

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**В. С. Бойко,
М. П. Бурик,
Л. Ю. Спінул**

ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

Конспект лекцій

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітніми програмами «Електричні системи і мережі», «Електричні станції»,
«Електричні машини і апарати», «Управління, захист та автоматизація енергосистем»,
«Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність»,
«Електротехнічні пристрої та електротехнологічні комплекси», «Нетрадиційні та
відновлювані джерела енергії»
спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент *Чумак, В.В.*, канд. техн. наук, доц.,
кафедра електромеханіки, ФЕА

Відповідальний
редактор

Острроверхов, М. Я., док. техн. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 27.04.2023 р.)
за поданням Вченої ради факультету/навчально-наукового інституту
(протокол № 10 від 24.04.2023 р.)*

Представлено конспект лекцій з освітньої компоненти "Основи теорії електромагнітного поля", у якому розглядаються фізичні та математичні підґрунтя теорії електромагнітного поля, основні визначення, рівняння та характеристики електромагнітного поля, електростатичне поле, стаціонарне електромагнітне поле, змінне електромагнітне поле, енергія електромагнітного поля. Систематизовано методи дослідження електромагнітних полів та приділено увагу класичним методам розв'язання рівнянь поля. Звернено увагу на графічну побудову картин полів, що є корисним для успішного засвоєння складних фізичних закономірностей.

Призначений для студентів денної, заочної та дистанційної форм навчання спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

Реєстр. № НП 22/23-665. Обсяг 9,4 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© В. С. Бойко, М. П. Бурик, Л. Ю. Спінул
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

ЗМІСТ

	стор.
Вступ.....	7
Основні положення.....	8
1 РОЗДІЛ 1 ФІЗИЧНЕ ТА МАТЕМАТИЧНЕ ПІДГРУНТЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ	
1.1 ТЕМА 1.1 <i>Основні базові поняття класичної теорії електромагнітного поля</i>	
1.1.1 Лекція №1 Основні базові поняття класичної теорії електромагнітного поля.....	9
1.2 ТЕМА 1.2 <i>Характеристики векторного і скалярного полів у різних системах координат</i>	
1.2.1 Лекція №2 Векторне і скалярне поле.....	27
1.2.2 Лекція №3 Векторне і скалярне поле.....	34
2 РОЗДІЛ 2 ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ, РІВНЯННЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ	
2.1 ТЕМА 2.1 <i>Загальна характеристика електромагнітного поля. Система рівнянь поля</i>	
2.2.1 Лекція №4 Загальна характеристика електромагнітного поля. Система рівнянь поля в інтегральній формі.....	44
2.2.2 Лекція №5 Система рівнянь поля в диференціальній формі.....	52
3 РОЗДІЛ 3 ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ	
3.1 ТЕМА 3.1 <i>Рівняння електростатичного поля та його властивості</i>	
3.1.1 Лекція №6 Електростатичне поле та його властивості.....	62
3.2 ТЕМА 3.2 <i>Розрахунки електростатичного поля</i>	
3.2.1 Лекція №7 Розрахунок електростатичних полів різної конфігурації.....	74

3.2.2	Лекція №8 Розрахунок електростатичних полів різної конфігурації.....	85
3.2.3	Лекція №9 Приклади розрахунку електростатичних полів.....	96
3.3	ТЕМА 3.3 <i>Метод дзеркальних зображень</i>	
3.3.1	Лекція №10 Приклади розрахунку електростатичних полів за методом дзеркальних зображень.....	107
4	РОЗДІЛ 4 СТАЦІОНАРНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ	
4.1	ТЕМА 4.1 <i>Електричне поле постійного струму</i>	
4.1.1	Лекція №11 Електричне поле постійного струму.....	117
4.2	ТЕМА 4.2 <i>Магнітне поле постійного струму</i>	
4.2.1	Лекція №12 Магнітне поле постійного струму.....	130
5	РОЗДІЛ 5 ЗМІННЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ	
5.1	ТЕМА 5.1 <i>Змінне електромагнітне поле в ідеальному діелектрику</i>	
5.1.1	Лекція №13 Змінне електромагнітне поле в ідеальному діелектрику.....	144
5.2	ТЕМА 5.2 <i>Змінне електромагнітне поле в провідному середовищі</i>	
5.2.1	Лекція №14 Змінне електромагнітне поле в провідному середовищі.....	156
6	РОЗДІЛ 6 Енергія електромагнітного поля	
6.1	ТЕМА 6.1 <i>Теорема Умова-Пойнтінга, вектор Пойнтінга</i>	
6.1.1	Лекція №15 Енергія електромагнітного поля	173
6.2	ТЕМА 6.2 <i>Передавання енергії в електромагнітному полі</i>	
6.2.1	Лекція №16 Передавання енергії в електромагнітному полі....	176
6.2.2	Лекція №17 Обмеженість класичної теорії електромагнітного поля Максвела.....	192
	Бібліографічний список використаної літератури.....	206

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ЕМП – електромагнітне поле

ЕМХ - електромагнітні хвилі

ЕРС – електрорушійна сила

E, e – джерело ЕРС

\vec{P} - вектор Пойнтінга

A, \vec{A} – стала, робота по переміщенню заряду, векторний потенціал магнітного поля

\vec{B} - вектор індукції магнітного поля

$C, c = 299\,792\,458$ м/с - електрична ємність, значення швидкості світла

\vec{D} – вектор електричного зміщення

$\vec{E}, e = 1.6 \cdot 10^{-49}$ К – напруженість електричного поля, значення заряду електрона

F, f – сила електричного поля, лінійна частота

G – провідність

\vec{H} - вектором напруженості магнітного поля

I, i – електричний струм, одиничний орт

J, j – густина електричний струм, одиничний орт

j – одиничний орт

k – одиничний орт

L, l – власна індуктивність, довжина, контур

Q, q - електричний заряд

R, r – активний опір, радіус

S – поверхня

T, t – температура, час

U – електрична напруга, координата тривимірної системи

V – об'єм, координата тривимірної системи

W, w – енергія, кількість витків котушки індуктивності, координата тривимірної системи

x, y, z - осі тривимірної системи координат

Z_C – хвильовий опір

γ – питома електрична провідність

$\vec{\delta}$ – вектор густини електричного струму в провідному середовищі

ϵ – діелектрична проникність (відносна)

$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \left(\frac{\Phi}{\text{М}} \right)$ - електрична стала

ϵ_a - абсолютна діелектрична проникність

λ – довжина хвилі у пустоті

μ – магнітна проникність (відносна)

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^7 \left(\frac{\text{ГН}}{\text{М}} \right)$ – магнітна проникність (відносна)

μ_a – абсолютна магнітна проникність

\vec{v}, v – вектор швидкості заряду, фазова швидкість хвилі

σ – поверхнева щільність заряду

τ – лінійна щільність заряду

$\pi \approx 3.14159$ - математична константа

$\rho_{\text{вільн}}$ - об'ємна густина вільного заряду

Φ – потік, магнітний потік

ϕ – потенціал електричного поля

Ψ – магнітне потокозчеплення, потік

$\omega = 2\pi f$ – кутова частота

ВСТУП

Освітня компонента «Основи теорії електромагнітного поля» призначена для підготовки бакалаврів за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та спеціалізаціями «Електричні системи і мережі», «Електричні станції», «Електричні машини і апарати», «Управління, захист та автоматизація енергосистем», «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність», «Електротехнічні пристрої та електротехнологічні комплекси», «Нетрадиційні та відновлювані джерела енергії».

Предметом зазначеної освітньої компоненти є система рівнянь Максвела електромагнітного поля, електростатичне, стаціонарне і змінне електромагнітні поля, передача енергії поля.

Метою навчального посібника (конспекту лекцій) є формування у здобувачів здатності використовувати основні закони електротехніки для пояснення принципів генерування, передавання і споживання електричної енергії, отримання знань з основ теорії електромагнітного поля та вмінь застосовувати положення теорії балансу енергії в електромагнітному полі й вектора Пойнтінга для аналізу процесу передачі енергії в електротехнічних пристроях.

Конспект лекцій з освітньої компоненти «Основи теорії електромагнітного поля» складається з наступних розділів:

- Фізичне та математичне підґрунтя теорії електромагнітного поля;
- Основні визначення, рівняння та характеристики електромагнітного поля;
- Електростатичне поле;
- Стаціонарне електромагнітне поле;
- Змінне електромагнітне поле;
- Енергія електромагнітного поля.

Основні положення

Електромагнітне поле представляє собою вид матерії, що здійснює на заряджені частинки силову дію та визначається у всіх точках двома векторами величинами, які характеризують дві його сторони - електричне та магнітне поле.

Електричне поле – це складова електромагнітного поля, яка характеризується впливом на електрично заряджену частинку з силою, що пропорційна заряду частинки та не залежить від її швидкості.

Магнітне поле – це складова електромагнітного поля, яка характеризується впливом на рухому частинку з силою, що пропорційна заряду частинки та її швидкості.

Основні властивості та методи аналізу електромагнітного поля припускають якісне та кількісне дослідження електромагнітних полів, які зустрічаються у електротехнічних пристроях. Для цього найбільш придатні рівняння електродинаміки в інтегральній та диференціальній формах.

РОЗДІЛ 1 Фізичне та математичне підґрунтя теорії електромагнітного поля

ТЕМА 1.1 Основні базові поняття класичної теорії електромагнітного поля

Лекція №1 ОСНОВНІ БАЗОВІ ПОНЯТТЯ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Взаємодія тіл. Метали. Швидкість упорядкованого руху зарядів. Електричний опір. Діелектрики. Поляризація діелектриків. Електричне поле. Картина поля. Основні характеристики електричного поля. Магнітне поле. Вектор магнітної індукції і його вихор. Вектор магнітної індукції

1 Взаємодія тіл

В основі усіх фізичних явищ лежить взаємодія між тілами чи частинками, які задіяні у цих явищах. Земля рухається навколо Сонця через те, що взаємодіє з ним. Такою взаємодією є притягання Землі і Сонця згідно закону всесвітнього тяжіння. Притягання чи відштовхування двох електричних зарядів - є електричною взаємодією. Відштовхування чи притягання магнітних полюсів чи струмів - це магнітна взаємодія. Тиск підошви на землю - це також приклад взаємодії тіл.

Згідно уявлень сучасної фізики будь-яка взаємодія передається через деяке поле. Земля взаємодіє з Сонцем через гравітаційне поле. Електричні заряди взаємодіють через електричне поле, яке вони створюють. Магніти і електричні струми - через магнітне поле. Частинки в атомному ядрі - протони і нейтрони - взаємодіють через так зване π -мезонне поле. Кожна частинка створює поле, а потім це поле вже діє на іншу частинку.

Якщо будь-яка взаємодія здійснюється через поле, то виникає питання, через яке поле взаємодіють рука і камінь, пружина і віршовка, яка її зв'язує, підошва і земля, тобто чим пояснюється існування звичайної сили, яка виникає при доторкуванні предметів? Виходить, що це

електромагнітна взаємодія. Атоми тіл, що доторкуються, зближуються на відстань порядку розмірів самих атомів. Негативно заряджені електрони, які обертаються навколо ядер, і позитивно заряджені ядра створюють електромагнітне поле, яке і здійснює взаємодію при наявності дотику.

Але не тільки взаємодія між різними тілами, а й само існування твердих і рідких тіл обумовлене взаємодією між атомами. Якраз через таку взаємодію тверді та рідкі тіла не розпадаються на окремі атоми.

Концепція взаємодії частинок через проміжний агент (поле) називається **близькодією**. Вона знаходить підтвердження і в сучасній квантовій теорії елементарних частинок, де носіями взаємодії виступають кванти відповідних полів. - фотони, глюони, проміжні бозони і т. ін. Ця картина принципово відрізняється від взаємодії частинок у нерелятивістській механіці, побудованій на понятті потенціальної енергії. Швидкість розповсюдження при цьому є нескінченною і будь-якого проміжного агента при цьому не потрібно. Хоча і у такому випадку можна використовувати поняття поля, але воно виступатиме як формально-математичний об'єкт і не є органічною складовою фізичного процесу взаємодії частинок. Така картина взаємодії називається **дальнодією**.

Концепція дальності несумісна з теорією відносності, яка встановлює межу максимальної швидкості розповсюдження взаємодії (швидкість світла у пустоті). З цього випливає, що енергія і імпульс, випромінені однією із взаємодіючих частинок, розділених кінцевою відстанню $(r_1 - r_2)$, мають належати деякій проміжній субстанції - полю - протягом кінцевого проміжку часу $(r_1 - r_2)/c$, допоки вони не будуть сприйняті другою частинкою. Поняття поля як фізичної реальності є, таким чином, невід'ємним атрибутом теорії відносності. Воно підтверджується і досвідом, оскільки електромагнітне поле може існувати і як самостійний об'єкт за відсутності заряджених частинок.

2 Metali. Швидкість упорядкованого руху зарядів. Швидкість поширення струму. Електричний опір

Валентні електрони метала слабо зв'язані зі своїми атомами. Коли атоми металу, конденсуючись з металевого пару, створюють рідкий чи твердий метал, зовнішні електрони виходять вже не зв'язаними з окремими атомами і мають змогу вільно переміщатися у межах всього тіла. Ці електрони створюють добре відому високу провідність металів, тому їх і назвали електронами провідності.

Атоми металу, позбавлені своїх валентних електронів, тобто позитивні іони, створюють кристалічну решітку, у якій вони здійснюють хаотичні коливання навколо своїх положень рівноваги, які називаються вузлами решітки. Ці коливання є тепловим рухом решітки і збільшуються при підвищенні температури.

Електрони провідності за відсутності електричного поля у металі здійснюють хаотичний рух зі швидкістю порядку тисяч кілометрів за секунду. Якщо до провідника прикласти напругу, електрони провідності, не зменшуючи свого хаотичного руху, повільно зміщуються електричним полем вздовж провідника. У такому випадку усі електрони отримують додатково до хаотичного руху ще й невелику швидкість упорядкованого руху (порядку, наприклад, міліметрів за секунду). Якраз цей слабкий упорядкований рух і обумовлює електричний струм у провіднику.

Таким чином, у колі постійного струму електрони рухаються уздовж провідника досить повільно. Якщо ж струм змінний синусоїдний, то за першу половину періоду електрони встигають зміститися лише на соті долі міліметра (за частоти 50 герц), а за другу - повертаються назад.

Однак, ця швидкість упорядкованого руху електронів не має ніякого відношення до швидкості розповсюдження струму уздовж провідника.

Цей рух електронів викликає змінне електричне і магнітне поле, тобто електромагнітну хвилю, що розповсюджується уздовж всього кола. Електрони, до яких доходить електромагнітна хвиля, починають рухатися

(у перший момент прискорено), випромінюючи вторинні електромагнітні хвилі., які накладаються на ту, яка підійшла. Результуюча електромагнітна хвиля рухається уздовж проводів зі швидкістю, що дорівнює швидкості світла у середовищі навкруг проводу. Швидкість цієї хвилі і є швидкістю поширення струму уздовж провідника.

У підручнику Г.Е. Зільбермана ("Електрика і магнетизм") цей факт ілюструється наступним зауваженням. Коли на електростанції вмикається рубильник, струм у помешканні з'являється у момент приходу електромагнітної хвилі (практично миттєво). Електрони, що містяться у проводах, якщо б їх можна було помітити, дійшли б від електростанції до помешкання через досить значний час (порядку року) після вмикання рубильника (якщо струм постійний, а якщо змінний, то взагалі не дійшли б ніколи).

Як впливає з викладеного, під дією електричного поля електрони рухаються уздовж провідника. На кожний електрон діє сила $\vec{F} = e\vec{E}$. Якщо б електрони рухались у пустоті, їх швидкість постійно б зростала, відповідно збільшувався б з часом і створюваний ними струм. На практиці цього не відбувається і постійна за величиною різниця потенціалів створює постійний за величиною струм.

Причиною цього є те, що електрони у своєму русі через кристалічну решітку постійно стикаються з іонами решітки, віддаючи їм накопичену у полі кінетичну енергію.

Фізичну сутність виникнення електричного опору дає квантова механіка. Згідно проведених досліджень, якщо кристал абсолютно позбавлений спотворень і його решітка ідеально періодична, тобто усі іони нерухомі і знаходяться у вузлах решітки, то електронна хвиля, що формується у цій решітці, проходить через неї, ніби то не "помічаючи". Електрони рухаються через таку решітку як через пустоту, не змінюючи напрямку руху і ні з чим не стикаючись.

Але будь-які порушення періодичності решітки - дефекти, домішки, теплові коливання - є причиною розсіювання електронних хвиль, тобто зміни напрямку їх руху. Це зменшує струм (зменшує упорядкованість руху електронів), тобто викликає електричний опір. Підвищення температури, яке підсилює теплове коливання іонів решітки збільшує опір.

3 Діелектрики. Поляризація діелектриків

У діелектриках атоми також коливаються навколо положення рівноваги, як і у металах, однак вони мають повний комплект електронів. Зовнішні електрони атомів діелектрика мають досить сильний зв'язок із своїми атомами, розірвати який зовсім не просто. Для цього потрібно значно підняти температуру діелектрика чи здійснити його інтенсивне опромінення, яке б змогло відірвати електрони від атомів. У звичайному стані електронів провідності у діелектрика немає, тому діелектрики струму не проводять.

Більша частина діелектриків є не атомними структурами, а молекулярними кристалами чи рідинами. Це означає, що у вузлах решітки знаходяться не атоми, а молекули. Багато молекул складаються із двох груп атомів чи просто з двох атомів, один з яких електрично додатний, а інший - від'ємний. Наприклад, у молекули води, додатною частиною є обидва атоми водню, а від'ємною - атом кисню, навколо якого значну частину часу обертаються електрони водневих атомів.

Два заряди, однакові за величиною і протилежні за знаком, що знаходяться на малій відстані один від одного, називаються диполем. Полярні молекули є прикладом диполів. Якщо молекули не складаються із протилежних по заряду іонів (заряджених атомів), тобто не є полярними і не є диполями, то вони стають диполями під дією електричного поля. Електричне поле тягне додатні заряди, що входять до складу молекули (наприклад, ядра), в один бік, а від'ємні - в інший, і, розсовуючи їх, створює диполі. Поведінка діелектрика з неполярними молекулами мало

відрізняється від поведінки діелектрика з полярними молекулами, тому в подальшому можна вважати що молекули усіх діелектриків є диполями.

Якщо кусок діелектрика помістити у зовнішнє електричне поле, тобто піднести до діелектрика заряджене тіло (нехай з позитивним зарядом), то негативні кінці молекул-диполів будуть притягатися до цього заряду, а негативні - відштовхуватись. Через це молекули-диполі будуть повертатися. Такий поворот називають орієнтацією. В результаті орієнтації молекул діелектрика на його поверхні, оберненій до позитивного заряду, розташуються негативні кінці молекул-диполей, а на протилежній поверхні - позитивні. Ці заряди називають поляризаційними, а їх виникнення називається процесом поляризації діелектрика.

Як впливає з викладеного залежно від виду діелектрика, поляризація може бути орієнтаційною (орієнтуються готові молекули-диполі) чи деформаційною (молекули в електричному полі деформуються, перетворюючись на диполі).

Може виникнути питання, чому поляризаційні заряди створюються лише на поверхні діелектрика, а не всередині? Пояснюється це тим, що всередині діелектрика позитивні і негативні кінці молекул-диполів компенсують один одного. Компенсація буде відсутньою лише на поверхнях діелектрика чи на межі поділу двох діелектриків, а також в неоднорідному діелектрику.

Якщо діелектрик поляризований, то це не означає, що він заряджений, тобто що він має в цілому електричний заряд. При поляризації загальний заряд діелектрика не змінюється.

Однак, діелектрик можна зарядити, перенісши на нього деяку кількість електронів ззовні, чи відібравши деяку кількість його власних електронів. У першому випадку діелектрик зарядиться негативно, а у другому - позитивно. Таку електризацію можна здійснити шляхом тертя.

Тож, у металах і інших провідниках заряди мають змогу вільно переміщатися по всьому тілу. Діелектрики ж не мають провідності і у них

заряди не можуть переміщатися на макроскопічні (великі порівняно з розмірами атомів і молекул) відстані. В електричному полі діелектрик лише поляризується.

Заряди, що переміщуються у провідниках та занесені ззовні на діелектрик називаються вільними, а поляризаційні заряди, що знаходяться на поверхнях діелектриків – зв'язаними.

4 Електричне поле. Картина поля. Джерела напруженості

У просторі навколо зарядженого тіла існує електричне поле. Для того, щоб упевнитися в цьому, досить піднести до тіла спробний заряд. Навіть у вакуумі заряджене тіло огорнуто не пустотою, а електричним полем. Це поле, за сьогоднішніми уявленнями щодо цього питання, є одним із видів матерії, через який заряди взаємодіють. Заряд, розташований на тілі, розміри якого малі порівняно з відстанями до інших тіл, з якими він взаємодіє, називають точковим. Сила взаємодії точкових зарядів підпорядковується закону Кулона.

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2} \quad (1)$$

Величина ϵ , яку називають діелектричною проникністю, враховує вплив середовища на силу взаємодії. У пустоті (і наближено у повітрі) відносне значення цієї величини дорівнює 1. У інших діелектричних середовищах відносна діелектрична проникність більша за 1, звідки випливає, що у будь-якому середовищі електричне поле послаблюється порівняно з вакуумом. Це пояснюється наявністю поля зв'язаних зарядів, яке має протилежний напрям до поля вільних зарядів.

Як випливає з закону Кулона, сила взаємодії зарядженого тіла із спробним зарядом залежить від величини останнього.

Відношення сили, яка діє на заряд, до величини цього заряду, назвали напруженістю електричного поля

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (2)$$

Електричне поле зручно графічно зображувати за допомогою картини так званих силових ліній, чи ліній напруженості. Ця лінія характерна тим, що дотична до неї у кожній точці збігається з напрямом вектора напруженості електричного поля. Якщо поле створюється зарядженою кулею чи точковим зарядом, то лінії напруженості є прямими, які радіально розходяться від заряду чи від центру кулі.

На рис. 1 *а* і *б* зображені поля позитивних зарядів, причому, заряд на рис. 1 *б* вдвічі більший, ніж на рис 1 *а*.

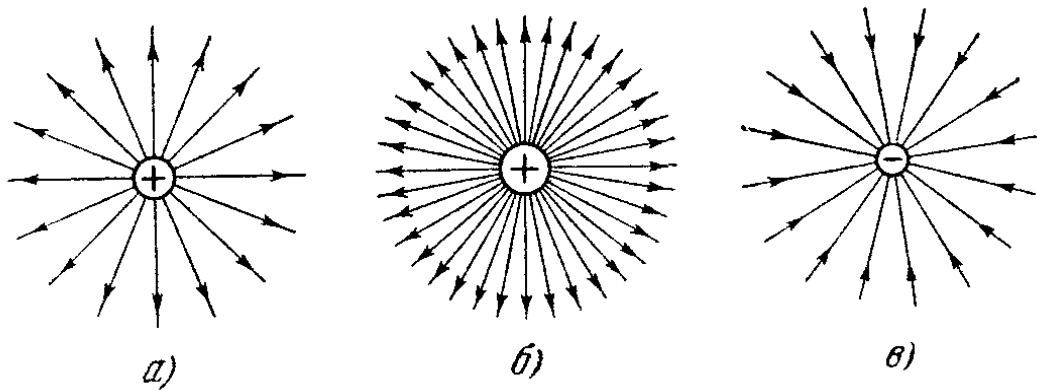


Рис. 1

Більш потужне поле зображується більш щільно розташованими лініями напруженості. Такий спосіб зображення рівня інтенсивності електричного поля цілком природний, оскільки за відсутності поля, силових ліній не повинно бути зовсім. Поле негативного заряду відрізняється лише напрямом силових ліній (рис. 1 *в*).

Більш складною виходить картина силових ліній електричного поля у випадку, коли поле створюється не одним зарядом, а декількома. У цьому випадку картина поля будується за принципом суперпозиції полів окремих зарядів. Наприклад, на рис. 2 зображене поле, яке створюється двома однаковими за величиною і протилежними за знаком зарядами.

На рис. 3 зображено поле, яке створюється двома однаковими за величиною і знаком зарядами.

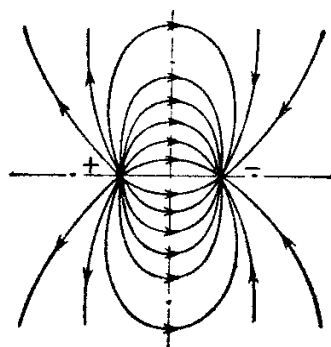


Рис. 2

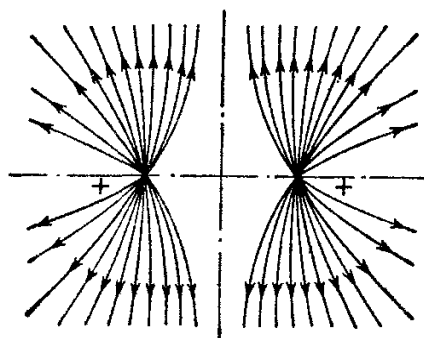


Рис. 3

На рис. 4 зображено однорідне електричне поле плоского конденсатора, яке має місце за умови, що відстань між обкладинками значно менша, ніж розміри пластин. Однорідним називається поле, у якому напруженість електричного поля в усіх точках має одну і ту ж величину і однаковий напрям. У такому полі силові лінії є паралельними і щільність їх скрізь однакова.

Якщо між обкладинками конденсатора знаходиться діелектрик, то поле у ньому послаблюється. Причиною є те, що на поверхнях діелектрика виникають зв'язані заряди, поле яких протилежне до поля вільних зарядів, які знаходяться на обкладинках. Як впливає з рис. 5, у конденсаторі, який містить діелектрик, всередині діелектрика кількість ліній напруженості електричного поля менша, ніж у повітряному проміжку.

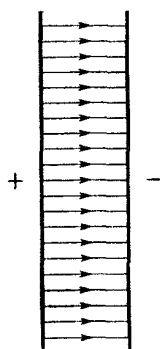


Рис. 4

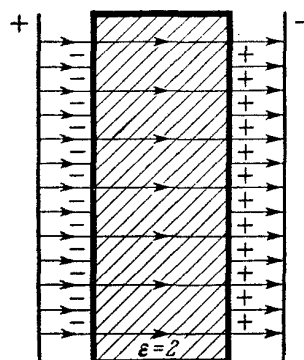


Рис. 5

У всіх розглянутих випадках електричне поле створювалось так званими джерелами. Під джерелами розуміють ті точки, в яких лінії напруженості електричного поля починаються чи закінчуються. Тобто, електричні заряди, які створюють електричне поле, є його джерелами.

Точки, в яких силові лінії поля починаються, називають витокami, а де вони закінчуються - стоками.

Джерелами напруженості електричного поля є усі заряди, як вільні, так і зв'язані. Лінії поля, створеного джерелами, починаються і закінчуються на цих джерелах, тому вони ніколи не бувають замкненими.

5 Магнітне поле. Вектор магнітної індукції. і його вихор

Існування магнітного поля можна виявити, наприклад, через силу, яка діє в цьому полі на спробний магнітний полюс. Слід відзначити, що у природі існує єдине електромагнітне поле, а суто електричне і суто магнітне поле є його складовими чи окремими випадками. Зв'язок між полями можна виявити на такому досліді. Візьмемо два постійні магніти і будемо зближати чи віддаляти їх полюси. При цьому у проміжку між полюсами магнітне поле буде змінюватись. Виявляється, що це змінне магнітне поле здатне створювати (індукувати) електричне поле. Існування останнього можна виявити за допомогою чутливих приладів. Дослідження показують, що лінії напруженості цього електричного поля корінним чином відрізняються від силових ліній поля, створеного електричними зарядами. Ці лінії ніде не починаються і ніде не закінчуються - вони замкнені.

Отже, змінне магнітне поле створює електричне поле. Але змінне електричне поле здатне створювати магнітне поле.

Допоки обидва поля постійні, вони не мають між собою нічого спільного. Однак, змінні електричне і магнітне поля індукують одне одного.

Як зазначалося раніше, основною характеристикою електричного поля є його напруженість \vec{E} , яка визначається через силу, що діє на заряд у електричному полі. Основною характеристикою магнітного поля є вектор магнітної індукції \vec{B} , який також визначається через силу, яка діє на заряд у магнітному полі. Але магнітне поле діє на заряд зовсім не так, як електричне. Магніт не притягає і не відштовхує електричний заряд, а діє на нього у напрямі, перпендикулярному до поля і до швидкості заряду.

Як показують дослідження, магнітне поле на нерухомі заряди взагалі не діє. Для того, щоб на заряд з боку магнітного поля діяла сила, необхідно, щоб він рухався, причому, не паралельно полю, інакше сила дорівнюватиме нулю.

Результати численних експериментів, у яких досліджувалась дія магнітного поля на рухомі електричні заряди, виражаються через формулу (3), яка визначає величину так званої сили Лоренца - сили, яка діє на заряд, що рухається у магнітному полі:

$$\vec{F} = Q[\vec{v}\vec{B}] \quad (3)$$

Сила Лоренца спрямована перпендикулярно до магнітного поля ((вектора магнітної індукції \vec{B}) і до вектора швидкості заряду v). Магнітна індукція, кількісна характеристика магнітного поля, аналогічна напруженості електричного поля у тому сенсі, що як напруженість електричного поля так і магнітна індукція визначають силу, яка діє на заряд.

Магнітне поле може створюватись постійними магнітами, змінним електричним полем і рухомими електричними зарядами, у тому числі і тими, що рухаються у провіднику, створюючи електричний струм.

Для дослідження магнітного поля електричного струму можна провести наступний дослід. На листі картону навколо провідника розміщуються магнітні стрілки. За відсутності струму у проводі, вони

орієнтуються уздовж магнітного поля Землі. Якщо по проводу проходить електричний струм, стрілки розташовуються дотично до кола з центром у точці, через яку проходить провід. Це означає, що силовою лінією магнітного поля навколо провідником зі струмом є коло. З іншого боку доведеним фактом є те, що лінії вектора магнітної індукції завжди замкнені, у будь-якому середовищі, навіть і в неоднорідному.

Як ми вже знаємо, джерелами вектора напруженості електричного поля \vec{E} є будь-які заряди - як вільні, так і зв'язаних. Подібно цьому, поле вектора \vec{B} створюється усіма існуючими струмами. Передусім струмами провідності, які проходять вздовж великих (макроскопічних) провідників. Але крім них на заряд, який рухається у матеріальному середовищі, діють також і ті мікроскопічні колові струми, які рухаються у атомах речовини через те, що електрони обертаються навколо ядер.

Якщо макрострумів і створюваного ними магнітного поля (зовнішнього поля) немає, то мікроструми розташовані у просторі хаотично, тому їх поля в середньому взаємно компенсуються. Кожний коловий атомний струм створює своє магнітне поле, і цим він схожий на маленький магніт. Зовнішнє магнітне поле ці магніти певним чином орієнтує, при цьому середнє поле мікрострумів відрізняється від нуля. З підсиленням зовнішнього поля пропорційно йому підсилюється середнє поле мікрострумів. Поле мікрострумів колінеарне до поля макрострумів і пропорційне йому.

Оскільки лінії вектора \vec{B} завжди замкнені, це означає, що в природі не існує магнітних зарядів, на відміну від електричних. Іншими словами, вектор \vec{B} не має джерел, його лінії ніде не починаються і ніде не закінчуються, а замикаються навколо електричних струмів. Електричні струми (макро- і мікро-) є вихорами вектора \vec{B} .

Якщо струм, який створює магнітне поле, проходить по досить тонкому провіднику, то при перетині цього провідника перпендикулярною

до нього площиною, на ній залишиться слід від точки, яку будуть оточувати замкнені лінії магнітного кола (рис. 6). У такому випадку матимемо точковий вихор (точніше - лінійний, оскільки вихором магнітного поля є сам струм).

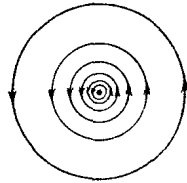


Рис. 6

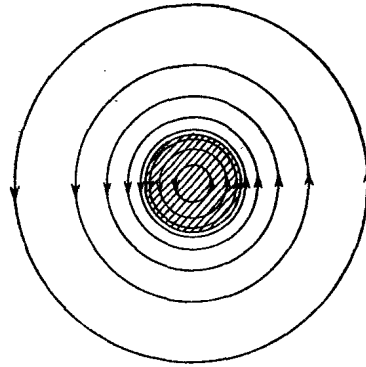


Рис. 7

Якщо провідник має велику площу перетину, то при його перетині створюється область вихорів (рис. 7). Лінії вектора \vec{B} розташовані як всередині провідника, так і поза його межами.

6 Векторне поле. Циркуляція вектора. Джерела і вихорі поля

Під векторним полем розуміють простір, кожній точці якого відповідає деякий вектор. Прикладом векторного поля можуть слугувати поля вектора \vec{E} чи вектора \vec{B} . Вони є так званими силовими полями.

Окрім силових полів, існують і інші векторні поля, наприклад, поле швидкостей.

Будь-яка сила є вектором, але не всяка сила має векторне поле. Прикладом останнього є сила Лоренца. Вона залежить не лише від \vec{B} , а й від швидкості заряду, який пролітає у даний момент через дану точку. Тому сама сила Лоренца не має ні в одній точці простору ніякого певного значення.

Математична теорія векторного поля називається векторним аналізом. Але основні поняття векторного поля можна зрозуміти і без математики, користуючись наочною картиною ліній поля. При цьому не потрібно забувати, що лінії поля реально не існують, а є лише засобом зображення реального поля з допомогою їх можна отримати якісну картину поля.

Нехай необхідно розрахувати роботу, яка виконується електричним полем при переміщенні одиниці заряду уздовж силової лінії, яка має форму кола.

Якщо поле \vec{E} на усій лінії постійне, то робота обчислюється як добуток \vec{E} на довжину кола. Однак, якщо зображена лінія є лінією вектора магнітної індукції \vec{B} чи вектора швидкості v , то добуток модуля відповідного вектора на довжину кола уже не буде роботою. У випадку будь-якого векторного поля така величина називається циркуляцією вектора по замкненому шляху. Якщо вектор, поле якого розглядається, є силою, то його циркуляція є роботою цього вектора вздовж замкненого шляху.

Поле можуть створювати фізичні об'єкти двох абсолютно різних видів, які називаються джерелами та вихорами. Джерелами електричного поля (\vec{E}) є заряди, а вихором - змінне магнітне поле. У магнітного поля (\vec{B}) вихорами є струми і змінне електричне поле (струми зміщення). Джерел вектора \vec{B} не існує, оскільки магнітних зарядів у природі немає.

Будь-яке поле однозначно визначається своїми джерелами і вихорами. Якщо поле не має ні джерел, ні вихорів, то воно не може існувати. У такому випадку воно тотожно дорівнює нулю.

8 Вектор електричної індукції

Окрім основних векторів електромагнітного поля \vec{E} та \vec{B} у теорію електрики і магнетизму необхідно ввести ще два вектори.

Один з них позначається \overline{D} і називається вектором електричної індукції (чи вектором електричного зміщення).

Поле вектора електричної індукції визначається як таке, джерелами якого є лише вільні заряди (нагадаємо, що джерелами вектора \overline{E} є як вільні заряди, так і зв'язані). Оскільки одними джерелами векторне поле не визначається (повинні задаватися і його вихорі), визначимо вектор \overline{D} так, щоб у однорідному ізотропному діелектрику він не мав вихорів.

Якщо врахувати, що зв'язані заряди виникають через поляризацію діелектрика полем вільних зарядів, стає зрозумілим, що поле зв'язаних зарядів має бути паралельним полю вільних зарядів, пропорціональним йому і спрямованим протилежно. З цієї причини вектори \overline{E} та \overline{D} в однорідному і ізотропному діелектрику також повинні бути паралельними і пропорційними один одному. Математично це записують у вигляді

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}, \quad (4)$$

де ε - діелектрична проникність середовища.

З виразу $\overline{E} = \overline{D} / \varepsilon$ випливає, що в однорідному середовищі з діелектричною проникністю ε поле вільних зарядів \overline{D} послаблюється в ε разів, а це якраз і відповідає закону Кулона.

Тепер розповсюдимо співвідношення (4) на випадок неоднорідного (але ізотропного) діелектрика. В ізотропному діелектрику вектори \overline{E} та \overline{D} мають однаковий напрям, але за числовим значенням відрізняються, що і ілюструє рис. 8.

У плоскому конденсаторі з двошаровим діелектриком лінії \overline{D} починаються на позитивній пластині і проходять вільно через усі шари, оскільки зв'язані заряди на межах діелектриків не є джерелами \overline{D} (рис. 8, а).

Напруженість електричного поля залежить від величини магнітної проникності ε ($\bar{E} = \bar{D} / \varepsilon$), тому у повітрі $\bar{E} = \bar{D}$, у першому діелектрику $\bar{E} = \bar{D} / 3$, а у другому $\bar{E} = \bar{D} / 2$ (рис. 8, б).

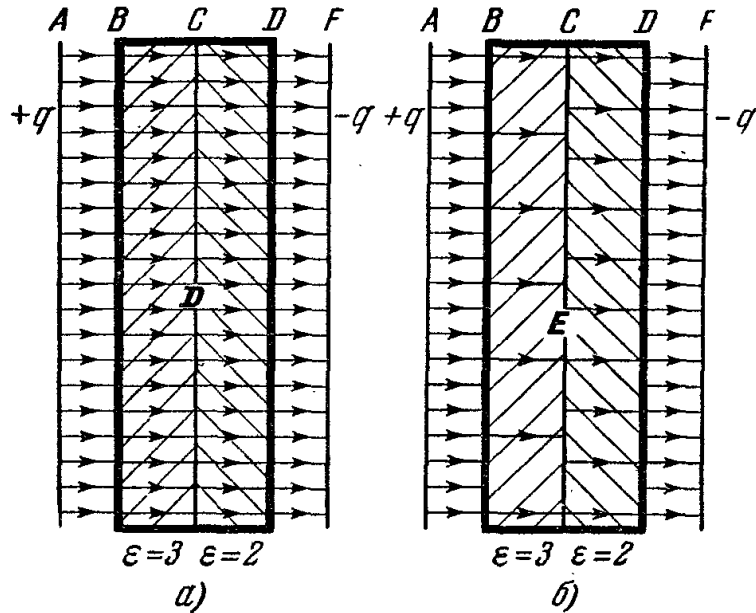


Рис. 8

У прикладі, наведеному на рис. 8 лінії поля спрямовані перпендикулярно до межі поділу діелектриків. Якщо ці лінії не перпендикулярні до межі, то вони заломлюються. Згідно з виразом (4) вони заломлюються однаково (рис. 9, а, б). При цьому у вектора \bar{E} (рис. 9, а) на межі є джерела (зв'язані заряди), у той час як у \bar{D} (рис. 9, б) джерел на межі немає.

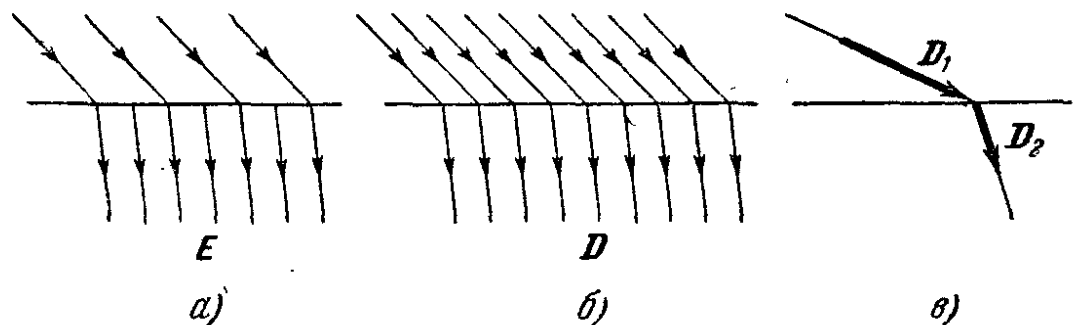


Рис. 9

З факту заломлення ліній поля та відсутності джерел поля вектора \vec{D} випливає, що на межі поділу двох діелектриків повинні бути вихорі.

9 Вектор напруженості магнітного поля

Подібно до того, як у теорії електричного поля окрім вектора \vec{E} вводиться вектор \vec{D} , у теорії магнетизму окрім вектора \vec{B} вводиться вектор \vec{H} , який називається вектором напруженості магнітного поля. Визначимо \vec{H} для однорідного ізотропного середовища як вектор, вихорами якого є лише макроструми, тобто струми, які створюються упорядкованим рухом електричних зарядів у провідниках. Для повного визначення вектора \vec{H} необхідно ще задати його джерела, а точніше вимогу, щоб у однорідному ізотропному середовищі у нього не було джерел. А якщо середовище ізотропне, але неоднорідне, які можуть бути джерела у вектора \vec{H} ?

Раніше зазначалося, що вектор \vec{B} своїми вихорами має макро- та мікроструми. Макроструми створюють магнітне поле, яке орієнтує мікроструми. За відсутності такої орієнтації мікроструми окремих атомів орієнтовані хаотично. З появою зовнішнього поля (поля макрострумів) середнє значення поля мікрострумів підсилюється пропорційно зовнішньому полю. Отож, між векторами \vec{B} і \vec{H} в однорідному ізотропному магнетикі існує пропорційна залежність. Вона виражається формулою:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (5)$$

де μ - магнітна проникність речовини.

Пропорційна залежність між векторами магнітної індукції та напруженості магнітного поля має місце для усіх речовин, окрім ферромагнетиків (речовин типу заліза).

Розповсюдимо співвідношення (5) на випадок неоднорідного магнетика, наприклад, декількох однорідних, які стикаються поверхнями розділу. Оскільки лінії вектора \vec{B} завжди замкнені, вони на поверхні поділу магнетиків розриватися не можуть (рис. 10, а).

$$\text{Врахуємо, що } \vec{H} = \vec{B} / \mu, \quad (6)$$

а різні магнетики мають різне значення μ . тому і поле вектора \vec{H} у цих магнетиках буде різним. Це означає, що деякі лінії вектора \vec{H} повинні чи починатися, чи закінчуватися на межі поділу магнетиків (рис. 10, б). Відповідно межа поділу магнетиків містить джерела вектора \vec{H} .

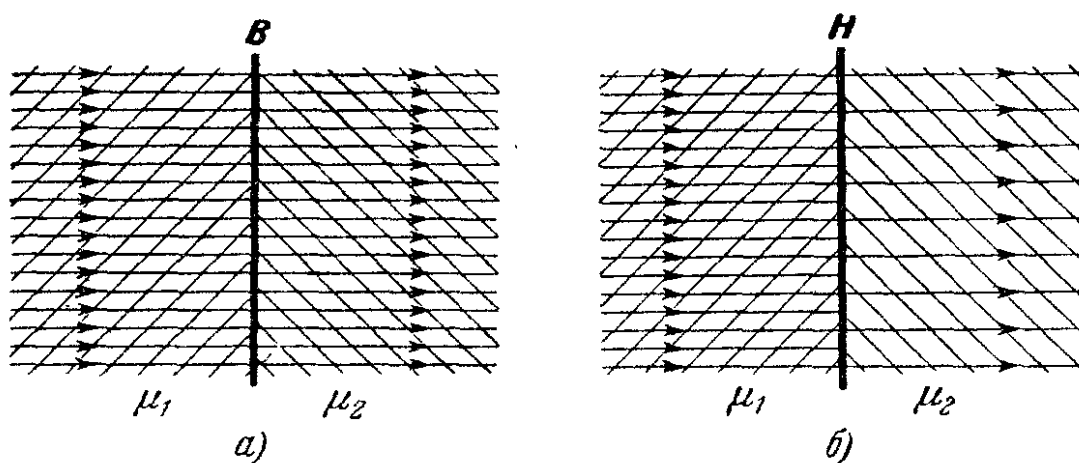


Рис. 10

ЗАУВАЖЕННЯ. Під однорідністю простору розуміють рівноправність усіх його частин: будь-яка механічна система, поміщена у довільну область вільного простору, буде вести себе таким же чином, як і в будь-якому іншому місці. За протіканням механічних явищ не можна відрізнити одну область однорідного простору від іншої.

Ізотропія простору означає рівноправність усіх напрямів у ньому: властивості і поведінка механічних об'єктів не залежить від їх орієнтації в ізотропному просторі.

ТЕМА 1.2 Характеристики векторного і скалярного полів у різних системах координат

Лекція №2 ВЕКТОРНЕ І СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ

Основні операції з векторами: додавання і віднімання, скалярний і векторний добутки, диференціювання. Характеристики векторного і скалярного полів у декартовій, циліндричній і сферичній системах координат

Скалярне і векторне поля і їх характеристики

Скалярне поле – це поле, в якому кожній точці M відповідає, як правило, деяке дійсне число N . Наприклад, поле температур (рис. 1,а), величина яких є різною. Характеристикою скалярного поля є *градієнт*.

Векторне поле – це поле, в якому кожній точці M відповідає вектор (рис. 1,б). Векторне поле можна інтерпретувати як спосіб завдання рухів динамічної системи – вектор у даній точці описує напрям і швидкість руху точки по фазовій кривій. Характеристиками векторного поля є:

- Диференційні – *дивергенція* **div** і *ротор* **rot** характеризують поведінку поля в окремих точках;
- Інтегральні характеристики, які описують поле уздовж контуру – *циркуляція*, і які описують поле скрізь певну поверхню – *потік*.

Розглянемо ці характеристики полів.

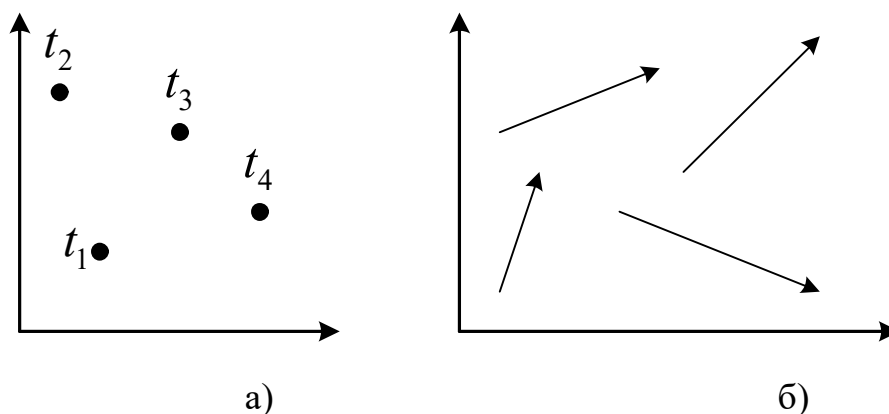


Рис. 1

Градiєнт

Градiєнт це вектор, який своїм напрямком вказує напрям найбільшого зростання величини ХХХ, що змінюється від однієї точки до іншої, а за величиною дорівнює швидкості зростання цієї величини в цьому напрямку. Наприклад, якщо скалярне поле – це поле температур у приміщенні $T(x, y, z)$, то градiєнт буде вказувати напрям, в якому температура зростає найшвидше, величина градiєнта визначає як швидко зростає температура у даному напрямку.

Щоб отримати формулу для розрахунку градiєнта скористаємось формулами для сили, що діє на заряд $\vec{F} = q\vec{E}$ та роботи по переміщенню заряду $A = \Delta\phi \cdot q$. Оскільки робота $A = F \cdot \Delta x = \Delta\phi \cdot q$, то якщо взяти до уваги проекцію на одну з осей $q \cdot E_x \cdot \Delta x = \Delta\phi \cdot q$, звідки $E_x = \frac{\Delta\phi}{\Delta x}$.

Оскільки напруженість поля і сила, що діє на заряд, спрямовані у бік зменшення потенціалу, тому

$$\vec{E}_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \vec{E}_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \vec{E}_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

У векторній формі

$$\vec{E} = \vec{E}_x \cdot \vec{i} + \vec{E}_y \cdot \vec{j} + \vec{E}_z \cdot \vec{k} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \vec{k}\right). \quad (1)$$

Для сили

$$\vec{F} = -q\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \vec{k}\right). \quad (2)$$

Вираз $\frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \vec{k}$ і є *градiєнтом*.

$$\text{grad}A = \nabla A = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \vec{k}. \quad (3)$$

Тобто *градієнт* є похідною по координатам від скалярної величини A . За допомогою диференціювання здійснено перехід від скалярного поля до векторного.

Дивергенція

Нехай \vec{A} – векторне поле у просторі. Візьмемо навколо довільної точки простору об'єм V довільної форми з поверхнею S . Тоді потік цього поля \vec{A} через поверхню S віднесений до об'єму V , якщо $V \rightarrow 0$ є *дивергенцією*

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_A}{V}. \quad (4)$$

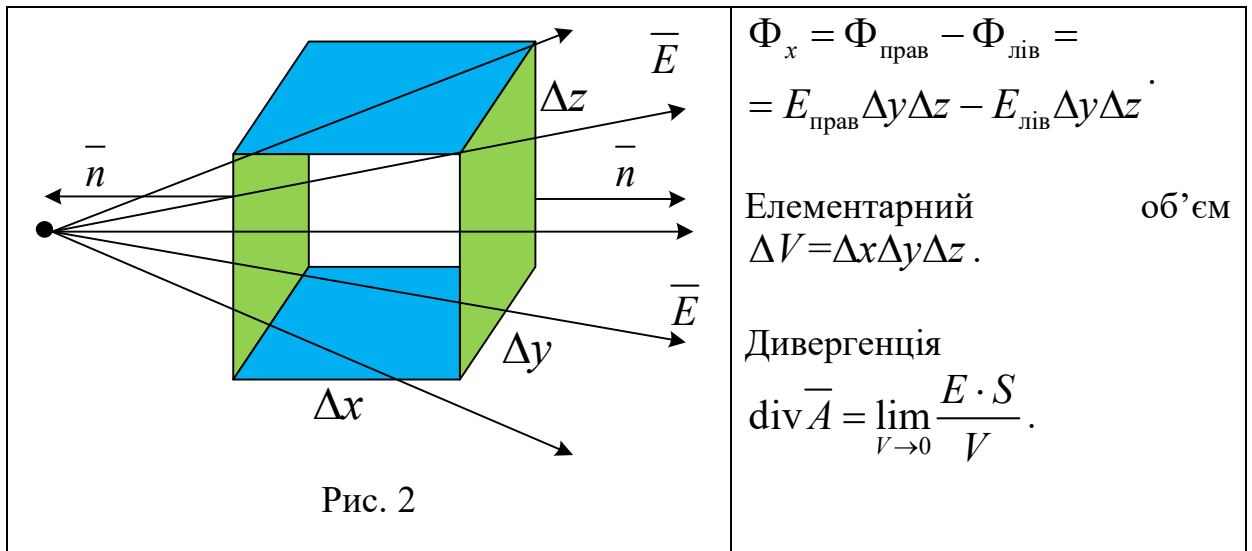
Дивергенція також може бути визначена як

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (5)$$

Часто поняття дивергенція трактують як «розходження», що є не зовсім вірним, бо в об'ємі, через який розглядається потік вектору, може бути заряд. Точніше трактувати дивергенцію як поділ потоку на два – той, що входить в об'єм і той, що виходить, тобто від зовнішніх і внутрішніх джерел. Якщо в об'ємі джерело відсутнє, то $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, якщо об'єм містить джерело, то $\operatorname{div} \vec{A} \neq 0$. Розглянемо формулу для дивергенції

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

За визначенням потік $\Phi = E \cdot S$. Знайдемо проєкції потоку вектору напруженості поля скрізь бокові поверхні паралелепіпеду (рис. 2).



Відношення проекції потоку до елементарного об'єму

$$\frac{\Phi_x}{V} = \frac{E_{\text{прав}} \Delta y \Delta z - E_{\text{лів}} \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{E_{\text{прав}} - E_{\text{лів}}}{\Delta x} = \frac{\Delta E}{\Delta x}$$

Якщо $V \rightarrow 0$, то $\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\partial E}{\partial x}$.

Аналогічно для проекцій на осі y і z :

$$\frac{\Phi_y}{V} = \frac{\Delta E}{\Delta y}. \text{ Якщо } V \rightarrow 0, \text{ то } \frac{\Delta E}{\Delta y} = \frac{\partial E}{\partial y}$$

$$\frac{\Phi_z}{V} = \frac{\Delta E}{\Delta z}. \text{ Якщо } V \rightarrow 0, \text{ то } \frac{\Delta E}{\Delta z} = \frac{\partial E}{\partial z}$$

Повний потік віднесений до об'єму:

$$\frac{\Phi}{V} = \frac{\Phi_x}{V} + \frac{\Phi_y}{V} + \frac{\Phi_z}{V} = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} = \text{div } \vec{E}$$

$$\text{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{E} = \nabla \vec{E}$$

Дивергенція дорівнює скалярному добутку оператора набла і вектору.

Ротор

$$\text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} dl}{\Delta S}$$

Циркуляція вектору \vec{A} по замкненому контуру l , що охоплює довільну поверхню S віднесена до цієї поверхні S коли $S \rightarrow 0$ є ротором вектору \vec{A} .

$\text{rot} \vec{A}$ - векторний добуток оператора набла і вектору.

У декартовій системі координат

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (6)$$

Якщо поверхня S охоплює провідник зі струмом і центр кола збігається із віссю провідника, то лінії магнітного поля повторюють поверхню S (рис. 3,а). Розраховуючи оператор rot необхідно помножити H і l . Величина ротора не буде дорівнювати нулю. Якщо обрана поверхня не охоплює провідник (рис. 3,б), то число ліній, що входять у поверхню, дорівнює числу ліній, що виходять з неї і тому $\text{rot} \vec{H} = 0$. Якщо в даній точці $\text{rot} \vec{H} \neq 0$, то у цій точці є джерело вихрового поля струму або змінне електричне поле. Інформацію про поле, що знаходяться в інших точках, ротор не дає.

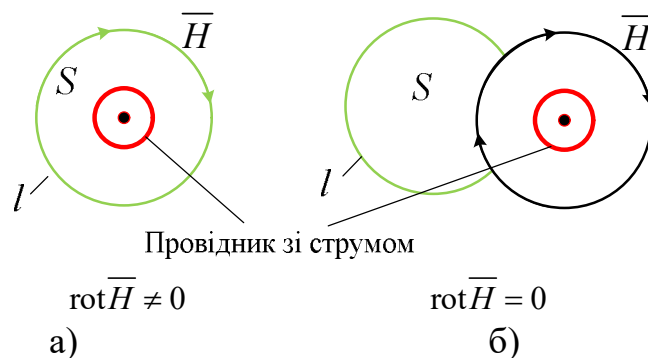


Рис. 3

Системи координат у задачах теорії електромагнітного поля.

Узагальнена система криволінійних координат

Розв'язуючи рівняння електромагнітного поля (ЕМП), залежно від умов задачі, обирають найраціональнішу систему координат, щоб границя області, яка розглядається, співпадала з координатною поверхнею. У такому разі спрощується форма запису рівнянь поля і граничних умов.

Існує багато систем координат, з яких обирають потрібну для конкретної задачі. Усім системам координат притаманні властивості криволінійної.

Криволінійна система координат

Положення точки визначається трьома координатами U, V, W . Їх можна визначити як функцію декартових координат U, V, W :

$$\begin{aligned}U &= f_1(x, y, z); & x &= p_1(U, V, W); \\V &= f_2(x, y, z); & y &= p_2(U, V, W); \\W &= f_3(x, y, z); & z &= p_3(U, V, W).\end{aligned}$$

Координатна поверхня – це така поверхня, на якій координата точки має певне значення.

$$\begin{aligned}U &= f_1(x, y, z) = const; \\V &= f_2(x, y, z) = const; \\W &= f_3(x, y, z) = const.\end{aligned}$$

Дотичні, що проведені з початку координат до ліній узагальнених криволінійних координат називають одиничними ортами і позначають \bar{i}_U , \bar{j}_V , \bar{k}_W . У криволінійній системі координат кут між координатними лініями довільний. Якщо один з кутів прямий, то систему координат називають ортогональною.

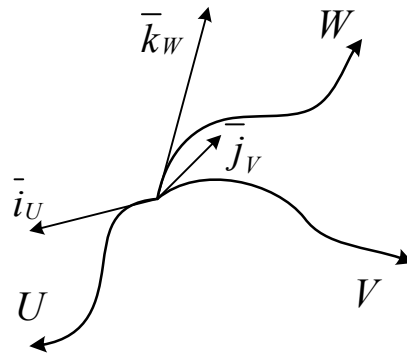
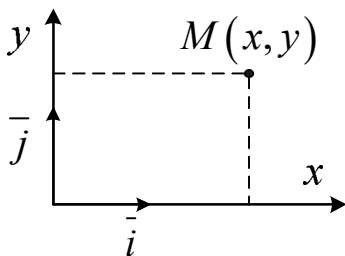


Рис. 4

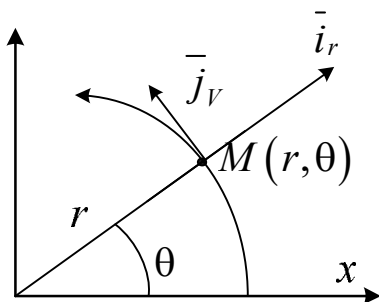
Ортогональні системи

1. Декартова система координат



Положення точки M визначається координатами x, y . \bar{i}, \bar{j} - одиничні вектори.

2. Полярна система координат



Положення точки M визначається координатами r, θ . Якщо $r \rightarrow \text{var}$, а $\theta = \text{const}$, то отримаємо промінь, що виходить з початку координат; якщо $r = \text{const}$ і $\theta \rightarrow \text{var}$, то отримаємо коло.

Одиничні вектори - $\bar{i}_r, \bar{j}_\theta$.

Полярні координати пов'язані зі декартовими такими співвідношеннями:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{arctg} \frac{y}{x}. \quad (7)$$

Лекція №3 ВЕКТОРНЕ І СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ (продовження лекції 2)

Характеристик векторного і скалярного полів: градієнт, дивергенція, ротор. Системи координат у задачах теорії електромагнітного поля: криволінійна та узагальнена. Градієнт, дивергенція та ротор в узагальненій системі координат. Диференціальні оператори в декартовій, циліндричній та сферичній системах координат

2.1. Циліндрична система координат

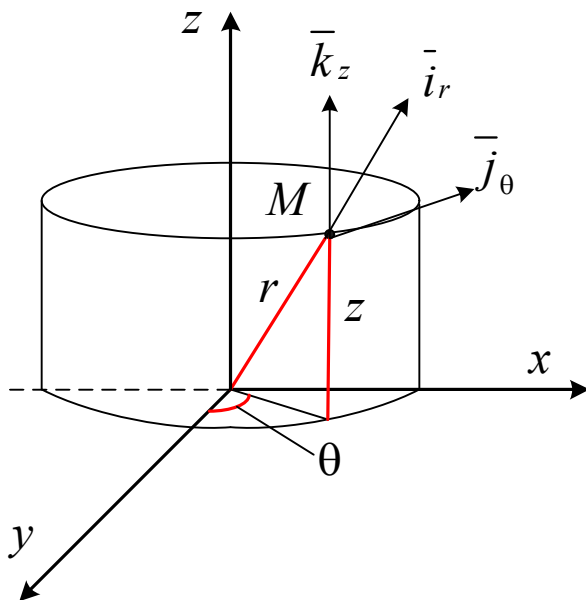


Рис. 5

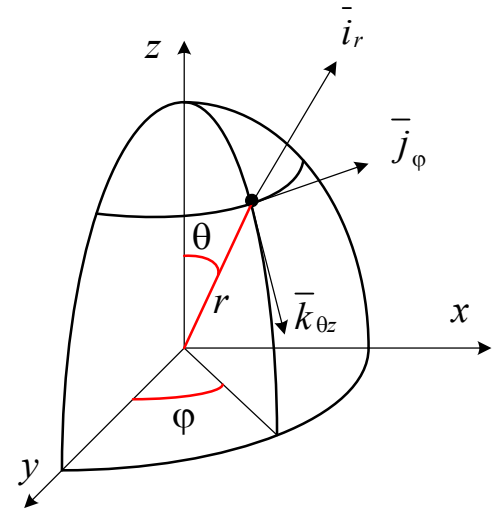
Для визначення положення точки у циліндричній системі координат у полярну систему необхідно додати координату z . Координатна система (r, θ, z) утворює циліндричну систему. Точка M (рис. 5) визначається координатами r, θ, z .

$\bar{i}_r, \bar{j}_\theta, \bar{k}_z$ - одиничні орти.

Циліндричні координати пов'язані із декартовими співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta, \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z = z. \end{cases} \quad (8)$$

2.2. Сферична система координат

 <p style="text-align: center;">Рис. 6</p>	<p>Сферична система координат (рис. 6) утворюється обертанням полярної системи навколо осі z або y, якщо $r = const$.</p> <p>$\bar{i}_r, \bar{j}_\varphi, \bar{k}_\theta$ - одиничні орти.</p> <p>Сферичні координати пов'язані з декартовими співвідношеннями</p> $\begin{cases} x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ z = r \cdot \cos \theta. \end{cases} \quad (9)$
---	---

Довжина площа і об'єм в узагальненій системі координат

- Прямокутна система (рис. 7)

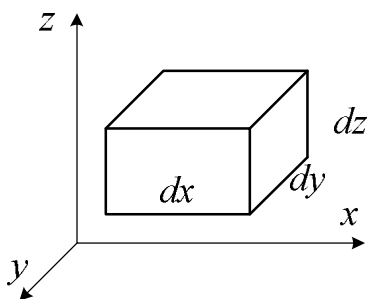


Рис. 7

- Узагальнена система (рис. 8)

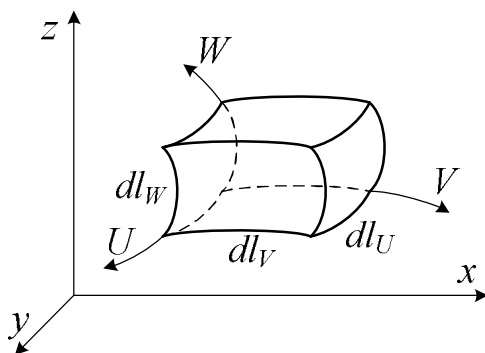


Рис. 8

Площа:

$$dS_x = dy \cdot dz, \quad dS_y = dx \cdot dz,$$

$$dS_z = dx \cdot dy.$$

$$\text{Об'єм } dV = dx \cdot dy \cdot dz.$$

$$U = f_1(x, y, z);$$

$$V = f_2(x, y, z);$$

$$W = f_3(x, y, z).$$

Координатні поверхні отримаємо додавши приріст по координатам dU, dV, dW .

Зв'язок між приростами узагальненої і декартової систем

$$dx = \frac{\partial x}{\partial U} dU + \frac{\partial x}{\partial V} dV + \frac{\partial x}{\partial W} dW, \quad (10)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial U} dU + \frac{\partial y}{\partial V} dV + \frac{\partial y}{\partial W} dW, \quad (11)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial U} dU + \frac{\partial z}{\partial V} dV + \frac{\partial z}{\partial W} dW. \quad (12)$$

Розглянемо довжини dl_U, dl_V, dl_W за умови, що одна координата є змінною, а дві решта – постійними.

$$dl_U : U \rightarrow \text{var}; V, W = \text{const}$$

$$dl_U = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial U}\right)^2} \cdot dU = h_U \cdot dU. \quad (13)$$

$$dl_V : V \rightarrow \text{var}; U, W = \text{const}$$

$$dl_V = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial V}\right)^2} \cdot dV = h_V \cdot dV. \quad (14)$$

$$dl_W : W \rightarrow \text{var}; U, V = \text{const}$$

$$dl_W = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial W}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial W}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial W}\right)^2} \cdot dW = h_W \cdot dW. \quad (15)$$

h_U, h_V, h_W - коефіцієнти Ламе:

$$h_U = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial U}\right)^2}. \quad (16)$$

$$h_V = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial V}\right)^2}. \quad (17)$$

$$h_W = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial W}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial W}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial W}\right)^2}. \quad (18)$$

Елементарні площі: $dS_U = dl_V \cdot dl_W, \quad dS_V = dl_U \cdot dl_W,$
 $dS_W = dl_U \cdot dl_V.$ (19)

Об'єм $dV = dl_U \cdot dl_V \cdot dl_W = h_U h_V h_W dU dV dW.$ (20)

Градiєнт в узагальненій системі координат

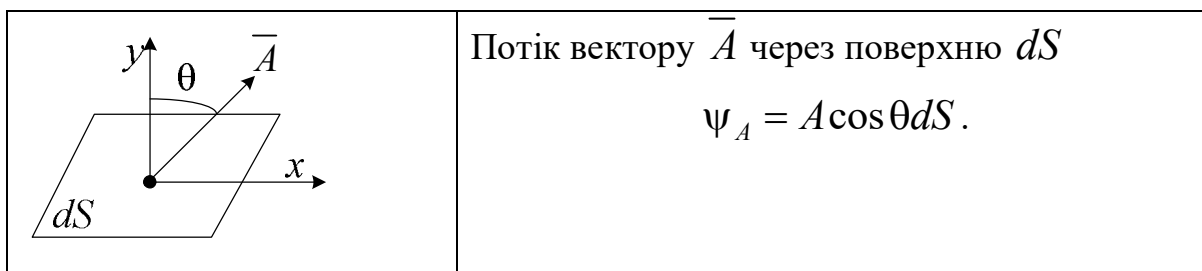
Градiєнт потенціалу – векторна величина, що характеризує поле в даній точці, спрямована у бік її збільшення і чисельно дорівнює похідній від потенціалу у цьому напрямку

$$\begin{aligned} \text{grad}\phi &= \frac{d\phi}{dl_U} \bar{i}_U + \frac{d\phi}{dl_V} \bar{j}_V + \frac{d\phi}{dl_W} \bar{k}_W = \\ &= \frac{d\phi}{h_U dU} \bar{i}_U + \frac{d\phi}{h_V dV} \bar{j}_V + \frac{d\phi}{h_W dW} \bar{k}_W. \end{aligned} \quad (21)$$

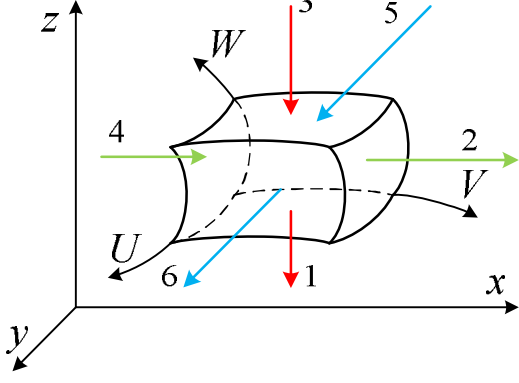
Дивергенція в узагальненій системі координат

Дивергенція вектору - відношення потоку вектору \bar{A} через поверхню, що обмежує елементарний об'єм, до цього об'єму

$$\text{div}\bar{A} = \frac{d\psi_A}{dV}. \quad (22)$$



Знайдемо потоки, що проходять скрізь усі бокові поверхні 1-3, 5-6, 2-4 (рис. 9) (потік, що входить у поверхню, враховуємо із мінусом).

 <p style="text-align: center;">Рис. 9</p>	$\Psi_{U_3} = -A_{U_3} dl'_V dl'_W = -A_{U_3} h_V dV h_W dW$ <p>Приріст потоку за рахунок зміни координати</p> $\Psi_{U_1} = -A'_U dl'_V dl'_W.$ <p>Потік через поверхні 3-1</p> $\Psi_{3-1} = -A_U h_V h_W dV dW + A'_U h'_V h'_W dV dW$ <p>(22)</p>
---	---

Похідна від потоку Ψ_{3-1} :

$$d\Psi_{3-1} = \frac{\partial}{\partial U} (A_U h_V h_W) dU dV dW. \quad (23)$$

Похідна від потоку Ψ_{4-2} :

$$d\Psi_{4-2} = \frac{\partial}{\partial V} (A_V h_U h_W) dU dV dW. \quad (24)$$

Похідна від потоку Ψ_{5-6} :

$$d\Psi_{5-6} = \frac{\partial}{\partial W} (A_W h_U h_V) dU dV dW. \quad (25)$$

Сумарний потік

$$d\Psi_A = \left[\frac{\partial}{\partial U} (A_U h_V h_W) + \frac{\partial}{\partial V} (A_V h_U h_W) + \frac{\partial}{\partial W} (A_W h_U h_V) \right] dU dV dW. \quad (26)$$

Враховуючи, що добуток $dU dV dW$ є відношенням об'єму до коефіцієнтів Ламе (20)

$$dU dV dW = \frac{dV}{h_U h_V h_W},$$

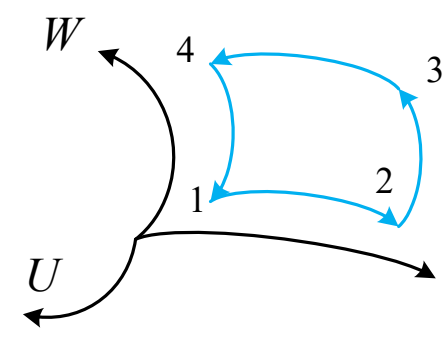
отримаємо вираз для дивергенції в узагальненій системі координат

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{1}{h_U h_V h_W} \left[\frac{\partial}{\partial U} (A_U h_V h_W) + \frac{\partial}{\partial V} (A_V h_U h_W) + \frac{\partial}{\partial W} (A_W h_U h_V) \right]. \quad (27)$$

Ротор в узагальненій системі координат

Циркуляція вектору \bar{A} по замкнутому контуру l , що охоплює поверхню S , віднесена до цієї поверхні коли $S \rightarrow 0$ є ротором вектору \bar{A}

$$\operatorname{rot} \bar{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{A} dl}{\Delta S}.$$

 <p style="text-align: center;">Рис. 10</p>	<p>Знайдемо циркуляцію вектору \bar{A} вздовж замкнутого контуру 1-2-3-4-1 в криволінійній системі координат (рис. 10).</p> <p>Вздовж 1-2: $A_V dl_V = A_V h_V dV$.</p>
---	---

Вздовж 2-3: $\left(A_W + \frac{\partial A_W}{\partial V} dV \right) h_W dW = A_W h_W dW + \frac{\partial A_W}{\partial V} h_W dV dW$.

Вздовж 3-4: $-\left(A_V + \frac{\partial A_V}{\partial W} dW \right) h_V dV = -A_V h_V dV - \frac{\partial A_V}{\partial W} h_V dV dW$.

Вздовж 4-1: $-A_W dl_W = -A_W h_W dW$.

Тоді сумарна циркуляція вздовж замкнутого контуру 1-2-3-4-1 дорівнює

$$\frac{\partial A_W}{\partial V} h_W dV dW - \frac{\partial A_V}{\partial W} h_V dV dW. \quad (28)$$

Проекція ротора на ось U , враховуючи що $dS_U = h_V h_W dV dW$

$$\text{rot}_U \bar{A} = \frac{1}{h_V h_W} \left[\frac{\partial}{\partial V} (A_W h_W) - \frac{\partial}{\partial W} (A_V h_V) \right]. \quad (29)$$

Проекції ротора на осі V та W відповідно

$$\text{rot}_V \bar{A} = \frac{1}{h_U h_W} \left[\frac{\partial}{\partial W} (A_U h_U) - \frac{\partial}{\partial U} (A_W h_W) \right]. \quad (30)$$

$$\text{rot}_W \bar{A} = \frac{1}{h_U h_V} \left[\frac{\partial}{\partial U} (A_V h_V) - \frac{\partial}{\partial V} (A_U h_U) \right]. \quad (31)$$

Остаточно

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{A} = & \frac{1}{h_V h_W} \left[\frac{\partial}{\partial V} (A_W h_W) - \frac{\partial}{\partial W} (A_V h_V) \right] \cdot \bar{i}_U + \\ & + \frac{1}{h_U h_W} \left[\frac{\partial}{\partial W} (A_U h_U) - \frac{\partial}{\partial U} (A_W h_W) \right] \cdot \bar{j}_V + \\ & + \frac{1}{h_U h_V} \left[\frac{\partial}{\partial U} (A_V h_V) - \frac{\partial}{\partial V} (A_U h_U) \right] \cdot \bar{k}_W. \end{aligned} \quad (32)$$

Диференційні оператори в декартовій системі координат

Відповідність до узагальненої системи $x \leftrightarrow U$, $y \leftrightarrow V$, $z \leftrightarrow W$.

Коефіцієнти Ламе

$$h_U^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial U} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial U} \right)^2 = 1,$$

$$h_V^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial V} \right)^2 = 1,$$

$$h_W^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial W} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial W} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial W} \right)^2 = 1.$$

Приріст довжини $dl_U = h_U \cdot dU = dx$, $dl_V = h_V \cdot dV = dy$,

$dl_W = h_W \cdot dW = dz$.

$$\text{grad} G = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \bar{k} = \nabla G.$$

$$\text{div} \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \bar{A}.$$

$$\operatorname{rot} \bar{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \cdot \bar{i} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \cdot \bar{j} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \cdot \bar{k}.$$

$$\operatorname{divgrad} G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \nabla^2 G.$$

Диференційні оператори в циліндричній системі координат

Відповідність до узагальненої системи $r \leftrightarrow U$, $\theta \leftrightarrow V$, $z \leftrightarrow W$.

Координати циліндричної системи пов'язані із координатами декартової наступними співвідношеннями (8):

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta, \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z = z. \end{cases}$$

У урахуванням (8) коефіцієнти Ламе запишуться так:

$$\begin{aligned} h_U^2 = h_r^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 = \left(\frac{\partial r \cos \theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial r \sin \theta}{\partial r} \right)^2 + 0 = \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_V^2 = h_\theta^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = \left(\frac{\partial r \cos \theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial r \sin \theta}{\partial \theta} \right)^2 + 0 = \\ &= r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2, \end{aligned}$$

$$h_W^2 = h_z^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right)^2 = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Приріст довжини $dl_U = h_U \cdot dU = 1 \cdot dr = dr$,

$$dl_V = h_V \cdot dV = r \cdot d\theta,$$

$$dl_W = h_W \cdot dW = 1 \cdot dz = dz.$$

$$\operatorname{grad} G = \frac{dG}{dl_U} \bar{i}_U + \frac{dG}{dl_V} \bar{j}_V + \frac{dG}{dl_W} \bar{k}_W = \frac{dG}{dr} \bar{i}_r + \frac{1}{r} \frac{dG}{d\theta} \bar{j}_\theta + \frac{dG}{dz} \bar{k}_z.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \bar{A} &= \frac{1}{h_U h_V h_W} \left[\frac{\partial}{\partial U} (A_U h_V h_W) + \frac{\partial}{\partial V} (A_V h_U h_W) + \frac{\partial}{\partial W} (A_W h_U h_V) \right] = \\
&= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (A_r r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z) \right]. \\
\operatorname{rot} \bar{A} &= \frac{1}{h_V h_W} \left[\frac{\partial}{\partial V} (A_W h_W) - \frac{\partial}{\partial W} (A_V h_V) \right] \cdot \bar{i}_U + \\
&+ \frac{1}{h_U h_W} \left[\frac{\partial}{\partial W} (A_U h_U) - \frac{\partial}{\partial U} (A_W h_W) \right] \cdot \bar{j}_V + \\
&+ \frac{1}{h_U h_V} \left[\frac{\partial}{\partial U} (A_V h_V) - \frac{\partial}{\partial V} (A_U h_U) \right] \cdot \bar{k}_W = \\
&= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (A_\theta \cdot r)}{\partial z} \right] \cdot \bar{i}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \cdot \bar{j}_\theta + \left[\frac{\partial (A_\theta \cdot r)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \cdot \bar{k}_z.
\end{aligned}$$

Диференційні оператори у сферичній системі координат

Відповідність до узагальненої системи $r \leftrightarrow U$, $\theta \leftrightarrow V$, $\varphi \leftrightarrow W$.

Координати сферичної і декартової систем пов'язані так (9):

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ z = r \cdot \cos \theta. \end{cases}$$

У відповідності із (9) коефіцієнти Ламе матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned}
h_U^2 = h_r^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 = \left(\frac{\partial r \sin \theta \cos \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial r \sin \theta \sin \varphi}{\partial r} \right)^2 + \\
&+ \left(\frac{\partial r \cos \theta}{\partial r} \right)^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_V^2 = h_\theta^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = \left(\frac{\partial r \sin \theta \cos \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial r \sin \theta \sin \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \\
&+ \left(\frac{\partial r \cos \theta}{\partial \theta} \right)^2 = r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = r^2,
\end{aligned}$$

$$h_w^2 = h_\varphi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial r \sin \theta \cos \varphi}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r \sin \theta \sin \varphi}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r \cdot \cos \theta}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + 0 = r^2 \sin^2 \theta.$$

Приріст довжини $dl_U = h_U \cdot dU = h_r \cdot dr = dr,$

$$dl_V = h_V \cdot dV = h_\theta \cdot d\theta = r \cdot d\theta,$$

$$dl_W = h_W \cdot dW = h_\varphi \cdot d\varphi = r \cdot \sin \theta d\varphi.$$

$$\text{grad}G = \frac{dG}{dl_U} \bar{i}_U + \frac{dG}{dl_V} \bar{j}_V + \frac{dG}{dl_W} \bar{k}_W = \frac{d\varphi}{dr} \bar{i}_r + \frac{1}{r} \frac{dG}{d\theta} \bar{j}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{dG}{d\varphi} \bar{k}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \text{div} \bar{A} &= \frac{1}{h_U h_V h_W} \left[\frac{\partial}{\partial U} (A_U h_V h_W) + \frac{\partial}{\partial V} (A_V h_U h_W) + \frac{\partial}{\partial W} (A_W h_U h_V) \right] = \\ &= \frac{1}{1 \cdot r \cdot r \cdot \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (A_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \cdot 1 \cdot r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi \cdot 1 \cdot r) \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (A_r r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{A} &= \frac{1}{h_V h_W} \left[\frac{\partial}{\partial V} (A_W h_W) - \frac{\partial}{\partial W} (A_V h_V) \right] \cdot \bar{i}_U + \\ &+ \frac{1}{h_U h_W} \left[\frac{\partial}{\partial W} (A_U h_U) - \frac{\partial}{\partial U} (A_W h_W) \right] \cdot \bar{j}_V + \\ &+ \frac{1}{h_U h_V} \left[\frac{\partial}{\partial U} (A_V h_V) - \frac{\partial}{\partial V} (A_U h_U) \right] \cdot \bar{k}_W = \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial (r A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial (A_\theta \cdot r)}{\partial \varphi} \right] \cdot \bar{i}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi \sin \theta)}{\partial r} \right] \cdot \bar{j}_\theta + \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (A_\theta \cdot r)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \cdot \bar{k}_z. \end{aligned}$$

РОЗДІЛ 2

Основні визначення, рівняння та характеристики електромагнітного поля

ТЕМА 2.1 Загальна характеристика електромагнітного поля. Система
рівнянь поля

Лекція №4 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ. СИСТЕМА РІВНЯНЬ ПОЛЯ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ

Визначення електромагнітного поля. Закони повного струму і електромагнітної індукції. Перше і друге рівняння Максвелла, теорема Гауса і постулат Максвелла, принцип неперервності магнітного потоку та електричного струму. Повна система рівнянь електромагнітного поля в інтегральній формі.

Система рівнянь Максвелла - основа класичної електродинаміки

Роком народження *електродинаміки* вважається 1820 рік, коли Х. Ерстед виявив, що електричний струм створює навколо себе магнітне поле. У цьому ж році А. Ампер визначив силу взаємодії між електричним струмом і магнітом. З цих відкриттів почалося вивчення електричних і магнітних явищ, як проявів єдиного *електромагнітного* механізму.

1 Основні рівняння електромагнітного поля в інтегральній формі

Електромагнітне поле у будь-якому матеріальному середовищі описується чотирма рівняннями, що зв'язують його основні характеристики: напруженість електричного поля – \vec{E} , електричну індукцію – \vec{D} , напруженість магнітного поля – \vec{H} і магнітну індукцію – \vec{B} з джерелами поля: електричним зарядом Q і його об'ємною густиною ρ , електричним струмом i та його густиною \vec{J} .

Перше рівняння Максвелла в інтегральній формі або узагальнений закон повного струму має вигляд

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \int_S \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) d\bar{S} \quad (1)$$

і відображає те, що будь який електричний струм (провідності, перенесення чи електричного зміщення) створює зв'язане з ним магнітне поле, причому циркуляція вектору напруженості магнітного поля вздовж периферії l деякої поверхні S , дорівнює повному струму, що проходить через цю поверхню. Де \bar{J} – густина струму провідності чи перенесення, $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ – густина струму зміщення.

Необхідно пам'ятати, що *повний струм* викликає різні за характером явища і визначається як сума струмів провідності $i_{\text{пр}}$, перенесення $i_{\text{пер}}$ та зміщення $i_{\text{зм}}$, але в будь-якій точці частина повного струму $\bar{J}_{\text{пов}} = \bar{J}_{\text{пр}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, або $\bar{J}_{\text{пов}} = \bar{J}_{\text{пер}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, оскільки не може існувати одночасно струм провідності і струм перенесення як явища, пов'язані з рухом зарядів у даному середовищі. Таким чином літерою \bar{J} будемо позначати або густину струму провідності, або струму перенесення.

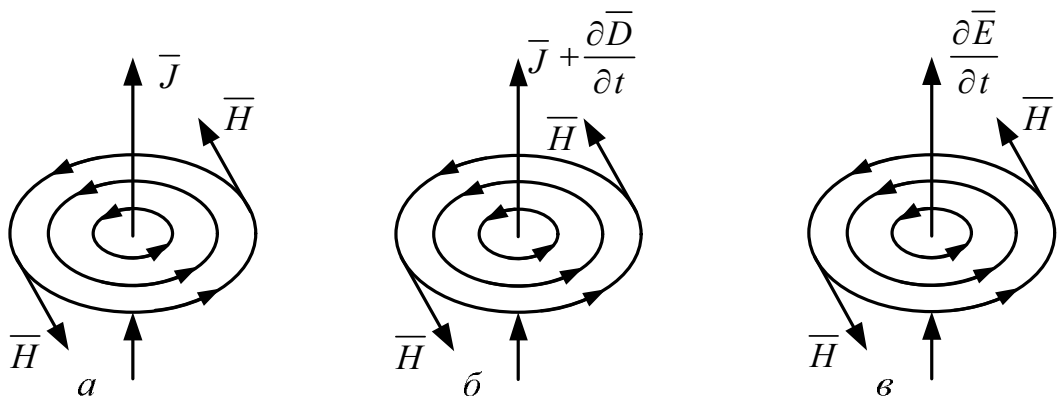


Рис. 1.

Магнітне поле є основною ознакою присутності електричного струму. Рис. 1, *а* показує випадок, коли тільки струм провідності (чи перенесення) створює магнітне поле, лінії напруженості якого \vec{H} охоплюють цей струм. На рис. 1, *б* зображено загальний випадок існування струмів провідності (чи перенесення) та струму зміщення, які спільно створюють навколишнє магнітне поле.

Рис. 1, *в* демонструє випадок, коли немає струмів провідності чи перенесення, а магнітне поле створюється навіть у пустоті (де немає відомих нам зарядів) під час зміни електричного поля у часі.

Як бачимо, що рух зарядів складає лише частину загальної густини електричного струму. Навіть в ідеальному діелектрику є рух зарядів у процесі його поляризації, але там є і струм зміщення у пустоті ($\vec{J}_{\text{зм}} = \vec{J}_{\text{пол}} + \vec{J}_0$), який і зумовлює появу магнітного поля під час зміни

електричного поля $\vec{J}_0 = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

З викладеного зрозуміло, що рух зарядів та змінне у часі електричне поле створюють магнітне поле.

Лінії густин повного струму завжди замкнені, що математично записується у вигляді

$$\oint_S \vec{J}_{\text{пов}} d\vec{S} = 0,$$

тобто потік вектору густини повного електричного струму крізь будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю. Це є одним з фундаментальних положень електродинаміки – принципом неперервності електричного струму. Останнє рівняння стверджує, що електричний струм (окремі його види чи їх сума), який входить до будь-якого об'єму, обмеженого поверхнею S , дорівнює струму, який залишає цей об'єм.

Друге рівняння Максвелла (закон електромагнітної індукції) в інтегральній формі записується у вигляді

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S} \quad (2)$$

і виражає той факт, що будь-яке змінне у часі магнітне поле створює у тому самому місці простору пов'язане з ним електричне поле, причому швидкість зміни магнітного потоку крізь поверхню S чисельно дорівнює електрорушійній силі (ЕРС), що виникає вздовж периферії l поверхні S , як у провіднику, так і у діелектрику. Знак мінус у виразі (2) свідчить про те, що індукована ЕРС викликає струм такого напрямку, щоб створене ним магнітне поле перешкоджало зміні основного магнітного поля. Це положення, відоме як *принцип електромагнітної інерції* або *правило Ленца*, свідчить про консервативність електромагнітного поля, про те, що при будь-якій спробі порушити встановлений режим роботи електротехнічного приладу виникає протидія у вигляді індукованого електромагнітного поля.

До фундаментальних рівнянь електромагнітного поля відносять і узагальнену теорему Гауса (постулат Максвелла), яка виражає взаємозв'язок між електричним полем і зарядами, що його створюють

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_V \rho_{\text{вільн}} dV. \quad (3)$$

Потік вектору електричної індукції – \bar{D} через будь-яку замкнену поверхню дорівнює вільному заряду, який знаходиться всередині цієї поверхні.

З цієї теореми, узагальненої Максвеллом для будь-яких зарядів, середовищ і полів, у тому числі й змінних, випливає, що електричне поле починається і закінчується на електричних зарядах. Для розрахунку потоку вектора електричної індукції \bar{D} крізь бокову поверхню S достатньо знайти лише значення вільних зарядів, об'ємною густиною ρ , що знаходиться в об'ємі V .

Четверте з основних рівнянь електромагнітного поля в інтегральній формі виражає принцип неперервності магнітного потоку

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (4)$$

який стверджує, що лінії магнітної індукції замкнені. У природі немає магнітних зарядів, на яких починались би і закінчувались лінії магнітної індукції \vec{B} . Магнітне поле створюють тільки електричні струми (у тому числі й електричне поле, що змінюється у часі, тобто струми зміщення), а лінії магнітної індукції завжди охоплюють ці струми, не маючи ні початку, ні кінця. Магнітний потік, який входить у деякий об'єм повинен вийти з нього повністю.

Рівняння електромагнітного поля в інтегральній формі описують електромагнітні явища у деякому об'ємі або на деякій поверхні, тобто характеризують ці явища в цілому, у сумарному вигляді. Проте для точного розрахунку параметрів електричних установок потрібно знати не інтегральні ефекти, а значення основних характеристик електромагнітного поля у кожній точці простору у будь-який момент часу. З цією метою користуються рівняннями електромагнітного поля у локальній або диференціальній формі.

Для більш глибокого розуміння фізичної сутності наведених вище рівнянь і законів розглянемо найпростіші приклади їх використання при описі електромагнітних процесів.

Приклад 1 (перше рівняння Максвелла)

Розглянемо прямий провідник, вздовж якого проходить постійний струм I . Навколо провідника виникає магнітне поле H , яке може бути визначене із першого рівняння Максвелла в інтегральній формі (1):

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{J} d\bar{S}, \quad \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0\right).$$

Виберемо поверхню S , обмежену контуром l у вигляді кола радіусом r із центром, що збігається з віссю провідника і розміщене у площині, перпендикулярній до осі провідника. Використовуючи осьову симетрію задачі, замінимо скалярний добуток векторів $\bar{H} d\bar{l}$ добутком їх довжин і винесемо H за знак інтеграла як величину сталу вздовж контуру інтегрування. Тоді $\oint_l d\bar{l} = 2\pi r$, а інтеграл у правій частині дорівнює повному струму I , який перетинає поверхню S . Отже, $H = I/2\pi r$.

Дане співвідношення є виразом **закону Ампера** для знаходження магнітного поля провідника, через який проходить постійний струм.

Проаналізуємо значення другого доданка $\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_2} \bar{D} d\bar{S}$ у правій частині

першого рівняння Максвелла (1).

Розглянемо дві пластини плаского конденсатора, у колі якого проходить струм i . Виберемо контур інтегрування l у вигляді кола, яке охоплює провідник. Якщо поверхня S_1 , обмежена цим контуром, перетинає провідник до першої пластини конденсатора, то згідно з рівнянням Максвелла (1) струм провідності створює магнітне поле, обумовлене таким співвідношенням:

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \int_{S_1} \bar{J} d\bar{S} = i_{np}.$$

Виберемо іншу поверхню S_2 , обмежену таким самим контуром, але розміщену між пластинами конденсатора, де струм провідності переривається. Тоді

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_2} \bar{D} d\bar{S}.$$

Однак результат виникнення магнітного поля не повинен залежати від вибору поверхні інтегрування, тому праві частини останніх виразів повинні бути однакові. Отже, струм провідності у колі конденсатора

замикається струмом зміщення між його пластинами: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_2} \bar{D} d\bar{S} = i_{\text{зм}}$.

$$\text{Густина струму зміщення } \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{J}_{\text{зм}}.$$

Струм зміщення виникає у будь-якому діелектрику при зміні електричного поля в часі. Хоча природа струму провідності і струму зміщення різна, обоє вони утворюють магнітне поле.

Приклад 2 (друге рівняння Максвелла)

У просторі, де є магнітне поле \bar{B} , розглянемо одиночний дрововий контур l . Згідно із другим рівнянням Максвелла в інтегральній формі (2)

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{B} d\bar{S} \quad \text{у просторі виникає електричне}$$

поле. Інтеграл у правій частині виразу є магнітним потоком $\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{S}$

вектора магнітної індукції \bar{B} через поверхню S , обмежену контуром l . Інтеграл у лівій частині є електрорушійною силою, що виникає у контурі:

$$e = \oint_l \bar{E} d\bar{l}$$

Рівняння $e = -d\Phi/dt$ - виражає закон електромагнітної індукції, отриманий Фарадеєм.

Приклад 3 (третє рівняння Максвелла)

Розглянемо точковий заряд Q , навколо якого існує електричне поле. Відповідно до третього рівняння Максвелла в інтегральній формі (3) маємо

$$\epsilon\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV = Q$$

Якщо за поверхню інтегрування вибрати сферу із центром у місці розміщення заряду, очевидно, що через центральну симетрію вектори E і dS колінеарні, а напруженість постійна по всій поверхні інтегрування.

Тоді інтеграл у лівій частині дорівнює добутку E на площу поверхні сфери $4\pi r^2$, а інтеграл у правій частині дорівнює заряду Q .

Напруженість поля точкового заряду визначається виразом

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Якщо в електричне поле заряду Q внести пробний заряд Q^* , то сила, що діє на нього, буде дорівнювати

$$F = Q^* \cdot E = \frac{Q Q^*}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Даний вираз являє собою запис закону Кулона про взаємодію між зарядами.

Приклад 4 (четверте рівняння Максвелла)

Четверте рівняння Максвелла (4) показує, що потік вектора магнітної індукції крізь замкнену поверхню S дорівнює нулю, тобто вхідний потік дорівнює вихідному. Це означає, що магнітні силові лінії завжди замкнені і не мають ні початку, ні кінця. Силові лінії електричного поля починаються або закінчуються на зарядах.

Лекція №5 (продовження лекції 4)

СИСТЕМА РІВНЯНЬ ПОЛЯ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМІ

Закони повного струму і електромагнітної індукції. Перше і друге рівняння Максвелла, теорема Гауса і постулат Максвелла, принцип неперервності магнітного потоку та електричного струму. Повна система рівнянь електромагнітного поля в диференціальній формі

Система рівнянь Максвелла - основа класичної електродинаміки **2 Основні рівняння електромагнітного поля в диференціальній формі**

Теорема Стокса застосовується для переходу від інтегралу по поверхні до лінійного інтегралу

$$\oint_l \bar{A} d\bar{l} = \int_S \text{rot} \bar{A} d\bar{S}.$$

Теорема Остроградського застосовується для переходу від об'ємного інтегралу до інтегралу по поверхні

$$\oint_S \bar{A} d\bar{S} = \int_V \text{div} \bar{A} d\bar{V}$$

Використаємо закон повного струму в інтегральній формі і замінимо за теоремою Стокса ліву частину – циркуляцію вектору \bar{H} вздовж контуру l – потоком ротора вектору \bar{H} через поверхню S , обмежену цим контуром

$$\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \int_S \text{rot} \bar{H} d\bar{S},$$

тоді з $\oint_l \bar{H} d\bar{l} = \int_S \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) d\bar{S}$ маємо:

$$\int_S \text{rot} \bar{H} d\bar{S} = \int_S \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) d\bar{S}.$$

Оскільки у останньому інтегрування проводиться по тій самій поверхні S , отримаємо:

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}. \quad (5)$$

Ротор вектора \bar{H} дорівнює повному струму у даній точці поля.

Це перше рівняння Максвелла, або закон повного струму у диференціальній формі, з якого випливає, що електричний струм будь-якого виду створює зв'язане з ним вихрове магнітне поле, причому кількісно у кожній точці простору густина повного струму $\bar{J}_{\text{пов}} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$

дорівнює вихору вектора \bar{H} .

Напрямок ротора \bar{H} співпадає з напрямом густини повного струму, а лінії вектора \bar{H} охоплюють лінії $\text{rot} \bar{H}$ (рис. 2) і зв'язані з напрямом $\text{rot} \bar{H}$ правилом правого гвинта.

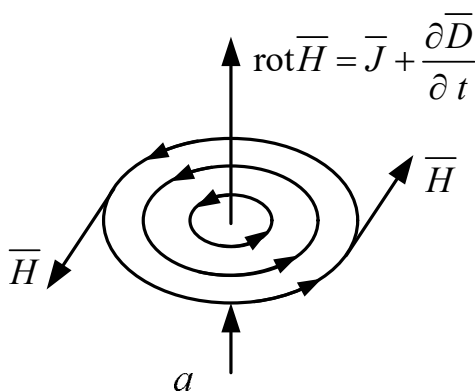


Рис. 2

Рівняння (5) є інваріантним до будь якої системи координат, але складові $\text{rot} \bar{H}$, які виражені через складові вектора \bar{H} у різних системах

координат відрізняються. Зокрема, в декартовій системі координат перше рівняння Максвелла має вигляд

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \bar{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \\ + \bar{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \bar{i} J_{\text{пов}x} + \bar{j} J_{\text{пов}y} + \bar{k} J_{\text{пов}z},$$

де \bar{i} , \bar{j} та \bar{k} – одиничні орти вздовж осей Ox , Oy та Oz .

Виконавши аналогічні закону повного струму перетворення виразу закону електромагнітної індукції в інтегральній формі $\oint_l \bar{E} d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S}$,

одержимо **друге рівняння Максвелла у диференціальній формі:**

$$\operatorname{rot} \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \quad (6)$$

З цього рівняння випливає, що тільки змінне у часі магнітне поле, створює зв'язане з ним вихрове електричне поле, а швидкість зміни магнітної індукції чисельно дорівнює ротору вектора \bar{E} .

Напрямок вихору \bar{E} у загальному випадку не співпадає з вектором \bar{B} , а є напрямом, до якого наближається напрям приросту вектора магнітної індукції $\Delta \bar{B}$ за нескінченно малий проміжок часу $\Delta t \rightarrow 0$ (рис. 3).

Фізичний зміст другого рівняння Максвелла полягає у тому, що у просторі, де змінюється магнітне поле, з'являється вихрове електричне поле, напруженість якого \bar{E} зв'язана із зміною магнітного поля правилом лівого гвинта (через знак мінус перед $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$).

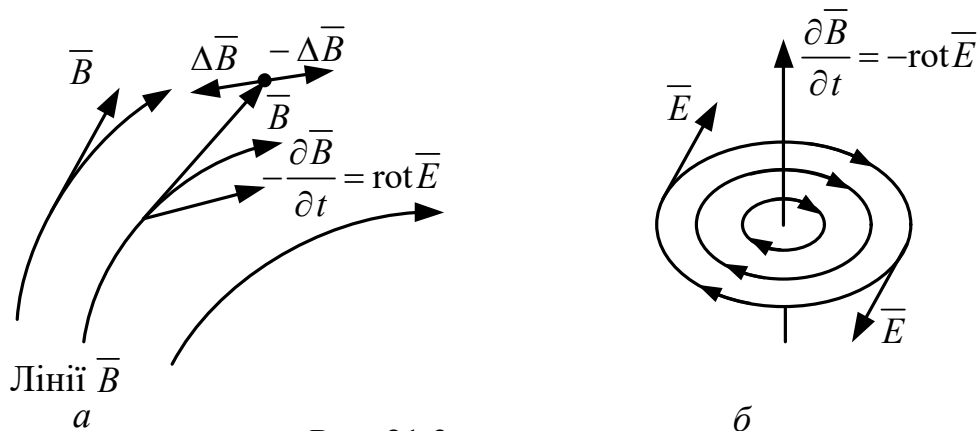


Рис. 3.

Щоб записати узагальнену теорему Гауса (3) у диференціальній формі, замінимо за теоремою Остроградського – Гауса потік вектора \bar{D} крізь замкнену поверхню S об'ємним інтегралом від дивергенції вектора \bar{D} по об'єму V , обмеженому цією поверхнею

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_V \text{div} \bar{D} dV.$$

Тоді узагальнена теорема Гауса в інтегральній формі

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_V \rho_{\text{вільн}} dV \text{ набуває вигляду:}$$

$$\int_V \text{div} \bar{D} dV = \int_V \rho_{\text{вільн}} dV.$$

Оскільки інтегрування лівої і правої частин останнього рівняння проводиться по одному й тому ж об'єму, то маємо теорему Гауса в диференціальній формі:

$$\text{div} \bar{D} = \rho_{\text{вільн}}. \quad (7)$$

Тобто, розходження вектора \bar{D} чисельно дорівнює об'ємній густині вільного заряду в даній точці поля. Це є постулат Максвелла або узагальнена теорема Гауса для будь-якого, в тому числі і змінного у часі

заряду у диференційній формі, яка стверджує, що витокami і стоками електричного поля є заряди, причому лінії вектора \vec{D} починаються на позитивних зарядах ($\rho > 0$), а закінчуються – на негативних ($\rho < 0$).

У тих точках, де вільних зарядів немає ($\rho = 0$), $\text{div}\vec{D} = 0$, тобто немає ні стоків, ні витоків (чи в кожній точці є і виток і сток), таке поле зветься соленоїдним (рис. 4).

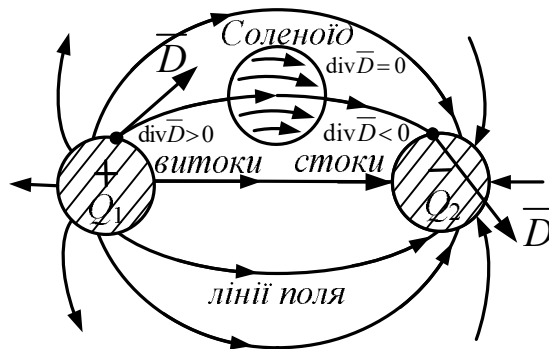


Рис. 4.

Важливо зазначити, що ротор вектору є векторною величиною, а дивергенція вектору – скалярною, і в декартовій системі координат, наприклад, постулат Максвелла має вигляд:

$$\text{div}\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho.$$

Застосувавши подібне перетворення за теоремою Остроградського – Гауса до $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$, одержимо **принцип неперервності магнітного**

потокy у диференціальній формі: $\text{div}\vec{B} = 0$, (8)

який стверджує, що магнітне поле не має ні стоків ні витоків, воно скрізь соленоїдне. Лінії вектору \vec{B} неперервні, вони завжди замкнені.

З виразу $\oint_S \bar{J}_{\text{пов}} d\bar{S} = 0$ аналогічно до принципу неперервності

магнітного потоку, отримуємо рівняння для густини повного електричного струму, а саме:

$$\operatorname{div} \bar{J}_{\text{пов}} = 0, \quad (9)$$

тобто лінії густини повного струму не мають ні стоків і ні витоків, вони неперервні.

Якщо ж представити повний струм як суму струму провідності $\bar{J}_{\text{пр}}$ (чи струму перенесення $\bar{J}_{\text{пер}}$) та струму зміщення $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, то з урахуванням

(9) отримаємо:

$$\operatorname{div} \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{D} = \operatorname{div} \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{вільн}} = 0$$

або:

$$\operatorname{div} \bar{J} = -\frac{\partial \rho_{\text{вільн}}}{\partial t}. \quad (10)$$

Це є рівняння неперервності електричного струму, що виражає закон збереження електричного заряду.

Як бачимо, лінії густини струму провідності у змінному полі мають розриви, вони продовжуються струмами зміщення, створюючи замкнені лінії повного струму.

3 Повна система рівнянь електромагнітного поля в диференціальній формі

Електромагнітне поле вважається відомим, якщо у кожному мить часу в кожній точці простору відомі значення векторів напруженості електричного поля \bar{E} і магнітної індукції \bar{B} . Ці величини зв'язані рівняннями (6), (7) та (8). Параметри середовища, у якому визначається

електромагнітне поле (ϵ_a , μ_a , γ – відповідно абсолютні діелектрична, магнітна проникності і питома провідність), враховуються у додаткових рівняннях, які разом з чотирма основними становлять повну систему рівнянь електромагнітного поля для нерухомого середовища в диференціальній формі

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}; \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \operatorname{div} \bar{D} = \rho;$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0; \bar{D} = \epsilon_a \bar{E}; \bar{B} = \mu_a \bar{H}; \bar{J} = \gamma \bar{E} \text{ або } \bar{J} = \rho \bar{v}. \quad (11)$$

де $\bar{J} = \gamma \bar{E}$ – це густина струму провідності, $\bar{J} = \rho \bar{v}$ – густина струму перенесення. Для повного аналізу електромагнітного поля додають ще формулу розрахунку об'ємної густини енергії електричної та магнітної складових єдиного електромагнітного поля:

$$W' = W'_e + W'_m = \frac{\bar{D} \cdot \bar{E}}{2} + \frac{\bar{B} \cdot \bar{H}}{2}.$$

У математичній теорії поля часто використовують компактну формулу запису ротора та дивергенції за допомогою символічного векторного оператора Гамільтона – $\bar{\nabla}$ (набла), який в декартовій системі координат має вигляд:

$$\bar{\nabla} = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (12)$$

Де $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ та $\frac{\partial}{\partial z}$ є складовими уздовж осей координат.

Тоді ротор вектора \bar{H} можна записати як векторний добуток “набла” та вектора \bar{H} $\operatorname{rot} \bar{H} = [\bar{\nabla}, \bar{H}]$, а дивергенцію вектора \bar{D} – як скалярний добуток $\bar{\nabla}$ та вектора \bar{D} $\operatorname{div} \bar{D} = \bar{\nabla} \bar{D}$. Після виконання заміни роторів та дивергенцій основні рівняння Максвелла в компактній формі набувають вигляду:

$$\left[\overline{\nabla}, \overline{H}\right] = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}; \left[\overline{\nabla}, \overline{E}\right] = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}; \overline{\nabla} \overline{D} = \rho; \overline{\nabla} \overline{B} = 0. \quad (13)$$

Ця система рівнянь дозволяє аналізувати різні види електромагнітних полів: електростатичного, стаціонарного та змінного у різних середовищах.

4 Властивості рівнянь Максвелла

1. Рівняння Максвелла лінійні. Вони містять лише перші похідні характеристики полів \overline{E} і \overline{B} у часі. Якщо два будь-які поля задовольняють рівнянням Максвелла, то це відноситься і до суми цих полів.

2. Рівняння Максвелла містять рівняння нерозривності, що виражають закон збереження заряду.

3. Рівняння Максвелла виконуються у різних інерціальних системах. Вони є релятивістські інваріантними. Вид рівнянь Максвелла при переході від однієї інерціальної системи до іншої не змінюється.

4. Рівняння Максвелла не симетричні відносно електричного і магнітного полів. Це обумовлено тим, що в природі існують електричні заряди, але немає зарядів магнітних.

5. З рівнянь Максвелла випливає важливий висновок про існування принципово нового фізичного явища. Електромагнітне поле може існувати самостійно, тобто висновок про існування електромагнітних хвиль, а також про їх властивості.

5 Загальні властивості і рівняння квазістатичних, квазістаціонарних і стаціонарних полів

Рівняння Максвелла описують змінне електромагнітне поле як єдиний процес взаємозв'язку електричного $\partial \overline{D} / \partial t$ і магнітного

$\partial \bar{B} / \partial t$ полів. Залежно від швидкості зміни $\partial \bar{D} / \partial t$ і $\partial \bar{B} / \partial t$ розрізняють квазістатичне, квазістаціонарне й швидкозмінне поле. У граничних випадках, коли $\partial \bar{D} / \partial t$ і $\partial \bar{B} / \partial t$ дорівнюють нулю, рівняння Максвелла спрощуються і описують окремі види стаціонарних електромагнітних полів: електростатичне поле, електричне поле постійного струму та магнітне поле постійного струму.

Ці поля мають свої особливості і закономірності, коротко зупинимося на найбільш загальних із них.

1 Квазістатичним полем називається змінне електромагнітне поле, у якому $\partial \bar{B} / \partial t = 0$. Таке поле вважається потенціальним, тому що $\text{rot } \bar{E} = 0$ та для нього відсутній взаємний вплив електричного і магнітного полів.

2 Квазістаціонарне поле – це повільно змінне у часі вихрове поле, для якого можна вважати, що густина струму зміщення ($\bar{J}_{\text{зм}} = \partial \bar{D} / \partial t \approx 0$) мала порівняно із густиною струму провідності $\bar{J}_{\text{пр}}$.

Ефект запізнювання (ефект випромінювання) відсутній. Для металевих провідників нехтування струмами зміщення ($\frac{\omega \varepsilon_a}{\gamma} \ll 1$) припустимо в широкому діапазоні частот аж до $f = 10^{17}$ Гц. Ефект запізнювання, обумовлений кінцевою швидкістю хвилі, неістотний, якщо лінійні розміри електромагнітних установок набагато менші за довжину хвиль, які поширюються в досліджуваній області.

При низьких частотах, наприклад при промисловій частоті $f = 50$ Гц, довжина хвилі в повітрі $l = 6000$ км, тому ефектом запізнювання можна знехтувати у межах великих областей поля. Більшість електромагнітних полів, які досліджуються в електродинаміці та радіотехніці, можуть розглядатися як квазістаціонарні.

Ураховуючи визначення квазістатичного та квазістаціонарного полів, їхні диференційні рівняння запишуться у такий спосіб:

Таблиця 1

Квазістатичне поле	Квазістаціонарне поле
$\text{rot} \bar{H} = \gamma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$	$\text{rot} \bar{H} = \gamma \bar{E}$
$\text{rot} \bar{E} = 0$	$\text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$
$\text{div} \bar{D} = \rho$	$\text{div} \bar{D} = \rho$
$\text{div} \bar{B} = 0$	$\text{div} \bar{B} = 0$

3 Стаціонарні поля. Умовою стаціонарності електромагнітних полів є відсутність їх зміни в часі, тобто вектори $\bar{E}, \bar{H}, \bar{D}, \bar{B}$ є функціями тільки координат. Це означає, що змінні у часі компоненти полів, які входять в рівняння Максвелла і рівняння безперервності, відсутні. Доповнивши дану систему рівняннями Лапласа і Пуассона, отримаємо спільну систему рівнянь, яка описує стаціонарні поля.

Але про це мова піде у наступній лекції.

РОЗДІЛ 3 Електростатичне поле

ТЕМА 3.1 Рівняння електростатичного поля та його властивості

Лекція №6 ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Основні рівняння електростатичного поля. Безвихровий характер електростатичного поля. Градієнт електричного потенціалу. Визначення потенціалу за заданим розподілом зарядів. Рівняння Пуассона та Лапласа. Приклади застосування рівнянь поля для розрахунку полів з осьовою симетрією.

Граничні умови на поверхні провідників, на межі поділу двох діелектриків. Основна задача електростатики

ХАРАКТЕРИСТИКИ І РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ (електричний потенціал, градієнт потенціалу, рівняння Пуассона та Лапласа)

1 Основні рівняння електростатичного поля

Електричне поле, що утворюється сукупністю нерухомих у просторі і незмінних у часі зарядів, називається електростатичним. Це поле характеризується сталими у часі величинами, відсутністю макроскопічних електричних струмів ($\bar{J} = 0$) і, як наслідок, відсутністю магнітного поля ($\bar{B} = 0$).

Основні рівняння електростатичного поля одержуємо з повної системи рівнянь електромагнітного поля:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0; \operatorname{div} \bar{D} = \rho; \bar{D} = \varepsilon_a \bar{E}. \quad (1)$$

Електростатичне поле можна виявити:

- а) за його механічною дією на нерухомі заряджені тіла, розміщені у цьому полі (притягання чим відштовхування);
- б) через наведення електричних зарядів на нерухомих металевих тілах (електростатична індукція);
- в) через поляризацію діелектриків.

Як бачимо, електростатичне поле є безвихровим, тобто потенціальним, що випливає з рівнянь (1). Для такого поля характерно:

1. Робота сили такого поля вздовж будь-якого замкненого шляху дорівнює нулю

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = \int_s \text{rot} \bar{E} dS = 0. \quad (2)$$

2. Для характеристики електростатичного поля можна ввести нову локальну характеристику – електричний потенціал як скалярну функцію

$$\varphi_A = \int_A^P \bar{E} d\bar{l}, \quad \text{що залежить тільки від координати точки } A, \text{ що}$$

досліджується, і визначеної інтегралом від вектору \bar{E} вздовж будь-якого шляху від точки A до фіксованої точки P , потенціал якої прийнято за нуль.

Потенціал даної точки чисельно дорівнює роботі, яку можуть виконати сили поля при перенесенні одиночного позитивного заряду з цієї точки до фіксованої точки поля P .

Потенціал можна вибрати так, щоб вектор \bar{E} був його градієнтом, тобто покласти:

$$\bar{E} = -\text{grad}(\varphi). \quad (3)$$

Градiєнт потенціалу – це векторна величина, яка чисельно дорівнює відношенню приросту потенціалу до приросту координати, вибраної у такому напрямку, в якому приріст потенціалу максимальний.

Зрозуміло, що вектори \bar{E} та $\text{grad}(\varphi)$ направлені протилежно, тобто уздовж силової лінії потенціал падає.

При цьому не порушується перше рівняння (1) $\bar{E} = -\text{grad}(\varphi)$, оскільки ротор будь-якого градієнта тотожно дорівнює нулю

$$\text{rot grad} \equiv 0.$$

У проекціях на декартові осі $\text{grad}(\varphi)$ має вигляд:

$$\text{grad}(\varphi) = \bar{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (4)$$

або це є добуток оператора Гамільтона на скалярну функцію потенціалу

$$\bar{\nabla} \varphi = \text{grad}(\varphi).$$

Тож (3) можна переписати інакше:

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} \varphi. \quad (5)$$

2 Рівняння Пуассона та Лапласа

Введення скалярної функції електричного потенціалу φ полегшує визначення напруженості електричного поля - \bar{E} , яка є векторною величиною і потребує геометричного складання \bar{E} , якщо поле створюється декількома зарядами. Тож є можливість спочатку розрахувати потенціал у кожній точці поля, а потім вже через градієнт потенціалу і напруженість - \bar{E} . Скориставшись постулатом Максвелла з урахування $\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$, можемо записати для однорідного середовища ($\epsilon_a = \text{const}$) $\text{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}$. Якщо скористаємося співвідношенням $\bar{E} = -\text{grad}(\varphi)$, отримаємо рівняння Пуассона для зарядженого середовища з об'ємною густиною заряду ρ :

$$\text{div} \text{grad}(\varphi) = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (6)$$

Використавши оператор $\bar{\nabla}$, рівняння Пуассона прийме вигляд:

$$\begin{aligned} \text{div} \text{grad} \varphi &= \bar{\nabla} \bar{\nabla} \varphi = \nabla^2 \varphi \\ \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \end{aligned} \quad (7)$$

У декартовій системі координат останнє рівняння запишеться так:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (8)$$

В області, де зарядів немає ($\rho=0$), рівняння Пуассона переходить у рівняння Лапласа: $\nabla^2 \varphi = 0$, або $\Delta \varphi = 0$, (9)

де $\nabla^2 = \Delta$ називають «Лапласіаном».

Ці два рівняння дозволяють визначити потенціал у будь якій точці поля, якщо відомий розподіл заряду у просторі $\rho(x, y, z)$, чи визначити об'ємну частину заряду, якщо відомий розподіл потенціалу $\varphi(x, y, z)$.

Загальний розв'язок рівняння Пуассона за відомим розподілом зарядів у просторі можна отримати знаючи, що згідно з законом Кулона напруженість електричного поля точкового заряду на відстані r дорівнює

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2}. \quad (10)$$

Потенціал будь - якої точки M такого поля (поклавши $\varphi_p = 0$ за $r \rightarrow \infty$) визначається:

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (11)$$

Якщо взяти заряджене тіло кінцевих розмірів і виділити нескінченно малий об'єм dV , то потенціал у будь-якій точці M у самому тілі буде дорівнювати:

$$\varphi_i = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r_i}, \quad (12)$$

а за межами тіла:

$$\varphi_e = \int_{V_{\text{тіла}}} \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a r_e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r_e}, \quad (13)$$

де $\rho = \frac{dQ}{dV}$ - об'ємна густина заряду.

Ці формули дають загальні рішення рівнянь Пуассона і Лапласа для випадку, коли заряд розподілений по об'єму V (наприклад, електронна хмара в електронних лампах).

Якщо заряд розподілений по поверхні з густиною σ наприклад, на поверхні провідників, у цьому випадку потенціал:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_S \frac{\sigma dS}{r}, \quad (14)$$

де $\sigma = \frac{dQ}{dS}$ - поверхнева густина заряду.

Коли заряд розподілений по лінії з *лінійною густиною* (наприклад, на лінійному провіднику достатньо малого перерізу), тоді потенціал:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_l \frac{\tau dl}{r}, \quad (15)$$

де $\tau = \frac{dQ}{dl}$.

У випадку, коли одночасно враховуються об'ємні, поверхневі, лінійні і точкові заряди у лінійному однорідному середовищі, потенціал визначається методом накладання:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \left(\int_V \frac{\rho dV}{r} + \int_S \frac{\sigma dS}{r} + \int_l \frac{\tau dl}{r} + \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{r} \right), \quad (16)$$

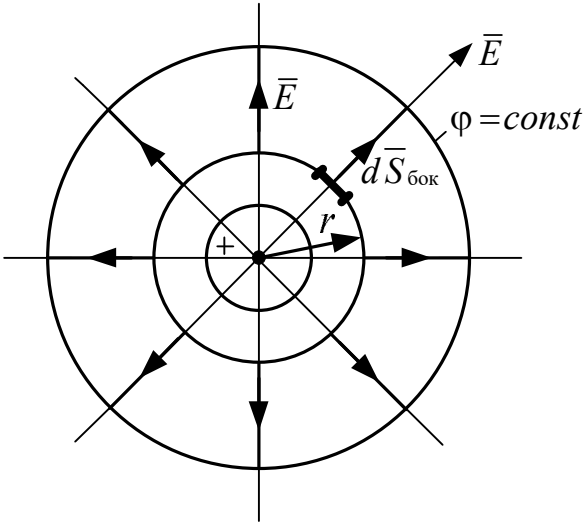
У багатьох практичних задачах розподіл зарядів невідомий, а відомий тільки заряд всього тіла, тож розрахунок за (16) неможливий і тоді потрібно використовувати рівняння Пуассона та Лапласа з урахуванням граничних умов.

Про це мова піде на наступній лекції.

Але є прості задачі, які можливо розрахувати, використовуючи наведені вище співвідношення в інтегральній та диференціальній формах. Розглянемо деякі з них зараз.

3 Приклади застосування рівнянь електростатичного поля

3.1 Поле точкового заряду

 <p style="text-align: center;">Рис. 1</p>	<p>Розглянемо (рис. 1) поле точкового заряду величиною Q. Середовище навколо точкового заряду має діелектричну проникність ϵ_a.</p> <p>Для розв'язання задачі застосуємо теорему Гауса для однорідного діелектрика</p> $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{в}}{\epsilon_a}.$
--	--

Для знаходження напруженості електричного поля у будь - якій точці, віддаленій від точкового заряду на відстань r , проведемо через цю точку сферичну поверхню S .

Внаслідок симетрії поля є тільки радіальна складова вектору напруженості $\vec{E} = E \cdot \vec{r}_0$. Оскільки елемент поверхні $d\vec{S}$ та \vec{E} перпендикулярні, маємо:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_a} \text{ звідки } E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2}, \quad (17)$$

тобто напруженість поля точкового заряду змінюється обернено пропорційно квадрату відстані r від заряду.

Потенціал у цій же точці можна визначити із співвідношення:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi:$$

$$\varphi = -\int_r^{\infty} \bar{E} d\bar{r} = -\int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (18)$$

З останнього випливає рівняння поверхні однакового потенціалу $\varphi(r) = const$, коли $r = const$ – це сферичні поверхні радіусу r , у центрі яких знаходиться точковий заряд.

3.2 Поле самітної зарядженої осі

Під зарядженою віссю розуміють тонкий теоретичний нескінченно довгий провідник із лінійною густиною τ . Середовище навколо осі має діелектричну проникність $\epsilon_a = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$.

Для знаходження напруженості поля у будь-якій точці, віддаленій від осі на відстань r , проведемо через цю точку циліндричну поверхню так, щоб вісь циліндра довжиною l збігалася із зарядженою віссю (рис. 2).

Для розв'язання задачі застосуємо теорему Гауса для однорідного діелектрика

$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q_B}{\epsilon_a}.$$

Внаслідок симетрії поля є тільки радіальна складова вектору напруженості $\bar{E} = E \cdot \bar{r}_0$. Враховуючи, що через основи циліндра потік вектору \bar{E} відсутній, оскільки елемент поверхні $d\bar{S}$ та \bar{E} перпендикулярні, маємо:

$$\oint_{S_{бок}} \bar{E} d\bar{S} = E \cdot 2\pi r l = \frac{\tau l}{\epsilon_a} \text{ звідки } E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}, \quad (19)$$

тобто напруженість поля зарядженої осі змінюється обернено пропорційно відстані r від осі.

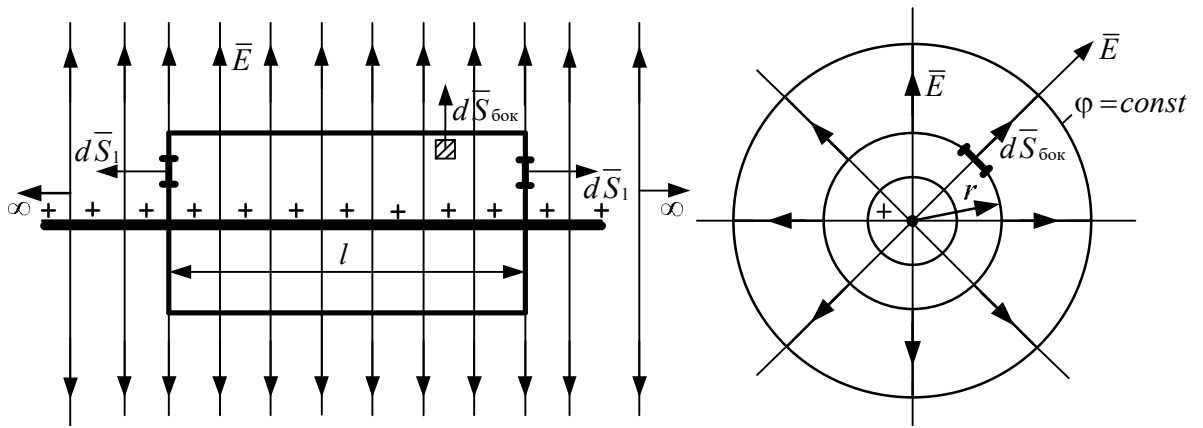


Рис. 2

Потенціал у цій же точці можна визначити із співвідношення:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi :$$

$$\varphi = -\int \vec{E} d\vec{r} = -\int \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r} dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r} + A. \quad (20)$$

Значення константи A залежить від вибору координати точки, в якій $\varphi = 0$. Нехай у точці з $r = R_p$ потенціал $\varphi(R_p) = 0$.

$$\varphi(R_p) = -\int \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r} dr + A = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln R_p + A = 0,$$

$$A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln R_p.$$

Остаточно для потенціалу будемо мати

$$\varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} (\ln R_p - \ln r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R_p}{r}. \quad (21)$$

3.3 Поле циліндричного провідника

Нехай провідний циліндр довжиною l круглого перерізу з радіусом R знаходиться в однорідному діелектрику, діелектрична проникність якого ϵ_a . Циліндр має електричний заряд Q_b . Потрібно визначити напруженість електростатичного поля і потенціал навколо провідника.

Всередині провідного циліндра поля немає ($\vec{E}_i = 0$), поза циліндром поле симетричне відносно осі циліндра.

Якщо вважати циліндр нескінченно довгим, викривленням поля поблизу кінців циліндра можна знехтувати. Напруженість поля має однакові значення в точках, рівновіддалених від осі циліндра, а напрям вектору \vec{E} перпендикулярний до осі. Як і в попередньому прикладі, проведемо через вибрану точку поля циліндричну поверхню з радіусом

r ($r \geq R$) і застосуємо теорему Гауса $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_B}{\epsilon_a}$ (рис. 3).

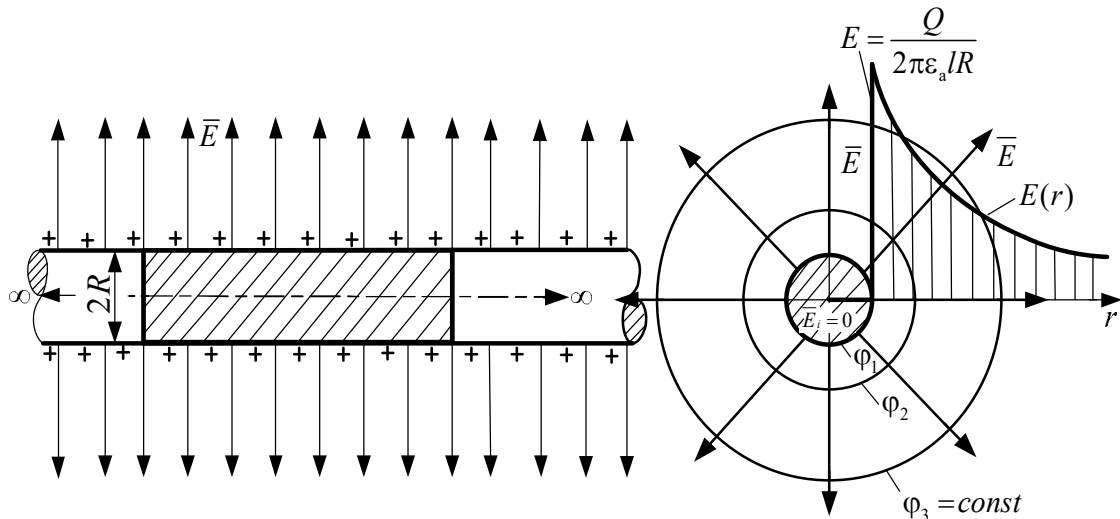


Рис. 3

Оскільки маємо лише радіальну складову вектору \vec{E} , то

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \oint_{S_{\text{бок}}} d\vec{S} = E \cdot 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon_a}$$

Звідси:
$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a r l} \quad (22)$$

потенціал
$$\varphi = -\int \vec{E} d\vec{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{1}{r} + const. \quad (23)$$

або інакше:
$$\varphi = \int_r^{r_p} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{r_p}{r} . \quad (24)$$

Як видно з одержаних результатів, \bar{E} та φ залежать від відстані r до вибраної точки і не залежать від радіуса циліндра R . Рівняння ліній однакового потенціалу $r = const$ є рівнянням кола з центром на осі циліндра, а поверхня однакового потенціалу є циліндричною поверхнею радіуса r . Силові лінії та лінії однакового потенціалу дають повне уявлення про картину електростатичного поля навколо циліндра. Для можливості кількісної оцінки поля, пам'ятаючи, що $E = -\frac{d\varphi}{dr}$, вибирають відстані між сусідніми еквіпотенціалами n та $(n+1)$ так, щоб різниця потенціалів між ними $\Delta\varphi$ була однакою. Тоді

$$\varphi_n = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_p}{r_n}; \quad \varphi_{n+1} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_p}{r_{n+1}},$$

а

$$\Delta\varphi = \varphi_{n+1} - \varphi_n = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} \quad (25)$$

Як бачимо, $\Delta\varphi = const$, коли $\frac{r_{n+1}}{r_n} = const$, тобто радіуси сусідніх еквіпотенціальних ліній знаходяться у геометричній прогресії. На рис. 3 представлена картина поля та графік розподілу \bar{E} вздовж відстані від осі циліндра – r .

Варто зазначити, що картину поля зарядженого провідного циліндра можна отримати, маючи картину поля зарядженої осі, якщо сумістити поверхню проводу з поверхнею однакового потенціалу поля зарядженої осі. Тоді, як стверджує теорема єдиності рішення рівнянь Максвелла, поле поза проводом буде таким же, як і поле зарядженої осі, яка співпадає з віссю проводу.

3.4 Поле та ємність циліндричного конденсатора

Щоб визначити залежність напруженості електричного поля та потенціалу від r в такому конденсаторі, достатньо знати поле зарядженого

проводу, розглянутого у попередньому прикладі. Оскільки поверхні електродів конденсатора (це прямий та зворотній проводи концентричного кабелю) є концентричними, а екіпотенціальні поверхні поля одного проводу радіуса R також концентричні, то поле конденсатора буде таким же як і поле одного проводу між двома концентричними екіпотенціальними поверхнями. Тобто потрібно сумістити поверхні електродів з цими екіпотенціальними поверхнями і тоді отримаємо:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \cdot \frac{1}{r}, \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{r_p}{r}. \quad (26)$$

Якщо відома напруга на конденсаторі - $U = \varphi_1 - \varphi_2$ то заряд можна визначити, поклавши $\varphi_2 = 0$ при $r_p = R_2$, а $\varphi_1 = U$ при $r = R_1$. Тоді

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (27)$$

звідси:

$$Q = U \cdot \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (28)$$

Напруженість поля:

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (29)$$

Потенціал дорівнює:

$$\varphi = \frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{R_2}{r}. \quad (30)$$

Ємність циліндричного конденсатора з (28):

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (31)$$

Ємність на одиницю довжини (погонна ємність):

$$C_0 = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (32)$$

Картина поля та залежності $E(r)$ та $\varphi(r)$ представлені на рис. 4.

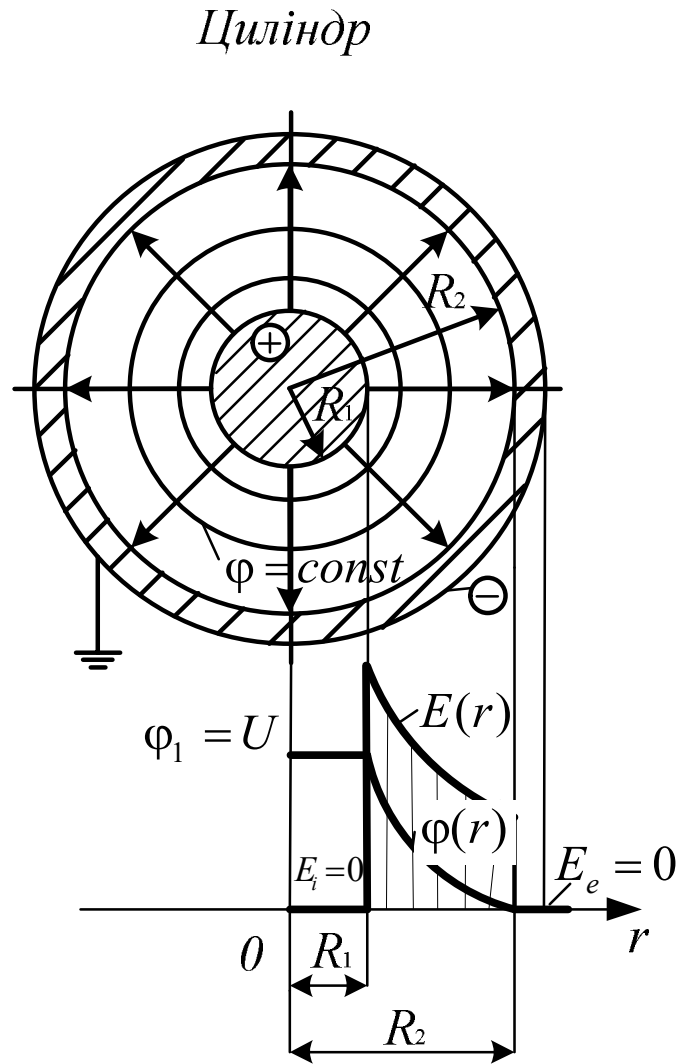


Рис. 4

Лекція №7 РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ РІЗНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

Граничні умови в електростатичному полі: на поверхні провідників, на межі поділу двох діелектриків. Енергія електростатичного поля. Основна задача електростатики. Електростатичне поле нескінчених різнойменно заряджених осей. ЕСП проводів кінцевого перерізу. ЕСП поблизу провідникової поверхні та біля розділу двох діелектриків

1 Граничні умови в електростатичному полі

Рівняння Пуассона та Лапласа справедливі лише для однорідного середовища, тож на межі провідник-діелектрик та двох різних діелектриків, де параметри середовища (ϵ_a) змінюються стрибком, маємо розрив неперервності функції, через що операції div та rot непридатні. Для цих поверхонь слід сформулювати умови поведінки векторів \vec{E} та \vec{D} , які можна отримати з інтегральних рівнянь поля, а саме з умови потенціальності електростатичного поля $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, та з постулату

Максвелла $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{вільн}}$.

1.1 Граничні умови на поверхні розділу двох діелектриків

Виділимо замкнений контур $abcd$ так, щоб він проходив через граничну поверхню, а його сторони однакової довжини проходили у різних середовищах нескінченно близько від межі розділу цих діелектриків (рис. 1, а)

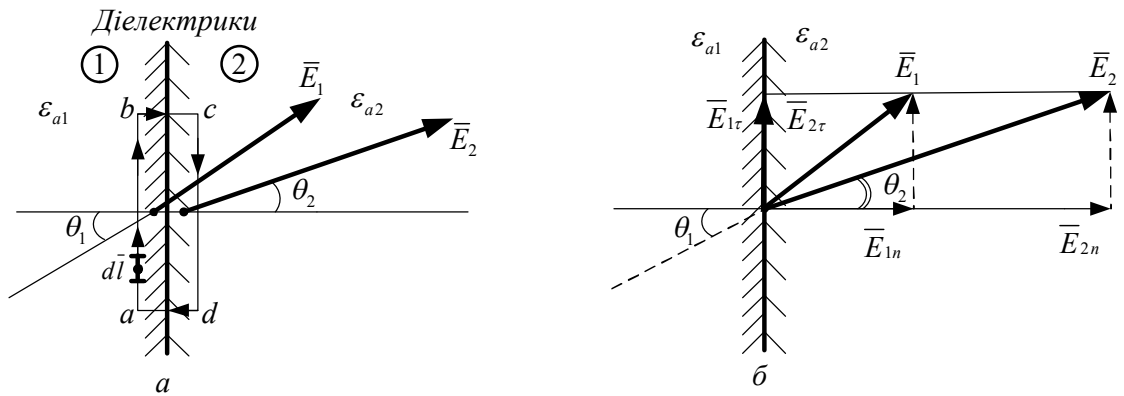


Рис. 1

Зваживши на те, що $bc = ad \approx 0$, маємо:

$$\oint_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 ab \cdot \sin(\theta_1) - E_2 cd \cdot \sin(\theta_2) = 0$$

тобто:

$$E_1 \sin(\theta_1) = E_2 \sin(\theta_2), \quad (1)$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (2)$$

Тангенціальні (дотичні до граничної поверхні) складові напруженості електричного поля на границі розділу двох діелектриків однакові.

Коли $\epsilon_{a1} \neq \epsilon_{a2}$, нормальні складові \vec{E}_{1n} і \vec{E}_{2n} будуть змінюватися стрибком, і тоді має місце заломлення силових ліній на межі розділу двох діелектриків (рис. 1, б). Це заломлення можна пояснити появою зв'язаного заряду на поверхні розділу діелектриків за рахунок різної їх поляризації. Для випадку, коли $\epsilon_{a1} > \epsilon_{a2}$, перший діелектрик поляризується більше, ніж другий, що призводить до появи на межі надлишкового позитивного зв'язаного заряду. Цей заряд створює своє власне поле $\vec{E}_{зв}$ (рис. 2), яке напрямлене у різні боки від поверхні і, накладаючись на зовнішнє поле \vec{E}_0 , примушує заломлюватись лінії \vec{E} на межі розділу діелектриків.

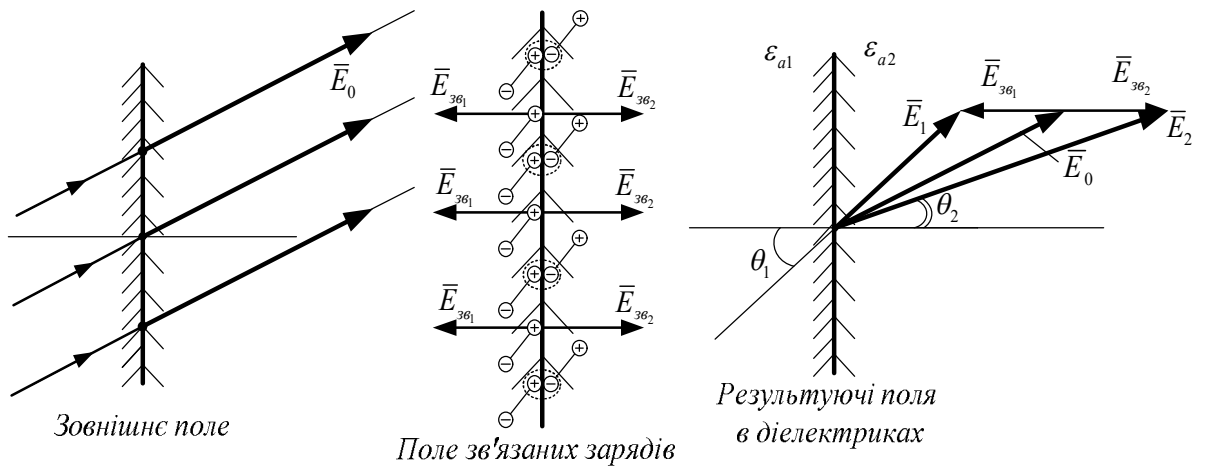


Рис. 2

Для визначення поведінки вектору індукції \vec{D} на поверхні, що розділяє два діелектрики за умови відсутності на ній вільного заряду Q_B , виділимо умовно малий циліндр, як це показано на рис. 3,а. Будемо вважати, що бокова поверхня його дуже мала, а діючі $ab = cd = dS$ паралельні поверхні розділу діелектриків.

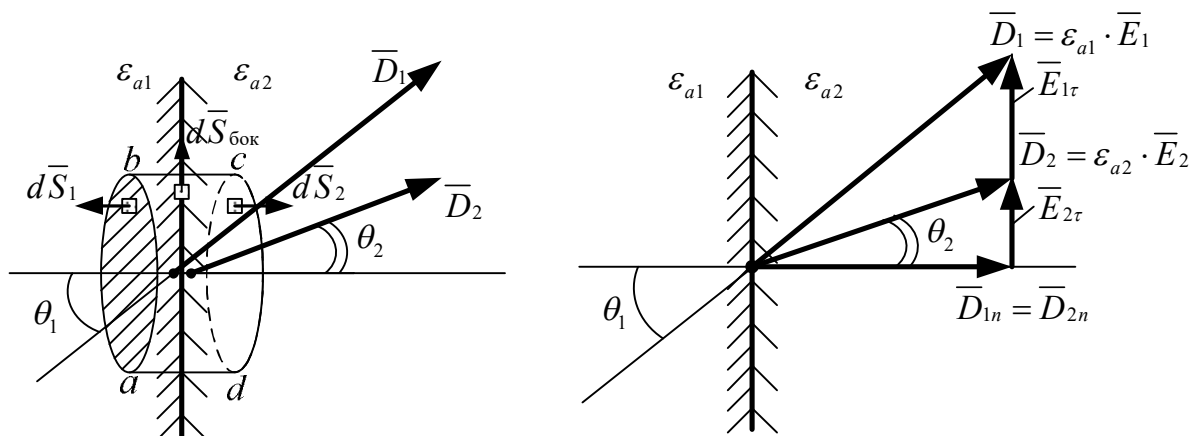


Рис. 3

Потік вектору \vec{D} через таку поверхню, зваживши на те, що в першому діелектрику кут між \vec{D} та $d\vec{S}$, дорівнює $(180^\circ - \theta_1)$, а у другому θ_2 , буде:

$$\oint_{abcd} \bar{D} d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{D}_1 d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{D}_2 d\bar{S} + \int_S \bar{D} d\bar{S} = -D_1 \cdot dS \cos(\theta_1) + D_2 \cdot dS \cos(\theta_2) = 0$$

тобто:

$$D_1 \cos(\theta_1) = D_2 \cos(\theta_2), \quad (3)$$

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (4)$$

Нормальні складові вектору електричної індукції на межі розділу двох діелектриків неперервні (рис. 3, б).

Зваживши на наведене вище твердження про заломлення ліній \bar{E} , очевидно, що нормальні компоненти \bar{E} змінюються стрибком залежно від діелектричних проникностей діелектриків:

$$\epsilon_{a2} E_{1n} = \epsilon_{a1} E_{2n}, \quad \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_{1a}}{\epsilon_{2a}}. \quad (5)$$

Умову заломлення ліній поля при переході з одного діелектрика в інший отримаємо, поділивши рівняння (1) на (3) з урахуванням, що $\bar{D}_1 = \epsilon_{a1} \bar{E}_1$, а $\bar{D}_2 = \epsilon_{a2} \bar{E}_2$:

$$\frac{\operatorname{tg}(\theta_1)}{\operatorname{tg}(\theta_2)} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}}. \quad (6)$$

Якщо на поверхні є вільний заряд Q_B , то з узагальненої теореми Гауса

$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = Q_B$ для того ж малого циліндра маємо:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_B \quad (7)$$

де σ_B - поверхнева густина вільного заряду.

Ця ж умова через потенціали має вигляд

$$-\epsilon_{a2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \epsilon_{a1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma_B, \quad (8)$$

де \vec{n} - нормаль до межі розділу діелектриків.

1.2 Граничні умови на поверхні провідників

Вільні електрони та протони провідників можуть пересуватися під дією електричного поля, створюючи електричні струми. Ці заряди будуть нерухомими тільки за умови, якщо напруженість поля всередині провідників E_i і тангенціальна компоненти напруженості електростатичного поля на поверхні E_t будуть дорівнювати нулю ($E_t = 0$). Тож у кожній точці поверхні провідника напруженість електростатичного поля напрямлена за нормаллю до неї, а заряди розташовуються на поверхні нерівномірно, таким чином, щоб результуюче поле від зарядів всередині провідника було відсутнє. Оскільки лінії \vec{E} завжди перпендикулярні поверхням однакового потенціалу, то поверхня провідника (як і весь його об'єм) екіпотенціальна.

1.3 Граничні умови на поверхні розділу провідник-діелектрик

Вільні електрони та протони провідників можуть пересуватися під дією електричного поля, створюючи електричні струми. Ці заряди будуть нерухомими тільки за умови, якщо напруженість поля всередині провідників E_i і тангенціальна компоненти напруженості електростатичного поля на поверхні E_t будуть дорівнювати нулю ($E_t = 0$). Тож у кожній точці поверхні провідника напруженість електростатичного поля напрямлена за нормаллю до неї, а заряди розташовуються на поверхні нерівномірно, таким чином, щоб результуюче поле від зарядів всередині провідника було відсутнє. Оскільки лінії \vec{E} завжди перпендикулярні поверхням однакового потенціалу, то поверхня провідника (як і весь його об'єм) екіпотенціальна.

Щоб розрахувати поверхневу густину заряду провідника σ визначимо потік вектору \vec{D} через поверхню нескінченно малого циліндра, частина

якого розташована в провіднику, а частина в оточуючому цей провідник діелектрику (рис. 4) $\oint_S \bar{D} d\bar{S} = Q$. Оскільки в середині провідника поле

відсутнє $\bar{D}_i = 0$, а бокова поверхня мала, то потік вектору D буде тільки через денце, яке знаходиться в діелектрику і примикає до

провідника $D \cdot dS = dQ$, тобто $D = \frac{dQ}{dS} = \sigma$. (9)

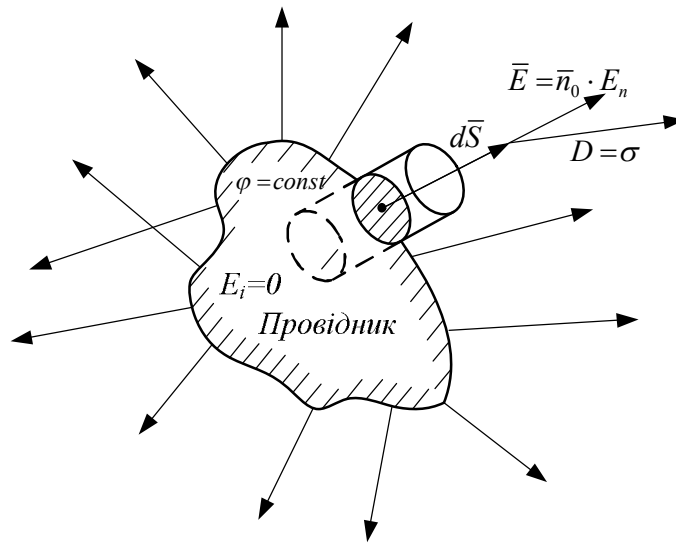


Рис. 4

Таким чином, на поверхні межі провідник – діелектрик вектор напруженості поля перпендикулярний до поверхні провідника і дорівнює відношенню поверхневої густини заряду провідника до діелектричної проникності оточуючого діелектрика

$$\bar{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_a} \bar{n}_0. \quad (10)$$

Якщо відомий розподіл потенціалу в просторі навколо провідника, легко визначити густину заряду на його поверхні і весь заряд провідника, пам'ятаючи, що $\bar{E} = -\text{grad}(\varphi)$

$$Q_{\text{пр}} = \int_S \sigma \cdot dS = \int_S \epsilon_a \bar{E} \cdot d\bar{S} = - \int_S \epsilon_a \frac{\partial \phi}{\partial n} dS. \quad (11)$$

Слід зазначити, що граничні умови дозволяють розв'язати так звані внутрішню та зовнішню крайові задачі електростатики.

Внутрішня крайова задача передбачає обчислення поля всередині області, обмеженої певними поверхнями, а *зовнішня* – визначення поля у зовнішньому просторі при додатковій граничній умові на нескінченності:

$$\phi \rightarrow 0 \text{ коли } r \rightarrow \infty,$$

де r – віддаль від заряду до точки, в якій визначається потенціал.

Для внутрішніх задач розрізняють граничні умови першого та другого роду.

Граничні умови першого роду використовують при розв'язанні задачі Діріхле, коли потрібно визначити потенціал всередині деякої області, і відомо значення потенціалу у всіх точках поверхні, що обмежує цю область

$$\phi(x, y, z) = \phi_S \text{ при } (x, y, z) \in S. \quad (12)$$

Друга крайова задача, або задача Неймана, формулюється так: визначити розподіл потенціалу в деякій області, якщо відомі похідні потенціалу по нормалі до поверхні, яка обмежує область

$$\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}, \text{ } (x, y, z) \in S. \quad (13)$$

2 Енергія електростатичного поля

В електростатичному полі, створеному електричними зарядами, є певна кількість енергії, що розподіляється з різною густиною в об'ємі всього простору, на який розповсюджується дане поле. Ця енергія визначається роботою, яка витрачається зовнішніми силами на розподіл і

переміщення зарядів. За рахунок цієї енергії електростатичне поле переміщує заряди і здійснює роботу. При цьому енергія поля зменшується. Якщо заряди переміщуються під дією зовнішніх сил, то енергія поля збільшується.

Для визначення кількості накопиченої в електростатичному полі енергії приймемо такі умови.

Потенціал поля і напруженість в нескінченно віддалених точках дорівнюють нулю.

Всі процеси створення електростатичного поля відбуваються досить повільно, так щоб можна було не враховувати магнітні поля, які виникають в процесі руху зарядів.

Величина енергії поля не залежить від того, яким шляхом воно створюється, тобто в якій послідовності переміщувались заряди.

Нехай система провідних тіл 1, 2, 3, ... n поступово заряджається до тих пір, поки заряди на них не стануть рівними $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$. При збільшенні заряду тіла k , що має потенціал ϕ_k , на величину dq_k витрачається елементарна робота $\phi_k dq_k$.

Якщо тіло k зарядиться від нуля до q_k , то робота, яка витрачається на цей процес визначається

$$A_k = \int_0^{q_k} \phi_k dq_k .$$

Після зарядки всіх n тіл повна робота

$$A = \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n \int_0^{q_k} \phi_k dq_k . \quad (14)$$

Енергія створеного при цьому електростатичного поля дорівнює виконаній роботі

$$W_E = A .$$

При виконанні третьої умови можна вважати, що заряди на всіх тілах зростають пропорціонально один відносно одного, тобто

$$q_s = \gamma_{ks} q_k. \quad (15)$$

Потенціал φ_k k -го тіла залежить від зарядів усіх тіл. У зв'язку з тим, що між потенціалами і зарядами є лінійна залежність, то у відповідності з принципом накладання

$$\varphi_k = \alpha_{k1} q_1 + \alpha_{k2} q_2 + \dots + \alpha_{kn} q_n.$$

Звідки

$$\varphi_k = \alpha_{k1} \gamma_{k1} q_k + \alpha_{k2} \gamma_{k2} q_k + \dots + \alpha_{kn} \gamma_{kn} q_k$$

або

$$\varphi_k = (\alpha_{k1} \gamma_{k1} + \alpha_{k2} \gamma_{k2} + \dots + \alpha_{kn} \gamma_{kn}) q_k = \gamma_k q_k, \quad (16)$$

де $\gamma_k = const$.

Таким чином, підставивши (16) в (14) отримаємо

$$W_E = \sum_{k=1}^n \int_0^{q_k} \gamma_k q_k dq_k = \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k q_k^2}{2} \quad (17)$$

або

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k. \quad (18)$$

Енергія електростатичного поля системи заряджених тіл дорівнює половині суми добутків потенціалів тіл на їхні заряди.

Електростатичне поле створюється не тільки зарядженими провідними тілами, але і розподіленими зарядами з об'ємною густиною ρ .

В цьому випадку

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k + \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (19)$$

Для перетворення (19) використаємо векторне співвідношення

$$\operatorname{div}(\varphi \bar{D}) = \varphi \operatorname{div} \bar{D} + \bar{D} \operatorname{grad} \varphi.$$

Врахувавши, що $\operatorname{div} \bar{D} = \rho$, а $\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ отримаємо

$$\varphi \rho = \operatorname{div}(\varphi \bar{D}) + \bar{E} \bar{D}.$$

Тоді (19) запишемо у вигляді

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\varphi \bar{D}) dV + \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \bar{D} dV.$$

Перетворимо перший інтеграл за теоремою Остроградського-Гауса

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k + \frac{1}{2} \oint_S \varphi \bar{D} d\bar{S} + \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \bar{D} dV. \quad (20)$$

Перший інтеграл береться по всій поверхні S , що обмежує об'єм V , в якому знаходиться поле. Ця поверхня включає в себе поверхню сфери S_∞ нескінченно великого радіуса і поверхню S_k провідних тіл, тому що в них поле відсутнє (рис.5).

При інтегруванні по поверхні S_∞ можна розглядати сумарний заряд, що розташований в обмеженій області простору як точковий, тому потенціал такого заряду зменшується з відстанню r , як $1/r$, а електричне зміщення D , як $1/r^2$.

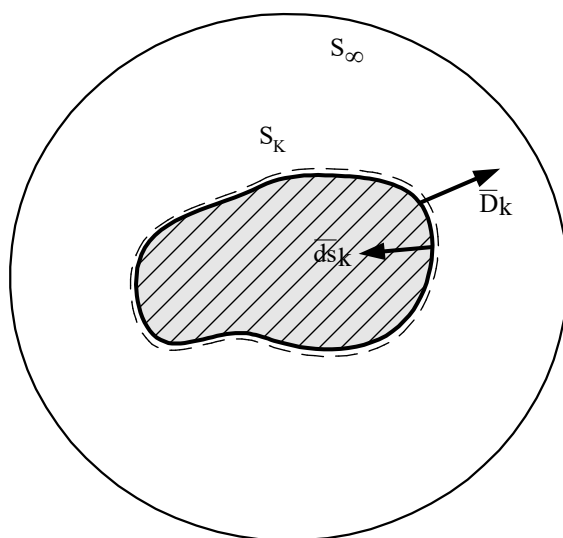


Рис. 5

Отже, підінтегральний вираз в першому інтегралі (20) зменшується як $\frac{1}{r^3}$. Площа інтегрування сфери збільшується пропорційно r^2 . Тому при $r \rightarrow \infty$ перший інтеграл при інтегруванні по поверхні S_∞ прямує до нуля.

При інтегруванні по поверхні провідників S_k , врахуємо, що вектор елементарної поверхні направлений завжди з об'єму, який обмежує поверхню інтегрування (рис. 5), а вектор електричного зміщення на поверхні провідника направлений по нормалі до його поверхні в протилежну сторону, тому

$$\bar{D}_k d\bar{S}_k = -D_k dS_k.$$

На поверхні провідника, як витікає з граничних умов, $D_k = \sigma_k$, а потенціал довільної точки провідного тіла має одне і те ж значення φ_k , тому при наявності декількох провідних тіл перший інтеграл в (20) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{2} \oint_S \varphi \bar{D} d\bar{s} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k \oint_{S_k} \sigma dS = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k.$$

Звідси енергія електростатичного поля

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \bar{D} dV. \quad (21)$$

Дана формула визначає енергію електростатичного поля як суму нескінченно малих складових вигляду

$$dW_E = \frac{\bar{E} \bar{D}}{2} dV,$$

які виражають елементарну енергію, що припадає на елементарний об'єм поля. Звідси об'ємна густина енергії електростатичного поля

$$W_{OE} = \frac{\partial W_E}{\partial V} = \frac{\bar{E} \bar{D}}{2}. \quad (22)$$

Для ізотропного середовища $\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$, тому

$$W_{OE} = \frac{E D}{2} = \frac{\epsilon_o E^2}{2} = \frac{D^2}{2 \epsilon_a}, \quad W_E = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_a E^2 dV. \quad (23)$$

Лекція 8 РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ РІЗНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ (продовження)

Сили в електростатичному полі, які діють на заряджені тіла. Основна задача електростатики. Теорема єдиності розв'язків рівнянь Пуассона та Лапласа. Теорія методу дзеркальних зображень. Розрахунок електростатичного поля плоского, циліндричного, сферичного конденсаторів

1 Сили в електростатичному полі, які діють на заряджені тіла

Механічні сили взаємодії точкових заряджених тіл можна визначити за допомогою закону Кулона. В загальному вигляді зручно пов'язувати сили з енергією поля.

Припустимо, що поле створене декількома зарядженими тілами (рис.1), причому тільки одне тіло (тіло n) може переміщуватися в напрямку координати g . Інші заряджені тіла нерухомі.

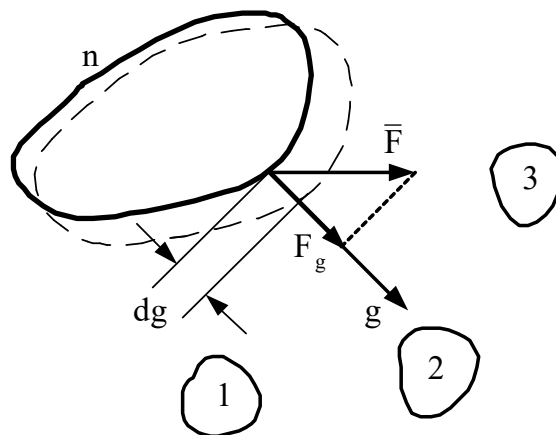


Рис. 1.

При переміщенні тіла n на відстань dg під дією сили \bar{F} поле виконує елементарну роботу

$$dA = \bar{F} d\bar{g} = F_g dg, \quad (1)$$

тому енергія поля зменшується на ту ж саму величину, тобто

$$dW_E = -dA = -F_g dg . \quad (2)$$

Якщо всі тіла системи ізольовані, то заряди на них залишаються незмінними, а потенціали всіх точок поля зменшуються.

З (1) визначимо силу, яка діє на заряджене тіло, коли на тілах системи заряди не змінюються ($q_i = const$)

$$F_g = -\frac{\partial W_E}{\partial g} . \quad (3)$$

Припустимо, що всі тіла з'єднані з джерелом електричних зарядів для того, щоб при переміщенні зарядженого тіла залишались незмінними потенціали цих тіл. Для цього всі заряджені тіла повинні отримати додаткові заряди. Енергія, яка витрачається джерелом при нескінченно малій зміні заряду всіх тіл, дорівнює

$$dW_{дж} = \sum_{k=1}^n \varphi_k dq_k . \quad (4)$$

Ця енергія витрачається на здійснення роботи (dA) переміщення тіла n на відстань dg і на приріст енергії (dW_E) електростатичного поля, тому що при незмінному потенціалі ($\varphi_k = const$) збільшилися заряди тіл

$$dW_{дж} = dA + dW_E . \quad (5)$$

В зв'язку з тим, що енергія електростатичного поля системи заряджених тіл (див. (18) попередньої лекції) дорівнює

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k q_k ,$$

то при $\varphi_k = const$ і зміні зарядів на dq_k приріст енергії становить

$$dW_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k dq_k ,$$

тобто рівно половині енергії, яка витрачається зовнішнім джерелом (4).

Використавши (1), (4), представимо (5) у такому вигляді

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k dq_k = F_g dg + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k dq_k .$$

Звідси
$$F_g dg = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k dq_k = dW_E .$$

Отже, якщо в системі заряджених тіл підтримуються постійні потенціали ($\varphi_k = const$) за рахунок зовнішнього джерела, то сила визначається

$$F_g = \frac{\partial W_E}{\partial g} . \quad (6)$$

і чисельно (за значенням) збігається з (3).

Різні знаки біля виразів для сили F_g в (3) і (6) показують не на зміну напрямку дії сили, а на те, що при переміщенні зарядженого тіла в першому випадку енергія поля зменшується, а в другому – збільшується за рахунок зовнішнього джерела.

Якщо замість довільної координати g і проєкції неї сили F_g розглянути прямокутну систему координат, то проєкції вектору сили \vec{F} на координатні осі будуть визначатися за (3) і (6), тобто

$$F_x = -\frac{\partial W_E}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial W_E}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial W_E}{\partial z}, \quad q_k = const,$$

$$F_x = \frac{\partial W_E}{\partial x}, F_y = \frac{\partial W_E}{\partial y}, F_z = \frac{\partial W_E}{\partial z}, \quad \varphi_k = const.$$

а

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial W_E}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_E}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_E}{\partial z} \vec{k} \right), \quad q_k = const,$$

$$\vec{F} = \left(\frac{\partial W_E}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_E}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_E}{\partial z} \vec{k} \right) \varphi_k = const.$$

Останній вираз можна подати ще більш стисло

$$\left. \begin{aligned} \bar{F} &= -\text{grad } W_E \quad q_k = \text{const}, \\ \bar{F} &= \text{grad } W_E \quad \varphi_k = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2 Теорема єдиності розв'язків рівнянь Пуассона і Лапласа

$$\bar{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \quad \bar{\nabla}^2 \varphi = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Ці рівняння в частинних похідних мають безліч розв'язків, з яких потрібно вибрати одне, яке буде задовольняти:

- 1) відповідному рівнянню;
- 2) граничним умовам на поверхні провідника $\bar{D} = \sigma$;
- 3) граничним умовам на межі двох діелектриків

$$\left\{ \begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau}; \\ D_{1n} &= D_{2n} \quad (\sigma = 0); \\ D_{1n} - D_{2n} &= \sigma. \end{aligned} \right.$$

Заряд і потенціал, що створюють поле, повинні дорівнювати заряду і потенціалу, заданим в умові задачі.

Виконання цих умов достатньо, щоб задача була розв'язана однозначно. З цієї теореми випливають важливі наслідки:

Перший наслідок. Електростатичне поле, обмежене еквіпотенціальними поверхнями і рішення, яке описує це поле, не змінюються, якщо ці поверхні розглядати як поверхні провідників з відповідними потенціалами.

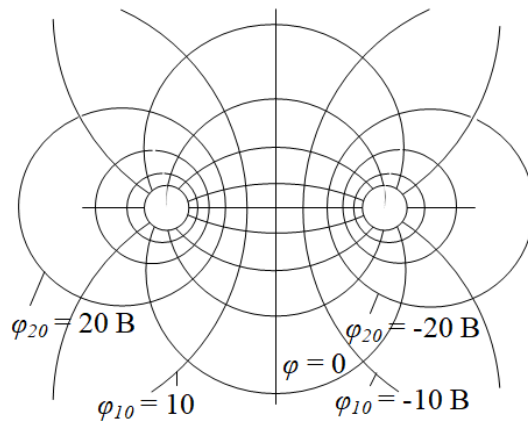


Рис. 2

Другий наслідок. Електричне поле по один бік від довільної поверхні S і рішення, що описує це поле, не зміняться, якщо з іншого боку цієї поверхні змінити параметри середовища і розподіл зарядів таким чином, щоб зберегти граничні умови на поверхні S .

Цей наслідок широко використовуються у методі дзеркальних відображень (рис. 3) та при розрахунку полів у неоднорідних середовищах.

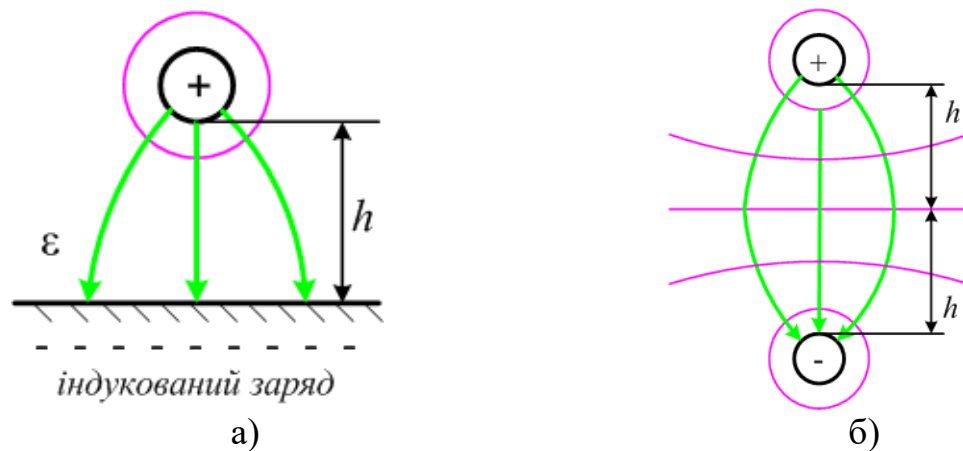


Рис. 3

3 Загальна характеристика задач електростатики та методів їх розв'язку

Пряма задача розрахунку електростатичних полів полягає у визначенні напруженості \vec{E} і потенціалу φ за заданого розподілу зарядів і геометрії тіл, які створюють поле. Зворотна задача, що зустрічається

рідше, полягає у знаходженні закону розподілу зарядів ρ за заданим розподілом напруженості поля чи потенціалу у просторі.

Загальні методи розрахунку ґрунтуються на прямому інтегруванні рівнянь Лапласа і Пуассона, але у деяких випадках поле піддається розрахунку простими методами: накладанням, безпосереднім використанням інтегральної теореми Гауса, дзеркальних зображень, середніх потенціалів, конформних перетворень, тощо. Окремо слід виділити чисельні методи: сіток, скінцевих різниць, скінцевих елементів та ін., що дедалі ширше використовуються на практиці.

При розв'язанні будь-якої задачі на першому етапі слід вибрати раціональну систему координат, щоб граничні поверхні в полі описувались найбільш зручно. На другому етапі з'ясовують, чи має поле будь-який вид симетрії. Наявність симетрії поля значно полегшує розв'язок задачі.

Якщо середовище, в якому існує поле, неоднорідне, його ділять на однорідні області, і рівняння Пуассона чи Лапласа розв'язують для кожної окремої області, узгоджуючи розв'язання одне з одним за допомогою граничних умов.

4 Метод дзеркальних зображень

4.1 Особливості розрахунку поля проводу поблизу провідникової поверхні

На практиці заряджені проводи, наприклад, ліній електропередач знаходяться над поверхнею землі, яка є провідною поверхнею. У процесі зарядження проводу певного знаку за рахунок електростатичної індукції на провідній поверхні з'являються розподілені заряди протилежного знаку (рис. 4, а). Щоб врахувати їх вплив на поле у діелектрику, який оточує провід, введемо у розгляд фіктивний заряд τ_2 , розташований на відстані h від провідної поверхні (рис. 4, б), тобто дзеркально до заряду τ_1 відносно провідникової поверхні. Тоді дотична складова напруженості поля, яка створена обома зарядами має дорівнювати нулеві, оскільки лінія Ox – це

лінія однакового потенціалу (поверхня землі еквіпотенціальна), до якої вектор \vec{E} завжди перпендикулярний $\vec{E} = n_0 \vec{E}_n$, тож $E_{1\tau} + E_{2\tau} = 0$

$$\frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a r} \sin \alpha + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_a r} \sin \alpha = 0. \quad (8)$$

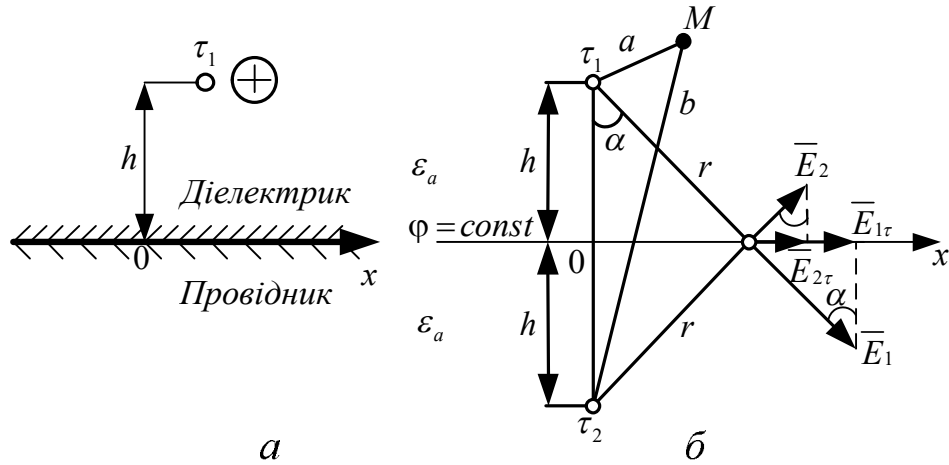


Рис. 4

Звідки маємо $\tau_1 = -\tau_2$, тож картина електричного поля у системі провід – земля (рис. 5) буде збігатися з картиною поля у системі двох різнойменно заряджених провідів τ та $-\tau$, один з яких є дзеркальним відображенням іншого відносно провідної поверхні.

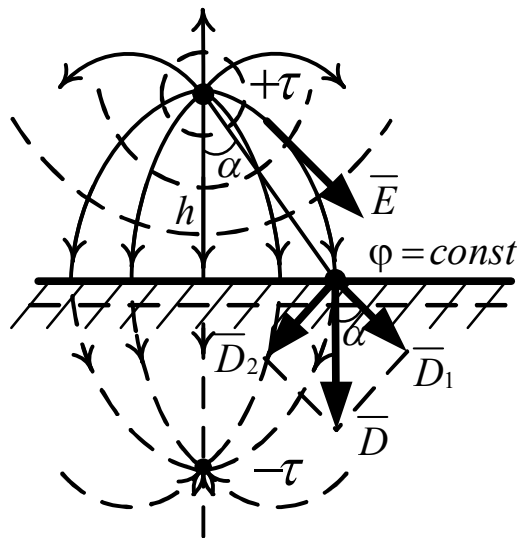


Рис. 5

Знаючи поле самітної зарядженої осі (див. лекцію 6), легко визначити потенціал тонкого проводу біля плоскої провідної поверхні.

Потенціал поля у будь-якій точці M діелектрика (рис. 4, б) дорівнює

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{a}{b}, \text{ а потенціал поверхні тонкого проводу } \varphi_{\text{пров}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h}{R},$$

R – радіус проводу. Щоб розрахувати розподіл наведеного на поверхні землі заряду $\sigma(x)$, достатньо визначити вектор електричної індукції $D(x)$ на цій поверхні

$$D = \frac{\tau}{\pi r} \cos \alpha = \frac{\tau h}{\pi(h^2 + x^2)} = \sigma(x). \quad (9)$$

Варто зазначити, що поле проводу, який знаходиться біля провідного прямого кута зводиться до поля 4-х зарядів (рис. 6), а поле проводу у глибокій траншеї – до поля нескінченної кількості зарядів (рис. 7).

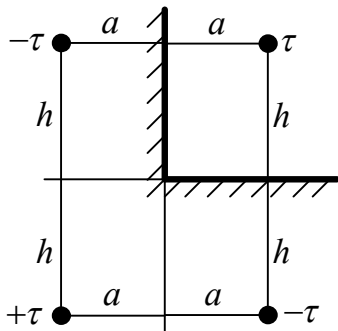


Рис. 6

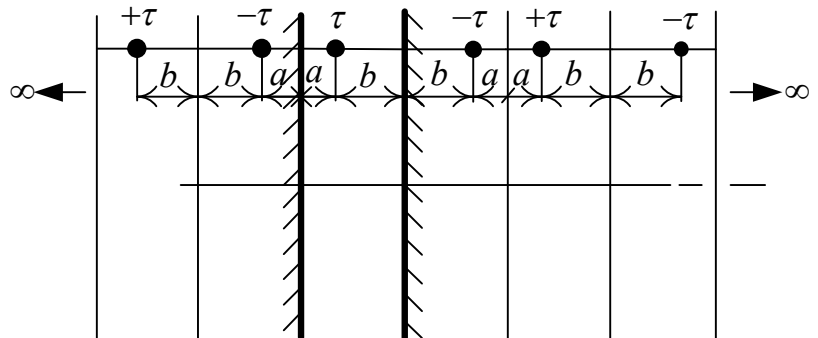


Рис. 7

4.2 Особливості розрахунку електричного поля тонкого проводу поблизу плоскої поверхні розділу двох діелектриків

Будемо вважати, що на поверхні розділу діелектриків відсутній вільний заряд, тоді можна скористатися граничними умовами, а саме: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ та $D_{1n} = D_{2n}$, тобто лінії поля заломлюються на межі розділу

діелектриків. Причиною такого заломлення є поява на поверхні діелектрика розподілених зв'язаних зарядів, які можна врахувати додатковими (фіктивними) зосередженими зарядами, величини їх визначимо, використавши зазначені вище граничні умови.

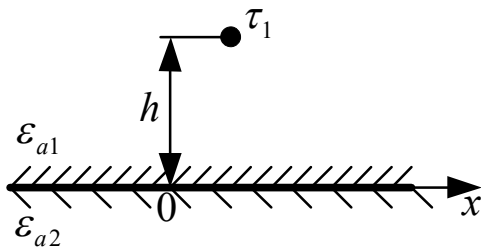


Рис. 8

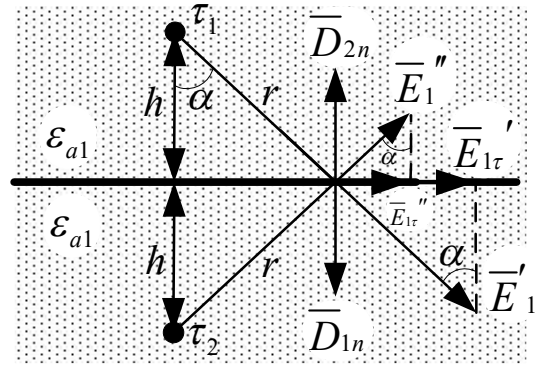


Рис. 9

Щоб розрахувати поле у діелектричному просторі з зарядом τ_1 (рис. 8), замінимо зв'язаний заряд на поверхні розподілу фіктивним зарядом τ_2 , розташованим дзеркально до τ_1 відносно поверхні $0-x$ і будемо вважати, що обидва у однорідному середовищі з діелектричною проникністю ϵ_{a1} (рис. 9).

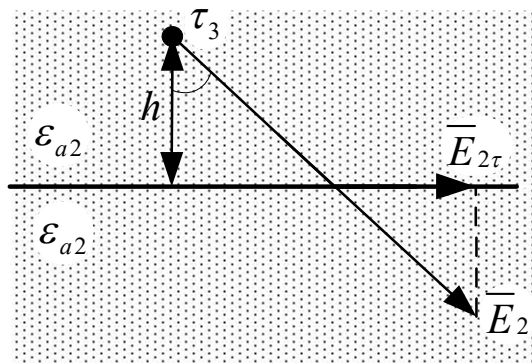


Рис. 10

Щоб розрахувати поле у діелектричному просторі з іншого боку від τ_1 та зв'язаного заряду на границі розділу, їх спільну дію замінимо дією

додаткового фіктивного заряду τ_3 , розташованого у місці знаходження заряду τ_1 (рис. 10). Цей заряд τ_3 і будемо вважати, що він знаходиться у однорідному діелектрику з діелектричною проникністю ϵ_{a2} .

Умова нерозривності тангенціальної складової вектору \vec{E} на границі розділу дає:

$$E'_{1\tau} + E''_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\pi\epsilon_{a1}r} \sin \alpha = \frac{\tau_3}{2\pi\epsilon_{a2}r} \sin \alpha; \quad (10)$$

$$D'_{1n} - D''_{1n} = D_{2n}; \quad \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\pi r} \cos \alpha = \frac{\tau_3}{2\pi r} \cos \alpha. \quad (11)$$

Звідки отримуємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \tau_1 + \tau_2 = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}} \tau_3, \\ \tau_1 - \tau_2 = \tau_3, \end{cases}$$

яка дозволяє визначити величини фіктивних зарядів τ_2 та τ_3

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{\epsilon_{a1} - \epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1} + \epsilon_{a2}} \tau_1, \\ \tau_3 &= \frac{2\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1} + \epsilon_{a2}} \tau_1. \end{aligned} \quad (12)$$

За цими формулами можна визначити величини та знаки додаткових зарядів і розрахувати електричне поле у обох середовищах. Зокрема, якщо $\epsilon_{a1} > \epsilon_{a2}$, то τ_2 буде додатним (причому $\tau_2 < \tau_1$) і картина поля (рис. 11) у верхньому діелектрику буде наближатися до картини поля двох однойменно заряджених неоднакових за величиною заряджених проводів τ_1 та τ_2 (рис. 11). У нижньому діелектрику силові лінії є радіальними прямими, які сходяться у точці розташування заряду τ_1 (рис. 11, а).

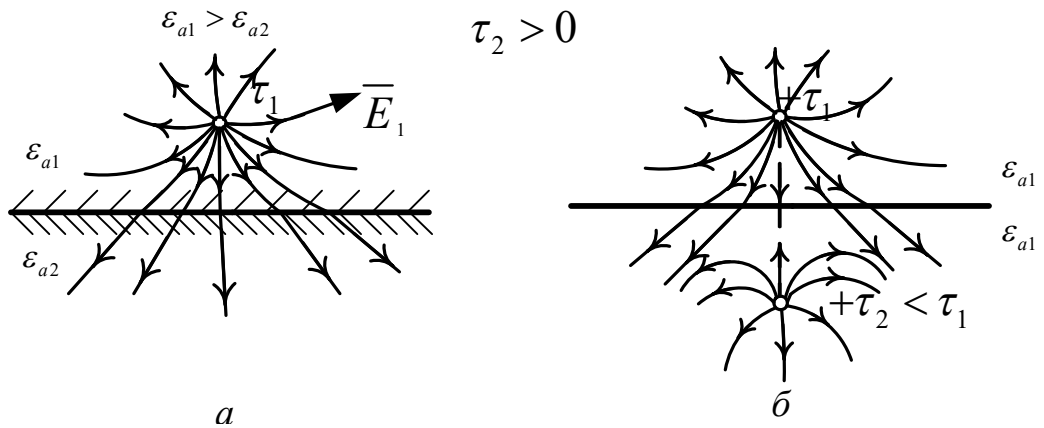


Рис. 11

Картина поля для випадку $\varepsilon_{a1} < \varepsilon_{a2}$ (тоді $\tau_2 < 0$) представлена на рис. 12, *a*. У першому діелектрику поле зводиться до поля двох різнойменно заряджених провідів, причому $|\tau_2| < \tau_1$ (рис. 12, *б*).

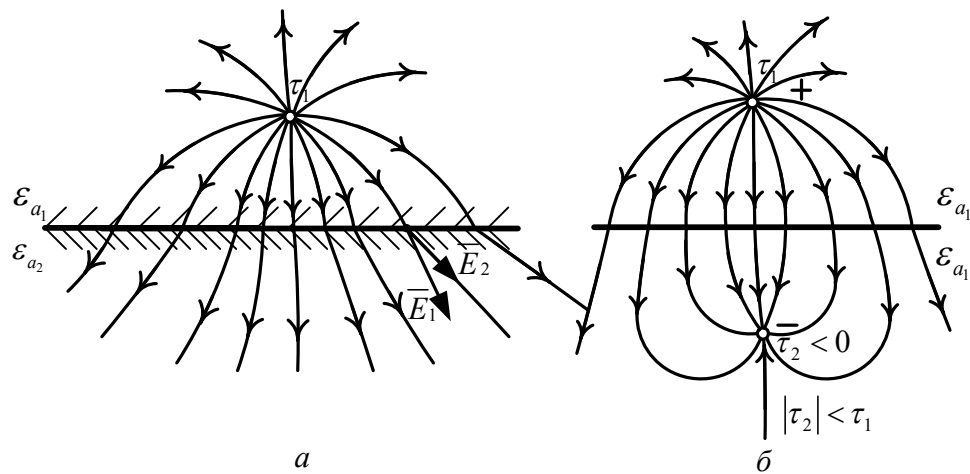


Рис. 12

Якщо у формули (12) підставити $\varepsilon_{a2} = \infty$, тобто замінити другий діелектрик провідником, то $\tau_2 = -\tau$, що відповідає розглянутому випадку розташування зарядженого проводу поблизу провідної поверхні.

Лекція 9 ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ

Розрахунок електростатичного поля плоского, циліндричного, сферичного конденсаторів. Поле рівномірно зарядженої провідної кулі. Поле рівномірно зарядженої діелектричної кулі. Поле двох різноманітних заряджених паралельних осей. Електростатичне поле і ємність двопровідної лінії

1 Приклади розрахунку електростатичних полів

1.1 Електростатичне поле плоского конденсатора із зарядженим діелектриком

Конденсатор з нескінченними пластинами (рис. 1) заповнений зарядженим діелектриком (ϵ – діелектрична проникність, ρ – об’ємний заряд). До нього прикладено напругу U . Відстань між пластинами d . Знайти розподіл напруженості й потенціалу.

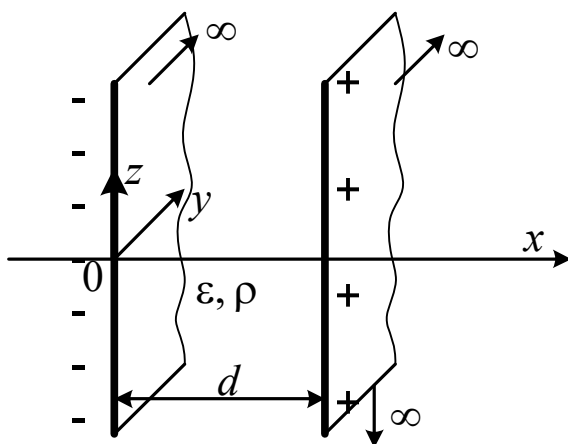


Рис. 1

Оскільки пластины нескінченні, то $\frac{\partial}{\partial y} = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$.

У середині конденсатора знаходиться заряджений діелектрик, тому при аналізі застосуємо рівняння Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$$

Двічі його проінтегрувавши, знайдемо розподіл потенціалу $\varphi(x)$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}x + A_1, \quad d\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}x dx + A_1 dx,$$

$$\int d\varphi = \int \left(-\frac{\rho}{\varepsilon_a} x dx + A_1 dx \right),$$

$$\varphi = -\frac{\rho}{2\varepsilon_a} x^2 + A_1 x + A_2. \quad (1)$$

Знайдений розв'язок повинен задовольняти теоремі єдиності розв'язків рівнянь Пуассона і Лапласа:

1) перевіряємо, чи задовольняє знайдений розв'язок рівнянню Пуассона $\varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} x + A_1$, $\varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$;

2) граничним умовам розв'язок задовольняє, оскільки пластини нескінченні;

3) потенціал і заряд тіла повинні дорівнювати потенціалу й заряду, заданими в умові задачі

$$\varphi_1(x=0) = 0, \quad \varphi_2(x=d) = U. \quad (2)$$

З умов (2) визначаємо сталі інтегрування A_1 , A_2 .

$$\varphi_1(x=0) = 0 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_a} \cdot 0^2 + 0 \cdot x + A_2; \quad A_2 = 0.$$

$$\varphi_2(x=d) = U = -\frac{\rho}{2\varepsilon_a} d^2 + A_1 d; \quad A_1 = \frac{U + \frac{\rho}{2\varepsilon_a} d^2}{d}.$$

Остаточно маємо розв'язок для потенціалу

$$\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_a} x^2 + \left(\frac{U}{d} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_a} \right) x.$$

Напруженість поля знайдемо із рівняння $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$. Для заданої геометрії тіла $E = E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_a} x - \left(\frac{U}{d} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_a} \right)$. (3)

У випадку, коли діелектрик усередині конденсатора не заряджений,

$$\varphi(x) = \frac{U}{d} \cdot x, \quad E = E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{U}{d} = \text{const}.$$

Графіки залежностей $\varphi(x)$, $E(x)$ для цього випадку представлено на рис. 2.

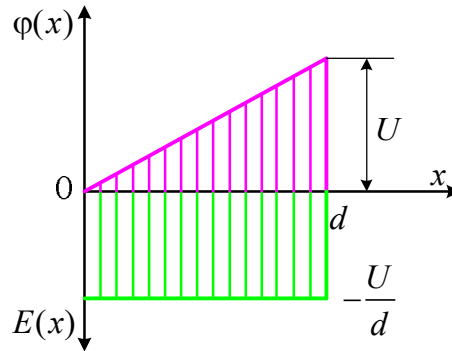


Рис. 2

1.2 Поле рівномірно зарядженої провідної кулі

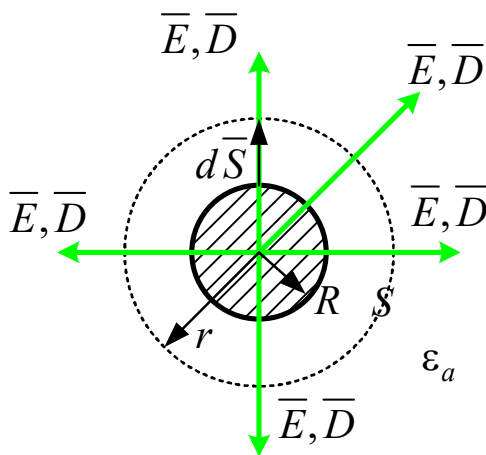


Рис. 3

Охопимо кулю, що має радіус R , поверхнею S (радіусом r). Із визначення напруженості поля витікає, що силові лінії перпендикулярні до поверхні S . Таким чином, вектори \vec{D} і $d\vec{S}$ мають однаковий напрямок. Значення \vec{D} однакові для всіх точок, рівновіддалених від поверхні S .

Для знаходження поля кулі скористаємось узагальненою теоремою Гауса:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D dS = D \oint_S dS = D \cdot S = D \cdot 4\pi r^2 = Q,$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad D = \epsilon_a E,$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_a}. \quad (4)$$

Розподіл потенціалу знайдемо з рівняння $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$.

$$\varphi = -\int \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_a} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_a r} + A.$$

Сталу інтегрування A визначимо із умови, що при $r \rightarrow \infty$ потенціал $\varphi = 0$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi \epsilon_a \infty} + A = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Остаточно $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_a r}$. (5)

На поверхні кулі $r = R$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi \epsilon_a R}, \quad E = \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_a}. \quad (6)$$

Слід зауважити, що при $r < R$ поле відсутнє: $E = 0$, а потенціал $\varphi = \text{const}$. Заряд усередині кулі відсутній, він зосереджений на її поверхні.

Графіки розподілу напруженості поля й потенціалу показано на рис. 4.

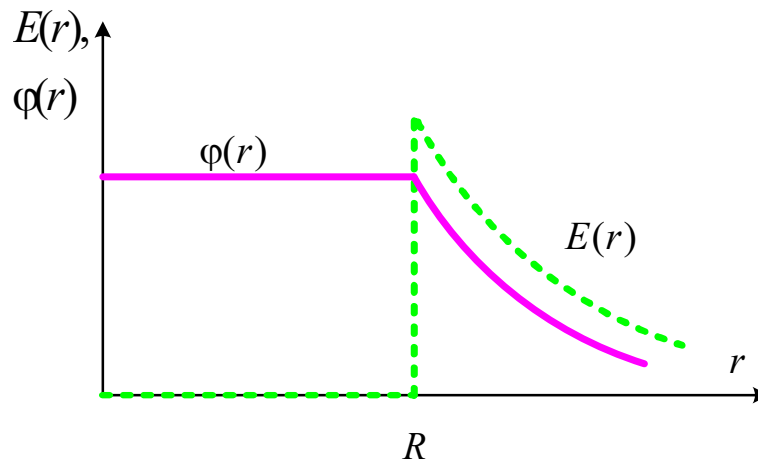
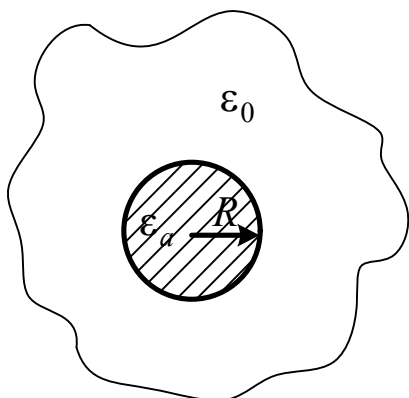


Рис. 4

1.3 Поле рівномірно зарядженої діелектричної кулі



Розглянемо поле всередині кулі $r \leq R$.

$$\oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = E_i \oint_S dS = E_i \cdot S =$$

$$= E_i \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_i}{\epsilon_a},$$

де Q_i - заряд кулі, обмежений поверхнею S радіусом r :

$$Q_i = \frac{Q}{V_{\text{кулі}}} V_i = Q \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Тоді

$$E_i = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_a r^2} = \frac{Q \frac{r^3}{R^3}}{4\pi\epsilon_a r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R^3} r. \quad (7)$$

Потенціал точок поля всередині кулі:

$$\varphi_i = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R^3} r dr = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_a R^3} r^2 + A_1. \quad (8)$$

Константу A_1 визначимо з умови рівнозначності потенціалу на поверхні кулі.

Поле за межами кулі $r \geq R$.

$$\oint_S \vec{E}_e d\vec{S} = E_e \oint_S dS = E_e \cdot S = E_e \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

$$E_e = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (9)$$

Потенціал точок поля за межами кулі

$$\varphi_e = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + A_2. \quad (10)$$

При $r \rightarrow \infty$ $\varphi = 0$, тому $A_2 = 0$.

На поверхні кулі потенціал є неперервною функцією $\varphi_i = \varphi_e$, тому, прирівнявши (8) і (10), отримаємо константу A_1

$$-\frac{Q}{8\pi\varepsilon_a R^3} R^2 + A_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

$$A_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_a R} = \frac{Q}{4\pi R} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2\varepsilon_a} \right). \quad (11)$$

Підставивши (11) у вираження для потенціалу поля (8), отримаємо

$$\varphi_i = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_a R^3} r^2 + \frac{Q}{4\pi R} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2\varepsilon_a} \right) = \frac{Q}{4\pi R} \left(\frac{R^2 - r^2}{2R^2\varepsilon_a} + \frac{1}{\varepsilon_0} \right).$$

Остаточо маємо

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R} \left(\frac{R^2 - r^2}{2R^2\varepsilon_a} + \frac{1}{\varepsilon_0} \right), & \text{при } r \leq R; \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (12)$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a R^3} r, & \text{при } r \leq R; \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (13)$$

Як правило $\varepsilon_a > \varepsilon_0$, тому на поверхні кулі буде стрибок напруженості. Графіки розподілу напруженості поля й потенціалу показано на рис. 5.

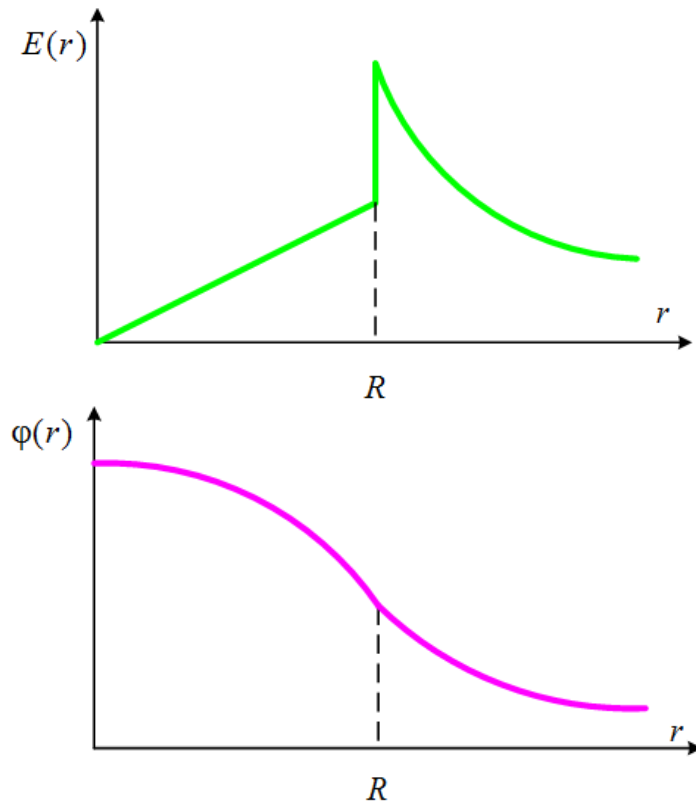


Рис. 5

1.4 Поле двух різнойменно заряджених паралельних осей

Дві різнойменно заряджені осі (рис. 6) розташовані паралельно на відстані $2a$ в діелектричному просторі.

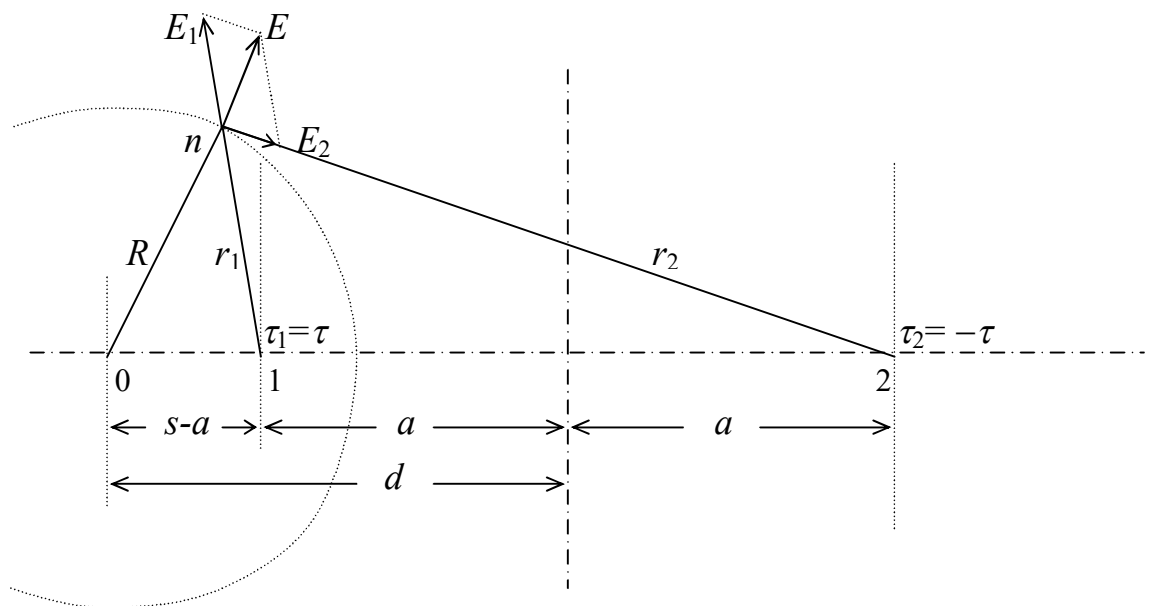


Рис. 6

Параметри поля в довільній точці простору n можуть бути визначені за методом накладання. Результируючий вектор напруженості поля дорівнює геометричній сумі складових, а результируючий потенціал – алгебраїчній сумі складових від кожного проводу:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} \bar{r}_{01} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} \bar{r}_{02}; \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_1} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_2} + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + C.\end{aligned}$$

Якщо прийняти $\varphi=0$ в точках рівновіддалених від обох осей ($r_1=r_2$), то постійна інтегрування дорівнюватиме нулю ($C=0$), тоді отримаємо:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (14)$$

Еквіпотенційні поверхні $\varphi=\text{const}$ повинні задовольняти умови $k = \frac{r_2}{r_1} = \text{const}$. У геометрії є маловідома теорема Аполонія, яка говорить, що геометричним місцем точок, відношення відстаней від яких до заданої пари точок постійна величина, є коло, центр якого лежить на лінії, що з'єднує задану пару точок. Це коло має задовольняти наступній умові:

$$(s+a)(s-a) = R^2 \quad \text{чи} \quad \frac{s+a}{R} = \frac{R}{s-a}.$$

Аналіз геометрії рис. 6 показує, що трикутник $20n$ подібний до трикутника $n01$ (загальний кут з вершиною 0 і прилеглі до кута сторони пропорційні). З подоби трикутників випливає:

$$\frac{s+a}{R} = \frac{R}{s-a} = \frac{r_2}{r_1} = k.$$

При переміщенні точки n уздовж кола змінюються відстані r_1 і r_2 так, що їхнє відношення залишається постійним $k = r_2 / r_1 = \text{const}$. При зміні

відношення $k = r_2 / r_1$ центр кола переміщається вздовж лінії, що з'єднує задану пару точок 1 і 2. При $k > 1$, $r_2 > r_1$ і центр кола знаходиться в лівій напівплощині, при $k < 1$, $r_1 > r_2$ і центр кола знаходиться в правій напівплощині, а при $k = 1$, $r_1 = r_2$, центр кола зміщується в безкінечність, а саме коло перетворюється на пряму лінію, що збігається з вертикальною віссю симетрії.

Лінії вектору напруженості поля також є дугами кола, але з центрами, розташованими на вертикальній осі симетрії.

Графічною діаграмою або сіткою поля називається сукупність ліній екіпотенціальних поверхонь із заданими значеннями потенціалів, побудована спільно з сукупністю ліній вектору напруженості поля. Графічна діаграма поля двох різнойменно заряджених осей має вигляд рис. 7.

За графічною діаграмою поля можна визначити його параметри (\bar{E}, φ) у будь-якій точці.

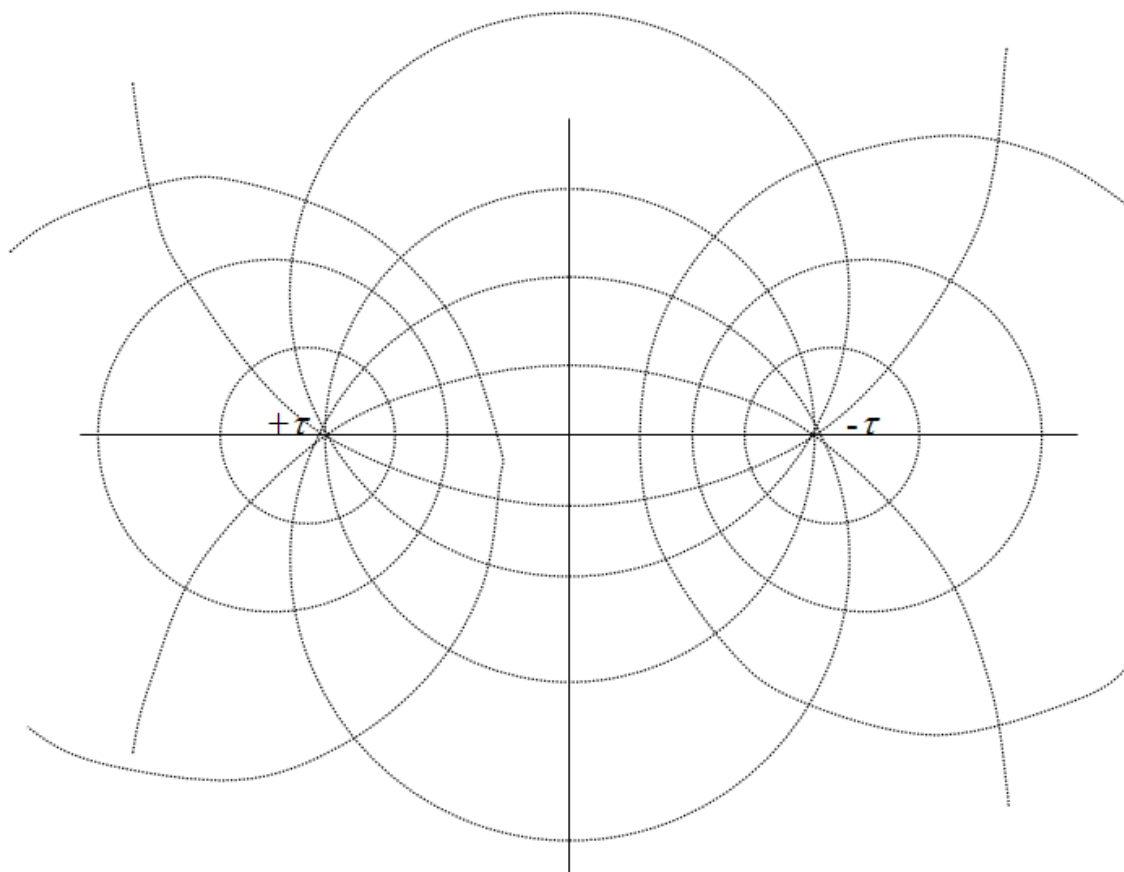


Рис. 7

1.5 Електростатичне поле і ємність двопровідної лінії

Нехай потрібно розрахувати електростатичне поле і ємність двопровідної лінії із заданими геометричними розмірами (радіус проводів R , міжосьова відстань d , радіус R співмірний з відстанню d). Проводи лінії не заземлено, до лінії прикладено постійну напругу U (рис. 8).

Відповідно до другого наслідку з теореми єдності замінимо поверхневі заряди проводів осьовими $+\tau$ і $-\tau$, навколишнє середовище - діелектриком так, щоб на поверхні проводів збереглися колишні умови, а саме: ці поверхні повинні залишитися екіпотенціальними з тими ж значеннями потенціалів $\varphi_1 = +\varphi$ і $\varphi_2 = -\varphi$. Щоб виконати ці умови, електричні осі проводів повинні бути зміщені щодо геометричних осей на деяку відстань $s - a$.

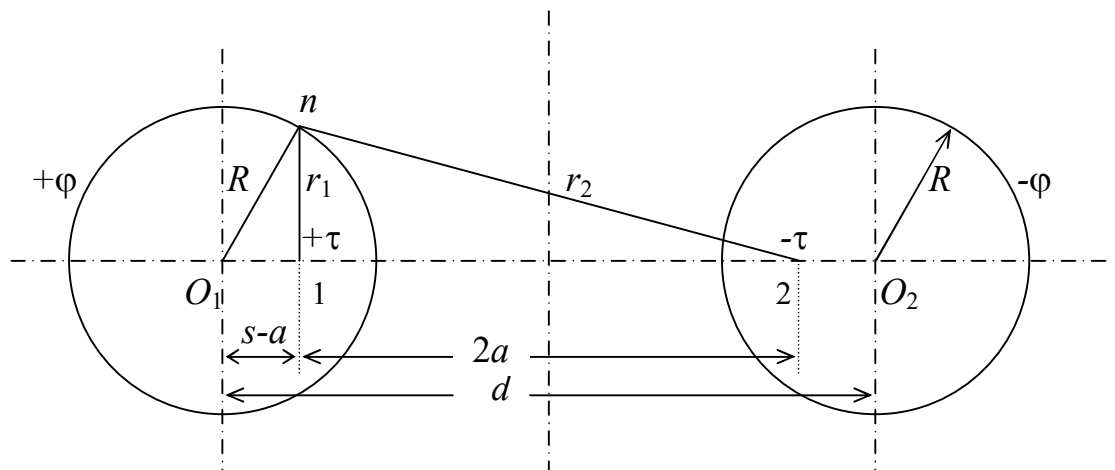


Рис. 8

Положення електричних осей визначається з теореми Аполонія:

$$\begin{cases} (s+a)(s-a) = R^2 \\ 2s = d \end{cases}$$

Таким чином, електростатичне поле, створюване двома проводами з поверхневими зарядами σ , буде еквівалентним полю, яке створюється двома різнойменно зарядженими осями $+\tau$ і $-\tau$, і для його розрахунку можна застосувати отримані раніше формули:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2; \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (15)$$

Потенціал додатно зарядженого проводу:

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{s+a}{R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{2h-(s-a)}{R}.$$

Виходячи з симетрії $\varphi_2 = -\varphi_1$, напруга:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\varphi_1 = \frac{\tau}{\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{d-(s-a)}{R},$$

де $s-a$ – зміщення електричної осі проводу відносно геометричної.

З отриманого виразу випливають розрахункові формули:

$$\tau = \frac{U \cdot \pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d-(s-a)}{R}} [\text{Кл/м}], \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d-(s-a)}{R}} [\text{Ф/м}]. \quad (16)$$

Для повітряних ліній ($\epsilon = 1$) міжосьова відстань d набагато більша за радіус проводів R . У цьому випадку зміщенням електричних осей можна знехтувати ($s-a = 0$) і вважати, що електричні осі проводів збігаються з геометричними. Для таких ліній отримані вище розрахункові формули матимуть вигляд:

$$\tau = \frac{U \cdot \pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}} [\text{Кл/м}], \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}} [\text{Ф/м}]. \quad (17)$$

Розглянуті вище розрахунки поля зарядженої осі, зарядженого проводу чи декількох проводів, здійснюються за відомими співвідношеннями для розрахунку напруженості електричного поля, електричного потенціалу і т. ін. Якщо ж заряджені осі чи проводи знаходяться поблизу провідної поверхні, безпосередній розрахунок поля за наведеними вище формулами неможливий. У таких випадках застосовується метод дзеркальних зображень.

Це питання буде розглянуте на наступній лекції.

Відповідно до другого наслідку з теореми єдиності замінимо провідне середовище діелектриком, а поверхневі заряди проводу та землі - двома різнойменно зарядженими осями $+\tau$ і $-\tau$ так, щоб залишилися незмінними колишні граничні умови: 1) поверхня землі має бути екіпотенціальною $\varphi_0 = 0$, 2) поверхня проводу повинна бути екіпотенційною з потенціалом $\varphi_1 = U$. Щоб виконати ці умови, електричні осі $+\tau$ та $-\tau$ повинні бути зміщені щодо геометричних осей на деяку відстань $s - a$.

Положення електричних осей визначається з теореми Аполонія:

$$\begin{cases} (s+a)(s-a) = R^2 \\ s = h \end{cases}$$

Таким чином, електростатичне поле, створюване двома проводами з поверхневими зарядами σ , буде еквівалентним полю, яке створюється двома різнойменно зарядженими осями $+\tau$ і $-\tau$, і для його розрахунку можна застосувати отримані раніше формули:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2; \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Потенціал проводу:

$$\varphi = U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{s+a}{R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{2h-(s-a)}{R},$$

де $s-a$ – зміщення електричної осі проводу щодо геометричної.

З отриманого виразу впливають розрахункові формули:

$$\tau = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h-(s-a)}{R}} [\text{Кл/м}]; \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h-(s-a)}{R}} [\text{Ф/м}].$$

Якщо висота підвісу проводу набагато більша за його радіус, то зміщенням електричних осей можна знехтувати ($s - a \approx 0$) і вважати, що електричні осі проводів збігаються з геометричними. У цьому випадку розрахункові формули матимуть вигляд:

$$\tau = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}} [\text{Кл/м}]; \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}} [\text{Ф/м}]$$

2 Поле багатопровідної лінії

Задані n довгих проводів, розташованих паралельно площині (над землею). Радіуси проводів R_1, R_2, R_3, \dots , висоти підвісок h_1, h_2, h_3, \dots , міжосьова відстань $d_{12}, d_{13}, d_{23}, \dots$, при цьому $h \gg R, d \gg R$. Потенціали проводів $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ відомі (рис. 2).

З другого наслідку теореми єдності замінимо провідне середовище (землю) діелектриком з $\varepsilon = \varepsilon_0$, а поверхневі заряди землі – системою дзеркальних зарядів проводів із протилежними знаками. Зміщенням електричних осей нехтуємо, оскільки за умовою $h \gg R$.

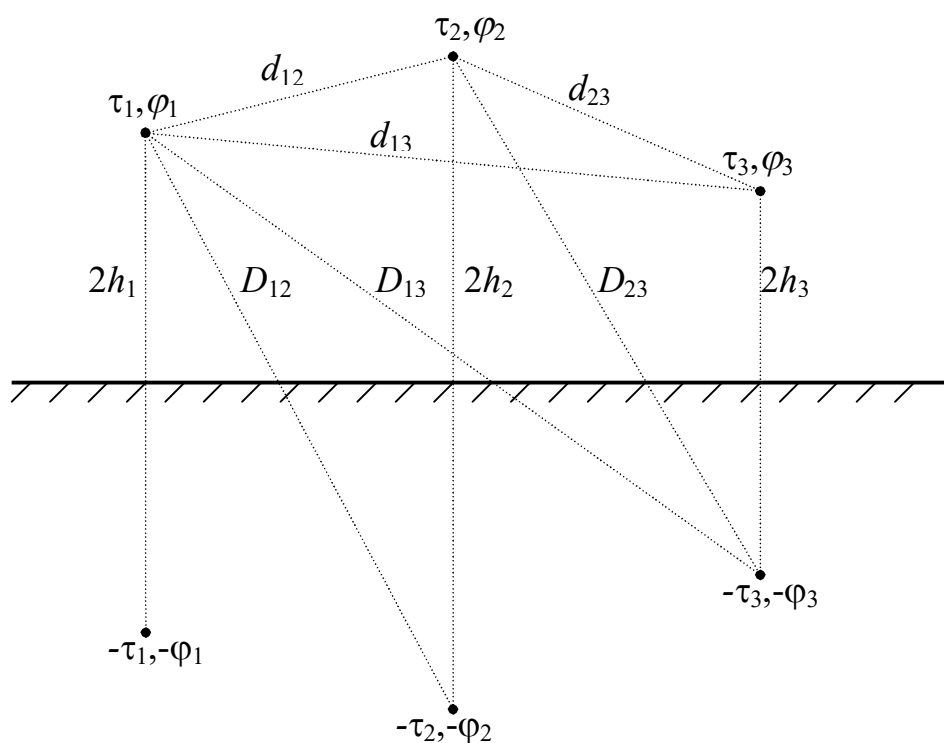


Рис. 2

Розрахунок параметрів поля в довільній точці n може бути виконаний за методом накладання, тобто результуючі параметри поля можуть бути знайдені як суми відповідних складових від незалежної дії осьових зарядів самих проводів та їх дзеркальних відображень:

$$\bar{E}_n = \bar{E}_{n1} + \bar{E}_{n2} + \bar{E}_{n3} + \dots + \bar{E}'_{n1} + \bar{E}'_{n2} + \bar{E}'_{n3} + \dots$$

$$\varphi_n = \varphi_{n1} + \varphi_{n2} + \varphi_{n3} + \dots + \varphi'_{n1} + \varphi'_{n2} + \varphi'_{n3} + \dots$$

Потенціал на поверхні першого проводу:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} + \frac{-\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{2h_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d_{12}} + \frac{-\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{D_{12}} + \frac{\tau_3}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d_{13}} + \frac{-\tau_3}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{D_{13}} + \dots = \\ &= \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{R_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{12}}{d_{12}} + \frac{\tau_3}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{13}}{d_{13}} + \dots = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3 + \dots \end{aligned}$$

Аналогічно для кожного проводу:

$$\left. \begin{cases} \varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3 + \dots \\ \varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 + \alpha_{23}\tau_3 + \dots \\ \varphi_3 = \alpha_{31}\tau_1 + \alpha_{32}\tau_2 + \alpha_{33}\tau_3 + \dots \\ \dots \end{cases} \right\} \text{перша група формул Максвелла.}$$

Де позначено:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{R_1}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_2}{R_2}, \quad \dots \quad \text{власні} \quad \text{потенціальні}$$

коефіцієнти;

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{12}}{d_{12}}, \quad \alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{13}}{d_{13}}, \dots \text{взаємні} \quad \text{потенціальні}$$

коефіцієнти.

Потенціальні коефіцієнти визначаються через геометричні розміри, вони завжди позитивні, мають фізичну розмірність $[1/\Phi]$.

Якщо задані потенціали проводів $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, їх заряди τ_1, τ_2, \dots можуть бути визначені із спільного рішення системи потенціальних рівнянь (першої групи формул Максвелла):

$$\left. \begin{cases} \tau_1 = \Delta_1/\Delta = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 + \dots \\ \tau_2 = \Delta_2/\Delta = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 + \dots \\ \tau_3 = \Delta_3/\Delta = \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 + \dots \end{cases} \right\} \text{друга група формул Максвелла.}$$

Де прийнято позначення:

$\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}, \dots$ - власні ємнісні коефіцієнти, завжди позитивні,

$\beta_{12} = \beta_{21}, \beta_{13} = \beta_{31}, \dots$ - взаємні ємнісні коефіцієнти, завжди негативні.

На практиці зручніше користуватися формулами Максвелла третьої групи з частковими ємностями:

$$\left. \begin{cases} \tau_1 = U_{10}C_{11} + U_{12}C_{12} + U_{13}C_{13} + \dots \\ \tau_2 = U_{21}C_{21} + U_{20}C_{22} + U_{23}C_{23} + \dots \\ \tau_3 = U_{31}C_{31} + U_{32}C_{32} + U_{30}C_{33} + \dots \end{cases} \right\} \text{ третя група формул Максвелла.}$$

Де позначено:

$U_{10} = \varphi_1 - \varphi_0, U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1, \dots$ напруги між відповідними елементами схеми (рис. 3).

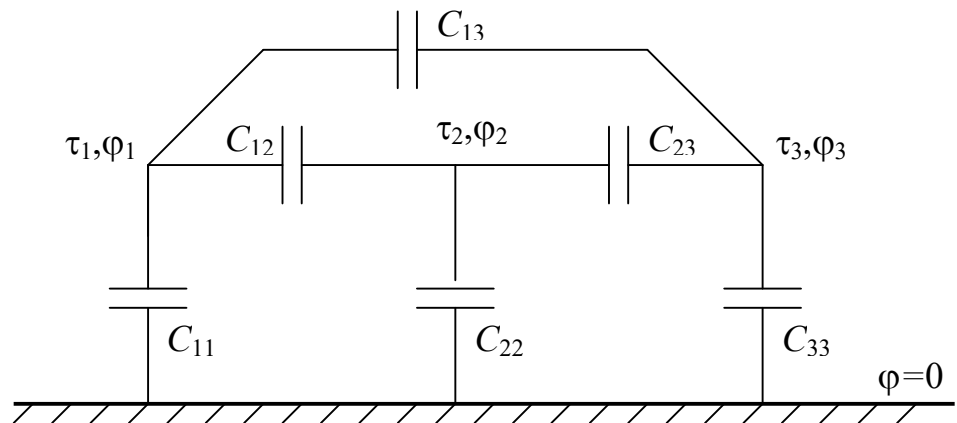


Рис. 3

Часткові ємності визначаються через ємнісні коефіцієнти другої групи формул.

Метод розрахунку полів багатопровідних ліній, заснований на застосуванні другого наслідку з теореми єдності, отримав назву методу дзеркальних зображень.

Розглянемо застосування даного методу до розрахунку робочої ємності двопровідної лінії, розташованої над поверхнею землі. Якщо проводи лінії живляться від незаземленого джерела, можна прийняти для першого проводу $q_1 = q$, $\tau_1 = \tau$, для другого проводу $q_2 = -q$, $\tau_2 = -\tau$. Тоді отримаємо:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})\tau \\ \varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22})\tau \end{cases}$$

Напруга між проводами:

$$\begin{aligned} U = \varphi_1 - \varphi_2 &= (\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22})\tau = (\alpha_{11} - 2\alpha_{12} + \alpha_{22})\tau = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{2h_1}{R_1} + \ln \frac{2h_2}{R_2} - 2 \ln \frac{D}{d} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{4h_1h_2d^2}{R_1R_2D^2} \end{aligned}$$

Звідки випливає формула робочої ємності лінії з урахуванням впливу землі:

$$C_{\text{роб}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(4h_1h_2d^2/R_1R_2D^2)} \text{ [Ф/м]}.$$

Якщо лінія розташована досить високо над поверхнею землі ($h \gg d$), то $D \approx 2h$ і рівняння робочої ємності перетворюється на рівняння $C_0 \approx \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln d/R}$, яке було отримано раніше для двопровідної лінії без урахування впливу землі.

3 Електричне поле трифазної лінії електропередачі

Геометричні розміри в поперечному перерізі лінії електропередачі незрівнянно малі проти довжини електромагнітної хвилі на частоті 50 Гц ($\lambda_{50} = 6000$ км). З цієї причини хвильові процеси в поперечному перерізі лінії можуть не враховуватися, а отримані раніше співвідношення для багатопровідної лінії в статичному режимі з великим ступенем точності можуть бути застосовані до розрахунку поля ліній електропередач змінного струму на промисловій частоті $f=50$ Гц. Змінювані за синусоїдним законом потенціали проводів ЛЕП по відношенню до параметрів поля можна вважати квазістатичними або такими, що повільно змінюються, і розрахунок параметрів поля для кожного моменту часу можна виконувати за отриманими раніше рівняннями електростатики.

При синусоїдному законі зміни потенціалів та зарядів проводів формули Максвелла можна записати у комплексній формі:

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_A = \alpha_{AA}\underline{\tau}_A + \alpha_{AB}\underline{\tau}_B + \alpha_{AC}\underline{\tau}_C = U_{\text{фм}} e^{j\theta^0}; \\ \underline{\varphi}_B = \alpha_{BA}\underline{\tau}_A + \alpha_{BB}\underline{\tau}_B + \alpha_{BC}\underline{\tau}_C = U_{\text{фм}} e^{-j120^0}; \\ \underline{\varphi}_C = \alpha_{CA}\underline{\tau}_A + \alpha_{CB}\underline{\tau}_B + \alpha_{CC}\underline{\tau}_C = U_{\text{фм}} e^{j120^0}. \end{cases}$$

Потенціали проводів ЛЕП однакові з відповідними фазними напругами і визначаються джерелом електроенергії.

Для трифазних ЛЕП застосовуються різні варіанти розташування дротів у просторі. На рис. 4 наведено два з них: а) по вершинах рівностороннього трикутника; б) в одній площині, паралельній поверхні землі. У першому варіанті однакові відстані між проводами ($d_{AB} = d_{BC} = d_{CA} = d$), але не однакова їх висота над землею ($h_A \neq h_B \neq h_C$). У другому варіанті не однакові відстані між проводами ($d_{AB} \neq d_{BC} \neq d_{CA}$), але однакові їх висоти над землею ($h_A = h_B = h_C$). Таким чином, у повітряних трифазних ЛЕП не може бути досягнуто повної симетрії проводів у просторі. Потенціальні коефіцієнти $\alpha_{AB}, \alpha_{BC}, \dots$, які визначаються через геометричні відстані, будуть несиметричними у формулах першої групи формул Максвелла. Несиметрія потенційних коефіцієнтів викликає несиметрію зарядів проводів τ_A, τ_B, τ_C та відповідну несиметрію зарядних струмів лінії в режимі холостого ходу. Повна симетрія проводів у просторі досягається лише у кабельних лініях.

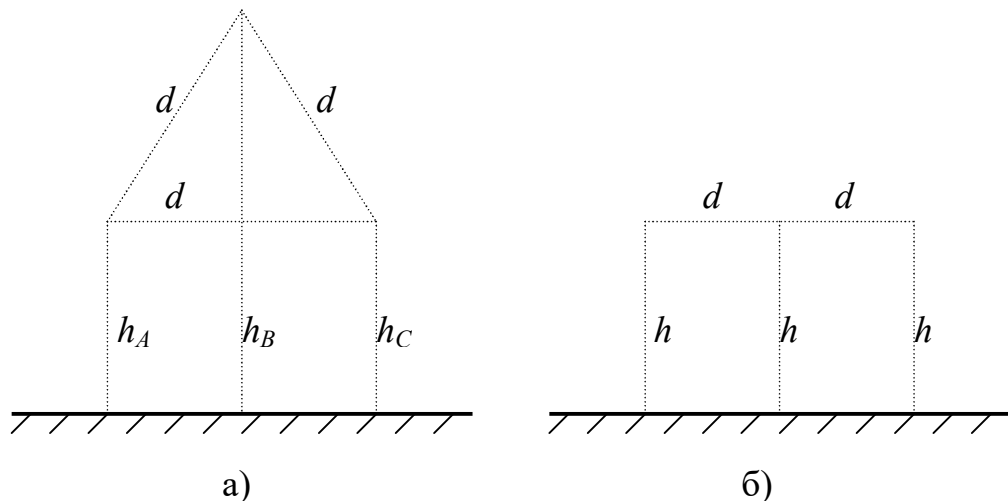


Рис. 4

Для усунення несиметрії фаз повітряних ліній електропередачі через однакові відстані (зазвичай через 1/3 довжини) здійснюють кругову перестановку або транспозицію проводів (рис. 5). За наявності транспозиції усереднені значення параметрів лінії стають однаковими для усіх фаз, при цьому несиметрія між початком і кінцем лінії усувається.

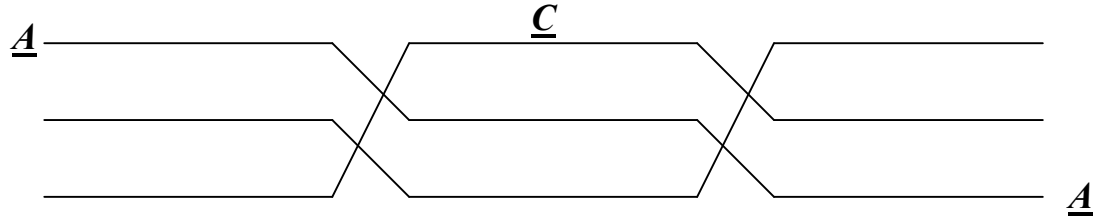


Рис. 5

Середні значення потенціальних коефіцієнтів для транспонованої лінії:

$$\alpha_{\text{вн}} = \frac{1}{3}(\alpha_{AA} + \alpha_{BB} + \alpha_{CC}) = \frac{1}{3 \cdot 2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{2h_A}{R} + \ln \frac{2h_B}{R} + \ln \frac{2h_C}{R} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln 2 \frac{\sqrt[3]{h_A \cdot h_B \cdot h_C}}{R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R},$$

$$\alpha_{\text{вз}} = \frac{1}{3}(\alpha_{AB} + \alpha_{BC} + \alpha_{CA}) = \frac{1}{3 \cdot 2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{D_{AB}}{d_{AB}} + \ln \frac{D_{BC}}{d_{BC}} + \ln \frac{D_{CA}}{d_{CA}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt[3]{D_{AB} \cdot D_{BC} \cdot D_{CA}}}{\sqrt[3]{d_{AB} \cdot d_{BC} \cdot d_{CA}}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d},$$

де: $h = \sqrt[3]{h_A \cdot h_B \cdot h_C}$; $D = \sqrt[3]{D_{AB} \cdot D_{BC} \cdot D_{CA}}$; $d = \sqrt[3]{d_{AB} \cdot d_{BC} \cdot d_{CA}}$

середньгеометричні значення відстаней.

Потенціальне рівняння для проводу фази А транспонованої лінії набуде вигляду:

$$\underline{U}_A = \underline{\Phi}_A = \alpha_{\text{соб}} \underline{\tau}_A + \alpha_{B3} \underline{\tau}_B + \alpha_{B3} \underline{\tau}_C = \alpha_{\text{соб}} \underline{\tau}_A + \alpha_{B3} \underline{\tau}_A e^{-j120^\circ} + \alpha_{B3} \underline{\tau}_A e^{j120^\circ} =$$

$$= \left[\alpha_{\text{соб}} + (e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ}) \alpha_{B3} \right] \cdot \underline{\tau}_A = (\alpha_{\text{соб}} - \alpha_{B3}) \underline{\tau}_A$$

З отриманого виразу випливає формула для питомої ємності фази ЛЕП на землю:

$$C_0 = \frac{\tau_A}{U_A} = \frac{1}{\alpha_{\text{соб}} - \alpha_{\text{вз}}} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R} - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2hd}{RD}} \text{ [Ф/м]}.$$

Якщо довжина лінії дорівнює l , то еквівалентна ємність фази на землю становить $C_\phi = C_0 l$, а струм холостого ходу лінії дорівнюватиме $I_0 = U_\phi / X_C = U_\phi \omega C$.

Дослідимо, як змінюватиметься напруженість електричного поля в довільній точці n у поперечному перерізі лінії (рис. 6,а) в інтервалі часу одного періоду.

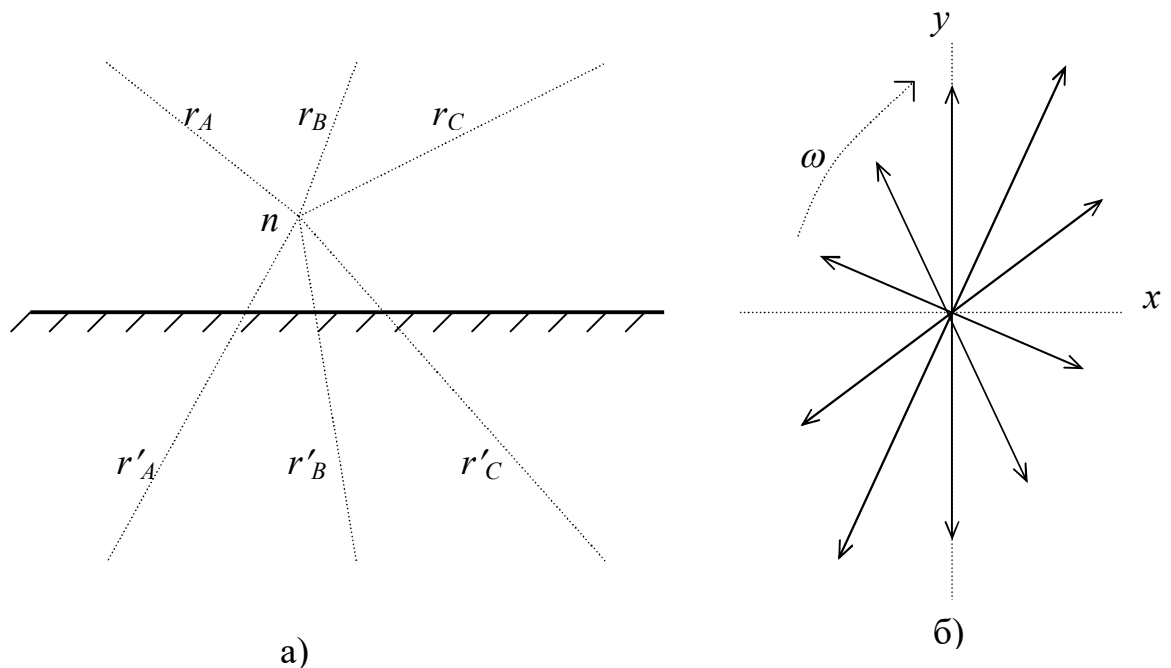


Рис. 6

Результуючий вектор напруженості електричного поля \overline{E}_n дорівнюватиме геометричній сумі окремих складових:

$$\overline{E}_n = \overline{E}_{nA} + \overline{E}_{nB} + \overline{E}_{nC} + \overline{E}'_{nA} + \overline{E}'_{nB} + \overline{E}'_{nC}.$$

Розрахунки показують, що в інтервалі часу одного періоду вектор змінюватиметься за модулем і за напрямом і за один період опише еліпсоподібну фігуру (рис. 6,б). Таким чином, електричне поле в поперечному перерізі ЛЕП є обертовим, але не круговим, а еліптичним за формою. Максимальне значення цього вектору E_{max} відповідає великій напівосі еліпса. На рис. 7 представлена графічна діаграма $E_{max} = f(x)$ при $u=1$ $m=const$ для ЛЕП з розташуванням проводів у площині, паралельній поверхні землі.

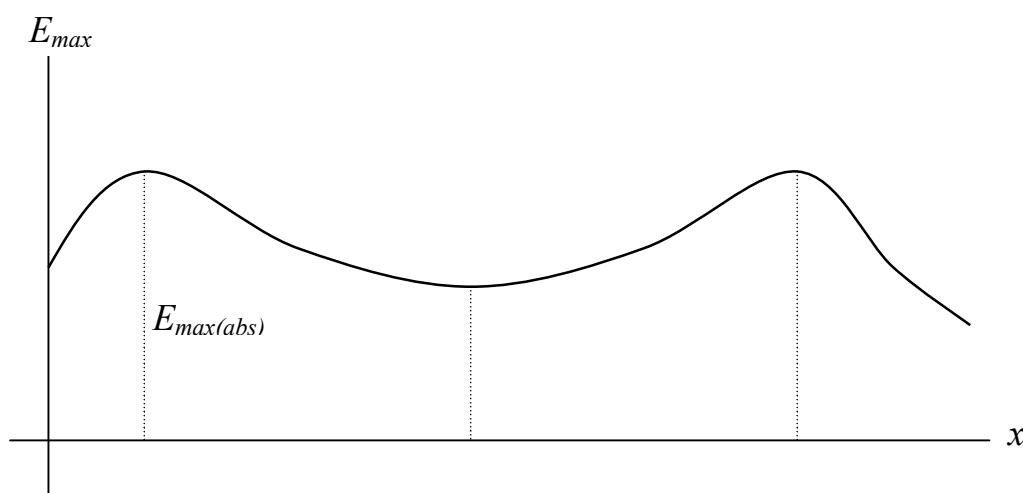


Рис. 7

Аналіз діаграми показує, що абсолютний максимум цієї функції має місце із зовнішнього боку крайніх проводів ЛЕП, а під середньою фазою напруженість поля менша, ніж під крайніми фазами.

РОЗДІЛ 4

Основні визначення, рівняння та характеристики електромагнітного поля

ТЕМА 4.1 Електричне поле постійного струму

Лекція 11 СТАЦІОНАРНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

Рівняння електричного поля поза провідниками з постійними струмами. Граничні умови. Електричне поле всередині провідників зі струмом. Використання методу електростатичної аналогії для розрахунку стаціонарного електричного поля в провідниках. Приклади розрахунку стаціонарного електричного поля

При проходженні постійного струму у провідниках всередині них та поза ними існує стаціонарне електромагнітне поле.

Рівняння стаціонарного електромагнітного поля одержують із системи рівнянь електродинаміки припускаючи, що є лише струми провідності, а явище електромагнітної індукції відсутнє $\left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \right)$:

$$\begin{aligned} 01. \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}; \quad 02. \operatorname{div} \bar{B} = 0; \quad 03. \bar{B} = \mu_a \bar{H}; \quad 04. \bar{J} = \gamma \bar{E}; \\ 05. \operatorname{rot} \bar{E} = 0; \quad 06. \operatorname{div} \bar{D} = \rho; \quad 07. \bar{D} = \varepsilon_a \bar{E}; \end{aligned} \quad (0)$$

Як бачимо рівняння 01, 02, 03, що описують магнітні поля постійних струмів, зв'язані з рівняннями 05, 06, 07, що описують стаціонарне електричне поле, тільки законом Ома (рівняння 04).

Це дозволяє розглядати електричне поле і магнітне поле постійних струмів окремо. Залежно від того, у провідниках, чи поза ними досліджується стаціонарне поле, система (0) розпадається на чотири окремі системи рівнянь (табл. 1):

Таблиця 1

Електричне поле		Магнітне поле	
Поза провідниками	Всередині провідників	Поза провідниками	Всередині провідників
$\text{rot}\bar{E} = 0$ $\bar{D} = \epsilon_a \cdot \bar{E}$ $\text{div}\bar{D} = 0 \ (\rho = 0)$	$\text{rot}\bar{E} = 0$ $\bar{J} = \gamma\bar{E}$ $\text{div}\bar{J} = 0$	$\text{rot}\bar{H} = 0$ $\bar{B} = \mu_a \bar{H}$ $\text{div}\bar{B} = 0$	$\text{rot}\bar{H} = \bar{J}$ $\bar{B} = \mu_a \bar{H}$ $\text{div}\bar{B} = 0$

1 СТАЦІОНАРНЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ

1.1 Стаціонарне електричне поле поза провідниками зі струмом

Під дією різниці потенціалів, прикладеної до провідників від джерел енергії, тобто під дією електричного поля у провідниках проходять електричні струми провідності, густина яких за законом Ома дорівнює $\bar{J} = \gamma\bar{E}$. Ця ж різниця незмінних у часі потенціалів між провідниками створює в навколишньому діелектрику стаціонарне електричне поле, рівняння якого (для незарядженого діелектрика) мають вигляд:

$$\text{rot}\bar{E} = 0; \quad \bar{D} = \epsilon_a \cdot \bar{E}; \quad \text{div}\bar{D} = 0. \quad (1)$$

Виходячи з цього:

1. Стаціонарне електричне поле поза провідниками як і електростатичне поле, є полем безвихровим, тобто потенціальним. Це означає, що для характеристики цього поля можна ввести скалярну функцію – потенціал φ_A , який залежить тільки від координат точки А

$$\varphi_A = \int_A^p \bar{E} d\bar{l}, \quad \text{і не залежить від шляху інтегрування.}$$

2. Якщо діелектрик, навколо проводу багатопроводний, то граничні умови на поверхні поділу двох діелектриків лінії \bar{E} такі ж, як і в електростатичному полі:

$$\bar{E}_{1\tau} = \bar{E}_{2\tau}; \quad \bar{D}_{1n} = \bar{D}_{2n}; \quad (2)$$

3. Граничні умови на поверхні провідника зі струмами дещо інші ніж у статичному стані зарядів, коли поверхні проводів екіпотенціальні, а вектор напруженості поля направлений по нормалі до них. На рис. 1, *a* зображена двопровідна лінія без навантаження, яка підключена до джерела постійної напруги. Далеко від кінців лінії електростатичне поле буде однорідним, і лінії вектора \vec{E} – перпендикулярні до поверхонь проводів.

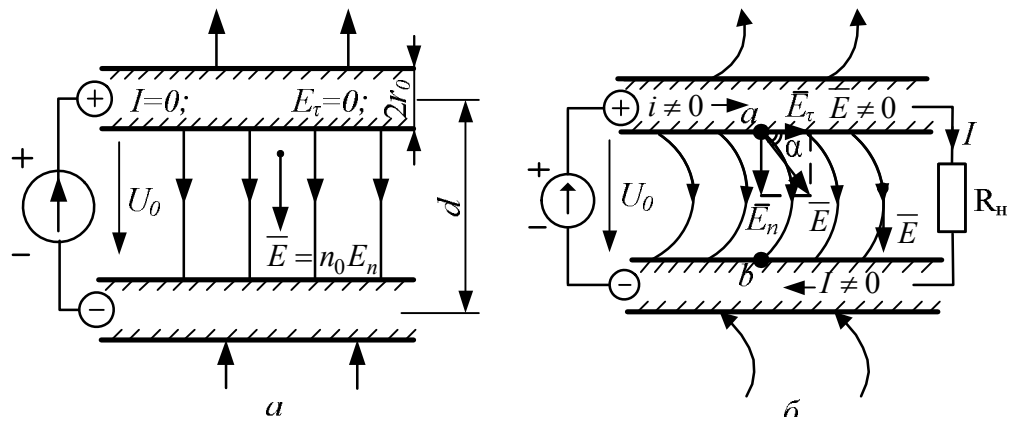


Рис. 1

Коли на кінці лінії приєднати навантаження, по лінії піде постійний струм під дією тангенціальної компоненти напруженості поля \vec{E}_τ , яка спрямована у напрямі струму. Вона чисельно дорівнює спаду напруги на одиницю довжини і може бути визначена за законом Ома $\vec{E}_\tau = \frac{\vec{J}}{\gamma}$.

Нормальна складова E_n визначається напругою між проводами $|E_n| = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ і зарядами на них. Тож на поверхнях провідників зі струмами вектор \vec{E} спрямований під певним кутом α до них, а у просторі між проводами силові лінії поля викривлені. (рис. 1, *б*)

В реальних умовах $\vec{E}_n \gg \vec{E}_\tau$, тому $\alpha \approx 90^\circ$, а поверхня провідника вважається практично екіпотенціальною. Граничні умови у цьому випадку повністю збігаються з граничними умовами електростатичного

поля, тому електричне поле поза проводами розраховують за тими ж методами, що й електростатичне у діелектрику навколо них.

Приклад 1. Визначити кут нахилу вектору E_{max} до поверхні проводу мідної двопровідної лінії електропередачі, якщо напруга між проводами $U_0 = 100$ В, радіус проводу $r_0 = 2$ мм, відстань між проводами $d = 10$ см, а струм $I = 73$ А.

Розв'язання. Густина електричного струму у поперечному перерізі тонких проводів стала:

$$J = \frac{I}{\pi r_0^2} = \frac{73}{3.14 \cdot 4} = 5.8 \text{ [А/мм}^2\text{]}$$

Цей струм проходить всередині проводу під дією тангенціальної складової напруженості поля $E_\tau = \frac{J}{\gamma} = \frac{5.8}{58} = 0.1 \text{ [В/м]}$ (питома провідність міді $\gamma = 58 \frac{\text{мм}^2}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$).

Щоб визначити нормальну складову E_n вектора \vec{E} , скористаємося розрахунком поля двопровідної лінії. У [2] наведена формула для розрахунку напруженості електричного поля, максимальної у точках проводів, відстань між якими є мінімальною (точки a і b на рис. 1, б)

$$\text{Для випадку, коли } d \gg r_0, \text{ як у нашій задачі, } E_n = E_{\text{пов}} = \frac{U_0}{2r_0 \ln(d/r_0)},$$

$$\text{тобто } E_n > \frac{U_0}{d}.$$

$$\text{Для оцінки } E_n \text{ скористаємося наближеним значенням } E_{n\text{max}} \cong \frac{U_0}{d},$$

$$\text{тобто } E_n \cong \frac{100}{0.1} = 1000 \text{ [В/м]}, \text{ а } \frac{E_n}{E_\tau} = \frac{1000}{0.1} = 10^4. \text{ Тобто, в реальній лінії}$$

складовою E_τ можна знехтувати порівняно з E_n . Кут нахилу \vec{E} до поверхні проводу дорівнює:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{E_n}{E_\tau} = \operatorname{arctg} 10^4 = 89.9943^\circ,$$

Тобто $\alpha \cong 90^\circ$, що відповідає граничній умові на поверхні зарядженого металевого тіла в електростатичному полі.

Висновок

Електричне поле поза провідниками з постійними струмами описується рівнянням Лапласа, граничні умови на поверхнях провідників і на межі розділу двох діелектриків збігаються і з рівняннями для φ і з граничними умовами у електростатичному полі. Тому для розрахунку стаціонарного електричного поля поза провідниками з постійними струмами використовують методи електростатичного поля

1.2 Стаціонарне електричне поле всередині провідників зі струмом

Електричне поле, що утворюється у провідниках зовнішніми джерелами енергії, спричиняє електричний струм, густина якого визначається за законом Ома $\vec{J} = \gamma \vec{E}$.

Рівняння стаціонарного електричного поля у провідниках (табл.1)

$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$; $\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E}$; $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, показують:

1. Що воно безвихрове, тобто потенціальне, як і поле поза провідниками. Електричний потенціал визначається з рівняння Лапласа $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$, або $\nabla^2 \varphi = 0$ справедливого для однорідного ізотропного провідника.

2. На поверхні розділу двох провідників, де провідність змінюється стрибком, рівняння Лапласа несправедливе, тому слід враховувати граничні умови на цій поверхні. Їх можна отримати таким же чином, як і граничні умови на поверхні розділу двох діелектриків у

електростатичному полі, застосувавши принцип однозначності потенціалу

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = 0 \text{ та принцип неперервності електричного струму } \oint_S \bar{J} d\bar{S} = 0.$$

Тож на межі розділу двох провідників за рахунок різної їх провідності лінії \bar{E} та \bar{J} заломлюються. Неперервними є тангенціальні компоненти напруженості поля $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ та нормальні складові густин електричного струму $J_{1n} = J_{2n}$. Співвідношення між кутами θ_1 та θ_2 струму $J_{1n} = J_{2n}$ залежить від провідностей провідників (рис.2)

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (3)$$

Це рівняння виражає явище заломлення ліній струму на межі поділу провідників. Де під терміном *лінія струму* слід розуміти криву, дотичні до якої у кожній точці збігаються з вектором густини електричного струму J .

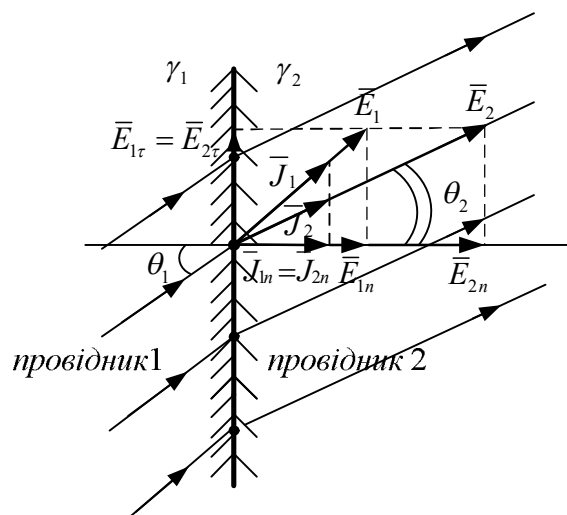


Рис. 2

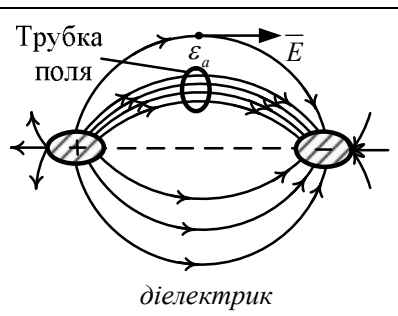
Практичний інтерес має заломлення ліній струму при переході його із провідника з високою провідністю γ_1 , у провідник з малою провідністю - γ_2 , наприклад із сталюого проводу у ґрунт.

Відомо, що для сталі $\gamma_1 = 5 \cdot 10^6 \text{ См/м}$, для ґрунту з середньою вологістю $\gamma_2 = 10^{-2} \text{ См/м}$, тобто $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 5 \cdot 10^8$. Навіть, якщо $\theta_1 = 89^\circ 59'$, тобто

якщо струм у «доброму» провіднику «ковзає» вздовж його поверхні, то в «поганий» провідник він виходить під прямим кутом (θ_2 становить кілька секунд), тобто поверхня проводу в землі є екіпотенціальною.

Таким чином, щоб розрахувати стаціонарне електричне поле у провідниках, необхідно розв'язати рівняння поля, які мають такий же вигляд як і для електростатичного поля (при $\rho = 0$), а однакові за формою граничні умови підтверджують аналогію стаціонарного електричного поля у провідниках з електростатичним полем. Формальна аналогія полів впливає з виразів, наведених у табл. 2.

Таблиця 2.

<i>Електростатичне поле</i>	<i>Аналогічні величини</i>	<i>Стаціонарне електричне поля у провідниках</i>
$\text{rot} \bar{E} = 0$	$\bar{E} \leftrightarrow \bar{E}$	$\text{rot} \bar{E} = 0$
$\text{div} \bar{D} = 0$	$\bar{D} \leftrightarrow \bar{J}$	$\text{div} \bar{J} = 0$
$\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$	$\varphi \leftrightarrow \varphi$	$\bar{J} = \gamma \bar{E}$
$\varphi_a = \int_A^P \bar{E} d\bar{l}$	$U \leftrightarrow U$	$\varphi_a = \int_A^P \bar{E} d\bar{l}$
$U_{AB} = \int_A^B \bar{E} d\bar{l}$	$\epsilon_a \leftrightarrow \gamma$	$U_{AB} = \int_A^B \bar{E} d\bar{l}$
 <p>Заряд на частині електрода, на яку спирається трубка поля</p> $\Delta q = \int_S \bar{D} d\bar{S}$	$q \leftrightarrow I$	<p>Струм, що виходить з частини електрода у трубку струму</p> $\Delta I = \int_S \bar{J} d\bar{S}$

<i>Електростатичне поле</i>	<i>Аналогічні величини</i>	<i>Стаціонарне електричне поле у провідниках</i>
Ємність між електродами $C = \frac{\Delta q}{U}$	$C \leftrightarrow G$	Провідність між електродами $G = \frac{i}{U}$
Граничні умови		
на поверхні розділу двох діелектриків $\bar{E}_{1\tau} = \bar{E}_{2\tau}$ $\bar{D}_{1n} = \bar{D}_{2n}$	$\bar{E} \leftrightarrow \bar{E}$ $\bar{D} \leftrightarrow \bar{J}$	на поверхні розділу двох провідників $\bar{E}_{1\tau} = \bar{E}_{2\tau}$ $\bar{J}_{1n} = \bar{J}_{2n}$

Таким чином, за однакової геометрії поділу двох діелектриків з геометрією поділу двох провідних середовищ, за однакової геометрії поверхонь заряджених тіл і електродів, з яких виходять електричні струми, спостерігається повна аналогія між електростатичним полем та стаціонарним полем у провідниках. Якщо порівняти картини цих двох полів, то лініям \bar{D} відповідають лінії \bar{J} , а екіпотенціальні лінії співпадають.

У більшості випадків немає необхідності розраховувати безпосередньо стаціонарне поле, можна скористатися результатами розрахунку аналогічного електростатичного поля і потім здійснити заміну відповідних величин. Зокрема, щоб одержати формулу для провідності витоку $G = \frac{I}{U}$, достатньо у відповідній формулі для ємності $C = \frac{Q}{U}$ абсолютні діелектричні проникності діелектриків ϵ_a замінити питомими провідностями провідних середовищ γ . У формули для G і для C величини γ і ϵ_a входять як множники, тому для подібних задач електростатики і стаціонарного електричного поля маємо співвідношення

$\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\epsilon_a}$. Метод електростатичної аналогії широко використовується для розрахунку провідності витоку кабелю, ліній електропередач та різних пристроїв, а також опору заземлення. Цей метод використовується у моделюванні електростатичного поля електричним полем у провідному середовищі.

Приклад 2. Визначити опір заземлення, виконаного у вигляді сталевго стрижня, закопаного у ґрунт (рис. 3, а), якщо:

$2 \cdot r_0 = 5$ см, $l = 2$ м, $\gamma_{ст} = 5 \cdot 10^6$ См/м, $\gamma_{г} = 10^{-2}$ См/м. Визначити також напругу доторкання і крокову напругу, взявши довжину руки, кроку і відстань до заземлення відповідно $l_p = 0.6$ м, $l_k = 0.8$ м, $l_1 = 4.2$ м, а струм, що входить у заземлювач, $I = 100$ А.

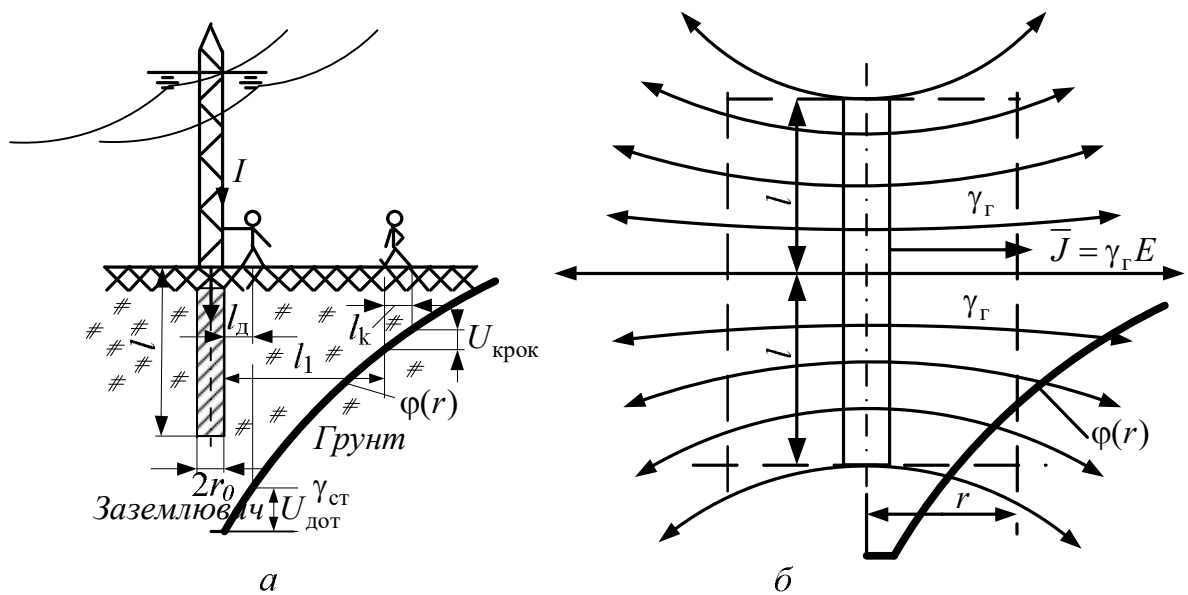


Рис. 3

Розв'язання. Поверхня землі для електричного струму, що розтікається у землі від заземлювача (електрода) в усі боки, є поверхнею симетрії для системи електрод плюс його дзеркальне відображення, що знаходиться в однорідному провідному середовищі з провідністю γ .

Картина поля для цієї системи показана на рис. 22.3, б. Якщо врахувати, що $2l \gg 2r_0$, то ємність такого циліндра на довжині $2l$ дорівнює [1]

$$C \approx \frac{4\pi\epsilon_a l}{\ln\left(\frac{2l}{d}\right) - 0,307} \quad (4)$$

Використовуючи електростатичну аналогію, запишемо провідність системи: електрод плюс його дзеркальне відображення

$$G_{2l} = \frac{4\pi\gamma l}{\ln\left(\frac{2l}{r_0}\right) - 0,307} \quad (5)$$

А провідність заземлення (лише стрижня) буде у 2 рази меншою

$$G_{\text{заз}} = \frac{2\pi\gamma l}{\ln\frac{2l}{r_0} - 0,307} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-2} \cdot 2}{\ln\frac{2 \cdot 2}{2,5 \cdot 10^{-2}} - 0,307} = 0,025 \text{ См.}$$

Опір заземлення

$$R_{\text{заз}} = \frac{1}{G_{\text{заз}}} = \frac{1}{0,025} = 40 \text{ (Ом).}$$

Щоб обчислити напругу доторкання і крокову напругу, знайдемо зміну потенціалу вздовж поверхні землі. Для цього визначимо \bar{E} у будь-якій точці на відстані r від осі стрижня

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi r l \gamma} \quad (6)$$

де J – густина струму, який проходить крізь циліндр (радіус його r), що охоплює стрижень. Потенціал на поверхні землі розподілений за законом:

$$\varphi = \int_r^{r_p} \bar{E} d\bar{r} = \int_r^{r_p} \frac{I}{2\pi l \gamma} d\bar{r} = -\frac{I}{2\pi l \gamma} \ln r + const \quad (7)$$

Стала інтегрування визначається за відомим потенціалом будь-якої точки, наприклад поверхні стрижня

$$\varphi_{ст} = IG \text{ при } r = r_0.$$

Для розрахунку напруги доторкання $U_{дот}$ та крокової напруги U_k стала не має значення, тому обчислювати її не обов'язково. Якщо людина, що стоїть біля опори, доторкнеться до неї, вона попаде під напругу:

$$\begin{aligned} U_{дот} &= \varphi_{r=r_0} - \varphi_{r=r_0+l_d} = \frac{I}{2\pi \gamma_n l} \ln \frac{r_0 + l_d}{r_0} = \\ &= \frac{100}{2 \cdot 3.14 \cdot 10^{-2} \cdot 2} \ln \frac{2.5 \cdot 10^{-2} + 0.6}{2.5 \cdot 10^{-2}} = 2562 \text{ В.} \end{aligned}$$

Людина, що крокує по землі і перебуває від заземлення на відстані l_1 буде під напругою

$$\begin{aligned} U_k &= \varphi_{r=l_1} - \varphi_{r=l_1+l_k} = \frac{I}{2\pi \gamma_n l} \ln \frac{l_1 + l_k}{l_1} = \\ &= \frac{100}{2 \cdot 3.14 \cdot 10^{-2} \cdot 2} \ln \frac{4.2 + 0.8}{4.2} = 138.8 \text{ В.} \end{aligned}$$

Як бачимо, обидві напруги небезпечні для життя людини, тому з метою зниження цих напруг використовують не одиночні стрижні, а сітку з багатьох стрижнів чи труб, забитих у ґрунт по усій заземленій поверхні і з'єднаних провідниками один з одним. Тоді розподілення потенціалу на поверхні землі буде більш рівномірним, і напруги $U_{дот}$ та U_k будуть незначні. Розрахунок такої сітки заземлення досить складна задача, яка виходить за рамки матеріалу підручника.

Приклад.3. Визначити струм виток у на одиницю довжини кабелю, якщо відома провідність ізоляції діелектрика $\gamma_{із} = 10^{-10} \frac{\text{См}}{\text{м}}$, а провідність провідів і оболонки значно більша $\gamma_{із}$. При цьому $R_1 = 10 \text{ мм}$, $R_2 = 20 \text{ мм}$ (рис. 4), до кабелю прикладена напруга $U = 500 \text{ В}$.

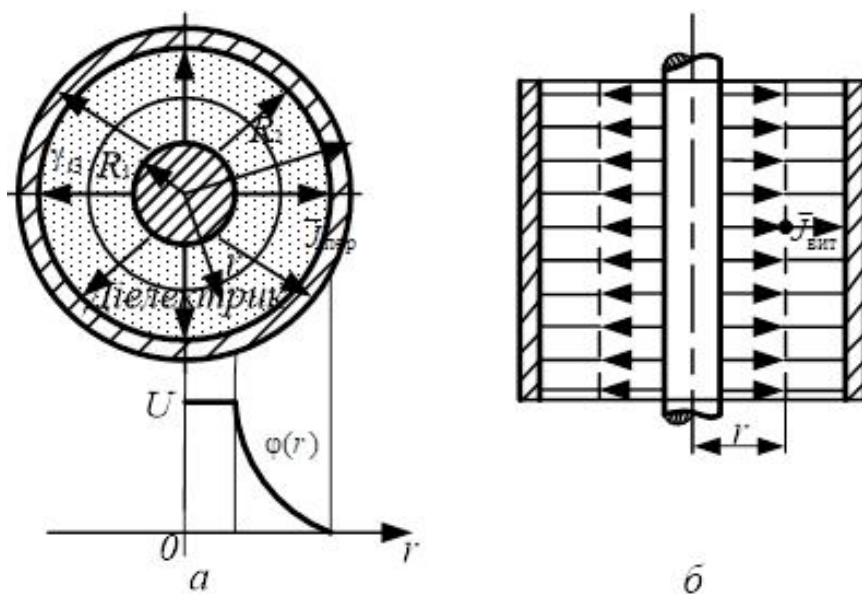



Рис. 4

Розв'язання. Струм виток у з жили кабелю на оболонку визначається напругою та провідністю виток у 1 м кабелю. Якщо на відстані від R_1 до R_2 спад напруги дорівнює U , то

$$I_{\text{вит}} = G_{\text{вит}} U.$$

Щоб визначити  скористаємося електростатичною аналогією, і у формулі для ємності 1 м коаксіального кабелю

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (8)$$

замінімо C_0 на $G_{\text{вит}}$, ϵ_a на  тобто:

$$G_{\text{вит}} = \frac{2\pi\gamma_{\text{із}}}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (9)$$

Таким чином струм витоку дорівнює:

$$I_{\text{вит}} = \frac{2\pi\gamma_{\text{із}}U}{\ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 10^{-10} \cdot 500}{\ln \frac{20}{10}} = 0.45 \cdot 10^{-6} \text{ (А)},$$

а опір витоку знаходимо по формулі:

$$R_{\text{вит}} = \frac{U}{I_{\text{вит}}} = \frac{500}{0.45 \cdot 10^{-6}} = 11.11 \cdot 10^8 \text{ (Ом)}.$$

Висновок

Щоб розрахувати стаціонарне електричне поле у провідниках, необхідно розв'язати рівняння поля, які мають такий же вигляд як і для електростатичного поля (при $\rho=0$), а однакові за формою граничні умови підтверджують аналогію стаціонарного електричного поля у провідниках з електростатичним полем.

Формальна аналогія полів впливає з виразів, наведених у табл.2.

ТЕМА 1.2 Магнітне поле постійного струму
Лекція №12 МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

Магнітне поле поза провідниками з постійними струмами. Скалярний магнітний потенціал. Рівняння Лапласа для скалярного магнітного потенціалу. Граничні умови для векторів магнітного поля. Метод дзеркальних зображень. Магнітне поле всередині провідників з постійними струмами. Векторний магнітний потенціал. Визначення магнітного потоку та енергії магнітного поля через векторний магнітний потенціал

1 Стационарне магнітне поле поза провідниками зі струмом (Скалярний магнітний потенціал. Рівняння Лапласа для скалярного магнітного потенціалу)

Постійний струм, який під дією стаціонарного електричного поля проходить у провіднику, створює стаціонарне магнітне поле, яке існує, як поза провідником навколо нього у діелектрику, так і всередині провідника. Поза провідниками струм відсутній, тобто $\bar{J} = 0$, і рівняння стаціонарного магнітного поля у діелектрику, що оточує провідники, мають вигляд:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = 0; \quad \operatorname{div} \bar{B} = 0; \quad \bar{B} = \mu_a \bar{H}; \quad W'_m = \frac{\bar{B}\bar{H}}{2}. \quad (1)$$

Ці рівняння свідчать про безвихровий, тобто потенціальний характер цього поля. Можна ввести скалярну функцію φ_m , яку назвемо *скалярним магнітним потенціалом*:

$$\varphi_{m_A} = \int_A^P \bar{H} d\bar{l}, \quad (2)$$

яка залежить від координат точки A відносно до координат фіксованої точки P , потенціал якої приймемо за нуль.

Тоді можна взяти градієнт цього потенціалу і визначити напруженість магнітного поля з виразу:

$$\vec{H} = -\text{grad}\varphi_M. \quad (3)$$

При цьому закон повного струму $\text{rot}\vec{H} = 0$ не порушується, оскільки ротор будь-якого градієнта скалярної функції тотожно дорівнює нулю

$$\text{rot}\vec{H} = -\text{rotgrad}\varphi_M \equiv 0.$$

За аналогією з електростатичним полем можна говорити про поверхні (а на площі аркуша про лінії) магнітного потенціалу, у кожній точці яких магнітний потенціал однаковий: $\varphi_M = \text{const}$. Очевидно, що еквіпотенціальні лінії ортогональні до ліній напруженості поля \vec{H} .

Важливо зазначити, що на відміну від потенціалу електростатичного поля, скалярний потенціал магнітного поля – функція багатозначна.

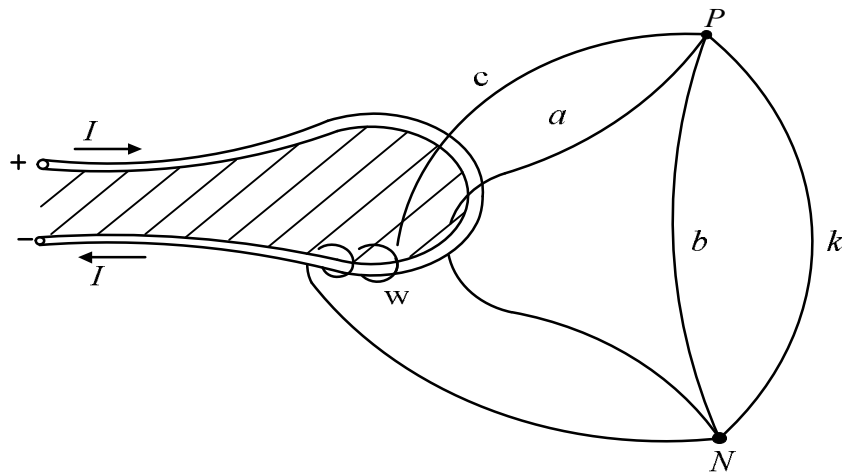


Рис. 1

Це видно з рис. 1. Якщо прийняти магнітний потенціал точки P за нульовий $\varphi_{MP} = 0$, то потенціал буде, наприклад, збільшуватись при переміщенні з точки N у точку P по шляху NbP , а при переміщенні з

точки N у точку P по шляху PkN буде зменшуватись, і циркуляція вектору \vec{H} вздовж шляху $NbPkN$ дорівнює нулю

$$\int_{NbP} \vec{H} d\vec{l} + \int_{PkN} \vec{H} d\vec{l} = \oint_{NbPkN} \vec{H} d\vec{l} = 0. \quad (4)$$

Якщо ж вибрати шлях $NaPkN$, який перетинає поверхню, що обмежена провідниковим контуром зі струмом I , то за законом повного струму отримаємо вираз:

$$\oint_{NaPkN} \vec{H} d\vec{l} = \int_{NaP} \vec{H} d\vec{l} - \int_{NkP} \vec{H} d\vec{l} = I.$$

Тобто:

$$\int_{NaP} \vec{H} d\vec{l} = I + \int_{NkP} \vec{H} d\vec{l}, \text{ або } \varphi'_{mN} = \varphi_{mN} + I. \quad (5)$$

Коли шлях інтегрування перетинає поверхню, яка обмежена провідником зі струмом w разів (w – кількість витків котушки), то маємо:

$$\oint_{NcPkN} \vec{H} d\vec{l} = \int_{NcP} \vec{H} d\vec{l} - \int_{NkP} \vec{H} d\vec{l} = Iw,$$

або

$$\int_{NcP} \vec{H} d\vec{l} = \int_{NkP} \vec{H} d\vec{l} + Iw; \varphi''_{mN} = \varphi_{mN} + Iw, \quad (6)$$

як бачимо:

$$\varphi'_m \neq \varphi''_m.$$

Тобто значення потенціалу точки N залежить від форми шляху інтегрування. Але ця неоднозначність скалярного магнітного потенціалу не впливає на величину напруженості магнітного поля, оскільки градієнт від сталої величини Iw дорівнює нулю

$$\vec{H} = -\text{grad} \varphi''_m = -\text{grad}(\varphi'_m + Iw) = -\text{grad} \varphi'_m + \cancel{\text{grad} Iw} = -\text{grad} \varphi'_m.$$

Та все ж, щоб уникнути неоднозначності скалярного потенціалу, домовились визначити його тільки по шляху, що не пронизує поверхню, обмежену контуром з електричним струмом.

Через необхідність вибору певного шляху інтегрування під час розрахунку скалярного магнітного потенціалу та непридатність φ_M для характеристики поля усередині провідників зі струмами, де поле невихрове $\text{rot } \vec{H} = \delta$ (тобто воно не потенціальне), скалярний магнітний потенціал має обмежену область використання.

Але, наприклад, магнітне поле у немагнітних проміжках електричних машин та апаратів легко розрахувати якраз за допомогою скалярного магнітного потенціалу, який розраховують за рівнянням Лапласа, яке отримуємо з рівняння магнітного поля для однорідного середовища

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} = 0, \text{ тобто } \text{div } \mu_a \vec{H} = 0; \text{ якщо } \mu_a = \text{const } \text{div } \vec{H} = 0, \text{ або} \\ \text{div grad } \varphi_M = 0, \text{ у іншій формі } \nabla^2 \varphi_M = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Це і є рівняння Лапласа, яке описує магнітне поле поза провідниками з електричними струмами. Рішення цього рівняння буде єдиним, якщо воно задовольняє не тільки рівняння поля, а й граничні умови на поверхні поділу двох середовищ з різною магнітною проникністю.

1.2 Граничні умови для векторів \vec{B} та \vec{H} на поверхні поділу двох середовищ

На межі поділу двох середовищ з різними магнітними проникностями (рис. 2, *a*) подумки виділяємо циліндр з нескінченно малою висотою. Слід від перетину поверхні циліндра з площиною рисунка – прямокутник $abcd$.

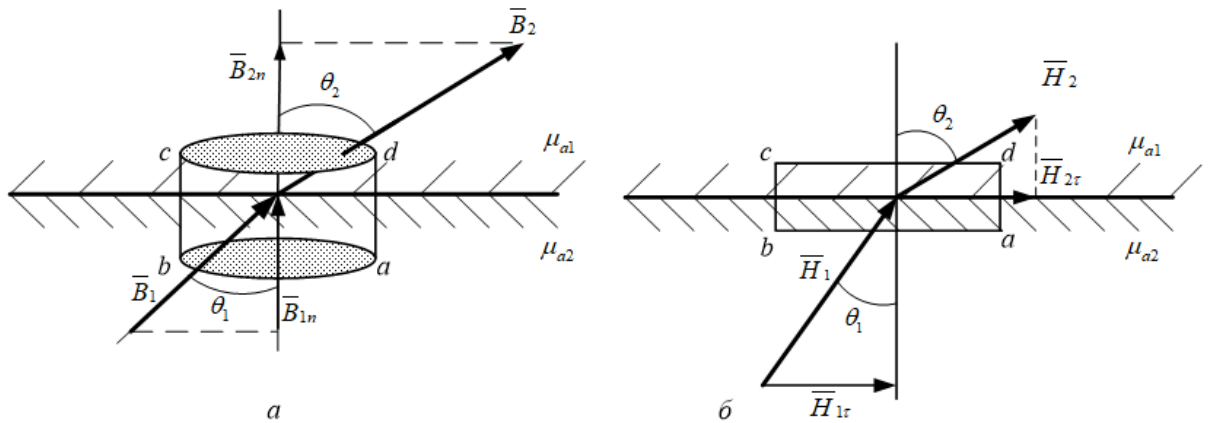


Рис. 2

Потік вектору \vec{B} за принципом безперервності магнітного потоку крізь замкнену поверхню циліндра дорівнює нулю $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$. Враховуючи, що $cd = ad \approx 0$, маємо:

$$-B_1 \cos \theta_1 \cdot S_1 + B_2 \cos \theta_2 \cdot S_2 = 0 \quad (8)$$

Оскільки $S_1 = S_2$, то $B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2$, тобто:

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Звідси робимо висновок, що нормальні складові вектору \vec{B} на поверхні поділу двох середовищ з різними μ_a - однакові.

Циркуляція вектору \vec{H} уздовж замкненого контуру $abcd$ (рис. 2, б) дорівнює нулю, оскільки контур інтегрування не охоплює струмів:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = -H_1 \sin \theta_1 ab + H_2 \sin \theta_2 cd = 0 \quad (9)$$

(складовими $H_1 \cos \theta_1 bc$ і $-H_2 \cos \theta_2 da$ нехтуємо через дуже малі bc та da). Оскільки $ab = cd$, то $H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2$ або

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (10)$$

З доведення виходить, що тангенціальні складові \overline{H} на межі поділу середовищ однакові.

Поділивши рівність (9) на рівняння (8) і пам'ятаючи, що $\overline{B} = \mu_a \overline{H}$, одержимо:

$$\frac{H_1}{B_1} \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{H_2}{B_2} \operatorname{tg} \theta_2 \quad \text{або} \quad \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}, \quad (11)$$

тобто заломлення ліній поля на межі поділу двох середовищ залежать від їх магнітних властивостей.

Практичне значення має характер заломлення лінії магнітної індукції на межі феромагнітних тіл і повітря (наприклад, у електричних машинах).

Приклад 1. Відносна магнітна проникність повітря дорівнює $\mu_{r\text{п}} = \mu_{r2} = 1$, а феромагнетика - $\mu_{r\text{фер}} = \mu_{r1} = 2000$. Нехай лінії вектору \overline{B}_1 утворюють з нормаллю кут θ_1 , що дорівнює 89.56° (рис. 3). Тоді кут θ_2 дорівнює:

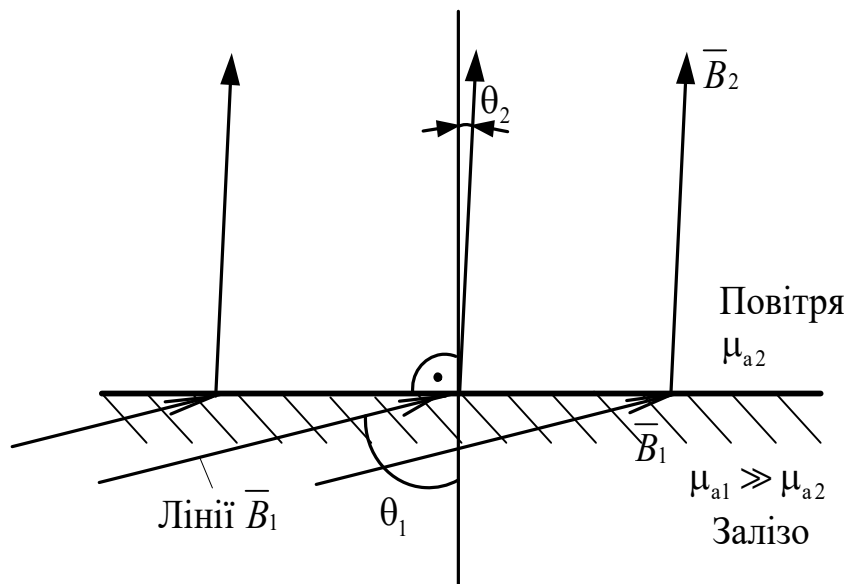


Рис. 3

$$\operatorname{tg} \frac{89.56^\circ}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{2000}{1}; \quad \theta_2 = \arctg(0.065); \quad \theta_2 = 3.72^\circ,$$

тобто лінії \vec{B} входять у повітря з феромагнітного тіла під прямим кутом до його поверхні, яка, таким чином, є поверхнею однакового магнітного потенціалу.

Приклад 2. Розрахувати скалярний магнітний потенціал поза циліндричним проводом з постійним струмом I (рис. 4).

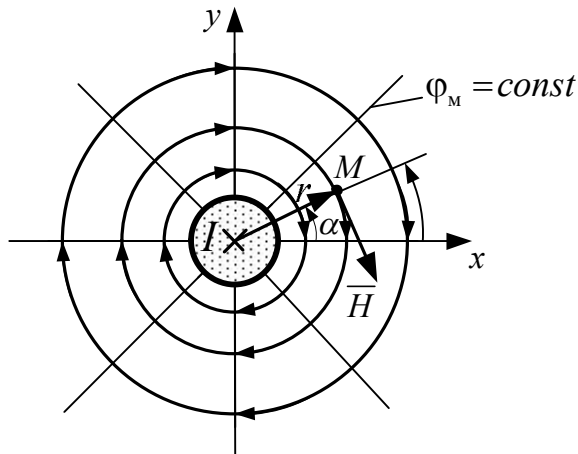


Рис. 4

Розв'язання. У силу симетрії лінії магнітної індукції є концентричними колами з центром на осі проводу, причому \vec{B} матиме тільки складову $\vec{B}_\alpha = \mu_a \vec{H}_\alpha$, яка буде залежати тільки від відстані досліджуваної точки від осі проводу $\vec{H}_\alpha(r) = \vec{H}_\alpha$. За законом повного струму інтеграл від \vec{H}_α вздовж силової лінії дорівнює струму I :

$$\oint_l \vec{H}_\alpha d\vec{l} = I, \text{ тобто } H_\alpha 2\pi r = I, \text{ звідки}$$

$$H_\alpha = \frac{I}{2\pi r}. \quad (12)$$

Ця формула дозволяє визначити скалярний магнітний потенціал, пам'ятаючи що, $\vec{H} = -\text{grad} \varphi_M$. У циліндричній системі координат маємо

$H_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_M}{\partial \alpha} = \frac{I}{2\pi r}$. Звідки $\varphi_M = -\frac{I}{2\pi} \alpha + C$. Якщо вважати $\varphi_M = 0$ при $\alpha = 0$, тоді $C = 0$ і скалярний магнітний потенціал дорівнює:

$$\varphi_M = -\frac{I}{2\pi} \alpha. \quad (13)$$

Рівняння лінії однакового магнітного потенціалу ($\varphi_M = const$) у площині рисунку має вигляд $\alpha = const$, тобто лініями рівного магнітного потенціалу будуть радіальні прямі. На рис. 4 представлено сімейство взаємно перпендикулярних силових ліній та екіпотенціалей, коли різниця

$$\Delta\varphi_M \text{ між сусідніми лініями дорівнює } \Delta\varphi_M = \frac{I}{2\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{I}{8}.$$

1.3 Принцип відповідності магнітного поля поза провідниками з постійними струмами та електростатичного поля

Порівнюючи рівняння стаціонарного магнітного поля поза провідниками та електростатичне поле у діелектрику, що оточує заряджені провідники, то можна побачити формальну аналогію між ними (табл. 1).

Ця аналогія дозволяє скористатися методами розрахунку електростатичних полів для розрахунку стаціонарних магнітних полів поза провідниками з постійними струмами. Це стосується у першу чергу *плоскопаралельних* полів, тобто таких полів, картини яких у паралельних площинах однакові.

Ця аналогія дозволяє скористатися методами розрахунку електростатичних полів для розрахунку стаціонарних магнітних полів поза провідниками з постійними струмами. Це стосується у першу чергу *плоскопаралельних* полів, тобто таких полів, картини яких у паралельних площинах однакові.

Таблиця 1

Електростатичне поле	Аналогічні величини	Стаціонарне магнітне поле
$\text{rot } \vec{E} = 0$ $\text{div } \vec{D} = 0$ Потенціал скалярний електричний $\varphi_a = \int_A^P \vec{E} d\vec{l}$ $\nabla^2 \varphi_a = 0$	$\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$ $\vec{D} \leftrightarrow \vec{B}$ $\varphi_a \leftrightarrow \varphi_{M_A}$ Рівняння Лапласа	$\text{rot } \vec{H} = 0$ $\text{div } \vec{B} = 0$ Потенціал скалярний магнітний $\varphi_{M_A} = \int_A^P \vec{H} d\vec{l}$ $\nabla^2 \varphi_M = 0$
Граничні умови		
$E_{1\tau} = E_{2\tau}$ $D_{1n} = D_{2n}$	$\vec{D} \leftrightarrow \vec{B}$	$H_{1\tau} = H_{2\tau}$ $B_{1n} = B_{2n}$

Розглянемо принцип відповідності електростатичного та стаціонарного магнітного поля, якщо порівняти електростатичне поле, створене двома зарядженими електродами, і магнітне поле, яке створене двома полюсами електромагніта, геометрично подібної форми (рис. 5, а та рис. 5, б).

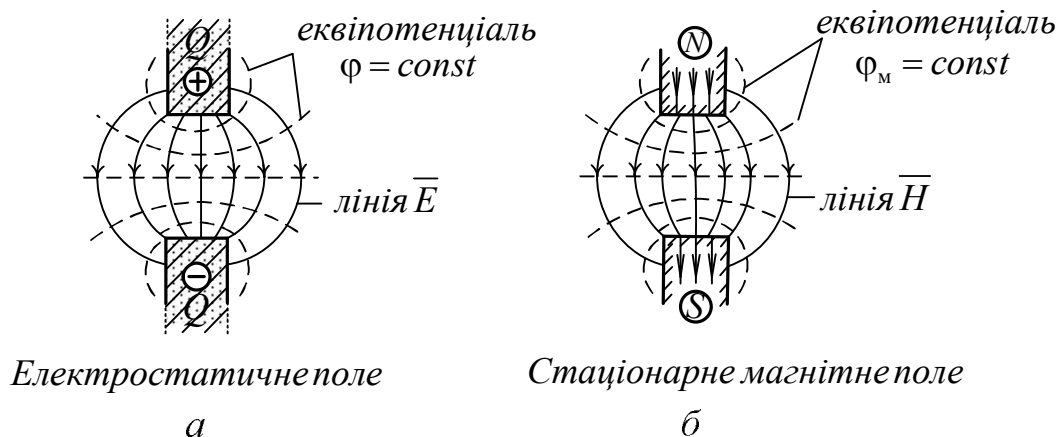


Рис. 5

У цьому випадку лінії \vec{E} та \vec{H} співпадають як і лінії однакового електричного та скалярного магнітного потенціалів. Така аналогія між

електричним та стаціонарним магнітним полями нашо́вхує на думку, що магнітне поле у повітрі створюється магнітними зарядами, які є витоками магнітного поля на північному полюсі N і є стоками на південному полюсі S постійного магніту. Таке припущення дозволяє спростити задачу розрахунку магнітного поля у повітряному прошарку електричних машин, але сучасна теорія електромагнетизму відкидає реальність існування таких магнітних зарядів. Вона стверджує, що лінії магнітного індукції неперервні, вони не мають ні початку, ні кінця.

Тож можна зробити висновок, що методи, які використовують у електростатиці, з огляду на відповідність полів, придатні для розрахунку стаціонарних магнітних полів поза провідниками.

2 Стаціонарне магнітне поле всередині провідників зі струмом

2.1 Векторний магнітний потенціал

Струми, що проходять у провідниках, створюють магнітне поле не тільки навколо, а й всередині провідників. Це магнітне поле описується рівняннями

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}; \operatorname{div} \bar{B} = 0; \bar{B} = \mu_a \bar{H}. \quad (14)$$

Скалярний магнітний потенціал φ_M , що вводиться для аналізу магнітних полів поза провідниками, не задовольняє ці вихідні рівняння. Оскільки $\bar{H} = -\operatorname{grad} \varphi_M$, то тотожно $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi_M \equiv 0$, тобто $\operatorname{rot} \bar{H} = 0$, але всередині провідників магнітне поле вихрове ($\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}$), тож скалярний магнітний потенціал не може характеризувати це поле. Для характеристики магнітного поля у провідниковому середовищі вводять векторну функцію \bar{A} – *векторний магнітний потенціал* і вибирають її таким чином, щоб

$$\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}. \quad (15)$$

Тоді принцип неперервності магнітного потоку не буде порушуватись $\operatorname{div} \bar{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} \equiv 0$, оскільки дивергенція ротора будь-якого вектора тотожно дорівнює нулю.

Щоб отримати рівняння для визначення \bar{A} , підставляємо рівняння (15) у перше рівняння виразу (14), попередньо змінивши його для випадку $\mu_a = \text{const}$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \operatorname{rot} \frac{\bar{B}}{\mu_a} = \bar{J}, \quad \operatorname{rot} \bar{B} = \mu_a \bar{J}, \quad (16)$$

тобто:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \mu_a \bar{J}. \quad (17)$$

Вираз $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A}$ у проекціях на декартові координати має вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \bar{A} &= \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_z A - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_y A = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) = \\ &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}. \end{aligned}$$

Цей вираз можна спростити, якщо додати й відняти величину $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$.

Тоді отримаємо вираз:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \bar{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 A_x. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогічно по решті координат:

$$\operatorname{rot}_y \operatorname{rot} \bar{A} = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 A_y;$$

$$\text{rot}_z \text{rot } \bar{A} = \frac{\partial}{\partial z} \text{div } \bar{A} - \nabla^2 A_z. \quad (19)$$

Помножимо вирази (18) і (19) на відповідні одиничні орти \bar{i} , \bar{j} та \bar{k} і отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{i} \text{rot}_x \text{rot } \bar{A} + \bar{j} \text{rot}_y \text{rot } \bar{A} + \bar{k} \text{rot}_z \text{rot } \bar{A} = & \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{i} A_x + \\ & + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} \text{div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{j} A_y + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{k} A_z. \end{aligned}$$

Ліва і права частини цього рівняння це вектори:

$$\text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A}.$$

Тож перше рівняння Максвелла для \bar{H} перетворюється на векторне рівняння для векторного магнітного потенціалу

$$\text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} = \mu_a \bar{J}. \quad (20)$$

Коли вводився вектор \bar{A} (15), на нього ніяких обмежень не накладалось, тож можемо вибрати \bar{A} таким чином, щоб його лінії були неперервні (тобто без стоків та витоків) і покласти $\text{div } \bar{A} = 0$.

$\text{div } \bar{A} = 0$ є так званою Кулонівською норміровкою.

Тоді рівняння (20) набуде вигляду:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_a \bar{J}, \quad (21)$$

що відрізняється від рівняння Пуассона в електростатичному полі для електричного потенціалу $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$ тільки тим, що рівняння (21) записане

для векторних величин \bar{A} і \bar{J} . Тому рівняння (21) також називають *рівнянням Пуассона для векторного магнітного потенціалу*.

Можна поставити у відповідність величини, які входять у рівняння Пуассона для скалярного електричного потенціалу φ і для векторного магнітного потенціалу \bar{A} :

$$\varphi \leftrightarrow A; \quad \rho \leftrightarrow \bar{J}; \quad \frac{1}{\varepsilon_a} \leftrightarrow \mu_a.$$

Тож, маючи загальне рішення рівняння Пуассона для електричного потенціалу

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_a r}, \quad (22)$$

можна записати формули для визначення \bar{A} і його проекції, наприклад, на осі декартових координат

$$\bar{A} = \int_V \frac{\mu_a \bar{J} dV}{4\pi r}; \quad A_x = \int_V \frac{\mu_a J_x dV}{4\pi r}; \quad A_y = \int_V \frac{\mu_a J_y dV}{4\pi r}; \quad A_z = \int_V \frac{\mu_a J_z dV}{4\pi r} \quad (23)$$

де \bar{J} - густина електричного струму в елементі dV провідника;

r - відстань цього елемента до точки, яка досліджується.

Тобто, щоб визначити \bar{A} у будь-якій точці, слід визначити інтеграл по всьому об'єму провідника, струм якого створює магнітне поле.

Як для електростатичного поля рівняння Пуассона переходять у рівняння Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ для простору, де немає вільних зарядів ($\rho = 0$), так і для магнітного поля поза провідниками (точка N на рис. 6) справедливим є рівняння Лапласа для векторного магнітного потенціалу

$$\nabla^2 \bar{A} = 0. \quad (24)$$

Тобто, векторний магнітний потенціал можемо використовувати як для дослідження магнітного поля у будь-якій точці (M) всередині провідника, так і для областей поза провідниками (точка N на рис. 6).

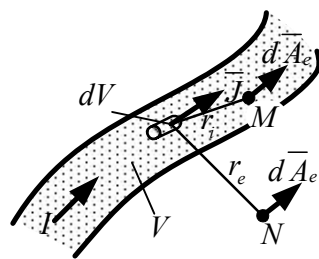


Рис. 6

Варто зазначити, що у багатьох випадках векторний потенціал \bar{A} легше розрахувати, ніж \bar{B} , оскільки \bar{A} має меншу кількість складових, ніж магнітна індукція, або складові \bar{A} залежать від меншої кількості координат, ніж \bar{B} . До того ж для розрахунку магнітного потоку, енергії електромагнітного поля, індуктивностей та іншого не обов'язково визначати \bar{B} , достатньо знати розподіл векторного магнітного потенціалу $\bar{A}(x, y, z)$.

Потрібно також зауважити, що рівняння Пуассона та Лапласа справедливі для однорідного ізотропного середовища. На межі розділу двох середовищ потрібно користуватись граничними умовами для \bar{A} , аналогічно умовам поведінки \bar{B} і \bar{H} на межі розділу двох середовищ з різними магнітними проникностями. Визначимо поведінку \bar{A} , враховуючи, що $\text{div} \bar{A} = 0$, тобто $A_{1n} = A_{2n}$, а оскільки $B_{1n} = B_{2n}$, то $\text{rot}_n A_1 = \text{rot}_n A_{2n}$, що дає умову $A_{1\tau} = A_{2\tau}$, а значить $\bar{A}_1 = \bar{A}_2$. Тож, векторний магнітний потенціал є однозначною і неперервною функцією.

РОЗДІЛ 5 Змінне електромагнітне поле

ТЕМА 5.1 Змінне електромагнітне поле в ідеальному діелектрику

Лекція 13 ЗМІННЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ В ІДЕАЛЬНОМУ ДІЕЛЕКТРИКУ

Рівняння змінного електромагнітного поля. Змінне електромагнітне поле в ідеальному діелектрику. Рівняння Даламбера, загальне рішення. Плоска електромагнітна хвиля в діелектрику. Відбиття та заломлення хвиль на межі поділу двох середовищ

1 Рівняння змінного електромагнітного поля

Змінне електромагнітне поле створюється зарядами, що змінюються у часі, або змінними електричними струмами провідності, перенесення і електричного зміщення. Поле існує безпосередньо поблизу змінних джерел енергії і проводів зі змінними струмами і частково відділяється від них та існує у навколишньому просторі самостійно. Це електромагнітне поле обумовлене взаємно зв'язаними електричним і магнітним полями, які збуджують одне одного і поширюються від джерела у вигляді електромагнітних хвиль.

Повна система рівнянь змінного електромагнітного поля для однорідного ізотропного середовища має вигляд:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \bar{H} &= \gamma \bar{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \bar{D} &= \rho; \quad \operatorname{div} \bar{B} = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

якщо вважати, що відсутні струми перенесення, а існують тільки струми провідності у провідниках і електричного зміщення у оточуючому діелектрику. До них треба додати співвідношення між \bar{D} і \bar{E} , між \bar{B} і \bar{H} , а

також граничні умови для векторів, які характеризують поле і формули для об'ємної густини енергії електромагнітного поля:

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \epsilon_a \bar{E}; \quad \bar{B} = \mu_a \bar{H}; \\ E_{1\tau} &= E_{2\tau}; \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}; \\ D_{1n} &= D_{2n}; \quad B_{1n} = B_{2n};\end{aligned}\tag{2}$$

$$J_{1n} = J_{2n}; \quad W' = W'_a + W'_i = \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}.$$

Важливо зазначити, що введення Максвеллом поняття електричного струму зміщення $\bar{J}_{зм} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ якраз пояснює той факт, що електромагнітне поле може існувати у вигляді вільної електромагнітної хвилі, про що йтиметься у наступних лекціях.

Система рівнянь (1) справедлива для миттєвих значень величин, які входять до них за будь-якого закону зміни поля у часі. На практиці найбільш поширеним є синусоїдне електромагнітне поле, тож якщо струми джерела змінюються у часі за синусоїдним законом, електромагнітне поле називають гармонічним. Вектор \bar{E} у цьому випадку запишемо у вигляді:

$$\bar{E} = \bar{i}E_{mx} \sin(\omega t + \alpha_x) + \bar{j}E_{my} \sin(\omega t + \alpha_y) + \bar{k}E_{mz} \sin(\omega t + \alpha_z),$$

де E_{mx} , E_{my} і E_{mz} – амплітуди проекцій вектору \bar{E} на координатні осі; α_x , α_y і α_z – початкові фази проекцій вектору \bar{E} на ці осі.

Для лінійно поляризованого поля ($\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha$), яке існує у однорідному ізотропному середовищі, вектор може бути записаний простіше:

$$\bar{E} = \bar{E}_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Переходячи до комплексного запису синусоїдальної величини, одержуємо комплексний вектор напруженості гармонічного поля:

$$\dot{\bar{E}}(j\omega) = \bar{E}_m e^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{\bar{E}}_m e^{j\omega t}.$$

Підставляючи подібну форму запису усіх величин у вираз (1), одержимо повну систему гармонічного електромагнітного поля у комплексній формі:

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\bar{H}}_m &= \gamma \dot{\bar{E}}_m + j\omega \varepsilon_a \dot{\bar{E}}_m; \\ \text{rot} \dot{\bar{E}}_m &= -j\omega \mu_a \dot{\bar{H}}_m; \\ \text{div} \dot{\bar{D}}_m &= \dot{\rho}_m; \quad \text{div} \dot{\bar{B}}_m = 0; \\ \dot{\bar{D}}_m &= \varepsilon_a \dot{\bar{E}}_m; \quad \dot{\bar{B}}_m = \mu_a \dot{\bar{H}}_m. \end{aligned} \quad (3)$$

У ці рівняння не входять у явній формі функції часу, що дозволяє у певних випадках розраховувати синусоїдні поля безпосередньо за цими рівняннями, не залучаючи додаткові функції – скалярний потенціал ϕ і векторний магнітний потенціал \bar{A} .

2 Змінне електромагнітне поле у ідеальному діелектрику

У ідеальному незарядженому діелектрику ($\gamma = 0$, $\rho = 0$) існує тільки струм електричного зміщення і рівняння поля мають вигляд:

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \quad \text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad \text{div} \bar{E} = 0; \\ \text{div} \bar{B} &= 0; \quad \bar{D} = \varepsilon_a \bar{E}; \quad \bar{B} = \mu_a \bar{H}. \end{aligned} \quad (4)$$

Бачимо, що поля векторів \bar{E} і \bar{H} вихрові, тож вони не потенціальні.

Вводячи векторний магнітний потенціал \bar{A} і так, щоб $\bar{B} = \text{rot} \bar{A}$,

одержимо вираз виду: $\text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \bar{A} = \text{rot} \left(-\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)$ або $\text{rot} \left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0$.

Таким чином, поле вектору $\left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)$ вже безвихрове, тобто воно потенціальне. Можна ввести скалярний електричний потенціал φ , так щоб:

$$\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi \quad \text{або} \quad \bar{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}. \quad (5)$$

У цьому разі $-\text{grad } \varphi$ визначає кулонівську напруженість електричного поля, $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ – вихрову (індуковану або трансформаторну) напруженість. (У середовищі, що рухається зі швидкістю \bar{v} до них додається ще генераторна напруженість $\bar{E}_{\text{ген}} = [\bar{v}, \bar{B}]$).

Щоб отримати рівняння для визначення φ і \bar{A} скористаємось рівняннями (4) і (5)

$$\text{rot rot } \bar{A} = \mu_a \text{rot } \bar{H} = \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \quad (6)$$

Пам'ятаючи, що $\text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A}$, отримаємо:

$$\text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} = -\mu_a \varepsilon_a \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Оскільки на довільний вектор \bar{A} ніяких обмежень не накладалося, вважаємо, що:

$$\text{div } \bar{A} = -\mu_a \varepsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (8)$$

(це ще одна норміровка)

тоді вираз (7) набуде вигляду:

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (9)$$

Це рівняння Д'Аламбера для векторного потенціалу поза провідниками. Всередині провідників треба враховувати струми провідності густиною \bar{J} . Тоді рівняння Д'Аламбера набуде вигляду:

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \bar{J}. \quad (10)$$

З рівняння $\text{div} \bar{E} = 0$ з урахуванням виразу (5) і (8) одержуємо аналогічне рівняння Д'Аламбера для скалярного електричного потенціалу:

$$\nabla^2 \varphi - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (11)$$

Рівняння Д'Аламбера (9) і (11) описують загальний випадок електромагнітного поля. З них можна одержати відомі рівняння окремих полів:

1) для стаціонарного магнітного і електричного полів, $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ і отримаємо співвідношення для розрахунку \bar{A} : у провіднику $\nabla^2 \bar{A} = -\mu_a \bar{J}$ – це рівняння Пуассона, поза провідником $\nabla^2 \bar{A} = 0$ – це рівняння Лапласа для \bar{A} , $\nabla^2 \varphi = 0$ – це рівняння Лапласа для φ .

2) у електростатичному полі $\bar{A} = 0$, $\bar{J} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ і поза провідником

$\nabla^2 \varphi = 0$ – це рівняння Лапласа для φ .

Загальні розв'язки рівнянь Пуассона і Лапласа для \bar{A} і φ відомі:

$$\bar{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J} dV}{r}; \quad \varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r} \quad (12)$$

дають можливість визначити \bar{A} і φ у будь-якій точці, що віддалена від елемента струму або заряду на відстані r .

Повертаючись до рівняння (9), можна записати вираз:

$$\nabla^2 \bar{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2}, \quad (13)$$

де $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ має розмірність швидкості і зветься *фазова швидкість*.

Для однієї з проєкцій \bar{A} , наприклад, на вісь Ox рівняння (13) буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Воно цілком збігається з рівнянням для однорідної довгої лінії, так званім $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ *телеграфним рівнянням*, тому розв'язки цих рівнянь схожі.

Для кожної з проєкцій вектора \bar{A} розв'язок рівняння Д'Аламбера запишемо так:

$$A_x = A_{x\phi} \left(t - \frac{x}{v} \right) + A_{x\psi} \left(t + \frac{x}{v} \right). \quad (15)$$

Де $A_{x\phi}$ – *пряма хвиля*, що поширюється від джерела вздовж осі Ox , $A_{x\psi}$ – *зворотна хвиля*, що поширюється до джерела з фазовою швидкістю v .

Додаючи усі проєкції вектору \bar{A} , одержуємо вираз для самого вектору:

$$\bar{A} = \bar{A}_\phi \left(t - \frac{r}{v} \right) + \bar{A}_\psi \left(t + \frac{r}{v} \right), \quad (16)$$

де r – відстань від точки, яка досліджується, до елемента джерела поля.

Скориставшись загальним розв'язком рівняння Лапласа (10) для \bar{A} і ϕ , можемо записати загальні вирази для векторного магнітного і скалярного електричного потенціалів прямої хвилі, що поширюється від джерела у навколишній простір зі швидкістю v

$$\bar{A}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV, \quad \varphi_\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV. \quad (17)$$

Звідси випливає, що значення \bar{A} і φ у наступних точках повторюються з запізненням на час $\frac{r}{v}$ проходження хвилі до цих точок.

Саме за рахунок кінцевої швидкості поширення електромагнітних хвиль спостерігатиметься запізнення усіх характеристик електромагнітного поля (потенціалів, напруженостей \bar{E} і \bar{H} , векторів \bar{D} і \bar{B}). Беручи до уваги це, векторний магнітний потенціал \bar{A} і скалярний електричний потенціал φ називають *електродинамічними запізнювальними потенціалами*. Слід нагадати, що швидкість розповсюдження прямої і зворотної хвиль залежить від ϵ_0 і μ_0 середовища і має максимальне значення для пустоти:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{1.256 \cdot 10^{-6} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{км}}{\text{с}} \quad - \quad \text{це швидкість}$$

світла.

2.1 Плоска електромагнітна хвиля у ідеальному діелектрику

На великих відстанях від джерел електромагнітного поля у кожній площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі, вектор \bar{E} у всіх точках однаковий і залежить тільки від відстані цієї площини від джерела. Інші характеристики \bar{D} , \bar{B} , \bar{H} , φ і \bar{A} також залежать тільки від однієї координати. Тоді ми маємо так звану плоску хвилю – електромагнітну хвилю, інтенсивність електромагнітного поля якої залежить тільки від однієї координати. При цьому фази векторів поля та потенціалу постійні уздовж будь-якої площини, перпендикулярної до цієї координати.

Розглядатимемо плоску хвилю, характеристики якої залежать тільки від координати z .

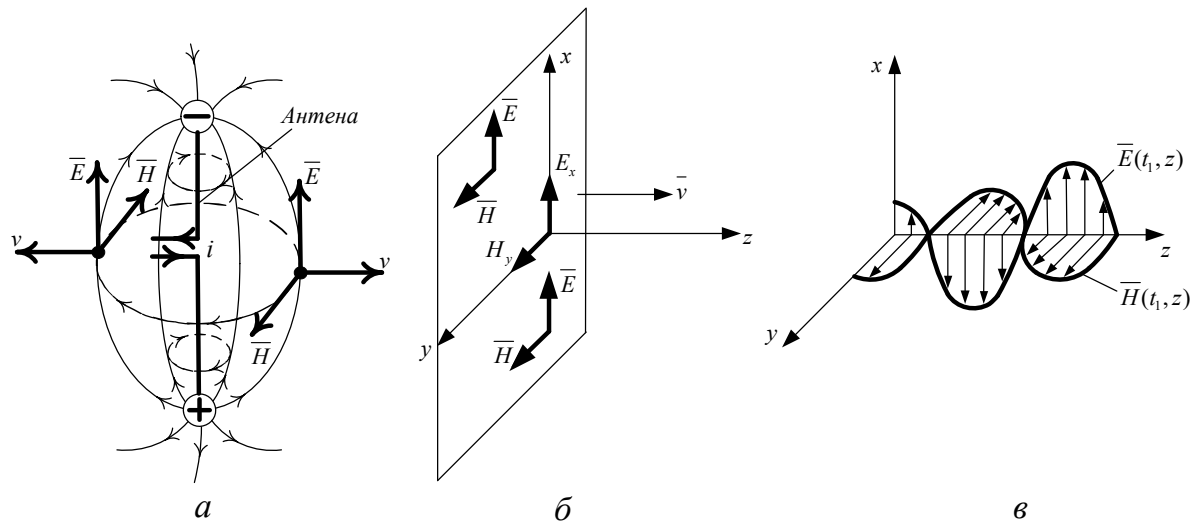


Рис. 1

Нехай вектор \vec{E} збігається з напрямом осі $0x$ (рис. 1, а), тобто:

$$\vec{E} = \vec{i} E_x; E_y = 0; E_z = 0;$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0; \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0. \quad (18)$$

З рівнянь поля (4) отримаємо рівняння для E_x :

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} - \mu_a \epsilon_a \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = 0 \quad (19)$$

аналогічне до рівняння Д'Аламбера для векторного магнітного і скалярного електричного потенціалів (10, 11).

Щоб визначити напрям вектору напруженості магнітного поля \vec{H} , використовуємо друге рівняння Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

З урахуванням рівняння (18), маємо:

$$\vec{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\vec{i} \mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t} - \vec{j} \mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля відповідних ортів, маємо:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0; H_x = const. \quad (20)$$

Оскільки у змінній, зокрема, гармонічній хвилі сталі джерела поля відсутні, то $H_x = 0$, і $\bar{H} = \bar{j}H_y$, тобто вектори \bar{E} і \bar{H} взаємно перпендикулярні. Запишемо співвідношення з першого рівняння Максвела

$$\text{rot } \bar{H} = \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \quad (21)$$

З виразів (20) і (21) отримаємо ще одне хвильове рівняння Д'Аламбера для \bar{H} :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0, \quad (22)$$

де $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}$ – швидкість хвилі. Рівняння (19) має такий самий вигляд, як

і рішення останнього рівняння для напруженості електричного поля

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (23)$$

Рішення цього рівняння відомо з теорії довгих ліній:

$$E = E_\varphi \left(t - \frac{z}{v} \right) + E_\psi \left(t + \frac{z}{v} \right). \quad (24)$$

де E_φ - напруженість електричного поля прямої лінії,

E_ψ - напруженість електричного поля зворотної хвилі,

$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}$ - фазова швидкість.

Напруженість магнітного поля \bar{H} визначається з (20):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{1}{\mu_a v} \left[-E'_\varphi \left(t - \frac{z}{v} \right) + E'_\psi \left(t + \frac{z}{v} \right) \right].$$

Проінтегрувавши цей вираз за часом і визначивши опір середовища

$$\mu_a v = \frac{\mu_a}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = Z_C, \text{ одержимо:}$$

$$H = \frac{E_\varphi}{Z_C} \left(t - \frac{z}{v} \right) - \frac{E_\psi}{Z_C} \left(t + \frac{z}{v} \right) = H_\varphi - H_\psi. \quad (25)$$

Співвідношення між \bar{E} і \bar{H} прямої та зворотної хвиль одержимо у вигляді закону Ома, що аналогічно для струму та напруги прямої і зворотної хвиль у однорідній лінії

$$H_\varphi = \frac{E_\varphi}{Z_C}; \quad H_\psi = \frac{E_\psi}{Z_C}. \quad (26)$$

Таким чином, як пряма, і зворотна хвилі, що поширюються у діелектрику, не згасають, а значення \bar{E} і \bar{H} у наступних точках будуть повторювати значення у попередніх точках з запізненням на $\frac{z}{v}$ секунд.

Швидкість поширення електромагнітної хвилі залежить від властивостей діелектрика, вона завжди менша за c (швидкість світла у пустоті).

$$v_{\text{п}} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

У гармонічному полі для прямої хвилі:

$$E_\varphi = E_m \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} z \right) \text{ і } H_\varphi = H_m \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} z \right), \quad (27)$$

тобто у кожній точці простору поле змінюється у часі за синусоїдним законом, і у певний момент часу t_1 вздовж осі Oz поле також змінюється синусоїдно (рис. 1, б) з різною фазою.

Довжина хвилі залежить від властивостей середовища:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}. \quad (28)$$

де λ_0 – довжина хвилі у пустоті, μ_r і ϵ_r – відносні магнітна і діелектрична проникності середовища.

У (27) $\frac{\omega}{v} = k$ можна назвати (за аналогією з довгими лініями) коефіцієнтом фази, оскільки якраз він характеризує зміну фази прямої або зворотної хвилі на 1 м. Цей коефіцієнт називають *хвильовим числом*.

Важливо зазначити, що у кожний момент часу електромагнітна енергія хвилі розподілена порівну між електричним та магнітним полем, що додатково підтверджує нерозривність єдиного електромагнітного поля.

Дійсно питома густина енергії магнітного поля прямої хвилі дорівнює $W'_m = \frac{B_\phi H_\phi}{2} = \mu_a \frac{H_\phi^2}{2}$. Оскільки $H_\phi = \frac{E_\phi}{Z_C}$, то:

$$W'_m = \mu_a \frac{E_\phi^2}{2 \left(\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \right)^2} = \epsilon_a \frac{E_\phi^2}{2} = W'_e \quad (29)$$

2.2. Відбиття та заломлення хвиль на межі поділу двох середовищ

Припустимо, що пряма плоска хвиля, що поширюється у першому діелектрику, потрапляє на інший діелектрик (рис. 2).

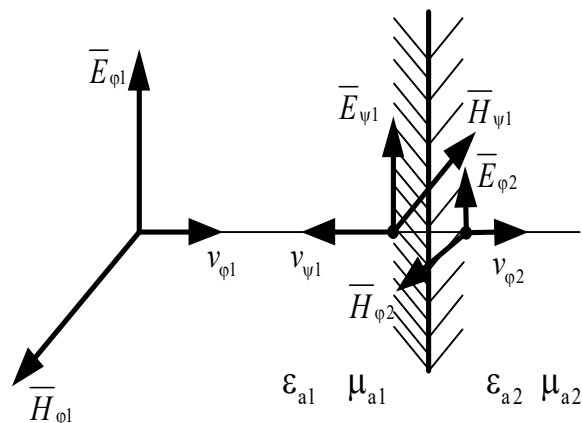


Рис. 2

На межі їх поділу хвиля частково відбивається і частково проходить (заломлюється) у другий діелектрик. За аналогією з довгими лініями можна записати:

$$E_{\varphi_1} + E_{\psi_1} = E_{\varphi_2}; H_{\varphi_1} - H_{\psi_1} = H_{\varphi_2}. \quad (30)$$

Де E_{φ_1} і H_{φ_1} – напруженості електричного і магнітного поля прямої хвилі; E_{ψ_1} і H_{ψ_1} – характеристики відбитої хвилі; E_{φ_2} і H_{φ_2} – характеристики заломленої хвилі.

Враховуючи закон Ома для хвилі (26) друге рівняння записуємо так:

$$\frac{E_{\varphi_1}}{Z_{C_1}} - \frac{E_{\psi_1}}{Z_{C_1}} = \frac{E_{\varphi_2}}{Z_{C_2}}. \quad (31)$$

Спільне розв'язання цих рівнянь дає можливість визначити характеристики заломленої $E_{\varphi_2} = E_{\varphi_1} \frac{2Z_{C_2}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}}$ і $H_{\varphi_2} = \frac{E_{\varphi_2}}{Z_{C_2}}$ та відбитої хвилі $E_{\psi_1} = E_{\varphi_1} \frac{Z_{C_2} - Z_{C_1}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}}$. Тоді коефіцієнт заломлення дорівнює:

$$k_{\text{зал}} = \frac{E_{\varphi_2}}{E_{\varphi_1}} = \frac{2Z_{C_2}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}}, \quad (32)$$

а коефіцієнт відбиття:

$$k_{\text{відб}} = \frac{E_{\psi_1}}{E_{\varphi_1}} = \frac{Z_{C_2} - Z_{C_1}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}} \quad (33)$$

Як бачимо, залежно від співвідношень хвильових опорів середовищ спостерігається різне відбиття і заломлення хвиль.

Окремі випадки:

1) якщо $Z_{C_1} = Z_{C_2}$ ($k_{\text{відб}} = 0$, $k_{\text{зал}} = 1$), то відбиття хвиль немає, і хвиля повністю проходить у друге середовище;

2) якщо друге середовище – ідеальний провідник для якого $\gamma = \infty$, а хвильовий опір, як буде показано пізніше, дорівнює $Z_{C_2} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} = 0$.

Тоді $k_{\text{зал}} = 0$ і $k_{\text{відб}} = -1$, тобто пряма хвиля повністю відбивається від надпровідника, як від дзеркала, не проникаючи у нього. Для реального провідника $Z_{C_2} \gg 0$ і хвиля частково відбивається і частково проходить у провідник.

Весь аналіз поширення хвиль у різних середовищах можна базувати на формулах, які описують відбиття і заломлення хвиль у довгих лініях без втрат.

ТЕМА 5.2 Змінне електромагнітне поле в провідному середовищі

Лекція 14 ЗМІННЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ В ПРОВІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ (продовження лекції 13)

Змінне електромагнітне поле у провідному середовищі. Рівняння Максвелла для провідного середовища. Поширення плоскої хвилі у провідному напівпросторі. Електричний і магнітний поверхневий ефект у плоскій пластині. Поверхневий ефект у провіднику, розміщеному в пазі електричної машини

3. Змінне електромагнітне поле у провідниковому середовищі

3.1 Рівняння Максвелла для провідникового середовища

У добре провідниковому середовищі з провідністю γ і магнітною проникністю μ_a струми провідності значно більші за струми зміщення, тому навіть для високих частот можна вважати:

$$\gamma \bar{E} \gg \omega \epsilon_a \bar{E}, \text{ або } \gamma \gg \omega \epsilon_a. \quad (34)$$

Звісно, це залежить від діелектричної проникності ϵ_a , провідності і частоти. Визначаємо граничну частоту, за якої струми провідності будуть

дорівнювати струмам зміщення для мідних проводів, для яких $\gamma = 5.8 \cdot 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$ і $\epsilon_a = 10\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{М}}$. Тоді з виразу (34) ця частота

дорівнює $f_{\text{гр}} = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_a} = \frac{5.8 \cdot 10^7}{2 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \approx 1.05 \cdot 10^{17}$ Гц, а найвища частота,

яка використовується у радіолокації досягає $3 \cdot 10^{11}$ Гц, тобто навіть для спектра радіочастот струми провідності у провідниках в мільйон разів більше струмів зміщення. Це дає нам підставу не враховувати струми зміщення, а мати справу тільки зі струмами провідності.

Пізніше побачимо, що електромагнітне поле входить у провідники з навколишнього діелектрика і поширюється у ньому. Це поле описується рівняннями Максвелла, які для гармонічного поля у провідному середовищі для комплексних амплітуд записуються так:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\vec{H}}_m &= \gamma \dot{\vec{E}}_m; \\ \text{rot } \dot{\vec{E}}_m &= -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_m. \end{aligned} \quad (35)$$

Для знаходження $\dot{\vec{E}}_m$ і $\dot{\vec{H}}_m$ візьмемо rot від першого рівняння і врахуємо друге рівняння:

$$\text{rot rot } \dot{\vec{H}}_m = \gamma \text{rot } \dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu_a \gamma \dot{\vec{H}}_m. \quad (36)$$

Розкривши $\text{rot rot } \dot{\vec{H}}_m = \text{grad div } \dot{\vec{H}}_m - \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m$ і врахувавши принцип неперервності магнітного потоку $\text{div } \dot{\vec{B}}_m = \mu_a \text{div } \dot{\vec{H}}_m = 0$, маємо рівняння

Гельмгольца для $\dot{\vec{H}}_m$:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m - j\omega\mu_a \gamma \dot{\vec{H}}_m = 0. \quad (37)$$

В залежності від системи координат, вигляд цього рівняння буде різним.

Далі розглянуті приклади розв'язання цього рівняння для різних провідних конструкцій електротехнічних пристроїв.

3.2 Поширення плоскої хвилі у провідному напівпросторі

Розглянемо плоску поверхню провідного напівпростору, на яку падає плоска гармонічна хвиля з діелектрику. Спрямуємо координатні осі так, щоб вектор \vec{H} співпадав з віссю Oy (рис. 3). Тоді, враховуючи нескінченність напівпростору вздовж осей Ox і Oy , маємо $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ і $\vec{H} = jH_y$, тобто напруженості електричного і магнітного полів змінюються вздовж осі Oz .

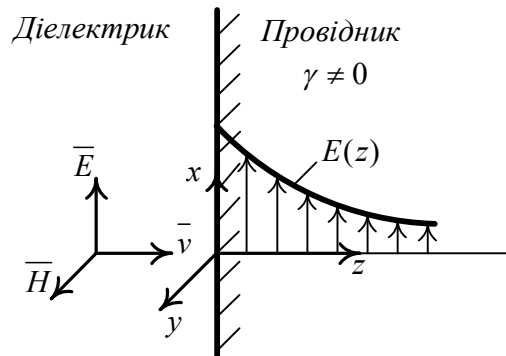


Рис. 3

Для гармонічного поля рівняння для комплексної амплітуди \dot{H}_m має вигляд (37):

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} - j\omega \gamma \mu_a \dot{H}_m = 0.$$

Аналогічне рівняння можна отримати для \dot{E}_m :

$$\frac{d^2 \dot{E}_m}{dz^2} - j\omega \gamma \mu_a \dot{E}_m = 0. \quad (38)$$

Це лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку, характеристичне рівняння яких:

$$p^2 - j\omega \gamma \mu_a = 0$$

дозволяє визначити корені

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{j\omega \gamma \mu_a} = \pm p, \quad p = \sqrt{j} \sqrt{\omega \gamma \mu_a} = (1+j)\alpha, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}}. \quad (39)$$

Розв'язок рівняння (38) має вигляд:

$$\dot{\bar{H}}_m = A_1 e^{-p_1 z} + A_2 e^{p_2 z} = A_1 e^{-pz} + A_2 e^{pz}, \quad (40)$$

де A_1 і A_2 – сталі інтегрування, що визначаються з граничних умов.

Для визначення $\dot{\bar{E}}_m$ використаємо закон повного струму (3)

$\text{rot } \dot{\bar{H}}_m = \gamma \dot{\bar{E}}_m$. В проєкціях на координатні осі маємо:

$$\text{rot } \dot{\bar{H}}_m = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{\bar{H}}_{my} & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \left(-\frac{\partial \dot{\bar{H}}_{my}}{\partial z} \right) = \gamma \bar{i} \dot{\bar{E}}_{mx},$$

або

$$\dot{\bar{E}}_{mx} = \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{d \dot{\bar{H}}_{my}}{dz} \right) = \frac{1}{\gamma} (p A_1 e^{-pz} - p A_2 e^{pz}). \quad (41)$$

З одержаних результатів видно, що вектор \bar{E} направлений вздовж осі $0x$, а вектор \bar{H} – вздовж осі $0y$, тобто зсув у просторі між вказаними векторами такий же, як і у плоскій хвилі, що падає з діелектрика.

Для визначення сталих інтегрування скористаємось умовами для електромагнітного поля для $z = \infty$ і $z = 0$. Оскільки провідник нескінченний по осі $0z$, то при $z = \infty$ поле має бути відсутнім, тобто

$\dot{H}_m \Big|_{z=\infty} = 0$ і $\dot{E}_m \Big|_{z=\infty} = 0$. І тоді $A_2 = 0$, а при $z = 0$ і $\dot{H}_m = \dot{H}_{m0}$ – задане

значення. Тоді:

$$A_1 = \dot{H}_{m0} \text{ і } \dot{H}_m = H_{m0} e^{-pz} \text{ й } \dot{E}_m = \frac{p}{\gamma} \dot{H}_{m0} e^{-pz}. \quad (42)$$

Пам'ятаючи, що $p = (1+j)\alpha = \sqrt{2}\alpha e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\omega\gamma\mu_a} e^{j\frac{\pi}{4}}$, отримаємо:

$\frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}}$. Переходячи до миттєвих значень $H(t, z)$ і $E(t, z)$, маємо:

$$H = H_{m0} e^{-\alpha z} \sin(\omega t + \psi_{i0} - \alpha z);$$

$$E = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} H_{m0} e^{-\alpha z} \sin\left(\omega t + \psi_{i0} - \alpha z + \frac{\pi}{4}\right). \quad (43)$$

Це характеристики хвилі, що біжить уздовж осі oz з фазовою швидкістю $v_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\alpha} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a\gamma}}$. За аналогією з довгою лінією, можемо

визначити хвильовий опір провідного на півпростору

$$\underline{Z}_C = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{(1+j)\alpha}{\gamma} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}}. \quad (44)$$

Тепер можна визначити частину хвилі, що падає з діелектрика на провідну поверхню, яка відбивається від неї $\dot{E}_{m\psi_1} = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_C}{\underline{Z} + \underline{Z}_C} \dot{E}_{m\phi_1}$, і яка проходить у металі

$$\dot{E}_{m\phi_2} = \frac{2\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_C} \dot{E}_{m\phi_1}. \quad (45)$$

де $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\varepsilon_{a1}}}$ - хвильовий опір діелектрика.

Отримані вирази (42) дозволяють стверджувати, що напруженості магнітного і електричного полів, які поширюються у провіднику, згасають

за експоненціальним законом. Коефіцієнт згасання $\alpha = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}$ залежить від фізичних властивостей провідника і від частоти (таку ж величину α має коефіцієнт фази β).

На відстані, яка дорівнює довжині хвилі λ , фаза змінюється на 2π .

Тож,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{v_\phi}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_a}}. \quad (46)$$

Варто зазначити, що на відстані λ амплітуди векторів поля зменшуються у $e^{\alpha\lambda} = e^{2\pi} \approx 536$ разів, тобто електромагнітна хвиля практично згасає на такій відстані. Для кількісної характеристики згасання хвилі вводять поняття *глибини проникнення* Δ – це відстань, на якій амплітуди E_m і H_m плоскої хвилі зменшуються у $e = 2.718$ разів.

Тож, $\alpha\Delta = 1$; $\Delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{\lambda}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_a}}.$ (47)

Чим більші частота, магнітна проникність і питома провідність провідника, тим на меншу глибину проникає електромагнітна хвиля. Якщо взяти надпровідник ($\gamma = \infty$), тоді $\Delta = 0$, тобто у надпровідник хвиля не проникає, вона вся відбивається. Надпровідник є дзеркалом для електромагнітного поля. У реальному провіднику для промислової частоти Δ вимірюється сантиметрами, а для дуже високих частот, наприклад радіочастот, десятими і навіть сотими долями міліметра. На рис. 4 показано зміну глибини проникнення для міді і алюмінію залежно від частоти.

Введення поняття глибина проникнення плоскої хвилі у провідник дозволяє визначити межу використання наведених вище формул для аналізу електромагнітного поля у циліндричних проводах. Якщо вважати, що між прямим і зворотним проводом відстань велика, тоді отримані

рішення можна використати, якщо діаметр проводу набагато більший від глибини проникнення.

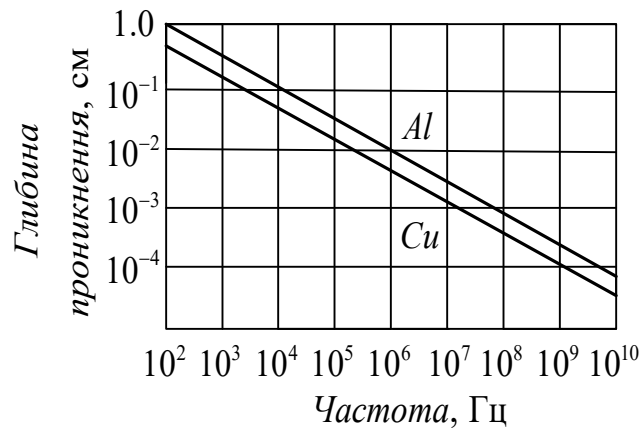


Рис. 4

Ця фізична властивість проникнення електромагнітного поля при високих частотах на незначну глибину від поверхні проводу зветься *поверхневим ефектом*, який не тільки шкодить проводам, зменшуючи їх ефективний переріз, але й може бути корисним. Він використовується для конструювання екранів, чи поверхневого загартування металевих виробів і в інших технологічних процесах.

Важливо зауважити, що енергії електричного і магнітного полів на одиницю об'єму провідника не однакові, як це має місце у діелектрику. Відношення W'_m до W'_e дорівнює відношенню густини струму провідності до густини струму зміщення. З урахуванням виразу (34) отримаємо:

$$\frac{W'_m}{W'_e} = \frac{\mu_a H_m^2}{\varepsilon_a E_m^2} = \frac{\mu_a}{\varepsilon_a |Z_C|^2} = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} = \frac{J_{пр}}{|J_{зм}|}. \quad (48)$$

Для міді при частоті 100 МГц це відношення дорівнює приблизно $2 \cdot 10^9$, що вказує на те, що основною компонентою електромагнітного поля у провіднику є магнітне поле.

3.3 Електричний поверхневий ефект у плоскій пластині

Визначимо розподіл напруженостей електричного і магнітного поля по перерізу плоского тонкого проводу нескінченної довжини з синусоїдним струмом I . (рис. 5). Нехай $h \gg 2a$, тоді $\dot{\vec{E}}$ і $\dot{\vec{H}}$ будуть залежати тільки від координати z і вони напрямлені взаємно перпендикулярно $\dot{\vec{E}} = \bar{i} \dot{E}_x$ й $\dot{\vec{H}} = \bar{j} \dot{H}_y$.

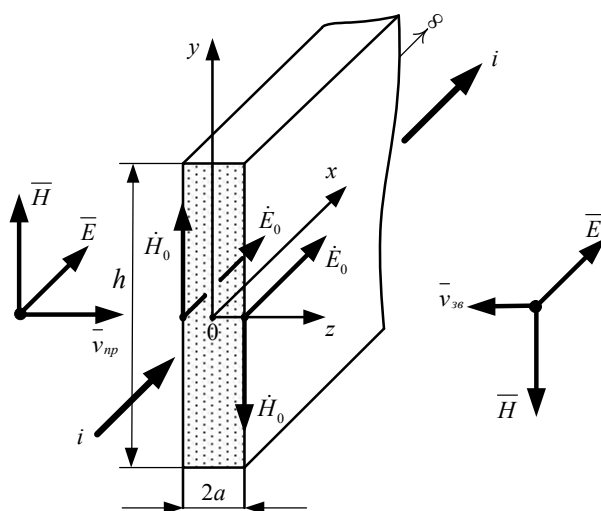


Рис. 5

Використаємо рішення (30) рівняння Геймгольца (28) для комплексної амплітуди \dot{H}_m : $\dot{H}_m = A_1 e^{-pz} + A_2 e^{pz}$, $p = \pm \sqrt{j\omega\gamma\mu_a}$.

Тут, перша складова – це напруженість магнітного поля прямої хвилі, яка рухається у бік зростання координати z , а друга складова комплексної амплітуди \dot{H}_m – це напруженість магнітного поля зворотної хвилі, яка падає на пластину праворуч і рухається у бік зменшення координати z . Сталі інтегрування визначаємо з граничних умов. На поверхні пластини з закону повного струму $\oint_{2h+2a} \dot{H}_m d\vec{l} = \dot{I}_m$, з урахуванням, що $a \approx 0$, маємо:

$$\dot{H}_{me} \Big|_{z=a} = -\frac{\dot{I}_m}{2h}; \quad \dot{H}_{me} \Big|_{z=-a} = \frac{\dot{I}_m}{2h}. \quad (49)$$

Тоді: 1) $z = a$ $A_1 e^{-pa} + A_2 e^{pa} = -\dot{H}_{me}$;

2) $z = -a$ $A_1 e^{pa} + A_2 e^{-pa} = \dot{H}_{me}$.

$$\text{Звідси отримаємо: } A_1 = -A_2 = \frac{\dot{H}_{me}}{2 \operatorname{sh} pa}. \quad (50)$$

Напруженість магнітного поля:

$$\dot{H}_m = -\dot{H}_{me} \frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{sh} pa} = -\frac{\dot{I}_m}{2h} \frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{sh} pa}. \quad (51)$$

Напруженість електричного поля згідно з виразом (31) дорівнює:

$$\dot{E}_m = -\frac{1}{\gamma} \frac{d \dot{H}_m}{dz} = \frac{p}{\gamma} \dot{H}_{me} \frac{\operatorname{ch} pz}{\operatorname{sh} pa} = \frac{\dot{I}}{2h} \underline{Z}_C \frac{\operatorname{ch} pz}{\operatorname{sh} pa} \quad (52)$$

де $\frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \underline{Z}_C$ – хвильовий опір пластини.

Густина електричного струму розподілена по перерізу пластини нерівномірно

$$\dot{J}_m = \gamma \dot{E}_m = \frac{\dot{I}_m}{2h} p \frac{\operatorname{ch} pz}{\operatorname{sh} pa}. \quad (53)$$

У центрі пластини $z = 0$ і $\dot{J}_m \Big|_{z=0} = \dot{J}_{m \min} = \frac{\dot{I}_m}{2h} p \frac{1}{\operatorname{sh} pa}$ – мінімальна

(де $\dot{H}_m \Big|_{z=a} = 0$), а на поверхні пластини $z = a$ – максимальна

$$\dot{J}_m \Big|_{z=a} = \dot{J}_{m\max} = \frac{\dot{I}_m}{2h} p \frac{1}{\text{th } pa} \quad (54)$$

напруженість дорівнює $\dot{H}_m \Big|_{z=a} = -\dot{H}_{m\dot{a}} \frac{\text{sh } pa}{\text{sh } pa} = -\frac{\dot{I}_m \text{ sh } pa}{2h \text{ sh } pa} = -\frac{\dot{I}_m}{2h}$.

Бачимо, що відношення між $\dot{J}_m(x)$ і \dot{J}_{m0} залежить від коефіцієнта згасання α і від товщини пластини $2a$. На рис. 6 показані графіки

розподілу модулів $\frac{|\dot{J}_m(x)|}{|\dot{J}_{m0}|}$ для різних значень $2\alpha a = 2\sqrt{\omega \gamma \mu_a} a$.

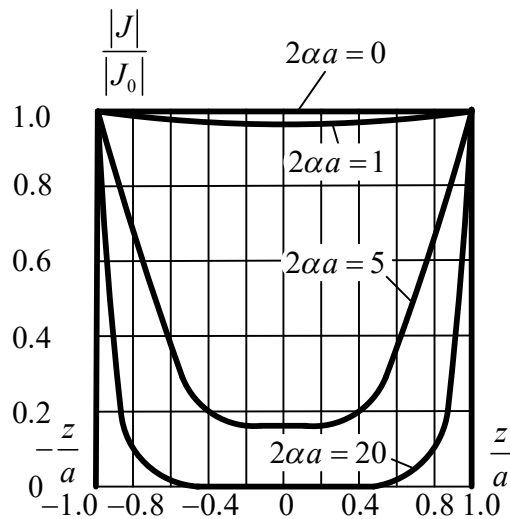


Рис. 6

З розгляду випливає, що чим більше значення $2\alpha a$ (чим більша, наприклад, частота), тим більша нерівномірність розподілення густини струму по перерізу провідника. Критерій $2\alpha a$ це є відношення товщини пластини $2a$ до глибини проникнення хвилі $\Delta = \frac{1}{\alpha}$, він характеризує згасання хвилі вздовж товщини пластини. При $2\alpha a \ll 1$ поверхневий ефект практично відсутній, таку пластину називають прозорою для

електромагнітного поля. Чим менша частота, тим більш товсті пластини будуть прозорими. При $2\alpha a \gg 1$ поверхневий ефект проявляється більш яскраво. Струм проходить тільки по тонкому шару поверхні пластини. У середній частині пластини струму практично немає. Таке “витіснення” струму до поверхні провідника еквівалентне зменшенню площі його перерізу, тобто опір провідника залежить від частоти електричного струму, на малих частотах (до 10 КГц) $R \approx \text{const}$, а для високих частот $R = f(\omega, \gamma, \mu_a)$.

3.4 Магнітний поверхневий ефект у плоскій пластині

В електричних машинах, трансформаторах і інших пристроях зі змінним магнітним полем магнітопроводи виконують з тонких ізольованих пластин для зменшення вихрових струмів. Але і у таких тонких пластинах вихрові струми призводять до нерівномірного розподілення магнітного поля по площі пластин. Проявляє себе так званий *магнітний поверхневий ефект* – це нерівномірне розподілення магнітного потоку у поперечному перерізі провідника, якщо вздовж нього направлений магнітний потік.

Природа електричного і магнітного поверхневих ефектів одна й та сама, а терміни “магнітний” і “електричний” лише інформують про що йдеться – магнітний потік чи струм. Якщо спрямувати магнітний потік Φ уздовж плоскої шини (рис. 7) (замість струму), розподіл полів може бути виражений тими ж самими рівняннями, що й у попередньому випадку (вирази (49) і (52)):

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} - j\omega \gamma \mu_a \dot{H}_m = 0; \quad \dot{E}_m = -\frac{1}{\gamma} \frac{d \dot{H}_m}{dz}. \quad (55)$$

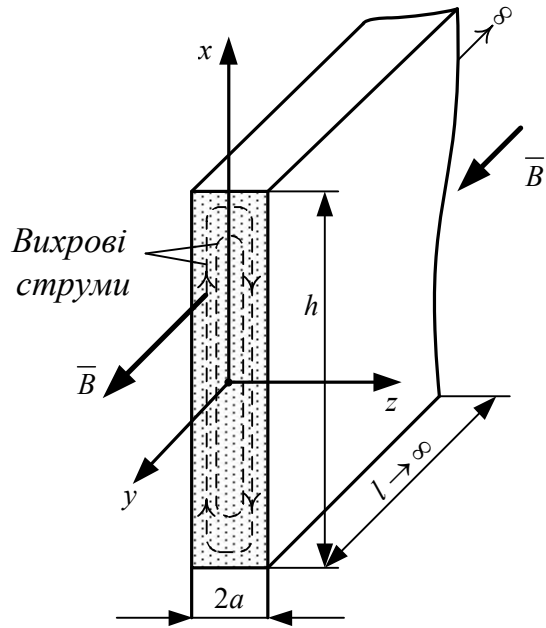


Рис. 7

Розв'язок першого рівняння відомий $\dot{H}_m = A_1 e^{-pz} + A_2 e^{pz}$. З граничних умов для $z = \pm a$, можемо визначити сталі інтегрування

$$\left(\dot{H}_m e \Big|_{z=a} = \dot{H}_m e \Big|_{z=-a} \right)$$

$$A_1 e^{-pa} + A_2 e^{pa} = A_1 e^{pa} + A_2 e^{-pa},$$

тобто $A_1 = A_2 = A$, тож напруженості магнітного і електричного поля дорівнюють:

$$\dot{H}_m = A(e^{-pa} + e^{pa}) = 2A \operatorname{ch} pz;$$

$$\dot{E}_m = -2A \frac{p}{\gamma} \operatorname{sh} pz. \quad (56)$$

Якщо відома магнітна індукція у центрі пластини $\dot{B}_m \Big|_{z=0} = \dot{B}_{m0}$, то

$$\dot{B}_m \Big|_{z=0} = \mu_a \dot{H}_m = 2A \mu_a \operatorname{ch} pz \cdot 0 = \dot{B}_{m0}, \text{ звідки } A = \frac{\dot{B}_{m0}}{2\mu_a}, \text{ і магнітна індукція}$$

$$\dot{B}_m = \dot{B}_{m0} \operatorname{ch} p z . \quad (57)$$

Густина вихрових струмів дорівнює:

$$\dot{J}_m = \gamma \dot{E}_m = -\frac{B_0}{\mu \dot{a}} p \operatorname{sh} p z . \quad (58)$$

Формули (51) і (53) дозволяють представити графіки зміни модулів B і J уздовж осі $0z$ (рис. 8). Через розмагнічуючий ефект вихрових струмів магнітна індукція всередині пластини мінімальна, а на поверхні її досягає максимального значення. Густини вихрових струмів на обох краях пластини однакові і протилежні за напрямом.

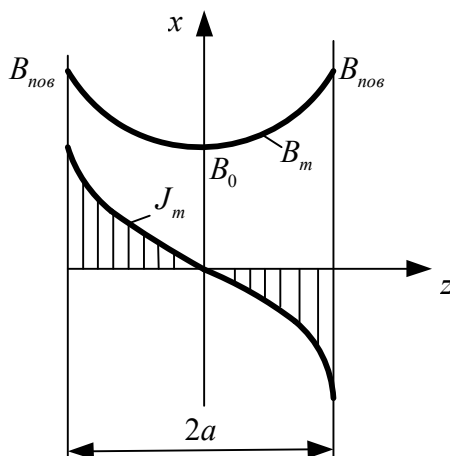


Рис. 8

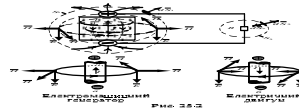
На практиці частіше усього використовують середнє значення магнітної індукції B_{cp} , бо якраз B_{cp} входить у формули для визначення електрорушійної сили, яка індукується у розміщеній на магнітопроводі обмотці

$$\vec{E}_\varphi \uparrow, \vec{H}_\varphi \leftarrow, \vec{H}_\varphi \rightarrow, \vec{E}_\varphi \uparrow \quad (59)$$

Рис. 2.5.1

Тоді магнітна індукція у пластині і густина вихрових струмів дорівнює:

$$\dot{B}_m = p a \dot{B}_{mcp} \frac{\operatorname{ch} p z}{\operatorname{sh} p a}, \quad (60)$$



$$(61)$$

Ці формули дозволяють розрахувати теплові втрати на вихрові струми у тонких пластинах.

3.5 Поверхневий ефект у провіднику, розміщеному у пазі електричної машини

Нехай вузький провідник з синусоїдним струмом, що проходить через нього, розміщений у відкритому пазі (рис. 9, а) електричної машини. Вважаючи протяжність машини вздовж осі $0x$ значно більшою за розміри паза, будемо розглядати електромагнітне поле як плоскопаралельне. Якщо прийняти, що $\mu_{стали} = \infty$, то лінії напруженості магнітного поля \bar{H} будуть перпендикулярними до сторін паза і матимуть вигляд, показаний на рис. 9, б.

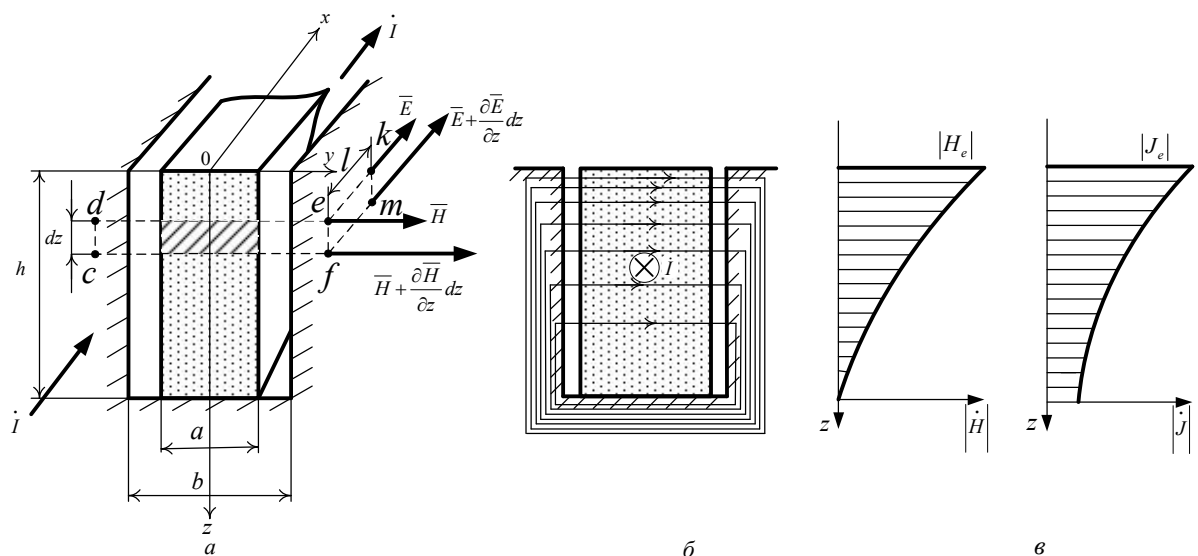


Рис. 9

При цьому значення \bar{H} уздовж шляху у сталі дорівнюватиме нулю. Виберемо координатні осі таким чином, щоб вісь $0x$ співпадала з

напрямок струму. Тоді комплексні величини напруженостей електричного і магнітного полів запишуться так: $\dot{E} = \bar{i} \dot{E}_x$ і $\dot{H} = \bar{j} \dot{H}_y$. Виділимо стрічку провідника товщиною dz і запишемо закон повного струму для контуру $cdefc$ у комплексній формі для діючих значень \dot{H} і \dot{E} :

$$\oint_{cdefc} \dot{H} d\bar{l} = \gamma \dot{E} a dz;$$

$$\dot{H} b - \left(\dot{H} + \frac{\partial \dot{H}}{\partial z} dz \right) b = \gamma \dot{E} a dz.$$

Звідси отримаємо:

$$-\frac{d\dot{H}}{dz} = \frac{a}{b} \gamma \dot{E}. \quad (62)$$

Якщо записати закон електромагнітної індукції для контуру $fmke$

(довжина l) $\oint_{fmke} \dot{E} d\bar{l} = -j\omega \dot{\Phi}$, то отримаємо вираз:

$$-\dot{E} l + \left(\dot{E} + \frac{\partial \dot{E}}{\partial z} dz \right) l = -j\omega \gamma \mu_a \dot{H} l dz;$$

$$\frac{d\dot{E}}{dz} = -j\omega \mu_a \dot{H}. \quad (63)$$

З рівнянь (62) і (63) випливає:

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = \frac{a}{b} j\omega \gamma \mu_a \dot{H}; \quad \frac{d^2 \dot{E}}{dz^2} = \frac{a}{b} j\omega \gamma \mu_a \dot{E}. \quad (64)$$

Розв'язок будь-якого з цих рівнянь має вигляд:

$$\dot{H} = A_1 e^{-pz} + A_2 e^{pz}, \quad (65)$$

де $p = \frac{a}{b} j\omega \gamma \mu_a = j\omega \gamma_{роз} \mu_a$ – корінь характеристичного рівняння;

$\gamma_{роз} = \frac{a}{b} \gamma$ – розрахункова провідність паза.

Сталі інтегрування A_1 і A_2 визначаємо з граничних умов: при $z = 0$

$\dot{H}(0) = \frac{\dot{I}}{b}$; за законом повного струму, враховуючи, що у сталі $\dot{H} = 0$ при

$z = h$ $\dot{H}(h) = 0$.

З виразу (65) знаходимо значення сталих інтегрування:

$$A_1 = \frac{\dot{I} e^{ph}}{2b \operatorname{sh} ph}; \quad A_2 = \frac{\dot{I} e^{-ph}}{2b \operatorname{sh} ph}. \quad (66)$$

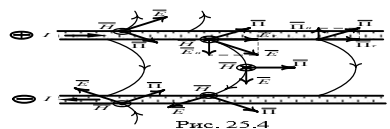
Остаточно напруженість магнітного поля знаходимо як

$$\dot{H} = \frac{\dot{I}}{b} \frac{\operatorname{sh} p(h-z)}{\operatorname{sh} ph}. \quad (67)$$

Напруженість електричного поля за формулою (62):

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma a} \frac{b}{dz} \dot{H} = \frac{\dot{H} p \operatorname{ch} p(h-z)}{\gamma a \operatorname{sh} ph}, \quad (68)$$

а густина струму у шині дорівнює:



$$\dot{J} = \gamma \dot{E} \quad (69)$$

Ці вирази дозволяють побудувати графіки розподілу \dot{H} і \dot{J} уздовж висоти провідника (рис. 9, в). Видно, що струм витискається до поверхні паза і чим вища його частота, тим це помітніше. Це явище призводить до різкого збільшення опору провідника і використовується у електричних асинхронних двигунах для автоматичного зменшення струму під час запуску.

Оскільки на нерухомому роторі частота струму у обмотках дорівнює частоті мережі, у обмотці ротора має місце яскраво виражений поверхневий ефект. Зі збільшенням швидкості ротора частота струму у ньому зменшується і нерівномірність розподілу струму у перерізі провідників зменшується, тобто зменшується опір провідника і збільшується електромагнітний момент двигуна. Коли ротор досягне номінальної швидкості, струм обмотки розподіляється рівномірно.

Якщо у паз покласти, наприклад, три послідовно з'єднаних проводи, то струм буде розподілятися по перерізу більш рівномірно, ніж для одного проводу (рис. 10), і матеріал обмотки буде використовуватись більш ефективно.

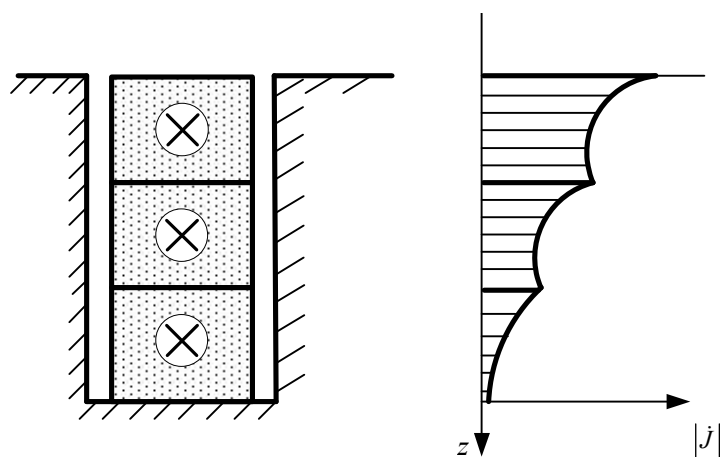


Рис. 10

РОЗДІЛ 6 Енергія електромагнітного поля

ТЕМА 6.1 Теорема Умова-Пойнтінга, вектор Пойнтінга

Лекція №15 ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Вектор Пойнтінга, потік електромагнітної енергії. Теорема Умова-Пойнтінга. Приклади використання теореми. Потік енергії у коаксіальному кабелі

1 Теорема Умова – Пойнтінга

Система рівнянь електромагнітного поля дає можливість математично записати закон збереження енергії в електромагнітному полі за допомогою теореми Умова – Пойнтінга.

Доведемо цю теорему для однорідного ізотропного середовища, використовуючи перше та друге рівняння Максвелла спочатку без урахування струму перенесення

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}_{\text{пр}} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = \mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}. \quad (2)$$

Скалярно помножимо (1) на \bar{E} , а (2) на \bar{H} і візьмемо різницю цих добутків:

$$\bar{E} \operatorname{rot} \bar{H} - \bar{H} \operatorname{rot} \bar{E} = \bar{J}_{\text{пр}} \bar{E} + \varepsilon_a \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu_a \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}. \quad (3)$$

З векторного аналізу відомо

$$\bar{E} \operatorname{rot} \bar{H} - \bar{H} \operatorname{rot} \bar{E} = -\operatorname{div} [\bar{E}, \bar{H}]. \quad (4)$$

Де права частина дорівнює дивергенції векторного добутку \bar{E} та \bar{H} зі знаком мінус. Розкриваємо кожен складову правої частини рівняння (3).

При наявності лише струму провідності маємо вираз виду:

$$\bar{J}_{\text{пр}} \bar{E} = \bar{J}_{\text{пр}} (\bar{E}_{\text{рез}} - \bar{E}_{\text{стор}}) = \bar{J}_{\text{пр}} \left(\frac{\bar{J}_{\text{пр}}}{\gamma} - \bar{E}_{\text{стор}} \right) = \frac{\bar{J}_{\text{пр}}^2}{\gamma} - \bar{J}_{\text{пр}} \bar{E}_{\text{стор}}, \quad (5)$$

де $\bar{E}_{\text{рез}}$ – результуюча напруженість поля, яка складається з напруженості поля кулонівських сил (поля взаємодії зарядів \bar{E} та поля сторонніх сил – $\bar{E}_{\text{стор}}$). То ж перша складова рівняння (5) визначає густину теплової енергії, що виділяється струмом провідності за одиницю часу – $\frac{J^2}{\gamma}$, а друга складова визначає питому потужність джерел енергії $\bar{J} \bar{E}_{\text{стор}}$.

Другий та третій доданки правої частини (3) дорівнюють:

$$\epsilon_a \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu_a \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a \bar{E}^2}{2} + \frac{\mu_a \bar{H}^2}{2} \right), \quad (6)$$

що є швидкістю зміни об'ємної густини енергії електричного та магнітного полів.

Враховуючи (4) та (5) одержимо:

$$\bar{J}_{\text{пр}} \bar{E}_{\text{стор}} = \frac{J_{\text{пр}}^2}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a \bar{E}^2}{2} + \frac{\mu_a \bar{H}^2}{2} \right) + \text{div} [\bar{E}, \bar{H}]. \quad (7)$$

Це є математичним записом теореми Умова – Пойнтінга у диференціальній формі, яка свідчить, що у будь-якій точці джерела його енергія за одиницю часу витрачається на нагрівання провідника, на зміну енергії електромагнітного поля та на передачу енергії у вигляді розходження (дивергенції) додатного вектору Пойнтінга $\bar{\Pi} = [\bar{E}, \bar{H}]$, який дорівнює векторному добутку напруженості електричного та магнітного полів.

Практичне значення має застосування цієї теореми до деякого об'єму V , у якому є джерела енергії, провідники зі струмами провідності та вільні заряди, що рухаються зі швидкістю \bar{v} , створюючи струми перенесення.

Додавши у правій частині рівняння (7) доданок, який враховує струми перенесення $\bar{J}_{\text{пер}} = \rho \bar{v} \bar{E}$ та замінивши $\bar{J}_{\text{пр}}$ на $\bar{J}_{\text{пр}} + \bar{J}_{\text{пер}}$ і проінтегрувавши рівняння (7) за об'ємом V , одержимо:

$$\int_V \bar{J}_{\text{пр}} \bar{E}_{\text{стор}} dV = \int_V \frac{J_{\text{пр}}^2}{\gamma} dV + \int_V \bar{J}_{\text{пер}} \bar{E} dV + \dots \quad (8)$$

$$\dots + \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) + \int_V \text{div} [\bar{E}, \bar{H}] dV$$

Згідно з теоремою Остроградського – Гауса $\int_V \text{div} [\bar{E}, \bar{H}] dv = \oint_S [\bar{E}, \bar{H}] d\bar{S}$, де S – поверхня, що обмежує об'єм V .

Винесемо $\frac{\partial}{\partial t}$ за знак інтеграла і одержимо рівняння теорема Умова – Пойнтінга в інтегральній формі:

$$P_{\text{дж}} = \int_V \frac{J_{\text{пр}}^2}{\gamma} dV + \int_S \bar{J}_{\text{пер}} \bar{E} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV + \oint_S \bar{\Pi} d\bar{S}, \quad (9)$$

де $P_{\text{дж}} = \int_V \bar{J}_{\text{пр}} \bar{E}_{\text{стор}} dV$ – енергія, яку витрачають джерела енергії за

1 секунду, тобто потужність джерел енергії; $\int_V \frac{J_{\text{пр}}^2}{\gamma} dV$ – джоулеві втрати у

провідниках, що знаходяться у об'ємі V ; $\int_S \bar{J}_{\text{пер}} \bar{E} dV$ – потужність, яка

витрачається у об'ємі V на рух вільних зарядів; $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$ –

швидкість зміни енергії електричного та магнітного полів у об'ємі V ;

$\oint_S \bar{\Pi} d\bar{S}$ – потік вектора Пойнтінга крізь поверхню, що обмежує об'єм V .

Останній доданок у (9) дорівнює потужності потоку енергії, що проходить крізь поверхню S у вигляді потоку вектора Пойнтінга

$\vec{P} = [\vec{E}, \vec{H}]$. Тобто вектор Пойнтінга дорівнює векторному добутку векторів напруженостей електричного і магнітного полів. Він у кожній точці простору напрямлений у бік передавання енергії і чисельно дорівнює енергії, що передається за одиницю часу через одиничну площу, розташовану перпендикулярно до напрямку передавання енергії.

Таким чином, енергія, яку, виробляють джерела у деякому об'ємі, витрачається на нагрівання провідників у цьому об'ємі, на рух вільних зарядів, на зміну енергії в електричному та магнітному полі і, крім цього, частина енергії джерел передається за межі цього об'єму через поверхню S , що його обмежує, у навколишній простір.

Теорема Умова – Пойнтінга підтверджує закон збереження енергії і дає можливість визначити шляхи передавання та розповсюдження електромагнітної енергії у різних електротехнічних пристроях.

ТЕМА 6.2 Передавання енергії в електромагнітному полі

Лекція №16 ПЕРЕДАВАННЯ ЕНЕРГІЇ В ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ

(продовження 15 лекції)

Передавання енергії від генератора до споживача. Потік енергії у провіднику зі струмом. Передавання енергії уздовж проводів. Передавання енергії у змінному полі трансформатора. Потік енергії у конденсаторі й індуктивній котушці

2 Передавання енергії у електромагнітному полі

Теорема Умова-Пойнтінга дозволяє дослідити передавання енергії електромагнітним полем у будь-якому енергетичному і електротехнічному приладі. Основним інструментом при такому дослідженні є вектор Пойнтінга $\vec{P} = [\vec{E}, \vec{H}]$, що дорівнює векторному добутку векторів напруженості електричного і магнітного полів. Напрямок вектору \vec{H}

визначається за правилом правого гвинта, знаючи напрямки векторів \vec{E} і \vec{H} (рис. 1).

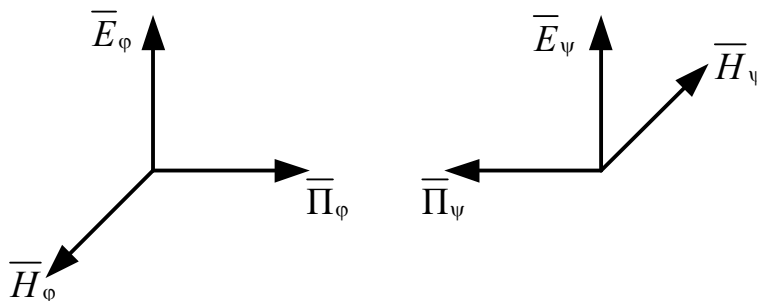


Рис. 1

Так, для прямої хвилі вектор $\vec{\Pi}$ направлений праворуч (співпадає з напрямком швидкості), а для зворотної хвилі – ліворуч. Вектор Пойнтінга визначає потужність потоку електромагнітної енергії, що проходить крізь одиничну поверхню, яка розташована перпендикулярно до напрямку потоку енергії. Його використання дозволяє з'ясувати одне з фундаментальних положень електродинаміки – енергія, яка зосереджена у електромагнітному полі передається не електричним струмом по провідниках, а вздовж цих проводів електромагнітним полем, розподіленим в оточуючому провідник діелектрику.

Розглянемо деякі приклади, які підтверджують цей висновок.

2.1. Передавання енергії від генератора до споживача

Розглянемо джерело постійного струму, яке живить споживач R (рис. 2).

Тоді $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, вільних зарядів поза проводами немає ($\rho = 0$), і теорема

Умова-Пойнтінга матиме вигляд:

$$P_{\text{дж}} = \int_V \frac{J_{\text{пр}}^2}{\gamma} dV + \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S}. \quad (10)$$

Для поверхні S_1 , якою охопимо джерело, знехтуючи внутрішнім опором ($\gamma = \infty$), маємо:

$$P_{\text{дж}} = \oint_S \bar{\Pi} d\bar{S}, \quad (11)$$

тобто, потужність генератора дорівнюватиме потоку енергії, яка передається у оточуючий простір у вигляді потоку вектора Пойнтінга за 1 секунду.

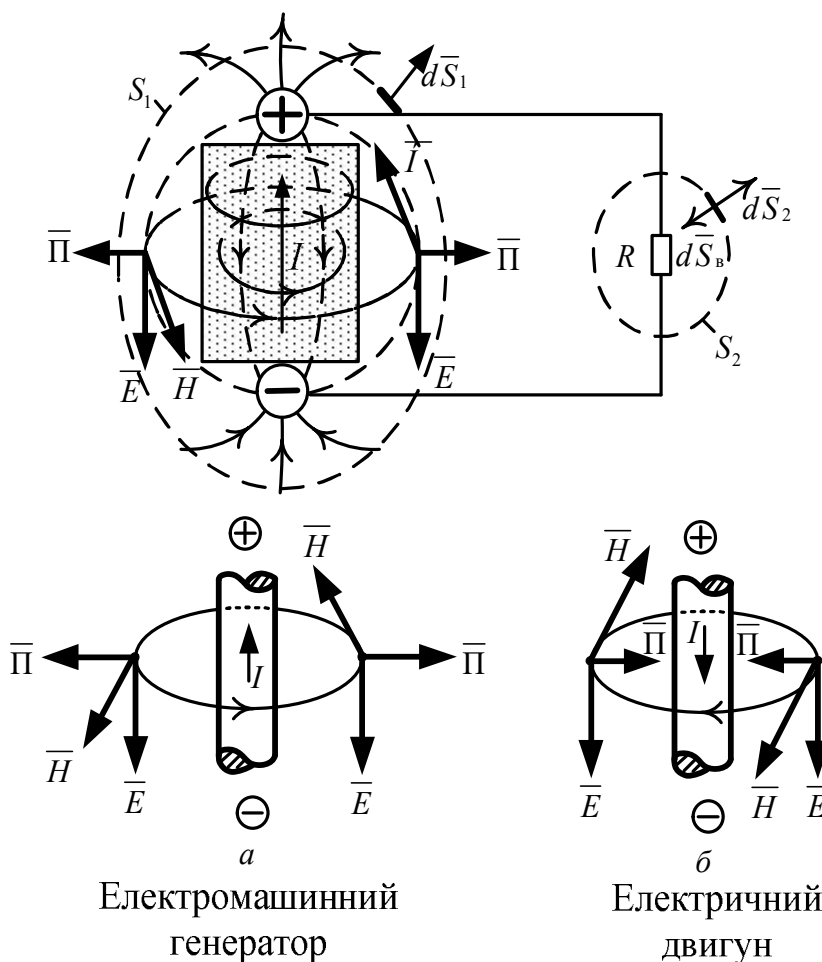


Рис. 2

Визначимо напрямок вектора $\bar{\Pi}$, у декількох точках на поверхні S_1 , попередньо представивши лінії напруженостей електричного \bar{E} і магнітного \bar{H} полів. Лінії \bar{E} направлені від додатного до від'ємного полюса генератора, а лінії \bar{H} охоплюють струм, який проходить від

від'ємного до додатного полюса стороннім полем. Тож, за межами генератора вектор Пойнтінга $\bar{\Pi} = [\bar{E}, \bar{H}]$, напрямок якого визначаємо за правилом правого гвинта, направлений у напрямку зовнішньої нормалі до S_1 від генератора у електромагнітне поле, яке існує у оточуючому просторі (рис. 2, а).

Якщо охопити споживач ($\gamma_{\text{сп}} \neq 0$) поверхнею S_2 , то для неї теорема Умова-Пойнтінга прийме вигляд:

$$0 = \int_V \frac{J_{\text{пр}}^2}{\gamma} dV + \oint_{S_2} \bar{\Pi} d\bar{S}, \quad (12)$$

або:

$$-\oint_{S_2} \bar{\Pi} d\bar{S} = \int_V \frac{J_{\text{пр}}^2}{\gamma} dV.$$

Якщо взяти $d\bar{S}_B = -d\bar{S}$ направлений всередину об'єму, тоді:

$$\oint_{S_2} \bar{\Pi} d\bar{S}_B = \int_V \frac{J_{\text{пр}}^2}{\gamma_{\text{сп}}} dV. \quad (13)$$

Тобто, енергію, яку привносить поле через поверхню S_2 до споживача, дорівнює тепловим втратам у ньому. Якщо ж споживачем є електричний двигун, то крім нагрівання проводів обмотки двигуна енергія поля перетворюється у механічну енергію (рис. 2, б).

Важливо зазначити, що процес передавання енергії від генератора до двигуна змінного струму буде таким же, як і для постійного струму, оскільки одночасна зміна напрямків векторів \bar{E} і \bar{H} , напрям вектору Пойнтінга не змінює.

2.2 Потік енергії у провіднику зі струмом

Визначимо потік вектору Пойнтінга через бокову поверхню проводу, довжиною l і перерізом S (рис. 3) зі струмом I .

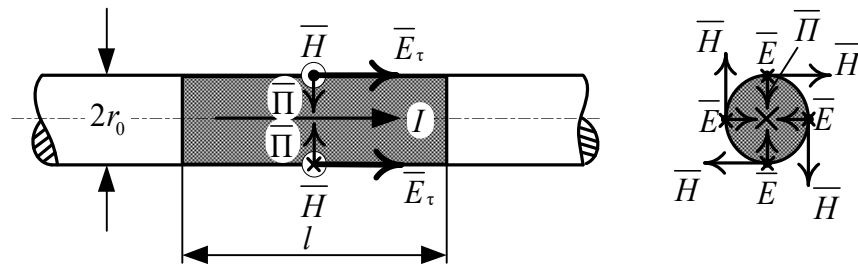


Рис. 3

Цей струм, протікаючи під дією поздовжньої напруженості поля $\bar{E}_\tau = \frac{\bar{J}}{\gamma}$, створює у провіднику і поза ним магнітне поле, напруженість \bar{H} якого напрямлена у бік дотичної на поверхні проводу. За законом повного струму $H = \frac{I}{2\pi r_0}$, а вектор Пойнтінга $\bar{\Pi} = \bar{E} \cdot \bar{H} \cdot \sin 90^\circ = \frac{J}{\gamma} \frac{I}{2\pi r_0} = \frac{I^2}{S\gamma \cdot 2\pi r_0}$ направлений радіально до центра проводу.

Потік вектору $\bar{\Pi}$ через бокову поверхню проводу дорівнює:

$$\oint_{S_{\text{бок}}} \bar{\Pi} d\bar{S} = \frac{I^2}{S\gamma \cdot 2\pi r_0} 2\pi r_0 l_0 = I^2 \frac{l}{\gamma S} = I^2 R,$$

де $R = l / \gamma S$ – електричний опір проводу.

Таким чином, енергія, яка витрачається на нагрівання провідника, дорівнює енергії, яка входить у провідник з зовні (з діелектрику) нормально до осі проводу. Всередині проводу потік енергії відсутній. Реально, самотній провідник зі струмом не існує, потрібно зважити на наявність зворотного проводу. Тоді, враховуючи викривлення ліній напруженості електричного поля, обумовленого тангенціальною компонентою \bar{E}_τ (рис.4), можемо визначити напрямки вектору $\bar{\Pi}$ на поверхнях проводів і у просторі між ними.

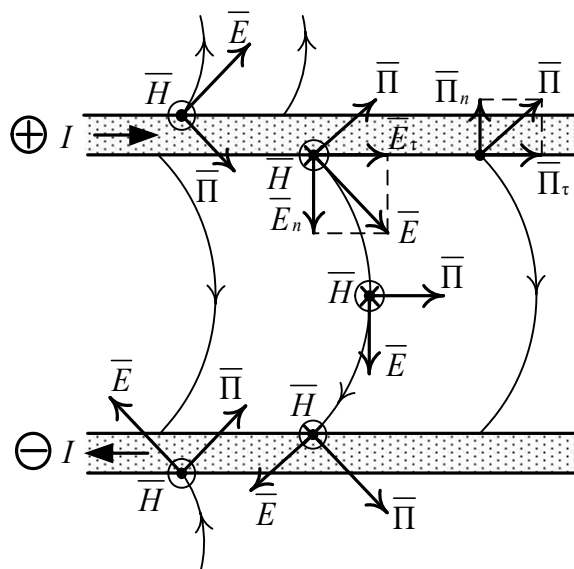


Рис. 4

Як бачимо вектор \bar{P} напрямлений під певним кутом до поверхні проводу. Якщо розкласти вектор \bar{P} на нормальну $\bar{P}_n = \bar{E}_\tau n$ і тангенціальну $\bar{P}_\tau = \bar{E}_n n$ компоненти, то виходить, що якраз нормальна компонента \bar{P}_n визначає енергію, яка входить у проводи з електромагнітного поля, а \bar{P}_τ – визначає ту частину енергії, яка передається вздовж проводів. Якщо звернутися до розділу 23, то там доведено, що реально $\bar{E}_n \gg \bar{E}_\tau$, тож $\bar{P}_\tau \gg \bar{P}_n$, тобто енергія, яка входить у проводи набагато менша тієї, що передається вздовж проводів від генератора до споживача. Графічне зображення напрямків потоків енергії біля генератора, проводів і споживача наведено на рис. 5.

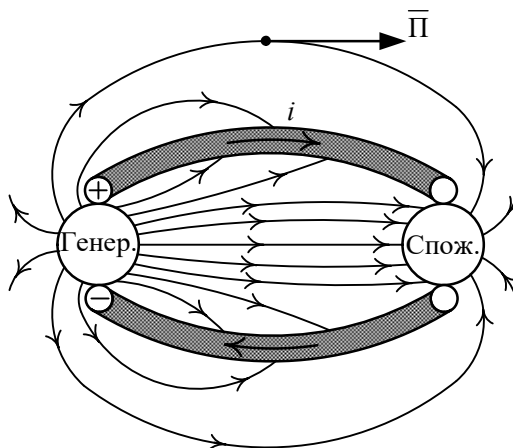


Рис. 5

Це є лінії вектору Пойнтінга, більша густина яких між проводами підтверджує тезу про передачу електричної енергії переважно по діелектрику між ними.

2.3 Передавання енергії уздовж проводів

Визначимо потік енергії між двома плоскими нескінченними паралельними надпровідними проводами, по яким проходить струм I під дією напруги U від генератора до споживача (рис. 6).

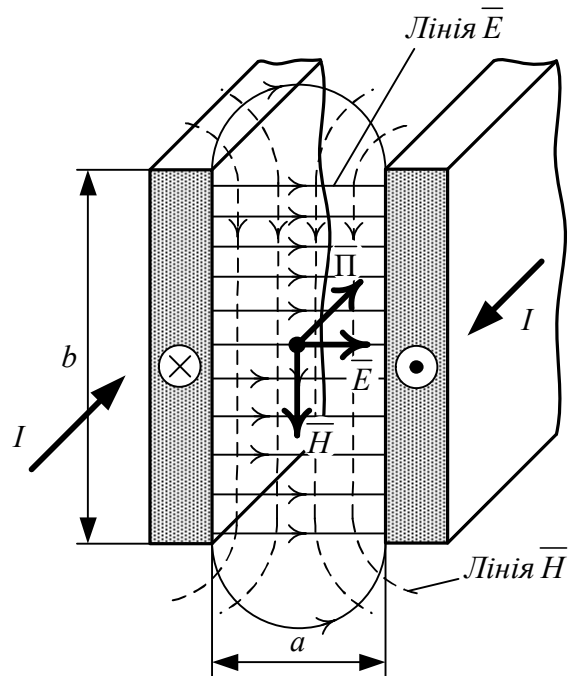


Рис. 6

Тоді, нехтуючи крайовим ефектом, можна визначити напруженість електричного поля між ними $\vec{E} = \vec{E}_n = \frac{U}{d}$, а напруженість магнітного поля

– за законом повного струму ,

Тож:
$$H = \frac{I}{l},$$

де l – замкнений шлях навколо одного з проводів (тут враховано, що поле поза проводами відсутнє). Тоді вектор Пойнтінга буде напрямлений уздовж проводів. У кожній точці площини між проводами він однаковий і дорівнює

$$\Pi = EH = \frac{U}{ab}.$$

Потік цього вектору через поверхню S

$$\int_S \bar{\Pi} d\bar{S} = \Pi ab = UI$$

дорівнює потужності, яка передається генератором уздовж проводів. Якщо врахувати опори проводів, тоді з'явиться тангенціальна складова \bar{E}_τ і нормальна компонента $\bar{\Pi}_n$, яка свідчитиме про втрату на шляху від генератора до споживача частини енергії на нагрівання проводів і тому напруга буде зменшуватись за постійної величини струму.

2.4 Потік енергії у коаксіальному кабелі

Нехай внутрішня жила кабелю живиться від позитивного полюса генератора, а оболонка підключена до його негативного полюсу. Тоді за вказаної полярності електродів і напрямку електричного струму можемо визначити напрямки напруженостей електричного і магнітного полів. Якщо вважати, що $\bar{E}_\tau = 0$, то $\bar{E} = \bar{E}_n$ напрямлений по радіусу від центра до оболонки, а вектор \bar{H} напрямлений перпендикулярно до радіусу (рис. 7).

Тоді, нехтуючи компонентою \bar{E}_τ , отримуємо, що вектор $\bar{E} \times \bar{H}$ у будь-якій точці ізоляції кабелю напрямлений уздовж нього. Енергія, яка буде передаватися через вузьку смужку dr за одну секунду дорівнює $dP = \Pi dS = \Pi \cdot 2\pi r dr$.

Якщо підставити у цю формулу $E = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$ і $H = \frac{I}{2\pi r}$, отримуємо

вираз для вектору Пойнтінга на відстані r від осі кабелю:

$$\Pi = \frac{U}{2\pi r^2 \ln \frac{R_2}{R_1}},$$

і потужність:

$$dP = \Pi dS = \Pi \cdot 2\pi r dr,$$

$$dP = \frac{UI}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{dr}{r}.$$

Проінтегрувавши \int від R_1 до R_2 розрахуємо енергію, що

передається по кабелю за 1 секунду: $P = \int_{R_1}^{R_2} \frac{UI}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{dr}{r} = UI,$

Вона дорівнює потужності, тобто енергії за 1 секунду, яку передає генератор.

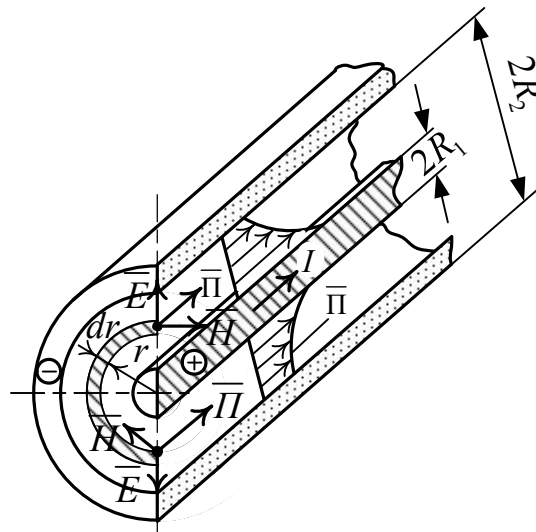


Рис. 7

2.5 Потік енергії у конденсаторі та індуктивній котушці

Вектор Пойнтінга дозволяє проаналізувати енергетичні процеси під час зарядження і розрядження конденсатора й котушки.

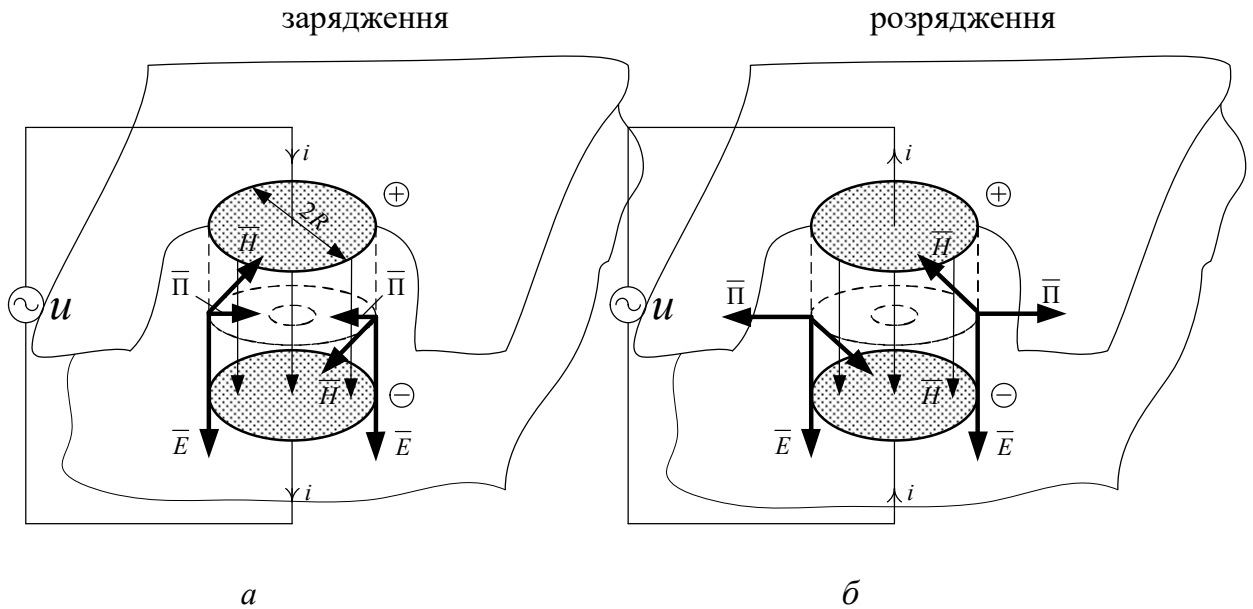


Рис. 8

У конденсаторі з плоскими нескінченними за розмірами електродами (рис. 8) виділимо круглі частини радіусом R . У цьому виділеному конденсаторі можна знехтувати крайовими спотвореннями поля і вважати поле між пластинами рівномірним. Напруженості цього електричного і магнітного полів будуть дорівнювати: $E = \frac{u}{d}$; $H = \frac{i}{2\pi R}$, де u , i – миттєві значення напруги і струму.

Вектор Пойнтінга на боковій поверхні циліндра напрямлений до центру конденсатора і дорівнює: $\Pi = EH = \frac{ui}{2\pi R d}$.

Якщо помножити $\bar{\Pi}$ на бокову поверхню циліндра $2\pi R d$, тоді вся енергія, яка проходить у діелектрик між пластинами за одну секунду, дорівнює потужності, котру віддає конденсатору генератор при зростанні

напруги (рис. 8, а). Тож, під час зарядження конденсатора (рис. 8, а) потік енергії входить у нього (лінії вектору $\bar{\Pi}$ співпадають з лініями однакового потенціалу (рис. 9)), а під час розрядження – енергія виходить з електричного поля і уздовж провідів повертається генератору (рис. 8, б). Лінії вектору $\bar{\Pi}$ у останньому випадку змінюють свій напрямок, що якраз і свідчить про розрядження конденсатора.

$$\Pi \cdot 2\pi R d = u i = p.$$

зарядження

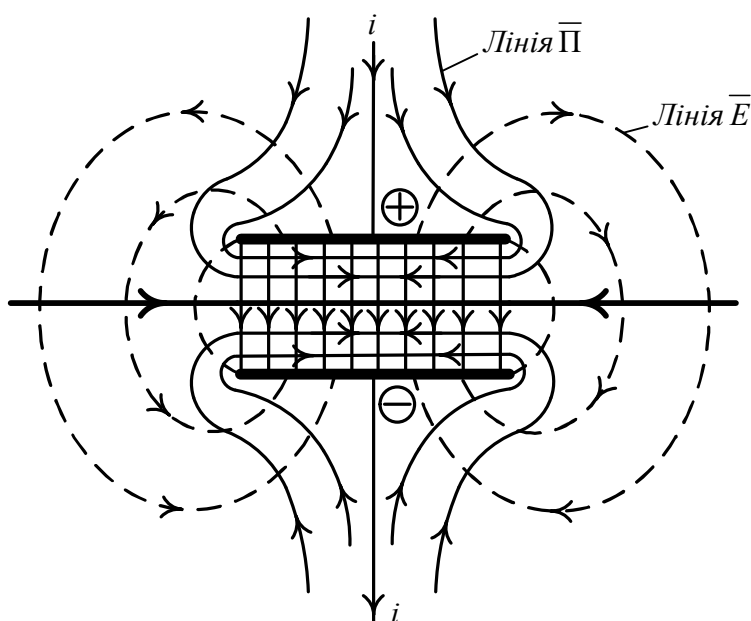


Рис. 9

Енергія, що запасається у електричному полі конденсатора при досягненні $u = U$, дорівнює:

$$W_e = \int_0^t u i dt = \int_0^U u C \frac{du}{dt} dt = \int_0^U u C du = \frac{CU^2}{2},$$

де C – ємність конденсатора, що співпадає з відомою формулою.

У колі синусоїдного струму вектор $\bar{\Pi}$ змінюється з подвійною частотою, приймаючи однакові позитивні і негативні значення двічі за період.

Для індуктивної котушки, яка живиться від генератора змінного струму під час його зростання, вектор $\vec{\Pi}$ всередині котушки напрямлений до її центру, а поза нею – у навколишній простір. Це можна побачити на рис. 10, де лінії напруженості магнітного поля $\vec{\Pi}$ (індуктивні лінії) охоплюють котушку, а лінії \vec{E} є дотичними до кіл з центрами на осі котушки, вони напрямлені протилежно до струму у котушці (відповідно до закону електромагнітної індукції).

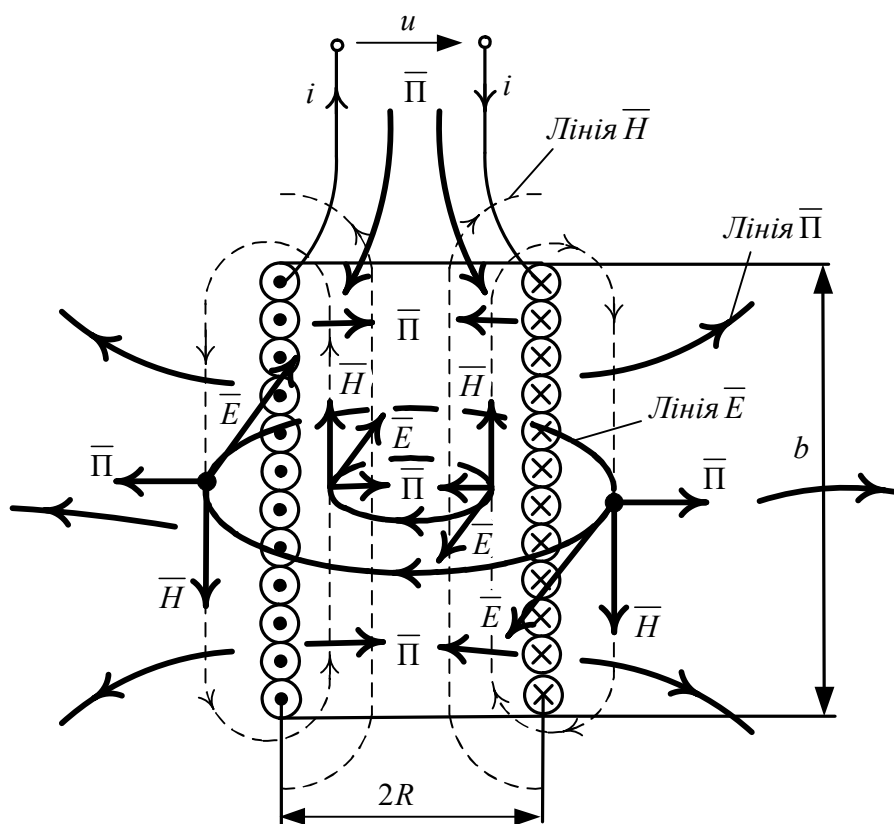


Рис. 10

Лінії вектору $\vec{\Pi}$ (жирні лінії) показують напрям передавання енергії.

Якщо розглядають довгу котушку, тоді $H = \frac{iw}{b}$, а $E = \frac{u}{w \cdot 2\pi R}$. Вектор

Пойнтінга всередині котушки на поверхні радіуса R дорівнює:

$$\Pi = EH = \frac{iw}{2\pi Rb} = iw = p,$$

потужності, котру передає генератор котушці, яка накопичує енергію переважно всередині

$$W_M = \int_0^t u i dt = \int_0^I L \frac{di}{dt} i dt = \int_0^I L i di = \frac{LI^2}{2},$$

де L – індуктивність котушки.

2.6 Передавання енергії у змінному полі трансформатора

Спочатку розглянемо передавання енергії у трансформатор, коли два проводи проходять крізь його кришку, а потім розглянемо процес передавання енергії від первинної до вторинної обмотки у самому трансформаторі.

З загального потоку енергії $\bar{\Pi}_0$, яка передається вздовж проводів, частина енергії проходить у трансформатор – $\bar{\Pi}_\phi$, а частина відбивається $\bar{\Pi}_\psi$ (рис. 11).

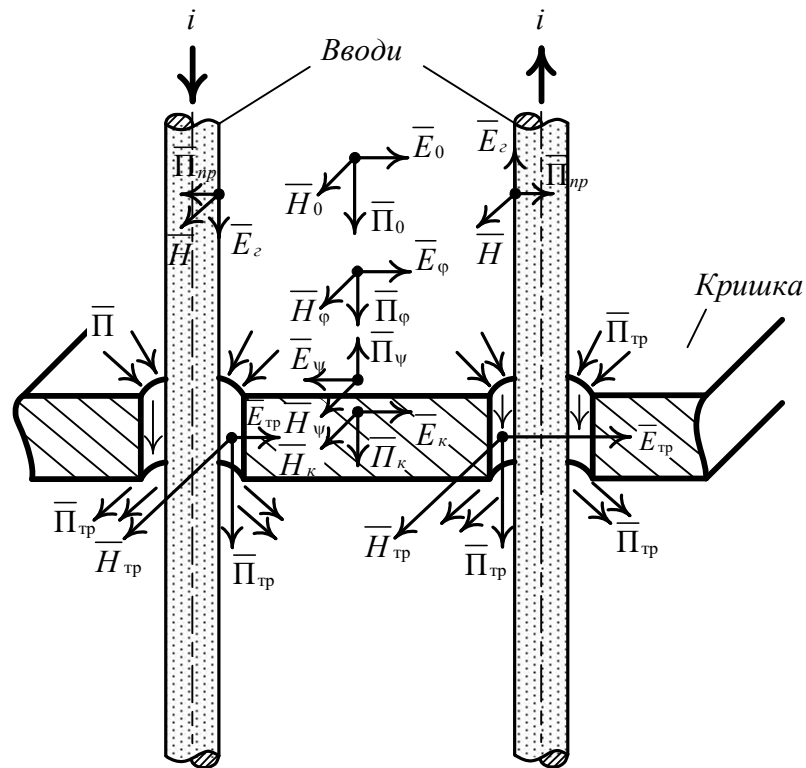


Рис. 11

Та частина енергії, яка падає на металеву кришку, згасає чим глибше вона проникає у неї. Якщо товщина кришки більше глибини проникнення електромагнітної хвилі, то ця частина енергії витрачається на нагрівання її вихровими струмами, а у трансформатор проходить енергія через простір навколо ввідів, який заповнений ізоляторами, де саме і концентрується електромагнітне поле. Напрямки векторів \vec{E} , \vec{H} і \vec{P} показані на рис. 11. Якщо знехтувати втратами енергії у кришці (тобто вважати її надпровідником, куди електромагнітне поле не проникає $\vec{E} = 0$), то лінії вектору Пойнтінга вказують, що енергія проходить у трансформатор виключно крізь два ізолятори (лінії вектору \vec{E} вказані пунктирними лініями, а лінії вектору \vec{H} – хрестиками і точками) (рис. 12).

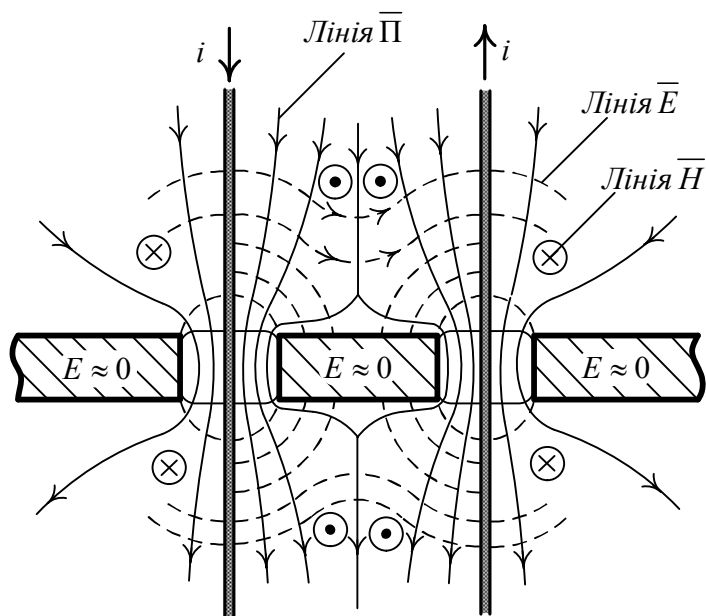


Рис. 12

Розглянемо передавання енергії у однофазному двообмотковому трансформаторі. За рахунок явища електромагнітної індукції магнітний потік індукує у обмотках ЕРС, яка співпадає за напрямом з електричним полем \vec{E} у магнітопроводі. Напрямок напруженості магнітного поля у магнітопроводі і проміж обмотками показано штриховими лініями. За

правилом обчислення векторного добутку $[\vec{E}, \vec{H}]$ знаходимо напрямок вектору Пойнтінга на поверхні магнітопроводу $\vec{\Pi}_{Fe}$, у повітряному проміжку $\vec{\Pi}_0$ і на зовнішній поверхні вторинної обмотки $\vec{\Pi}$.

Від первинної обмотки I (рис. 13) енергія надходить у магнітопровід і у повітряний проміжок й далі у вторинну обмотку і навантаження. Таким чином, енергія з однієї обмотки у другу передається не через магнітопровід, а через повітряний проміжок між обмотками трансформатора, де існує поле розсіяння. Саме за рахунок поля розсіяння і відбувається перетворення енергії у трансформаторі.

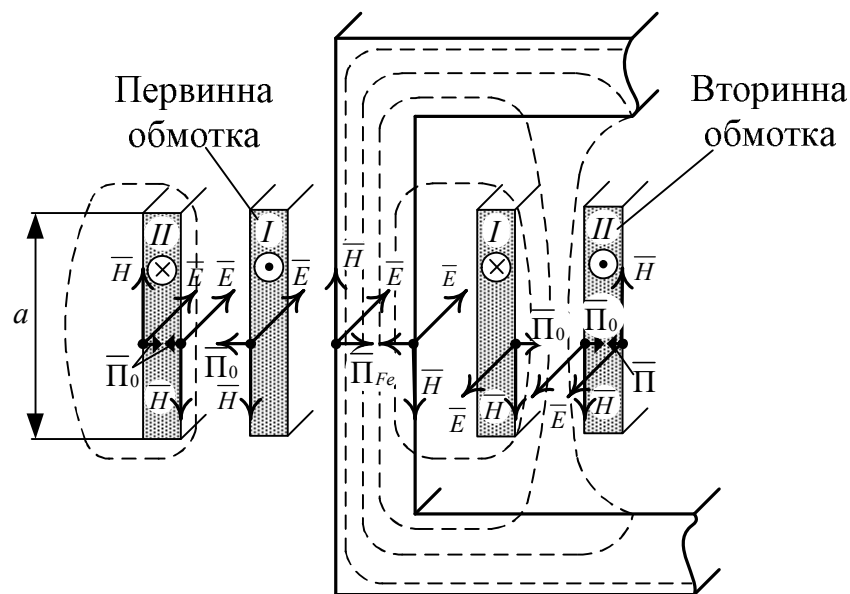


Рис. 13

Енергією, що проникає у магнітопровід, визначається реактивна потужність намагнічування осердя і активна потужність теплових втрат у магнітопроводі.

Вважаючи \vec{E} з обох боків первинної обмотки однаковим, можна визначити співвідношення потужностей у магнітопроводі і повітряному проміжку

$$\frac{\bar{\Pi}_{Fe}}{\bar{\Pi}_0} = \frac{\bar{H}_{Fe}}{H_0} = \frac{\mu_0}{\mu_{Fe}},$$

тобто

$$\bar{\Pi}_{Fe} \ll \bar{\Pi}_0.$$

Якщо знехтувати втратами енергії у магнітопроводі, то можна визначити потужність у повітряному проміжку ($\bar{\Pi}_0 = \overline{EH}$), а оскільки магнітний опір повітряному проміжку значно більший за магнітний опір магнітопроводу, то напруженість магнітного поля

$$H = \frac{i_1 w_1}{a},$$

де a – висота обмотки.

На зовнішній поверхні обмотки напруженість електричного поля дорівнює:

$$E = \frac{u_1}{w_1 l_1},$$

де l_1 – середня довжина витка первинної обмотки.

Вектор Пойнтінга у повітряному проміжку:

$$\bar{\Pi}_0 = \frac{i_1 w_1 u_1}{a w_1 l_1} = \frac{i_1 u_1}{a l_1}.$$

Потік потужності через усю зовнішню поверхню у повітряний проміжок $\bar{\Pi}_0 a l_1 = i_1 u_1$ дорівнює миттєвій потужності первинної обмотки трансформатора. Цей же потік енергії проникає у вторинну обмотку, з якої вздовж проводів передається до споживача.

Лекція №17 ОБМЕЖЕНІСТЬ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ МАКСВЕЛА

Характеристика задач, на розв'язок яких орієнтована класична теорія електромагнітного поля. Роль калібровок у теоретичних доведеннях. Роботи Канна, Томіліна, Ніколаєва і інших сучасних вчених по створенню узагальненої електродинаміки на базі класичної теорії електромагнітного поля

Критичні зауваження щодо класичної Максвелівської електродинаміки.

Основи узагальненої електродинаміки

1. Загальні зауваження

*На нас <учених> лежить обов'язок
подбати про поширення та
розвиток не тільки справжніх наукових
принципів, а й духу здорового
критицизму при розгляді даних,
на яких ґрунтуються твердження,
що здаються науковими.
Дж. К. Максвелл*

*«Немає предмета більш захоплюючого,
більш гідного для вивчення, ніж природа.
Зрозуміти цей великий механізм,
відкрити чинні сили та закони,
які ним керують – ось вища
мета людського розуму»
Н. Тесла*

*«...що стосується такого розділу
науки, як електродинаміка, то людство
буде вражене тут виключно
глибокими потрясіннями та змінами»
Г.В. Ніколаєв*

Відповідно до законів діалектики будь-яка наукова концепція згодом себе повністю вичерпує, стає очевидною її обмеженість. Виникає необхідність виходу за рамки усталених уявлень. При цьому неминуча

боротьба «нового» зі «старим». Здоровий консерватизм тут необхідний, оскільки при виборі нового напрямку розвитку, слід серйозно перевіряти всі альтернативи. Важливо, щоб процес пошуку йшов конструктивно.

Теорія електромагнітного поля розроблялася Дж. Максвеллом майже два десятиліття (з 1855 по 1873 роки) і в подальшому неодноразово правилася і перетворювалася іншими дослідниками - Г. Герцем, О. Хевісайдом, А. Ейнштейном, Г. Лоренцом та ін. Істотних правок зазнали як деякі принципи ідеї Максвелла, і самі рівняння.

У збірці статей, присвячених 150-річчю від дня народження Дж. Максвелла, зазначається: «Загальноживана нині система рівнянь Максвелла не відповідає жодній із систем, даних в роботах Д.К. Максвелла». Висновок про існування електромагнітних хвиль (ЕМХ) і електромагнітну природу світла є одним з основних наслідків з теорії Максвелла. Сьогодні важко говорити про деталі його творчого методу. Тому багато висловлювань про хід думок, логіку Максвелла сьогодні є не більше ніж припущеннями. Можна припустити, що думка про існування електромагнітних хвиль не була наслідком, а передувала розробці системи рівнянь електродинаміки, і навіть більше - була однією з цілей цієї роботи. Ще в грудні 1861 року в листі до У. Томсона (Кельвіна) Максвелл висловив припущення, що «... магнітне і світлоносне середовища ідентичні». Є документальні свідчення, які підтверджують, що про існування ЕМХ здогадувався ще Фарадей. Тому вся робота Максвелла була націлена на розробку механізму утворення та поширення ЕМХ.

Передбачення Максвелла набагато випередило свій час. Але він не міг знати, що Фарадей ще у 1832 р залишив у архівах королівського товариства запечатаний конверт з заповітом і проханням відкрити останній через 100 років після його смерті. І ось в присутності багатьох вчених Англії в 1936 р. конверт був розкритий і слова, які були написані на пожовклому листі, потрясли всіх: з'ясувалося, що Фарадей ясно представляв хвильову природу поширення електромагнітних коливань у

просторі з деякою швидкістю. «Я вважаю, що поширення магнітних сил від полюса схоже на коливання схвильованої водної поверхні. За аналогією я вважаю можливим застосувати теорію коливань до поширення електричної індукції», - писав Фарадей на підставі далекосяжних аналогій між електромагнітною індукцією, світлом і звуком.

До середини 19-го століття всі основні закони електродинаміки були вже відомі: закони Біо-Савара і Ампера були відкриті в 1820 році, в 1831 році Фарадей відкрив основний закон електромагнітної індукції, а в 1839 році Карл Гаусс сформулював основну теорему електростатики - теорему Гаусса-Остроградського. Максвелл узагальнив ці залежності, звівши їх в єдину систему рівнянь. У різних варіантах цієї системи налічувалося до 20 рівнянь. Остаточна система складається з семи рівнянь, але її основу складають два рівняння:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \text{ (I),} \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \text{ (II)} \end{aligned} \tag{1}$$

які описують взаємні перетворення електричного поля в магнітне (I) і навпаки (II).

На розробку цієї системи Максвелу - талановитому фізику-теоретику, автору блискучих праць з молекулярної фізики, механіки, оптики - треба було майже 20 років! Пояснити це можна лише тим, що при розробці системи рівнянь електродинаміки він зіткнувся з величезними труднощами, не пов'язаними з математикою. Основна складність полягала в тому, що Максвелл ... випередив свій час, і гостро відчував дефіцит знань, необхідних для розуміння фізики (природи) електромагнітних взаємодій.

За часів Максвелла вважалося, що весь простір заповнений якоюсь гіпотетичною всепроникною субстанцією - «світовим ефіром», що володіє

вельми невизначеними властивостями. У 1837 році Фарадей виявив явище поляризації діелектриків і висловив думку про можливість поширення «електричної і магнітної дії» через діелектричне середовище. У 1861 році, аналізуючи поведінку діелектрика в електричному полі, Максвелл припустив, що взаємне зміщення зарядів в молекулах діелектрика пропорційне напруженості зовнішнього електричного поля E . У сучасних позначеннях ця залежність визначає електричну індукцію $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$, де ϵ_0 - електрична стала. При зміні електричного поля в діелектрику короткочасно протікає струм (струм поляризації), щільність якого визначається залежністю $\bar{J}_{\text{зм}} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$. Цей струм Максвелл назвав «струмом зміщення». Це був хоч і короткочасний, але струм реальних зарядів, який повинен був створювати магнітне поле, що дозволяло об'єднати щільність струму зміщення $\bar{J}_{\text{зм}}$ з щільністю струму провідності $\bar{J}_{\text{пр}}$ в загальний (повний) струм. Сумарну щільність повного струму Максвелл і включив в (I) рівняння системи (1).

Для Максвелла світовий ефір не був порожнім простором. Він припустив, що ефір, як і діелектрик, містить пов'язані електричні заряди. Таким чином, виключивши заряди із закону електромагнітної індукції (II рівняння), Максвелл змушений був ввести їх в процес поширення ЕМХ. У той час це був єдиний розумний вихід, який дозволяв зберегти ідею електромагнітних хвиль. Але для цього треба було наділити світовий ефір властивостями діелектрика.

Вакуум не є провідним середовищем і не містить вільних зарядів. Тому єдиним струмом, що генерує магнітне поле в ЕМХ, може бути тільки струм зміщення. Але це не той ілюзорний струм, який «виникає» в результаті диференціювання «вихрового поля електричної індукції», а струм зміщення реальних зарядів, як його розумів Максвелл - струм поляризації «вакууму». Звідси випливає, що для існування ЕМХ в

«порожньому» просторі повинні існувати зв'язані електричні заряди протилежного знаку. Це і є той єдиний постулат, який Максвелл поклав в основу всієї системи рівнянь електродинаміки, і чого вперто не бажають помічати його послідовники.

Міркувати про природу цих електронейтральних утворень безглуздо - сьогодні про них можна сказати лише, що вони існують і якимось заповнюють «пустий» простір. Відомо, наприклад, реально існуюче (виявлене експериментально) електронейтральне утворення - позитроній. Атом позитронію є воднеподібним зв'язком електрона з позитроном. Чи має позитроній якийсь стосунок до «атомів вакууму», ще належить з'ясувати.

Наприклад, [автор Харченко К.П. Ефір. // Інтерме, 2007, №6 (53). С. 59] вважає, що вакуум складається з почергових позитивних і негативних зарядів, які утворюють кубічну структуру, подібну структурі молекул NaCl. У такій моделі передача «енергії руху» в сусідню точку простору може відбуватися шляхом звичайної кулонівської взаємодії різнойменних зарядів у суміжних комірках вакуумної структури.

Талановитий теоретик, Максвелл мав багату фізичну інтуїцію. Про це говорить той факт, що свою формулу закону електромагнітної індукції він включив в систему рівнянь електродинаміки лише один раз - у своїй ранній роботі 1862. Це рівняння не увійшло більше ні в одну з його наступних робіт. Воно відсутнє і в остаточному варіанті системи, опублікованому Максвеллом в 1873 році. Ідея «взаємодії полів» знову з'явилася лише після смерті Максвелла в роботах Герца і Хевісайда у формі (II) рівняння системи (1). (Можливо, це пояснює, чому сьогодні формулу максвелівського варіанту основного закону електромагнітної індукції сором'язливо, але наполегливо називають «законом Фарадея», хоча Фарадей не має до цього формулювання ніякого відношення).

Автор [Маркчев Н.Т.], аналізуючи численні варіанти системи рівнянь електродинаміки, приходять до висновку, що «... рівняння Максвелла в їх

загальноновживаній формі в певному сенсі не належать Д.К. Максвеллові, а скоріше Г. Герцу і О. Хевісайду». «Які причини зумовили введення Г. Герцем і О. Хевісайдом« другого рівняння»? - Продовжує автор. - В кінцевому рахунку, одна - міркування симетрії ..., яка вимагала подвійний форми подання електромагнетизму ».

У статті, опублікованій в «Am. J. of Physics », 1963, №11, А.М. Борк писав: «Олівер Хевісайд був першим фізиком, що явно відзначив симетрію рівнянь Максвелла ... Він звертається до подвійної форми, яка була введена їм в 1885 р, причому електрична і магнітна сторони електромагнетизму симетрично представлені і пов'язані. Ясно, що він розглядає «подвійну форму» як істотне нововведення, якого не було в статтях і книгах Максвелла». Саме це «нововведення» і призвело до синфазності електричної і магнітної компонент в ЕМХ.

Істотно відрізняються від сучасних уявлень і погляди Максвелла на електричну енергію. Нехай вони були непослідовними і в чомусь (за сьогоdnішніми поняттями) дещо наївними, але зате позбавлені «релятивістських поправок». Ось як він уявляв собі природу електричної енергії: «Електрична енергія буває двоякого роду - електростатична і електрокінетична. У нас є підстави до припущення, що перша залежить від властивості середовища, в силу якого електричне зміщення викликає електрорушійну силу в протилежному напрямку ... Електрокінетична енергія є просто енергія руху, що викликається в середовищі електричними струмами і магнітами ... ».

До великого корабля завжди прилипає безліч черепашок. Ця істина стара, як світ. Одні захоплюються і схиляються перед талантом, обожнюючи його і роблячи з нього ікону. Інші - менш безкорисливі - не проти погрітися в променях його таланту і величі. При цьому від реальної людини і справжнього таланту залишається лише символ, безтілесна оболонка. Ці звичаї шоу-бізнесу викликають у мислячих людей відторгнення. А в науці такі колективні безумства можуть надовго

загальмувати прогрес пізнання природи. На жаль, цей «синдром натовпу» позначився і на розвитку електродинаміки.

Є ще одна «колективно-суб'єктивна» причина, яка в 20-му столітті отримала розмах епідемії в науці. Це - надмірна математизація знання, яка особливо небезпечна для фундаментальної основи світорозуміння - фізики. Ніхто не заперечує важливості і необхідності математичного апарату для опису і аналізу наукових результатів у всіх галузях знання і, перш за все, у фізиці. Математика - найважливіший інструмент обробки, осмислення, оцінки правильності та навіть прогнозування нових наукових результатів. Але математика - це лише інструмент, не більше!

З кінця 19-го століття в науці стала переважати інша тенденція: уможливлені математичні перетворення і їх результати без достатнього експериментального обґрунтування стали проголошуватися об'єктивною фізичною реальністю. Ось цитати зі статті А. Ейнштейна, присвяченій Максвеллові: «Диференціальне рівняння в частинних похідних увійшло в теоретичну фізику в якості служниці, але поступово воно стало пані ...». «Континуальне поле увійшло в одну з областей теоретичної фізики як представник фізичної реальності поряд з матеріальною точкою» і т.д.

А ось думка з цього приводу самого Максвелла: «... фізична природа величини підпорядкована її математичній формі. Це - та точка зору, яка характерна для математика, але вона є вторинною у часі для фізичного аспекту, тому що для освоєння різного роду величин людський мозок спочатку повинен мати їх представленими у природі ».

Старанна «служниця» може завдати великої шкоди, коли намагається виконувати роль «пані». Віра теоретиків в безмежні можливості математики привела до надмірного впливу математики у фізиці. Академік Петровської Академії наук і мистецтв Ю.Г. Марков назвав цю тенденцію «математичною інфляцією»: «Подібно до того, як в економіці ми заміняємо натуральні цінності грошовими знаками, так і у фізиці ми заміняємо фізичні об'єкти математичними знаками ... В умовах

математичної інфляції в фізиці виникає феномен віртуальних фізичних об'єктів, процесів, окремих властивостей, за якими не ховається, загалом, ніякої об'єктивної реальності».

У нашому «науковому розслідуванні» є багато прикладів прояву цього «феномена» ... Співвідношення між теорією і практикою не таке однозначне, як це іноді представляється. Тезу «практика - критерій істини» теж слід сприймати критично.

Можна піддавати сумніву твердження, що електромагнітна теорія не може бути неправильною, оскільки практична електротехніка вже понад століття успішно розвивається, користуючись її законами. Але це підтверджує лише напівжартівливу тезу, що «теорія може пояснити все».

Теорія може бути вдалою або невдалою, але жодна теорія не може бути абсолютно правильною. Вдала теорія може існувати й успішно працювати десятиліття, і навіть століття. Наприклад, теорія епіциклів Птолемея 14 століть (!) успішно пояснювала геоцентричний устрій світу.

Викладене вище є конспектом з погляду науковця на прізвище Канн стосовно класичної теорії електромагнітного поля Максвелла. Свій загальний висновок він сформулював досить радикально наступним чином. *«Теорія електромагнітного поля» згорнула хід розвитку електродинаміки зі «стовпової дороги» на бічну стежку, яка завела цю науку в глухий кут. За останні сто років в теоретичній електродинаміці не зроблене жодного значного відкриття.*

Мені подобається критичне ставлення Канна до теорії електромагнітного поля Максвелла, тобто класичної теорії електромагнітного поля. Це може спонукати молодих науковців внести свій вклад у подальший розвиток цієї теорії.

З іншого боку критика Канна не є конструктивною. Він не пропонує шляхів виходу із ситуації.

Мені більше подобається конструктивна критика. Такий напрям викладається у роботі А.К. Томіліна "Основи узагальненої

електродинаміки", де зазначається, що *електродинаміка Максвелла є обмеженою теорією, оскільки описує тільки електромагнітне поле, створене найпростішими елементами: нескінченним струмом або окремим замкненим контуром*. Узагальнена електродинаміка дозволяє досліджувати електромагнітне поле електродинамічних систем, що складаються з багатьох елементів. Наступний рівень узагальнення - квантова теорія.

Найдавніша з наук - механіка - в своєму розвитку вже пройшла всі подібні ступені розвитку. Проводячи аналогії з механікою, Томлін зазначає, що електродинаміку Максвелла можна порівняти з елементарною механікою, яка вивчає статику, кінематику і динаміку найпростіших об'єктів: матеріальної точки і твердого тіла.

Узагальнену електродинаміку слід порівнювати з аналітичною механікою матеріальної системи, а узагальнену квантову електродинаміку - з квантовою механікою і теорією відносності.

У сучасній електродинаміці відсутня теорія електродинамічних систем (узагальнена електродинаміка). Тому електродинаміка Максвелла з одного боку і квантова електродинаміка - з іншого змушені використовувати штучні обмеження (калібровки), щоб «відрізати» шляхи, які ведуть до неіснуючої частини науки. На одне з таких обмежень, а саме калібровку Кулона ($\operatorname{div} \vec{A} = 0$), ми вже звернули увагу і показали, що вона «закриває» шлях до узагальненої магнітостатики. Аналогічна ситуація має місце і в теорії електромагнітного поля, а так само і в квантовій електродинаміці.

Аналіз причин появи калібровок в електродинаміці Максвелла міститься, наприклад, в статті Докторович З.І. Автор цієї статті, опублікованій вперше у 1994 році, обґрунтовано вказує на парадоксальність існуючої теорії. Він доходить висновку, що поділ полів на вихрові і градієнтні не умовний, а фундаментальний, і справедливо звертає увагу на відсутність у рівняннях Максвелла нестационарного градієнтного електричного поля. Однак, він штучно (з фізичних міркувань)

виключає градієнтне магнітне поле, векторний потенціал в його теорії залишається суто вихровим, тобто зберігається калібрування $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

По суті Докторович З.І. доходить висновку про фундаментальність поля вектора \vec{A} , хоча і не формулює цю думку в явному вигляді. Зокрема він правильно вказує, що ЕРС (в тому числі і ЕРС індукції) завжди виникає за рахунок сил неелектричної природи. Тому у вторинній обмотці трансформатора електричні заряди приходять в рух не під дією індукovanого електричного поля (як прийнято вважати), а за рахунок сили $\vec{F} = -Qd\vec{A}/dt$, яка виникає в результаті взаємодії заряду з нестационарним полем вектора \vec{A} .

В результаті Докторович З.І. пропонує записувати рівняння електродинаміки тільки з використанням векторного потенціалу \vec{A} , вважаючи інші характеристики нестационарного електромагнітного поля вторинними.

Схожа точка зору викладена в монографії Менде Ф.Ф. Автор цієї роботи робить висновок, що «рухомий чи нерухомий заряд взаємодіє не з магнітним полем, а з полем магнітного векторного потенціалу, і тільки знання цього потенціалу і його еволюції дають можливість обчислити всі складові сил, що діють на заряди».

Звернемося до історичних фактів. У працях Ампера показано, що у загальному випадку магнітна сила має дві компоненти: одна з них ортогональна струму, який проходить у провіднику, інша діє по напрямку струму або проти нього. Простежимо відображення цієї ідеї Ампера в працях Максвелла.

Дослідженням Ампера по взаємодії електричних струмів Максвелл відводить главу II другого тому своєї роботи.. Однак Максвелл розглядає тільки випадок а) симетричного розташування контурів в досліді Ампера і робить висновок: «Виявлено, що ніякий замкнений контур, що розміщується поблизу, не в змозі приводити цей провідник в рух».

Виходячи з цього, Максвелл робить висновок: «Єдиним експериментальним фактом, використаним нами в цьому дослідженні, є факт, встановлений Ампером і який полягає у тому, що дія замкненого контуру на довільну ділянку іншого контуру перпендикулярна напрямку останнього».

Випадок б), коли контури розташовані несиметрично, Максвеллом не описаний. Посилань на інший експеримент Ампера, в якому підтверджується взаємодія струмів, розташованих на одній лінії, в трактаті Максвелла також не міститься.

Аналізуючи можливі припущення про напрям сили між двома елементами Максвелл пише «... безсумнівно найкращим є те, що належить Амперу, оскільки це єдине припущення, яке робить сили між елементами не тільки однаковими і протилежними, але і діючими по прямій лінії, яка їх з'єднує». Максвелл вважає, що дві останні з перерахованих компонент сили дорівнюють нулю, і магнітні сили діють по лінії, що з'єднує центри виділених елементів. При цьому виділяються дві компоненти магнітної сили: поперечна і повздовжня.

Таким чином, Максвелл був прихильником закону Ампера, визнаючи його в якості основного. На жаль, йому не вдалося усунути недоліки цього закону, зберігши суть: можливість поперечної та повздовжньої взаємодії.

У монографії Е. Уїттекера простежується подальша історія розвитку уявлень про електромагнітні взаємодії. Зокрема є посилання на точку зору Хевісайда, висловлену в 1888 році: «Вчені, не менш авторитетні, ніж великий Максвелл, стверджують, що закон сили між двома елементами струму - основна формула електродинаміки. Якби це було так, хіба ми не застосовували б його завжди? А чи застосовуємо ми його взагалі? Я впевнений, що тут якась помилка. Я анітрохи не хочу позбавити Ампера честі називатися батьком електродинаміки; я всього лише хочу передати звання основної іншій формулі, що виражає механічну силу, яка діє на елемент провідника, який несе струм в будь-якому магнітному полі -

векторний добуток струму і магнітної індукції. У цій формулі є щось реальне; вона не схожа на формулу сили між двома незамкненими елементами; вона фундаментальна; і, як усім відомо, її постійно використовують, прямо або опосередковано (через електрорушійну силу), як теоретики, як і практики ».

На думку Томіліна сучасний погляд на електромагнітну взаємодію є обмеженим, оскільки на диференціальному рівні він дозволяє описувати тільки взаємодію паралельних струмів або взаємодію елемента струму з замкненим електричним контуром, а на інтегральному - взаємодію одноконтурних електричних систем.

У підручниках з електродинаміки і теоретичної електротехніки зазвичай робиться зауваження про те, що векторний потенціал \vec{A} фізичного сенсу не має і використовується як допоміжна функція, а умова кулонівського нормування (калібровки) ($\text{div} \vec{A} = 0$) вводиться, щоб усунути неоднозначність цієї функції. Зауважимо, що ототожнення магнітного поля з картиною із залізної тирси, що виникло на самій ранній стадії вивчення магнетизму, нічим не обґрунтоване. Чи можливо описати електромагнітну взаємодію у всіх випадках, користуючись тільки уявленням про магнітні силові лінії? Таке питання своєчасно не було поставлене. Це є однією з причин обмеженості сучасної електродинаміки.

Таким чином, можна сказати, що використання кулонівської калибровки і абстрактної моделі лінійного нескінченного струму призвело до обмеженого погляду на магнітостатичне поле (МСП), який враховує тільки одну з його компонент. Тому і сучасні уявлення про електромагнітній взаємодії теж не є повними. Реальні електричні системи створюють магнітне поле з більш складною структурою.

В якості одного з найбільш важливих висновків на цьому етапі аналізу зазначимо, що обидві компоненти єдиного магнітного поля визначаються за допомогою векторного електродинамічного потенціалу. *Отже, векторний електродинамічний потенціал \vec{A} слід визнати як основну*

характеристику повного магніостатичного поля.

Згідно засад узагальненої електродинаміки магнітне поле вводиться лише для зручності опису взаємодії струмів. Як пише Е. Парселл «Якщо б для аналізу кожної системи рухомих зарядів доводилося здійснювати перетворення «вперед - назад» між різними системами координат, то наше завдання стало б стомлюючим і отупляючим. Є кращий спосіб. Спільну дію одного струму на інший можна описати повно і стисло, вводячи поняття про нове поле - магнітне».

Відразу ж підкреслимо, що представляти магнітне поле тільки вихровою компонентою (як це прийнято в сучасній теорії), означає виключити поздовжню силу, яка неминуче виникає при взаємодії струмів. Звідси висновок: *вводячи поняття «магнітне поле», необхідно наділити його всіма атрибутами відповідно до загальної теорії поля і його основної теореми Стокса-Гельмгольца.*

Постає питання потенціальності сил при розглянутому вище підході. Як відомо, електростатична взаємодія завжди потенціальна, а магніостатична - ні. Вся справа в тому, що магнітна взаємодія не зводиться до електростатичної, як це могло здатися. Ми розглядали взаємодію рухомих зарядів, а це вже не електростатична, а електродинамічна задача. При електродинамічній взаємодії порушується просторова симетрія, тому на взаємодіючі струмові елементи діють результуючі сили, що включають поперечну і поздовжню компоненти, і в загальному випадку спрямовані не по лінії, яка їх сполучає, а по паралельних лініях дії.

До речі, використаний підхід дає однозначну відповідь на питання про існування «магнітних зарядів», які іноді намагалися вводити з міркувань симетрії в природі. *Магнітне поле не є самостійним матеріальним об'єктом, це - псевдополе. Тому немає і «монополів», що породжують його під час відсутності рухомих електричних зарядів.*

Таким чином, на інформація, викладеній у лекції, є підставою для виникнення певних міркувань. По-перше, традиційна магнітостатика не є повною, оскільки вивчає тільки магнітні поля елементарних об'єктів, якими є нескінченний лінійний струм і відокремлений замкнений контур зі струмом (або соленоїд). При визначенні магнітного поля таких об'єктів поняття СМП не потрібне. По-друге, при розгляді магнітостатичної системи, що складається з двох і більше елементів, векторний потенціал \vec{A} проявляє нові властивості, що вимагають введення СМП. Узагальнена магнітостатика дозволяє досліджувати магнітні поля складних електричних систем, що мають у загальному випадку дві компоненти: вихрову і потенціальну.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Бойко В. С., Бойко В.В., Видолоб Ю. Ф., Курило І.А. та ін. Теоретичні основи електротехніки. Підручник: У 3 т.;Т. 3: Електричні кола з розподіленими параметрами. Теорія електромагнітного поля. – К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", 2013. – 224 с.
2. Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле: Підручник/ за ред. проф. Ю. О. Карпова – Стереотип. вид. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. – 338 с.
3. Ткаченко Ю.Ф., Федоришин Д.Д., Федорів В.В., Лизун С.О. Теорія поля. – Ів.- Франківськ: Факел, 2006. – 106 с.
4. Кузьменко Е. Д., Рева М. В. Теорія поля. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2014. – 410 с.
5. Шокало, В.М. Електродинаміка та поширення радіохвиль, Ч.1. Основи теорії електромагнітного поля [Текст] / В.М. Шокало, В.І. Правда, В.А. Усін, В.С. Вунтесмері, Д.В. Грецьких. - Харків: ХНУРЕ; Колегіум, 2009.
6. Васецький Ю.М. Електродинаміка. Основні поняття, потенціальні та квазістаціонарні поля: навч. посібн. – К.: Вид-во Нац. авіац.ун-ту «НАУ-друк», 2009. – 160 с.
7. Теорія електромагнітного поля і основи техніки НВЧ: навч. осіб. / С.В. Соколов, Л.Д. Писаренко, В.О. Журба; за заг. ред. Г.С. Воробйова. – Суми: Сумський державний університет, 2011. – 393 с.
8. Теорія поля: Навчально-методичний посібник [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», спеціалізації «Електронні компоненти та системи» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Є. В. Вербицький. – Електронні текстові данні (1 файл: 3,07 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 262 с.
https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/21696/1/field_theory.pdf

9. «Теоретичні основи електротехніки. Збірник задач: навчальний посібник» / укл. О.В.Корощенко, В.Ф.Денник, О.А.Журавель та ін.; за заг.ред. О.В.Корощенко.- Донецьк, ДВНЗ «ДонНТУ», 2012.- 673 с.