j \cdot \pi_j + \pi_j \cdot \pi_j = \pi_j - \pi_j^2 = \pi_j \cdot (1 - \pi_j)$$

якщо $j \neq l$, то:

$$M\left(\xi_j \cdot \xi_l\right) = -\pi_l \cdot \pi_j - \pi_j \cdot \pi_l + \pi_j \cdot \pi_l = -\pi_l \cdot \pi_j$$

Тому остаточно дисперсія випадкової величини Y_1 дорівнює:

$$DY_1 = \sum_{j=1}^{M} t_j^2 \cdot \pi_j \cdot (1 - \pi_j) - \sum_{j=1}^{M} \sum_{l \neq j} t_j \cdot t_l \cdot \pi_j \cdot \pi_l.$$

Таким чином маємо:

$$\varphi_{Y_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = 1 - \frac{1}{2N} DY_1 + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Отже,

$$\left[\varphi_{Y_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right]^N = \left[1 - \frac{1}{2N} DY_1 + o\left(\frac{1}{N}\right)\right]^N \xrightarrow[N\to\infty]{} \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2} DY_1} = e^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} t_j^2 \cdot \pi_j \cdot (1-\pi_j) - \sum\limits_{j=1}^{M} \sum\limits_{l \neq j} t_j \cdot t_l \cdot \pi_j \cdot \pi_l\right)}.$$

Введемо матрицю R таку, що

$$R_{ij} = \begin{cases} \pi_i\left(1 - \pi_i\right), & i = j \\ -\pi_i \cdot \pi_j, & i \neq j \end{cases}.$$

Тоді остаточно маємо:

$$\left[\varphi_{Y_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right]^N \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2}\left(R\vec{t};\vec{t}\right)},$$

що і треба було показати.

$\square$

У наступній теоремі ми доводимо, що вектор виду $(\eta_N(u), \eta_N(u+1))$ слабко збігається до вектора, що має нормальний розподіл. А саме:

Теорема 2.2. *Для довільного $u \in \mathbb{N}_0$ виконується:*

$$(\eta_N(u), \eta_N(u+1)) \xrightarrow[N\to\infty]{d} N\left(\vec{0}, \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}\right),$$

де R – матриця коваріації із теореми 2.1.

Доведення. З огляду на теорему про неперервність нам потрібно показати, що:

$$\varphi_{(\eta_N(u),\eta_N(u+1))}(y_1, \ldots, y_{2M}) \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2}(\Sigma y, y)},$$

де $\Sigma = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}$.

Розіб'ємо вектор $(y_1, \ldots, y_M, \ldots, y_{2M})$ на два вектори довжини M кожний і позначимо це так

$$(y_1, \ldots, y_M, \ldots, y_{2M}) = (s_1, \ldots, s_M, t_1, \ldots, t_M).$$

Запишемо характеристичну функцію $\varphi_{(\eta_N(u),\eta_N(u+1))}$ за означенням:

$$\varphi_{(\eta_N(u),\eta_N(u+1))}(s_1, \ldots, s_M, t_1, \ldots, t_M) = Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} s_j \cdot \eta_j(u) + \sum\limits_{j=1}^{M} t_j \cdot \eta_j(u+1)\right)} =$$

$$= Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} s_j \sum\limits_{k=1}^{N}[\mathbb{I}(x_k(u)=j)-\pi_j] + \sum\limits_{j=1}^{M} t_j \sum\limits_{l=1}^{N}[\mathbb{I}(x_l(u+1)=j)-\pi_j]\right)} =$$

$$= Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} s_j \cdot \xi_j^k\right) + \sum\limits_{l=1}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} t_j \cdot \gamma_j^l\right)\right)}.$$

Введемо наступні позначення:

$$Y_k = \sum_{j=1}^{M} s_j \cdot \xi_j^k, \;\; Z_l = \sum_{j=1}^{M} t_j \cdot \gamma_j^l.$$

Тоді маємо:

$$Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} s_j \cdot \xi_j^k\right)+\sum\limits_{l=1}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} t_j \cdot \gamma_j^l\right)\right)} = Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}(Y_k+Z_k)\right)}.$$

З побудови випливає, що пари $(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2), \ldots, (Y_N, Z_N)$ є незалежними випадковими величинами. А тому маємо:

$$Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}(Y_k+Z_k)\right)} = \left[\varphi_{Y_1+Z_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right]^N$$

Розвинемо функцію $\varphi_{Y_1+Z_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ в ряд Тейлора до другого члена:

$$\varphi_{Y_1+Z_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = Me^{i\frac{1}{\sqrt{N}}(Y_1+Z_1)} =$$
$$= M\left(1 + \frac{i}{\sqrt{N}}(Y_1+Z_1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2 (Y_1+Z_1)^2 + o\left(\frac{1}{N}\right)\right) =$$
$$= 1 + \frac{i}{\sqrt{N}} M(Y_1+Z_1) - \frac{1}{2N} M(Y_1+Z_1)^2 + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Із доведення попередньої теореми ми знаємо, що $MY_1 = MZ_1 = 0$, тому $M(Y_1+Z_1) = MY_1 + MZ_1 = 0$.

Величина $M(Y_1+Z_1)^2$ є дисперсією випадкової величини $Y_1 + Z_1$. Оскільки Y_1 та Z_1 між собою не є незалежними, то дисперсія їх суми дорівнює:

$$D(Y_1+Z_1) = DY_1 + DZ_1 + 2 \cdot cov(Y_1, Z_1).$$

Із доведення попередньої теореми ми знаємо значення дисперсій DY_1 та DZ_1. Тому нам лишилося знайти значення коваріації $cov(Y_1, Z_1)$:

$$cov\left(Y_1, Z_1\right) = cov\left(\sum_{j=1}^{M} s_j \cdot \xi_j^1, \sum_{l=1}^{M} t_l \cdot \gamma_l^1\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} s_j \cdot t_l \cdot cov\left(\mathbb{I}\left(x_1(u) = j\right), \mathbb{I}\left(x_1(u+1) = l\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} s_j \cdot t_l \left[Pr\{x_1(u) = j,\ x_1(u+1) = l\} - \pi_j \cdot \pi_l\right].$$

Зауважимо, що

$$Pr\{x_1(u) = j,\ x_1(u+1) = l\} = \pi_j \cdot Pr\{x_1(u+1) = l \mid x_1(u) = j\}.$$

З'ясуємо, чому дорівнює умовна імовірність $Pr\{x_1(u+1) = l \mid x_1(u) = j\}$. Якщо $j = l$, то це означає, що або ми обрали частинку із урни j та поклали її на місце, або ми обрали частинку, яка знаходиться не в j-тій урні. Якщо ж $j \neq l$, то це означає, що ми обрали частинку із j-тої урни та переклали її до l-тої урни. Таким чином маємо:

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} s_j \cdot t_l \left[Pr\{x_1(u) = j,\ x_1(u+1) = l\} - \pi_j \cdot \pi_l\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} s_j t_l \left(\pi_j \left[\delta_{jl}\left(\frac{1}{N}p_{jj} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) + \left(1 - \delta_{jl}\right)\frac{1}{N}p_{jl}\right] - \pi_j\pi_l\right).$$

Оскільки $\frac{1}{N} \cdot p_{jj} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{1}{N} \cdot \left(1 - p_{jj}\right)$ і при $N \to \infty$

$$1 - \frac{1}{N} \cdot \left(1 - p_{jj}\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 1,$$

то отримуємо:

$$cov\left(Y_1, Z_1\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{M} s_j \cdot t_j \cdot \pi_j \left(1-\pi_j\right), & j=l \\ -\sum\limits_{j=1}^{M}\sum\limits_{l=1}^{M} s_j \cdot t_l \cdot \pi_j \cdot \pi_l, & j\neq l \end{cases}.$$

Помітимо, що в правій частині границі ми отримали матрицю R із теореми 2.1.

Остаточно маємо:

$$\varphi_{(\eta_N(u),\eta_N(u+1))}\left(y_1,\ldots,y_{2M}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2}(y,\Sigma y)},$$

де $\Sigma = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}$.

$\square$

У наступній теоремі ми доводимо, що вектор виду $(\eta_N(u), \eta_N(u+l))$, де l співмірне з N, слабко збігається до вектора, що має нормальний розподіл. А саме:

Теорема 2.3. *Для довільного $u \in \mathbb{N}_0$ виконується:*

$$(\eta_N(u), \eta_N(u+l)) \underset{\substack{N\to\infty \\ l\to\infty \\ \frac{l}{N}\to\lambda>0}}{\overset{d}{\to}} N\left(\vec{0}; \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & R \end{bmatrix}\right),$$

де R – матриця коваріації із теореми 2.1;

A – матриця коваріації така, що

$$A_{ij} = \pi_i\left(\left(e^{-\lambda(I-P)}\right)_{ij} - \pi_j\right).$$

Доведення. Для доведення цієї теореми виконуємо аналогічні дії, що й при доведенні теореми 2.2. Переконаємося, що:

$$\varphi_{(\eta_N(u),\eta_N(u+l))}\left(y_1,\ldots,y_{2M}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2}(\Sigma y,y)},$$

де $\Sigma = \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & R \end{bmatrix}$.

Поділимо вектор $(y_1, \ldots, y_M, \ldots, y_{2M})$ на два вектори, кожен з них буде мати довжину M, і позначимо це наступним чином:

$$(y_1, \ldots, y_M, \ldots, y_{2M}) = (r_1, \ldots, r_M, t_1, \ldots, t_M)\,.$$

Запишемо характеристичну функцію $\varphi_{(\eta_N(u), \eta_N(u+l))}$ згідно з її визначенням:

$$\varphi_{(\eta_N(u), \eta_N(u+l))}\,(r_1, \ldots, r_M, t_1, \ldots, t_M) = Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} r_j \cdot \eta_j(u) + \sum\limits_{j=1}^{M} t_j \cdot \eta_j(u+l)\right)} =$$

$$= Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} r_j \sum\limits_{k=1}^{N} [\mathbb{I}(x_k(u)=j) - \pi_j] + \sum\limits_{j=1}^{M} t_j \sum\limits_{s=1}^{N} [\mathbb{I}(x_s(u+l)=j) - \pi_j]\right)} =$$

$$= Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} r_j \cdot \xi_j^k\right) + \sum\limits_{s=1}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} t_j \cdot \gamma_j^s\right)\right)}.$$

Введемо наступні позначення:

$$Y_k = \sum_{j=1}^{M} r_j \cdot \xi_j^k,\ \ Z_s = \sum_{j=1}^{M} t_j \cdot \gamma_j^s.$$

Перепишемо отриманий вираз в наших нових позначеннях:

$$Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} r_j \cdot \xi_j^k\right) + \sum\limits_{s=1}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{M} t_j \cdot \gamma_j^s\right)\right)} = Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}(Y_k + Z_k)\right)}.$$

З побудови випливає, що пари $(Y_1, Z_1)\,, (Y_2, Z_2)\,, \ldots, (Y_N, Z_N)$ є незалежними випадковими величинами. Таким чином, отримуємо:

$$Me^{\frac{i}{\sqrt{N}}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}(Y_k + Z_k)\right)} = \left[\varphi_{Y_1+Z_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right]^N.$$

Розвинемо характеристичну функцію $\varphi_{Y_1+Z_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ в ряд Тейлора до другого моменту:

$$\varphi_{Y_1+Z_1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = Me^{i\frac{1}{\sqrt{N}}(Y_1+Z_1)} =$$
$$= M\left(1 + \frac{i}{\sqrt{N}}(Y_1+Z_1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2 (Y_1+Z_1)^2 + o\left(\frac{1}{N}\right)\right) =$$
$$= 1 + \frac{i}{\sqrt{N}} M(Y_1+Z_1) - \frac{1}{2N} M(Y_1+Z_1)^2 + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Із доведення теореми 2.2 маємо:

$$M(Y_1+Z_1) = 0,$$
$$D(Y_1+Z_1) = M(Y_1+Z_1)^2 = DY_1 + DZ_1 + 2 \cdot cov(Y_1, Z_1).$$

Значення DY_1 та DZ_1 нам відомі із доведення теореми 2.1. Тому нам лишилося знайти значення коваріації $cov(Y_1, Z_1)$:

$$\operatorname{cov}(Y_1, Z_1) = \operatorname{cov}\left(\sum_{j=1}^{M} r_j \cdot \xi_j^1, \sum_{s=1}^{M} t_l \cdot \gamma_s^1\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{M}\sum_{s=1}^{M} r_j \cdot t_l \cdot \operatorname{cov}\left(\mathbb{I}\left(x_1(u) = j\right), \mathbb{I}\left(x_1(u+l) = s\right)\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{M}\sum_{s=1}^{M} r_j \cdot t_s \left[Pr\{x_1(u) = j,\ x_1(u+l) = s\} - \pi_j \cdot \pi_s\right]. \quad (2)$$

Розглянемо окремо ймовірність $Pr\{x_1(u) = j,\ x_1(u+l) = s\}$. Запишемо цю сумісну ймовірність через умовну:

$$Pr\{x_1(u) = j, x_1(u+l) = s\} = Pr\{x_1(u) = j\} \cdot Pr\{x_1(u+l) = s \mid x_1(u) = j\}.$$

Згідно нашого припущення початковий розподіл є інваріантним, тому $Pr\{x_1(u) = j\} = \pi_j$.

З'ясуємо, чому дорівнює умовна імовірність. Якщо $j \neq s$, то це означає, що ми обрали частинку під номером 1 із j-тої урни та за l кроків вона потрапила в s-ту урну. Зауважимо, що в цьому випадку ми принаймні один раз обирали цю частинку. Якщо ж $j = s$, то ми або цю частинку за l кроків взагалі жодного разу не обирали, або обрали її із j-тої урни, і вона за l кроків знову опинилася в j-тій урні.

Таким чином, ми маємо:

$$Pr\{x_1(u) = j, x_1(u+l) = s\} = \pi_j \cdot \sum_{r=0}^{l} C_l^r \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^r \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{l-r} \cdot \left(P^r\right)_{js},$$

де

$\left(\frac{1}{N}\right)^r$ – ймовірність того, що ми r разів обрали частинку із номером 1;

$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{l-r}$ – ймовірність того, що решту $l-r$ разів ми обрали якусь іншу частинку;

$\left(P^r\right)_{js}$ – ймовірність переходу з j-тої урни в s-ту урну за r кроків.

Скористаємося біномом Ньютона для того, щоб обчислити отриману суму:

$$\sum_{r=0}^{l} C_l^r \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^r \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{l-r} \cdot \left(P^r\right)_{js} = \left(\left(\frac{1}{N} \cdot P + \left(1 - \frac{1}{N}\right) I\right)^l\right)_{js}.$$

Перепишемо вираз в дужках:

$$\frac{1}{N} \cdot P + \left(1 - \frac{1}{N}\right) I = I - \frac{1}{N}(I - P) = I - \frac{1}{l} \cdot \frac{l}{N}(I - P), \qquad (*)$$

При $N \to \infty,\ l \to \infty,\ \frac{l}{N} \to \lambda > 0$ вираз $(*)$ у степені l є ніщо інше як друга чудова границя, тому:

$$\left(I - \frac{1}{l} \cdot \frac{l}{N}(I - P)\right)^l \underset{\substack{N \to \infty \\ l \to \infty \\ \frac{l}{N} \to \lambda > 0}}{\longrightarrow} e^{-\lambda(I-P)}.$$

Отже, маємо:

$$Pr\{x_1(u) = j,\ x_1(u+l) = s\} = \pi_j \left[\frac{1}{N}P + \left(1 - \frac{1}{N}\right) I\right]_{js}^l \underset{\substack{N \to \infty \\ l \to \infty \\ \frac{l}{N} \to \lambda > 0}}{\longrightarrow} \pi_j \left(e^{-\lambda(I-P)}\right)_{js}.$$

Повертаючись до формули (2), остаточно отримуємо:

$$cov\left(Y_1, Z_1\right) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{s=1}^{M} r_j t_s \left[Pr\{x_1(u) = j,\ x_1(u+l) = s\} - \pi_j \pi_s\right] \underset{\substack{N\to\infty \\ l\to\infty \\ \frac{l}{N}\to\lambda>0}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{N\to\infty \\ l\to\infty \\ \frac{l}{N}\to\lambda>0}}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{M}\sum_{s=1}^{M} r_j \cdot t_s \cdot \pi_j \left(\left(e^{-\lambda(I-P)}\right)_{js} - \pi_s\right) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{s=1}^{M} r_j \cdot A_{js} \cdot t_s,$$

де $A_{js} = \pi_j \left(\left(e^{-\lambda(I-P)}\right)_{js} - \pi_s\right)$.

$\square$

Таким чином доведені нами теореми дозволяють нам при достатньо великому значенні кількості частинок N трактувати вектор $\left(\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\mu_1(n\lambda N) - \pi_1\right), \ldots, \sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\mu_M(n\lambda N) - \pi_M\right)\right)$, який задає розподіл частинок в момент часу $n\lambda N$, як гауссівський вектор з розподілом $N\left(\vec{0}, R\right)$. Більш того, подібним чином як було доведено теорему 2.3 можна показати, що для довільного $n \geqslant 0$ розподіл вектора $(\eta_N(0), \eta_N(l), \ldots, \eta_N(n \cdot l))$ збігається при $N \to \infty$, $l \to \infty$, $\frac{l}{N} \to \lambda$ до розподілу сумісно гауссових векторів. Надалі цю граничну гауссову послідовність позначатимемо $\{\theta^n\}_{n\geqslant 0}$.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі було запропоновано гауссівську апроксимацію для процесу динаміки частинок. Показано, що спостереження значних змін в розподілі частинок можливе лише в масштабі часу, співмірному з кількістю частинок.

3 ЗАДАЧА ФІЛЬТРАЦІЇ

Якщо процес міграції частинок є тільки частково спостережуваним і перші K урн недоступні для спостережень, то отримана гауссівська апроксимація дає нам можливість за допомогою теореми про нормальну кореляцію [8] знайти умовний розподіл кількості частинок в неспостережуваній частині урн відносно розподілу частинок в урнах, які є спостережуваними. Ця ж гауссівська апроксимація дозволить нам розв'язати задачу фільтрації, тобто знаходження умовного розподілу кількості частинок в перших K урнах в момент часу n за інформацією про розподіл частинок в спостережуваній частині урн в моменти часу $t = 0, 1, \ldots, n$.

Для того, щоб обґрунтувати можливість фільтрації гауссівської послідовності $\{\theta^n\}_{n\geqslant 0}$, отриманої в попередньому розділі, розглянемо наступне лінійне перетворення вектора θ^n.

Покладемо

$$\tilde{\theta}^n = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi_1}}\theta_1^n,\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi_M}}\theta_M^n\right),\ n \geqslant 0.$$

Запишемо матрицю коваріацій $\tilde{R}$ вектора $\tilde{\theta}^n$. Маємо:

$$\begin{aligned}\tilde{R} = cov\left(\tilde{\theta}^n,\ \tilde{\theta}^n\right) &= \left[\frac{1}{\sqrt{\pi_i}}R_{ij}\frac{1}{\sqrt{\pi_j}}\right]_{i,j=\overline{1,M}} = \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{\pi_i}}\left(\pi_i\delta_{ij} - \pi_i\pi_j\right)\frac{1}{\sqrt{\pi_j}}\right]_{i,j=\overline{1,M}} = \left[\delta_{ij} - \sqrt{\pi_i}\sqrt{\pi_j}\right]_{i,j=\overline{1,M}}.\end{aligned}$$

Отже $\tilde{R}$ можна подати у вигляді

$$\tilde{R} = I - \Pi_\pi,$$

де $\Pi_\pi = \left[\sqrt{\pi_i}\cdot\sqrt{\pi_j}\right]_{i,j=\overline{1,M}}$ – проєктор на підпростір, породжений одиничним вектором $e_\pi = \left(\sqrt{\pi_1},\ \ldots,\ \sqrt{\pi_M}\right)$.

Зауважимо, що з доведення теореми 2.3 випливає, що для довільного $n \geqslant 1$

$$cov\left(\theta^0,\ \theta^n\right) = \left[\pi_i \left(e^{-n\lambda(I-P)}\right)_{ij} - \pi_i\pi_j\right]_{i,j=\overline{1,M}},$$

а тоді

$$cov\left(\tilde{\theta}^0,\ \tilde{\theta}^n\right) = \left[\sqrt{\pi_i}\left(e^{-n\lambda(I-P)}\right)_{ij} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi_j}} - \pi_i\pi_j\right]_{i,j=\overline{1,M}}.$$

Якщо ввести позначення

$$S = diag\left(\frac{1}{\sqrt{\pi_1}},\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi_M}}\right),$$

то коваріаційну матрицю $cov\left(\tilde{\theta}^0,\ \tilde{\theta}^n\right)$ можна подати у вигляді

$$cov\left(\tilde{\theta}^0,\ \tilde{\theta}^n\right) = S^{-1} \cdot e^{-n\lambda(I-P)} \cdot S - \Pi_\pi.$$

Врахувавши, що для довільного $k \geqslant 0$

$$\left(S^{-1} \cdot P \cdot S\right)^k = S^{-1} \cdot P^k \cdot S,$$

отримаємо таке

$$S^{-1} \cdot e^{-n\lambda(I-P)} \cdot S = e^{-n\lambda I} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!} S^{-1} P^k S =$$
$$= e^{-n\lambda I} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \left(S^{-1}PS\right)^k = e^{-n\lambda S^{-1}(I-P)S}.$$

Таким чином, коваріаційна матриця $cov\left(\tilde{\theta}^0,\ \tilde{\theta}^n\right)$ набуває вигляду

$$cov\left(\tilde{\theta}^0,\ \tilde{\theta}^n\right) = \left(e^{-\lambda S^{-1}(I-P)S}\right)^n - \Pi_\pi.$$

Переконаємося, що підпростір $V \in \mathbb{R}^{M-1}$ перпендикулярний до вектора $e_\pi = \left(\sqrt{\pi_1},\ \ldots,\ \sqrt{\pi_M}\right)$, є інваріантним відносно матриці

$S^{-1}(I-P)S$. Для цього покажемо, що для довільного вектора $v \in V$ скалярний добуток $\left(\left[S^{-1}(I-P)S\right]v,\ e_\pi\right)$ дорівнює нулю. Справді, оскільки $S^{-1}\cdot e_\pi = \pi$ і $\left(I-P^T\right)\pi = 0$, то

$$\left(\left[S^{-1}(I-P)S\right]v,\ e_\pi\right) = \left(v,\ S\left(I-P^T\right)S^{-1}e_\pi\right) = 0,$$

що й стверджувалося.

Таким чином, якщо вектори $\tilde{\theta}^n$ розглядати як елементи підпростору $V \in \mathbb{R}^{M-1}$, то

$$cov\left(\tilde{\theta}^n,\ \tilde{\theta}^n\right) = I_{(M-1)}$$
$$cov\left(\tilde{\theta}^0,\ \tilde{\theta}^n\right) = C^n,$$

де C – звуження матриці $e^{-\lambda S^{-1}(I-P)S}$ на підпростір V, $I_{(M-1)}$ – одинична матриця розміру $[(M-1)\times(M-1)]$.

Означимо тепер послідовність $\{\xi^n\}_{n\geqslant 0}$ гауссових векторів в $\mathbb{R}^{M-1}$ наступним чином:

$$\xi^{n+1} = C\xi^n + \sqrt{I - C\cdot C^T}\cdot\varepsilon^{n+1},$$

де $\{\varepsilon^n\}_{n\geqslant 1}$ – незалежні гауссові вектори зі стандартним розподілом, незалежні від $\xi^0 \sim N(0,\ I)$. Тоді для довільного $n \geqslant 1$

$$M(\xi^n) = 0$$
$$cov(\xi^n,\ \xi^n) = I$$
$$cov\left(\xi^0,\ \xi^n\right) = C^n,$$

звідки випливає, що послідовність $\{\xi^n\}_{n\geqslant 0}$ у просторі V має такий самий розподіл, як послідовність $\{\tilde{\theta}^n\}_{n\geqslant 0}$. Тому при застосуванні теореми про нормальну кореляцію

$$\tilde{\theta}^{n+1} = C\tilde{\theta}^n + \tilde{\kappa}^{n+1}$$

доданок $\tilde{\kappa}^{n+1}$ виявляється незалежним з усіма попередніми значеннями

$\tilde{\theta}^n,\ \tilde{\theta}^{n-1},\dots$ послідовності $\{\tilde{\theta}^n\}_{n\geqslant 0}$ і

$$\tilde{\kappa}^n \overset{d}{\sim} N\left(0,\ I - C\cdot C^T\right).$$

Оскільки $\tilde{\theta}^n$ отримано з θ^n лінійним невиродженим перетворенням, то застосування теореми про нормальну кореляцію до пари $\left(\theta^n,\ \theta^{n+1}\right)$ приводить до того, що в зображенні

$$\theta^{n+1} = A^T\cdot R^{-1}\cdot\theta^n + \kappa^{n+1},$$

доданок κ^{n+1} має розподіл $N\left(\vec{0};\ R - A^T\cdot R^{-1}\cdot A\right)$ і є незалежним від послідовності $\{\theta^n\}_{n\geqslant 1}$ в попередні моменти часу.

Для зручності записів введемо наступні позначення:

$$B = A^T\cdot R^{-1},\ \ \Sigma_\kappa = R - A^T\cdot R^{-1}\cdot A.$$

Оскільки ми припускаємо, що перші K урн з M ми не бачимо і не знаємо, що в них відбувається, а ведемо спостереження лише за урнами $K+1, K+2,\dots,M$, то представимо вектор θ^n у вигляді

$$\theta^n = \left(\begin{array}{c}\alpha^n\\ \hline \beta^n\end{array}\right),$$

де α^n – вектор розмірності $[K\times 1]$, який відповідає за неспостережувану частину урн;

β^n – вектор розмірності $[(M-K)\times 1]$, який відповідає за урни, які ми спостерігаємо.

Тоді можемо записати

$$\left(\begin{array}{c}\alpha^{n+1}\\ \hline \beta^{n+1}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c}B_{11} & B_{12}\\ \hline B_{21} & B_{22}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\alpha^n\\ \hline \beta^n\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\kappa_1^{n+1}\\ \hline \kappa_2^{n+1}\end{array}\right),$$

де B_{11} – матриця розмірності $[K \times K]$;

B_{12} – матриця розмірності $[K \times (M-K)]$;

B_{21} – матриця розмірності $[(M-K) \times K]$;

B_{22} – матриця розмірності $[(M-K) \times (M-K)]$;

κ_1^{n+1} – вектор розмірності $[K \times 1]$, $n \geqslant 0$;

κ_2^{n+1} – вектор розмірності $[(M-K) \times 1]$, $n \geqslant 0$.

Для того, щоб мати змогу застосувати відомі результати теореми про фільтрацію, нам потрібно, щоб вектор похибок κ^{n+1} складався з некорельованих випадкових величин. Цього можна досягти, врахувавши, що коваріаційна матриця – це симетрична невід'ємно визначена матриця, а тому її можна подати у вигляді

$$F \cdot F^T = \Sigma_\kappa,$$

де F – нижня трикутна матриця з додатніми елементами на діагоналі.

Таким чином ми можемо представити довільний гауссівський вектор з довільною матрицею коваріації як лінійне перетворення гауссівського вектора з одиничною матрицею коваріацій.

Запишемо вектор κ^{n+1} як лінійне перетворення:

$$\kappa^{n+1} = F \cdot \varepsilon^{n+1}, \text{ де } \varepsilon^{n+1} \sim N\left(\vec{0}; I\right).$$

Таким чином ми можемо записати нашу модель у вигляді

$$\left(\begin{array}{c} \alpha^{n+1} \\ \hline \beta^{n+1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \alpha^{n} \\ \hline \beta^{n} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \varepsilon_1^{n+1} \\ \hline \varepsilon_2^{n+1} \end{array}\right).$$

Тепер вектори ε_1^{n+1} та ε_2^{n+1} є некорельованими між собою. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha^{n+1} = B_{11}\alpha^n + B_{12}\beta^n + F_{11}\varepsilon_1^{n+1} + F_{12}\varepsilon_2^{n+1} \\ \beta^{n+1} = B_{21}\alpha^n + B_{22}\beta^n + F_{21}\varepsilon_1^{n+1} + F_{22}\varepsilon_2^{n+1} \end{cases}, \tag{3}$$

до якої можна застосувати теорему про фільтрацію [10]. Розв'язок системи рекурентних рівнянь (3) називають фільтром Калмана-Бьюсі. Обчислимо цей фільтр для нашої системи рівнянь.

Введемо сігма-алгебру $\mathcal{F}_n^\beta$, яка породжена n спостереженнями до моменту часу n на спостережуваній частині урн, та позначимо через

$$m_n = M\left(\alpha^n \mid \mathcal{F}_n^\beta\right),$$
$$\gamma_n = M\left(\left(\alpha^n - m_n\right)\left(\alpha^n - m_n\right)^T \mid \mathcal{F}_n^\beta\right)$$

умовне математичне сподівання та умовну матрицю коваріації вектора α^n відносно $\mathcal{F}_n^\beta$.

Оскільки β^n є вимірною відносно сігма-алгебри $\mathcal{F}_n^\beta$, а випадкові величини ε_1^{n+1} та ε_2^{n+1} від цієї сігма-алгебри не залежать, то із (3) отримуємо:

$$\begin{aligned} M\left(\alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right) &= B_{11} \cdot m_n + B_{12} \cdot \beta^n \\ M\left(\beta^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right) &= B_{21} \cdot m_n + B_{22} \cdot \beta^n \end{aligned} \tag{4}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} - M\left(\alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right) &= B_{11}\left(\alpha^n - m_n\right) + F_{11}\varepsilon_1^{n+1} + F_{12}\varepsilon_2^{n+1} \\ \beta^{n+1} - M\left(\beta^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right) &= B_{21}\left(\alpha^n - m_n\right) + F_{21}\varepsilon_1^{n+1} + F_{22}\varepsilon_2^{n+1} \end{aligned} \tag{5}$$

Позначимо

$$d_{11}^n = cov\left(\alpha^{n+1},\ \alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right) = M\left[\left(\alpha^{n+1} - M\left(\alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right)\right)\left(\alpha^{n+1} - M\left(\alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right)\right)^T \,\Big|\, \mathcal{F}_n^\beta\right]$$
$$d_{12}^n = cov\left(\alpha^{n+1},\ \beta^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right) = M\left[\left(\alpha^{n+1} - M\left(\alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right)\right)\left(\beta^{n+1} - M\left(\beta^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right)\right)^T \,\Big|\, \mathcal{F}_n^\beta\right]$$
$$d_{22}^n = cov\left(\beta^{n+1},\ \beta^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right) = M\left[\left(\beta^{n+1} - M\left(\beta^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right)\right)\left(\beta^{n+1} - M\left(\beta^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right)\right)^T \,\Big|\, \mathcal{F}_n^\beta\right]$$

Підставимо значення із (5) у формули для d_{11}^n, d_{12}^n та d_{22}^n.

$$\begin{aligned} d_{11}^n = M\left[\left(B_{11}\left(\alpha^n - m_n\right) + F_{11}\varepsilon_1^{n+1} + F_{12}\varepsilon_2^{n+1}\right)\left(B_{11}\left(\alpha^n - m_n\right) + F_{11}\varepsilon_1^{n+1} + F_{12}\varepsilon_2^{n+1}\right)^T \,\Big|\, \mathcal{F}_n^\beta\right] = \\ = B_{11}\gamma_n B_{11}^T + F_{11} \cdot F_{11}^T + F_{12} \cdot F_{12}^T \end{aligned} \tag{6}$$

$$d_{12}^n = M\left[\left(B_{11}\left(\alpha^n - m_n\right) + F_{11}\varepsilon_1^{n+1} + F_{12}\varepsilon_2^{n+1}\right)\left(B_{21}\left(\alpha^n - m_n\right) + F_{21}\varepsilon_1^{n+1} + F_{22}\varepsilon_2^{n+1}\right)^T \;\Big|\; \mathcal{F}_n^\beta\right] =$$
$$= B_{11}\gamma_n B_{21}^T + F_{11}\cdot F_{21}^T + F_{12}\cdot F_{22}^T \quad (7)$$

$$d_{22}^n = M\left[\left(B_{21}\left(\alpha^n - m_n\right) + F_{21}\varepsilon_1^{n+1} + F_{22}\varepsilon_2^{n+1}\right)\left(B_{21}\left(\alpha^n - m_n\right) + F_{21}\varepsilon_1^{n+1} + F_{22}\varepsilon_2^{n+1}\right)^T \;\Big|\; \mathcal{F}_n^\beta\right] =$$
$$= B_{21}\gamma_n B_{21}^T + F_{21}\cdot F_{21}^T + F_{22}\cdot F_{22}^T \quad (8)$$

Тепер нам необхідно обчислити $m_{n+1} = M\left(\alpha^{n+1} \;\Big|\; \mathcal{F}_{n+1}^\beta\right)$. Зауважимо, що сігма-алгебру, породжену спостереженнями до моменту часу $n+1$ можна розуміти як сігма-алгебру $\mathcal{F}_n^\beta$, до якої додали ще одне спостереження β^{n+1}. Тобто ми маємо:

$$m_{n+1} = M\left(\alpha^{n+1} \;\Big|\; \mathcal{F}_{n+1}^\beta\right) = M\left(\alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta,\ \beta^{n+1}\right).$$

Розглядаємо $\left(\alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right)$ як нову випадкову гауссівську величину відносно β^{n+1}. До двох нових змінних застосовуємо теорему про нормальну кореляцію:

$$M\left(\alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta,\ \beta^{n+1}\right) = M\left(\alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right) + d_{12}^n\cdot\left(d_{22}^n\right)^{-1}\cdot\left(\beta^{n+1} - M\left(\beta^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right)\right).$$

Підставивши отримані вирази із (4) для $M\left(\alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right)$, $M\left(\beta^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^\beta\right)$ та відповідні значення d_{12}^n і d_{22}^n із формул (7), (8), отримуємо наступну рекурентну формулу для m_{n+1}:

$$m_{n+1} = B_{11}\cdot m_n + B_{12}\cdot\beta^n + d_{12}^n\cdot\left(d_{22}^n\right)^{-1}\cdot\left(\beta^{n+1} - B_{21}\cdot m_n - B_{22}\cdot\beta^n\right).$$

Згрупуємо коефіцієнти при m_n та β^n:

$$m_{n+1} = \Big(B_{11} - d_{12}^n\cdot\left(d_{22}^n\right)^{-1}\cdot B_{21}\Big)m_n +$$
$$+\Big(B_{12} - d_{12}^n\cdot\left(d_{22}^n\right)^{-1}\cdot B_{22}\Big)\beta^n + d_{12}^n\cdot\left(d_{22}^n\right)^{-1}\cdot\beta^{n+1} \quad (9)$$

Отримана формула показує, що залежність m_{n+1} від m_n є лінійною.

Аналогічно цим міркуванням використовуємо теорему про нормальну кореляцію для знаходження рекурентної формули для γ_{n+1}:

$$\gamma_{n+1} = cov\left(\alpha^{n+1},\ \alpha^{n+1} \mid \mathcal{F}_n^{\beta},\ \beta^{n+1}\right) = d_{11}^n - d_{12}^n \cdot \left(d_{22}^n\right)^{-1} \cdot \left(d_{12}^n\right)^T. \qquad (10)$$

Підставивши отримані вирази із (6), (7), (8) для d_{11}^n, d_{12}^n та d_{22}^n, отримуємо остаточну рекурентну формулу для γ_{n+1}.

Таким чином ми отримали систему рівнянь, з якої рекурентним чином знаходимо оцінку для розподілу частинок в неспостережуваній частині. Спершу обчислюємо початкові значення: m_0 та γ_0 знаходимо за теоремою про нормальну кореляцію для вектора $\theta^0 = \left(\alpha^0, \beta^0\right)$, який має нормальний розподіл $N\left(\vec{0}; R\right)$:

$$m_0 = M\left(\alpha^0 \mid \beta^0\right) = cov\left(\alpha^0, \beta^0\right) \cdot \left(cov\left(\beta^0, \beta^0\right)\right)^{-1} \cdot \beta^0,$$
$$\gamma_0 = cov\left(\alpha^0, \alpha^0\right) - cov\left(\alpha^0, \beta^0\right) \cdot \left(cov\left(\beta^0, \beta^0\right)\right)^{-1} \cdot \left(cov\left(\alpha^0, \beta^0\right)\right)^T.$$

Значення β^0 нам відоме, а відповідні значення коваріацій знаходимо із матриці R.

Використання фільтру Калмана-Бьюсі дозволило нам побудувати оцінку для вектора $\left(\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\mu_1(n\lambda N) - \pi_1\right), \ldots, \sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\mu_M(n\lambda N) - \pi_M\right)\right)$. В початковий момент часу маємо наступну оцінку:

$$\left(\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\hat{\mu_1}(0) - \pi_1\right), \ldots, \sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\hat{\mu_K}(0) - \pi_K\right)\right) \approx m_0.$$

А далі за рекурентними формулами (9) та (10) знаходимо оцінку

$$\left(\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\hat{\mu_1}(n\lambda N) - \pi_1\right), \ldots, \sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\hat{\mu_K}(n\lambda N) - \pi_K\right)\right) \approx m_n.$$

Висновки до розділу 3

У цьому розділі було розв'язано задачу фільтрації для частково спостережуваного процесу міграції частинок в багатоурновій моделі

Еренфестів за допомогою гауссівської апроксимації процесу, описаної в попередньому розділі.

ВИСНОВКИ

В цій роботі було розглянуто частково спостережуваний процес міграції частинок в багатоурновій моделі Еренфестів. Отримано два способи опису динаміки частинок в цій моделі – на мікроскопічному рівні та на макроскопічному рівні. Запропоновано гауссівську апроксимацію для процесу міграції частинок. Необхідність в такій апроксимації зумовлена тим, що кількість частинок є настільки великою, що спостереження значних змін в розподілі частинок можливе лише в масштабі часу, співмірному з кількістю частинок. За допомогою фільтра Калмана-Бьюсі було розв'язано задачу фільтрації. Тобто отримано оцінку умовного розподілу частинок в неспостережуваній частині урн в момент часу n за наявними спостереженнями розподілу частинок у видимій частині урн в моменти часу $0, 1, \ldots, n$.

Подальший напрямок досліджень природним чином зумовлюється необхідністю оцінки похибки, яка виникає при заміні точного розподілу частинок по урнам гауссівською апроксимацією цього розподілу.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Karlin, S. and McGregor, J. L. Ehrenfest urn models – J. Appl. Prob., 1965.

2. Iglehart, Donald L. Limit theorems for the multi-urn Ehrenfest model – The Annals of Mathematical Statistics 39.3, 1968.

3. Godreche, C., and J. M. Luck. Correlation and response in the backgammon model: the Ehrenfest legacy – Journal of Physics A: Mathematical and General 32.33, 1999

4. Kao, Yee-Mou, and Pi-Gang Luan Poincaré cycle of a multibox Ehrenfest urn model with directed transport – Physical Review E 67.3, 2003

5. Clark, Jaime, et al. Generalization of the Ehrenfest urn model to a complex network – Physical Review E 92.1, 2015

6. Xue, Xiaofeng Hydrodynamics of the generalized N-urn Ehrenfest model – Potential Analysis 59.2, 2020

7. Cheng, Chi-Ho, and Pik-Yin Lai Nonequilibrium thermodynamics and phase transition of Ehrenfest urns with interactions – Physical Review Research 3.2, 2021

8. Shiryaev, A. N. Probability-1. – Springer New York, 2016. – 552c.

9. Norris, J. R. Markov chains. No. 2. Cambridge university press, 1998.

10. Shiryaev, A. N. Probability-2. – Springer New York, 2019. – 416c.

11. Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики: матеріали XXII Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (13-17 травня 2024 р., м. Київ, Україна) / Уклад.: Пономаренко С. М., Бех С. В., Степаненко В. М., Мирошникова І. Ю., Деркач О. Г., Козленко О. В., Мікава П. В. - Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Видавництво «Політехніка», 2024.

12. Ковальчук О. М. Бакалаврська робота на тему «Оцінювання параметрів частково спостережуваних ланцюгів Маркова», 2022