

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА**

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДО ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ І КУРСУ ТЕХНІЧНИХ ФАКУЛЬТЕТІВ

Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»

Київ
«ПОЛІТЕХНІКА»
2001

Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Збірник завдань до типової розрахункової роботи для студентів I курсу факультетів електронного профілю / Уклад.: Н.Р. Коновалова, Г.Г. Барановська, І.О. Федотова та ін. — К.: ІВЦ «Політехніка», 2001. — 65 с.

*Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(Протокол № 4 від 20.12.01)*

Навчальне видання

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Збірник завдань до типової розрахункової роботи
для студентів I курсу технічних факультетів

Укладачі: Коновалова Наталія Романівна
Барановська Галина Григорівна
Федотова Ірина Олексіївна
Алексєєва Ірина Віталіївна
Дем'яненко Ольга Олегівна
Кіндибалюк Адріана Юріївна
Нефьодова Галина Дмитрівна
Трофимчук Олена Петрівна
Гайдей Віктор Олександрович

Відповідальний
редактор: В. В. Булдигін — д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент: В.Г. Лозовик — канд. фіз.-мат. наук, доц.

Темплан 2001, поз. 137

Підп. до друку 28.01.2002. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Інформаційно-видавничий центр «Політехніка» НТУУ «КПІ»
Лабораторія офсетного друку НТУУ «КПІ»
03056, Київ-56, просп. Перемоги, 37
Зам. № 31. Тираж 200. Ум. др. арк. 3,78.
Папір офсетний. Різограф

Вступ

При вивченні курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» студенти знайомляться з основними положеннями теорії визначників, систем лінійних алгебраїчних рівнянь, векторної алгебри та ін. Навчальним планом даної дисципліни передбачено також набування студентами навичок виконання ряду типових завдань.

Даний збірник підготовлено з метою організації регулярної роботи студентів по вивченню курсу. Кожен студент розв'язує задачі одного з 30 запропонованих варіантів завдань. Крім того, збірник містить додаткові задачі, які обираються і розв'язуються за бажанням студента.

Варіант 1

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 4x + 5.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 13, \\ 2x + 3y + z = 16, \\ x + y + 4z = -1. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3,n} = x_{3,0} + x_{ч,n},$$

де $x_{3,n}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ч,1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{ч,i}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;3;6)$, $M_2(2;2;1)$, $M_3(-1;0;1)$, $M_4(-4;6;-3)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (3; -2; 1)$, $\vec{q} = (-1; 1; -2)$, $\vec{r} = (2; 1; -3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (11; -6; 5)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Ox .

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$. Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{d}$ на $\vec{b}$ ($\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$).

9. Дано точки $A(2; -1)$, $B(4; 5)$, $C(-3; 2)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двограний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oyz ; площиною, що проходить через точку $(0;0;1)$ паралельно площині Oxy ; площиною, що проходить через точку $(1;2;0)$ і містить вісь Oz ; площиною, що проходить через точку $(0;3;0)$ і пряму

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z-4}{0}.$$

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(2;3;1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3};$$

$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 15$ та один з фокусів $F(-10;0)$;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a = 13$, ексцентриситет $\epsilon = \frac{14}{13}$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = -4$;

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - y^2 = 8z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x + y + z = 4, x = 2, y = 3,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{навколо осі } Ox. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 + x_2; 2x_1 + x_3; 3x_1 - x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1; x_2 + 1; x_3 + 2).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -10 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Варіант 2

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 - 6x - 1.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 13, \\ x - 2y + z = -3, \\ 4x - y + z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta,1} = x_{\zeta,1} + x_{\div,1},$$

де $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div,1}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-4;2;6)$, $M_2(2;-3;0)$, $M_3(-10;5;8)$, $M_4(-5;2;-4)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (2;1;0)$, $\vec{q} = (1;-1;2)$, $\vec{r} = (2;2;-1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (3;7;-7)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Ox .

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(2\vec{a} - 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-1;2)$, $B(3;-1)$, $C(0;4)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oxy ; площиною Oyz ; площиною, що проходить через точки $(0;0;3)$ і $(0;1;0)$ паралельно осі Ox ; площиною, що проходить через точку $(0;0;3)$ і пряму $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{3}$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(1;2;\frac{3}{2})$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{2};$$

$$l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 2$ і один з фокусів $F(4\sqrt{2};0)$;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a = 7$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{85}}{7}$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = 5$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + 4y^2 = 16z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, x + y = 4,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Ox. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (0; x_2 - x_3; 0)$$

$$B\vec{x} = (3x_1 + 5x_3; x_1 + x_2 + 1; 3x_2 - 6x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 11 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$\begin{aligned} & -11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 + \\ & + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3. \end{aligned}$$

Варіант 3

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}, f(x) = x^2 + 7x - 2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 8, \\ x + y - z = 2, \\ x - y + 4z = 10. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, i} = x_{\zeta, i} + x_{\div, i},$$

де $x_{\zeta, i}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, i}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, i}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 9. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(7; 2; 4)$, $M_2(7; -1; -2)$, $M_3(-7; -3; 2)$, $M_4(-4; 2; 1)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0; 1; -2)$, $\vec{q} = (3; -1; 1)$, $\vec{r} = (4; 1; 0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-5; 9; -13)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Ox .

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = \frac{1}{5}$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(2\vec{a} - \vec{b})$.

9. Дано точки $A(0; 5)$, $B(2; 2)$, $C(4; 6)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами Oxy та Oxz ; площиною, що проходить через

прямі: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{2} = z-1$ і $x=t$, $y=2, z=t$; площиною, що проходить

через пряму $\begin{cases} 3x - z - 3 = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ паралельно осі Oy .

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(1;0;4)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1};$$

$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E , якщо $A(3;0), B(2; \frac{\sqrt{5}}{3}) \in E$;

б) гіперболи Γ , якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x; A(-8;0) \in \Gamma$;

в) параболу, якщо її директриса $D : y = -2$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$9x^2 + 4y^2 = 36 - 36z^2.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - ax = 0, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} x^2 = 2py, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Ox. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 - x_3^2; 2x_1 + x_3; 3x_1 - x_2)$$

$$B\vec{x} = (0; 3x_1 - 2x_2; x_1 + x_2 - 3x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Варіант 4

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 - 9x + 10.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 10, \\ 3x - 6y + z = 0, \\ x + 3y + 3z = 13. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta,1} = x_{\zeta,1} + x_{\div,1},$$

де $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div,1}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2;1;4)$, $M_2(-1;5;-2)$, $M_3(-7;-3;2)$, $M_4(-6;-3;6)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;5;1)$, $\vec{q} = (3;2;-1)$, $\vec{r} = (-1;1;0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-15;5;6)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Ox .

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = \frac{1}{2}$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-\vec{a} + 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(3;1)$, $B(5;4)$, $C(1;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двограний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною, що проходить через осі Ox і Oz ; площиною, що проходить через прямі $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{3}$ і $x = \frac{y-3}{-2} = z$; площиною Oyz ; площиною, що проходить через точки $(0;0;2)$ і $(0;3;0)$ паралельно осі Ox .

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1;3;1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{1};$$
$$l_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E , якщо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $A(-5;0) \in E$;

б) гіперболи Γ , якщо $A(\sqrt{80};3)$, $B(4\sqrt{6};3\sqrt{2}) \in \Gamma$;

в) параболу, якщо її директриса $D : y = 1$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - ax = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Ox. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (6x_2 - x_3; 5x_1 + x_2 - x_3; 4x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2 + 2; 3x_1 - x_3; x_2 + 3x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

Варіант 5

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 + 8x + 7.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y - 4z = -2, \\ x + 2y + z = 11, \\ 3x + y + z = 14. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta,1} = x_{\zeta,1} + x_{\div,1},$$

де $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div,1}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-1; -5; 2)$, $M_2(-6; 0; -3)$, $M_3(3; 6; -3)$, $M_4(-10; 6; 7)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (2; 1; 0)$, $\vec{q} = (1; -1; 2)$, $\vec{r} = (3; 7; -7)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (2; 2; -1)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Ox .

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{3\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-2\vec{a} + 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(3; 1)$, $B(4; 5)$, $C(2; 0)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що проходить через прямі $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{3} = z$ і

$x = -t - 1, y = t + 3, z = t + 2$; площиною, що перпендикулярна до площини Oxz і відтинає на осях Ox і Oz відрізки 2 і 3.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1; 3; 3)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1};$$

$$l_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 11$,

$$\text{ексцентриситет } \varepsilon = \frac{\sqrt{57}}{11};$$

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$ і фокусна відстань

$$2c = 10\sqrt{13};$$

в) параболу Π , якщо вісь симетрії Ox , $A(27; 9) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - y^2 + z^2 = 4.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 2ax, z = x, z = 3x.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 - 3x_2^2; 5x_2 - x_3; 4x_1 - x_2)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + 2x_2; 2x_2 - x_3; 5x_1 - x_2 - 2x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$ Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Варіант 6

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x - 12.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -6 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y - 5z = -12, \\ 2x + 4y + z = 13, \\ 3x + y - 3z = -4. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta,1} = x_{\zeta,1} + x_{\div,1},$$

де $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div,1}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 9, \\ 12x_1 + 15x_2 - 10x_3 + 9x_4 = 10, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 - 7x_4 = -8. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(0; -1; -1)$, $M_2(-2; 3; 5)$, $M_3(1; -5; -9)$, $M_4(-1; -6; 3)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1; 2; 0)$, $\vec{q} = (2; -1; 3)$, $\vec{r} = (0; 1; 2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (2; 0; -1)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Ox .

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $\vec{a}$ ($\vec{b}_a$).

9. Дано точки $A(1; 3)$, $B(-2; 1)$, $C(0; -3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oyz ; площиною Oxy ; площиною, що проходить через точку $(4; -1; 0)$ і відтинає на осях Ox і Oz відрізки 2 і 3; площиною, що проходить через точку $(0; 3; 0)$ і пряму $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1; 0; 1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1};$$

$$l_2 : \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = \sqrt{15}$ і ексцентриситет $\epsilon = \frac{\sqrt{10}}{25}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ і дійсна піввісь $a = 8$;

в) параболу Π , якщо її вісь симетрії Oy , $A(4; -8) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$z^2 - x^2 - 2y = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$2z = x^2 - y^2, z = 0, z = 2.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox .

Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_3; x_1 + 2x_2; -7x_1 - 3x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1; x_2 + x_3^3; x_1 - 2x_2 - x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$$

Варіант 7

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 + 5x - 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 3x - y - z = 2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta,1} = x_{\zeta,1} + x_{\div,1},$$

де $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div,1}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -1, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 11x_4 = 0, \\ 5x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 21x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(5;2;0)$, $M_2(2;5;0)$, $M_3(1;2;4)$, $M_4(-1;1;1)$. Дове-

сти, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;1;2)$, $\vec{q} = (1;0;1)$, $\vec{r} = (-1;2;4)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-2;4;7)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Ox .

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$. Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-2\vec{a} - 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-3;-2)$, $B(2;0)$, $C(-1;1)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двограний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oyz ; площиною, що проходить через точку $(0;2;0)$ паралельно площині Oxz ; площиною, що проходить через точку $(1;0;3)$ і містить вісь Oy ; площиною, що проходить через точку $(0;0;3)$ і пряму $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z}{2}$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(0;3;-1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-2};$$
$$l_2 : \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 4$ і один з фокусів $F(3;0)$;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь $b = 2\sqrt{10}$ і один з фокусів $F(-11;0)$;

в) параболу, якщо її директриса $D : x = -2$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$\frac{x^2}{25} - z^2 - \frac{y^2}{9} = 1.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2 = 4(x^2 + y^2), x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} z = \sqrt{1-x^2}, \\ y = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oz. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (0; x_1 + 4x_3; 4x_1 - x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + 3; x_2 + 3x_3; x_1 - 4x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2 - 6x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_2x_3.$$

Варіант 8

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 8x + 9.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -1, \\ 2x - 3y + 4z = 13, \\ 3x + y + z = 10. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta\hat{1}} = x_{\zeta\hat{1}} + x_{\div\hat{1}},$$

де $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div\hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -7, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -11. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2; -1; -2)$, $M_2(1; 2; 1)$, $M_3(5; 0; -6)$, $M_4(-10; 9; -7)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1; 3; 0)$, $\vec{q} = (2; -1; 1)$, $\vec{r} = (0; -1; 2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (6; 12; -1)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Ox .

8. Дано вектори $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-3\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(-4; 2)$, $B(3; 3)$, $C(6; 8)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами Oxz та Oyz ; площиною, що паралельна осі Oy і проходить через точки $(3;0;0)$ і $(0;0;1)$; площиною, що проходить через прямі $x = 2t, y = -3t + 3, z = t$ і $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(3;2;6)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1};$$
$$l_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 4$ і один з фокусів $F(3;0)$;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a = 4$, ексцентриситет $\epsilon = \frac{7}{5}$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = 6$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$4x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 18 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$y = x^2, z = y, z + y = 2.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x = y, \\ z = 0 \end{cases}$

навколо осі Ox . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (3x_2 - x_3; x_1 + x_3; x_2 - 4x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1; x_2^2 + x_3; -x_1 + x_2).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -8 & 5 & 12 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$4x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Варіант 9

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & -10 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x + 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 11, \\ 4x + 2y + 4z = 14, \\ 3x - y + 5z = 12. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, \hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 35, \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 50. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-2; 0; -4)$, $M_2(-1; 7; 1)$, $M_3(4; -8; -4)$, $M_4(1; -4; 6)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0; 3; 2)$, $\vec{q} = (2; 1; -1)$, $\vec{r} = (1; -1; 1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (1; -4; 4)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Ox .

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $\vec{a}$ ($\vec{b} \cdot \vec{a}$).

9. Дано точки $A(-3; -1)$, $B(1; -6)$, $C(9; 3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що паралельна осі Ox і проходить через точки $(0;3;0)$ і $(0;0;2)$; площиною, що проходить через прямі $\frac{x}{-3} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{3}$ і $x = t + 1$, $y = -2t + 1, z = t + 1$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(4;3;10)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5};$$
$$l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E , якщо $A(0;\sqrt{3}), B(\sqrt{\frac{14}{3}};1) \in E$;

б) гіперболи Γ , якщо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{8}{7}, A(8;0) \in \Gamma$;

в) параболу, якщо її директриса $D : y = -4$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$4x^2 + 3y^2 - 24z = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 - y^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Ox. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (4x_1 - x_2 + x_3; 0; x_1 - x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; x_2 - x_3; 5).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ -9 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Варіант 10

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ -5 & -10 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 - x - 2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -10, \\ x + 2y - 3z = -14, \\ 2x - y - z = -3. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, \hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(14; 4; 5)$, $M_2(-5; -3; 2)$, $M_3(-2; -6; -3)$, $M_4(-2; 2; -1)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (4; 1; 1)$, $\vec{q} = (2; 0; -3)$, $\vec{r} = (-1; 2; 1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-9; 5; 5)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Ox .

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}$ і $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $\vec{a}$ ($\vec{b}_a$).

9. Дано точки $A(3; -2)$, $B(1; 5)$, $C(-4; 3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами Oxy та Oxz ; площиною, що проходить через

пряму $\begin{cases} 3x + z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, паралельно осі

Oy ; площиною, що проходить через точку $(2; 0; 0)$ і пряму $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-4}$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1; 0; -6)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1};$$
$$l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E , якщо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{8}$, $A(8; 0) \in E$;

б) гіперболи Γ , якщо $A\left(3; -\sqrt{\frac{15}{2}}\right)$, $B\left(\sqrt{\frac{28}{3}}; 2\right) \in \Gamma$;

в) параболу, якщо її директриса $D : y = 4$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = a^2,$$

$$y = x, y = 2x, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0).$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oz. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (5x_1 + 2x_2^2; x_2 - x_3; x_1)$$

$$B\vec{x} = (0; x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_2 - 3x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-6x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Варіант 11

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 6x + 19.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 2x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta,1} = x_{\zeta,1} + x_{\div,1},$$

де $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div,1}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;2;0)$, $M_2(3;0;-3)$, $M_3(5;2;6)$, $M_4(8;4;-9)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;4;1)$, $\vec{q} = (1;3;-1)$, $\vec{r} = (-2;0;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-5;-5;5)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oy .

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 10$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $\vec{a}$ ($\vec{b} \cdot \vec{a}$).

9. Дано точки $A(5;8)$, $B(-2;9)$, $C(-4;5)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що проходить через точку $(-2; 3; 4)$ і відтинає на осях Oy і Oz відрізки 3 і 4; площиною, що проходить через точки $(-1; 2; 0)$, $(0; 2; 1)$, $(2; 2; -1)$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(2; -1; 0)$ та прямі

$$l_1: \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2};$$

$$l_2: \frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 12$ та ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{22}}{6}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}x$ і фокальна відстань $2c = 10$;

в) параболу Π , якщо вісь симетрії Ox і точка $A(-7; -7) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - 3y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$y = x^2, x = y^2, z = xy, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oz. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2; x_1 - 4x_3; x_1 - x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1^3 + x_2; x_1 - x_2; x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Варіант 12

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ -14 & -3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 7x - 2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 5y - z = 11, \\ x + y - 5z = 11, \\ 5x + y - z = 27. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, \hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2; -1; 2)$, $M_2(1; 2; -1)$, $M_3(3; 2; 1)$, $M_4(-4; 2; 5)$. До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (5; 1; 0)$, $\vec{q} = (2; -1; 3)$, $\vec{r} = (1; 0; -1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (13; 2; 7)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oy .

8. Дано вектори $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(2\vec{a} - 4\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-3; -4)$, $B(-4; 3)$, $C(2; 2)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що проходить через прямі $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-3}$ і $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$; площиною, що проходить через точку $(2;6;1)$ перпендикулярно до осі Oz .

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(1; -1; 1)$ та прямі

$$l_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-13}{1};$$

$$l_2: \frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 2$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{\sqrt{29}}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{12}{13}x$ та дійсна піввісь $a = 13$;

в) параболи Π , якщо вісь симетрії Ox і точка $A(-5;15) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + 4z^2 - 8y = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2),$$

$$y = x, y^2 = x.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z = x^2, \\ y = 0 \end{cases}$

навколо осі Ox . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (0; x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_2 - 4x_3)$$

$$B\vec{x} = (-x_1 + 2x_2; x_1 + 3; 3x_1 - 2x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Варіант 13

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 - 3x - 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = -12, \\ 2x + 3y + 4z = -2, \\ x - y - 5z = 15. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta,1} = x_{\zeta,1} + x_{\div,1},$$

де $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div,1}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1, \\ 15x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;1;2)$, $M_2(-1;1;2)$, $M_3(2;-2;4)$, $M_4(-1;0;-2)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;1;1)$, $\vec{q} = (-2;0;1)$, $\vec{r} = (3;1;0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-19;-1;7)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oy .

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 6$, $|\vec{q}| = 7$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $\vec{a}$ ($\vec{b} \cdot \vec{a}$).

9. Дано точки $A(2;5)$, $B(5;2)$, $C(-3;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площиною Oxy ; площиною, що проходить через точку $(0;0;3)$ паралельно осям Ox та Oy ; площиною, що проходить через точку $(1;1;0)$ і містить вісь Oz ; площиною, що проходить через точки $(0;0;0), (0;0;1), (2;1;0)$; площиною, що проходить через точки $(6;0;0)$ і $(0;3;0)$ паралельно осі Oz .

Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(2;-1;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-3}{7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-3};$$

$$l_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-8}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 6$ та один з фокусів $F(-4;0)$;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь $b = 3$ та один з фокусів $F(7;0)$;

в) параболу, якщо її директриса $D : x = -7$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$12x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 24 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = az, x^2 + y^2 = ax, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z = y, \\ x = 0 \end{cases}$

навколо осі Ox . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1^2 + x_2; -x_3; x_1 - x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (4x_3; 0; x_1 - 2x_2 - 2x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Варіант 14

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}, f(x) = x^2 + 10x + 1.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = -5, \\ x + y - z = -1, \\ 3x + 2y - 3z = -1. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta,1} = x_{\zeta,1} + x_{\div,1},$$

де $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div,1}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2;3;1)$, $M_2(4;1;-2)$, $M_3(6;3;7)$, $M_4(7;5;-3)$. До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;0;2)$, $\vec{q} = (0;1;1)$, $\vec{r} = (2;-1;4)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (3;-3;4)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oy .

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(2\vec{a} - \vec{b})$.

9. Дано точки $A(6;-2)$, $B(1;3)$, $C(-4;0)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двограний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площиною Oxz ; площиною, що проходить через точку $(0;3;0)$ паралельно площині Oxz ; площиною, що проходить через точку $(1;0;1)$ і містить вісь Oy ; площиною, що проходить через точки $(0;1;0), (0;2;0), (1;0;2)$; площиною, що проходить через точку $(-1;0;2)$ перпендикулярно до осі Oz .

Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(0;-2;-8)$ та прямі

$$l_1: \frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1};$$

$$l_2: \frac{x+4}{-7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 7$ і один з фокусів $F(5;0)$;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a = 11$ та ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{11}$;

в) параболу, якщо її директриса $D: x = 10$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$2x^2 + 7y^2 + 4z^2 - 28 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = 4 - y^2, z = y^2 + 2, x = -1, x = 2.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{навколо осі } Ox. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (-x_3; 4x_1 + x_2 - x_3; x_2 + 2x_3)$$

$$B\vec{x} = (5; x_1 + x_2; -3x_2 + 2x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -12 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-2x_1^2 - 4x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Варіант 15

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 + 2x - 11.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 10, \\ 3x - y + 4z = 20, \\ x - 2y - 2z = -5. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, \hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 11x_3 + 9x_4 = 3. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;1;-1)$, $M_2(2;3;1)$, $M_3(3;2;1)$, $M_4(5;9;-8)$. Дове-

сти, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (3;1;0)$, $\vec{q} = (-1;2;1)$, $\vec{r} = (-1;0;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (3;3;-1)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oy .

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-3\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(0;5)$, $B(6;2)$, $C(-3;-4)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами Oxz та Oxy ; площиною, що проходить через точку $(1;2;3)$ паралельно площині Oyz ; площиною, що проходить через лінії перетину площин $x = 3$ і $y = 0$ та $x = 3$ і $z = 0$; площиною, що проходить через точки $(0;-3;4)$ та $(1;3;0)$ паралельно осі Ox .

Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(2;-1;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{1};$$
$$l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E , якщо точки $A\left(-\sqrt{\frac{17}{3}}; \frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{21}}{2}; \frac{1}{2}\right) \in E$;

б) гіперболи Γ , якщо рівняння асимптот $y = \pm \frac{1}{2}x$ та $A(6;0) \in \Gamma$;

в) параболу, якщо її директриса $D : y = -1$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$12x^2 - 2y - 5z^2 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2, y = x, \\ y = 2x, x = 1.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z = y^2, \\ x = 0 \end{cases}$

навколо осі Oy . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1; x_2 - x_3; 3x_1 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; x_1 + x_2^2; x_1).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$3x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3.$$

Варіант 16

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 11x + 15.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ x - 3y - z = -6 \\ 8x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, \hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8, \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1; 5; -7)$, $M_2(-3; 6; 3)$, $M_3(-2; 7; 3)$, $M_4(-4; 8; -12)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (2; 0; 3)$, $\vec{q} = (-1; 2; 1)$, $\vec{r} = (1; 1; -1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-1; 7; -4)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oy .

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(2\vec{a} - 5\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-4; 0)$, $B(2; 5)$, $C(2; -2)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двограний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами Oyz і Oxy ; площиною, що проходить через точку $(-2; 0; 3)$ перпендикулярно до осі Oz ; площиною, що проходить через точки $(1; 1; -1), (0; 2; 2), (2; 0; 1)$; площиною, що проходить через точки $(2; 0; 0)$ і $(-2; 6; 0)$ перпендикулярно до площини Oxy .

Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(2; 0; -1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2};$$
$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E , якщо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$, $A(0; 8) \in E$;

б) гіперболи Γ , якщо $A(\sqrt{6}; 0)$, $B(-2\sqrt{2}; 1) \in \Gamma$;

в) параболу, якщо її директриса $D : y = 9$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - xy + y^2 + x + y = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$3x^2 + 2z^2 = 6y.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 3z.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{навколо осі } Oy.$$

Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 - 2x_3; 0; x_1 + x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (2x_1 + x_3; x_2^2; x_1 - x_2 + 2x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 12 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-3x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Варіант 17

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 7y - z = -4, \\ 3x - y + 2z = 13, \\ x + 4y + 3z = 16. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, \hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 7. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-3; 4; -7)$, $M_2(1; 5; -4)$, $M_3(-5; -2; 0)$, $M_4(2; 5; 4)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1; 1; 4)$, $\vec{q} = (0; -3; 2)$, $\vec{r} = (2; 1; -1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (6; 5; -14)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oy .

8. Дано вектори $\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-2\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(-1; -3)$, $B(2; 4)$, $C(3; -1)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами Oxy і Oxz ; площиною, що проходить через точку $(1;3;2)$ перпендикулярно до осі Oy ; площиною, що проходить через вісь Oy і точку $(1;0;1)$; площиною, що проходить через пряму $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-1}{-2}$ паралельно осі Oy . Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(2;2;5)$ та прямі

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1};$$

$$l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 11$ та ексцентриситет $\varepsilon = \frac{10}{11}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{\sqrt{11}}{5}x$ та фокусна відстань $2c = 12$;

в) параболу Π , якщо її вісь симетрії Ox , $A(-7;5) \in \Pi$;

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$3x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, (z \geq 0),$$

$$x^2 + y^2 = R(R - 2z)$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z = 4y^2, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2 - 3x_3; 2x_1 + x_2; 4x_1 - 3x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_2 + x_3 + 1; x_1 - x_2; 3x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2 + 10x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Варіант 18

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -11 & 0 \\ 7 & 3 & 11 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ 2x + 2y + z = -2, \\ x - 3y + 4z = 2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, i} = x_{\zeta, 1} + x_{\div, i},$$

де $x_{\zeta, i}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, 1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, i}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 9x_4 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 13 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 22x_4 = 23 \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-1; 2; -3)$, $M_2(4; -1; 0)$, $M_3(2; 1; -2)$, $M_4(3; 4; 5)$. До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1; 0; 4)$, $\vec{q} = (-1; 1; 3)$, $\vec{r} = (1; -2; 0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (6; -1; 7)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oy .

8. Дано вектори $\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(2\vec{a} - 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(0; -1)$, $B(-2; 5)$, $C(3; 2)$. В ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами Oxz і Oxy ; площиною, що проходить через точку $(1; 3; -1)$ паралельно площині Oxz ; площиною, що проходить через точки $(4; 0; 0), (0; 1; 3)$ паралельно осі Oy ; площиною, що проходить через точку $(1; 1; \frac{3}{2})$ і пряму $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-3}$. Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(0; 1; -1)$ та прямі

$$l_1: \frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3};$$

$$l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 5$ та ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{1}{3}x$ і дійсна піввісь $a = 3$;

в) параболи Π , якщо вісь симетрії Ox , $A(-9; 6) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$16x^2 - y^2 + 32z = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2,$$

$$z^2 \leq 4(x^2 + y^2).$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oy. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - x_3; x_2 + 3x_3; 0)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2^2 + x_3; 0; x_1 - x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-5x_1^2 - x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Варіант 19

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 3 & -14 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 + 16x - 2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4, \\ 2x - y + z = 5, \\ x + y - 3z = -7. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, \hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(4; -1; 3)$, $M_2(-2; 1; 0)$, $M_3(0; -5; 1)$, $M_4(3; 2; 6)$. До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1; 0; 5)$, $\vec{q} = (-1; 3; 2)$, $\vec{r} = (0; -1; 1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (5; 15; 0)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oy .

8. Дано вектори $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $\vec{a}$.

9. Дано точки $A(0; 5)$, $B(2; 2)$, $C(4; 6)$. В ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: площиною Oyz ; площиною, що проходить через точку $(2;3;1)$ перпендикулярно до осі Ox ; площиною, що проходить через точку $(0;2;2)$ і містить вісь Ox ; площиною, що проходить через точки $(1;0;0), (3;0;0), (0;1;2)$; площиною, що проходить через точку $(1;0;3)$ паралельно площині Oxy . Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(2;2;4)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3};$$
$$l_2 : \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 9$ і один з фокусів $F(7;0)$;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь $b = 6$ і один з фокусів $F(12;0)$;

в) параболу, якщо її директриса $D : x = -\frac{1}{4}$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$3x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = R^2, z = 0,$$
$$Rz = 2R^2 + x^2 + y^2.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (-x_1 + x_2; 5; x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (3x_1 - x_2; 3x_2; x_2 + 4x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & -4 \end{vmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_2^2 - 7x_3^3 - x_1x_2 + 2x_2x_3 - 8x_1x_3.$$

Варіант 20

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 - x + 2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 6y + 3z = 8, \\ 6x + 3y - z = 34, \\ 3x + y - 6z = 22. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, \hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 - 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 - 14x_3 - x_4 = 14, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 0; 3)$, $M_3(2; 1; -1)$, $M_4(2; -2; -4)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1; 1; 0)$, $\vec{q} = (0; 1; -2)$, $\vec{r} = (1; 0; 3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (2; -1; 11)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oy .

8. Дано вектори $\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-\vec{a} + 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$, $C(0; 4)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами Oxz і Oyz ; площиною, що проходить через точку $(1; 2; 2)$ перпендикулярно до осі Oz ; площиною, що проходить через точку $(0; -1; 4)$ паралельно площині Oxy ; площиною, що паралельна до осі Oz і проходить через точки $(2; 0; 5)$ і $(0; 3; 1)$. Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(0; 0; -5)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3};$$
$$l_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 5$ та один з фокусів $F(-10; 0)$;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a = 9$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{4}{3}$;

в) параболу, якщо її директриса $D : x = 12$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$36x^2 - 9y^2 - 4z^2 - 36 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oz. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 + 2x_2; -3x_3; 4x_1 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; 3x_3; 2x_2 + 1).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 8 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 8x_1x_3.$$

Варіант 21

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x - 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

$$а) A = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; б) A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 5, \\ 2x + y - 3z = -6, \\ 3x - 2y - z = -2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta\hat{1}} = x_{\zeta\hat{1}} + x_{\div\hat{1}},$$

де $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div\hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 14, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 13x_4 = 23, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 20x_4 = 37, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 19. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;2;0)$, $M_2(1;-1;2)$, $M_3(0;1;-1)$, $M_4(-3;0;1)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;0;2)$, $\vec{q} = (-1;0;1)$, $\vec{r} = (2;5;-3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (11;5;-3)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oz .

8. Дано вектори $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 8$, $|\vec{q}| = \frac{1}{2}$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-2\vec{a} + 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(3;1)$, $B(5;4)$, $C(1;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точку $(2; 3; -4)$ і відтинає на осях Ox і Oz відрізки 2 і 4; площиною, що проходить через точку $(0; 1; 0)$ паралельно площині Oxz . Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(3; 0; 2)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{0};$$

$$l_2 : \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E , якщо $A(0; -2)$, $B\left(\frac{\sqrt{15}}{2}; 1\right) \in E$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{2\sqrt{10}}{9}x$ і один з фокусів $F(-11; 0)$;

в) параболу, якщо її директриса $D : y = 5$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$y^2 - 4x^2 + z = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, z = 0, y = 1,$$

$$y - 2x, y = 6 - x.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2 + 3x_3; x_1; 2x_2 - 3x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; x_1 + 5x_3; x_1^2 + x_2).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Варіант 22

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, f(x) = x^2 - 6x + 10.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

$$3.1) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; 3.2) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = -1, \\ x - 3y + 2z = -1, \\ 3x + y + z = 2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta\hat{1}} = x_{\zeta\hat{1}} + x_{\div\hat{1}},$$

де $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div\hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 5x_2 + x_3 - 7x_4 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;0;2)$, $M_2(1;2;-1)$, $M_3(2;-2;1)$, $M_4(2;1;0)$. До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (2;0;1)$, $\vec{q} = (1;1;0)$, $\vec{r} = (4;1;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (8;0;5)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oz .

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{q} - \vec{p}$, $|\vec{p}| = \frac{5}{2}$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$. Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-3\vec{a} + 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(3;1)$, $B(4;5)$, $C(2;0)$. В ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

- а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;
 г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;
 д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;
 е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точку $(2;1;1)$ і відтинає на осях Ox і Oy відрізки 2 і 3; площиною, що проходить через точку $(1;0;0)$ паралельно площині Oyz . Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(5;3;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-3};$$

$$l_2 : \frac{x}{0} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

- а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;
 б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

- а) еліпса E , якщо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$, $A(-6;0) \in E$;
 б) гіперболи Γ , якщо $A(\sqrt{8};0)$, $B(3;3) \in \Gamma$;
 в) параболи, якщо її директриса $D : y = 1$;

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$2x^2 + 7y^2 + 4z^2 = 28y.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$y^2 = x, y^2 = 4x, z = 0, z + x = 6.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z = x^2, \\ y = 0 \end{cases}$

навколо осі Oy . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 - 2x_2; x_3 + x_1; 6)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + 3x_3; 0; 5x_1 + 6x_2 - 3x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2 - 8x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Варіант 23

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 2 & -23 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 + 24x - 3.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta\hat{1}} = x_{\zeta\hat{1}} + x_{\div\hat{1}},$$

де $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div\hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18, \\ 8x_1 - 4x_2 + 20x_3 - 45x_4 = 28. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;2;-3)$, $M_2(1;0;1)$, $M_3(-2;-1;6)$, $M_4(0;-5;-4)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;1;3)$, $\vec{q} = (1;2;-1)$, $\vec{r} = (2;0;-1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (3;1;8)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oz .

8. Дано вектори $\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{3\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(0;3)$, $B(-2;-1)$, $C(0;-3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двограний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: площинами Oxy Oyz ; площиною, що проходить через точки $(2;0;0), (-2;3;3), (0;1;2)$. площиною, що проходить через точку $(\frac{4}{3};1;0)$ та вісь Oz ; площиною, що проходить через точку $(0;2;0)$ паралельно площині Oxz . Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(1;0;-1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1};$$

$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{0}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 25$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{5}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{\sqrt{29}}{14}x$ і фокусна відстань $2c = 30$.

в) параболи Π , якщо вісь симетрії Oy , $A(4;1) \in \Pi$;

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + y^2 + 3z^2 = 6x.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = \frac{y^2}{2}, 2x + 3y - 12 = 0,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z = y, \\ x = 0 \end{cases}$

навколо осі Oz . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1; x_2 - 3x_3; x_1 + x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_3; 2x_1 - x_3; x_1 - x_3^3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-3x_2^2 + 4x_3^2 - x_1x_2 + 10x_1x_3.$$

Варіант 24

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 - 10x + 1.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y - 4z = 1, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x - y - z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta\hat{1}} = x_{\zeta\hat{1}} + x_{\div\hat{1}},$$

де $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div\hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(3;10;-1)$, $M_2(-2;3;-5)$, $M_3(-6;0;-3)$, $M_4(1;-1;2)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (3;0;2)$, $\vec{q} = (1;2;-1)$, $\vec{r} = (-1;1;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (8;1;12)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oz .

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 5$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $\vec{a}$ ($\vec{b} \cdot \vec{a}$).

9. Дано точки $A(-3;-2)$, $B(2;0)$, $C(-1;1)$.

У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

- а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;
 г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;
 д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;
 е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двограний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що паралельна осі Oy і відтинає на осях Ox і Oz рівні відрізки довжиною 2; площиною, що проходить через точки $(-2; 5; 3), (0; 0; 3), (2; 5; -3)$. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(0; 3; 0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0};$$

$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{2}.$$

- а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;
 б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 2\sqrt{15}$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{8}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{5}{6}x$ і дійсна піввісь $a = 6$;

в) параболи Π , якщо її вісь симетрії Oy , $A(-2; 3\sqrt{2}) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - 4y^2 - z^2 + 4 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = 9 - y^2, 3x + 4y = 12,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0 (y \geq 0).$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} 2y + z = 2, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (2x_3; x_1 + x_2 - x_3; x_1 + 2)$$

$$B\vec{x} = (x_1; x_2 + 3x_3; 0).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -10 \\ -8 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Варіант 25

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ 10 & -3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 9x + 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 3, \\ 2x + y - z = 3, \\ x + y + 3z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta\hat{1}} = x_{\zeta\hat{1}} + x_{\div\hat{1}},$$

де $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta\hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div\hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 13, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-1; 2; 4)$, $M_2(-1; -2; -4)$, $M_3(3; 0; -1)$, $M_4(7; -3; 1)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1; 4; 1)$, $\vec{q} = (-3; 2; 0)$, $\vec{r} = (1; -1; 2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-9; -8; -3)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oz .

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-3\vec{a} + 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-4; 2)$, $B(-2; -2)$, $C(6; 8)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точки $(0;0;1), (-2;3;1), (4;0;-1)$. площиною, що проходить через точки $(2;0;0)$ і $(0;1;0)$ паралельно осі Oz . Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(-1;1;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1};$$

$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{0}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 13$ і один з фокусів $F(-5;0)$;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь $b = 4\sqrt{6}$ і один з фокусів $F(-7;0)$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = -\frac{3}{8}$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$4x^2 - y^2 - z^2 - 4 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Ox. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2 - 3x_3; x_1 + 2x_3; x_1 - x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (0; x_1 + 5; x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-5x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Варіант 26

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 7x + 12.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 11, \\ 3x + y + z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta,1} = x_{\zeta,1} + x_{\div,1},$$

де $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div,1}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(0; -3; 1)$, $M_2(-4; 1; 2)$, $M_3(2; -1; 5)$, $M_4(3; 1; -4)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0; 2; 1)$, $\vec{q} = (0; 1; -1)$, $\vec{r} = (5; -3; 2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (15; -20; -1)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oz .

8. Дано вектори $\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(2\vec{a} - \vec{b})$.

9. Дано точки $A(-3; 0)$, $B(1; 4)$, $C(3; -1)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точку $(0;0;-3)$ та лінію перетину площин $2x + 3y - 6 = 0$ і Oxy ; площиною, що проходить через точку $(0;0;-2)$ паралельно площині Oxy ; площиною, що проходить через точку $(1;0;-2)$ перпендикулярно до осі Ox . Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(4;0;-1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{3};$$

$$l_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 7$ і один з фокусів $F(13;0)$;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь $b = 4$ і один з фокусів $F(-11;0)$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = 13$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + y^2 + 2 = z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$az = a^2 - x^2 - y^2, z = a - x - y,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} xy = a^2, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 - 2x_2; x_2 + 3x_3; x_1 - x_2)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_3; -x_2; -x_1 - x_3^3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & -3 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Варіант 27

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 - 14x + 5.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ x + y + 2z = 2, \\ 2x + 2y + 5z = 3. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta,1} = x_{\zeta,1} + x_{\div,1},$$

де $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta,1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div,1}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 12x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$, $M_3(3;0;1)$, $M_4(-4;3;5)$. До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;0;1)$, $\vec{q} = (1;-2;0)$, $\vec{r} = (0;3;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (2;7;5)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oz .

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $\vec{a}$.

9. Дано точки $A(3;-2)$, $B(1;5)$, $C(-4;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точки $(0;0;2), (-1;2;3), (1;1;1)$; площиною, що проходить через пряму $x = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$ перпендикулярно до площини Oyz . Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(1;4;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{1};$$

$$l_2 : \frac{x}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E , якщо $A(-3;0)$, $B\left(1; \frac{\sqrt{40}}{3}\right) \in E$;

б) гіперболи Γ , якщо рівняння її асимптот $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}x$, $A(-6; \sqrt{22}) \in \Gamma$;

в) параболу, якщо її директриса $D : y = 4$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 + 10xy + y^2 + 18x - 6y - 16 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$2x^2 + y^2 - 4z = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2 = xy, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x+z=2, \\ y=0 \end{cases}$ навколо осі Oy . Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1; x_2 + x_3; x_1 + x_2 + 3x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_2; -x_3 + 1; x_1 - x_2).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{vmatrix} 4 & 13 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Варіант 28

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + x + 3.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$; б) $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 8, \\ x - 3y - 5z = 6, \\ 3x + y - 7z = -4. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, \hat{1}} = x_{\zeta, \hat{1}} + x_{\div, \hat{1}},$$

де $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, \hat{1}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, \hat{1}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-2; -1; -1)$, $M_2(0; 3; 2)$, $M_3(3; 1; -4)$, $M_4(-4; 7; 3)$. До-

вести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0; 1; 5)$, $\vec{q} = (3; -1; 2)$, $\vec{r} = (-1; 0; 1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (8; -7; -13)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oz .

8. Дано вектори $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(5; 8)$, $B(-2; 9)$, $C(-4; 5)$. В ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через пряму $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ і точку $(0;0;-3)$; площиною, що проходить через точки $(0;3;0)$ і $(0;0;-3)$ паралельно осі Ox . Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(3;-5;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1};$$
$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+2}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E , якщо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{6}$, $A(0;-\sqrt{11}) \in E$;

б) гіперболи Γ , якщо $A(\sqrt{\frac{32}{3}};1)$, $B(\sqrt{8};0) \in \Gamma$;

в) параболу, якщо її директриса $D : y = -3$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$2x^2 + 12xy + 2y^2 + 60x + 20y + 51 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 1.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 2y,$$
$$z = 0, z = x + 2y.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox .

Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2 - x_3; 3; x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1; 0; x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Варіант 29

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -7 & 9 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; f(x) = x^2 + 3x + 12.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, i} = x_{\zeta, 1} + x_{\div, i},$$

де $x_{\zeta, i}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, 1}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, i}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-3; -5; 6)$, $M_2(2; 1; -4)$, $M_3(0; -3; -1)$, $M_4(-5; 2; -8)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (4; 0; 1)$, $\vec{q} = (3; 1; -1)$, $\vec{r} = (0; -2; 1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (0; -8; 9)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oz .

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $\vec{a}$ ($\vec{b}_a$).

9. Дано точки $A(-3; -4)$, $B(-4; 3)$, $C(2; 2)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через прямі $\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{8} = \frac{z}{-2}$ і $x=0, y=2t, z=2-t$; площиною, що проходить паралельно осі Oy і відтинає на осях Ox і Oz рівні відрізки довжиною 2. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(4;1;5)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0};$$

$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a=15$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{13}{15}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{\sqrt{17}}{8}x$ і фокусна відстань $2c=18$;

в) параболу Π , якщо її вісь симетрії Oy , $A(4;-10) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$z = x^2 + 2y^2 - 2.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = xy, x^2 + y^2 = R^2 (x, y, z \geq 0).$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{навколо осі } Oy.$$

Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (5x_3; -x_1 + 2x_2; 0)$$

$$B\vec{x} = (x_1 - x_2 - x_3; x_2^2 + x_1; -x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-4x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Варіант 30

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; f(x) = x^2 + 3x + 8.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1} . Результат перевірити.

$$а) A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\zeta, i} = x_{\zeta, i} + x_{\div, i},$$

де $x_{\zeta, i}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\zeta, i}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div, i}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2; -4; -3)$, $M_2(5; -6; 0)$, $M_3(-1; 3; -3)$, $M_4(-10; -8; 7)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H , застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1; 0; 5)$, $\vec{q} = (3; 2; 7)$, $\vec{r} = (5; 0; 9)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-4; 2; -12)$ в цьому базисі;

б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oz .

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ і $\vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) проекцію $\vec{b}$ на $(-2\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(2; 5)$, $B(5; 2)$, $C(-3; -3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM , записати як рівняння у відрізках;

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF ;

в) рівняння висоти CD , записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD ;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF .

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2 ;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двограний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через

пряму $\begin{cases} x - y = 0, \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$ перпендикулярно до площини Oyz ; площиною, що

проходить через прямі $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ і $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-3}$. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(3;2;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1};$$

$$l_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1 ;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 2\sqrt{2}$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{9}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x \text{ і дійсна піввісь } a = 6;$$

в) параболу Π , якщо вісь симетрії Oy , $A(15; -45) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4xy + 4y + 1 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $z = 4 - y^2, y = \frac{x^2}{2}, z = 0$.

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої

$$\begin{cases} x = 2 - y^2, \\ z = 0 \end{cases} \text{ навколо осі } Oy. \text{ Зробити}$$

рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (6x_3; -x_2 - x_3; x_1 - 2x_2)$$

$$B\vec{x} = (x_1 - 2x_2; x_2 - 3x_3; 4x_2 + 4).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A . Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Додаткові задачі

1. Розв'язати матричне рівняння:

$$1) A_1 X = A_2; \quad 3) A_3 X = A_4.$$

$$2) \ XA_5A_6 = (1 - 2); \quad 4) \ A_7X = A_8.$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix};$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; A_6 = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -7 \end{bmatrix};$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, A_7 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, A_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Нехай $A^2 + A + E = 0$. Довести, що матриця A не вироджена. Вивести формулу для знаходження A^{-1} .

3. Довести, що довільну матрицю можна зобразити у вигляді симетричної та косиметричної матриці.

4. Довести:

[illegible]

5. Обчислити визначник Δ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 \end{vmatrix}. \quad A_9 = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{matrix} \right\|.$$

6. Знайти значення багаточлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ від матриці A_0 .

7. Перевірити формулу:

$$(S^{-1}AS)^n = S^{-1}A^nS.$$

8. Знайти обернену матрицю A^{-1} :

$$1) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix}.$$

9. Знайти ранг матриці:

$$1) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Знайти значення λ , при яких матриця A_{10} (завдання 11) має найменший ранг.

11. Знайти ранг матриці A_{10} при різних значеннях λ .

$$A_{10} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}; A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

12. Дослідити систему, яка задана розширеною матрицею, при різних значеннях λ .

$$1) A = \left\| \begin{array}{ccc|c} 3 & 2-\lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & 2\lambda \\ 4\lambda+3 & 2\lambda-1 & \lambda+4 & 2\lambda+3 \end{array} \right\|.$$

$$2) A = \left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7 \end{array} \right\|.$$

$$3) A = \left\| \begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right\|.$$

13. Які з рядків матриці A :

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{array} \right\|$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків для однорідної системи рівнянь, з матрицею B :

$$B = \left\| \begin{array}{ccccc} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right\|.$$

14. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не колінеарні і $\overrightarrow{AB} = \frac{\alpha}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = 4(3\vec{a} - \vec{b})$, $\overrightarrow{CD} = 4\beta\vec{b}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$. Знайти α і β і довести колінеарність $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{DA}$.

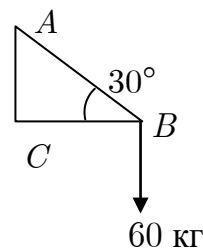
15. Задано два вектори $\vec{a} = (8; 4; 1)$ та $\vec{b} = (2; -2; 1)$. Знайти вектор $\vec{c}$, компланарний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, ортогональний вектору $\vec{a}$, рівний йому за довжиною і утворює з вектором $\vec{b}$ тупий кут.

16. Визначити параметр λ так, щоб векторний добуток векторів $\vec{a} = (0; 2; -1)$ і $\vec{b} = (2; 0; \lambda)$ утворював кут $\frac{2\pi}{3}$ з прямою $y = 2x - 2, z = 3x - 1$.

17. Обчислити в точці $M(-3; 4; 2)$ напруженість $\vec{M}$ магнітного поля, утворе-

ного струмом $\vec{I} = -3\vec{k}$, який тече вздовж прямолінійного провідника.

18. Вантаж вагою 60 кг підтримується двома стрижнями AB і CB . Визначити сили, які виникають в стрижнях, якщо $\angle ABC = 30^\circ$.



19. Скласти рівняння бісектриси кута, утвореного прямими $x - 7y = 1$ та $x + y = -7$, всередині якого знаходиться точка $A(1, 1)$.

20. При яких значеннях B та D пряма $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ лежить у площині Oxy .

21. При яких значеннях D пряма $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$ перетинає вісь Oz .

22. Показати, що прямі $x = 3z - 4$, $y = z + 2$ та $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$ перетинаються. Знайти точку їх перетину.

23. Напрявні косинуси прямої, яка проходить через точку $M(2; 1; -1)$ пропорційні числам $3 : 4 : 1$. Знайти рівняння площини, яка проходить через цю пряму і перпендикулярна до площини $5x - 3y + 2z - 9 = 0$.

24. Вивести формулу відстані між двома точками в полярних координатах.

25. Знайти рівняння гіперболи, директриси якої поділяють фокусну відстань на три рівні частини.

26. Скласти рівняння дотичних до кривої $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y = 16$, які проходять через точку $A(3; 3)$.

27. Визначити тип кривої:

$$1) (3x - 4y)^2 - 5(x + 2y - 1)^2 = 1.$$

$$2) (4x + 3y - 1)^2 + (4x + 3y + 2)^2 = 5.$$