

Міністерство освіти та науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут і Ігоря Сікорського»
Механіко-машинобудівний інститут
кафедра Інтегрованих технологій машинобудування

Методичні вказівки з практичної роботи студентів з курсу
ОСНОВИ ФОРМОУТВОРЕННЯ ПОВЕРХОНЬ
Тема: Визначення огинаючої сімейства плоских кривих

підготовки бакалавр
(назва освітньо-кваліфікаційного рівня)

напряму 6.050503 – Машинобудування
(шифр і назва)

спеціальності 8(7).05050302 - Інструментальне виробництво
(шифр і назва)

спеціалізації _____
(назва)

форми навчання денна
(денна/заочна)

Основи формоутворення поверхонь [Електронний ресурс]: Методичні вказівки до виконання практичної роботи «Визначення огинаючої сімейства плоских кривих» для студентів напрямку підготовки 6.050503 – Машинобудування / Уклад.: О.А. Охріменко, К.: «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2017. – 22 с.

Рекомендовано вченою радою ММІ НТУУ «КПІ»
(Протокол № 1 від 29 серпня 2017 р.)

ЕЛЕКТРОННЕ НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ОСНОВИ ФОРМОУТВОРЕННЯ ПОВЕРХОНЬ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Визначення огинаючої сімейства плоских кривих

Для студентів напрямку підготовки
6.050503 – машинобудування

Укладач: Охріменко Олександр Анатолійович, д.т.н., доц.

Відповідальний редактор: В.А. Пасічник, д.т.н., проф.

Рецензент: Д.А. Красновид, к.т.н., доц.

Практична робота: Визначення огинаючої сімейства плоских кривих.

Тема: Визначення огинаючої сімейства плоских кривих.

Мета: Навчитись за заданим рухом плоскої кривої визначати сімейство плоских кривих, що утворюється при такому русі, визначати огинаючу до цього сімейства та аналізувати утворену огинаючу на наявність на ній особливих точок.

Завдання: За заданою траєкторією руху та плоскою кривою, що твірною сімейства кривих утворених при її русі за цієї траєкторією визначити огинаючу сімейства плоских кривих, що утворюється заданими кривими

1. Короткі теоретичні відомості: Визначення огинаючої сімейства плоских кривих.

1.1. Класичний метод визначення огинаючої сімейства плоских кривих.

Сімейство кривих на площині, яке залежить від параметру t , визначається рівнянням:

$$f(x, y, t) = 0. \quad (1)$$

де, x, y – координати точок твірної кривої, t – параметр руху твірної кривої

Огинаючою даного сімейства називається така лінія, яка в кожній точці дотикається однієї з ліній сімейства. Огинаюча сімейства кривих належить дискримінантній лінії і визначається системою рівнянь:

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &= 0; \\ \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Наприклад, огинаюча сімейства кіл

$$(X - t)^2 + Y^2 = 1 \quad (3)$$

буде описуватись системою:

$$\begin{cases} (X - t)^2 + Y^2 = 1; \\ -2(X - t) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Виключивши параметр t , отримаємо огинаючу (рис.1,а) у вигляді пари прямих:

$$Y = \pm 1. \quad (5)$$

Дискримінантна лінія сімейства напівкубічних парабол $Y^3 - (X - t)^2 = 0$ буде прямою $Y=0$. Проте у випадку, який розглядається (рис.1,б), спостерігається торкання осі OX з розглянутим сімейством кривих в одній особливій точці, тобто спостерігається кромочний дотик осі OX і сімейства кривих. Подібна картина має місце при обробці різанням цілим рядом інструментів. Наприклад, при точінні вершинна точка різальної кромки різця формує оброблювану поверхню вала.

1.2. Сімейство кривих, що задане параметричними рівняннями виду:

$$\begin{aligned} X &= f_1(t, c); \\ Y &= f_2(t, c). \end{aligned} \quad , (5)$$

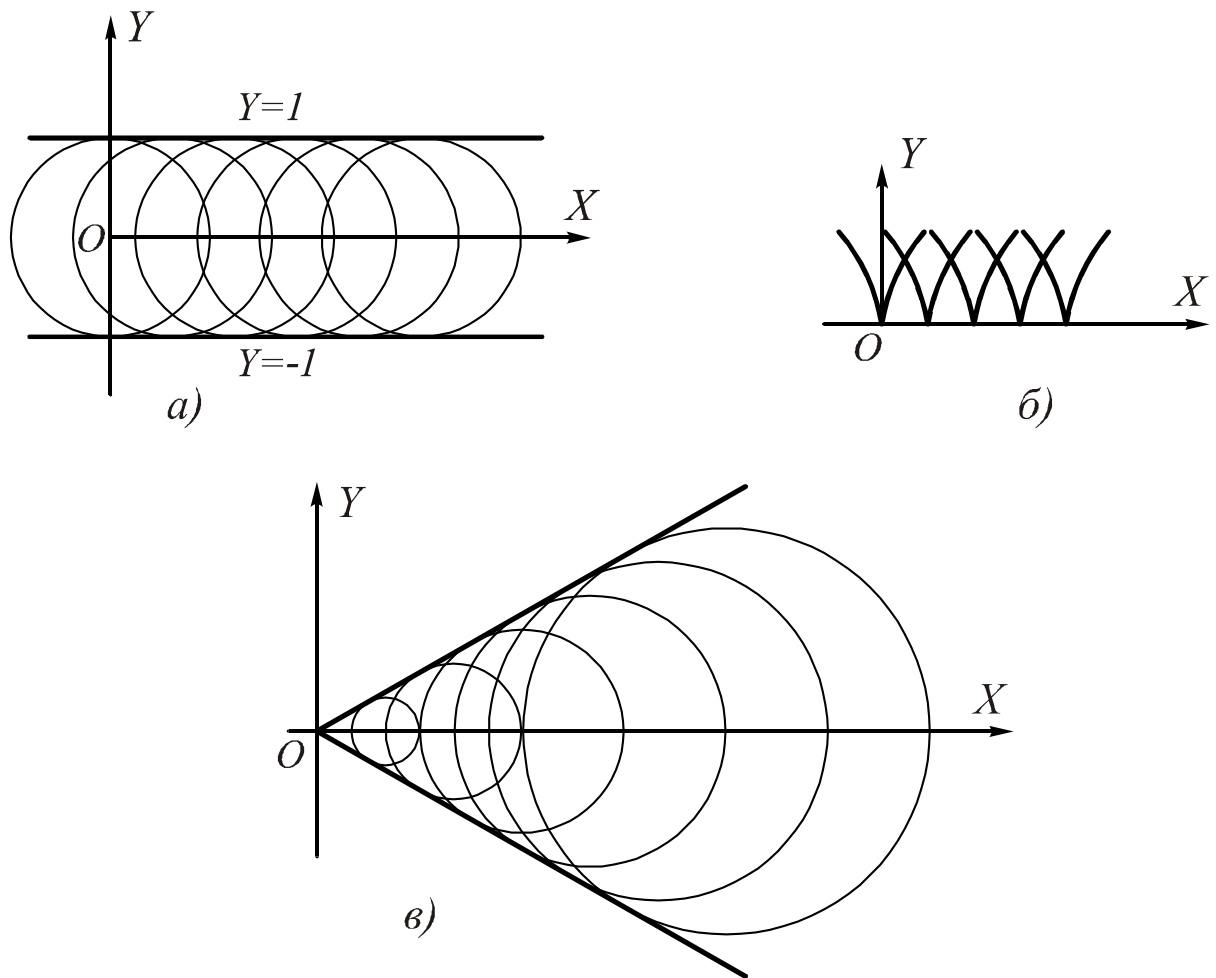


Рис.1. Огибаючі плоских ліній.

Огибаюча крива визначається системою рівнянь:

$$\begin{aligned} X &= f_1(t, c); \\ Y &= f_2(t, c); \end{aligned} \quad , (6)$$

$$NV(c, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\partial X}{\partial c} & \frac{\partial Y}{\partial c} \end{vmatrix} = 0.$$

Наприклад, рівняння сімейства кривих будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} X &= 2R + R \cos \alpha; \\ Y &= R \sin \alpha. \end{aligned} \quad , (7)$$

Визначник, складений з частинних похідних, записують наступним чином:

$$NV(\alpha, R) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial X}{\partial R} & \frac{\partial Y}{\partial R} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R \sin \alpha & R \cos \alpha \\ 2 + \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Розкриваючи визначник, отримаємо:

$$-R(1 + 2 \cos \alpha) = 0; \quad (9)$$

Звідси

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (10)$$

Підставивши значення $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$ в рівняння сімейства кривих і виключивши параметр R , отримаємо рівняння згинаючої у вигляді:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}} X \quad (11)$$

Огинаючою буде пара прямих, які будуть іти під кутом $\pm 30^\circ$ до осі X (рис.1,в). В прикладі, що розглядається, сімейство кривих є сімейством кіл змінного радіуса, центром яких знаходиться на осі X .

1.3. Визначення особливих точок (точок повернення) на сімействі плоских кривих.

Як було зазначено, спряжені профілі один з яких є огинаючою сімейства плоских кривих можуть мати особливу точку – точку повернення, яка є межею певної ділянки профілю. Якщо крива задана рівнянням $f(x, y) = 0$, тоді координати особливої точки задовольняють рівняння:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Якщо крива задана в параметричній формі, тоді в особливій точці будемо мати:

$$\begin{aligned} x(t) &= f_1(t); \\ y(t) &= f_2(t); \\ \frac{\partial x(t)}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Якщо крива, що розглядається, є огинаючою сімейства кривих $f(x, y)=0$, то її особлива точка визначається системою рівнянь:

$$\begin{aligned}
f(x, y, t) &= 0; \\
\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} &= 0; \\
\frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial t^2} &= 0.
\end{aligned}
\tag{14}$$

У випадку коли крива, що розглядається, є огинаючою сімейства кривих що задані в параметричному вигляді $x(t, u) = f_1(t, u)$, $y(t, u) = f_2(t, u)$, то параметри особливої точки на огинаючій визначаються системою рівнянь:

$$\begin{cases}
x(t, u) = f_1(t, u); \\
y(t, u) = f_2(t, u); \\
R2 = \begin{pmatrix} f_1(t, u) \\ f_2(t, u) \end{pmatrix} \\
NV(t, u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(t, u)}{\partial t} & \frac{\partial y(t, u)}{\partial t} \\ \frac{\partial x(t, u)}{\partial u} & \frac{\partial y(t, u)}{\partial u} \end{vmatrix} = 0 \\
g(t, u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} NV(t, u) & \frac{\partial}{\partial u} NV(t, u) \\ \frac{\partial}{\partial t} R2(t, u) \cdot \frac{\partial}{\partial t} R2(t, u) & \frac{\partial}{\partial t} R2(t, u) \cdot \frac{\partial}{\partial u} R2(t, u) \end{vmatrix} = 0
\end{cases}, \tag{15}$$

, де R_2 – вектор стовпчик рівняння сімейства плоских кривих розмірністю 2×1 .

Розв'язок системи рівнянь (15) дає значення параметрів t та u $[T_0, U_0]$, які підставляємо в рівняння сімейства огинаючих $R2$ отримуємо координати особливої точки на огинаючій кривій:

$$R2_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(T_0, U_0) \\ f_2(T_0, U_0) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

У випадку коли система рівнянь (15) не має розв'язку то особливі точки на огинаючій відсутні.

2. Виконання завдання

Завдання:

1. За даною схемою записати рівняння сімейства плоских кривих і побудувати його графік.
2. Записати рівняння контакту при визначенні огинаючої – визначник 2-го складений з частинних похідних по незалежним параметрам рівняння сімейства плоских кривих, який дорівнює нулю.
3. Розв'язок рівняння контакту.
4. На графіку сімейства плоских кривих побудувати огинаючу.
5. Отримати рівняння руху контактної точки і знаходження параметру особливої точки на огинаючому профілю побудувати її графіку сімейства плоских кривих разом з огинаючою. Також на твірному профілю побудувати точку, яка формує особливу точку на огинаючій.
3. Знаходження рівняння сімейства плоских кривих утворених рухом заданої кривої:
 - навести основні залежності і перетворення, які робили для отримання рівняння сімейства плоских кривих;

- самі рівняння плоских кривих;
- навести основні залежності для отримання рівняння контакту, визначник 2-го порядку, його складові – частинні похідні і визначити його.
- рівняння контакту в розгорнутому вигляді.
- навести графік сімейства плоских кривих разом з огинаючою, кількість розрахункових точок на твірній кривій -50, по траєкторії руху -50.

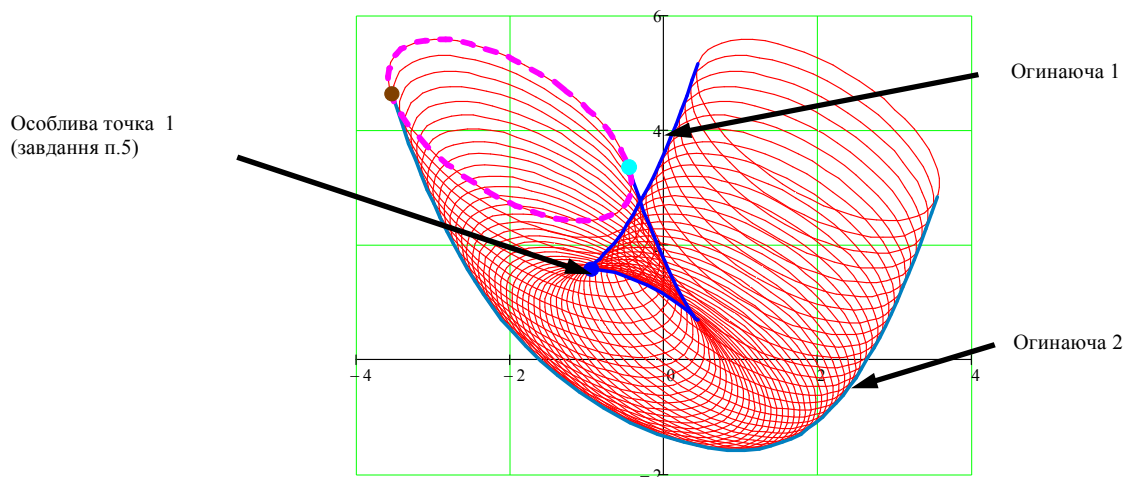


Рис. 2. Сімейство плоских кривих і огинаючі до них.

Висновок: чого навчилися в даній роботі – висновок корелюється з метою роботи.

ДОДАТКОВО до вирішення завдання: Для руху твірної по незамкнутій траєкторії огинаючу шукати в діапазоні значень переміщення твірної від -5 до 5 при русі твірної при якій вона обертається навколо центра то кут повороту для якого шукаємо огинаючу від 0 до 2π (за узгодженням з викладачем).

Запис рівняння еліпса у параметричній формі:

$x = a \cos(t)$; $y = b \sin(t)$, де a , b – мала і велика вісь еліпса, параметр t – для опису замкнутого еліпсу змінюється від 0 до 2π , відповідає за розташування точки на кривій еліпса.

Запис рівняння параболи в параметричній формі:

- було $y = x^2$ необхідно перетворити наступним чином $x = t, y = t^2$ і далі використовуємо ці рівняння

Рівняння траєкторії руху еліпса при обертанні навколо центру координат зі змінним $R(c)$ чи постійним радіусом R : $Xc = R(c) \cos(c)$; $Yc = R(c) \sin(c)$

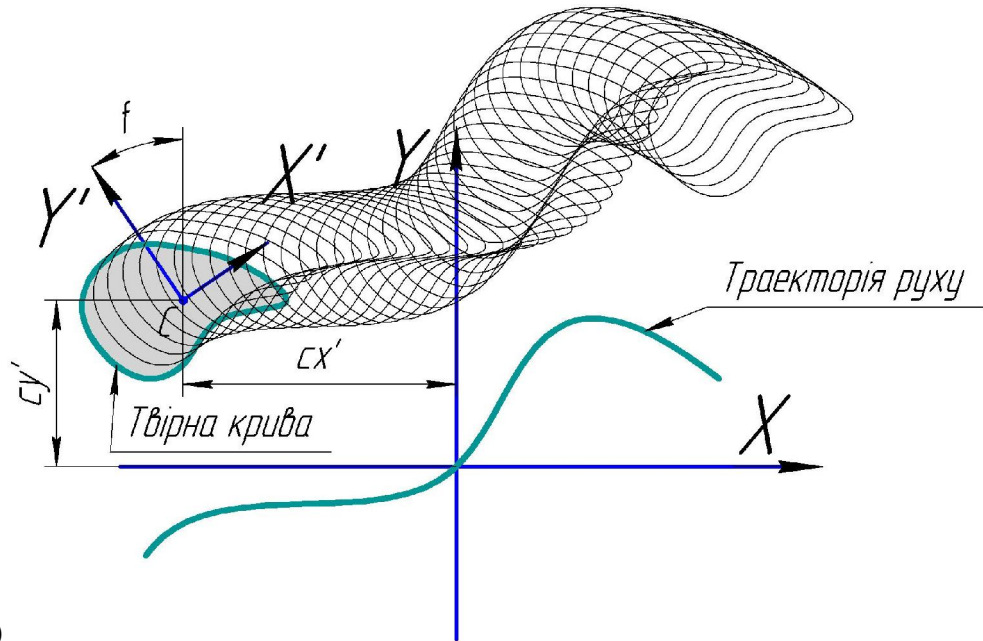
Розв'язок : див схему рис.3.

- Маємо основну нерухому систему координат XY в якій рухається твірна крива, що утворює сімейство плоских кривих. Твірна крива задана рівнянням в рухомій системі координат $X'Y'$ рівнянням - $x'(t) = f_1(t)$; $y'(t) = f_2(t)$.

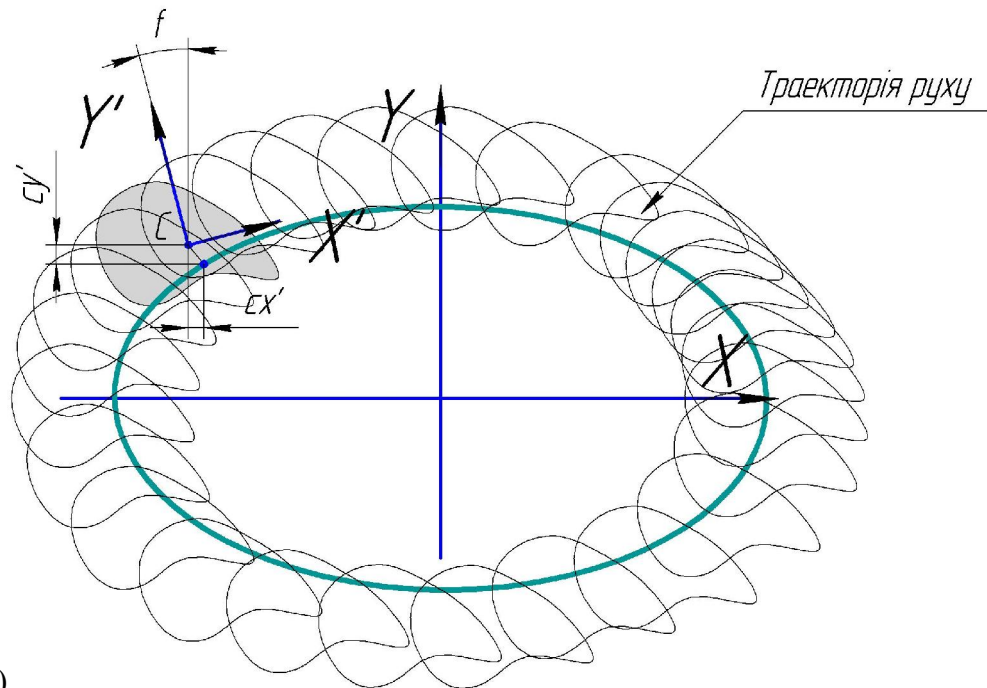
- Так як система координат $X'Y'$ не співпадає с системою XY , вона зміщена центром на відстань (cx', cy') і повернута на кут f тому рівняння профілю твірної кривої необхідно записати в системі XY , записуємо рівняння твірної в векторному виді (17)

$$RT'(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

де, t – параметр, що визначає положення точки на твірній кривій.



3.a)



3.б)

Рис.3. Утворення сімейства плоских кривих: а) рух твірної по незамкнутій траєкторії, б) рух твірної по замкнутій траєкторії

- для врахування кута повороту f , записуємо матрицю повороту навколо осі Z вона перпендикулярна рисунку схеми враховуючи [7]:

$$mf = \begin{pmatrix} \cos(f) & \sin(f) & 0 & 0 \\ -\sin(f) & \cos(f) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

- для зміщення центру координат на відстань (cx', cy') записуємо матрицю зміщення

$$mc = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & cx' \\ 0 & 1 & 0 & cy' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , (19)$$

- записуємо рівняння твірної кривої в системі XY , для цього необхідно перемножити матриці перетворень (18), (19) на вектор – стовпчик рівняння твірної заданої в системі $X'Y'$ (17), отримуємо:

$$RT(t) = mc \cdot mf \cdot RT'(t) \quad , (20)$$

- записуємо рівняння траєкторії руху у вигляді розширеної матриці афінного перетворення згідно завдання ($y = f(x)$) перетворюємо його в параметричну форму - $y = f_3(c); x = c$;):

$$RC(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & f_3(c) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ або } RC(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & R(c)\cos(c) \\ 0 & 1 & 0 & R(c)\sin(c) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , (21)$$

де, c – параметр, що визначає положення центру координат системи $X'Y'$ по осі X при її русі по траєкторії.

- отримуємо рівняння сімейства кривих утворених рухом твірної по заданій траєкторії, для цього при параметричному записі рівнянь твірної та траєкторії необхідно скласти рівняння твірної (20) і траєкторії (21) і отримуємо в параметричному виді рівняння сімейства кривих (22):

$$RTC(c, t) = RC(c)RT(t); \Rightarrow \begin{pmatrix} ftc_1(c, t) \\ ftc_2(c, t) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \Rightarrow \begin{matrix} Xtc(c, t) = ftc_1(c, t); \\ Ytc(c, t) = ftc_2(c, t); \end{matrix} \quad , (22)$$

- записуємо рівняння контакту твірної кривої з огинаючою, як визначник другого порядку складений з частинних похідних по незалежним параметрам:

$$NV(c, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial Xtc(c, t)}{\partial t} & \frac{\partial Ytc(c, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial Xtc(c, t)}{\partial c} & \frac{\partial Ytc(c, t)}{\partial c} \end{vmatrix} \quad , (23)$$

- вирішуємо рівняння контакту $NV(c, t) = 0$ (23) прирівнюючи його до нуля, в це рівняння входить дві змінні c і t . Для розв'язку рівняння контакту одну змінну c будемо фіксувати (згідно завдання розрахункових точок 30..50 по траєкторії руху) і відносно неї знаходити значення іншої змінної t . Отримуємо набір значень розв'язку рівняння контакту, де для кожного значення $C0_i$ відповідає своє значення $T0_i$ (де $i=0..50$) при підстановці яких в рівняння (23) виконувалась би рівність $NV(C0_i, T0_i) = 0$.

Рівняння контакту вирішуємо чисельно за допомогою систем автоматизації математичних розрахунків для прикладу така, як Mathcad при чому для деяких варіантів може бути не одна а дві і більше огинаючих і при чисельному розв'язку необхідно це враховувати, а саме при розв'язку рівняння контакту початкове наближення параметру $T0_i$ при розв'язку рівняння контакту для i -того кроку треба брати попереднє значення розв'язку рівняння контакту $T0_{i-1}$ і в залежності від того, яку вітку огинаючої необхідно знайти необхідно задаватись першим значенням початкового наближення (мінати знак + або -, змінювати чисельне значення)

- фрагмент коду Mathcad для розв'язку рівняння контакту (використовуємо інструменти панелі програмування ):

```

TR := | t3 ← -0.5·π
      | for j ∈ 0..K2
      |   if j ≠ 0
      |     | t3 ← TRJj-1
      |     | TRJj ← root(NV(cj, t3), t3)
      |   TRJj ← root(NV(cj, t3), t3) otherwise
      | TRJ

```

Де, c_j - параметр положення твірної профілю на траєкторії, TR – рішення рівняння контакту, параметр визначає положення точки на твірній профілю сімейства кривих, що в даний момент часу (чи положення c_j) формує точку на огинаючій, $NV(c, t)$ – функція рівняння контакту (функція двох змінних c - положення твірної профілю на траєкторії, t - положення точки на твірній), $t3$ – початкове наближення при вирішенні рівняння контакту, знак + верхня ділянка огинаючої, - нижня ділянка огинаючої, $K2$ – кількість розрахункових точок на траєкторії руху. Знайдені значення розв'язку рівняння контакту $CO_i, T0_i$ підставляємо в рівняння сімейства плоских кривих $RTC(c, t)$ (22) замість відповідних значень і отримуємо криву, яка буде огинаючою. Будуємо на графіку сімейства плоских кривих цю огинаючу, відповідно якщо декілька огинаючих то їх треба побудувати всі. Візуально контролюємо правильність розв'язку – огинаюча іде по границі сімейства.

Далі вирішуємо систему (15) і визначаємо наявність особливих точок на огинаючій кривій. Результати розрахунків зображуємо на графіку (рис.2).

Приклад оформлення звіту з роботи наведено в додатку А, Приклад допоміжних символьних розрахунків в системі Mathcad для отримання рівнянь сімейства плоских кривих, рівняння контакту та рівнянь для знаходження особливої точки наведено в додатку Б, приклад розрахунку і побудови сімейства плоских кривих, огинаючої і знаходження параметрів особливих точок за допомогою системи Mathcad наведено у додатку В. В додатку Г наведені приклади варіантів можливих завдань для студентів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002.—472с
2. Люкишин В. С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. – М.: Машиностроение, 1968. – 371 с.
3. Перепелица Б.А. Отображение аффинного пространства в теории формообразования поверхностей резанием. – Харьков: Вища школа, 1991. – 512 с.
4. Равська Н. С. Основи формоутворення поверхонь при механічній обробці/ Н. С. Равська, П. П. Мельничук, Т. П. Ніколаєнко. - К.: Вид. СКД-Друк, 2013. – 215с.
5. Родин П.Р. Основы формообразования поверхности резанием. – К.: Вища школа, 1977. – 190 с.
6. Юнусов Ф.С. Формообразование сложнопрофильных поверхностей шлифованием. – Л.: Машиностроение, 1987. – 248 с.
7. Основи формоутворення поверхонь [Електронний ресурс]: Методичні вказівки до виконання практичної роботи «Координатні перетворення, кінематичний спосіб утворення поверхонь» для студентів напряму підготовки 6.050503 – Машинобудування / Уклад.: О.А. Охріменко, К.: «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2017. – 29 с. /<http://itm.kpi.ua/wp-content/uploads/MR-OFP-Pr1.pdf>.

Звіт з практичної роботи № 2 з дисципліні «Основи формоутворення
поверхонь»

Виконав ст. гр. МІ –
Іванов В.О.

Київ 201_

Завдання:

Знайти огинаючу сімейства плоских кривих та наявність особливих точок на огинаючій (рис.1): сімейство кривих задано рухом еліпса $y=b\sin(t)$, $x=a\cos(t)$ центр якої рухається по траєкторії – $y=x^2$, де: a – велика вісь еліпса, b – мала вісь еліпса.

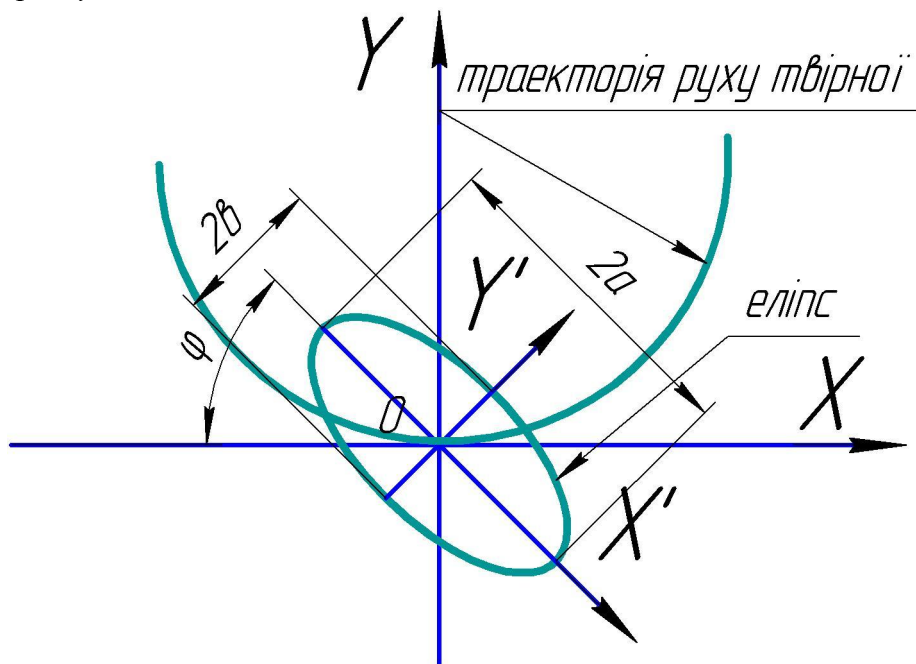


Рис.1. Розрахункова схема.

$a=3$, $b=1$, $\varphi=-45^\circ$ – кут нахилу великої осі еліпса до осі X .

1. Рівняння сімейства плоских кривих:

$$x(c, t) := c + a \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(t)$$

$$y(c, t) := c^2 - a \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(t) + b \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(t)$$

, де t – параметр, що відповідає положенню точки на твірній кривій, c -параметр, що відповідає за рух твірної кривої вздовж траєкторії.

2. Рівняння контакту:

$$NV(c, t) := 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(t) - b \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(t)$$

3. Рівняння для визначення параметрів особливої точки на огинаючому профілю.

$$\begin{aligned} g_0(c, t) := & 2 \cdot a^3 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(t) - 2 \cdot a^3 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t) + 2 \cdot a^2 \cdot b \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(t)^3 \dots \\ & + -2 \cdot a^2 \cdot b \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(t) - 4 \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \dots \\ & + 2 \cdot a^2 \cdot c \cdot \cos(\varphi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) - 2 \cdot a^2 \cdot c \cdot \sin(\varphi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \dots \\ & + a^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + 2 \cdot a \cdot b^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t) \dots \\ & + -4 \cdot a \cdot b \cdot c^2 \cdot \cos(\varphi)^2 \cdot \cos(t)^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot c^2 \cdot \sin(\varphi)^2 \cdot \sin(t)^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(t)^2 \dots \\ & + 4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(t)^2 - a \cdot b \cdot \cos(\varphi)^2 \cdot \sin(t)^2 - a \cdot b \cdot \sin(\varphi)^2 \cdot \cos(t)^2 \dots \\ & + -2 \cdot b^3 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(t)^3 - 4 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \dots \\ & + 2 \cdot b^2 \cdot c \cdot \cos(\varphi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) - 2 \cdot b^2 \cdot c \cdot \sin(\varphi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + b^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

4. Графік сімейства плоских кривих, огинаючих до них і особливих точок на огинаючих.

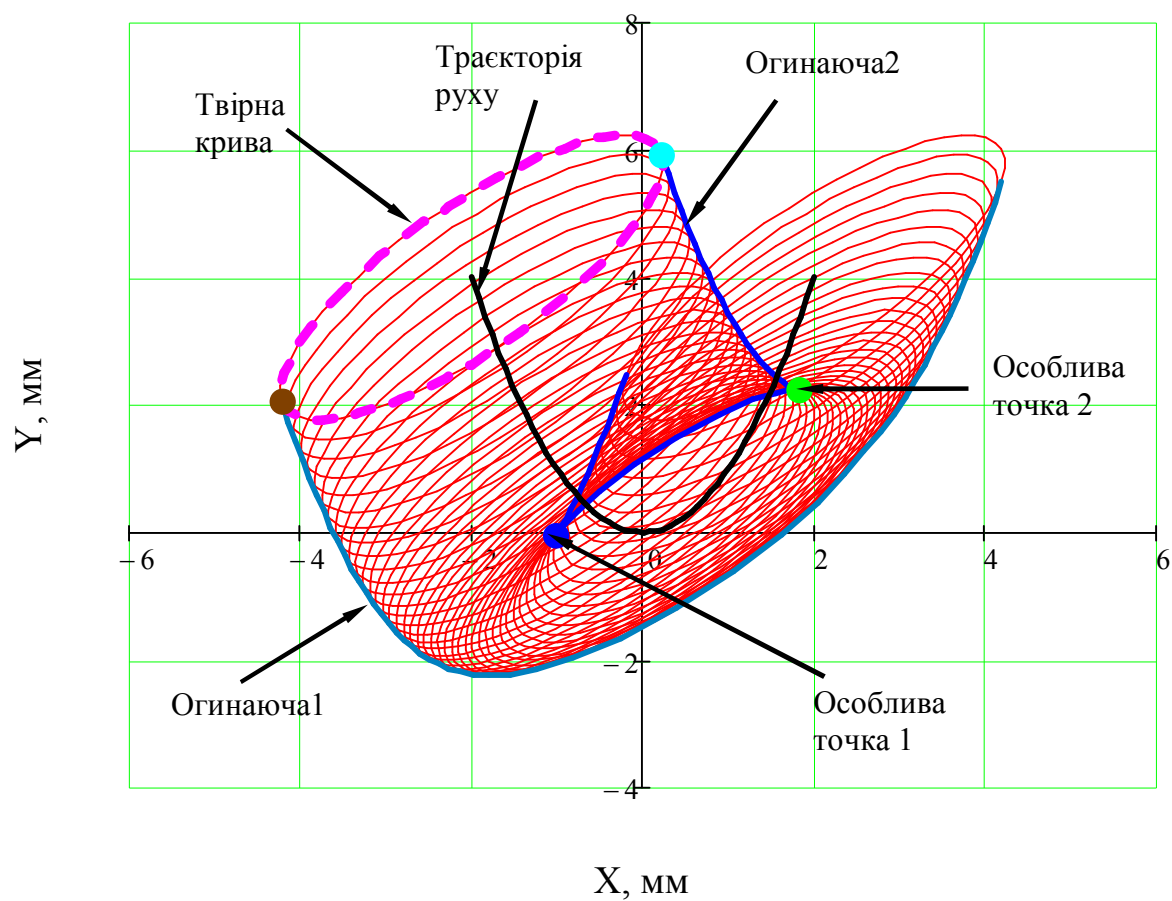


Рис.2. Сімейство плоских кривих та огибаючі до нього.

5. Параметри особливих точок:

№ особливої точки	Параметри точок на твірній кривій		Координати точок на твірній кривій		Координати точок на огибаючій	
	c	t	X	Y	X	Y
1	0.903	2.282	-1.958	0.758	-1.017	-0.034
2	-0.103	0.216	2.93	0.214	1.817	2.234

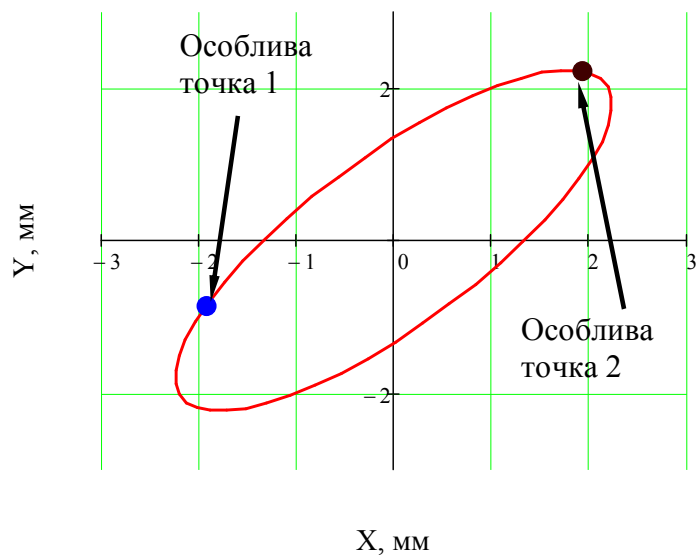


Рис.3. Точки на твірній кривій, що формують особливі точки на огибаючій.

Приклад допоміжних символьних розрахунків в системі Mathcad для отримання рівнянь сімейства плоских кривих, рівняння контакту та рівнянь для знаходження особливої точки.

Рівняння твірної кривої - еліпс:

$$\begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матриця, що враховує поворот осі еліпса на кут ϕ :

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця руху твірної по задані траєкторії:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & c^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отримання рівняння сімейства плоских кривих:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) \\ b \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & c^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) \\ b \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c + a \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) \\ c^2 - a \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(c, t) := c + a \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)$$

$$y(c, t) := c^2 - a \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t)$$

Отримання рівняння контакту:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt}(c + a \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)) \quad \frac{d}{dt}(c^2 - a \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t)) \\ \frac{d}{dc}(c + a \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)) \quad \frac{d}{dc}(c^2 - a \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t)) \end{array} \right] \text{ simplify} \rightarrow :$$

$$\rightarrow 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - b \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)$$

$$NV(c, t) := 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - b \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)$$

Отримання рівняння для знаходження параметрів особливої точки:

$$g(t, c) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} NV(t, c) & \frac{\partial}{\partial u} NV(t, c) \\ \frac{\partial}{\partial t} R2(t, c) \cdot \frac{\partial}{\partial t} R2(t, c) & \frac{\partial}{\partial t} R2(t, c) \cdot \frac{\partial}{\partial c} R2(t, c) \end{vmatrix} :$$

$$\frac{\partial}{\partial t} NV(t, c) :$$

$$\frac{d}{dt} (2 \cdot b \cdot c \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - b \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)) \text{ simplify} \rightarrow$$

$$\rightarrow b \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} NV(t, c) :$$

$$\frac{d}{dc} (2 \cdot b \cdot c \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - b \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)) \text{ simplify} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot a \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R2(t, c) \cdot \frac{\partial}{\partial t} R2(t, c) :$$

$$\frac{d}{dt} \left(c + a \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) \right) \text{ simplify} \rightarrow \left(\begin{matrix} b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) \\ a \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) + b \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) \end{matrix} \right)$$

$$\left(\begin{matrix} b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) \\ a \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) + b \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) \end{matrix} \right) \cdot \left(\begin{matrix} b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) \\ a \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) + b \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) \end{matrix} \right) \rightarrow$$

$$(a \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) + b \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t)) \cdot (a \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) + \cos(\phi) \cdot b \cdot \cos(t)) + (a \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t)) \cdot (a \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - \sin(\phi) \cdot b \cdot \cos(t)) \text{ simplify} \rightarrow$$

$$\rightarrow a^2 - a^2 \cdot \cos(t)^2 + b^2 \cdot \cos(t)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R2(t, c) \cdot \frac{\partial}{\partial c} R2(t, c) :$$

$$\frac{\partial}{\partial c} R2(t, c) : \frac{d}{dc} \left(c + a \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) \right) \text{ simplify} \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 \\ 2 \cdot c \end{matrix} \right)$$

$$\left(\begin{matrix} b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) \\ a \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) + b \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) \end{matrix} \right) \cdot \left(\begin{matrix} 1 \\ 2 \cdot c \end{matrix} \right) \text{ simplify} \rightarrow$$

$$\rightarrow b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) + 2 \cdot a \cdot c \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t)$$

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial t} NV(t, c) & \frac{\partial}{\partial u} NV(t, c) \\ \frac{\partial}{\partial t} R2(t, c) \cdot \frac{\partial}{\partial t} R2(t, c) & \frac{\partial}{\partial t} R2(t, c) \cdot \frac{\partial}{\partial c} R2(t, c) \end{matrix} \right| :$$

$$\left(\left(\begin{matrix} b \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) \\ a^2 - a^2 \cdot \cos(t)^2 + b^2 \cdot \cos(t)^2 \end{matrix} \right) \begin{matrix} 2 \cdot b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot a \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) \\ b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - a \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) + 2 \cdot a \cdot c \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t) + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) \end{matrix} \right) \rightarrow$$

далі кінцевий результат приводимо з врахування форматування, так як вираз у записі в строку має велику довжину:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot a^3 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - 2 \cdot a^3 \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t) + 2 \cdot a^2 \cdot b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t)^3 \dots \\ & + 2 \cdot a^2 \cdot b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - 4 \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \dots \\ & + 2 \cdot a^2 \cdot c \cdot \cos(\phi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) - 2 \cdot a^2 \cdot c \cdot \sin(\phi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \dots \\ & + a^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + 2 \cdot a \cdot b^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t) \dots \\ & + 4 \cdot a \cdot b \cdot c^2 \cdot \cos(\phi)^2 \cdot \cos(t)^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot c^2 \cdot \sin(\phi)^2 \cdot \sin(t)^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t)^2 \dots \\ & + 4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)^2 - a \cdot b \cdot \cos(\phi)^2 \cdot \sin(t)^2 - a \cdot b \cdot \sin(\phi)^2 \cdot \cos(t)^2 \dots \\ & + 2 \cdot b^3 \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t)^3 - 4 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \dots \\ & + 2 \cdot b^2 \cdot c \cdot \cos(\phi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) - 2 \cdot b^2 \cdot c \cdot \sin(\phi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + b^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

Приклад допоміжних розрахунків в системі Mathcad для отримання графіків рівнянь сімейства плоских кривих, огинаючих і знаходження параметрів особливої точки.

Вхідні параметри:

$$a := 3 \quad b := 1 \quad \phi := -45 \cdot \text{deg}$$

Рівняння сімейства плоских кривих, рівняння контакту та рівняння для визначення особливої точки:

$$x(c, t) := c + a \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)$$

$$y(c, t) := c^2 - a \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) + b \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t)$$

$$NV(c, t) := 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - b \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)$$

$$\begin{aligned} g0(c, t) := & 2 \cdot a^3 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(t) - 2 \cdot a^3 \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t) + 2 \cdot a^2 \cdot b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t)^3 \dots \\ & + -2 \cdot a^2 \cdot b \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) - 4 \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \dots \\ & + 2 \cdot a^2 \cdot c \cdot \cos(\phi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) - 2 \cdot a^2 \cdot c \cdot \sin(\phi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \dots \\ & + a^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + 2 \cdot a \cdot b^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(t)^2 \cdot \sin(t) \dots \\ & + -4 \cdot a \cdot b \cdot c^2 \cdot \cos(\phi)^2 \cdot \cos(t)^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot c^2 \cdot \sin(\phi)^2 \cdot \sin(t)^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t)^2 \dots \\ & + 4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(t)^2 - a \cdot b \cdot \cos(\phi)^2 \cdot \sin(t)^2 - a \cdot b \cdot \sin(\phi)^2 \cdot \cos(t)^2 \dots \\ & + -2 \cdot b^3 \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t)^3 - 4 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \dots \\ & + 2 \cdot b^2 \cdot c \cdot \cos(\phi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) - 2 \cdot b^2 \cdot c \cdot \sin(\phi)^2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + b^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

Розрахунок масиву значень параметрів точок на твірній сімейства плоских кривих , K1- кількість точок:

$$K1 := 50 \quad j1 := 0..K1 \quad T_{j1} := j1 \cdot \frac{2\pi}{K1}$$

Розрахунок масиву значень параметрів точок по траєкторії руху сімейства плоских кривих, K2- кількість точок, рух відбувається в межах зміни координати X від -2 до 2:

$$K2 := 50 \quad j2 := 0..K2 \quad C_{j2} := -2 + j2 \cdot \frac{4}{K2}$$

Розрахунок координат точок сімейства плоских кривих:

$$x_{cj1,j2} := x(C_{j2}, T_{j1}) \quad y_{cj1,j2} := y(C_{j2}, T_{j1})$$

Вирішення рівняння контакту для 1-ої огинаючої:

$$\begin{aligned} TR := & \left| \begin{array}{l} t3 \leftarrow -0.5 \cdot \pi \\ \text{for } j \in 0..K2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{if } j \neq 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} t3 \leftarrow TR_{j-1} \\ TR_j \leftarrow \text{root}(NV(C_j, t3), t3) \end{array} \right. \\ \quad TR_j \leftarrow \text{root}(NV(C_j, t3), t3) \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ TR_j \end{array} \right. \end{aligned}$$

Вирішення рівняння контакту для 2-ої огинаючої:

```

TR1 := t3 ← 0.5·π
      for j ∈ 0..K2
        if j ≠ 0
          t3 ← TRj-1
          TRj ← root(NV(Cj, t3), t3)
        TRj ← root(NV(Cj, t3), t3) otherwise
      TRJ

```

Розрахунок значень координат точок 1-ої огинаючої:

$$xc0j2 := x(Cj2, TRj2) \quad yc0j2 := y(Cj2, TRj2)$$

Розрахунок значень координат точок 2-ої огинаючої:

$$xc01j2 := x(Cj2, TR1j2) \quad yc01j2 := y(Cj2, TR1j2)$$

Розрахунок координат точок траєкторії руху:

$$xj2 := Cj2 \quad yj2 := (Cj2)^2$$

Знаходження параметрів і координат 1-ої особливої точки на огинаючій:

$$t1 := 2 \quad c1 := 1$$

Given

$$g0(c1, t1) = 0$$

$$NV(c1, t1) = 0$$

$$NRF := \text{Find}(c1, t1)$$

$$NRF = \begin{pmatrix} 0.903 \\ 2.282 \end{pmatrix}$$

$$xc2 := x(NRF_0, NRF_1) = -1.017$$

$$yc2 := y(NRF_0, NRF_1) = -0.034$$

Знаходження параметрів і координат 2-ої особливої точки на огинаючій, за рахунок зміни значень початкового наближення:

$$t2 := 0 \quad c2 := 1$$

Given

$$g0(c2, t2) = 0$$

$$NV(c2, t2) = 0$$

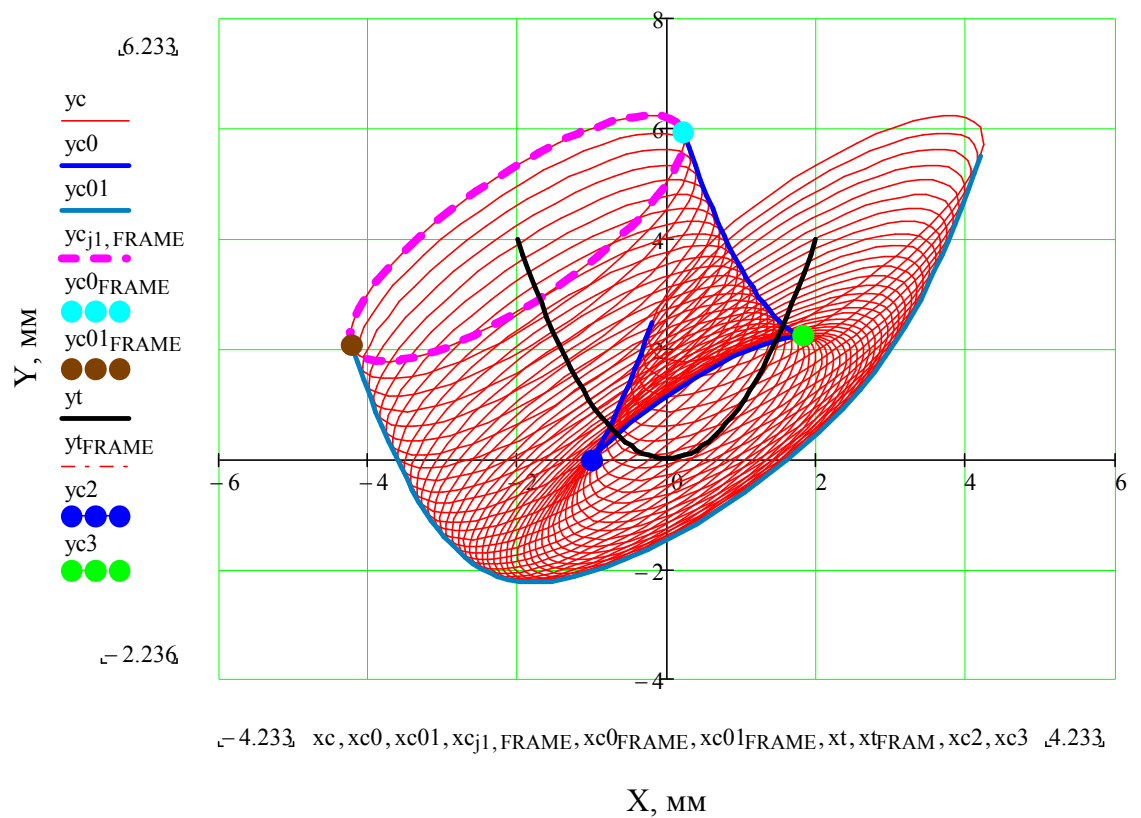
$$NRF2 := \text{Find}(c2, t2)$$

$$NRF2 = \begin{pmatrix} -0.103 \\ 0.216 \end{pmatrix}$$

$$xc3 := x(NRF2_0, NRF2_1) = 1.817$$

$$yc3 := y(NRF2_0, NRF2_1) = 2.234$$

Побудова графіків рівнянь сімейства плоских кривих, огинаючих і знаходження параметрів особливої точки:



Налаштування вікна графіку:

Форматирование выбранного графика X-Y

Оси X, Y Трассировка Формат числа Подписи По умолчанию

Обозначение в легенде	Частота символов	Символ	Ширина символа	Лин
кривая 1	1		1	—
кривая 2	1		1	—
кривая 3	1		1	—
кривая 4	1		1	—
кривая 5	1	●	4	
кривая 6	1	●	4	
кривая 7	1		1	—
кривая 8	1		1	---
кривая 9	1	●	4	

☒ Скрыть аргументы ☒ Скрыть легенду

☐ Сверху слева ☐ Сверху справа
☐ Снизу слева ☐ Снизу справа
☒ Снизу

OK Отмена Применить Справка

Форматирование выбранного графика X-Y

Оси X, Y Трассировка Формат числа Подписи По умолчанию

Символ	Ширина символа	Линия	Толщина линии	Цвет	Тип	Ось Y
	1	—	1	Red	лин...	-
	1	—	3	Blue	лин...	-
	1	—	3	Cyan	лин...	-
	1	---	5	Magenta	лин...	-
●	4		1	Cyan	точ...	-
●	4		1	Brown	точ...	-
	1	—	3	Black	лин...	-
	1	---	1	Red	лин...	-
●	4	—	1	Blue	лин...	-

☒ Скрыть аргументы ☒ Скрыть легенду

☐ Сверху слева ☐ Сверху справа
☐ Снизу слева ☐ Снизу справа
☒ Снизу

OK Отмена Применить Справка

Форматирование выбранного графика X-Y

Оси X, Y | Трассировка | Формат числа | Подписи | По умолчанию

Заголовок:

☒ Сверху ☐ Снизу ☐ Показывать заголовок

Подписи осей:

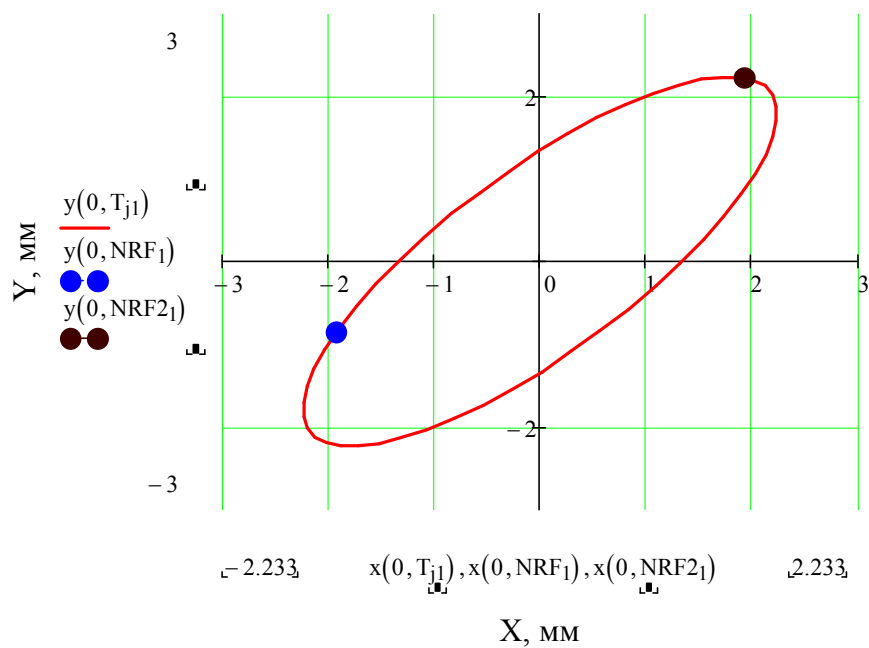
☒ Ось X:

☒ Ось Y:

☒ Ось Y₂:

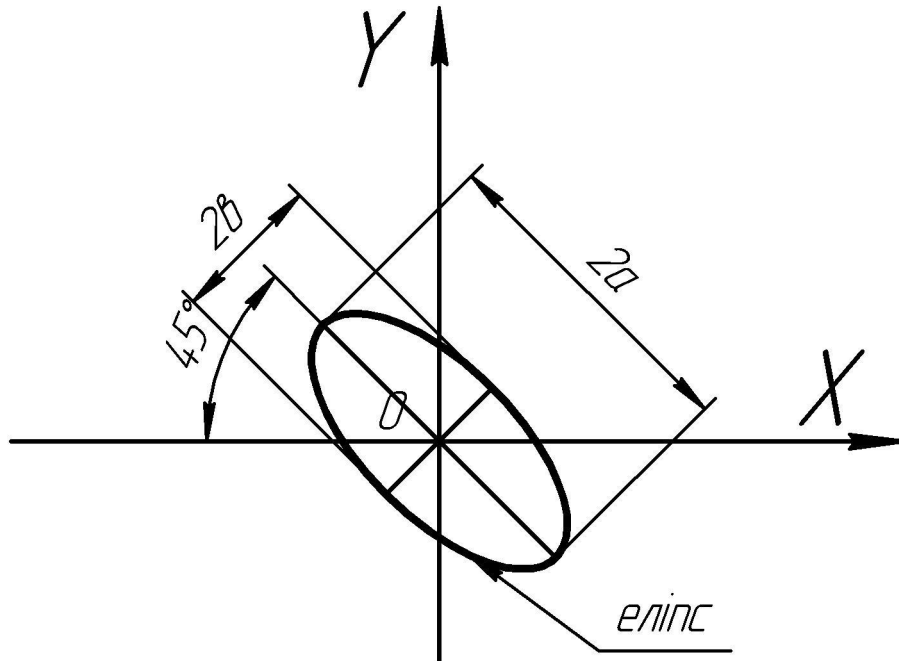
ОК Отмена Применить Справка

Графік твірної кривої з точками, що формують особливі точки на огинаючій сімейства плоских кривих:



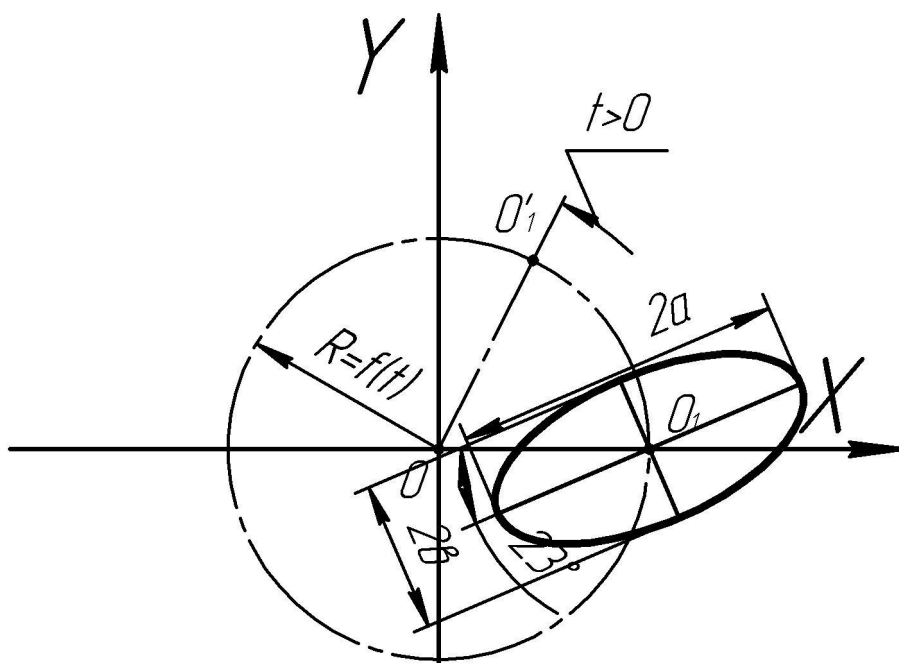
Знайти огинаючу сімейства плоских кривих:

- сімейство кривих задано рухом еліпса центр якого рухається по траєкторії - $y = x^3$, велика вісь еліпса $a=1$, мала вісь еліпса $b=2$



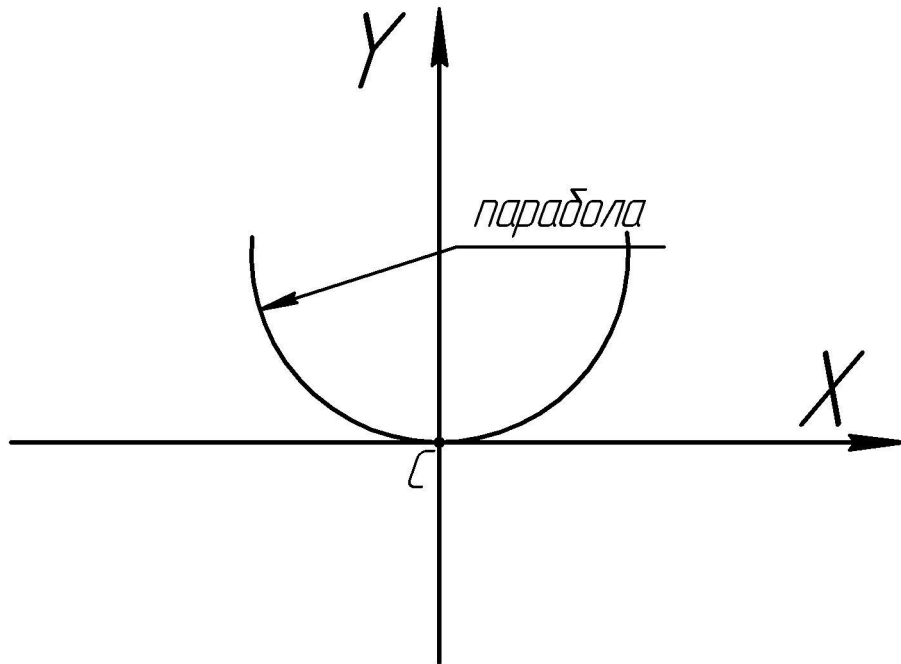
Знайти огинаючу сімейства плоских кривих:

- сімейство кривих задано рухом еліпса центр O_1 якого обертається навколо центра O при чому осі еліпса завжди знаходяться під постійним кутом до відповідних осей координат, велика вісь еліпса $a=5$, мала вісь еліпса $b=15$, функція зміни відстані між центрами O та O_1 в залежності від кута обертання t – має вид $R(t) = 30 + 10\cos(t)$



Знайти огинаючу сімейства плоских кривих:

- сімейство кривих задано рухом параболи центр якої рухається по траєкторії - $y = \sin(x)$,
рівняння параболи $y = -x^2$



Знайти огинаючу сімейства плоских кривих:

- сімейство кривих задано рухом еліпса центр якого рухається по траєкторії - $y = a - 0.3a \sin(2x)$, велика вісь еліпса $a=5$, мала вісь еліпса $b=3.3$

