

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ: ПРАКТИКУМ ЧАСТИНА 2

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення»
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»

Укладач: Ю. Є. Бохонов

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

2025

УДК 517 (075.8) (076)

МЗ4

Укладач: *Бохонов Юрій Євгенович*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент: *Капустян О.В.*, д-р. фіз.-мат. наук, проф.
каф. інтегральних і диференціальних і рівнянь, мех.-мат. ф-т КНУ ім.
Т.Г.Шевченка

Відповідальний редактор: *Статкевич В.М.*, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
каф. ММСА ПСА, КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 06.03.2025 р.)
за поданням вченої ради навчально-наукового інституту
(протокол № 2 від 24.02.2025 р.)*

М 34

Бохонов Ю. Є.

Математичний аналіз. Практикум. Частина 2 [Електронний ресурс] : практикум для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення» спец. 122 Комп'ютерні науки / КПІ ім. Ігоря Сікорського, уклад. Ю. Є. Бохонов. - Електрон. текст. дані (1 файл = 3,91 Мб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 230 с.

Містить задачі на знаходження невизначених та визначених інтегралів, їхнього застосування в задачах геометрії. Особливу увагу приділено інтегралам, що залежать від параметра: Діріхле, Пуасона - Ейлера та ін. Пропонуються задачі підвищеної складності, що потребують спеціальних і творчих методик, що може згодитись при підготовки до студентських олімпіад.

Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення» спец. 122 Комп'ютерні науки. Буде також корисний для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 124 «Системний аналіз».

УДК 517 (075.8) (076)

Реєстр. № НП 24/25-395. Обсяг 10,45 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

Зміст

| | |
|---|------------|
| Вступ | 5 |
| 1. СТАНДАРТНІ ЗАДАЧІ. | 6 |
| 1.1. Інтегралі. Невизначені інтегралі. Деякі теоретичні відомості. | 6 |
| Таблиця невизначених інтегралів | 7 |
| Деякі відомості про визначені інтегралі | 8 |
| Обчислення невизначених інтегралів | 9 |
| Формула інтегрування за частинами | 13 |
| Інтегрування дробово-раціональних функцій | 16 |
| Метод Остроградського виділення раціональної частини інтегралу | 20 |
| Інтегрування деяких ірраціональних виразів. | 22 |
| Інтегрування диференційних біномів. Підстановки Чебишова. | 24 |
| Підстановки Ейлера | 27 |
| Інтегрування деяких тригонометричних функцій | 29 |
| Еліптичні інтегралі | 34 |
| 1.2. Визначені інтегралі | 34 |
| 1.3. Застосування визначених інтегралів у геометрії | 42 |
| Обчислення площ фігур | 42 |
| Обчислення довжин дуг кривих | 48 |
| Довжина дуги лемніскати Бернуллі | 51 |
| Довжина еліпса | 53 |
| Обчислення об'ємів тіл | 55 |
| 1.4. Невласні інтегралі | 58 |
| Невласні інтегралі 1-го роду | 58 |
| Невласні інтегралі від знакозмінних функцій | 60 |
| Невласні інтегралі 2-го роду | 61 |
| 2. ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ | 67 |
| 2.1. Інтегралі | 67 |
| Лемніскатна константа, формула Гауса | 95 |
| Задачі для самостійного розв'язання | 99 |
| Інтегралі, що залежать від параметра | 100 |
| 2.2. Інтеграл Діріхле | 100 |
| 2.3. Інтеграл Ейлера-Пуасона. | 105 |
| 2.4. Інтеграл Френеля | 110 |
| 2.5. Інтеграл Фрулані | 112 |
| 2.6. Інтеграл Лапласа | 113 |
| 2.7. Задачі на тему «Знаходження інтегралів, що залежать від параметра». | 114 |
| 2.8. В і Г -функції Ейлера | 128 |
| Деякі відомості про функції Ейлера | 129 |
| Деякі властивості В -функції Ейлера | 129 |
| Г -функція Ейлера і її властивості | 129 |
| а). Диференційовність | 130 |
| б). Рекурентна формула | 130 |
| с). Значення в цілих невід'ємних точках | 130 |

| | |
|---|------------|
| d). Значення в півцілих точках | 130 |
| e). Гама-функція як невластний інтеграл 2-го роду | 130 |
| f). Формула Ейлера-Гауса | 131 |
| g). Формула доповнення | 131 |
| h). Зв'язок між Ψ і Γ функціями Ейлера | 131 |
| i). Формула Лежандра | 132 |
| j). Інтеграл Раабе | 132 |
| k). Добуток Ейлера E | 139 |
| l). Дві формули Ейлера | 140 |
| m). Похідні Γ-функції | 147 |
| n). Логарифмічна похідна від гама-функції – дігама-функція | 147 |
| o). Інтегральне зображення для $\ln(\Gamma(x))$, формула Біне | 154 |
| p). Ряди Фур'є і Куммера для логарифма гама-функції | 157 |
| Лемніскатна константа, продовження | 165 |
| 2.9. Задачі на тему «Функції Ейлера» | 168 |
| 2.10. Формула Валліса | 207 |
| 2.11. Формула Стірлінга | 209 |
| 3. ДОПОВНЕННЯ | 212 |
| 3.1. Числа Бернуллі | 212 |
| 3.2. Зв'язок чисел Бернуллі з дзета-функцією Рімана | 220 |
| ЛІТЕРАТУРА | 230 |

Вступ

Посібник «Математичний аналіз. Практикум. Частина 2» призначено для демонстрації різноманітних методів при розв'язанні як стандартних задач, так і нестандартних, що потребують творчих, спеціальних підходів. Розглянуто стандартні теми – невизначені, визначені та невластні інтеграли, їхнє застосування до задач геометрії. Особливу увагу приділено інтегралам, що залежать від параметра. Ця тема часто потребує спеціальних методик. Тут викладено як класичні інтеграли Діріхле, Пуасона, Френеля, Фрулані, Ейлера, так і розвиток цих тем і методів. Велику увагу приділено деяким спеціальним питанням, а саме, логарифмічній похідній гама-функції Ейлера – дігама-функції. Розглядаються її властивості, в тому числі, розклади у ряд Фур'є та Куммера. Все це сприяє поглибленому знайомству з вказаною тематикою, а також може бути використано при підготовці до студентських олімпіад. В посібнику є доповнення, присвячене числам Бернуллі, їхньому зв'язку з функцією Рімана, показано застосування цих чисел при розкладі тангенса та котангенса у степеневі ряди, що, як правило, не входить в стандартні підручники.

В посібнику студент знайде вказівки для самостійного виконання індивідуальних розрахункових робіт, що відповідає вимогам математичної підготовки з спеціальності 122 «Комп'ютерні науки».

1. СТАНДАРТНІ ЗАДАЧІ

1.1. Інтеграли

Невизначені інтеграли

Деякі теоретичні відомості

Означення первісної функції. Нехай область визначення $D(f)$ функції f – зв'язна множина. Функція F називається первісною f , якщо $\forall x \in D(f) F'(x) = f(x)$. Сукупність $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ називається невизначеним інтегралом функції f і позначається $\int f(x)dx$.

З означення випливають тотожності:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

Останню рівність можна записати також у вигляді

$$\int df(x) = f(x) + C.$$

Властивості невизначених інтегралів:

1). $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

2). Заміна змінної у невизначеному інтегралі:

Нехай $x = \varphi(t)$. Тоді $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx$

3). Формула інтегрування за частинами:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Її також зручно записувати у вигляді

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x).$$

Таблиця невизначених інтегралів

$$1). a \neq -1; \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$$

$$2). \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Доведення:

$$A). x > 0: \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

$$B) x < 0: t = -x > 0 \Rightarrow x = -t; dt = -dx \Rightarrow dx = -dt,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(-x) + C.$$

$$3). \int e^x dx = e^x + C.$$

$$3a). \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$4). \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5). \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6). \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$7). \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8). \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$$

$$9). \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = \operatorname{arcctg} x + C.$$

$$10. \int shx dx = chx + C .$$

$$11. \int chx dx = shx + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C .$$

$$15. \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

Деякі відомості про визначені інтеграли

Формула Ньютона-Лейбниця обчислення визначеного інтегралу через невизначений. Нехай F первісна f . Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

За допомогою визначеного інтегралу можна знаходити площу криволінійної трапеції, об'єми деяких тіл, наприклад, тіла обертання, довжину дуги кривої тощо.

Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіками двох функцій та двома вертикальними відрізками:

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

Об'єм тіла.

Якщо відома площа $S(x)$ кожного перетину тіла площинами, ортогональними до осі Ox , а крайні положення площин знаходяться між точками a і b цієї осі, об'єм тіла обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Зокрема, об'єм тіла обертання навколо осі Ox графіка функції f знаходиться за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Довжина дуги просторової кривої, координати радіуса-вектора кожної точки якої є функції параметра $t \in [a, b]$:

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Якщо плоску криву задано у полярних координатах, площа сектора, обмеженого її графіком і двома радіусами, нахиленими до осі Ox під кутами α і β обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Довжина такої дуги обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Обчислення невизначених інтегралів

Знайти невизначені інтеграли шляхом заміни змінної інтегрування.

Задача 1.1.1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Розв'язання. Нехай $x > 0$. Введемо заміну: $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{1}{t^2}$. Тоді

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{tdt}{t^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + C = -\ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

При $x < 0$ заміна $y = -x \Rightarrow x = -y, \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ приводить до такого ж інтегралу:

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2+1}} = -\ln \frac{1+\sqrt{y^2+1}}{y} + C = -\ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{-x} + C, -x > 0. \text{ Отже, при } x \neq 0$$

одержимо відповідь: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = -\ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|} + C.$

Задача 1.1.2. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

Розв'язання. Нехай $x > 0$. Введемо заміну: $t = 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow dt = -\frac{2}{x^3} dx$. Тоді

$$\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} d\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

В результаті

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = t + C = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Легко бачити, що при $x < 0$ після заміни $y = -x > 0$ прийдемо до того ж результату.

Задача 1.1.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}, x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty).$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right| + C =$$

$$= \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x} \right| + C.$$

Задача 1.1.4. $\int \ln(4x^2 + 1) dx$.

$$\int \ln(4x^2 + 1) dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(4x^2 + 1) & dv = dx \\ du = \frac{8x}{4x^2 + 1} & v = x \end{array} \right| = x \ln(4x^2 + 1) - 8 \int \frac{x^2}{4x^2 + 1} dx =$$

$$= x \ln(4x^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{4x^2 + 1} \right) dx = x \ln(4x^2 + 1) - 2 \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x \right) + C =$$

$$= x \ln(4x^2 + 1) + \operatorname{arctg} 2x - 2x + C.$$

Задача 1.1.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}} = \int \frac{dx}{e^x \sqrt{1 + e^{-2x}}} = \int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1 + e^{-2x}}}.$$

Заміна: $t = e^{-x} \Rightarrow dt = -e^{-x} dx \Rightarrow e^{-x} dx = -dt$. В результаті

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = - \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + C = \ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} + 1}) + C =$$

$$= \ln \frac{e^x (e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} + 1})}{e^x} + C = \ln(1 + \sqrt{e^{2x} + 1}) - x + C.$$

Задача 1.1.6. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}$

Розв'язання. Обчислимо зараз і запам'ятаємо надалі:

$$d(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) = 2(a^2 \sin x \cos x - b^2 \sin x \cos x) dx = (a^2 - b^2) \sin x \cos x dx \Rightarrow$$

$$\sin x \cos x dx = \frac{1}{2(a^2 - b^2)} d(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x).$$

Звідси маємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} &= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \int \frac{d(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} = \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2} \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} + C. \end{aligned}$$

Задача 1.1.7.
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right| + C.$$

Задача 1.1.8.
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C.$$

Задача 1.1.9.
$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\operatorname{th}\frac{x}{2}} \frac{d\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\operatorname{th}\frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{th}\frac{x}{2} \right| + C.$$

Задача 1.1.10.
$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}x}.$$

Розв'язання. Легко перевірити, що $\operatorname{ch}x = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}$. Звідси

$$\int \frac{dx}{chx} = \int \frac{dx}{ch^2 \frac{x}{2} + sh^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{\frac{dx}{2}}{1 + th^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{dth \frac{x}{2}}{1 + th^2 \frac{x}{2}} = 2 \operatorname{arctg} \left(th \frac{x}{2} \right) + C.$$

Задача 1.1.11.
$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{x}\right) + C.$$

Задача 1.1.12.

$$\int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx = \left| \begin{array}{l} x - \sin x = t \\ (1 - \cos x) dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -t^{-1} + C = -\frac{1}{x - \sin x} + C.$$

Формула інтегрування за частинами

Задача 1.1.13.
$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C.$$

Задача 1.1.14.
$$\int \sqrt{x} \ln^2 x dx = \frac{2}{3} \int \ln^2 x dx^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - 2 \int x^{\frac{1}{2}} (\ln x) dx \right) + C =$$

$$= \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{4}{3} \int (\ln x) dx^{\frac{3}{2}} \right) + C = \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{4}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} \ln x - \int x^{\frac{1}{2}} dx \right) \right) + C =$$

$$= \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{4}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right) + C.$$

Задача 1.1.15.
$$\int x \sin \sqrt{x} dx.$$

Перед застосуванням формули інтегрування за частинами зробимо заміну:

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt \Rightarrow \sin \sqrt{x} dx = 2t \sin t dt \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int x \sin \sqrt{x} dx &= 2 \int t^3 \sin t dt = -2 \int t^3 d \cos t = -2 \left(t^3 \cos t - 3 \int t^2 \cos t dt \right) = \\ &= -2 \left(t^3 \cos t - 3 \int t^2 d \sin t \right) = 2 \left(-t^3 \cos t + 3 \left(t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt \right) \right) = \\ &= 2 \left(-t^3 \cos t + 3 \left(t^2 \sin t + 2 \left(t \cos t - \int \cos t dt \right) \right) \right) = \\ &= 2 \left(-t^3 \cos t + 3 \left(t^2 \sin t + 2 \left(t \cos t - \sin t \right) \right) \right) + C. \end{aligned}$$

Задача 1.1.16. $I_0 = \int \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx, I_1 = \int \frac{x e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

$$I_1 = \int \frac{x e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} d e^{\operatorname{arctg}x} = \frac{x e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} - I_0 + C'.$$

$$I_0 = \int \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} d e^{\operatorname{arctg}x} = \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + \int \frac{x e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + I_1 + C''.$$

Одержали лінійну систему рівнянь:

$$I_0 + I_1 = \frac{x e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C',$$

$$I_0 - I_1 = \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C''.$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \frac{(x+1) e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C_1,$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{(x-1) e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C_2.$$

Задача 1.1.17. $I_c = \int e^{ax} \cos bx dx, I_s = \int e^{ax} \sin bx dx.$

$$I_c = \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{b} \left(e^{ax} \sin bx - a \int e^{ax} \sin bxdx \right) \Rightarrow bI_c + aI_s = e^{ax} \sin bx + C',$$

$$I_s = \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{1}{b} \left(-e^{ax} \cos bx + a \int e^{ax} \cos bxdx \right) \Rightarrow -aI_c + bI_s = -e^{ax} \cos bx + C''.$$

Розв'язуючи систему, одержимо:

$$I_c = \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C_1,$$

$$I_s = \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C_2.$$

Задача 1.1.18.

$$I = \int \left(\sqrt{2 \ln x} + \frac{1}{\sqrt{2 \ln x}} \right) dx.$$

Зобразимо інтеграл у вигляді суми інтегралів, а до першого застосуємо формулу інтегрування за частинами.

$$I = \int \sqrt{2 \ln x} dx + \int \frac{1}{\sqrt{2 \ln x}} dx = x \sqrt{2 \ln x} - \int x \left(\frac{1}{2} (2 \ln x)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{2}{x} \right) dx + \int \frac{1}{\sqrt{2 \ln x}} dx =$$

$$= x \sqrt{2 \ln x} - \int \frac{1}{\sqrt{2 \ln x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{2 \ln x}} dx + C = x \sqrt{2 \ln x} + C.$$

Задача 1.1.19. $I = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx.$

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx =$$

$$= x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \int \sqrt{x^2 - a^2} dx - I - a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + 2C \Rightarrow$$

$$2I = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + 2C \Rightarrow$$

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| \right) + C.$$

Задачі для самостійного розв'язання.

а. Довести, що $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right) + C.$

б. Знайти невизначений інтеграл $\int \arcsin x dx$. Відповідь:

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

с. Знайти невизначений інтеграл $\int (x^2 - 4) \cos 3x dx$.

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Схема знаходження інтегралів від правильних дробів полягає в тому, що дріб подається у вигляді суми елементарних дробів, інтеграли від яких відомі. При цьому застосовується метод невизначених коефіцієнтів для знаходження чисельників таких дробів. Інколи коефіцієнти можна знайти усно. Наприклад:

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right) dx = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + C$$

$$\frac{dx}{(x-a)(x^2+b)} = \frac{1}{a^2+b} \left(\frac{1}{x-a} dx - \frac{x+a}{x^2+b} dx \right).$$

Далі при інтегруванні треба розглядати два випадки в залежності від знака b , що читач легко зробить самостійно.

Задача 1.1.20. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)(x+2)} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{3}{(x-1)^2} + 2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) \right) \Rightarrow . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)} &= \frac{1}{9} \int \left(\frac{3}{(x-1)^2} + 2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) \right) dx = \\ &= \frac{1}{9} \left(-\frac{3}{x-1} + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \right) + C . \end{aligned}$$

Задача 1.1.21. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$.

Ще один приклад, при розв'язанні якого коефіцієнти в елементарних дробах можна знаходити усно.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} &= \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1} \right) = \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} . \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) + C = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Задача 1.1.22. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Тепер одержимо систему лінійних рівнянь:

$$(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1) \equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$(A+C)x^3 + (-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D)x^2 + (A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)x + B+D \equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$x^3 \mid A+C=0,$$

$$x^2 \mid -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0,$$

$$x \mid A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0,$$

$$x^0 \mid B+D=1.$$

Розв'язавши систему, знайдемо:

$$A=-C=\frac{1}{2\sqrt{2}}, B=D=\frac{1}{2}.$$

Звідси

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \\
& = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) \right) + C.
\end{aligned}$$

Задача 1.1.23. Записати рекурентну формулу для обчислення інтеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} = 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} \Rightarrow$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n-1)I_n \right),$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Зауваження. До такого інтегралу шляхом перетворення і заміни можна звести

$$\text{інтеграл більш загального вигляду } I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}, D = p^2 - 4q < 0.$$

$$\text{Справді, } I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{dx}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \right)^n}, t = x + \frac{p}{2}, q - \frac{p^2}{4} = a^2.$$

Задача 1.1.24 для самостійного розв'язання. Записати рекурентну формулу

$$\text{для обчислення інтеграла } I_n = \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n}.$$

Метод Остроградського виділення раціональної частини інтегралу

Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильний раціональний дріб. Введемо позначення:

$$Q(x) = (x - a_1)^{r_1} \dots (x - a_k)^{r_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{R_1} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{R_l},$$

$$Q_1(x) = (x - a_1)^{r_1-1} \dots (x - a_k)^{r_k-1} (x^2 + p_1x + q_1)^{R_1-1} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{R_l-1},$$

$$Q_2(x) = (x - a_1) \dots (x - a_k) (x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_lx + q_l),$$

звідки $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$.

Дослідження інтегрування дробово-раціональної функції приводить до співвідношення між інтегралами:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx.$$

Тут $P_1(x), P_2(x)$ - многочлени з невизначеними коефіцієнтами, які пізніше будуть знайдені методом невизначених коефіцієнтів, причому лінійна система рівнянь, з якої вони будуть знайдені, буде мати єдиний розв'язок, оскільки попередня рівність вірна; $\deg P_1(x) < \deg Q_1(x)$, $\deg P_2(x) < \deg Q_2(x)$.

Диференціюючи обидві частини рівності, одержуємо:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Звідси

$$\frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow$$

$$\frac{P_1'(x) - P_1(x) \frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow$$

$$\frac{P_1'(x)Q_2(x) - P_1(x)\frac{Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)Q_2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Вираз $S(x) = \frac{Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}$ є многочленом. Дійсно, нехай $(x-a)^k$ входить в розклад $Q_1(x)$ на множники. Тоді в розклад на множники $Q_1'(x)$ входить $(x-a)^{k-1}$. Аналогічний факт має місце для множника $(x^q + px + q)^l$. Нагадаємо, що $(x-a)(x^q + px + q)$ входить в $Q_2(x)$. Отже, $S(x)$ - цілий многочлен.

Маємо:

$$\frac{P_1'(x)Q_2(x) - P_1(x)S(x) + P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Звідси

$$P_1'(x)Q_2(x) - P_1(x)S(x) + P_2(x)Q_1(x) = P(x)$$

З цього співвідношення знаходяться методом невизначених коефіцієнтів коефіцієнти $P_1(x), P_2(x)$.

Зауважимо, що знати розклад на множники многочлена $Q(x)$ не обов'язково. Легко бачити, що $Q_1(x)$ є найбільшим спільним дільником многочленів $Q(x)$ і $Q'(x)$. Це можна зробити методом Евкліда послідовного ділення.

Задача 1.1.25. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2} dx \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \left(\frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} \right)' + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{A(x^2 + 2x + 2) - (Ax + B)(2x + 2) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

Після нескладних перетворень і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x одержимо:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & C = 0, \\
x^2 & -A + 2C + D = 1, \\
x & -2B + 2C + 2D = 0, \\
x^0 & 2A - 2B + 2D = 0.
\end{array}$$

Розв'язки системи: $A = C = 0, B = D = 1$.

$$\text{Отже, } \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Інтегрування деяких ірраціональних виразів

Інтегрування ірраціональних функцій вигляду $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$.

Тут R - раціональна функція аргументів x і $\sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$. Пропонується заміна

$$t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} \Rightarrow x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

В результаті інтеграл перейде в інтеграл $\int R(\varphi(t), t) \varphi'(t) dt$.

Можна розглянути інтеграли більш загального вигляду:

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{r_n}\right) dx.$$

Нехай N - спільний знаменник дробів $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$. Тоді всі ірраціональні вирази

можна виразити як цілі функції від $\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^N = t$. В результаті прийдемо до

раціональної функції від змінної t під інтегралом.

Задача 1.1.26. $I = \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$

Заміна: $t = \sqrt[6]{x+1} \Rightarrow \sqrt[3]{x+1} = t^2, \sqrt{x+1} = t^3, x = t^6 - 1 \rightarrow dx = 6t^5 dt.$ В результаті

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx = 6 \int t^5 \frac{1 - t^3}{1 + t^2} dt = \\ &= 6 \int t^5 \frac{1 - t^3}{1 + t^2} dt = -6 \int \frac{t^8 - t^5}{t^2 + 1} dt = -6 \int (t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1) dt + 6 \int \frac{t - 1}{t^2 + 1} dt = \\ &= 6 \left(-\frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t \right) + 6 \int \frac{t}{t^2 + 1} dt - 6 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt. \end{aligned}$$

Відповідь:

$$I = 6 \left(-\frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t \right) + 3 \ln(t^2 + 1) - 6 \operatorname{arctgt} + \tilde{C}, t = \sqrt[6]{x+1}.$$

Задача 1.1.27. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$

Заміна: $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = t^2, x = -\frac{t^2+1}{t^2-1} = -1 - \frac{2}{t^2-1}, dx = 4 \frac{t dt}{(t^2-1)^2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx &= 4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^2} = 4 \left(\int \frac{(t^2-1) dt}{(t^2-1)^2} + \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} \right) = 4 \left(\int \frac{dt}{t^2-1} + \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} \right) = \\ &= 2 \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + 4 \int \frac{dt}{(t^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Введемо позначення: $I_1 = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right|, I_2 = \int \frac{dt}{(t^2-1)^2}.$

Для знаходження другого інтегралу I_2 проінтегруємо I_1 за частинами:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{t}{t^2 - 1} + 2 \int \frac{t^2 dt}{(t^2 - 1)^2} = \frac{t}{t^2 - 1} + 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} + 2 \int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$2I_2 = -\frac{t}{t^2 - 1} - I_1 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{t}{t^2 - 1} - I_1 \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{t}{t^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C.$$

Відповідь:

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{2t}{t^2 - 1} + C, t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty).$$

Інтегрування диференційних біномів. Підстановки Чебишова.

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

Буде показано, як інтегрування ірраціональних функцій можна звести до інтегрування функцій дробово-раціональних.

1). $p \in \mathbb{Z}$.

Нехай N - спільний знаменник дробів m і n . Тоді $mN, nN \in \mathbb{Z}$. Пропонується заміна

$$x = t^N \Rightarrow x^m = t^{mN}, x^n = t^{nN}$$

$$dx = Nt^{N-1} dt.$$

2). $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Нехай N - знаменник дробу p . Пропонується заміна

$$a + bx^n = t^N \Rightarrow nbx^{n-1} dx = Nt^{N-1} dt,$$

$$dx = \frac{N}{nb} x^{-n+1} t^{N-1} dt,$$

$$(a + bx^n)^p = t^{Np},$$

$$x^m (a + bx^n)^p = t^{Np} x^m,$$

$$x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{N}{nb} t^{Np+N-1} x^n \binom{\frac{m+1}{n}}{n} dt.$$

З заміни знаходимо:

$$x^n = \frac{t^N - a}{b} \Rightarrow$$

$$x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{N}{nb} t^{Np+N-1} \left(\frac{t^N - a}{b} \right) \binom{\frac{m+1}{n}}{n} dt.$$

Тут, згідно з умовою, показники степенів – цілі числа, тому інтегрування ірраціональної функції зведено до інтегрування функції дробово-раціональної, для чого досить потім застосувати викладені раніше методики.

3). $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Нехай N - знаменник дробу p . Пропонується заміна

$$ax^{-n} + b = t^N \Rightarrow a + bx^n = t^N x^n \Rightarrow (a + bx^n)^p = t^{Np} x^{np} \Rightarrow x^m (a + bx^n)^p = t^{Np} x^{np+m},$$

$$-nax^{-n-1} dx = Nt^{N-1} dt \Rightarrow dx = -\frac{N}{na} t^{N-1} x^{n+1} dt,$$

$$x^m (a + bx^n)^p dx = -\frac{N}{na} t^{Np+N-1} x^{np+n+m+1} dt = -\frac{N}{na} t^{Np+N-1} x^n \binom{\frac{m+1}{n} + p + 1}{n} dt,$$

$$ax^{-n} + b = t^N \Rightarrow x^n = \frac{a}{t^N - b} \Rightarrow$$

$$x^m (a + bx^n)^p dx = -\frac{N}{na} t^{Np+N-1} \left(\frac{a}{t^N - b} \right) \binom{\frac{m+1}{n} + p + 1}{n} dt.$$

Так само, згідно з умовою, показники степенів – цілі числа, тому інтегрування ірраціональної функції зведено до інтегрування функції дробово-раціональної.

Зауваження. Не треба думати, що диференціальні біноми можна розглядати тільки при умові раціональності степенів підінтегральних виразів. Пізніше, в

задачі 2.1.4, буде розглянуто подібний інтеграл, в якому степінь – це так званий

«золотий» переріз $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Далі, при інтегруванні з застосуванням підстановок Чебишова і Ейлера, будемо обмежуватись їхнім зведенням до інтегрування дробово-раціональних функцій, не одержуючи остаточних відповідей.

Задача 1.1.28.
$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx.$$

Тут $p = -2 \in \mathbb{Z}$, тому застосовуємо першу підстановку Чебишова:

$$x = t^6, \sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx = 6 \int \frac{t^8 dt}{(1 + t^2)^2}.$$

Задача 1.1.29.
$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} = \int x \left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Тут $p = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, m = 1, n = \frac{2}{3}, \frac{m+1}{n} = 3 \in \mathbb{Z}, N = 2$, знаменник дробу $p = -\frac{1}{2}$, тому

застосовуємо другу підстановку Чебишова:

$$t^2 = 1 + x^{\frac{2}{3}}, 2t dt \Rightarrow \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx \Rightarrow dx = 3x^{\frac{1}{3}} t dt, x \left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx = 3x^{\frac{1}{3}} x t^{-1} t dt = 3x^{\frac{4}{3}} dt.$$

З заміни знаходимо: $x^{\frac{2}{3}} = t^2 - 1 \Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = (t^2 - 1)^2$. Отже,

$$\int x \left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx = 3 \int (t^2 - 1)^2 dt.$$

Задача 1.1.30.
$$\int \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{3 - x^2} dx = \int x^{\frac{1}{3}} (3 - x^2)^{\frac{1}{3}} dx.$$

$p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}, m = \frac{1}{3}, n = 2, \frac{m+1}{n} + p = 1 \in \mathbb{Z}, N = 3$ - знаменник дробу $p = \frac{1}{3}$.

Застосовуємо третю підстановку Чебишова:

$$3x^{-2} - 1 = t^3, 3 - x^2 = t^3 x^2, (3 - x^2)^{\frac{1}{3}} = tx^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{1}{3}}(3 - x^2)^{\frac{1}{3}} = tx,$$

$$-6x^{-3} dx = 3t^2 dt \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} x^3 t^2 dt \Rightarrow$$

$$x^{\frac{1}{3}}(3 - x^2)^{\frac{1}{3}} dx = -\frac{1}{2} tx x^3 t^2 dt = -\frac{1}{2} t^3 x^4 dt$$

З заміни маємо: $x^2 = \frac{3}{t^3 + 1} \Rightarrow x^4 = \frac{9}{(t^3 + 1)^2}$. Отже,

$$\int x^{\frac{1}{3}}(3 - x^2)^{\frac{1}{3}} dx = -\frac{9}{2} \int \frac{t^3 dt}{(t^3 + 1)^2}.$$

Підстановки Ейлера

$$\int F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Розглянемо 3 випадки.

1). Нехай $a > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} + t,$$

$$\underline{ax^2} + bx + c = \underline{ax^2} \pm 2\sqrt{ax}t + t^2 \Rightarrow x = \frac{c - t^2}{\pm 2\sqrt{at} - b},$$

$$dx = -\frac{2(\pm\sqrt{ac} \pm \sqrt{at^2 - bt})}{(\pm 2\sqrt{at} - b)^2} dt.$$

2). $c > 0$.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} + tx,$$

$$ax^2 + bx + c = c \pm 2\sqrt{c}tx + t^2 x^2 \Rightarrow x = \frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

$$dx = \frac{2(\pm a\sqrt{c} \pm \sqrt{ct^2 - bt})}{(a - t^2)^2} dt.$$

3). $D = b^2 - 4ac > 0$.

$$ax^2 + bx + c = a(x - \mu)(x - \nu),$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \mu),$$

$$a(x - \mu)(x - \nu) = t^2(x - \mu)^2 \Rightarrow x = \frac{\mu t^2 - a\nu}{t^2 - a},$$

$$dx = \frac{2at(\nu - \mu)}{(t^2 - a)^2} dt.$$

Задача 1.1.31. $I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Тут $a = 1 > 0$, тому застосуємо першу підстановку Ейлера:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + x + 1} = t; x^2 + x + 1 = x^2 - 2tx + t^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(2t + 1)^2} dt.$$

Звідси $I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = 2 \int \frac{(t^2 + t + 1) dt}{t(2t + 1)^2}$.

Задача 1.1.32. $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{-x^2 - 2x + 1}}$.

Тут $c = 1 > 0$, тому застосуємо другу підстановку Ейлера:

$$\sqrt{-x^2 - 2x + 1} = tx - 1 \Rightarrow -x^2 - 2x + 1 = t^2 x^2 - 2tx + 1 \Rightarrow x = 2 \frac{t - 1}{t^2 + 1},$$

$$dx = -2 \frac{t^2 - 2t - 1}{(t^2 + 1)^2} dt \Rightarrow$$

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{-x^2 - 2x + 1}} = - \int \frac{t^2 - 2t - 1}{t(t - 1)(t^2 + 1)} dt.$$

Задача 1.1.33. $I = \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx = \int \frac{x - \sqrt{(x+1)(x+2)}}{x + \sqrt{(x+1)(x+2)}} dx.$

Застосуємо третю підстановку Ейлера:

$$\sqrt{(x+1)(x+2)} = t(x+1) \Rightarrow x = -\frac{t^2 - 2}{t^2 - 1} = -1 + \frac{1}{t^2 - 1} \Rightarrow dx = -\frac{2tdt}{(t^2 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$I = \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx = -2 \int \frac{t^2 + 2t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3} dt.$$

Інтегрування деяких тригонометричних функцій

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Універсальна підстановка:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$dt = \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} (1+t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Слід зауважити, що універсальна підстановка, хоч і працює в багатьох випадках, на практиці призводить до інтегрування громіздких виразів. Тому часто можна запропонувати більш вдалі підстановки, виходячи з деяких властивостей підінтегральних функцій.

Введемо позначення: $u = \sin x, v = \cos x$. Нехай функція $R(u, v)$ має одну з наступних властивостей:

- 1). $R(-u, v) = -R(u, v).$

Тоді можна стверджувати, що $R(u, v) = \tilde{R}(u^2, v)u$, а значить,

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx = \\ = -\tilde{R}(1 - \cos^2 x, \cos x) d(\cos x).$$

Пропонується заміна: $t = \cos x$.

$$2). R(u, -v) = -R(u, v) \Rightarrow$$

$$R(u, v) = \tilde{R}(u, v^2) v.$$

$$R(\sin x, \cos x) = \tilde{R}(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx = \tilde{R}(\sin x, 1 - \sin^2 x) d(\sin x).$$

Пропонується заміна: $t = \sin x$.

$$3). R(-u, -v) = R(u, v).$$

$$\text{Тоді можна стверджувати, що } R(u, v) = \tilde{R}\left(\frac{u}{v}, 1\right) \frac{1}{v^2}.$$

$$R(\sin x, \cos x) dx = \tilde{R}(\operatorname{tg} x, 1) d(\operatorname{tg} x).$$

Пропонується заміна: $t = \operatorname{tg} x$.

Задача 1.1.34. $I_1 = \int \frac{\sin x dx}{a \cos x + b \sin x}, I_2 = \int \frac{\cos x dx}{a \cos x + b \sin x}.$

Безперечно, можна діяти стандартними, запропонованими раніше методами, але скоріше до цілі приведуть наступні співвідношення між цими інтегралами. Якщо перший помножити на b , а другий – на a і додати, одержимо: $bI_1 + aI_2 = \int dx = x + C_1.$

Якщо тепер перший помножити на $-a$, другий – на b і додати, одержимо:

$$-aI_1 + bI_2 = \int \frac{-a \sin x + b \cos x}{a \cos x + b \sin x} dx = \int \frac{d(a \cos x + b \sin x)}{a \cos x + b \sin x} = \ln|a \cos x + b \sin x| + C_2.$$

Розв'язуючи одержану систему рівнянь, будемо мати:

$$I_1 = \int \frac{\sin x dx}{a \cos x + b \sin x} = \frac{1}{a^2 + b^2} (bx - a \ln |a \cos x + b \sin x|) + C,$$

$$I_2 = \int \frac{\cos x dx}{a \cos x + b \sin x} = \frac{1}{a^2 + b^2} (ax + b \ln |a \cos x + b \sin x|) + \tilde{C}.$$

Задача 1.1.35. $I = \frac{1}{2} \int \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx, 0 < r < 1, -\pi < x < \pi.$

Застосуємо підстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$

В результаті одержимо:

$$I = (1-r^2) \int \frac{dt}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} t \right) + C = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

Задача 1.1.36. $J = \int \frac{1-r \cos x}{1-2r \cos x + r^2} dx, 0 < r < 1, -\pi < x < \pi.$

Очевидно, $J = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \right) dx = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$

Завдання для самоперевірки. Знайти інтеграли $I_s = \int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx$ і

$I_c = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx.$ Вказівка. Вираз $I_c - I_s$ інтегрується зрозумілим чином. Для

того, щоб проінтегрувати вираз $I_c + I_s$, слід помітити, що

$2 + \sin 2x = 3 - (\sin x - \cos x)^2.$ Далі залишається розв'язати лінійну систему

відносно двох інтегралів.

Задача 1.1.37. $\int \sin^5 x dx = -\int \sin^4 x d \cos x = -\int (1 - \cos^2 x)^2 d \cos x =$

$$\begin{aligned}
&= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d\cos x = \\
&= -\int d\cos x + 2\int \cos^2 x d\cos x - \int \cos^4 x d\cos x = \\
&= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.
\end{aligned}$$

Задача 1.1.38. $\int \cos^4 x dx$.

Заміна: $t = \operatorname{tg} x, dt = (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}, \cos^4 x = \frac{1}{(1 + t^2)^2} \Rightarrow$

$$\int \cos^4 x dx = \int \frac{dt}{(1 + t^2)^3}.$$

Далі можна застосувати рекурентну формулу, доведену в задачі 1.1.23, що радимо зробити читачу самостійно.

Зауваження. Можна кілька разів знизити степені тригонометричних функцій і проінтегрувати, користуючись таблицею.

Задача 1.1.39. $I = \int \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx = \\
&= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx = \\
&= \frac{1}{\sin(a-b)} \left(\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} dx - \int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} dx \right) = \\
&= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C.
\end{aligned}$$

Задача 1.1.40. $I = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Заміна: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Слід зазначити, що область визначення підінтегральної функції після заміни – незв’язна множина, що складається з інтервалів $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi), n \in \mathbb{Z}$. Це означає, що константи, які завжди виникають після інтегрування, довільні і, взагалі кажучи, не пов’язані між собою. Далі буде виникати проблема узгодження цих сталих величин, оскільки первісна – це неперервна функція, і в кожному кінці проміжку лівостороннє і правостороннє граничні значення первісної повинні бути рівними. Будемо позначати константу для первісної на інтервалі $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi), n \in \mathbb{Z}$ через C_n , в силу цього зауваження константа на інтервалі $(-\pi, \pi)$ позначається C_0 . Виконаємо інтегрування:

$$I = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right) + C_n.$$

Умова неперервності у точці $2n\pi + \pi - 0 = 2n\pi + \pi + 0$:

$$I(2n\pi + \pi - 0) = I(2n\pi + \pi + 0) \Rightarrow$$

Знайдемо окрему кожену границю.

а). $x = 2n\pi + \pi - \delta, \delta \rightarrow +0 \Rightarrow x \rightarrow 2n\pi + \pi - 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2n\pi + \pi - 0} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) + C_n \right) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(3 \operatorname{tg} \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right) + 1 \right) + C_n \right) =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(3 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right) + 1 \right) + C_n \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_n.$$

b). $x = 2n\pi + \pi + \delta, \delta \rightarrow +0 \Rightarrow x \rightarrow 2n\pi + \pi + 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2n\pi + \pi + 0} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) + C_n \right) = \\ & = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(3 \operatorname{tg} \left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} \right) + 1 \right) + C_{n+1} \right) = \\ & = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(3 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} \right) + 1 \right) + C_{n+1} \right) = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{n+1}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_n = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_{n+1} \Rightarrow C_{n+1} = C_n + \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

і C_0 - довільна стала. З рекурентного співвідношення випливає:

$$C_1 = C_0 + \frac{\pi}{\sqrt{5}}, C_2 = C_1 + \frac{\pi}{\sqrt{5}} = C_0 + \frac{2\pi}{\sqrt{5}}, \dots, C_n = C_0 + \frac{n\pi}{\sqrt{5}}, \dots$$

Аналогічна ситуація буде при цілих від'ємних значеннях n .

З умови $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$ випливає $2n\pi < x + \pi < (2n+2)\pi$, а звідси

$$n < \frac{x + \pi}{2\pi} < n + 1 \Rightarrow \left[\frac{x + \pi}{2\pi} \right] = n. \text{ В результаті приходимо до відповіді:}$$

$$I = \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) + \frac{\pi}{\sqrt{5}} \left[\frac{x + \pi}{2\pi} \right] + C_0, x \neq (2n+1)\pi;$$

$$I((2n+1)\pi) = \lim_{x \rightarrow (2n+1)\pi} I(x) = \frac{2n+1}{2\sqrt{5}} \pi + C_0, n \in \mathbb{Z}.$$

Еліптичні інтеграли

Зазначимо, що в математиці існує велика кількість інтегралів, що не виражаються через елементарні функції. Частина з них грає велику роль в

різних розділах, добре вивчені, існують таблиці їхніх значень, тощо. З деякими з них ми познайомимось в частині 2. Зараз дамо означення трьох таких функцій, так званих, еліптичних інтегралів 1-го, 2-го і 3-го роду, які мають наступний запис у формі Лежандра.

1-го роду:

| | |
|---|---------|
| $F(k, \varphi) \triangleq \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$ | (1.1.1) |
|---|---------|

2-го роду:

| | |
|---|---------|
| $E(k, \varphi) \triangleq \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$ | (1.1.2) |
|---|---------|

3-го роду:

| | |
|--|---------|
| $\Pi(k, \varphi) \triangleq \int \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$ | (1.1.3) |
|--|---------|

$k \in (0, 1)$ називається модулем, φ - аргументом, $h \in \mathbb{C}$.

Особливо часто застосовуються інтеграли 1-го і 2-го роду.

1.2. Визначені інтеграли

Нехай f - функція, задана на відрізку $[a, b]$.

Означення. Кажуть, що число I є інтегралом Рімана від функції f на відрізку $[a, b]$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для будь-якого розбиття

$$(P, \xi): a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, x_{i-1} < \xi_i < x_i, \Delta x_i \triangleq x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$$

вибраними точками відрізка $[a, b]$ і $\lambda(P) \triangleq \max |x_{i+1} - x_i| < \delta, i = 0, 1, \dots, n-1$, має місце співвідношення

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| < \varepsilon$$

Отже, маємо визначення інтеграла у вигляді:

$$I = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Інтеграл від функції f по відрізку $[a, b]$ позначається символом

$$\int_a^b f(x) dx$$

Основні властивості визначеного інтеграла

a). $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx,$

b). $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$

c). $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

d). $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \Rightarrow$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

e). **Теорема про середнє.** Якщо підінтегральна функція неперервна, то знайдеться точка $\xi \in [a, b]$ така, що $f(\xi) = C$ і

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

f). **Лема (основна).** Нехай $f \in C^0[a, b]$. Тоді похідна по верхній межі від її інтегралу дорівнює значенню підінтегральної функції в цій межі:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

g). **Формула Ньютона-Лейбница.** Нехай $f \in C^0[a,b]$ і Φ - якась її первісна.

Має місце формула:

$$\int_a^x f(t) dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Повні еліптичні інтеграли

Так називаються визначені еліптичні інтеграли, якщо вони беруться по проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Вони знаходять широке застосування у математиці і базуються на вже відомих невизначених інтегралах (див. стор. 34).

Повний еліптичний інтеграл 1-го роду:

| | |
|---|---------|
| $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}.$ | (1.2.1) |
|---|---------|

Повний еліптичний інтеграл 2-го роду:

| | |
|---|---------|
| $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$ | (1.2.2) |
|---|---------|

Задача 1.2.1. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}.$

Застосуємо правило Лопіталю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\frac{d}{dx} \int_0^x e^{2t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{d}{dx} e^{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

Задача 1.2.2. Сприймаючи наступний вираз як суму Дарбу деякого визначеного інтегралу, обчислити її границю, звівши задачу до знаходження цього інтегралу:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right).$$

Маємо:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

Це є сума Дарбу функції $f(x) = \frac{1}{1+x}$ з розбиттям відрізка $[0,1]$ точками

$x_k = \frac{k}{n}, k=0,1,\dots,n; \xi_k = x_k \forall k=1,2,\dots,n$. Отже,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2.$$

Задача 1.2.3. Обчислити визначений інтеграл.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx &= \int_0^{1/2} \frac{8x}{1+4x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \operatorname{arctg} 2x d(\operatorname{arctg} 2x) = \\ &= \ln(1+4x^2) \Big|_0^{1/2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg}^2 2x \Big|_0^{1/2} = \ln 2 - 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{16} + 0 = \ln 2 - \frac{\pi^2}{64}. \end{aligned}$$

Задача 1.2.4. Обчислити визначений інтеграл.

Розв'язання.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{1-t^2 - \frac{2t}{1+t^2}}{\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{2(1-2t-t^2)}{(1+t)^4} dt.$$

Подемо дріб $\frac{2(1-2t-t^2)}{(1+t)^4}$ у вигляді суми простих дробів:

$$\begin{aligned} \frac{2-4t-2t^2}{(1+t)^4} &= \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^3} + \frac{D}{(1+t)^4} = \\ &= \frac{A(1+t)^3 + B(1+t)^2 + C(1+t) + D}{(1+t)^4}. \end{aligned}$$

$$A(1+t)^3 + B(1+t)^2 + C(1+t) + D = 2 - 4t - 2t^2.$$

При $t = -1$, $D = 4$;

Прирівнюючи коефіцієнти при t^3 , $A = 0$;

Прирівнюючи коефіцієнти при t^2 , $3A + B = -2 \Rightarrow B = -2$;

Прирівнюючи коефіцієнти при t , $3A + 2B + C = -4 \Rightarrow C = 0$;

$$\text{Звідси } \int_0^1 \left(\frac{4}{(1+t)^4} - \frac{2}{(1+t)^2} \right) dt = \left(-\frac{4}{3(1+t)^3} + \frac{2}{1+t} \right) \Big|_0^1 = -\frac{4}{3 \cdot 8} + 1 + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{6}.$$

Задача 1.2.5. Обчислити визначений інтеграл.

Розв'язання.

$$\int_{\pi/4}^{\arctan 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right. \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2} \left| = \int_1^3 \frac{dt}{(3t+5) \frac{2t}{1+t^2} (1+t^2)} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{dt}{t(3t+5)}.$$

$$\frac{1}{t(3t+5)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{3t+5} = \frac{A(3t+5) + Bt}{t(3t+5)},$$

$$A(3t+5) + Bt = 1.$$

При $t = 0$, $A = \frac{1}{5}$;

При $t = -\frac{5}{3}$, $B = -\frac{3}{5}$;

Звідси $\frac{1}{10} \int_1^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{3t+5} \right) dt = \frac{1}{10} (\ln|t| - \ln|3t+5|) \Big|_1^3 = \frac{1}{10} (\ln 3 - \ln 14 - 0 + \ln 8) =$

$$= \frac{1}{10} \ln \frac{24}{14} = \frac{1}{10} \ln \frac{12}{7}.$$

Задача 1.2.6. Обчислити визначений інтеграл.

Розв'язання.

$$\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx = \int_0^{\pi} (1 + \cos x)^4 dx = \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos x + \cos^2 x)^2 dx =$$

$$= \int_0^{\pi} (1 + 4 \cos x + 6 \cos^2 x + 4 \cos^3 x + \cos^4 x) dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{35}{8} + 4 \cos x + \frac{7}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx + 4 \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) \cos x dx =$$

$$= \left(\frac{35}{8} x + 4 \sin x + \frac{7}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right) \Big|_0^{\pi} + 4 \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) d(\sin x) =$$

$$= \frac{35}{8} \pi + 4 \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{35}{8} \pi.$$

Задача 1.2.7. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx, a > 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну:

$$x = a \sin t, x: 0 \rightarrow a \forall t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, dx = a \cos t dt.$$

Тоді

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Задача 1.2.8. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}} &= \left| \begin{array}{l} x = 3 \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{3 dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/4} \frac{3 dt}{(9+9 \operatorname{tg}^2 t)^{3/2} \cos^2 t} = \\ &= \frac{3}{27} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t} dt = \frac{3}{27} \int_0^{\pi/4} \cos t dt = \frac{1}{9} \sin t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{18}. \end{aligned}$$

Задача 1.2.9. Обчислити визначений інтеграл

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b \cos^2 x}, a > 0, b > -a \Rightarrow a + b > 0.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b \cos^2 x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a \sin^2 x + a \cos^2 x + b \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a \sin^2 x + (a+b) \cos^2 x}. \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a \operatorname{tg}^2 x + a + b} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{a+b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} \operatorname{tg} x \right)^2} \frac{dx}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Вигляд одержаної підінтегральної функції підказує заміну:

$$t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} \operatorname{tg} x, x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow t: 0 \rightarrow \infty, dt = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}} dt.$$

Звідси одержуємо:

$$I = \frac{\sqrt{a+b}}{(a+b)\sqrt{a}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{a+b}} \operatorname{arctgt} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+b)}}.$$

В частині 2 будуть доведені деякі загальні факти, що стосуються визначених інтегралів, наприклад, наступний (задача 2.1.17). Для неперервної функції f

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

Застосовуючи цю властивість, одержимо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+b\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+b\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+b)}}.$$

Звідси випливає:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+b\cos^2 x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+b\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2a+b)dx}{(a+b\cos^2 x)(a+b\sin^2 x)} = \frac{\pi}{\sqrt{a(a+b)}}.$$

Остаточно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a+b\cos^2 x)(a+b\sin^2 x)} = \frac{\pi}{(2a+b)\sqrt{a(a+b)}}.$$

Задача 1.2.10. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\pi} \cos nx \cos^n x dx.$$

Застосовуючи формулу Ейлера, запишемо: $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$.

Звідси

$$\cos^n x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(n-k)x} e^{-ikx} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(n-2k)x},$$

$$\begin{aligned} \cos nx \cos^n x &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(n-2k)x} (e^{inx} + e^{-inx}) = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{2i(n-k)x} + e^{-2ikx}). \end{aligned}$$

Зауважимо, що $C_n^k e^{2i(n-k)x} = C_n^{n-k} e^{2i(n-k)x} = C_n^j e^{2ijx} \quad \forall j = n - k$. Знову помінявши у останній сумі j на k , перепишемо цю суму у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{e^{2ikx} + e^{-2ikx}}{2} \right) &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n C_n^k \left(\frac{e^{2ikx} + e^{-2ikx}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n C_n^k \cos 2kx. \end{aligned}$$

При $k = 1, 2, \dots, n$

$$\int_0^\pi \cos 2kx dx = \frac{1}{2k} \sin 2kx \Big|_0^\pi = 0,$$

Отже, $\int_0^\pi \cos nx \cos^n x dx = \frac{1}{2^n} \int_0^\pi dx = \frac{\pi}{2^n}$.

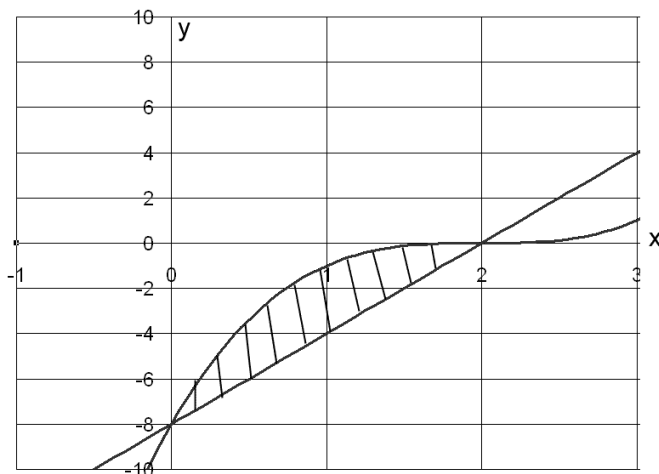
1.3. Застосування визначених інтегралів у геометрії та механіці

Обчислення площ фігур

Задача 1.3.1. Обчислити площі фігур, обмежених графіками функцій.

$$y = (x - 2)^3, \quad y = 4x - 8.$$

Розв'язання.



$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^2 ((x-2)^3 - 4x + 8) dx = 2 \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 4x + 8) dx = \\
 &= 2 \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = 2 \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2 = 8.
 \end{aligned}$$

Задача 1.3.2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, заданими рівняннями

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$$

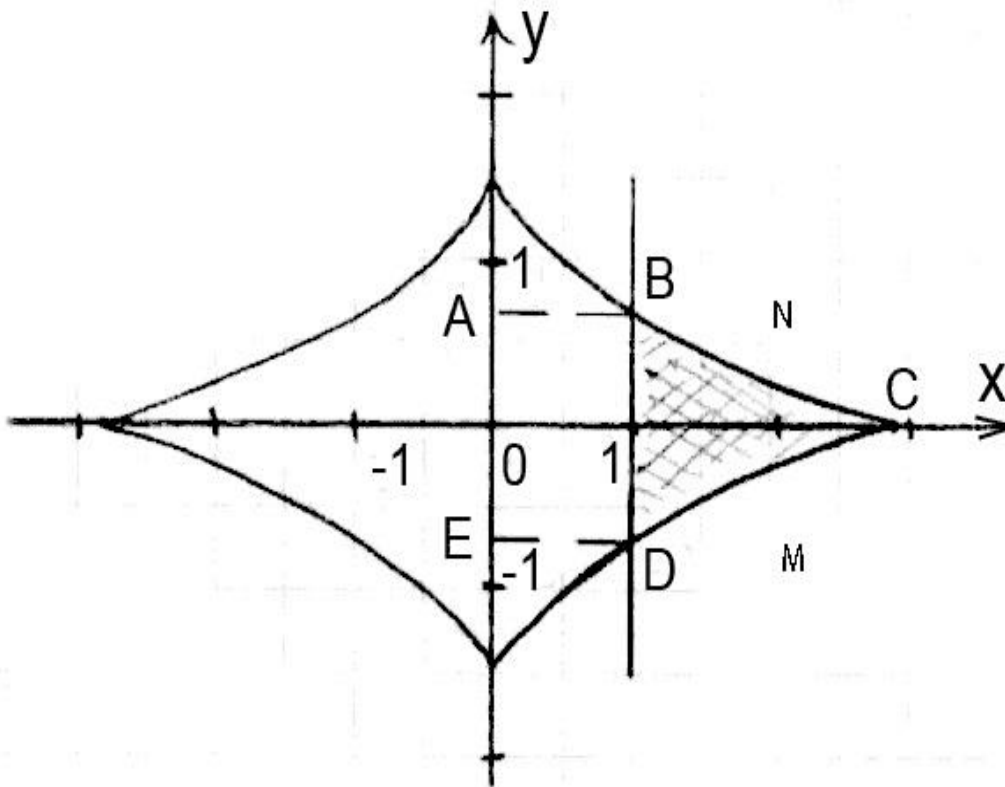
Розв'язання.

Границі інтегрування для знаходження площини фігури, обмеженої вказаними лініями, знайдемо з розв'язку нерівності

$$2\sqrt{2} \cos^3 t \geq 1 \Rightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

В даному випадку, зображеному на малюнку, маємо наступну область зміни

параметру: $t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right].$



При зміні параметру $t: -\frac{\pi}{4} \rightarrow 0$ координата x зростає: $1 \rightarrow 2\sqrt{2}$. При цьому

ордината y від'ємна і тому інтеграл $-S_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 y(t)x'(t)dt$ дає площу з від'ємним

знаком криволінійного трикутника, що знаходиться нижче осі Ox . При

подальшому зростанні параметру $t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ордината додатна, а абсциса спадає:

$x: 2\sqrt{2} \rightarrow 1$. Отже, $x'(t) < 0$ і аналогічно: інтеграл $-S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} y(t)x'(t)dt$ дає площу

криволінійного трикутника, що знаходиться вище осі Ox , також з від'ємним

знаком. Отже, щоб одержати площу S криволінійного трикутника з границею

$DMCNBD$, треба додати одержані значення інтегралів, помноживши їхню суму

на -1:

$$S = S_1 + S_2 = - \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 y(t)x'(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} y(t)x'(t)dt \right) = - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} y(t)x'(t)dt .$$

$$\begin{aligned}
S &= - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2} \sin^3 t \cdot 6\sqrt{2} \cos^2 t \cdot (-\sin t) dt = \\
&= 24 \int_0^{\pi/4} \sin^4 t \cos^2 t dt = 3 \int_0^{\pi/4} \sin^2 2t (1 - \cos 2t) dt = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 4t)(1 - \cos 2t) dt = \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2t - \cos 4t + \cos 6t \cos 2t) dt = \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/4} \left(1 - \cos 2t - \cos 4t + \frac{1}{2}(\cos 6t + \cos 2t) \right) dt = \\
&= \frac{3}{4} \int_0^{\pi/4} (2 - 2\cos 2t - 2\cos 4t + \cos 6t + \cos 2t) dt = \\
&= \frac{3}{4} \int_0^{\pi/4} (2 - \cos 2t - 2\cos 4t + \cos 6t) dt = \\
&= \frac{3}{4} \left(2t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + \frac{1}{6} \sin 6t \right) \Big|_0^{\pi/4} = \\
&= \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{24} (3\pi - 4) = \frac{1}{8} (3\pi - 4).
\end{aligned}$$

Радимо читачу проаналізувати загальну ситуацію, в якій при зростанні параметру $t: \alpha \rightarrow \beta$ точка на границі області рухається проти годинникової стрілки і при цьому сама область залишається зліва. Відповідь:

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt.$$

Легко також довести формулу

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t) dt.$$

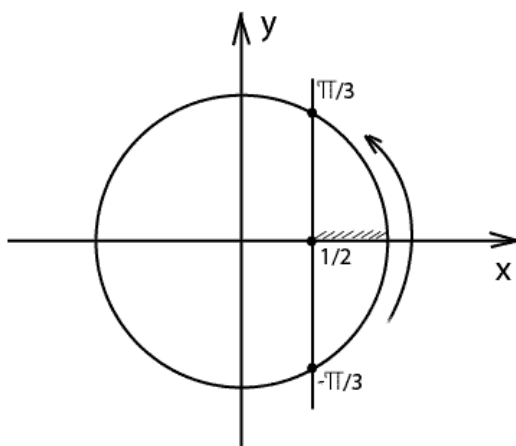
Інколи зручно користуватись формулою в симетричній формі:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt$$

Задача 1.3.3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, заданими рівняннями в полярних координатах.

$$\rho = 4 \cos \varphi, r = 2 (\rho \geq 2).$$

Розв'язання.



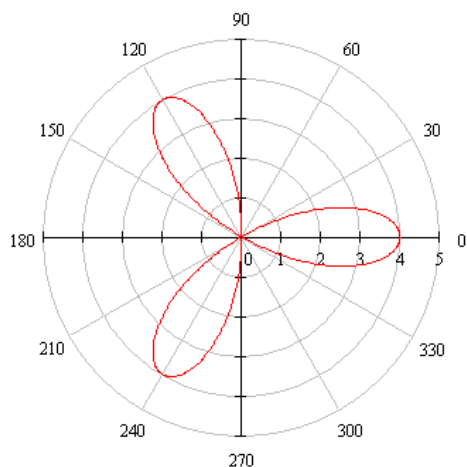
$$4 \cos 3\varphi \geq 2,$$

$$\cos 3\varphi \geq \frac{1}{2}.$$

Звідси

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$



$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi,$$

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/9}^0 16 \cos^2 3\varphi d\varphi = 24 \int_{-\pi/9}^0 (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = 24 \left(\varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_{-\pi/9}^0 =$$

$$= \frac{8\pi}{3} + \frac{24}{6} \sin \frac{6\pi}{9} = \frac{8\pi}{3} + 4 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

Задача 1.3.4. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, заданими рівняннями в полярних координатах.

$$\varphi = \sin \pi\rho, \rho \in [0,1], \varphi = 0.$$

Розв'язання. Для легшого розуміння ситуації краще розв'язати рівняння відносно ρ :

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \arcsin \varphi, \varphi: 0 \rightarrow 1, \rho: 0 \rightarrow \frac{1}{2}, \\ 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \varphi, \varphi: 1 \rightarrow 0, \rho: \frac{1}{2} \rightarrow 1. \end{cases}$$

При $\varphi: 0 \rightarrow 1, \rho: 0 \rightarrow \frac{1}{2}$ за формулою

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_1^2(\varphi) d\varphi, \rho_1 = \frac{1}{\pi} \arcsin \varphi$$

обчислюється площа сегмента між графіком кривої, заданої цим рівнянням і відрізком променя $\varphi = 1$. При $\varphi: 1 \rightarrow 0, \rho: \frac{1}{2} \rightarrow 1, \rho = 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \varphi$ за формулою

$$-S_2 = \frac{1}{2} \int_1^0 \rho_2^2(\varphi) d\varphi, \rho_2 = 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \varphi.$$

Одержуємо мінус площу сектора від відрізка променя $\varphi = 1$ до відрізка променя $\varphi = 0$. Тому сума $-S_2 + S_1$ дає мінус шукану площу, і це відповідає

інтегруванню по $\rho: 0 \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned}
-S &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (\arcsin \varphi)^2 d\varphi + \int_1^0 \left(1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \varphi \right)^2 d\varphi \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^2 \varphi'_\rho d\rho = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^2 \varphi'_\rho d\rho = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^2 \cos \pi \rho d\rho = -\frac{1}{2} \left(\rho^2 \sin \pi \rho \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \rho \sin \pi \rho d\rho \right) = \\
&= \int_0^1 \rho \sin \pi \rho d\rho = \frac{1}{\pi} \left(\rho \cos \pi \rho \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos \pi \rho d\rho \right) = \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\pi} \sin \pi \rho \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

Задача 1.3.5. Обчислити площу лемніскати:

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right].$$

$$\frac{S}{4} = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow S = a^2.$$

Обчислення довжин дуг кривих

Задача 1.3.5. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівнянням у прямокутній системі координат.

Розв'язання.

$$y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}.$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx,$$

$$l = \int_0^{8/9} \sqrt{1 + \frac{(x+1)^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{8/9} \sqrt{\frac{1-x^2+x^2+2x+1}{1-x^2}} dx = \int_0^{8/9} \sqrt{\frac{2+2x}{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^{8/9} \sqrt{\frac{2}{1-x}} dx = \sqrt{2} \int_0^{8/9} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{2} \sqrt{1-x} \Big|_0^{8/9} = -2(\sqrt{2/9} - \sqrt{2}) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Задача 1.3.6. Обчислити довжину дуги кривої, заданої параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} x' &= 4(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 4t \cos t, \\ y' &= 4(\cos t - \cos t + t \sin t) = 4t \sin t. \end{aligned}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt,$$

$$l = \int_0^2 \sqrt{16t^2 \cos^2 t + 16t^2 \sin^2 t} dt = \int_0^2 4t dt = 2t^2 \Big|_0^2 = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

Задача 1.3.7. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівнянням в полярних координатах.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \rho &= 2e^{4\varphi/3}, \\ -\pi/2 &\leq \varphi \leq \pi/2. \end{aligned}$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi;$$

$$\rho' = \frac{8}{3} e^{4\varphi/3}.$$

$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4e^{8\varphi/3} + \frac{64}{9} e^{8\varphi/3}} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\frac{100}{9} e^{8\varphi/3}} d\varphi = \frac{10}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\varphi/3} d\varphi =$$

$$= \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{4} e^{4\varphi/3} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{5}{2} \left(e^{\frac{2\pi}{3}} - e^{-\frac{2\pi}{3}} \right).$$

Довжина дуги лемніскати Бернуллі

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\psi, \psi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

$$\rho\rho'_\psi = -a^2 \sin 2\psi \Rightarrow \rho'_\psi = -\frac{a^2 \sin 2\psi}{\rho} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\rho^2 + (\rho'_\psi)^2} = \sqrt{a^2 \cos 2\psi + \frac{a^4 \sin^2 2\psi}{a^2 \cos 2\psi}} = a \sqrt{\frac{\cos^2 2\psi + \sin^2 2\psi}{\cos 2\psi}} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\psi}} \Rightarrow$$

$$l(\theta) = a \int_0^\theta \frac{d\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}} = a \int_0^\theta \frac{d\psi}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \psi}}.$$

Таким чином прийшли до еліптичного інтегралу 1-го роду. Оскільки таблиці для них розроблені для значень множника перед квадратом синуса під коренем менше за одиницю, зробимо заміну $2\sin^2 \psi = \sin^2 \varphi$. Звідси, дійсно, можна визначити φ , оскільки $\psi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 0 \leq 2\sin^2 \psi \leq 1$. Нехай зміні $\psi \in [0, \theta]$ відповідає зміна $\varphi \in [0, \alpha]$, тобто, $2\sin^2 \theta = \sin^2 \alpha$. З заміни одержимо:

$$\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \Rightarrow \cos \psi d\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi d\varphi \Rightarrow d\psi = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{2} \cos \psi} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \psi}} &= \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{2} \cos \psi \sqrt{1 - 2\sin^2 \psi}} = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{d\varphi}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

$$l(\theta) = a \int_0^{\theta} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\sin^2\psi}} = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} \triangleq \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha\right).$$

При обчисленні чверті лемніскати, що знаходиться у 1-й чверті, прийшли до повного еліптичного інтегралу 1-го роду (див. (1.1.1)), маючи на увазі, що значенню $\theta = \frac{\pi}{4}$ відповідає кут $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} L = 4l\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}} = 4a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\sin^2\psi}} = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \\ &= 2\sqrt{2}a \mathbf{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Історично склалось, що довжина всієї лемніскати обчислюється за формулою, що нагадує формулу для довжини кола: $L = 2\varpi a$. Тут ϖ - інша форма написання літери «пі». Значення знайдемо, прирівнюючи цей вираз тільки що знайденому інтегралу:

$$\varpi = \sqrt{2} \mathbf{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

або

$$\varpi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}}.$$

Тепер запишемо цей еліптичний інтеграл у декартових координатах, ввівши заміну:

$$x = \sqrt{\cos 2\psi} : 1 \rightarrow 0 \forall \psi : 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}; \cos 2\psi = x^2, 2x dx = -2 \sin 2\psi d\psi \Rightarrow$$

$$d\psi = -\frac{xdx}{\sin 2\psi} = -\frac{xdx}{\sqrt{1-\cos^2 2\psi}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} \Rightarrow$$

$$\varpi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{x \sqrt{1-x^4}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Цю тему буде продовжено у наступній частині, після вивчення функцій Ейлера. Зауваження. Корисно також знати, що існує геометричне означення лемніскати Бернуллі – це геометричне місце точок, добуток відстаней від яких до двох фіксованих точок площини, що називаються фокусами, є стала величина.

Більш точно: нехай фокуси мають координати $F_1(-a,0), F_2(a,0)$, відстані від довільної точки $M(x,y)$ лемніскати до позначимо r_1, r_2 . Тоді $r_1 r_2 = a^2$. (Порівняйте з означенням еліпса.) Виходячи з цього означення, можна легко прийти до рівняння лемніскати у декартових координатах:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Тільки що, при знаходженні довжини лемніскати, ми працювали для більшої зручності з дещо іншим рівнянням: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Зрозуміло, що це не має принципового значення для визначення лемніскатної константи, тощо.

Довжина еліпса

Розглянемо еліпс, рівняння у декартових координатах якого є

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0, c = \sqrt{a^2 - b^2}, \varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \varepsilon \in [0,1).$$

Нагадаємо, що останнє відношення називається ексцентриситетом еліпса.

Очевидно, точки з координатами

$$x = a \cos t, y = a \sin t, t \in [0, 2\pi)$$

задовольняють його рівнянню. Тут t - кут між радіусом-вектором точки на еліпсі і віссю Ox . Таким чином, одержали його рівняння у параметричній формі. Звідси $x' = -a \sin t, y' = b \cos t, t \in [0, 2\pi)$. Тепер можна знайти довжину дуги еліпса між точками, яким відповідають кути $0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$:

$$L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = a \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t} dt =$$

$$= a \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)^2 \cos^2 t} dt = a \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt \Rightarrow$$

$$L\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt.$$

Оскільки, як буде показано в частині 2 Практикуму, задача 2.1.17,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt,$$

приходимо до знаходження довжини всього еліпса як довжину його дуги в першій чверті, помножену на чотири:

$L(0, 2\pi) = 4L\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, і виразиться вона через повний еліптичний інтеграл 2-го

роду:

$$L(0, 2\pi) = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = 4aE(\varepsilon).$$

Як і у випадку для лемніскати, запишемо цей інтеграл у вигляді ряду:

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\varepsilon^2 \sin^{2n} t}{(2n-1)}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 E(\varepsilon) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\varepsilon^2 \sin^{2n} t}{(2n-1)} \right) dt = \\
 &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n-1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt = \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n-1)} \right).
 \end{aligned}$$

Тут було використано значення інтеграла (див. додаток 2.10 або (2.9.1)), яке вже зустрічалось при обчисленні довжини лемніскати:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}.$$

Остаточно, довжина еліпса буде мати вигляд:

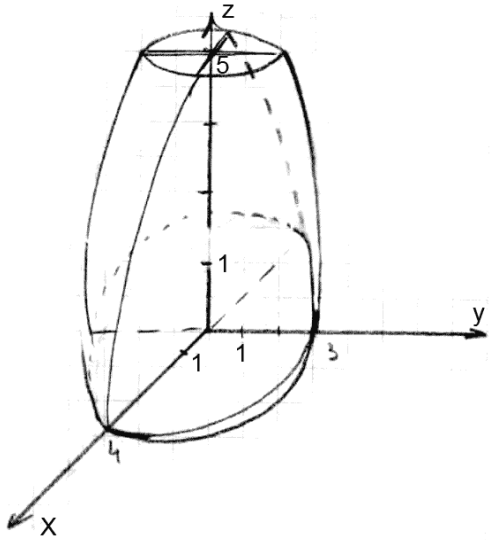
$$L(0, 2\pi) = 4aE(\varepsilon) = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = 2\pi a \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n-1)} \right).$$

Обчислення об'ємів тіл

Задача 1.3.8. Обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями.

Розв'язання.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, z = 5, z = 0.$$



Поперечним перерізом є еліпс.

$$\frac{x^2}{16\left(1-\frac{z^2}{64}\right)} + \frac{y^2}{9\left(1-\frac{z^2}{64}\right)} = 1.$$

Площа еліпса, перерізу еліпсоїда горизонтальною площиною на висоті z :

$$S(z) = \pi ab = 12\pi \left(1 - \frac{z^2}{64}\right).$$

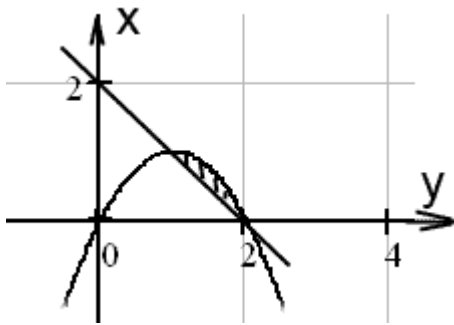
Об'єм частини еліпсоїда, вказаної в умові:

$$V = 12\pi \int_0^5 \left(1 - \frac{z^2}{64}\right) dz = 12\pi \left(z - \frac{z^3}{192}\right) \Big|_0^5 = 12\pi \left(5 - \frac{125}{192}\right) = \frac{835}{16}\pi.$$

Задача 1.3.9. Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур відносно осі обертання Ox , обмежених графіками функцій.

Розв'язання.

$$y = 2x - x^2, y = -x + 2.$$



$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

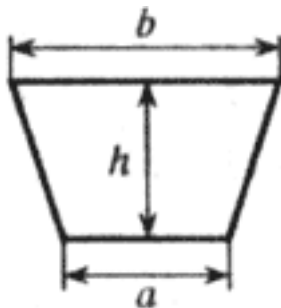
$$V = \pi \int_1^2 (2x - x^2 + x - 2)^2 dx = \pi \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)^2 dx =$$

$$= \pi \int_1^2 (x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4) dx = \pi \left(\frac{1}{5} x^5 - \frac{3}{2} x^4 + \frac{13}{3} x^3 - 6x^2 + 4x \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \pi \left(\frac{32}{5} - 24 + \frac{104}{3} - 24 + 8 - \frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{13}{3} + 6 - 4 \right) = \frac{\pi}{30}.$$

Задача 1.3.10. Обчислити силу, з якою вода давить на греблю, переріз якої має форму рівнобічної трапеції (малюнок нижче). Густина води, $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, прискорення вільного падіння $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. $a = 6,6 \text{ м}$, $b = 10,8 \text{ м}$, $h = 4,0 \text{ м}$.

Вказівка. Тиск на глибині x рівний $\rho g x$.



Розв'язання.

$$dF = \rho g h \cdot \frac{a+b}{2} h dh.$$

$$F = \rho g \frac{a+b}{2} \int_0^4 h^2 dh = 1000 \cdot 10 \cdot \frac{6,6+10,8}{2} \cdot \int_0^4 h^2 dh = 87000 \cdot \frac{h^3}{3} \Big|_0^4 = 1856000 \text{ Н}.$$

$$F = 18,56kH.$$

1.4. Невласні інтеграли

Невласні інтеграли 1-го роду

Деякі теоретичні відомості

Нехай f - функція інтегровна на кожному обмеженому відрізку $[a, A]$, $D(f)=[a, \infty)$ (будемо про неї говорити, що вона локально інтегровна). Введемо позначення

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx$$

Якщо

$$\exists \lim_{A \rightarrow \infty} F(A) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx,$$

тоді ця границя називається невластним інтегралом 1-го роду від функції f . В такому разі кажуть, що інтеграл збігається. Якщо ця границя не існує або нескінченна, кажуть, що інтеграл розбігається.

Зауважимо, що у випадку невід'ємної підінтегральної функції функція $F(A)$ монотонно неспадна, тому при $A \rightarrow \infty$ вона може прямувати до скінченної границі або до нескінченності.

Очевидно,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^A f(x) dx + \int_A^{\infty} f(x) dx$$

Другий доданок називається залишком інтеграла: $R(A) = \int_A^{\infty} f(x) dx$.

Теорема. Невласний інтеграл збігається тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{A \rightarrow \infty} R(A) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^{\infty} f(x) dx = 0.$$

Критерій Коші. Невласний інтеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ збігається тоді і тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > a, \forall A > M, B > 0 \left| \int_A^{A+B} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Означення. Невласний інтеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл від модуля підінтегральної функції:

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

Теорема. Якщо $\int_a^{\infty} f(x) dx$ збігається абсолютно, то він збігається.

Ознака порівняння (Вейєрштраса). Нехай $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тоді:

- a). із збіжності інтеграла $\int_a^{\infty} g(x) dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{\infty} f(x) dx$;
(g при цьому називається мажорантою для f);
- b). з розбіжності $\int_a^{\infty} f(x) dx$ випливає розбіжність $\int_a^{\infty} g(x) dx$ (f по відношенню до g називається мінорантою).

Ознака порівняння в граничній формі. Нехай $0 \leq f(x) \leq g(x)$ і існує

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 < K < \infty.$$

Тоді інтеграли $\int_a^{\infty} f(x) dx$ і $\int_a^{\infty} g(x) dx$ водночас збігаються або розбігаються.

Якщо $K = 0$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{\infty} g(x) dx$ випливає збіжність інтеграла

$$\int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Зауваження. Якщо функція приймає значення різних знаків, ознаку порівняння Вейерштрасса можна застосовувати тільки для дослідження абсолютної збіжності.

Розглянемо один з найважливіших інтегралів, з яким вдається порівняти деякі невласні інтеграли 1-го роду.

Базовий приклад 1.
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A \rightarrow +\infty} (A^{1-\alpha} - 1) = \frac{1}{\alpha-1} < \infty \forall a > 1.$$

Очевидно, цей інтеграл розбігається при $a \leq 1$.

Розглянемо інтеграл по всій дійсній осі:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \int_{-A}^B f(x) dx.$$

Очевидно, із збіжності цього інтеграла випливає існування границі інтегралів по симетричним областям:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Обернене твердження несправедливе. Для останньої границі існує назва: інтеграл в сенсі головного значення, і позначається він таким чином:

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

і читається “value principle”.

Невласні інтеграли від знакозмінних функцій

Ознака Абеля. Нехай

1). Інтеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ збігається, хоча б неабсолютно.

2). Функція $g(x)$ монотонна і обмежена: $|g(x)| \leq L$.

Тоді інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ збігається (взагалі кажучи, неабсолютно).

Ознака Діріхле. Нехай

1). Інтеграл функція f локально інтегровна, $\forall A > a \left| \int_a^A f(x)dx \right| \leq K$

(константа K не залежить від A).

2). Функція $g(x)$ монотонно прямує до нуля при $x \rightarrow \infty$.

Тоді інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ збігається (взагалі кажучи, неабсолютно).

Невласні інтеграли 2-го роду

Так називаються інтеграли по обмеженому проміжку від необмеженої функції.

Розглянемо функцію f , визначену в області $D(f) = (a, b]$ і будемо вважати, що

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

Означення. Невласним інтегралом 2-го роду від функції f по множині $(a, b]$ називається границя

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx.$$

Невласний інтеграл 2-го роду зводиться до невластного інтегралу 1-го роду в

результаті заміни: $t = \frac{b-a}{x-a} : \infty \rightarrow 1 \forall x : a+0 \rightarrow b, x = \frac{b-a}{t} + a, dx = -\frac{b-a}{t^2} dt$.

В результаті

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{b-a}{t} + a\right) dt.$$

Таким чином, для невластних інтегралів 2-го роду справедливі такі ж факти, як і для інтегралів 1-го роду. Читач самостійно може сформулювати і довести всі ознаки збіжності інтегралів 2-го роду.

Нехай $c \in (a, b)$ - внутрішня точка інтервалу. Тоді за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Інколи треба підкреслити, що

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \sigma \rightarrow +0}} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\sigma}^b f(x)dx \right),$$

тобто, до цієї внутрішньої точки c треба підходити з різними, взагалі кажучи, швидкостями. Якщо ж до цієї точки підходимо симетрично, то така границя називається головним значенням інтеграла і позначається $V.P.$:

$$V.P. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right).$$

Базовий приклад 2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \lim_{\delta \rightarrow 0} (1 - \delta^{1-a}) = \frac{1}{1-a} < \infty \quad \forall a < 1.$

Задача 1.4.1. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0,$$

тому перший з цих інтегралів збігається, $x=0$ - точка усувного розриву. Другий теж збігається, оскільки для підінтегральної функції існує інтегровна

мажоранта: $\frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} < \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}, x > 1.$

Задача 1.4.2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^2+x^3+x^4}}.$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^2+x^3+x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x+x^2+x^3}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}}.$$

Маємо інтегровні мажоранти для кожного з двох інтегралів:

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x+x^2+x^3}} < \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}, x \in (0,1); \quad \frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}} < \frac{1}{x^2}, x \in [1, \infty).$$

Таким чином, запропонований інтеграл збігається.

Задача 1.4.3. При $a > 0$ дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$.

Зрозуміло, що при $a > 1 \Rightarrow \frac{|\sin x|}{x^a} \leq \frac{1}{x^a}$. Оскільки інтеграл від мажоранти збігається, то даний інтеграл збігається абсолютно.

Нехай тепер $0 < a < 1$. Тоді $\forall A > 1 \Rightarrow \int_1^A \sin x dx = |\cos A - \cos 1| \leq 2, \frac{1}{x^a} \downarrow 0, x \rightarrow \infty$.

Отже, виконано умови ознаки Діріхле, і інтеграл збігається. Дослідимо його тепер на абсолютну збіжність. Досить взяти $a = 1: \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$. З очевидної оцінки

$$|\sin x| \geq \sin^2 x \text{ випливає: } \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x} \right) dx.$$

$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ збігається за Діріхле – доведення таке саме, як для інтеграла

$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ розбігається. Отже, інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ розбігається, а

тоді за ознакою порівняння розбігається інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^a} dx, 0 < a \leq 1$.

Відповідь: при $a > 1$ інтеграл збігається абсолютно, при $0 < a \leq 1$ - умовно.

Задача 1.4.4. $\int_0^{\infty} x^2 \cos(e^x) dx$.

Введемо заміну: $t = e^x; t: 1 \rightarrow \infty, \forall x: 0 \rightarrow \infty, x = \ln t, dx = \frac{dt}{t}$. Маємо:

$$\int_0^{\infty} x^2 \cos(e^x) dx = \int_1^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos t dt.$$

За допомогою диференціального числення дослідимо функцію $u(t) = \frac{\ln^2 t}{t}$. Для цього визначимо області знакосталості її похідної:

$$u'(t) = \left(\frac{\ln^2 t}{t} \right)' = \frac{2 \ln t - \ln^2 t}{t^2} = -\frac{\ln t (\ln t - 2)}{t^2}.$$

Нас цікавлять досить великі значення аргументу, отже, можна зробити висновок, що $u'(t) < 0 \forall t > e^2$ і в цій області функція $u(t) = \frac{\ln^2 t}{t}$ строго монотонно спадає до нуля, як відомо з курсу диференціального числення, в чому легко переконатись, застосовуючи правило Лопіталя. Оскільки для функції $v(t) = \cos t$ виконана умова обмеженості інтегралів по будь-якому

проміжку: $\left| \int_1^A \cos t dt \right| = |\sin A - \sin 1| < 2$, то за умовою Діріхле інтеграл збігається (в звичайному розумінні). Тепер дослідимо інтеграл на абсолютну збіжність, використовуючи оцінку знизу: $|\cos t| \geq \cos^2 t \Rightarrow \frac{\ln^2 t}{t} |\cos t| \geq \frac{\ln^2 t}{t} \cos^2 t \forall t > 1$. Звідси

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} |\cos t| dt \geq \int_1^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos^2 t dt.$$

Але

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} (1 + \cos 2t) dt.$$

інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos 2t dt$ збіжний (у звичайному розумінні) за ознакою Діріхле, а

$\int_1^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} dt = \frac{1}{3} \ln^3 t \Big|_1^{\infty} = \infty$, отже, їхня сума, інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} (1 + \cos 2t) dt$ розбіжний.

Зауваження! Не знаючи заздалегідь поведінку кожного з цих двох досліджених інтегралів, не можна було зобразити інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} (1 + \cos 2t) dt$ у вигляді їхньої суми. Тому спочатку було досліджено кожний з них.

Відповідь. Інтеграл $\int_0^{\infty} x^2 \cos(e^x) dx = \int_1^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos t dt$ збігається умовно, тобто, збігається у звичайному розумінні, але розбігається абсолютно.

Задача 1.4.5. Дослідити інтеграл на збіжність $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

Для більшої зручності зведемо відрізок інтегрування до симетричного відносно початку координат. Введемо заміну:

$$t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1, t: -1 \rightarrow 1 \forall x: 0 \rightarrow 2, dx = dt \Rightarrow$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\ln x} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\ln(t+1)}.$$

Запишемо для логарифма формулу Тейлора з залишковим членом у формі Пеано:

$$\begin{aligned} \ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = t \left(1 - \frac{t}{2} + o(t) \right) \Rightarrow \\ \frac{1}{\ln(1+t)} &= \frac{1}{t \left(1 - \frac{t}{2} + o(t) \right)} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{2} + o(t)} = \frac{1}{t} \left(1 + \frac{t}{2} + o(t) \right) = \\ &= \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t}$ розбігається, інтеграл від останніх обмежених функцій збігається, тому досліджуваний інтеграл розбігається.

Задача 1.4.6. Дослідити інтеграл на збіжність $I = \int_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x dx}{1-x^2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x dx}{1-x^2}$.

Порівняємо підінтегральну функцію у першому інтегралі з функцією $\ln x$ (обидві приймають від'ємні значення). Дослідимо поведінку підінтегральної функції у першому інтегралі в околі особливої точки $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\frac{\ln x}{1-x^2} \right)}{\ln x} = 1.$$

Оскільки, як відомо, інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln x dx$ збігається, то перший інтеграл збігається.

Дослідимо поведінку підінтегральної функції у другому інтегралі в околі особливої точки $x = 1$, використовуючи правило Лопітала:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(-2x)} = -\frac{1}{2}.$$

З цього робиться висновок, що це усувна особлива точка і тому другий інтеграл збігається.

Задача 1.4.7. $I = \int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \triangleq I_1 + I_2 .$

Зображення інтеграла у вигляді суми двох інтегралів показує, що це водночас інтеграл першого і другого роду. Розглянемо другий інтеграл і введемо заміну:

$$t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}, t: 1 \rightarrow 0 \forall x: 1 \rightarrow \infty, dx = -\frac{dt}{t^2}, \ln x = -\ln t \Rightarrow$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\int_0^1 \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} dt \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx - \int_0^1 \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} dt = 0.$$

2. ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

2.1. ІНТЕГРАЛИ

Далі ми будемо використовувати формули Фейєра.

$$1). \sin \frac{d}{2} \neq 0, d \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(x+kd) &= \sin x + \sin(x+d) + \sin(x+2d) + \dots + \sin(x+(n-1)d) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\left(x + \left(k - \frac{1}{2}\right)d\right) - \cos\left(x + \left(k + \frac{1}{2}\right)d\right)}{2 \sin \frac{d}{2}} = \frac{\cos\left(x - \frac{1}{2}d\right) - \cos\left(x + \left(n - \frac{1}{2}\right)d\right)}{2 \sin \frac{d}{2}} = \\ &= \frac{\sin\left(x - \frac{n-1}{2}d\right) \sin\left(\frac{nd}{2}\right)}{\sin \frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

Частинний випадок: 1a). $\frac{d}{2} = x \Rightarrow d = 2x \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin(n-1)x + \sin nx = \frac{\sin^2 nx}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$2). \sin \frac{d}{2} \neq 0, d \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+kd) &= \cos x + \cos(x+d) + \dots + \cos(x+(n-1)d) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{d}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(x + \left(k + \frac{1}{2}\right)d\right) - \cos\left(x + \left(k - \frac{1}{2}\right)d\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{d}{2}} \left(\sin\left(x + \left(n - \frac{1}{2}\right)d\right) - \sin\left(x - \frac{1}{2}d\right) \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+kd) = \frac{\sin\left(x + \left(n - \frac{1}{2}\right)d\right) - \sin\left(x - \frac{1}{2}d\right)}{2\sin\frac{d}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{nd}{2} - \left(n - \frac{1}{2}\right)d\right) \cos\left(x + \frac{n-1}{2}d\right)}{\sin\frac{d}{2}}.$$

Частинні випадки: $2a) \cdot \frac{d}{2} = x \Rightarrow d = 2x \Rightarrow$

$$n = 2k \Rightarrow 2 \sum_{j=1}^n \cos(2j-1)x = \frac{\sin nx}{\sin x},$$

$$n = 2k - 1 \Rightarrow 1 + 2 \sum_{j=1}^n \cos(2j-1)x = \frac{\sin nx}{\sin x}$$

3). Розглянемо вираз при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$:

$$S_n = 2 \cos x \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cos 2(n-k)x + (-1)^{n-1} \cos x =$$

$$= 2 \cos x \left(\cos 2(n-1)x - \cos 2(n-2)x + \dots + (-1)^{n-2} \cos 2x \right) + (-1)^{n-1} \cos x =$$

$$= \cos(2n-1)x + \cos(2n-3)x - \cos(2n-3)x - \cos(2n-5)x + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-2} \cos 2x + (-1)^{n-2} \cos x + (-1)^{n-1} \cos x = \cos(2n-1)x.$$

Звідси

$$\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cos 2(n-k)x + (-1)^{n-1},$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

При знаходженні деяких з наступних інтегралів нам треба буде використати відомі первісні:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C,$$

причому, у випадку $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$ модуль можна не писати,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0.$$

Задача 2.1.1. $I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx.$

Введемо заміну: $x = 6 - t$. Звідси

$$t = 6 - x: 4 \rightarrow 2; 9 - x = t + 3, x + 3 = 9 - t, dx = -dt.$$

В результаті прийдемо до інтегралу:

$$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(t+3)}}{\sqrt{\ln(t+3)} + \sqrt{\ln(9-t)}} dt.$$

Звідси $2I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)} + \sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(x+3)} + \sqrt{\ln(9-x)}} dx = \int_2^4 dx = 2.$

Остаточно $I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx = 1.$

Задача 2.1.2. $\int \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \right) dx.$ При знаходженні цього інтегралу

будемо використовувати відому первісну:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

$$\begin{aligned} & \int \left(\sqrt{x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}} \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\sqrt{x^2 + x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}\sqrt{x^2 - x + 1}} \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\sqrt{\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right)^2} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} d\left(x + \frac{1}{2} \right) + \int \sqrt{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} d\left(x - \frac{1}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(x + \frac{1}{2} \right) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{4} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(x - \frac{1}{2} \right) \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{4} \ln \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right) \right) + C. \end{aligned}$$

Задача 2.1.3. Інтеграл, знаходження якого базується на утворенні рекурентного співвідношення:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 2x + 4} dx$$

Введемо заміну: $x = 2t$; $x, t : 0 \rightarrow \infty, t = \frac{x}{2}, dx = 2dt$. Маємо:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\ln 2t}{t^2 + t + 1} dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{t^2 + t + 1} dt + \int_0^{\infty} \frac{\ln 2}{t^2 + t + 1} dt \right) \triangleq$$

$\triangleq \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$. Знайдемо по черзі два виписані інтеграли.

У першому з них, $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{t^2 + t + 1} dt$, зробимо заміну:

$t = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{t} : \infty \rightarrow 0 \forall t : 0 \rightarrow \infty, dt = -\frac{1}{y^2} dy$. Звідси

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{-\ln y}{\left(\left(\frac{1}{y}\right)^2 + \frac{1}{y} + 1\right)(-y^2)} dy = -\int_0^{\infty} \frac{\ln y}{y^2 + y + 1} dy = -I_1 \Rightarrow 2I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = 0.$$

Залишається знайти стандартний інтеграл: $I_2 =$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) \Bigg|_0^{\infty} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

В результаті $I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{\pi \ln 2}{3\sqrt{3}}$.

Задача 2.1.4. «Золотий» переріз.

Знайдемо невластний інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^\varphi)^\varphi}$, де φ - число Фібоначчі, що є більшим

коренем рівняння $x^2 - x - 1 = 0$: $\varphi = x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Звідси

$\varphi^2 - \varphi = 1 \Rightarrow \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, і цим співвідношенням скористаємось далі.

Виявляється, можна знайти навіть первісну підінтегральної функції.

Пропонується заміна: $t = \frac{x^\varphi}{1+x^\varphi}$. Звідси

$$(1-t)x^\varphi = t \Rightarrow x^\varphi = \frac{t}{1-t} \Rightarrow x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{\varphi}} = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\varphi-1}, 1+x^\varphi = \frac{1}{1-t} \Rightarrow (1+x^\varphi)^\varphi = \frac{1}{(1-t)^\varphi}.$$

Також $dx = (\varphi-1) \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\varphi-2} \frac{dt}{(1-t)^2} = (\varphi-1) \frac{t^{\varphi-2}}{(1-t)^\varphi} dt$. Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x^\varphi)^\varphi} &= (\varphi-1) \int \frac{t^{\varphi-2} (1-t)^\varphi}{(1-t)^\varphi} dt = (\varphi-1) \int t^{\varphi-2} dt = t^{\varphi-1} + C = \left(\frac{x^\varphi}{1+x^\varphi}\right)^{\varphi-1} + C = \\ &= \frac{x^{\varphi^2-\varphi}}{(1+x^\varphi)^{\varphi-1}} + C = \frac{x}{(1+x^\varphi)^{\varphi-1}} + C. \end{aligned}$$

Після цього вже можна знайти і невластний інтеграл:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^\varphi)^\varphi} = \frac{x}{(1+x^\varphi)^{\varphi-1}} \Big|_0^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^\varphi}{1+x^\varphi}\right)^{\varphi-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x^{-\varphi} + 1)^{\varphi-1}} = 1.$$

Відповідь:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^\varphi)^\varphi} = 1.$$

Задача 2.1.5. Звести інтеграл до значення дзета-функції Рімана:

$$I(s) = \int_0^\infty \frac{[x]}{x^{s+1}} dx, s > 1.$$

Маємо:

$$I(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{[x]}{x^{s+1}} dx.$$

Запишемо кожен такий інтеграл по відрізьку $[1, n]$ як суму інтегралів по півінтервалах з кінцями, що є послідовними натуральними числами, враховуючи те, що для $x \in [k, k+1) \Rightarrow [x] = k$. Маємо:

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{dx}{x^{s+1}} &= \int_1^2 \frac{dx}{x^{s+1}} + \int_2^3 \frac{2dx}{x^{s+1}} + \dots + \int_{k-1}^k \frac{(k-1)dx}{x^{s+1}} + \dots + \int_{n-1}^n \frac{(n-1)dx}{x^{s+1}} = \\ &= - \left(\frac{1}{s} \frac{1}{x^s} \Big|_1^2 + \frac{1}{s} \frac{2}{x^s} \Big|_2^3 + \frac{1}{s} \frac{3}{x^s} \Big|_3^4 + \dots + \frac{1}{s} \frac{k-1}{x^s} \Big|_{k-1}^k + \dots + \frac{1}{s} \frac{n-1}{x^s} \Big|_{n-1}^n \right) = \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{2}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{3}{3^s} - \frac{3}{4^s} \dots + \frac{k-1}{(k-1)^s} - \frac{k-1}{k^s} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^s} - \frac{n-1}{n^s} \right) = \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{k^s} + \dots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{n^s} - \frac{1}{n^{s-1}} \right). \end{aligned}$$

При $s > 1$ маємо: $\frac{1}{n^{s-1}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Отже,

$$\int_0^\infty \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{k^s} + \dots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{n^s} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{s}.$$

Інші аспекти, пов'язані з дзета-функцією Рімана, будуть розглянуті в 3.2.

Задача 2.1.6. $I = \int_0^\infty \frac{\ln(2e^x - 1)}{e^x - 1} dx.$

Перетворимо підінтегральний вираз з метою побачити зручну заміну:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(2e^x - 1)}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{\ln(2e^x - 1)}{e^x(1 - e^{-x})} dx = \int_0^{\infty} \frac{\ln(2e^x - 1)e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

Оскільки $d(1 - e^{-x}) = e^{-x} dx$, а останній вираз присутній у знаменнику,

приходимо до заміни: $t = 1 - e^{-x}, t: 0 \rightarrow 1 \forall x: 0 \rightarrow \infty$. Також

$$2e^x - 1 = \frac{2}{1-t} - 1 = \frac{1+t}{1-t} \Rightarrow \ln(2e^x - 1) = \ln \frac{1+t}{1-t} = \ln(1+t) - \ln(1-t). \quad \text{Останнє}$$

перетворення справедливе, оскільки на інтервалі $t \in (0, 1)$ аргументи логарифмів

додатні: $1-t > 0, 1+t > 0$. Тоді $I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(2e^x - 1)}{e^x - 1} dx = \int_0^1 \ln \frac{1+t}{1-t} \frac{dt}{t}$.

Розкладемо кожен логарифм у ряд Тейлора:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots, \ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots$$

Звідси

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = 2 \left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \dots \right) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{2m+1}, |t| < 1 \Rightarrow \frac{2}{t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{2m+1} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{2m+1}.$$

Ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{2m+1}$, монотонно зростаючи на $(0, 1)$, прямує до неперервної і

інтегрованої функції $\frac{2}{t} \ln \frac{1+t}{1-t}$. Тоді за відомою теоремою інтеграл від ряду

дорівнює ряду з інтегралів. В результаті одержимо:

$$I = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 2 \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Остаточно:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(2e^x - 1)}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

Задача 2.1.7. $I = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx$.

Після заміни: $x = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x} : \infty \rightarrow 0 \forall x : 0 \rightarrow \infty, dx = -\frac{dt}{t^2}$ одержимо:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx = \int_0^{\infty} \frac{t \operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{t^2 \left(\left(\frac{1}{t} \right)^2 + 1 \right) \left(\left(\frac{1}{t} \right)^2 + \frac{1}{t} + 1 \right)} \frac{dt}{t^2} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{t \operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{(t^2 + 1)(t^2 + t + 1)} dt \Rightarrow I = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx \Rightarrow$$

$$2I = \int_0^{\infty} \frac{x(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x)}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx \Rightarrow$$

$$I = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} \frac{(x^2 + x + 1) - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx = \frac{\pi}{4} \left(\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} (2x + 1) \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi^2}{72} (9 - 4\sqrt{3}).$$

Задача 2.1.8. Нехай $f \in C^0(-\infty, \infty)$, $f(-x) = f(x)$, $a > 0$.

Дослідимо інтеграл $I = \int_0^{\infty} f\left(a\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) dx$ при умові його збіжності, про яку

відомо заздалегідь.

Зробимо заміну $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow dx = -\frac{1}{y^2} dy$. Звідси межі інтегрування:

$y = \frac{1}{x} : \infty \rightarrow 0 \forall x : 0 \rightarrow \infty$. В результаті інтеграл перетвориться наступним чином

(враховуючи парність підінтегральної функції):

$$I = \int_0^{\infty} f\left(a\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) dx = -\int_{\infty}^0 f\left(a\left(\frac{1}{y} - y\right)\right) \frac{1}{y^2} dy = \int_0^{\infty} f\left(a\left(y - \frac{1}{y}\right)\right) \frac{1}{y^2} dy.$$

Зрозуміло, що від змінної інтегрування визначений інтеграл не залежить і тому у останньому інтегралі можна y замінити на x . В результаті одержимо:

$$I = \int_0^{\infty} f\left(a\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) dx = \int_0^{\infty} f\left(a\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow 2I = \int_0^{\infty} f\left(a\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

Зробимо заміну: $t = x - \frac{1}{x} : -\infty \rightarrow \infty \forall x : 0 \rightarrow \infty$, $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$. Тоді

$$2I = \int_0^{\infty} f\left(a\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) dt = 2 \int_0^{\infty} f(at) dt \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} f\left(a\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) dx = \int_0^{\infty} f(at) dt$$

для парної неперервної функції.

Наслідок I. Нехай $f \in C^0(-\infty, \infty)$, $f(-x) = f(x)$, $\alpha, \beta > 0$.

$\alpha x - \frac{1}{\beta x} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\sqrt{\alpha\beta} x - \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta} x} \right)$. Введемо заміну $y = \sqrt{\alpha\beta} x \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} dy$. Тоді

$\alpha x - \frac{1}{\beta x} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left(y - \frac{1}{y} \right)$ і, згідно з доведеною рівністю, будемо мати:

$$\int_0^{\infty} f \left(\alpha x - \frac{1}{\beta x} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{\infty} f \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left(y - \frac{1}{y} \right) \right) dy = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{\infty} f \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} t \right) dt.$$

Задача 2.1.9. Довести рівність при умові збіжності наступного інтегралу:

$$\int_0^{\infty} f \left(ax + \frac{b}{x} \right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f \left(\sqrt{x^2 + 4ab} \right) dx, \quad a, b > 0.$$

Позначивши інтеграл в лівій частині через I , подамо його у вигляді суми двох інтегралів:

$$I = \int_0^{\infty} f \left(ax + \frac{b}{x} \right) dx = \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f \left(ax + \frac{b}{x} \right) dx + \int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\infty} f \left(ax + \frac{b}{x} \right) dx \triangleq I_1 + I_2.$$

Введемо заміну: $ax + \frac{b}{x} = t$. Очевидно,

$$t = ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}, \quad \min t = 2\sqrt{ab} \quad \forall ax = \frac{b}{x} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

При $t > 2\sqrt{ab}$ $x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4ab}}{2a}$. Значенням $x = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4ab}}{2a} : 0 \rightarrow \sqrt{\frac{b}{a}}$ відповідає

наступна зміна нової змінної: $t : \infty \rightarrow 2\sqrt{ab}$. При цьому

$$dx = \frac{1}{2a} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4ab}} \right) dt. \quad \text{Аналогічно при зміні}$$

$$x = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4ab}}{2a} : \sqrt{\frac{b}{a}} \rightarrow \infty \text{ маємо: } t : 2\sqrt{ab} \rightarrow \infty \text{ і } dx = \frac{1}{2a} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4ab}} \right) dt. \quad \text{Це}$$

дає змогу розумним чином розбити шуканий інтеграл I на суму двох інтегралів: $I = I_1 + I_2$, де

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{2a} \int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(t) \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4ab}}\right) dt = \\ &= -\frac{1}{2a} \int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(t) \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4ab}}\right) dt, \\ I_2 &= \int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{2a} \int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(t) \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4ab}}\right) dt. \end{aligned}$$

Звідси

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{a} \int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} \frac{t f(t)}{\sqrt{t^2 - 4ab}} dt.$$

Після заміни $y = \sqrt{t^2 - 4ab}$ одержимо:

$$I = \int_0^{\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f\left(\sqrt{y^2 + 4ab}\right) dy.$$

Ще раз нагадаємо, що значення визначеного інтегралу не залежить від позначення змінної інтегрування.

Задача 2.1.10. Застосуємо доведену у задачі 2.1.8 формулу, знайшовши

інтеграл від парної функції: $I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x^4 - x^2 + 1} dx.$

Спочатку перетворимо підінтегральний вираз:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} + 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1} dx.$$

Якщо $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1}$, то $f(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 1}$ і, згідно з вказаною формулою,

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx.$$

Прийшли до обчисленого раніше першого інтеграла Лапласа, загальний вигляд якого є [1, (V.3.12)]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}.$$

В 2.6 будуть обчислені обидва інтеграли Лапласа.

Отже, остаточно

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-1}.$$

Узагальнимо цей результат згідно з наслідком I.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos\left(\alpha x - \frac{1}{\beta x}\right)}{\alpha^2 \beta^2 x^4 - \alpha \beta x^2 + 1} dx = \frac{1}{\beta^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\alpha x - \frac{1}{\beta x}\right)}{\alpha^2 x^2 - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta^2 x^2}} dx = \frac{1}{\beta^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\alpha x - \frac{1}{\beta x}\right)}{\left(\alpha x - \frac{1}{\beta x}\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta}} dx.$$

Застосовуючи формулу з наслідку I, одержимо:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos\left(\alpha x - \frac{1}{\beta x}\right)}{\alpha^2 \beta^2 x^4 - \alpha \beta x^2 + 1} dx = \frac{1}{\beta^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\alpha x - \frac{1}{\beta x}\right)}{\left(\alpha x - \frac{1}{\beta x}\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta}} dx = \frac{1}{\beta^2 \sqrt{\alpha \beta}} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} t\right)}{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} t\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta}} dt = \\
&= \frac{1}{\alpha \beta \sqrt{\alpha \beta}} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} t\right)}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{2 \alpha \beta \sqrt{\alpha \beta}} e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}.
\end{aligned}$$

Тут було використано значення першого інтегралу Лапласа. В 2.6 будуть обчислені обидва інтеграли Лапласа.

Задача 2.1.11.

$$I_1 = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} \right) dx, I_2 = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin 2mx}{\sin x} \right) dx, I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} \right) dx, m \in \mathbb{N}.$$

Нагадаємо формули Фейєра для суми косинусів, аргументи яких утворюють арифметичну прогресію (див. початок даного розділу):

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \cos 2kx, \\
\frac{\sin 2mx}{\sin x} &= 1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos 2kx.
\end{aligned}$$

Інтегруючи обидві частини рівностей, одержимо:

$$I_1 = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} \right) dx = \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \cos 2kx \right) dx = \pi + \sum_{k=1}^{m-1} \sin 2kx \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin 2mx}{\sin x} \right) dx = 2 \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^m \cos(2k-1)x \right) dx = \sum_{k=1}^m \sin 2kx \Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \cos 2kx \right) dx = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \sin 2kx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Далі буде використовуватись наступний інтеграл:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin 2mx \cos x}{\sin x} \right) dx = 2 \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^m \cos(2k-1)x \cos x \right) dx = \\ &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=2}^m (\cos(2kx) + \cos 2(k-1)x) + \cos 2x + 1 \right) dx = \\ &= \sum_{k=2}^{m-1} \left(\frac{\sin 2kx}{2k} + \frac{\sin 2(k-1)x}{2(k-1)} + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} + \pi = \pi \end{aligned}$$

Задача 2.1.12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx, n \in \mathbb{N}.$

Нагадаємо формули Фейєра для суми синусів, аргументи яких утворюють арифметичну прогресію:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x &= \sum_{k=1}^n \frac{2 \sin x \sin(2k-1)x}{2 \sin x} = \sum_{k=1}^n \frac{\cos 2(k-1)x - \cos 2kx}{2 \sin x} = \\ &= \frac{1 - \cos 2nx}{2 \sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} n.$$

Тут було застосовано формулу для інтеграла I_3 , доведену в попередній задачі.

Задача 2.1.13. $I_n = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^n x dx$ ($a > 0$).

Інтегруємо за частинами:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^n x dx = -\frac{1}{a} \left(e^{-ax} \sin^n x \Big|_0^{\infty} - n \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x dx \right) = \\
 &= \frac{n}{a} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x dx = \\
 &= -\frac{n}{a^2} e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\infty} + \frac{n(n-1)}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx - \frac{n}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^n x dx = \\
 &= \frac{n(n-1)}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{n-2} x dx - \frac{n(n-1)}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^n x dx - \frac{n}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^n x dx = \\
 &= \frac{n(n-1)}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{n-2} x dx - \frac{n^2}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^n x dx = \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2} - \frac{n^2}{a^2} I_n \Rightarrow \\
 I_n &= \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2} - \frac{n^2}{a^2} I_n \Rightarrow \frac{n^2 + a^2}{a^2} I_n = \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2} \Rightarrow \\
 I_n &= \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} I_{n-2}.
 \end{aligned}$$

Відзначимо: $I_0 = \frac{1}{a}$, $I_1 = \frac{1}{1+a^2}$. Тоді з одержаного рекурентного виразу знайдемо

значення досліджуваного інтегралу – окремо для парного і непарного індексів:

$$I_{2k-1} = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{2k-1} x dx = \frac{(2k-1)!}{(1^2 + a^2)(3^2 + a^2) \dots ((2k-1)^2 + a^2)},$$

$$I_{2k} = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{2k} x dx = \frac{(2k)!}{a(2^2 + a^2)(4^2 + a^2) \dots ((2k)^2 + a^2)}.$$

Задача 2.1.14. Наслідок II з формули, одержаної в задачі 2.1.8:

$$J = \int_0^{\infty} g\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^{\infty} g\left(\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\right) dx = \int_0^{\infty} g(x^2 + 2) dx.$$

Остаточню:

$$\int_0^{\infty} g\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^{\infty} g(x^2 + 2) dx.$$

Більш загальна формула:

$$J = \int_0^{\infty} g\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) dx = \int_0^{\infty} g\left(\left(x - \frac{a}{x}\right)^2 + 2a\right) dx = \int_0^{\infty} g(x^2 + 2a) dx,$$

$$J = \int_0^{\infty} g\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) dx = \int_0^{\infty} g(x^2 + 2a) dx.$$

Задача 2.1.15.

$$\int_0^{\infty} \sin\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2 + 2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) \cos 2 dx + \int_0^{\infty} \cos(x^2) \sin 2 dx =$$

$$= \cos 2 \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx + \sin 2 \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos 2 + \sin 2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\left(2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

Тут було використано значення інтегралів Френеля (див. 2.4):

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Задача 2.1.16. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^a x} dx.$

Зрозуміло, що інтеграл збігається при довільному $a \in \mathbb{R}.$

Зробимо заміну: $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t, t: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \forall x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, dx = -dt.$ Також

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}. \text{ Звідси } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^a x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^{-a} t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^a t}{1 + \operatorname{tg}^a t} dt.$$

Звідси

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^a x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^a x}{1 + \operatorname{tg}^a x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}^a x}{1 + \operatorname{tg}^a x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^a x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 2.1.17. Довести рівність:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

Доведення. Зробимо заміну:

$$x = \frac{\pi}{2} - t, t = \frac{\pi}{2} - x: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0, \forall x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos t, dx = -dt.$$

Звідси $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt,$ що й доводить рівність, оскільки визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування.

Задача 2.1.18. Довести рівність наступних інтегралів для довільної інтегрованої функції:

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx.$$

Читач доведе рівність самостійно, зробивши заміну $t = a - x$. Також легко бачити, що рівність з попередньої задачі легко випливає з тільки що доведеної.

Задача 2.1.19. Нехай визначена і інтегровна на відрізку $[a, b]$ функція має властивість: $f(a+b-x) = f(x)$, $x \in [a, b]$, тобто, її графік симетричний відносно вертикальної прямої $x = \frac{a+b}{2}$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx &= \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \Rightarrow \\ \int_a^b f(x) dx &= 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = 2 \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Доведення. Нехай

$$y \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \Rightarrow x = a+b-y : b \rightarrow \frac{a+b}{2}, f(x) = f(a+b-y) = f(y).$$

Тоді

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(y) dy = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x) dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx.$$

Звідси миттєво випливають інші рівності для інтегралів.

Часто використовується ситуація, коли треба проінтегрувати функцію, що визначена і інтегровна на $[0, l]$, а також має властивість симетрії: $f(l-x) = f(x)$. Тоді

$$\int_0^{\frac{l}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{l}{2}}^l f(x) dx \Rightarrow$$

$$\int_0^l f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} f(x) dx = 2 \int_{\frac{l}{2}}^l f(x) dx.$$

Задача для самостійного розв'язання. Обчислити інтеграли:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha x dx}{\sin^\alpha x + \cos^\alpha x}, \int_0^{\pi} \frac{\sin^\alpha x dx}{\sin^\alpha x + \cos^\alpha x}, \alpha > 0.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

Задача 2.1.20. Довести рівність:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

Доведення. Зробимо заміну:

$$x = \pi - t, t = \pi - x: \pi \rightarrow 0, x: 0 \rightarrow \pi, \sin x = \sin t, dx = -dt.$$

Маємо:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt \Rightarrow$$

$$2 \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt, \text{ звідки і випливає справедливість формули.}$$

Застосуємо доведену формулу на прикладі:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos x) \Big|_0^{\pi} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Задача 2.1.21. Довести рівність:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x) \cos x dx.$$

На проміжку $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin 2x \geq 0$ і вона монотонно зростає. Тому можна зробити заміну $\sin 2x = \cos^2 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, також на цьому проміжку і функція $\cos^2 t$ монотонна. Зростанню $x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\sin 2x: 0 \rightarrow 1$ відповідає спадання $t: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \Rightarrow \cos^2 t: 0 \rightarrow 1$. Будемо перетворювати обидві частини

виписаної рівності, зауваживши, що $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \sin t > 0 \Rightarrow \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$:

$$\sin 2x + 1 = (\sin x + \cos x)^2 = \cos^2 t + 1 \Rightarrow$$

$$d(\sin x + \cos x)^2 = 2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)dx = -2\cos t \sin t dt.$$

Завдяки зробленому зауваженню обидві частини цієї рівності можна поділити на $\sin t$:

$$\frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)dx}{\sin t} = -\cos t dt \Rightarrow$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)dx}{\sin t} = -\cos t dt \Rightarrow$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)dx}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} = -\cos t dt.$$

Використаємо той факт, що $\cos^2 t = \sin 2x$:

$$\frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)dx}{\sqrt{1 - \sin 2x}} = -\cos t dt \Rightarrow$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)dx}{\sqrt{(\cos x - \sin x)^2}} = -\cos t dt \Rightarrow$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)dx}{|\cos x - \sin x|} = -\cos t dt \Rightarrow$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)dx}{\cos x - \sin x} = -\cos t dt \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow$$

$$(\sin x + \cos x)dx = -\cos t dt \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)(\sin x + \cos x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos^2 t)\cos t dt \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 t)\cos t dt.$$

У першому інтегралі лівої частини рівності зробимо заміну:

$$y = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - y, dx = -dy, y: \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad \forall x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}; \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y,$$

$$\sin 2x = \sin(\pi - 2y) = \sin 2y.$$

Звідси

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\sin x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2y)\cos y dy$$

В результаті

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x dx. \end{aligned}$$

Цим рівність доведено.

Зауваження: ми скористались тим фактом, що визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування.

Задача 2.1.22. Довести рівність:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \sin x dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \cos x dx.$$

Для перетворення лівої частини рівності скористаємось фактом, який

неодноразово використовувався: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$:

$$I \triangleq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x \cos x) \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}) \sin x dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x \cos x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x dx.$$

Звідси

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x + \cos x) dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx.$$

Зробимо заміну:

$$y = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = y + \frac{\pi}{4}, y: -\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} \forall x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, dx = dy; \sin 2x = \cos 2y. \text{ Маємо:}$$

$$2I = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2y) \cos y dy = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2y) \cos y dy \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \sin x dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \cos x dx.$$

Задача 2.1.23. $I = \int_0^1 \sin \sqrt{-\ln x} dx$.

Зробимо заміну:

$$t = \sqrt{-\ln x} \Rightarrow \ln x = -t^2, x = e^{-t^2}, t: \infty \rightarrow 0 \forall x: 0 \rightarrow 1, dx = -2te^{-t^2} dt \Rightarrow$$

$$I = \int_0^1 \sin \sqrt{-\ln x} dx = 2 \int_0^\infty t e^{-t^2} \sin t dt.$$

Ще одна заміна:

$$s = t^2, t = \sqrt{s}, ds = 2t dt \Rightarrow$$

$$I = 2 \int_0^\infty t e^{-t^2} \sin t dt = \int_0^\infty e^{-s} \sin \sqrt{s} ds.$$

Розкладемо $\sin \sqrt{s}$ у ряд Тейлора:

$$\sin \sqrt{s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(s^{\frac{1}{2}} \right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} s^{n+\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$I = \int_0^\infty e^{-s} \sin \sqrt{s} ds = \int_0^\infty e^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} s^{n+\frac{1}{2}} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^\infty e^{-s} s^{n+\frac{1}{2}} ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^\infty e^{-s} s^{\left(n+\frac{3}{2}\right)-1} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{2(2n+1)!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{2(2n+1)!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1} (2n)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (2n)!} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (2n)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{e}}.$$

Відповідь: $I = \int_0^1 \sin \sqrt{-\ln x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{e}}.$

Задача 2.1.24. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{\sin x} dx.$

Розглянемо інтеграл, що залежить від параметра $I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \sin x)}{\sin x} dx$. При цьому $I(0) = 0, I(1) = I$. Легко бачити, що виконано умови теореми Лейбниця про диференціювання інтеграла, що залежить від параметра:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} I(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \sin x)}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \alpha^2 \sin^2 x} = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{dx}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x} + \alpha^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{dx}{\sin^2 x}}{1 + \alpha^2 + \operatorname{ctg}^2 x}. \end{aligned}$$

Зробимо заміну:

$$t = \operatorname{ctg} x \Rightarrow, t: \infty \rightarrow 0 \forall x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{1 + \alpha^2})^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{d}{d\alpha} I(\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \frac{\pi}{2} \ln(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}) \Big|_0^1 = \frac{\pi \ln(\sqrt{2} + 1)}{2}.$$

Задача 2.1.25. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \ln \cos x dx$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \ln \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x} \ln \sqrt{1 - \sin^2 x} dx.$$

Введемо заміну:

$$t = \sqrt{1 - \sin^2 x} \Rightarrow t: 1 \rightarrow 0 \forall x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \sin^2 x = 1 - t^2, dt = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x dx = -t dt \Rightarrow \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x} \ln \sqrt{1 - \sin^2 x} dx = -\frac{t}{1-t^2} \ln t dt \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x} \ln \sqrt{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{t \ln t}{1-t^2} dt.$$

$$\forall 0 < t < 1 \quad \frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \Rightarrow \int_0^1 \frac{t \ln t}{1-t^2} dt = \int_0^1 \ln t \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^{2n+1} \ln t dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \left(t^{2n+2} \ln t \Big|_0^1 - \int_0^1 t^{2n+1} dt \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2n+2} t^{2n+2} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Задача 2.1.26. $I = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{x}.$

Зробимо заміну в інтегралі: $x = \pi t, \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{x} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\pi}{\operatorname{sh} t} - \frac{1}{t} \right) \frac{dt}{t}.$$

Далі будемо використовувати відомий з теорії рядів Фур'є розклад котангенса на прості дроби, з якого випливає наступний факт:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} - \frac{1}{x} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2}.$$

Зробимо заміну: $x = it \Rightarrow x^2 - n^2 = -(t^2 + n^2), \sin(i\pi t) = i \operatorname{sh} \pi t \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\pi}{sh \pi t} - \frac{1}{t} \right) = -2it \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t^2 + n^2} \Rightarrow \frac{1}{t} \left(\frac{\pi}{sh \pi t} - \frac{1}{t} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t^2 + n^2} \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\pi}{sh t} - \frac{1}{t} \right) \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t^2 + n^2} dt = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + n^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} \frac{t}{n} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Зауважимо, що перестановка операцій інтегрування і сумування законна через рівномірну збіжність ряду.

Скористаємось відомим розкладом у ряд Тейлора функції логарифм, звідки

$$-\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n, x \in (-1, 1].$$

Підставляючи сюди $x=1$, одержимо: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$. Після цього знайдемо

значення інтегралу:

$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{sh x} - \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{x} = -\ln 2.$$

Задача 2.1.27. Послідовність функцій задано рекурентно:

$$f_0(x) = \ln x, f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt.$$

Підрахуємо два перші члени послідовності, використовуючи формулу інтегрування за частинами. Зауважимо, що далі при інтегруванні за частинами буде виникати відома границя $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln x = 0 \quad \forall a > 0$.

$$f_1(x) = \int_0^x \ln t dt = x \ln x - x \Rightarrow f_2(x) = \int_0^x (t \ln t - t) dt = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2.$$

Зрозуміло, цей процес можна продовжувати, але і зараз виникає гіпотеза:

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} (a_n x^n \ln x - b_n x^n).$$

Присутність тут $n!$ не є очевидною, але, як побачимо далі, вона корисна. Доводити формулу будемо за індукцією. Ми вже бачили її справедливість при $n=0, n=1, n=2$. Очевидно, що $a_0 = a_1 = 1, b_0 = 0, b_1 = 1$ і т.ін. Припустивши, що вона справедлива для n , доведемо її для $n+1$. Маємо:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x (a_n t^n \ln t - b_n t^n) dt = \frac{1}{n!} \left(a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \Big|_0^x - \frac{a_n}{n+1} \int_0^x t^n dt \right) - \frac{1}{(n+1)!} b_n x^{n+1} = \\ &= \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x (a_n t^n \ln t - b_n t^n) dt = \frac{1}{(n+1)!} \left(a_n x^{n+1} - \left(\frac{a_n}{n+1} + b_n \right) x^{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} (a_{n+1} x^{n+1} - b_{n+1} x^{n+1}). \end{aligned}$$

З доведеного і з підрахованих $a_0 = a_1 = 1$ випливає:

$$a_n = 1, b_{n+1} = \frac{1}{n+1} + b_n.$$

З цієї формули випливає, що, оскільки $b_0 = 0$, то

$$b_1 = 1, b_2 = 1 + \frac{1}{2}, \dots, b_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \triangleq H_n.$$

Нагадаємо, що так позначається частинна сума гармонічного ряду. Відомо, що

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \alpha_n, \alpha_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

де γ - стала Ейлера-Маскероні.

Остаточно, доведено формулу для члена функціональної послідовності:

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} (x^n \ln x - H_n x^n).$$

Звідси її значення, що фігурує в умові, дорівнює: $f_n(1) = -\frac{H_n}{n!}$

Тепер границя, яку треба знайти за умовою задачі, буде мати вигляд:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! f_n(1)}{\ln n} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\ln n} \frac{H_n}{n!} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \gamma + \alpha_n}{\ln n} = -1.$$

Відповідь: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! f_n(1)}{\ln n} = -1.$

Задача 2.1.28. Лемніскатна константа, формула Гауса

Розглянемо інтеграл

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, a > b > 0.$$

Введемо заміну

$$\sin \varphi = \frac{2a \sin \theta}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta}.$$

Помітимо, що зростанню $\varphi: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ відповідає зростання $\theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

$$d \sin \varphi = \cos \varphi d\varphi = 2a \left(\frac{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta - 2(a-b) \sin^2 \theta}{((a+b) + (a-b) \sin^2 \theta)^2} \right) \cos \theta d\theta =$$

$$= 2a \left(\frac{(a+b) - (a-b)\sin^2 \theta}{((a+b) + (a-b)\sin^2 \theta)^2} \right) \cos \theta d\theta.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \sqrt{1 - \frac{4a^2 \sin^2 \theta}{((a+b) + (a-b)\sin^2 \theta)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{((a+b) + (a-b)\sin^2 \theta)^2 - 4a^2 - 4a^2 \cos^2 \theta}{((a+b) + (a-b)\sin^2 \theta)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{((a+b) + (a-b)(1 - \cos^2 \theta))^2 - 4a^2 - 4a^2 \cos^2 \theta}{((a+b) + (a-b)\sin^2 \theta)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(2a - (a-b)\cos^2 \theta)^2 - 4a^2 + 4a^2 \cos^2 \theta}{((a+b) + (a-b)\sin^2 \theta)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{4a^2 - 4a(a-b)\cos^2 \theta + (a-b)^2 \cos^4 \theta - 4a^2 + 4a^2 \cos^2 \theta}}{(a+b) + (a-b)\sin^2 \theta} = \\ &= \frac{\sqrt{((a-b)^2 \cos^2 \theta - 4a(a-b) + 4a^2)\cos^2 \theta}}{(a+b) + (a-b)\sin^2 \theta} = \\ &= \frac{\sqrt{(a-b)^2 \cos^2 \theta - 4a(a-b) + 4a^2}}{(a+b) + (a-b)\sin^2 \theta} \cos \theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{(a-b)^2 \cos^2 \theta + 4ab}}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta} \cos \theta = \frac{\sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)(1 - \sin^2 \theta) + 4ab}}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta} \cos \theta = \\
&= \frac{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \sin^2 \theta}}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta} \cos \theta.
\end{aligned}$$

Тоді

$$d\varphi = 2a \frac{(a+b) - (a-b) \sin^2 \theta}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \sin^2 \theta}}.$$

Легко перевірити, що

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = a \frac{(a+b) - (a-b) \sin^2 \theta}{(a+b) + (a-b) \sin^2 \theta}.$$

В результаті підінтегральний вираз буде мати наступний вигляд:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}}.$$

Позначимо: $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$. Тоді

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta}} = J(a_1, b_1).$$

Далі визначимо члени послідовностей рекурентними формулами:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}.$$

З наведених міркувань випливає, що

$$J(a,b) = J(a_n, b_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}}, n \in \mathbb{N}.$$

Відомо (див, напр., ([2], приклад 1.5.4), що $a_n > b_n > 0$ і члени цих послідовностей прямують до спільної границі, що називається арифметико-геометричним середнім чисел a і b і позначається $\mu(a,b)$ або $agm(a,b)$ - arithmetic-geometric mean. Доведемо наступні оцінки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}} &= \frac{1}{b_n \sqrt{\left(\frac{a_n^2}{b_n^2}\right) \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{b_n \sqrt{\left(\frac{a_n^2}{b_n^2} - 1\right) \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{b_n \sqrt{\left(\frac{a_n^2}{b_n^2} - 1\right) \cos^2 \varphi + 1}} < \frac{1}{b_n} \end{aligned}$$

і аналогічно

$$\frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}} > \frac{1}{a_n}.$$

В результаті

$$\frac{\pi}{2a_n} < J(a_n, b_n) = J(a, b) < \frac{\pi}{2b_n}.$$

Переходячи до границі, одержимо:

$$J(a, b) = \frac{\pi}{2\mu(a, b)}.$$

Помітимо, що при зроблених умовах щодо констант під інтегралом в умові одержимо:

$$\begin{aligned}
 J(a,b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi}} = \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{a} K\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right),
 \end{aligned}$$

тобто, інтеграл $J(a,b)$ може бути зображена повним еліптичним інтегралом 1-го роду. Важливим є приклад, якщо взяти наступні константи: $a = \sqrt{2}, b = 1$. Тоді приходимо до константи Гауса

$$G \triangleq J(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{2\mu(\sqrt{2}, 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\varpi}{2}.$$

Це співвідношення дає зв'язок між важливими константами – Гауса, середнім арифметико-геометричним і лемніскатною.

Задача 1 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx$.

Вказівка: можна також запропонувати заміну $x = 2tgt$. Відповідь:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi \ln 2}{4}.$$

Задача 2 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^{\frac{4}{\pi}} \left(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \right) dx$.

Вказівка: Зобразити як різницю двох інтегралів і застосувати формулу інтегрування за частинами. Відповідь: $I = \frac{32\sqrt{2}}{\pi^3}$.

Задача 3 для самостійного розв'язання: $I = \int_1^{\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x^3} dx$.

Вказівка: ввести заміну і скористатись первісною, яку наведено на початку розділу. Відповідь: $\frac{2}{5}$.

Задача 4 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{(\sin x + \cos x) \cos x} dx$.

Вказівка: скористатись формулою $\int_0^a f(a-x) dx = \int_0^a f(x) dx$, доведення якої

очевидне, і додати два таких інтеграли. Відповідь: $\frac{\pi \ln 2}{8}$.

Задача 5 для самостійного розв'язання: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln \left(\frac{\pi + x}{\pi - x} \right) dx$.

Вказівка: скористатись непарністю підінтегральної функції.

Задача 6 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^{\infty} \frac{\ln \left(x + \frac{1}{x} \right)}{1 + x^2} dx$.

Вказівка: зробити заміну $x = \operatorname{tg} t$ і скористатись відомим значенням інтеграла

(Ейлер): $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ (див. (2.8.18)).

Задача 7 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^1 \frac{(\ln x) \operatorname{arctg} x}{x} dx$.

Вказівка: розкласти функцію $\operatorname{arctg} x$ в степеневий ряд, скориставшись відомим

розкладом його похідної. Відповідь: $-\frac{\pi^3}{32}$.

Задача 8 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^5} dx$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

2.2. Інтеграл Діріхле.

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right) dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a.$$

Задача 2.2.1.

Допоміжний інтеграл (див. напр., [1, (V.3.12)]):

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha.$$

Застосування інтеграла Діріхле для обчислення деяких інтегралів

Наступні задачі а), б) розв'язуються після використання значення інтегралу Діріхле і відомих тригонометричних формул. Читач легко зробить це самостійно.

Задача 2.2.2. Довести:

$$a). \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & b < a, \\ \frac{\pi}{4}, & b = a, \\ 0, & b > a. \end{cases}$$

$$b). \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|.$$

$$c). \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} b, & 0 < b \leq a, \\ \frac{\pi}{2} a, & b \geq a > 0. \end{cases}.$$

с). Застосовуючи елементарні перетворення і інтегрування за частинами, одержимо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) d \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{x} \Big|_0^{\infty} + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\infty} \frac{(a-b)\sin(a-b)x - (a+b)\sin(a+b)x}{x} dx \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} (a+b) \operatorname{sgn}(a+b) - (a-b) \operatorname{sgn}(a-b) x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} b, & 0 < b \leq a, \\ \frac{\pi}{2} a, & b \geq a > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Остаточно:

| | |
|---|---------|
| $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} b, & 0 < b \leq a, \\ \frac{\pi}{2} a, & b \geq a > 0. \end{cases}$ | (2.2.1) |
|---|---------|

d). $I = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x^2}{x} \right) dx.$

Інтеграл $\int_0^1 \left(\frac{\sin x^2}{x} \right) dx$ збігається, оскільки $\sin x^2 \sim x^2$, а $\int_1^{\infty} \left(\frac{\sin x^2}{x} \right) dx$ збігається за

ознакою Діріхле (більш детально див. [1]).

$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x^2}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{2x \sin x^2}{x^2} dx,$$

що підказує заміну: $t = x^2, 2x dx = dt \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{4}$.

Задача 2.2.3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x(1+x^2)} dx$.

Розглянемо більш загальний інтеграл як функцію, що залежить від параметра:

$$I(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} dx.$$

Зразу зауважимо, що $I(0) = 0$. Очевидно, він рівномірно збігається по t , похідна по t від продиференційованої функції – рівномірно збіжний інтеграл

$\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx$ - модуль підінтегральної функції має інтегровну мажоранту $\frac{1}{1+x^2}$,

що дозволяє застосувати правило Лейбниця:

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx.$$

Зауважимо, що $\frac{d}{dt} I(0) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Запишемо тепер продиференційовану по t підінтегральну функцію в тільки що одержаному інтегралі:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} = -\frac{x \sin(tx)}{1+x^2}.$$

Інтеграл від неї по проміжку $[0,1]$ власний, тому на ньому правило Лейбниця може бути застосовано:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx = -\int_0^1 \frac{x \sin(tx)}{1+x^2} dx$$

Інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{x \sin(tx)}{1+x^2} dx$ збігається рівномірно по t на довільному проміжку $t \in [\delta, A]$. На ньому цей інтеграл збігається рівномірно за ознакою Діріхле. Перетворимо інтеграл:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} I(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} dx = - \int_0^{\infty} \frac{x \sin(tx)}{1+x^2} dx = - \int_0^{\infty} \frac{x^2 \sin(tx)}{x(1+x^2)} dx = \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{(x^2+1-1) \sin(tx)}{x(1+x^2)} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} dx - \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{x} dx = I(t) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Прийшли до задачі Коші для лінійного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2}{dt^2} I(t) - I(t) = -\frac{\pi}{2}, \quad I(0) = 0, \quad \frac{d}{dt} I(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Відомо, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою частинного розв'язку неоднорідного рівняння і загального розв'язку однорідного рівняння. Очевидно, частинний розв'язок дорівнює $\frac{\pi}{2}$, а загальний розв'язок однорідного рівняння – це функція $c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$, причому, коефіцієнти в показниках експонент є розв'язками так званого характеристичного рівняння для однорідного рівняння: $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -1$. Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд:

$$y = \frac{\pi}{2} + c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Після урахування початкових даних одержимо:

$$\frac{\pi}{2} + c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1 - c_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Звідси $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} e^{-t}$.

В результаті одержуємо шуканий інтеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} I(2) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2}).$$

2.3. Інтеграл Ейлера-Пуасона.

Відомо:

| | |
|---|---------|
| $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0.$ | (2.3.1) |
|---|---------|

Задача 2.3.1 . Довести:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Вказівка: треба взяти похідну n - го порядку за параметром a від обох частин попередньої рівності і довести справедливість застосування правило Лейбниці.

$$\frac{d^n}{da^n} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Задача 2.3.2. Довести:

$$I(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{1}{4\alpha} \beta^2}, \alpha > 0.$$

(2.3.2)

Вказівка. Довести законність диференціювання за параметром $\beta \in (-\infty, \infty)$ під інтегралом і рівність

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin \beta x dx = -\frac{\beta}{2\alpha} I(\beta).$$

Задача 2.3.3. Знайти наступні інтеграли.

а). $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx, a > 0.$

Відповідь а). $I = e^{\frac{b^2-ac}{a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$

Радимо читачу зробити цей приклад самостійно. Дамо деякі вказівки. По-перше, треба виділити повний квадрат у показнику, а потім ввести зрозумілу заміну. В результаті інтеграл перетвориться в лінійну комбінацію інтегралів,

серед яких потребує пояснення тільки $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-at^2} dt = 2 \int_0^{\infty} t^2 e^{-at^2} dt$. Для його

обчислення застосуємо формулу інтегрування за частинами для інтеграла Ейлера-Пуасона:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \int_0^{\infty} e^{-at^2} dt = t e^{-at^2} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} t^2 e^{-at^2} dt = I_2.$$

б). Довести:

| | |
|--|---------|
| $I(a) = \int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2 a }, \quad a \in (-\infty, \infty).$ | (2.3.3) |
|--|---------|

Очевидно, досить довести формулу для $a > 0$.

Зобразимо цей інтеграл у вигляді суми:

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \int_0^1 e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx + \int_1^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx. \quad \text{В першому зробимо заміну}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow dx = -\frac{1}{y^2} dy, \quad x: 0 \rightarrow 1 \Rightarrow y: \infty \rightarrow 1.$$

В другому для зручності замість x будемо писати y . Тоді

$$I(a) = \int_1^{\infty} e^{-\left(a^2 y^2 + \frac{1}{y^2}\right)} \frac{dy}{y^2} + \int_1^{\infty} e^{-\left(y^2 + \frac{a^2}{y^2}\right)} dy.$$

Підінтегральні функції в одержаних інтегралах неперервні і неперервно диференційовні по a . При $a \geq \delta > 0$ інтеграли від продиференційованих по a підінтегральних функцій рівномірно відносно параметра a збігаються завдяки мажорантній ознаці. Тому $I(a)$ неперервно диференційовна за параметром і можна застосувати правило диференціювання Лейбниця:

$$\frac{dI(a)}{da} = \int_1^{\infty} \frac{d}{da} e^{-\left(a^2 y^2 + \frac{1}{y^2}\right)} \frac{dy}{y^2} + \int_1^{\infty} \frac{d}{da} e^{-\left(y^2 + \frac{a^2}{y^2}\right)} dy = -2a \left(\int_1^{\infty} e^{-\left(a^2 y^2 + \frac{1}{y^2}\right)} dy + \int_1^{\infty} e^{-\left(y^2 + \frac{a^2}{y^2}\right)} \frac{dy}{y^2} \right).$$

Якщо, знову-таки, в першому інтегралі зробити заміну

$$x = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = -\frac{1}{x^2} dx, \quad y: 1 \rightarrow \infty \Rightarrow x: 1 \rightarrow 0,$$

а в другому замість y писати x , одержимо:

$$\frac{dI(a)}{da} = -2a \left(\int_0^1 e^{-\left(a^2x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} \frac{dx}{x^2} \right) = -2a \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} \frac{dx}{x^2}.$$

Нехай $a \geq 0$. Якщо в початковому інтегралі (2.3.3) зробити заміну $x = \frac{a}{y}$, то

прийдемо до нового його вигляду:

$$I(a) = a \int_0^\infty e^{-\left(y^2 + \frac{a^2}{y^2}\right)} \frac{dy}{y^2}.$$

Порівнюючи $I(a)$ з $\frac{dI(a)}{da}$, приходимо до співвідношення, яке є звичайним

диференціальним рівнянням першого порядку:

$$\frac{dI(a)}{da} = -2I(a) \Rightarrow \frac{dI(a)}{I(a)} = -2da.$$

З означення $I(a)$ випливає: $I(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Це дає змогу взяти визначений

інтеграл від обох частин отриманого диференціального рівняння, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_0^a \frac{dI(t)}{I(t)} = -2 \int_0^a dt \Rightarrow \ln \frac{I(a)}{I(0)} = -2a \Rightarrow I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}, a \geq 0.$$

Зауважимо, що завдяки парності підінтегральної функції відносно a від умови невід'ємності цього параметра можна відмовитись. Тоді, очевидно, приходимо до відповіді

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|a|}, a \in (-\infty, \infty).$$

Запропонуємо інший, «прямий» метод обчислення цього інтегралу. Для простоти вважаємо, що $a \geq 0$. Зробимо заміну:

$$t = \frac{a}{x}, x = \frac{a}{t}, t: \infty \rightarrow 0 \forall x: 0 \rightarrow \infty, x^2 + \frac{a}{x^2} = t^2 + \frac{a}{t^2}, dx = -\frac{a}{t^2} dt$$

В результаті одержимо: $I(a) = \int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx = a \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\left(t^2 + \frac{a^2}{t^2}\right)} dt$. Зауважимо, що у

підінтегральній функції $t=0$ - точка усунутого розриву, в чому легко пересвідчитись, використовуючи, наприклад, правило Лопіталя. Легко бачити,

що $\frac{1}{t^2} e^{-\left(t^2 + \frac{a^2}{t^2}\right)} \rightarrow 0 \forall t \rightarrow 0$.

Маємо: $2I(a) = \int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) dx = e^{-2a} \int_0^{\infty} e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2} \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) dx$. Після заміни

$t = x - \frac{a}{x}, t: -\infty \rightarrow \infty \forall x: 0 \rightarrow \infty, x^2 + \frac{a}{x^2} = t^2 + 2a, dt = \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) dx$ одержимо:

$$2I(a) = \int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) dx = e^{-2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} e^{-2a}.$$

Звідси $I(a) = \int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}, a \geq 0$. Завдяки парності підінтегральної

функції відносно параметра a одержимо остаточно:

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|a|}, a \in (-\infty, \infty).$$

Зауважимо також, що цей інтеграл можна знайти, застосовуючи раніше

доведену формулу: $\int_0^{\infty} g\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) dx = \int_0^{\infty} g(x^2 + 2a) dx$:

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \int_0^{\infty} e^{-(x^2 + 2a)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}, a > 0.$$

с). Задача для самостійного розв'язання. $I = \int_{-\infty}^{\infty} (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) e^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx, a > 0$.

Вказівка: використати відомий інтеграл Ейлера-Пуасона і результат задачі а).

Відповідь:

$$I = \frac{\left((a + 2b^2)a_1 - 4abb_1 + 2a^2c_1 \right) \sqrt{\pi}}{2a^2 \sqrt{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}}.$$

Задача 2.3.4. $I = \int_0^{\infty} \sqrt{x} \cos(2\sqrt{x^3}) e^{-x^3} dx.$

Введемо заміну: $t = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = t^{\frac{2}{3}}, dx = \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}} dt, x^3 = t^2.$ Маємо:

$$I = \int_0^{\infty} \sqrt{x} \cos(2\sqrt{x^3}) e^{-x^3} dx = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \cos(2t) e^{-t^2} dt.$$

Замінімо у підінтегральному виразі

косинус його рядом Тейлора:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \cos(2t) e^{-t^2} dt = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!!} t^{2n} dt = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt = \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!!} \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n-1)!!} (2n-1)!! = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{3e}. \end{aligned}$$

Тут застосували перестановку нескінченної суми і інтеграла. Так можна було зробити, оскільки для членів ряду можна знайти інтегровну мажоранту $e^{-t^2+\delta t}$ при досить малому $\delta > 0$. Також було використано значення інтеграла (див. задачу 2.3.1)

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ при } a = 1.$$

2.4. Інтеграл Френеля $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx, \int_0^{\infty} \cos x^2 dx.$

Зробимо заміну зразу у двох інтегралах: $t = x^2, dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. В результаті прийдемо до їхніх записів у новій формі:

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Згідно з (2.3.1) замінимо вираз $\frac{1}{\sqrt{t}}$ рівним йому інтегралом: $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin t dt \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du.$$

Легко бачити, що перестановка порядків інтегрування привела б до остаточної відповіді, але її обґрунтування виявляється досить складним. Тому застосуємо «множник збіжності» $e^{-kt}, k > 0$. Тоді перестановка порядків інтегрування легко обґрунтовується з застосуванням теореми Фубіні:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-kt} \sin t dt \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-(k+u^2)t} \sin t dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+(k+u^2)^2}.$$

Підінтегральна функція в $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt$ неперервна в області $(t, k) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$, він збігається рівномірно в області $k \in [0, \infty)$, тому цей інтеграл є неперервною функцією від $k \in [0, \infty)$. Значить, можна перейти до границі за теоремою V.2.6 [6] при $k \rightarrow 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^4}.$$

Зображуючи підінтегральний вираз у останньому інтегралі у вигляді суми елементарних дробів після нескладних перетворень одержуємо:

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^4} = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1)) \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

І в результаті

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Аналогічним чином доводиться, що другий інтеграл Френеля має те ж саме значення. Остаточню:

| | |
|---|---------|
| $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$ | (2.4.1) |
|---|---------|

2.5. Інтеграл Фрулані.

Так називається інтеграл при $0 < a < b$

| | |
|---|---------|
| $\int_0^{\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx.$ | (2.5.1) |
|---|---------|

Розрізняють два випадки:

а). $f'(x)$ неперервна і диференційовна на $x \in [0, \infty)$, а $f(x)$ має скінченну границю на нескінченності: $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Тоді

| | |
|--|---------|
| $\int_0^{\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = (f(\infty) - f(0)) \ln \frac{b}{a}.$ | (2.5.2) |
|--|---------|

б). Не існує скінченної границі $f(x), x \rightarrow \infty$, але збігається інтеграл

$\int_A^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx, A > 0$ і існує похідна $f'(0)$. Тоді

$$\int_0^{\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = -f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

Приклади обчислення інтегралів Фрулані.

а). Застосуємо формулу (2.5.1) до обчислення наступного інтегралу:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx = \ln \frac{a}{b}.$$

Неважно впевнитись в тому, що всі умови для застосування цієї формули виконано:

б). Перевіривши, що всі умови для застосування формули (2.5.2) виконані,

обчислимо інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x} dx = \ln \frac{a}{b}.$

2.6. Інтеграли Лапласа

а). $I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx .$

Скористаємось відомим табличним інтегралом:

$$\frac{1}{\alpha^2 + x^2} = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha^2 + x^2)t} dt .$$

Звідси

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \cos(\beta x) dx \int_0^{\infty} e^{-(\alpha^2 + x^2)t} dt .$$

Неважно переконатись у виконанні умов теореми Фубіні, що дає можливість переставити порядки інтегрування:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} dt \int_0^{\infty} e^{-tx^2} \cos(\beta x) dx .$$

Згідно з формулою (2.3.2)

$$\int_0^{\infty} e^{-tx^2} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{1}{4t}\beta^2}.$$

Тому

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t - \frac{1}{4t}\beta^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

Після заміни $t = \tau^2 \Rightarrow dt = 2\tau d\tau$ одержимо:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}.$$

Тут було використано [6], (V.3.14).

b). $J(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha, \beta > 0).$

Після диференціювання за параметром β одержаного результату, одержимо другий інтеграл Лапласа:

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}.$$

2.7. Задачі на тему «Знаходження інтегралів, що залежать від параметра»

Задача 2.7.1. Відомо: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a + x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}, a > 0.$

Введемо позначення:

$$I_{n+1} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a + x^2)^{n+1}}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0.$$

Тоді інтеграл з умови задачі позначатиметься через I_0 .

Очевидно, цей інтеграл припускає диференціювання за параметром довільну кількість разів. Маємо після першого диференціювання:

$$\frac{d}{da} I_0 = \frac{d}{da} \left(\int_0^{\infty} \frac{dx}{a+x^2} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{da^{-\frac{1}{2}}}{da} \Rightarrow - \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^2} = - \frac{\pi a^{-\frac{3}{2}}}{2^2},$$

звідки

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^2} = \frac{\pi a^{-\frac{3}{2}}}{2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Продовжуючи диференціювання, будемо мати:

$$\begin{aligned} -2! \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^3} &= - \frac{3!! \pi a^{-\frac{5}{2}}}{2^3} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{3!! \pi}{2^2} a^{-\left(2+\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3!! \pi}{2^2 (2!)} a^{-\left(2+\frac{1}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2 \cdot 2 - 1)!! \pi}{(2 \cdot 2)!!} a^{-\left(2+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

За індукцією одержимо при $n \in \mathbb{N}$:

| | |
|---|---------|
| $I_{n+1} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi (2n-1)!!}{2 (2n)!!} a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$ | (2.7.1) |
|---|---------|

Зауваження. На жаль, даний в умові задачі інтеграл, тобто, випадок $n=0$, не вкладається в цю формулу. Але можна записати праву частину у іншому вигляді так, щоб рівність справджувалась для усіх $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$:

$$I_{n+1} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi |2n-1|!!}{2 (2n)!!} a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Задача 2.7.2. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x^{a-1} \ln^n x dx$.

Відомо: $\int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$, $a > 0$. Нехай $a \geq \delta > 0$. В цій області інтеграл припускає довільну кількість похідних за параметром. Маємо після першого диференціювання:

$$\int_0^1 x^{a-1} \ln x dx = -\frac{1}{a^2}.$$

Легко бачити, що після n – кратного диференціювання одержимо:

| | |
|--|---------|
| $\int_0^1 x^{a-1} \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}.$ | (2.7.2) |
|--|---------|

Задача 2.7.3. Обчислити інтеграл $\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x} \cos x dx$.

Включимо його в сім'ю інтегралів

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{x} \cos x dx, \alpha > 0.$$

Легко бачити, що цей інтеграл задовольняє умовам застосування правила Лейбниці – диференціювання за параметром:

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos x dx = \frac{-\alpha \cos x + \sin x}{\alpha^2 + 1} e^{-\alpha x} \Big|_0^\infty = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

Після інтегрування за параметром одержимо :

$$\int_0^\alpha \frac{d}{d\beta} I(\beta) d\beta = I(\alpha) - I(0) = \int_0^\alpha \frac{\beta}{1+\beta^2} d\beta = \frac{1}{2} \ln(1+\beta^2) \Big|_0^\alpha = \frac{1}{2} \ln(1+\alpha^2).$$

Враховуючи, що $I(0) = 0$, будемо мати:

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{x} \cos x dx = \frac{1}{2} \ln(1+\alpha^2).$$

Остаточню:

| | |
|--|---------|
| $\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x} \cos x dx = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$ | (2.7.3) |
|--|---------|

Задача 2.7.4. $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2) \ln x} \ln \frac{1+x^\alpha}{1+x^\beta} dx, \alpha, \beta > 0.$

Введемо позначення: $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2) \ln x} \ln(1+x^\alpha) dx$. Тоді

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2) \ln x} \ln \frac{1+x^\alpha}{1+x^\beta} dx = I(\alpha) - I(\beta).$$

Легко бачити, що інтеграл від продиференційованої за параметром α підінтегральної функції збігається рівномірно за цим параметром. Тоді можна застосувати формулу Лейбниця при диференціюванні інтеграла за параметром:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} I(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2) \ln x} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(1+x^\alpha) dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2) \ln x} \frac{x^\alpha \ln x}{1+x^\alpha} dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^\infty \frac{(1+x^\alpha - 1) dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.$$

Введемо заміну:

$$x = \operatorname{tg} t \Rightarrow x: 0 \rightarrow \infty \forall t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}; \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 t, dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

Звідси

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t dt}{\cos^2 t (1+\operatorname{tg}^\alpha t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\operatorname{tg}^\alpha t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha t dt}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t}.$$

Позначимо: $J(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha t dt}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t}.$

Із властивості інтеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos \varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin \varphi) d\varphi$ легко зробити висновок:

$$J(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha t dt}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha t dt}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t}, \text{ тобто,}$$

$$2J(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha t dt}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha t dt}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \Rightarrow J(\alpha) = \frac{\pi}{4}.$$

Тоді $\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \frac{\pi}{4}$. Звідси $\int_\alpha^\beta \frac{d}{d\sigma} I(\sigma) = I(\beta) - I(\alpha) = \frac{\pi}{4}(\beta - \alpha)$.

Відповідь: $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)\ln x} \ln \frac{1+x^\alpha}{1+x^\beta} dx = \frac{\pi}{4}(\beta - \alpha)$.

Задача 2.7.5. $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2}}{1-x^2} dx.$

Зробимо заміну:

$$x = \sin t, \forall t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow x: 0 \rightarrow 1, \sqrt{1-x^2} = \cos t, dx = \cos t dt.$$

Маємо:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\cos t)}{\cos^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\cos t)}{\cos t} dt.$$

Розглянемо допоміжний інтеграл як функцію, залежну від параметра α :

$$J(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \cos t)}{\cos t} dt.$$

Тоді $I = J(1)$, $J(0) = 0$.

Зауважимо, що $t = \frac{\pi}{2}$ - точка усувного розриву для підінтегральної функції і інтеграл збігається рівномірно по відношенню до параметра α . Інтеграл від продиференційованої по α функції

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\operatorname{arctg}(\alpha \cos t)}{\cos t} \right) = \frac{1}{\cos t} \frac{d}{d\alpha} (\operatorname{arctg}(\alpha \cos t)) = \frac{1}{\cos t} \frac{\cos t}{1 + (\alpha \cos t)^2} = \frac{1}{1 + (\alpha \cos t)^2}$$

збігається рівномірно, а тому можна застосувати правило Лейбниця: похідна за параметром від інтегралу дорівнює інтегралу від похідної за цим параметром:

$$\frac{d}{d\alpha} J(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{arctg}(\alpha \cos t)}{\cos t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (\alpha \cos t)^2}.$$

Раніше було доведено формулу: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b \cos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+b)}}$ завдяки якій

$$\frac{d}{d\alpha} J(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (\alpha \cos t)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Інтегруючи за параметром і використовуючи формулу Ньютона-Лейбниці, одержимо:

$$\int_0^{\alpha} \frac{d}{d\beta} J(\beta) d\beta = J(\alpha) - J(0) = J(\alpha) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\alpha} \frac{d\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = \frac{\pi}{2} \ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}).$$

Відповідь:

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2}}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}).$$

Задача 2.7.6. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2+2}}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} dx.$

Введемо цей інтеграл у сім'ю функцій, що залежать від параметра:

$$I(t) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t \sqrt{x^2+2}}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} dx.$$

Тоді шуканий інтеграл - це значення $I(1)$.

План розв'язання досить традиційний: продиференціюємо інтеграл за параметром, довівши можливість використання правила Лейбниці диференціювання підінтегральної функції, а потім знайдені інтеграли проінтегруємо за параметром. При цьому для використання формули Ньютона-Лейбниці треба буде знати значення первісної у двох точках, границях області інтегрування. Виявляється, що такими точками будуть 1 і ∞ . Тому знайдемо границю нашого інтеграла при $t \rightarrow \infty$. Зрозуміло, що

$\operatorname{arctg} t \sqrt{x^2+2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \forall t \rightarrow \infty$, а перехід до границі під інтегралом законний через

існування інтегрованої мажоранти $\frac{\pi}{2(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}$ підінтегральної функції.

Тому першою задачею є обчислення інтегралу

$$I(\infty) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

Введемо заміну:

$$x = tgu \Rightarrow u = \arctg x, u: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \forall x: 0 \rightarrow 1, dx = \frac{du}{\cos^2 u} \Rightarrow.$$

$$I(\infty) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos u du}{\sqrt{\cos^2 u + 1}} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos u du}{\sqrt{2 - \sin^2 u}}.$$

Ще одна заміна: $v = \sin u \Rightarrow u: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow v: 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos u du = dv$, після якої одержимо:

$$I(\infty) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dv}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - v^2}} = \frac{\pi}{2} \arcsin \frac{v}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Знайдемо тепер, як і передбачалось, похідну $I(t)$ за параметром t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\arctg t \sqrt{x^2+2}}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} \frac{\partial}{\partial t} \arctg t \sqrt{x^2+2} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} \frac{\sqrt{x^2+2}}{1+t^2(x^2+2)} dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} \frac{1}{1+t^2(x^2+2)} dx. \end{aligned}$$

Легко бачити, що підінтегральну функцію можна подати як різницю наступних елементарних дробів (наприклад, за допомогою методу невизначених коефіцієнтів або простим підбором):

$$\frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{1}{1+t^2(x^2+2)} = \frac{1}{1+t^2} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{t^2}{1+t^2(x^2+2)} \right).$$

Тому

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{1}{1+t^2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \frac{t^2}{1+t^2} \int_0^1 \frac{dx}{t^2 x^2 + 2t^2 + 1} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} \int_0^1 \frac{dx}{t^2 x^2 + 2t^2 + 1}.$$

Для знаходження другого інтегралу поділимо чисельник і знаменник підінтегральної функції на t^2 :

$$I_2 \triangleq \frac{t^2}{1+t^2} \int_0^1 \frac{dx}{t^2 x^2 + 2t^2 + 1} = \frac{t^2}{1+t^2} \int_0^1 \frac{\frac{1}{t^2} dx}{x^2 + \left(\frac{\sqrt{2t^2+1}}{t} \right)^2} = \frac{1}{1+t^2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{\sqrt{2t^2+1}}{t} \right)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+t^2} \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}} \operatorname{arctg} \frac{tx}{\sqrt{2t^2+1}} \Big|_0^1 = \frac{1}{1+t^2} \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}}.$$

Проінтегруємо одержану рівність по проміжку $t \in [1, \infty)$:

$$I(\infty) - I(1) = \frac{\pi}{4} \operatorname{arctg} t \Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{2t^2+1}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}} dt \Rightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{12} - I(1) = \frac{\pi^2}{16} - \int_1^\infty \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{2t^2+1}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}} dt \Rightarrow.$$

$$I(1) = \frac{\pi^2}{48} + \int_1^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{2t^2+1}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}} dt.$$

Позначимо: $J \triangleq \int_1^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{2t^2+1}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}} dt$. Тоді $I(1) = \frac{\pi^2}{48} + J$

У одержаному інтегралі J введемо заміну:

$$t = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{t} : 1 \rightarrow 0 \forall t : 1 \rightarrow \infty, dt = -\frac{1}{y^2} dy \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} J &= \int_1^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{2t^2+1}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}} dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{y}}{y^2 \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) \sqrt{\frac{2}{y^2} + 1}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{\frac{2}{y^2} + 1}} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2+y^2}} dy. \end{aligned}$$

$$\text{Але } \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2+y^2}} = \operatorname{arccotg} \sqrt{2+y^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{2+y^2} \Rightarrow$$

$$J = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} - \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2+2}}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} dx \Rightarrow$$

$$J = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} - I = \frac{\pi^2}{12} - I.$$

Звідси

$$I(1) = \frac{\pi^2}{48} + J = \frac{\pi^2}{48} + \frac{\pi^2}{12} - I(1) \Rightarrow I(1) = \frac{5\pi^2}{96} - \text{відповідь.}$$

Задача 2.7.7. $I = \int_0^{\pi} \left(\ln \frac{2 + \cos x}{2} \right) \frac{dx}{\cos x}.$

Зауважимо, що підінтегральна функція має особливість у точці $x = \frac{\pi}{2}$, але

завдяки відомій класичній границі

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2} \cos x \right)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \left(-\frac{1}{2} \sin x \right)}{(2 + \cos x)(-\sin x)} = \frac{1}{2}$$

це усувний розрив і тому інтеграл збігається. Для його знаходження розглянемо сім'ю інтегралів, що залежать від параметра:

$$J(\alpha) = \int_0^{\pi} \left(\ln \frac{2 + \alpha \cos x}{2} \right) \frac{dx}{\cos x}.$$

Тоді $I = J\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2} \cos x \right)}{\cos x} dx, J(0) = 0.$

Легко бачити, що на відрізку $\alpha \in \left[0, \frac{3}{4} \right]$ інтеграл збігається рівномірно.

Дослідимо на рівномірну збіжність інтеграл від продиференційованої за параметром α функції. Маємо:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(1 + \alpha \cos x) \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{(1 + \alpha \cos x) \cos x} = \frac{1}{1 + \alpha \cos x}.$$

Очевидно, на вказаному проміжку зміни параметру інтеграл від продиференційованої функції рівномірно збігається і можна застосувати правило Лейбниця:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\pi} \ln(1 + \alpha \cos x) \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \alpha \cos x} dx.$$

Перетворимо підінтегральний вираз, виразивши його через тангенс половинного аргументу:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \alpha \cos x} dx = \int_0^{\pi} \frac{1 + tg^2 \frac{x}{2}}{\left(1 + tg^2 \frac{x}{2}\right) + \alpha \left(1 - tg^2 \frac{x}{2}\right)} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \alpha + (1 - \alpha)tg^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx.$$

Введемо заміну:

$$t = tg \frac{x}{2}, x: 0 \rightarrow \pi \Rightarrow t: 0 \rightarrow \infty, dt = \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 dt.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) &= \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \alpha + (1 - \alpha)tg^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + \alpha + (1 - \alpha)t^2} = \frac{2}{1 + \alpha} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + \left(\frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\sqrt{1 + \alpha}}t\right)^2} = \\ &= \frac{2}{1 + \alpha} \sqrt{\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\sqrt{1 + \alpha}}t \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{1 + \alpha} \sqrt{\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}. \end{aligned}$$

Беручи визначений інтеграл від обох частин і враховуючи, що $J(0) = 0$, одержимо:

$$J(\alpha) = \pi \int_0^{\alpha} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \pi \arcsin \alpha.$$

Звідси одержуємо відповідь: $I = J\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Задача 2.7.8. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx$.

Зробимо заміну: $t = \operatorname{tg} x, t: 0 \rightarrow \infty \forall x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt \Rightarrow$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} t}{t(1+t^2)} dt.$$

Розглянемо інтеграл, що залежить від параметра: $J(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha t}{t(1+t^2)} dt$. Тоді

$$I = J(1), J(0) = 0.$$

Легко бачити, що виконуються умови теореми Лейбниця, тому похідну за параметром можна внести під інтеграл:

$$\frac{d}{d\alpha} J(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t(1+t^2)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \operatorname{arctg} \alpha t dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+\alpha^2 t^2)} dt.$$

Читач самостійно одержить зображення підінтегральної функції у вигляді різниці елементарних дробів:

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+\alpha^2 t^2)} = \frac{1}{(1-\alpha^2)} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2 t^2} \right).$$

Отже,

$$\frac{d}{d\alpha} J(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha^2} \left(\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \alpha \int_0^{\infty} \frac{\alpha dt}{1+\alpha^2 t^2} \right) = \frac{1}{1-\alpha^2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{1-\alpha}{1-\alpha^2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1+\alpha} \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{d}{d\alpha} J(\alpha) d\alpha = J(1) - J(0) = I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{1+\alpha} = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

Відповідь: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} t}{t(1+t^2)} dt = \frac{\pi \ln 2}{2}.$

Задача 2.7.9. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx.$

Маємо:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x dx \triangleq I_1 - I_2.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = x \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx = - \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x dx = x \ln x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \ln \pi - \frac{\pi}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Звідси

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx = - \frac{\pi}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{2} \ln \pi + \frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (1 - \ln \pi).$$

Задача 1 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^1 \frac{\sin^2(\ln x)}{\ln x} dx.$

Вказівка: Розглянути інтеграл $I = \int_0^1 \frac{\sin^2(a \ln x)}{\ln x} dx$ і продиференціювати по a .

Відповідь: $-\frac{1}{4}\ln 5$.

Задача 2 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^1 \frac{\sin^3(\ln x)}{\ln x} dx$.

Відповідь: $\frac{3\pi}{16} - \frac{3}{4}\operatorname{arctg} 3$.

Задача 3 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos ax}{xe^x} dx$.

Вказівка: продиференціювати по a .

Задача 4 для самостійного розв'язання: $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

Вказівка: продиференціювати по a інтеграл $\int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx$.

Відповідь: $\frac{\pi \ln 2}{8}$.

Задача 5 для самостійного розв'язання: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{3}x} \sin x}{x} dx$. Відповідь: $\frac{\pi}{6}$.

Задача 6 для самостійного розв'язання: $\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$. Вказівка: записавши

інтеграл у вигляді $2\int_0^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ і проінтегрувавши за частинами, звести до

інтегралу Френеля. Відповідь: $\sqrt{2\pi}$.

2.8. В і Г-функції Ейлера

Деякі відомості про функції Ейлера

| | |
|---|---------|
| $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ | (2.8.1) |
|---|---------|

| | |
|---|---------|
| $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ | (2.8.2) |
|---|---------|

Перший називається В-функцією, а другий - Г-функцією Ейлера. Функціями Ейлера ці інтеграли запропонував назвати Лежандр.

Область визначення В-функції: $\alpha > 0, \beta > 0$, Г-функції: $\alpha > 0$.

Деякі властивості В-функції Ейлера

а). Симетричність

| | |
|---------------------------------------|---------|
| $B(\beta, \alpha) = B(\alpha, \beta)$ | (2.8.3) |
|---------------------------------------|---------|

б). Формула зниження.

| | |
|--|---------|
| $B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha-1, \beta), \alpha > 1,$ | (2.8.4) |
| $B(\alpha, \beta) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta-1), \beta > 1.$ | |

| | |
|--|---------|
| $B(\alpha, n) = \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}.$ | (2.8.5) |
|--|---------|

Зображення В-функції невласним інтегралом 1-го роду:

| | |
|---|---------|
| $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(y+1)^{\alpha+\beta}} dy = \int_0^{\infty} \frac{y^{\beta-1}}{(y+1)^{\alpha+\beta}} dy.$ | (2.8.6) |
|---|---------|

Г-функція Ейлера і її властивості

а). Диференційовність.

| | |
|--|---------|
| $\Gamma'(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln x dx,$ $\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^n x dx.$ | (2.8.7) |
|--|---------|

б). Рекурентна формула:

| | |
|--|---------|
| $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ | (2.8.8) |
|--|---------|

с). Значення в цілих невід'ємних точках:

| | |
|---|---------|
| $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ $\Gamma(n + 1) = n!$ | (2.8.9) |
|---|---------|

д). Значення в півцілих точках:

| | |
|---|----------|
| $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$ $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$ | (2.8.10) |
|---|----------|

е). Гама-функція як невласний інтеграл 2-го роду:

| | |
|---|----------|
| $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{u}\right) du.$ | (2.8.11) |
|---|----------|

ф). Формула Ейлера-Гауса

| | |
|---|----------|
| $\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}.$ | (2.8.12) |
|---|----------|

г). Формула доповнення (належить Ейлеру)

Нехай $0 < \alpha < 1$. Тоді

| | |
|--|----------|
| $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2^2}\right)\dots\left(1 - \frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)}.$ | (2.8.13) |
|--|----------|

В теорії рядів Фур'є одержано формулу, за допомогою якої доводиться формула доповнення (2.8.13):

| | |
|---|----------|
| $\sin(\pi\alpha) = \pi\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right) = \pi\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right).$ | (2.8.14) |
|---|----------|

h). Зв'язок між В і Γ функціями Ейлера

| | |
|--|----------|
| $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$ | (2.8.15) |
|--|----------|

i). Формула Лежандра

| | |
|---|----------|
| $\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)$ | (2.8.16) |
|---|----------|

Для доведення розглянемо $B(a, a) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{a-1} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right)^{a-1} dx =$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right)^{a-1} dx.$$

$$\left\{ \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} \sqrt{t} \Rightarrow x: 0 \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow t: 1 \rightarrow 0, dx = -\frac{1}{4} t^{-\frac{1}{2}} dt, \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right) = \frac{1}{4}(1-t) \right\}.$$

Звідси

$$B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} (1-t)^{a-1} dt = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

Переходячи до гама-функції, одержимо:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{2^{2a-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)} \Rightarrow \Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

ж). Інтеграл Раабе.

| | |
|--|----------|
| $R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(\alpha) d\alpha.$ | (2.8.17) |
|--|----------|

Інтеграл існує, оскільки завдяки рекурентному співвідношенню $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \Rightarrow \ln \Gamma(\alpha) = \ln \Gamma(\alpha+1) - \ln \alpha$, а інтеграл від правої частини, очевидно, існує.

Заміняючи в досліджуваному інтегралі $\alpha \rightarrow 1 - \alpha$, впевнюємось в рівності

$$R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(\alpha) d\alpha = \int_0^1 \ln \Gamma(1 - \alpha) d\alpha.$$

Після додавання цих інтегралів одержуємо:

$$\begin{aligned} 2R_0 &= \int_0^1 \ln \Gamma(\alpha) d\alpha + \int_0^1 \ln \Gamma(1 - \alpha) d\alpha = \int_0^1 \ln \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) d\alpha = \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} d\alpha = \\ &= \int_0^1 (\ln \pi - \ln \sin \pi\alpha) d\alpha = \ln \pi - \int_0^1 \ln \sin \pi\alpha d\alpha. \end{aligned}$$

Зробимо в останньому інтегралі заміну $x = \pi\alpha, \alpha: 0 \rightarrow 1 \Rightarrow x: 0 \rightarrow \pi, d\alpha = \frac{dx}{\pi}$.

$$\int_0^1 \ln \sin \pi \alpha d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \sin x dx .$$

Обчислимо інтеграл в правій частині, який теж пов'язує з ім'ям Ейлера:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \ln \sin x dx = \int_0^\pi \ln 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^\pi \ln 2 dx + \int_0^\pi \ln \sin \frac{x}{2} dx + \int_0^\pi \ln \cos \frac{x}{2} dx = \\ &= \pi \ln 2 + \int_0^\pi \ln \sin \frac{x}{2} dx + \int_0^\pi \ln \cos \frac{x}{2} dx = \left\{ t = \frac{x}{2} : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, dx = 2dt \right\} = \\ &= \pi \ln 2 + 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t dt \right) = \pi \ln 2 + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = \\ &= \pi \ln 2 + 2 \int_0^\pi \ln \sin t dt \Rightarrow \int_0^\pi \ln \sin t dt = -\pi \ln 2 . \end{aligned}$$

Отже,

значення інтегралів, одержаних Ейлером:

| | |
|---|----------|
| $\int_0^\pi \ln \sin x dx = -\pi \ln 2,$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$ | (2.8.18) |
|---|----------|

Нарешті,

$$\begin{aligned} 2R_0 &= 2 \int_0^1 \ln \Gamma(\alpha) d\alpha = \ln \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \sin x dx = \ln \pi - \frac{1}{\pi} \left(\pi \ln 2 + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt \right) = \\ &= \ln \pi - (\ln 2 - 2 \ln 2) = \ln \pi + \ln 2 = \ln 2\pi . \end{aligned}$$

Відповідь: $R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(\alpha) d\alpha = \ln \sqrt{2\pi}$.

Узагальнення:

| | |
|--|----------|
| $R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(\alpha) d\alpha = a(\ln a - 1) + \ln \sqrt{2\pi}.$ | (2.8.19) |
|--|----------|

Зауваження. При такому позначенні розумно інтеграл (2.8.17) позначати як $I_0 \triangleq I(0)$.

Продиференціюємо $R(a)$ за параметром a :

$$R'(a) = \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a) = \ln \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \ln a \Rightarrow$$

$$\int_0^a R'(b) db = R(a) - R(0) = \int_0^a \ln(b) db = a \ln a - a \Rightarrow$$

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(\alpha) d\alpha = a(\ln a - 1) + \ln \sqrt{2\pi}.$$

Зауваження 1. Тут було використано відомий факт: $a \ln a \rightarrow 0 \forall a \rightarrow 0$. Його можна одержати, наприклад, за допомогою правила Лопіталя.

Зауваження 2. Було проінтегровано логарифм від гама-функції по відрізьку довжиною 1. Можна проінтегрувати цю функцію по відрізьку довжиною 2 і взагалі довільною натуральною довжиною. Наприклад:

$$\begin{aligned} R_2(a) &\triangleq \int_a^{a+2} \ln \Gamma(\alpha) d\alpha = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(\alpha) d\alpha + \int_{a+1}^{a+2} \ln \Gamma(\alpha) d\alpha = \\ &= \left(a \ln a - a + \ln \sqrt{2\pi} \right) + \left((a+1) \ln(a+1) - a - 1 + \ln \sqrt{2\pi} \right) = \\ &= a \ln a + (a+1) \ln(a+1) - 2a - 1 + 2 \ln \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Читачу пропонується взяти довільне натуральне число як довжину проміжку інтегрування.

Наступні два інтеграли – свого роду варіації на інтеграл Раабе.

R1). Знайти інтеграл: $I = \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx$.

Введемо заміну: $t = 1 - x : 1 \rightarrow 0 \forall x : 0 \rightarrow 1, x = 1 - t, dx = -dt, \sin \pi x = \sin \pi t \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx = \int_0^1 \ln \Gamma(1-t) \sin \pi t dt \Rightarrow \\
 2I &= \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx + \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) \sin \pi x dx = \int_0^1 (\ln \Gamma(x) + \ln \Gamma(1-x)) \sin \pi x dx = \\
 &= \int_0^1 (\ln \Gamma(x) \Gamma(1-x)) \sin \pi x dx = \int_0^1 \left(\ln \frac{\pi}{\sin \pi x} \right) \sin \pi x dx = \\
 &= \ln \pi \int_0^1 \sin \pi x dx - \int_0^1 (\ln(\sin \pi x)) \sin \pi x dx = \\
 &= -\frac{\ln \pi}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 (\ln(\sin \pi x)) d \cos \pi x = \frac{2 \ln \pi}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (\ln(\sin^2 \pi x)) d \cos \pi x = \\
 &= \frac{2 \ln \pi}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (\ln(\sin^2 \pi x)) d \cos \pi x = \\
 &= \frac{2 \ln \pi}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (\ln(1 - \cos^2 \pi x)) d \cos \pi x.
 \end{aligned}$$

Введемо заміну: $y = \cos \pi x, y : 1 \rightarrow -1 \forall x : 0 \rightarrow 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (\ln(1 - \cos^2 \pi x)) d \cos \pi x &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\ln(1 - y^2)) dy = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 (\ln(1 - y^2)) dy = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 (\ln(1 - y)) dy - \frac{1}{\pi} \int_0^1 (\ln(1 + y)) dy.
 \end{aligned}$$

Зауваження. При знаходженні першого з цих двох інтегралів методом інтегрування за частинами зручніше виходити з виразу $\int_0^1 (\ln(1 - y)) d(y - 1)$.

Аналогічно треба діяти з другим інтегралом:

$$\int_0^1 (\ln(1 - y)) d(y - 1) = (y - 1) \ln(1 - y) \Big|_{+0}^{1-0} + \int_0^1 \frac{y - 1}{1 - y} dy = \lim_{\delta \rightarrow +0} (y - 1) \ln(1 - y) \Big|_{+0}^{1-\delta} - 1 =$$

$$= -1 + \lim_{\delta \rightarrow +0} (-\delta \ln \delta) = -1.$$

Тут скористались відомою границею, яку можна знайти, наприклад, за допомогою правила Лопіталя: $\lim_{\delta \rightarrow +0} (\delta \ln \delta) = 0$.

$$\int_0^1 (\ln(1+y)) d(y+1) = (y+1) \ln(1+y) \Big|_{+0}^{1-0} - \int_0^1 dy = 2 \ln 2 - 1.$$

Звідси

$$I = \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx = \frac{\ln \pi}{\pi} + \frac{2 - 2 \ln 2}{2\pi} = \frac{\ln \pi}{\pi} + \frac{1 - \ln 2}{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\pi}{2} \right).$$

R2). Знайти інтеграл: $I = \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos^2 \pi x dx$.

Введемо заміну: $t = 1 - x : 1 \rightarrow 0 \quad \forall x : 0 \rightarrow 1, x = 1 - t, dx = -dt; \cos^2 \pi x = \cos^2 \pi t$.

В результаті

$$I = \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos^2 \pi x dx = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) \cos^2 \pi x dx \Rightarrow$$

$$2I = \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos^2 \pi x dx + \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) \cos^2 \pi x dx =$$

$$= \int_0^1 \ln \Gamma(x) \Gamma(1-x) \cos^2 \pi x dx = \ln \pi \int_0^1 \cos^2 \pi x dx + \left(- \int_0^1 \ln(\sin \pi x \cos \pi x) dx \right) \triangleq$$

$$\triangleq I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \ln \pi \int_0^1 \cos^2 \pi x dx = \frac{\ln \pi}{2} \int_0^1 (1 + \cos 2\pi x) dx = \frac{\ln \pi}{2}.$$

$$I_2 = - \int_0^1 \ln(\sin \pi x) \cos^2 \pi x dx = - \int_0^1 \ln(\sin \pi x) (1 - \sin^2 \pi x) dx =$$

$$= -\int_0^1 \ln(\sin \pi x) dx + \int_0^1 (\ln(\sin \pi x)) \sin^2 \pi x dx.$$

Введемо заміну: $t = \pi x : 0 \rightarrow \pi \quad \forall x : 0 \rightarrow 1, dx = \frac{1}{\pi} dt$. В результаті з урахуванням (2.8.18)

$$I_2 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\ln(\sin t)) \sin^2 t dt = \ln 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\ln(\sin t)) \sin^2 t dt.$$

Очевидно, графік функції $(\ln(\sin t)) \sin^2 t$ симетричний відносно вертикальної прямої $t = \frac{\pi}{2}$ тому згідно з результатом, одержаним в задачі 2.1.19

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\ln(\sin t)) \sin^2 t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin t)) \sin^2 t dt.$$

Зробимо заміну $y = \sin t : 0 \rightarrow 1 \quad \forall t : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, t = \arcsin y, dt = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$. Тоді

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin t)) \sin^2 t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (\ln y) \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy.$$

Для застосування формули інтегрування за частинами знайдемо наступну первісну, використовуючи формулу на початку частини 2:

$$\int \sqrt{1-y^2} dy = \frac{y}{2} \sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \arcsin y :$$

$$\begin{aligned} \int \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy &= \int \frac{y^2 - 1 + 1}{\sqrt{1-y^2}} dy = -\int \sqrt{1-y^2} dy + \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(-y \sqrt{1-y^2} + \arcsin y \right). \end{aligned}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^1 (\ln y) \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} (\ln y) \left(-y\sqrt{1-y^2} + \arcsin y \right) \Big|_0^1 - \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(-\sqrt{1-y^2} + \frac{\arcsin y}{y} \right) dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin y}{y} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(y\sqrt{1-y^2} + \arcsin y \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin y}{y} dy = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin y}{y} dy. \end{aligned}$$

Зробимо заміну $z = \arcsin y : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \forall y : 0 \rightarrow 1, y = \sin z, dy = \cos z dz$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^1 (\ln y) \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy &= \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z \cos z}{\sin z} dz = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} z d \ln \sin z = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \left((z \ln \sin z) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin z dz \right) = \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} I_2 &= \ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow \\ 2I &= \frac{\ln \pi}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (2 \ln(2\pi) + 1). \end{aligned}$$

Відповідь:

$$I = \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos^2 \pi x dx = \frac{1}{8} (2 \ln(2\pi) + 1).$$

к). Добуток Ейлера E

Застосуємо формулу доповнення. Позначимо (разом з Ейлером) наступний добуток

$$E \triangleq \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Перепишемо його в зворотному порядку і ці вирази перемножимо:

$$E^2 \triangleq \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right).$$

Помітивши, що $\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)}$, знайдемо:

$$E^2 \triangleq \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \dots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Очевидно, комплексні числа $z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n} = \exp\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$, $k = 1, \dots, n-1$ є

коренями (що не дорівнюють одиниці) рівняння $z^n = 1$. Тому

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos\frac{2\pi k}{n} - i \sin\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Перейдемо до границі, спрямувавши $z \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} n &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos\frac{2\pi k}{n} - i \sin\frac{2\pi k}{n}\right) \Rightarrow n = \prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - \cos\frac{2\pi k}{n} - i \sin\frac{2\pi k}{n}\right| = \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{\left(1 - \cos\frac{2\pi k}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi k}{n}} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Тоді

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

1). Дві формули Ейлера

$$C(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x,$$

$$S(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x,$$

при умовах: $\lambda > 0, x > 0, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Доведення. Очевидно, підінтегральні функції і їхні похідні за параметром α неперервні при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), t \in (0, \infty)$.

Далі буде доведено, що до цих інтегралів можна застосувати правило Лейбниця диференціювання за параметром α , що дасть можливість записати:

$$\begin{aligned} C'(\alpha) &= \int_0^{\infty} \lambda t t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} (\sin \alpha \cos(\lambda t \sin \alpha) - \cos \alpha \sin(\lambda t \sin \alpha)) dt = \\ &= -\lambda \int_0^{\infty} t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha - \alpha) dt, \end{aligned}$$

І аналогічно, випускаючи подробиці:

$$S'(\alpha) = \lambda \int_0^{\infty} t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha - \alpha) dt.$$

Рівномірна по $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ збіжність кожного з цих інтегралів випливає з ознаки порівняння Вейерштраса, наприклад, для першого:

$$|t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha - \alpha)| \leq t^x e^{-\lambda t \cos \alpha},$$

а при досить малому $\sigma > 0$ і досить великому $M > 0$ маємо оцінку на вказаній області: $t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} < M e^{-\lambda t \cos \alpha + \sigma}$, $-\lambda t \cos \alpha + \sigma < 0$. Другий інтеграл оцінюється так само.

Далі будемо інтегрувати за частинами по t інтеграли $C'(\alpha)$ і $S'(\alpha)$. Використаємо узагальнення формули з початку другої частини для однієї з первісних:

$$I_s = \int e^{ax} \sin(bx + \varphi) dx = \frac{a \sin(bx + \varphi) - b \cos(bx + \varphi)}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

В нашому випадку $a = -\lambda \cos \alpha$, $b = \lambda \sin \alpha$, $\varphi = -\alpha \Rightarrow a^2 + b^2 = \lambda^2$. Тоді

$$\begin{aligned} \int e^{at} \sin(bt + \varphi) dt &= \int e^{(-\lambda \cos \alpha)t} \sin((\lambda \sin \alpha)t - \alpha) dt = \\ &= \frac{-\lambda \cos \alpha \sin((\lambda \sin \alpha)t - \alpha) - \lambda \sin \alpha \cos((\lambda \sin \alpha)t - \alpha)}{\lambda^2} e^{(-\lambda \cos \alpha)t} = \\ &= -\frac{\sin(\lambda \sin \alpha)t}{\lambda} e^{(-\lambda \cos \alpha)t}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} C'(\alpha) &= -\lambda \int_0^{\infty} t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha - \alpha) dt = -\lambda \int_0^{\infty} t^x d \left(-\frac{\sin(\lambda \sin \alpha)t}{\lambda} e^{(-\lambda \cos \alpha)t} \right) = \\ &= \left(t^x \sin(\lambda \sin \alpha)t e^{(-\lambda \cos \alpha)t} \right) \Big|_0^{\infty} - x \int_0^{\infty} t^{x-1} \sin(\lambda \sin \alpha)t e^{(-\lambda \cos \alpha)t} dt = -x S(\alpha). \end{aligned}$$

Використовуючи таку саму техніку, читач одержить співвідношення $S'(\alpha) = xC(\alpha)$, в результаті чого одержали систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} C'(\alpha) &= -xS(\alpha), \\ S'(\alpha) &= xC(\alpha). \end{aligned}$$

Звідси

$$C''_{\alpha^2}(\alpha) = -xS'_\alpha(\alpha) = -x^2C(\alpha) \Rightarrow C''_{\alpha^2}(\alpha) + x^2C(\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$C(\alpha) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x.$$

Аналогічно $S(\alpha) = -A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$. Тут поки A, B - довільні сталі.

Знайдемо їх, використовуючи значення шуканих функції $C(\alpha), S(\alpha)$ в деяких точках:

$$C(0) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}, \quad S(0) = 0.$$

Таким чином маємо:

$$C(0) = B = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}, \Rightarrow C(\alpha) = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x,$$

$$S(0) = -A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow S(\alpha) = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x,$$

Що й треба було довести.

Зауваження. З приводу розв'язання лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків див., напр., [6].

m). Похідні Γ -функції

Тепер є можливість зупинитись більш детально на першій похідній від гамма-функції, зокрема, при $\alpha = 1, \alpha = 2$ і в інших натуральних точках.

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx.$$

Доведемо, що

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx.$$

Раніше було доведено нерівність

$$0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2}{n} e^{-x}.$$

Розглянемо спочатку область інтегрування $x \in (0, 1]$. При цьому $\ln x \leq 0$.

Помножимо цю нерівність на $\ln x$:

$$0 \geq \left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right) \ln x \geq \frac{x^2}{n} e^{-x} \ln x$$

і проінтегруємо по вказаному проміжку:

$$0 \geq \int_0^1 e^{-x} \ln x dx - \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx \geq \frac{1}{n} \int_0^1 x^2 e^{-x} \ln x dx.$$

Права частина нерівності прямує до нуля. Отже, доведено:

$$\int_0^1 e^{-x} \ln x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx.$$

Аналогічно домножимо на $\ln x \geq 0$ ту ж саму нерівність в області $x \in [1, \infty)$:

$$0 \leq \int_1^n e^{-x} \ln x dx - \int_1^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx \leq \frac{1}{n} \int_1^n x^2 e^{-x} \ln x dx.$$

Оскільки інтеграл в правій частині від додатної функції збігається, то права частина прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. Тоді і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n e^{-x} \ln x dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx = 0,$$

звідки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n e^{-x} \ln x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx.$$

Границя у лівій частині існує, як було раніше доведено, тому існує границя у правій частині. Отже,

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx.$$

Обчислимо інтеграл у правій частині, інтегруючи за частинами:

$$\begin{aligned}\Gamma'(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \int_0^n \ln x \, d\left(\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} - 1\right) = \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\left(\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} - 1\right) \ln x \Big|_0^n - \int_0^n \frac{1}{x} \left(\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} - 1\right) dx \right).\end{aligned}$$

Розкладемо різницю степенів у підінтегральній функції, використовуючи формулу суми членів геометричної прогресії. В результаті одержимо:

$$\begin{aligned}\Gamma'(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln n - \frac{1}{n} \int_0^n \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^k dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln n + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{k+1} \Big|_0^n \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right) = -\gamma.\end{aligned}$$

Нагадаємо, що γ - константа Ейлера-Маскероні, $\gamma = 0,577\dots$, причому, досі невідомо, чи є ця константа раціональною, чи ні.

Означення. Логарифмічна похідна від гама-функції називається дігама-функцією і позначається ψ :

$$\psi(x) \triangleq \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Отже, знайдено також значення дігама-функції у $x=1$: $\psi(1) \triangleq \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$.

Знайдемо тепер похідну гама-функції в інших точках. Використаємо тотожність $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Після її диференціювання одержимо:

$$\begin{aligned}
\Gamma'(x+1) &= (x\Gamma(x))' = \Gamma(x) + x\Gamma'(x) = \Gamma(x) + x(\Gamma(x-1) + (x-1)\Gamma'(x-1)) = \\
&= \Gamma(x) + x\Gamma(x-1) + \dots + x(x-1)(x-2)\dots(x-[x]+2)\Gamma'(x-[x]+1) + \\
&\quad + x(x-1)(x-2)\dots(x-[x]+1)\Gamma'(x-[x]+1) = \\
&= \Gamma(x) + x\Gamma(x-1) + \dots + x(x-1)(x-2)\dots(x-[x]+1)\Gamma(x-[x]) + \\
&\quad + x(x-1)(x-2)\dots(x-[x])\Gamma(x-[x]).
\end{aligned}$$

Обчислимо похідну при натуральному значенні аргументу:

$$\begin{aligned}
\Gamma'(n+1) &= \Gamma(n) + n\Gamma(n-1) + n(n-1)\Gamma(n-2) + n(n-1)(n-2)\Gamma'(n-2) = \dots = \\
&= (n-1)! + n(n-2)! + n(n-1)(n-3)! + n(n-1)(n-2)\Gamma'(n-2) = \dots = \\
&= \frac{n!}{n} + \frac{n!}{n-1} + \frac{n!}{n-2} + \dots + n!(-\gamma) = n! \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma \right).
\end{aligned}$$

Звідси

$$\Gamma'(n+1) = n! \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma \right).$$

Це можна переписати у вигляді:

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Таким чином знайдено логарифмічні похідні Γ -функції (а також дігама-функції ψ) у натуральних точках. Наприклад, обчислимо значення похідної гама-функції у точці 2:

$$\Gamma'(2) = \Gamma'(1+1) = 1! \left(\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} - \gamma \right) = 1 - \gamma.$$

Звідси маємо для дігама-функції:

$$\psi(2) = \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = 1 - \gamma.$$

Використовуючи доведену формулу Лежандра

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a),$$

знайдемо похідну $\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$. Продиференціюємо обидві частини цієї тотожності:

$$\Gamma'(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) + \Gamma(a)\Gamma'\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma'(2a) - 2\sqrt{\pi}\Gamma(2a)2^{-(2\Gamma'(2a-1))} \ln 2 \Rightarrow$$

$$\Gamma'(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = -\Gamma(a)\Gamma'\left(a + \frac{1}{2}\right) + 2^{-2(a-1)}\sqrt{\pi}(\Gamma'(2a) - \Gamma(2a)\ln 2).$$

Підставляючи сюди $a = \frac{1}{2}$ після нескладних перетворень, використовуючи відоме значення $\Gamma'(1) = -\gamma$, де γ - стала Ейлера-Маскероні, одержимо:

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}(2\ln 2 + \gamma).$$

Отже,

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = -2\ln 2 - \gamma.$$

п). Логарифмічна похідна від гама-функції – дігама-функція

Раніше було знайдено логарифмічну похідну від Γ -функції при натуральних значеннях аргументу. Зараз знайдемо її похідні в усіх точках області визначення.

Маємо:

$$\begin{aligned}\Gamma(b) - \Psi(a, b) &= \Gamma(b) - \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{\Gamma(b)b}{\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b} = \\ &= \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b}.\end{aligned}$$

Перейдемо до границі при $b \rightarrow 0$:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \rightarrow 0} (\Gamma(b) - \Psi(a, b)).$$

Згідно з означенням

$$\Gamma(b) = \int_0^{\infty} x^{b-1} e^{-x} dx, \Psi(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}} dx.$$

Тоді

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^{\infty} x^{b-1} \left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}} \right) dx.$$

Перейдемо до границі в цій рівності, зазначивши, що у околі точки $x=0, b=0$, а $x^b < 1$ підінтегральна функція неперервна, а при достатньо великих x і $b \leq b_0$, де b_0 вибирається так, що $1 - b_0 + a > 1 \Leftrightarrow b_0 < a$, існує мажоранта:

$\frac{1}{x^{b_0-1}} \left(\frac{1}{(1+x)^{a+b}} - e^{-x} \right)$. Отже, перейдемо до границі під інтегралом і одержимо:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \psi(a) = \int_0^{\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right) \frac{dx}{x}.$$

Доведена рівність називається формулою Коші. Якщо у інтегралі для $B(a,b)$ зробити підстановку $x = e^{-t}$, прийдемо до виразу

$$B(a,b) = \int_0^{\infty} e^{-at} (1 - e^{-t})^{b-1} dt.$$

Тоді

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left(e^{-x} x^{b-1} - e^{-ax} (1 - e^{-x})^{b-1} \right) dx.$$

Міркуючи, як і в попередньому випадку, перейдемо до границі під інтегралом:

| | |
|---|----------|
| $\psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-x}} \right) dx.$ | (2.8.20) |
|---|----------|

Покладемо тут $a = 1$ і віднімемо дві одержані рівності:

$$\psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int_0^{\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x} \right) \frac{dx}{x} = -\gamma \Rightarrow$$

$$\psi(a) + \gamma = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \gamma = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right) \frac{dx}{x}.$$

Зробимо підстановку $t = \frac{1}{1+x}$ і не приводячи прості перетворення, прийдемо до наступної рівності, яка називається формулою Гауса:

$$\psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \gamma = \int_0^1 \frac{1 - t^{a-1}}{1-t} dt.$$

Зробимо заміну $t = u^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow dt = nu^{n-1} du \Rightarrow$

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \gamma = n \int_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{na-1}}{1-u^n} du .$$

Будемо підставляти замість a по черзі $a + \frac{k}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1$:

$$\frac{\Gamma'\left(a + \frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a + \frac{k}{n}\right)} + \gamma = n \int_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{na+k-1}}{1-u^n} du$$

і потім додамо всі ці рівності:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(a + \frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a + \frac{k}{n}\right)} + n\gamma = n \int_0^1 \left(\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - u^{na-1} \frac{1+u+\dots+u^{n-1}}{1-u^n} \right) du \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(a + \frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a + \frac{k}{n}\right)} + n\gamma = n \int_0^1 \left(\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{u^{na-1}}{1-u} \right) du .$$

В раніше доведену рівність

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \gamma = \int_0^1 \frac{1-u^{a-1}}{1-u} du$$

підставимо na замість a :

$$\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} + \gamma = \int_0^1 \frac{1-u^{na-1}}{1-u} du \Rightarrow n \frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} + n\gamma = n \int_0^1 \frac{1-u^{na-1}}{1-u} du .$$

Віднімемо цю рівність від попередньої:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma' \left(a + \frac{k}{n} \right)}{\Gamma \left(a + \frac{k}{n} \right)} - n \frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} = n \int_0^1 \left(\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{1}{1-u} \right) du = -n \ln \frac{1-u^n}{1-u} \Big|_0^1 =$$

$$= -n \ln(1+u+\dots+u^{n-1}) \Big|_{u=1} = -n \ln n.$$

Одержану рівність можна записати у наступному вигляді:

$$\frac{d}{d\alpha} \ln \frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = -n \ln n.$$

Проінтегруємо цю рівність:

$$\int_{\frac{1}{n}}^a \frac{d}{d\alpha} \ln \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\alpha+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(n\alpha)} d\alpha = -(an-1) \ln n \Rightarrow$$

$$\ln \frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} - \ln \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = -(an-1) \ln n.$$

Використовуючи введену Ейлером величину

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}},$$

знайдемо:

$$\ln \frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \ln n^{-(an-1)} \Rightarrow$$

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}n^{-(an-1)}\Gamma(na)\Rightarrow$$

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{an-1}{2}}}\Gamma(na).$$

Доведена формула, що належить Гаусу, називається теоремою множення для гама-функції. З неї як частинний випадок випливає раніше доведена формула

Лежандра: $\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2a-\frac{1}{2}}}\Gamma(2a).$

Знову повернемося до формули Гауса

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\gamma=\int_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}dt.$$

Розкладемо підінтегральну функцію у ряд, використовуючи формулу суми членів нескінченно спадної прогресії:

$$\begin{aligned} (1-t^{a-1})\frac{1}{1-t} &= (1-t^{a-1})(1+t+t^2+\dots+t^n+\dots)= \\ &= (t^0-t^{a-1})+(t^1-t^{a-1+1})+(t^2-t^{a-1+2})+\dots+(t^k-t^{a-1+k})+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}(t^k-t^{a-1+k}). \end{aligned}$$

Очевидно, ряд збігається рівномірно на проміжку $a\in[\delta,a_0]$, $0<\delta<a_0<1$. В такому разі його можна почленно проінтегрувати, і одержаний ряд буде рівномірно збігатись на тому ж проміжку:

$$\frac{d}{da}\Gamma(a)+\gamma=\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\gamma=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+a}\right).$$

Продиференціюємо цей ряд почленно:

$$\frac{d}{da} \psi(a) = \frac{d}{da} \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma''(a)\Gamma(a) - (\Gamma'(a))^2}{\Gamma^2(a)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2}.$$

Цей ряд збігається рівномірно по $a \in [\delta, a_0]$, $0 < \delta < a_0 < 1$, оскільки має збіжну мажоранту $(a_0 + 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Підставляючи в цю рівність $a = 1$, одержимо:

$$\frac{d}{da} \psi(1) = \frac{d}{da} \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Також

$$\frac{d}{da} \psi(2) = \frac{d}{da} \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Підставимо тепер $a = \frac{1}{2}$ і одержимо, враховуючи відому суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}:$$

$$\frac{d}{da} \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{d}{da} \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Звідси легко знаходиться друга похідна гама-функції у точці $a = \frac{1}{2}$,

$$\text{враховуючи, що } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}(2\ln 2 + \gamma):$$

$$\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi^2 \sqrt{\pi}}{2} + \frac{\left(\sqrt{\pi}(2\ln 2 + \gamma)\right)^2}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow$$

$$\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} + (2\ln 2 + \gamma)^2 \right).$$

Почленно проінтегрувавши по b від 1 до $a > 0$ обидві частини рівності

$$\frac{d}{db} \ln \Gamma(b) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+b} \right),$$

отримаємо:

$$\int_1^a \frac{d}{db} \ln \Gamma(b) db = -\gamma(a-1) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{k+1} - \ln(k+b) \Big|_1^a \right) \Rightarrow$$

$$\ln \Gamma(a) - \ln \Gamma(1) = \ln \Gamma(a) = -\gamma(a-1) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{k+1} - \ln \frac{k+a}{k+1} \right).$$

Замінивши a на $a+1$, $a > -1$, $n = k+1 \geq 1$, одержимо рівність в більш зручному вигляді:

$$\ln \Gamma(a+1) = -\gamma a + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n} - \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) \right) \Rightarrow$$

Звідси можна одержати зображення гама-функції у вигляді нескінченного добутку – формулу Вейерштраса:

$$\ln \frac{1}{\Gamma(a+1)} = \gamma a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) - \frac{a}{n} \right) = \ln \left(\exp \left(e^{\gamma a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) - \frac{a}{n} \right) \right) \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{\gamma a} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}}, a > -1.$$

Зауваження. З поглядом на теорію функцій Ейлера з точки зору нескінченних добутків можна познайомитись в посібнику автора [3], V, Додаток I.

о). Інтегральне зображення для $\ln \Gamma(x)$, формула Біне

Будемо використовувати формулу Гауса (2.8.20), замінивши в ній x на $x+1$:

$$\psi(x+1) = \frac{d\Gamma(x+1)}{dx} = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-(x+1)t}}{1-e^{-t}} \right) dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{e^t-1} \right) dt.$$

Додамо і віднімемо відомі значення деяких інтегралів:

інтеграл Фрулані (див. (2.5.1)):

$$\ln x = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \right) dt$$

i

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-tx} dt :$$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \Gamma(x+1)}{dx} &= \frac{1}{2x} + \ln x + \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{e^t-1} - \frac{e^{-xt}}{2} - \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2x} + \ln x - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) e^{-xt} dt. \end{aligned}$$

Очевидно, інтеграл збігається рівномірно при $x \geq 1$, що дає змогу застосувати теорему Фубіні і проінтегрувати по x від 1 до z підінтегральну функцію в одержаній рівності:

$$\ln \Gamma(x+1) - \ln \Gamma(2) = \frac{\ln x}{2} + x \ln x - x + 1 - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t} dt.$$

Беручи до уваги, що $\ln \Gamma(x+1) = \ln x + \ln \Gamma(x)$, $\ln \Gamma(2) = 0$, одержимо:

$$\ln \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right) \ln x - x + 1 - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-xt}}{t} dt - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Для обчислення другого з цих інтегралів введемо позначення:

$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad J = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} dt.$$

В тільки що одержаний вираз для $\Gamma(x+1)$ підставимо $x = 1$ і одержимо:

$$\frac{1}{2} \ln \pi = \frac{1}{2} + J - I.$$

Знайдемо:

$$\begin{aligned} J - I &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} dt - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-t}}{t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} J &= I + \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{t} = I + \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^{-t}}{e^t - 1} \right) \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2} \right) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Безпосередньою перевіркою впевнюємось, що в одержаному інтегралі можна виділити повну похідну від деякої функції:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2} \right) \frac{dt}{t} &= \int_0^{\infty} \left(-\frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} \right) - \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2t} \right) dt = \\ &= \frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}}}{t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}, \\ J &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(Тут знову було застосовано інтеграл Фрулані.)

Звідси

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \pi = 1 - \ln(2\pi).$$

Маємо:

$$\ln \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-xt}}{t} dt.$$

Неважко впевнитись в тому, що при $t > 0$

$$\sup \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \cdot \frac{1}{t} \right| \triangleq M < \infty.$$

Тоді

$$\int_0^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \cdot \frac{1}{t} \right| e^{-xt} dt < \frac{M}{x}, x > 0$$

Звідси випливає наступна оцінка і асимптотична формула:

$$\left| \ln \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2} \right) \ln x + x - \frac{1}{2} \right| < \frac{M}{x}, x > 0,$$

$$\ln \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right) \ln x - x + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right), x > 0.$$

р). Ряди Фур'є і Куммера для логарифма гама-функції

Загальне зауваження

Нехай функцію, що має частинно-неперервну похідну на проміжку $[0, l]$ розкладено у ряд Фур'є (x - точка неперервності, $f(0) = f(l)$):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{l} x \right).$$

Коефіцієнти розкладу знаходяться за формулами

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{2\pi n}{l} x dx, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{2\pi n}{l} x dx.$$

В частинному випадку $[0, 1]$, з яким ми зустрінемося,

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx, \quad a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi n x dx, \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x dx.$$

Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є для $\ln \Gamma(x)$:

$$a_0 = 2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \ln(2\pi)$$

згідно з попереднім

$$a_n = 2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2\pi n x dx.$$

Зробимо заміну в цьому інтегралі:

$$t = 1 - x : 1 \rightarrow 0; \forall x : 0 \rightarrow 1, \cos 2\pi n x = \cos(2\pi n - 2\pi n t) = \cos 2\pi n t, dx = -dt \Rightarrow .$$

$$\frac{a_n}{2} = \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2\pi n x dx = \int_0^1 \ln \Gamma(1-t) \cos 2\pi n t dt \Rightarrow$$

$$a_n = \int_0^1 \ln \Gamma(x) \Gamma(1-x) \cos 2\pi n x dx = \ln \pi \int_0^1 \cos 2\pi n x dx - \int_0^1 (\ln \sin \pi x) \cos 2\pi n x dx =$$

$$= \ln \pi \frac{\sin 2\pi n x}{2\pi n} \Big|_0^1 - \int_0^1 (\ln \sin \pi x) \cos 2\pi n x dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\ln \sin t) \cos 2nt dt =$$

(було зроблено заміну $t = \pi x : 0 \rightarrow \pi, dt = \pi dx$)

$$= -\frac{1}{2\pi n} \left(((\ln \sin t) \sin 2nt) \Big|_{+0}^{\pi-0} - \int_0^\pi \frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\ln \sin t) \cos 2nt dt = -\frac{1}{2\pi n} \left(((\ln \sin t) \sin 2nt) \Big|_{+0}^{\pi-0} - \int_0^\pi \frac{\sin 2nt \cos t}{\sin t} dt \right) = \frac{1}{2n}.$$

Тут було використано значення інтегралу I_4 з задачі 2.1.11.

$$\frac{1}{2} b_n = \int_0^1 \Gamma(x) \sin 2\pi n x dx = \int_0^1 \sin 2\pi n x \left(-\gamma x - \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k} - \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right) \right) dx =$$

$$= -\gamma \int_0^1 x \sin 2\pi n x dx - \int_0^1 \ln x (\sin 2\pi n x) dx + \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k} - \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right) \right) (\sin 2\pi n x) dx \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

$$I_1 = -\gamma \int_0^1 x \sin 2\pi n x dx = \frac{\gamma}{2\pi n} \left(x \cos 2\pi n x - \frac{\sin 2\pi n x}{2\pi n} \right) \Big|_0^1 = \frac{\gamma}{2\pi n}.$$

$$I_2 = -\int_0^1 (\ln x) \sin 2\pi n x dx = \frac{1}{2\pi n} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln x) \cos 2\pi n x \Big|_{\delta}^{1-\delta} - \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{\cos 2\pi n x}{x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln(1-\delta) \cos(2\pi n - 2\pi n \delta) - \ln \delta \cos(2\pi n \delta)) - \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{\cos 2\pi n x}{x} dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi n} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\ln \delta \cos 2\pi n \delta + \int_{\delta}^1 \frac{\cos 2\pi n x}{x} dx \right) \right).$$

Зробимо заміну $t = 2\pi n x : 2\pi n \delta \rightarrow 2\pi n, \forall x : \delta \rightarrow 1, dt = 2\pi n dx \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}$.

Звідси

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi n} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\ln \delta \cos 2\pi n \delta + \int_{2\pi n \delta}^{2\pi n} \frac{\cos t}{t} dt \right) \right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi n} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\ln \delta \cos 2\pi n \delta + \int_{2\pi n \delta}^{2\pi n} \left(\frac{\cos t - 1}{t} + \frac{1}{t} \right) dt \right) \right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi n} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\ln \delta \cos 2\pi n \delta + \int_{2\pi n \delta}^{2\pi n} \frac{dt}{t} \right) + \int_0^{2\pi n} \left(\frac{\cos t - 1}{t} \right) dt \right).$$

Далі будемо використовувати спеціальну функцію – **інтегральний косинус**:

$$ci(x) \triangleq \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2\pi n} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} (\ln \delta \cos 2\pi n \delta - \ln \delta) + ci(2\pi n) - \gamma - \ln 2\pi n \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi n} (ci(2\pi n) - \gamma - \ln 2\pi n). \end{aligned}$$

Розглянемо тепер інтеграл $I_3 = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k} - \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right) \right) (\sin 2\pi n x) dx$, який, як неважко помітити, можна почленно проінтегрувати – перевірку виконання відповідних умов залишаємо читачу.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k} - \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right) \right) (\sin 2\pi n x) dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \left(\frac{x}{k} - \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right) d(\cos 2\pi n x) \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{x}{k} - \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) \right) \cos 2\pi n x \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \cos 2\pi n x dx \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) - \int_0^1 \frac{\cos 2\pi n x}{k} dx + \int_0^1 \frac{\cos 2\pi n x}{k+x} dx \right). \end{aligned}$$

Зауважимо, що $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) - \ln(m+1) \right) = \gamma$. Тоді

$$I_3 = -\frac{1}{2\pi n} \left(\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos 2\pi n x}{k+x} dx \right).$$

Розглянемо вираз $J \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos 2\pi n x}{k+x} dx$ і введемо заміну

$$t = k + x : k \rightarrow k+1 \forall x : 0 \rightarrow 1, x = t - k, \cos 2\pi n x = \cos 2\pi n t, dx = dt.$$

Тоді

$$\begin{aligned} J &\triangleq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos 2\pi n x}{k+x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{\cos 2\pi n t}{t} dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\delta}^{k+1} \frac{\cos 2\pi n t}{t} dt - \int_{\delta}^k \frac{\cos 2\pi n t}{t} dt \right). \end{aligned}$$

Зробимо ще одну заміну:

$$\tau = 2\pi n t : 0 \rightarrow 2\pi n(k+1) \forall t : 0 \rightarrow k+1, \cos 2\pi n t = \cos \tau, \frac{dt}{t} = \frac{d\tau}{\tau} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\delta}^{k+1} \frac{\cos 2\pi n t}{t} dt - \int_{\delta}^k \frac{\cos 2\pi n t}{t} dt \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\delta}^{2\pi n(k+1)} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau - \int_{\delta}^{2\pi n k} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\delta}^{2\pi n(k+1)} \frac{\cos \tau - 1}{\tau} d\tau - \int_{\delta}^{2\pi n k} \frac{\cos \tau - 1}{\tau} d\tau + \int_{\delta}^{2\pi n(k+1)} \frac{d\tau}{\tau} - \int_{\delta}^{2\pi n k} \frac{d\tau}{\tau} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(ci(2\pi n(k+1)) - ci(2\pi n k) \right) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-\ln(2\pi n(k+1)) + \ln(2\pi n k) + \ln(2\pi n(k+1)) - \ln \delta - \ln(2\pi n k) + \ln \delta \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (ci(2\pi n(k+1)) - ci(2\pi nk)) = -ci(2\pi n).$$

Отже,

$$I_3 = -\frac{1}{2\pi n} \left(\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos 2\pi n x}{k+x} dx \right) = \frac{ci(2\pi n) - \gamma}{2\pi n}.$$

Тепер можна зібрати одержані інтеграли I_1, I_2, I_3 і знайти

$$b_n = 2(I_1 + I_2 + I_3) = 2 \left(\frac{\gamma}{2\pi n} - \frac{1}{2\pi n} (ci(2\pi n) - \gamma - \ln 2\pi n) + \frac{ci(2\pi n) - \gamma}{2\pi n} \right) \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{\gamma + \ln 2\pi n}{\pi n}$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{2\pi n}{l} x dx, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{2\pi n}{l} x dx.$$

Коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є функції, визначеної на $(0,1)$ знаходяться за формулами

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx, \quad a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi n x dx, \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x dx.$$

В даному випадку для функції $\ln \Gamma(x)$ $a_0 = \ln(2\pi), a_n = \frac{1}{2n}, b_n = \frac{\gamma + \ln 2\pi n}{\pi n}$ і ряд

Фур'є для неї має вигляд:

$$\ln \Gamma(x) = \frac{\ln 2\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} \cos 2\pi n x + \frac{\gamma + \ln 2\pi n}{\pi n} \sin 2\pi n x \right) \triangleq$$

$$\triangleq \frac{\ln 2\pi}{2} + S_1 + S_2.$$

Перетворимо суми $S_1 \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \cos 2\pi n x$ і $S_2 \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma + \ln 2\pi n}{\pi n} \sin 2\pi n x$.

Розглянемо S_1 . Використаємо відомий степеневий ряд для функції логарифм

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

але спочатку зробимо наступне зауваження. $\forall x \in (0, 2\pi) \Rightarrow \sin \frac{x}{2} > 0$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

$$\forall w \in \mathbb{C} \quad w = |w|e^{i\varphi} \quad \ln w = \ln |w| + i\varphi \Rightarrow \operatorname{Re}(\ln w) = \ln |w|.$$

Застосуємо цю рівність до $w = \frac{1-z}{2} = \frac{1-\cos x}{2} - i\frac{\sin x}{2}$. Знайдемо $|w|$:

$$|w| = \left| \frac{1-z}{2} \right| = \frac{1}{2} (1 - \cos x - i \sin x) = \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sin \frac{x}{2}.$$

Отже,

$$\operatorname{Re} \left(\ln \frac{1-z}{2} \right) = \ln \sin \frac{x}{2}.$$

Використовуючи цю рівність для функції $-\ln(1-z)$, одержимо:

$$\ln \sin \frac{x}{2} = \operatorname{Re} \left(\ln \frac{1-z}{2} \right) = -\ln 2 - \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \Rightarrow$$

$$\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

Замість аргументу x підставимо $2\pi x$ і помножимо обидві частини на $-\frac{1}{2}$:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{2n} = -\frac{1}{2} \ln(2\sin \pi x).$$

Розглянемо тепер S_2 :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma + \ln 2\pi n}{\pi n} \sin 2\pi nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma + \ln 2\pi + \ln n}{\pi n} \sin 2\pi nx = \\ &= \frac{\gamma + \ln 2\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin 2\pi nx. \end{aligned}$$

Відомо, що на відрізку $[0, 2\pi]$ можна одержати наступний розклад у ряд Фур'є:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Звідси

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n} = \frac{\pi - 2\pi x}{2}$$

і

$$S_2 = \frac{\gamma + \ln 2\pi}{\pi} \frac{\pi - 2\pi x}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin 2\pi nx.$$

Тепер можна записати наступний розклад для досліджуваної функції:

$$\ln \Gamma(x) = \frac{\ln 2\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\sin \pi x) + \frac{\gamma + \ln 2\pi}{\pi} \frac{\pi - 2\pi x}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin 2\pi nx =$$

$$= \frac{\ln 2\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} - \gamma x + \frac{\ln 2\pi}{2} - x \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln(2 \sin \pi x) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin 2\pi n x.$$

Після простих перетворень прийдемо до ряду Куммера для натурального логарифма гама-функції Ейлера:

$$\ln \Gamma(x) = (1-x) \ln 2\pi + \gamma \left(\frac{1}{2} - x \right) - \frac{1}{2} \ln(2 \sin \pi x) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin 2\pi n x.$$

Лемніскатна константа, продовження

Історично склалось, що довжина всієї лемніскати обчислюється за формулою, що нагадує формулу для довжини кола: $L = 2\varpi a$. Тут ϖ - інша форма написання літери «пі». Значення знайдемо, прирівнюючи цей вираз знайденому раніше еліптичному інтегралу:

$$\varpi = \sqrt{2} \mathbf{K} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}}.$$

Тепер запишемо цей еліптичний інтеграл у декартових координатах, ввівши заміну:

$$x = \sqrt{\cos 2\psi} : 1 \rightarrow 0 \forall \psi : 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}; \cos 2\psi = x^2, 2x dx = -2 \sin 2\psi d\psi \Rightarrow$$

$$d\psi = -\frac{xdx}{\sin 2\psi} = -\frac{xdx}{\sqrt{1 - \cos^2 2\psi}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1 - x^4}} \Rightarrow$$

$$\varpi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{x\sqrt{1-x^4}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Зробимо ще одну заміну: $t = x^4 : 0 \rightarrow 1 \forall x : 0 \rightarrow 1, x = t^{\frac{1}{4}}, dx = \frac{1}{4} t^{\frac{1}{4}-1} dt \Rightarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4} \int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow$$

| | |
|--|----------|
| $\varpi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}}.$ | (2.8.21) |
|--|----------|

Слід зауважити, що задачу знаходження значення $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, яке б виражалось через відомі константи, значення функцій, і т.ін., ставив перед собою ще Леонард Ейлер, але зробити це йому не вдалось. Зараз ми бачимо, як шукане значення пов'язане ще з одною константою.

Покажемо тепер, як значення лемніскатної константи можна подати у вигляді суми числового ряду. Розкладемо підінтегральну функцію у еліптичному інтегралі у ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} (\sin t)^{2n} \Rightarrow$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} (\sin t)^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt$$

Скористаємось тепер значенням інтегралів з цієї суми, які обчислено у додатку 2.10, або можна одержати, використовуючи функції Ейлера (див. (2.9.1)):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt = \frac{(2n-1)!! \pi}{(2n)!! 2}.$$

Одержимо:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n}, k \in (0,1)$$

Тепер знайдемо:

$$\varpi = \sqrt{2} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2.$$

Беручи перших 5 доданків ряду, одержимо наближене значення лемніскатної сталої: $\varpi \approx 2,62$.

2.9. Задачі на тему «Функції Ейлера»

Задача 2.9.1.

| | |
|--|---------|
| $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$ | (2.9.1) |
|--|---------|

Доведення. Зробимо заміну $x = \sin^2 \varphi \Rightarrow \cos^2 \varphi = 1 - x \Rightarrow dx = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$,

$$\sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} (\sin^2 \varphi)^{\frac{\alpha}{2}-1} (\cos^2 \varphi)^{\frac{\beta}{2}-1} (2 \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} x^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-x)^{\frac{\beta}{2}-1} dx.$$

Отже,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-x)^{\frac{\beta}{2}-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Частинні випадки:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{\beta}{2}-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}.$$

Далі нам стане у пригоді наступна формула для інтеграла по періоду неперервної періодичної функції: $\int_0^T f(x+a) dx = \int_0^T f(x) dx$.

Доведення. Зробимо заміну: $t = x + a, t: a \rightarrow a + t \quad \forall x: 0 \rightarrow T$. Тоді

$$\int_0^T f(x+a) dx = \int_a^{a+T} f(t) dt = -\int_0^a f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt.$$

В останньому інтегралі $\int_T^{a+T} f(t) dt = \int_T^{a+T} f(t-T) dt$ зробимо заміну:

$y = t - T: 0 \rightarrow a \quad \forall t: T \rightarrow a + T$. В результаті

$$-\int_0^a f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt = -\int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(y) dy = 0$$

звідки $\int_0^T f(x+a) dx = \int_0^T f(x) dx$, що означає, що інтеграл від періодичної функції

«нечутливий» до зсуву її аргументу під інтегралом. Також підкреслимо, що такий інтеграл «нечутливий» до зсуву області інтегрування:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Справді, зробимо заміну у першому інтегралі:

$$z = x - a, x: a \rightarrow a + T \Rightarrow z: 0 \rightarrow T, x = z + a.$$

В результаті отримаємо:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(z + a) dz = \int_0^T f(z) dz$$

(в останній рівності було використано тільки що доведену властивість).

Задача 2.9.2. Обчислити інтеграл $I_n = \int_0^{2\pi} (a \sin x + b \cos x)^n dx, n \in \mathbb{N}$.

Як відомо, $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$, де

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} (a \sin x + b \cos x)^n dx = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \int_0^{2\pi} (\sin(x + \alpha))^n dx = \\ &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \int_0^{2\pi} (\sin x)^n dx. \end{aligned}$$

Заміна:

$$x = y + \pi, \sin x = \sin(y + \pi) = -\sin y, y = x - \pi: -\pi \rightarrow \pi \forall x: 0 \rightarrow 2\pi.$$

Одержимо:

$$I_n = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^n dx.$$

Перший випадок: $n = 2k - 1$. Тоді

$$I_{2k-1} = (a^2 + b^2)^{\frac{2k-1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^{2k-1} dx = (a^2 + b^2)^{\frac{2k-1}{2}} \left(\int_{-\pi}^0 (\sin x)^{2k-1} dx + \int_0^{\pi} (\sin x)^{2k-1} dx \right).$$

Завдяки непарності синуса, непарності його показника степені і симетрії відносно початку координат області інтегрування, сума інтегралів у дужках дорівнює нулю, і в цьому випадку:

$$I_{2k-1} = \int_0^{2\pi} (a \sin x + b \cos x)^{2k-1} dx = 0.$$

Другий випадок: $n = 2k$. Тоді

$$I_{2k} = (a^2 + b^2)^k \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^{2k} dx = 2(a^2 + b^2)^k \int_0^{\pi} (\sin x)^{2k} dx.$$

Зробимо ще одну заміну: $x = 2y, y = \frac{x}{2}: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \forall x: 0 \rightarrow \pi, dx = 2dy$.

$$\text{Одержимо: } I_{2k} = 2(a^2 + b^2)^k \int_0^{\pi} (\sin x)^{2k} dx = 2^2 (a^2 + b^2)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2y)^{2k} dy =$$

$$= 2^{2(k+1)} (a^2 + b^2)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y)^{2k} (\cos y)^{2k} dy =$$

$$= 2^{2(k+1)} (a^2 + b^2)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y)^{(2k+1)-1} (\cos y)^{(2k+1)-1} dy = 2 \cdot 2^{2k} (a^2 + b^2)^k B\left(k + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot 2^{2k} (a^2 + b^2)^k \frac{\Gamma^2\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2k+1)}.$$

Використаємо відомі значення гама-функції при цілих і напівцілих значеннях аргументу (формула (2.8.10)):

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(2k+1) = (2k)!$$

Остаточно одержимо після нескладних перетворень:

$$I_{2k} = (a^2 + b^2)^k \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^{2k} dx = \pi (a^2 + b^2)^k \frac{(2k)!}{2^{2k-1} (k!)^2}.$$

Цікаво розглянути частинні випадки, підставляючи $a=0, b=1$ і окремо $a=1, b=0$. В обох випадках одержимо однакові результати:

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^{2k} dx = \int_0^{2\pi} (\sin x)^{2k} dx = \pi \frac{(2k)!}{2^{2k-1} (k!)^2}.$$

Задача 2.9.3. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\infty} x^a e^{-x^b} dx, a > 0, b > 0$.

Зробимо заміну: $t = x^b, t: 0 \rightarrow \infty \forall x: 0 \rightarrow \infty, x = t^{\frac{1}{b}} \Rightarrow dx = \frac{1}{b} t^{\frac{1}{b}-1} dt, x^a = t^{\frac{a}{b}}$ і прийдемо до інтеграла

$$I = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} t^{\frac{a+1}{b}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{b} \Gamma\left(\frac{a+1}{b}\right).$$

Відомо точні значення Γ -функції Ейлера 1). $\Gamma(n) = (n-1)!$ Такого значення інтеграл буде набувати при $a = nb - 1 > 0$. 2). $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$. Такого значення інтеграл буде набувати при $a = b\left(n + \frac{1}{2}\right) - 1$. Читач самостійно розгляне конкретні випадки. Наприклад, $a = nb - 1, b = 3, n = 2 \Rightarrow a = 5$:

$$\int_0^{\infty} x^5 e^{-x^3} dx = 2.$$

Задача 2.9.4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((tgx)^a + (ctgx)^a \right) dx, a \in (-1, 1).$

Зробимо заміну в інтегралі $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (ctgx)^a dx$:

$$y = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow: \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4} \forall x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2} - y, ctgx = ctg\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = tgy, dx = -dy.$$

$$\text{Одержимо: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} (ctgx)^a dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (tgx)^a dx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^a dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (ctgx)^a dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (tgx)^a dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^a (\cos x)^{-a} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{(a+1)-1} (\cos x)^{(1-a)-1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2} + \frac{1-a}{2}\right)} = \frac{\pi}{2 \sin\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Тут було використано формулу доповнення, оскільки за умовою задачі

$$1-a > 0, a+1 > 0, \frac{1-a}{2} + \frac{a+1}{2} = 1.$$

Задача 2.9.5. $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \ln x dx.$

Розглянемо інтеграл, що залежить від параметра:

$$J(s) = \int_0^{\infty} x^{-s} \sin x dx, 1 \leq s < 2.$$

Інтеграл від продиференційованої по s підінтегральної функції має вигляд:

$$-\int_0^{\infty} \frac{\sin x \ln x}{x^s} dx.$$

Відомо, що при вказаних значеннях параметра s цей інтеграл збігається рівномірно по s і тому для $J(s)$ можна застосувати правило Лейбниця:

$$-\frac{d}{ds} J(s) = -\int_0^{\infty} \sin x \frac{\partial}{\partial s} x^{-s} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x \ln x}{x^s} dx.$$

В такому разі $I = -\frac{d}{ds} J(1)$.

Розглянемо ще один інтеграл, що залежить від параметра:

$$J_1(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-tx} dt.$$

Введемо заміну: $u = tx \Rightarrow t = \frac{u}{x}, dt = \frac{1}{x} du \Rightarrow$

$$J_1(t) = \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{x^{s-1}} \frac{e^{-u}}{x} du = \frac{1}{x^s} \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du = \frac{1}{x^s} \Gamma(s) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^s} = \frac{J_1(t)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-xt} dt \Rightarrow$$

$$J(s) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^s} dx = \int_0^{\infty} \sin x \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-xt} dt \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \left(\int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{1+t^2} dt.$$

Зробимо заміну в цьому інтегралі: $y = t^2 \Rightarrow t = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy$. Звідси

$$J(s) = \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{s-1}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{1+y} dy = \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{s}{2}-1}}{1+y} dy = \frac{1}{2\Gamma(s)} B\left(\frac{s}{2}, 1 - \frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{2\Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}}.$$

Знайдемо похідну одержаного виразу:

$$J'(s) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}} \right)' = -\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma'(s) \sin \frac{\pi s}{2} + \frac{\pi}{2} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}}{\left(\Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2} \right)^2}$$

Взявши до уваги, що $I = -\frac{d}{ds} J(1)$, одержимо:

$$I = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma'(1) \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Gamma(1) \cos \frac{\pi}{2}}{\left(\Gamma(1) \sin \frac{\pi}{2} \right)^2} = \frac{\pi}{2} \Gamma'(1) = -\frac{\pi \gamma}{2},$$

де γ - константа Ейлера-Маскероні.

Зазначимо, що було застосовано теорему Фубіні, і читач легко перевірить виконання умов для її застосування.

Задача 2.9.6. $I_n = \int_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx$. Раціоналізувати підінтегральний вираз.

Розглянемо інтеграл

$$J(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-xt} dt$$

Зробимо заміну: $u = xt \rightarrow x = \frac{u}{t}, dx = \frac{du}{t}$. Тоді

$$J(n) = \frac{1}{x^n} \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du = \frac{1}{x^n} \Gamma(n) \Rightarrow \frac{1}{x^n} = \frac{J(n)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-xt} dt \Rightarrow$$

$$I_n = \int_0^{\infty} \sin^n x \frac{1}{x^n} dx = \int_0^{\infty} \sin^n x \left(\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-xt} dt \right) dx =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} dt \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin^n x dx.$$

Раніше (задача (2.1.13)) було обчислено внутрішній інтеграл у двох випадках – при непарному і парному значеннях n :

$$\tilde{I}_{2k-1} \triangleq \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{2k-1} x dx = \frac{(2k-1)!}{(1^2 + a^2)(3^2 + a^2) \dots ((2k-1)^2 + a^2)},$$

$$\tilde{I}_{2k} \triangleq \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{2k} x dx = \frac{(2k)!}{a(2^2 + a^2)(4^2 + a^2) \dots ((2k)^2 + a^2)}.$$

(у нашому випадку $a = t$). Маємо:

$$I_{2k-1} = \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2k-1} x}{x^{2k-1}} dx = \frac{(2k-1)!}{(2k-2)!} \int_0^{\infty} \frac{t^{2k-2}}{(1^2 + t^2)(3^2 + t^2) \dots ((2k-1)^2 + t^2)} dt =$$

$$= (2k-1) \int_0^{\infty} \frac{t^{2k-2}}{(1^2+t^2)(3^2+t^2)\dots((2k-1)^2+t^2)} dt;$$

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2k} x}{x^{2k}} dx = \frac{(2k)!}{(2k-1)!} \int_0^{\infty} \frac{t^{2k-2}}{(2^2+t^2)(4^2+t^2)\dots((2k)^2+t^2)} dt = \\ &= 2k \int_0^{\infty} \frac{t^{2k-2}}{(2^2+t^2)(4^2+t^2)\dots((2k)^2+t^2)} dt. \end{aligned}$$

Наведемо два приклади як наслідки доведених формул.

a). $I_3 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx.$

$$I_{2k-1} = I_3 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = 3 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1^2+t^2)(3^2+t^2)} dt =$$

$$= \frac{3}{8} \left(9 \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+3^2} - \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} \right) = \frac{3}{8} \left(3 \operatorname{arctg} \frac{t}{3} - \operatorname{arctg} t \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{3}{8} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{8}.$$

Відповідь: $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}.$

b). $I_4 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx.$

$$I_{2k} = I_4 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = 4 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+2^2)(t^2+4^2)} dt = \frac{4}{3} \left(4 \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+4^2} - \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+2^2} \right) =$$

$$= \frac{4}{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{t}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Відповідь: $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}.$

Задача 2.9.7. $J(s) = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^s} dx, 0 < s < 1, a > 0.$

Формула для інтегралу, знайдена у попередній задачі, справедлива не тільки для цілих значень параметрів:

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} z^{s-1} e^{-xz} dz.$$

Помножимо обидві частини рівності на $\cos ax$, проінтегруємо, а потім у повторному інтегралі поміняємо порядки інтегрування. Можливість такої операції пояснюється так само, як і при знаходженні інтеграла Діріхле.

$$\begin{aligned} J(s) &= \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^s} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\Gamma(s)} \left(\int_0^{\infty} z^{s-1} e^{-xz} dz \right) dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} z^{s-1} dz \int_0^{\infty} e^{-xz} \cos ax dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{z^s}{z^2 + a^2} dz. \end{aligned}$$

Після заміни $z = at^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dz = \frac{a}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$ одержимо:

$$J(s) = \frac{a^{s-1}}{2\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{s-1}{2}}}{1+t} dt = \frac{a^{s-1}}{2\Gamma(s)} B\left(\frac{s+1}{2}, \frac{1-s}{2}\right) = \frac{a^{s-1}}{2\Gamma(s)} \frac{\pi}{\sin \pi \frac{s+1}{2}}.$$

Остаточно:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^s} dx = \frac{\pi a^{s-1}}{2\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}}.$$

Зауваження: аналогічно

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^s} dx = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}}.$$

Задача 2.9.8. $I_n = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} dx.$

Включим інтеграл у сім'ю інтегралів $I_n(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax^n)}{x^n} dx.$ Помітимо, що

$$I_n(0) = 0.$$

Продиференціюємо цей інтеграл за параметром, приводячи стандартні пояснення (як і при дослідження інтегралу Френеля) можливості застосування правила Лейбниці диференціювання підінтегральної функції:

$$\frac{d}{da} I_n(a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax^n)}{x^n} x^n dx = \int_0^{\infty} \cos(ax^n) dx.$$

Введемо заміну $u = a^{\frac{1}{n}} x, u^n = ax^n, dx = a^{-\frac{1}{n}} du.$ Інтеграл після цього матиме вигляд:

$$\frac{d}{da} I_n(a) = \int_0^{\infty} \cos(ax^n) dx = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \int_0^{\infty} \cos(u^n) du.$$

Перетворимо одержаний інтеграл, використовуючи результат минулої задачі:

Зробимо в ньому заміну: $u^n = v, u = v^{\frac{1}{n}}, du = \frac{1}{n} v^{\frac{1}{n}-1} dv.$

$$\int_0^{\infty} \cos(u^n) du = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\cos(v)}{v^{\frac{1}{n}-1}} dv = \frac{\pi}{2n\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)} =$$

$$= \frac{\pi \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{2n \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\pi \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2n \pi \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{2n \pi \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} \cos(u^n) du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n}.$$

Отже, знайдено похідну шуканої функції:

$$\frac{d}{da} I_n(a) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n} a^{-\frac{1}{n}} \Rightarrow$$

$$\int_0^a \frac{d}{db} I_n(b) db = I_n(a) - I_n(0) = I_n(a) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n} \int_0^a b^{-\frac{1}{n}} db = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n-1} a^{\frac{n-1}{n}}.$$

Відповідь: $I_n = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n-1}.$

Зауваження. При $n=2$ одержимо:

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Задача 2.9.9. $I = \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx.$

Зробимо заміну: $t = \frac{1}{x} : \infty \rightarrow 0 \Rightarrow x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Тоді

$$I = \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin t^2}{t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

що випливає з попереднього прикладу.

Задача 2.9.10. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$.

Розглянемо інтеграл, що залежить від параметра:

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^a x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx.$$

Продиференціюємо цей інтеграл за параметром (читач повинен перевірити виконання умов правила Лейбниці самостійно):

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \frac{\sin^a x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx \Rightarrow I = J'(1).$$

Введемо заміну: $t = \sin x : 0 \rightarrow 1 \forall x : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, dt = \cos x dx = \sqrt{1 - \sin^2 x} dx =$

$\sqrt{1 - t^2} dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$. Інтеграл перепишеться у вигляді:

$$J(a) = \int_0^1 \frac{t^a}{\sqrt{1 + t^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \int_0^1 \frac{t^a}{\sqrt{1 - t^4}} dt.$$

Введемо ще заміну: $u = t^4, t = u^{\frac{1}{4}}, dt = \frac{1}{4} u^{-\frac{3}{4}} du$. Інтеграл перепишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
J(a) &= \frac{1}{4} \int_0^1 u^{\frac{a}{4}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{-\frac{3}{4}} du = \frac{1}{4} \int_0^1 u^{\frac{a-3}{4}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du = \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 u^{\frac{a+1}{4}-1} (1-u)^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{1}{4} B\left(\frac{a+1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)}.
\end{aligned}$$

Продиференціюємо обидві частини рівності за параметром:

$$\begin{aligned}
J'(a) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\frac{1}{4} \Gamma'\left(\frac{a+1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right) - \frac{1}{4} \Gamma'\left(\frac{a+3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{a+3}{4}\right)} = \\
J'(a) &= \frac{\sqrt{\pi}}{16} \left(\frac{\Gamma'\left(\frac{a+1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{a+3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{16} \left(\frac{\Gamma'\left(\frac{a+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{a+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що при $a=1$ в дужках маємо відомі значення логарифмічної похідної гама-функції або дігама-функції ψ : перший доданок

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = -2\ln 2 - \gamma \quad (\text{нагадаємо: це значення можна одержати,}$$

диференціюючи формулу Лежандра для гама-функції); другий доданок – це

$$\text{логарифмічна похідна } \psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma. \text{ Дріб за дужками – це } \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \sqrt{\pi}. \text{ В}$$

результаті одержимо:

$$I = J'(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{16} (-2\ln 2 - \gamma + \gamma) \sqrt{\pi} = -\frac{\pi}{8} \ln 2.$$

Задача 2.9.11. $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^x} x^2 e^{2x} dx.$

Введемо заміну:

$$u = e^x : 0 \rightarrow \infty \quad \forall x : -\infty \rightarrow \infty, \quad x = \ln u, \quad dx = \frac{1}{u} du, \quad e^{-e^x} = e^{-u},$$

після чого інтеграл запишеться у вигляді

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^x} x^2 e^{2x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} (\ln^2 u) u^2 \frac{1}{u} du = \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-u} (\ln^2 u) du.$$

Нагадаємо вигляд першої похідної за параметром від гама-функції

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx : \quad \Gamma'(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x) dx,$$

А потім другої похідної:

$$\Gamma''(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^2 dx = \frac{d}{d\alpha} (\Gamma'(\alpha)) = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) \right) = \frac{d}{d\alpha} (\psi(\alpha) \Gamma(\alpha)) =$$

$$= \psi'(\alpha) \Gamma(\alpha) + \psi(\alpha) \Gamma'(\alpha) = (\psi'(\alpha) + \psi^2(\alpha)) \Gamma(\alpha).$$

Тепер робимо висновок щодо інтегралу, яким зображується друга похідна гама-функції:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-u} (\ln^2 u) du = (\psi'(2) + \psi^2(2)) \Gamma(2) = \psi'(2) + \psi^2(2) = \\ &= \frac{\pi^2}{6} - 1 + (1 - \gamma)^2 = \gamma^2 - 2\gamma + \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Задача 2.9.12. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \int_0^1 (1-x^n)^{-\frac{1}{n}} dx = \left\{ y = x^n, x = y^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} dy \right\} =$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^1 y^{\frac{1}{n}-1} (1-y)^{\left(1-\frac{1}{n}\right)-1} dy = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Нехай треба розв'язати наступну задачу: знайти границю початкового інтегралу з умови. Треба відзначити, що функціональна послідовність по $n \rightarrow \infty$ під цим інтегралом не збігається рівномірно відносно x , тому немає підстави переходити до границі при $n \rightarrow \infty$ під інтегралом. Але завдяки отриманій формулі, користуючись першою важливою границею, зразу приходимо до відповіді:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin \frac{\pi}{n}} = 1.$$

Задача 2.9.13. $I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{\pi}{5}-1}}{1+x^{2\pi}} dx$.

Введемо заміну:

$$u = x^{\frac{\pi}{5}}, x = u^{\frac{5}{\pi}}, x^{\frac{\pi}{5}-1} = u^{\frac{5}{\pi}\left(\frac{\pi}{5}-1\right)} = u^{1-\frac{5}{\pi}}, x^{2\pi} = u^{2\pi \cdot \frac{5}{\pi}} = u^{10}, dx = \frac{5}{\pi} u^{\frac{5}{\pi}-1} du \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{\pi}{5}-1}}{1+x^{2\pi}} dx = \frac{5}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^{1-\frac{5}{\pi}} u^{\frac{5}{\pi}-1}}{1+u^{10}} du = \frac{5}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^{10}} du.$$

Ще одна заміна: $t = u^{10}, u = t^{\frac{1}{10}}, du = \frac{1}{10} t^{\frac{1}{10}-1} dt \Rightarrow$

$$I = \frac{5}{\pi} \cdot \frac{1}{10} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{10}-1}}{1+t} dt = \frac{1}{2\pi} B\left(\frac{1}{10}, 1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{10}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{10}}.$$

Нагадаємо, як знаходиться $\sin \frac{\pi}{10}$. З формули косинуса потрійного аргументу

маємо:

$$4 \cos^3 \frac{\pi}{10} = \cos \frac{3\pi}{10} + 3 \cos \frac{\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) + 3 \cos \frac{\pi}{10} = \sin \frac{2\pi}{10} + 3 \cos \frac{\pi}{10} =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} + 3 \cos \frac{\pi}{10} \Rightarrow 4 \cos^3 \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} + 3 \cos \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow$$

$$4 \cos^2 \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10} + 3 \Leftrightarrow 4 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10} + 3 \Leftrightarrow$$

$$4 \sin^2 \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{\pi}{10} - 1 = 0 \left(\sin \frac{\pi}{10} > 0 \right) \Rightarrow$$

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{2\varphi},$$

де $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ - «золотий» переріз. Звідси

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{\pi}{10}-1}}{1+x^{2\pi}} dx = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{2\varphi}.$$

Задача 2.9.14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \cos x) \cos 2nxdx.$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \cos x) \cos 2nxdx &= \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \cos x) d \sin 2nx = \\ &= \frac{1}{2n} \left((\ln \cos x) \sin 2nx \Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx \sin x}{\cos x} dx \right). \end{aligned}$$

Легко бачити, що перший доданок у дужках дорівнює нулю.

Розглянемо другий доданок:

$$\frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx \sin x}{\cos x} dx = \frac{1}{4n} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx \right).$$

Знаходячи окремо кожен з цих двох інтегралів, скористаємось тотожністю з початку цього розділу:

$$\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cos 2(n-k)x + (-1)^{n-1},$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Звідси

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cos 2(n-k)x dx + (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2}.$$

Тут скористались тим, що інтеграл по даному проміжку від кожного косинуса дорівнює нулю. Аналогічно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cos 2(n-k+1)x dx + (-1)^n \frac{\pi}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{2}.$$

Отже,

$$\frac{1}{4n} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx \right) = \frac{1}{4n} \left((-1)^{n-1} - (-1)^n \right) \frac{\pi}{2} = \frac{(-1)^{n-1} \pi}{4n}.$$

Відповідь: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \cos x) \cos 2nx dx = \frac{(-1)^{n-1} \pi}{4n}.$

Задача 2.9.15. $\int_0^1 (\ln \sin(\pi x)) \sin 2\pi n x dx$.

Розглянемо інтеграл $\int_0^1 (\ln \Gamma(1-x)) \sin 2\pi n x dx$.

Зробимо заміну:

$$t = 1 - x : 1 \rightarrow 0; \forall x : 0 \rightarrow 1, \sin 2\pi n x = \sin(2\pi n - 2\pi n t) = -\sin 2\pi n t, dx = -dt.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\ln \Gamma(1-x)) \sin 2\pi n x dx &= -\int_0^1 (\ln \Gamma(t)) \sin 2\pi n t dt \Rightarrow \\ \int_0^1 (\ln \Gamma(1-x) + \ln \Gamma(x)) \sin 2\pi n x dx &= 0. \end{aligned}$$

В результаті одержимо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\ln \Gamma(1-x) \Gamma(x)) \sin 2\pi n x dx &= \int_0^1 (\ln \pi - \ln \sin(\pi x)) \sin 2\pi n x dx = \\ &= \ln \pi \int_0^1 \sin 2\pi n x dx - \int_0^1 (\ln \sin(\pi x)) \sin 2\pi n x dx = - \int_0^1 (\ln \sin(\pi x)) \sin 2\pi n x dx = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: $\int_0^1 (\ln \sin(\pi x)) \sin 2\pi n x dx = 0$.

Задача 2.9.16. Обчислити інтеграл $I_0 = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx, p \in (0,1)$.

Розглянемо допоміжний інтеграл

$$I_\varepsilon = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}} dx = \int_0^1 (x^{p-1} - x^{-p})(1-x)^{-1+\varepsilon} dx, \varepsilon \geq 0.$$

Функція $f(x, \varepsilon) = \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ неперервна по x на $[0,1)$. Вона має скінченну

границю при $x \rightarrow 1$, в чому легко впевнитись, застосовуючи правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(p-1)x^{p-2} + px^{-(p+1)}}{-(1-\varepsilon)(1-x)^{-\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon-1} \lim_{x \rightarrow 1} ((p-1)x^{p-2} + px^{-(p+1)})(1-x)^\varepsilon = 0.$$

Тому вона неперервна по x на $[0,1]$, $0 < \varepsilon < 1$. Функція $f(x, 0) = \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}$ також

має скінченну границю при $x \rightarrow 1$, в чому також можна впевнитись, застосовуючи правило Лопіталя, тому її можна за неперервністю продовжити граничним значенням в точці $x=1$, і це продовження буде неперервною функцією на всьому відрізку $[0,1]$. Очевидно, справедлива оцінка:

$$|f(x, \varepsilon)| = \left| \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}} \right| \leq \frac{|x^{p-1} - x^{-p}|}{1-x}, x \in [0,1), 0 \leq \varepsilon < 1.$$

Оскільки інтеграл $\int_0^1 \frac{|x^{p-1} - x^{-p}|}{1-x} dx$ збігається, то за теоремою порівняння

Вейерштраса буде рівномірно по ε збігатись інтеграл $I_\varepsilon = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}} dx$.

Тоді можна перейти до границі під знаком інтегралу:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}} dx = \int_0^1 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}} dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx.$$

Очевидно,

$$I_\varepsilon = \int_0^1 (x^{p-1} - x^{-p})(1-x)^{-1+\varepsilon} dx = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{\varepsilon-1} dx - \int_0^1 x^{(1-p)-1}(1-x)^{-1+\varepsilon} dx =$$

$$= B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon).$$

Звідси

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)} \right). \end{aligned}$$

Тут було використано властивість $\Gamma(1+\varepsilon) = \varepsilon\Gamma(\varepsilon)$.

Для знаходження останньої границі застосуємо правило Лопіталя, враховуючи,

що $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Gamma(1+\varepsilon) = \Gamma(1) = 1$:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)} \right) = \\ &\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-\frac{\Gamma(p)\Gamma'(p+\varepsilon)}{\Gamma^2(p+\varepsilon)} + \frac{\Gamma(1-p)\Gamma'(1-p+\varepsilon)}{\Gamma^2(1-p+\varepsilon)} \right) = \frac{\Gamma'(1-p)}{\Gamma(1-p)} - \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = \\ &= -\left(\frac{\Gamma'_p(1-p)}{\Gamma(1-p)} + \frac{\Gamma'_p(p)}{\Gamma(p)} \right) = -(\ln'_p(\Gamma(1-p)) + \ln'_p(\Gamma(p))) = -(\ln(\Gamma(1-p)\Gamma(p)))'_p = \\ &= -\left(\ln \frac{\pi}{\sin \pi p} \right)'_p = (\ln \sin \pi p)'_p = \frac{\pi \cos \pi p}{\sin \pi p} = \pi \operatorname{ctg} \pi p. \end{aligned}$$

Відповідь: $\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx = \pi \operatorname{ctg} \pi p, p \in (0,1)$.

Задача 2.9.17. $I = \int_0^\infty \frac{x \operatorname{ch}\left(\frac{2}{3}x\right)}{\operatorname{sh}x} dx$.

Розглянемо допоміжний інтеграл, що залежить від параметра $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(2ax)}{\operatorname{sh}x} dx = \int_0^\infty \frac{e^{2ax} - e^{-2ax}}{e^x - e^{-x}} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}(e^{2ax} - e^{-2ax})}{1 - e^{-2x}} dx.$$

Зробимо заміну:

$$x = -\frac{1}{2} \ln t \Rightarrow t = e^{-2x} : 1 \rightarrow 0; \forall x : 0 \rightarrow \infty,$$

$$e^{-x} = t^{\frac{1}{2}}, e^{-2ax} = t^a, e^{2ax} = t^{-a}, dx = -\frac{1}{2t} dt \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{ch}\left(\frac{2}{3}x\right)}{\operatorname{sh}x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}(t^{-a} - t^a)}{t(1-t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^{\left(-a+\frac{1}{2}\right)-1} - t^{\left(a+\frac{1}{2}\right)-1}}{1-t} dt.$$

Нагадаємо формулу Гауса для дігама-функції:

$$\psi(b) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{b-1}}{1-t} dt.$$

Перепишемо шуканий інтеграл у вигляді:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^{\left(-a+\frac{1}{2}\right)-1} - t^{\left(a+\frac{1}{2}\right)-1}}{1-t} dt = \frac{1}{2} \left(\gamma - \int_0^1 \frac{1-t^{\left(-a+\frac{1}{2}\right)-1}}{1-t} dt - \gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{\left(a+\frac{1}{2}\right)-1}}{1-t} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\psi\left(a + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(-a + \frac{1}{2}\right) \right).$$

Скористаємось доведеною в задачі 2.9.16 властивістю дігама-функції:

$$\psi(1-b) - \psi(b) = \pi \operatorname{ctg} \pi b, b \in (0,1) \text{ при } b = -\alpha + \frac{1}{2} \Rightarrow 1-b = \alpha + \frac{1}{2}:$$

$$\frac{1}{2} \left(\psi\left(a + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(-a + \frac{1}{2}\right) \right) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \left(\pi a + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \pi a \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(2ax)}{\operatorname{sh}x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \pi a, a \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Продиференціюємо обидві частини рівності за параметром a :

$$\frac{d}{da} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(2ax)}{\operatorname{sh}x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{d}{da} \operatorname{tg} \pi a \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}x} \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{sh}(2ax) dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{\operatorname{sh}x} \operatorname{ch}(2ax) dx = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\cos^2 \pi a} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{ch}(2ax)}{\operatorname{sh}x} dx = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\cos^2 \pi a}.$$

Підставимо в цю рівність значення $a = \frac{1}{3}$, одержимо:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{ch}\left(\frac{2}{3}x\right)}{\operatorname{sh}x} dx = \pi^2.$$

Також підставимо в цю загальну рівність значення $a = \frac{1}{5}$. При цьому, як відомо,

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \text{ де } \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \text{«золотий» переріз. Одержимо:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{ch}\left(\frac{2}{5}x\right)}{\operatorname{sh}x} dx = \left(\frac{\pi}{\varphi}\right)^2.$$

Задача 2.9.18. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg}x) dx.$

Введемо заміну:

$$u = \ln(\operatorname{tg}x), \operatorname{tg}x = e^u, x = \operatorname{arctg} e^u, u: 0 \rightarrow \infty \forall x: \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{2}, dx = \frac{e^u du}{1+e^{2u}} \Rightarrow$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg}x) dx = \int_0^{\infty} \frac{\ln u}{1+e^{2u}} e^u du = \int_0^{\infty} \frac{\ln u}{1+e^{-2u}} e^{-u} du = \int_0^{\infty} e^{-u} \ln u \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2nu} du.$$

Очевидно, скінченні суми ряду у підінтегральному виразі мають інтегровну мажоранту, наприклад, $\ln u : e^{-u} |\ln u| \sum_{n=0}^N e^{-2nu} < |\ln u|$. До того ж відомо, що

$$\int_0^{\infty} e^{-u} \ln u \, du = \Gamma'(1) = -\gamma, \text{ де } \gamma \text{ - константа Ейлера-Маскероні. Отже, можна}$$

перейти до границі під інтегралом і одержати:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-u} \ln u \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2nu} \, du = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (-1)^n e^{-2nu} e^{-u} \ln u \, du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(2n+1)u} \ln u \, du.$$

Для зручності введемо заміну:

$$v = (2n+1)u \Rightarrow u = \frac{v}{2n+1}, \, du = \frac{dv}{2n+1}, \, \ln u = \ln v - \ln(2n+1) \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(2n+1)u} \ln u \, du = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\infty} e^{-v} (\ln v - \ln(2n+1)) \, dv =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \left(\int_0^{\infty} e^{-v} \ln v \, dv - \ln(2n+1) \int_0^{\infty} e^{-v} \, dv \right) =$$

$$= -\frac{\gamma}{2n+1} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}.$$

Тут було використано відомий факт: $\int_0^{\infty} e^{-v} \ln v \, dv = \Gamma'(1) = -\gamma$ - константа Ейлера-

Маскероні. Тепер ряд запишеться у вигляді

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(2n+1)u} \ln u \, du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\gamma}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}.$$

Відомо, що $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. Тоді

$$I = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\gamma}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \right) = -\frac{\pi\gamma}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}.$$

Використаємо ряд Куммера для натурального логарифма гама-функції Ейлера:

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(x) &= (\gamma + \ln(2\pi)) \left(\frac{1}{2} - x \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sin \pi x}{\pi} \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin 2\pi n x \Rightarrow \\ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin 2\pi n x &= -\pi \ln \Gamma(x) + \pi (\gamma + \ln(2\pi)) \left(\frac{1}{2} - x \right) - \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{\sin \pi x}{\pi} \right) \end{aligned}$$

Підставимо в цю рівність значення $x = \frac{3}{4}$:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin \frac{3}{2} \pi n = -\pi \ln \Gamma \left(\frac{3}{4} \right) - (\gamma + \ln(2\pi)) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \ln(\pi\sqrt{2}) =$$

$$\sin \frac{3}{2} \pi n = 0 \forall n = 2k; \sin \frac{3}{2} \pi n = -\sin \frac{\pi}{2} n = -\sin \left(\pi k + \frac{\pi}{2} \right) = -(-1)^k \forall n = 2k + 1$$

Якщо $n = 2k + 1$, маємо:

$$\sin \frac{3}{2} \pi n = \sin \frac{3}{2} (2\pi k + \pi) = \sin \left(2\pi k + \pi k + \pi + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left((k+1)\pi + \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^{k+1}$$

і ряд у лівій частині має вигляд:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin \frac{3}{2} \pi n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} = -\pi \ln \Gamma \left(\frac{3}{4} \right) - (\gamma + \ln(2\pi)) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \ln(\pi\sqrt{2})$$

і після нескладних перетворень одержимо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} = -\pi \ln \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{\pi\gamma}{4} + \frac{\pi}{4} \ln \pi.$$

Підставляючи знайдене значення у вираз для шуканого інтегралу, одержимо:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\ln t g x) dx = -\frac{\pi\gamma}{4} + \pi \ln \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi\gamma}{4} - \frac{\pi}{4} \ln \pi = \pi \left(\ln \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{\ln \pi}{4} \right).$$

Відповідь:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\ln t g x) dx = \pi \left(\ln \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{\ln \pi}{4} \right) = \pi \ln \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt[4]{\pi}} \right).$$

Задача 2.9.19. Раніше ми зустрічались зі спеціальною функцією – інтегральним косинусом. Розв’яжемо задачу, пов’язану з інтегральним синусом:

$$Si(x) \triangleq \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Знайти інтеграл $\int_0^1 Si(\ln x) dx$.

Розв’язання. Використовуючи відомий ряд Тейлора для тригонометричного синуса, знайдемо ряд для підінтегральної функції в означенні синуса інтегрального:

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Підставимо цей ряд в інтеграл, що зображує інтегральний синус:

$$Si(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} dt \right).$$

Зауважимо, що операції інтегрування і сумування можна переставити місцями завдяки рівномірній збіжності ряду Тейлора для тригонометричного синуса на довільному обмеженому замкненому проміжку. Далі підрахуємо інтеграл від кожної степені в ряді:

$$Si(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\int_0^x t^{2n} dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Запишемо тепер шуканий інтеграл:

$$\int_0^1 Si(\ln x) dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} (\ln x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} \int_0^1 (\ln x)^{2n+1} dx$$

Зауважимо, що тут знову було переставлено операції інтегрування і сумування.

Зробимо заміну в кожному інтегралі:

$$t = -\ln x : \infty \rightarrow 0 \forall x : 0 \rightarrow 1, x = e^{-t} \Rightarrow dx = -e^{-t} dt \Rightarrow$$

$$\int_0^1 Si(\ln x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \int_0^{\infty} t^{2n+1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \int_0^{\infty} t^{(2n+2)-1} e^{-t} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \Gamma(2n+2)}{(2n+1)!(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)!}{(2n+1)!(2n+1)} =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Тут було використано відоме значення ряду, яке можна одержати, розглядаючи ряд для арктангенса або з теорії рядів Фур'є.

Задача 2.9.20. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[5]{\operatorname{tg} \theta} \frac{\ln(\sin^2 \theta)}{\sin 2\theta} d\theta$.

Знайдемо мажоранти для підінтегральної функції

В околах точок $\theta = 0$ і $\theta = \frac{\pi}{2}$ треба порівняти підінтегральну функцію з деякими інтегровними функціями.

В околі $\theta = 0$ читач легко перевірить, що $\sqrt[5]{\operatorname{tg} \theta} \frac{\ln(\sin^2 \theta)}{\sin 2\theta} = O\left(\frac{\ln \theta}{\theta^{\frac{4}{5}}}\right)$

Нехай $\delta > 0$. Тоді

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^\delta \ln \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\ln \theta}{\theta^{-\delta}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{-\delta \theta^{-\delta-1}} = -\frac{1}{\delta} \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^\delta = 0.$$

Це означає, що при малих значеннях θ і $\delta > 0$ будемо мати оцінку

$|\ln \theta| < \theta^{-\delta} \Rightarrow \frac{|\ln \theta|}{\theta^{\frac{4}{5}}} < \frac{1}{\theta^{\frac{4}{5} + \delta}}$. Тепер δ досить вибрати з умови $0 < \delta < \frac{1}{5}$ і при цьому

функція $\frac{1}{\theta^{\frac{4}{5} + \delta}}$ буде інтегровою. Тепер для неї і підінтегральної функції в

інтегралі I досить застосувати ознаку порівняння у граничній формі. Радимо

читачу побудувати аналогічну функцію у околі $\theta = \frac{\pi}{2}$.

З загальної методики інтегрування тригонометричних функцій випливає, що в

досліджуваному інтегралі можна ввести заміну $x = \operatorname{tg} \theta : 0 \rightarrow \infty \forall \theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. При

цьому

$$\sin^2 \theta = \frac{x^2}{1+x^2}, \sin 2\theta = \frac{2\operatorname{tg} \theta}{1+\operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{2x}{1+x^2}, dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \Rightarrow d\theta = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Маємо:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[5]{\operatorname{tg} \theta} \frac{\ln(\sin^2 \theta)}{\sin 2\theta} d\theta = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{5}} \left(\ln \frac{x^2}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{2x} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\ln \frac{x^2}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x^{\frac{4}{5}}}.$$

Введемо ще заміну:

$$u = \frac{1+x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} + 1: \infty \rightarrow 1 \forall x: 0 \rightarrow \infty, x = (u-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}(u-1)^{-\frac{3}{2}} du.$$

В результаті одержимо:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\ln \frac{x^2}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x^{\frac{4}{5}}} = -\frac{1}{4} \int_1^{\infty} (\ln u)(u-1)^{-\frac{11}{10}} du = \frac{10}{4} \int_1^{\infty} (\ln u) d(u-1)^{-\frac{1}{10}} = \\ &= \frac{5}{2} \left((\ln u)(u-1)^{-\frac{1}{10}} \Big|_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \frac{du}{u(u-1)^{\frac{1}{10}}} \right) = -\frac{5}{2} \int_1^{\infty} \frac{du}{u(u-1)^{\frac{1}{10}}}. \end{aligned}$$

І ще одна заміна:

$$t = \frac{1}{u}: 1 \rightarrow 0 \forall u: 1 \rightarrow \infty, u = \frac{1}{t} \Rightarrow du = -\frac{1}{t^2} dt, u-1 = \frac{1-t}{t}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} I &= -\frac{5}{2} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{10}} t^{-\frac{9}{10}} dt = -\frac{5}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{10}-1} (1-t)^{\frac{9}{10}-1} dt = -\frac{5}{2} B\left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right) = \\ &= -\frac{5}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{10}\right)\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{10} + \frac{9}{10}\right)} = -\frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{1}{10}\right)\Gamma\left(\frac{9}{10}\right) = -\frac{5}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{10}} = -5\pi\varphi. \end{aligned}$$

Остаточно:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[5]{t \operatorname{tg} \theta} \frac{\ln(\sin^2 \theta)}{\sin 2\theta} d\theta = -5\pi\varphi.$$

Нагадаємо: в задачі 2.9.13 обчислено значення $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2\varphi}$, де $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ - число Фібоначчі, «золотий» переріз.

Задача 2.9.21. Знайдемо інтеграл, що є узагальненням інтеграла Френеля (див. 2.4):

$$I_{n,s} = \int_0^{\infty} \sin x^n dx.$$

Зробимо заміну: $u = x^n \Rightarrow x = u^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{du}{nu^{\frac{1}{n}}}$. В результаті прийдемо до його

запису у новій формі:

$$I_{n,s} = \int_0^{\infty} \sin x^n dx = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u^{\frac{1}{n}}} du.$$

Розглянемо допоміжний інтеграл $J_n = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-xt} dt$. Зробимо в ньому заміну:

$$u = xt \Rightarrow t = \frac{u}{x}, t^{n-1} = \frac{u^{n-1}}{x^{n-1}}, dt = \frac{du}{x}.$$

В результаті інтеграл запишеться у вигляді

$$J_n = \frac{1}{x^n} \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du = \frac{1}{x^n} \Gamma(n) \Rightarrow \frac{1}{x^n} = \frac{J_n}{\Gamma(n)} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-xt} dt.$$

Перепишемо останню рівність, замінивши всюди n на $1 - \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{n}} e^{-xt} dt.$$

Підставимо це значення в шуканий інтеграл $I_{n,s}$:

$$I_{n,s} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{1-\frac{1}{n}}} dx = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \sin x \left(\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{n}} e^{-xt} dt \right) dx.$$

Для перестановки порядків інтегрування треба використати міркування, аналогічні тим, які застосовувались при знаходженні інтегралу Френеля. Радимо зробити це читачу самостійно. А виконаємо перестановку порядків інтегрування:

$$I_{n,s} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \sin x \left(\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{n}} e^{-xt} dt \right) dx = \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{n}} dt \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin x dx.$$

Для знаходження внутрішнього інтегралу скористаємось відомою первісною, яку можна знайти на початку 2-ї частини Практикуму:

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} \sin x dx = -\frac{t \sin x + \cos x}{t^2 + 1} e^{-tx} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{t^2 + 1}.$$

В результаті одержимо:

$$I_{n,s} = \frac{1}{n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{n}}}{1+t^2} dt.$$

Наступна заміна зведе цей інтеграл до В - функції Ейлера:

$$\theta = t^2 \Rightarrow t = \theta^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{n}} = \theta^{-\frac{1}{2n}}, dt = \frac{1}{2} \theta^{-\frac{1}{2}} d\theta \Rightarrow$$

$$I_{n,s} = \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\infty} \frac{\theta^{-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}}}{1+\theta} d\theta = \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\infty} \frac{\theta^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)-1}}{1+\theta} d\theta.$$

Використовуючи відоме зображення (2.8.6) В - функції у вигляді невластного інтегралу 1-го роду

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\theta^{\beta-1}}{(\theta+1)^{\alpha+\beta}} d\theta,$$

знаходимо: $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Звідси

$$\begin{aligned} I_{n,s} &= \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \int_0^{\infty} \frac{\theta^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)-1}}{1+\theta} d\theta = \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} B\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{2n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2n}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n}}{2n\pi} \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2n}} = \\ &= \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n}}{2n} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2n}}. \end{aligned}$$

В результаті одержали:

$$I_{n,s} = \int_0^{\infty} \sin x^n dx = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u^{\frac{1}{n}}} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{2n}}{n}.$$

Підставивши $n = 2$, будемо мати:

$$I_{2,s} = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sin \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

відоме значення інтегралу Френеля.

Задача 2.9.22. Знайти інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \left(\operatorname{cthx} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Розглянемо допоміжний інтеграл, що залежить від параметра:

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\alpha x}}{x} \left(\operatorname{cthx} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Тоді $I = I(1)$. Зразу відзначимо, що, як легко бачити, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} I(\alpha) = 0$.

Також легко бачити, що задовольняються умови застосування правила Лейбниці:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} I(\alpha) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(\operatorname{cthx} - \frac{1}{x} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-2\alpha x} dx = -2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha x} \left(\operatorname{cthx} - \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha x} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \right) dx. \end{aligned}$$

Зробимо заміну: $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt \Rightarrow$

$$I'(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \left(\frac{2}{t} - \frac{1 + e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

Після множення на експоненту, додавання і віднімання у чисельниках однакових доданків і групування подібних одержимо:

$$\begin{aligned}
 I'(\alpha) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{2e^{-\alpha t} - 2e^{-t} + 2e^{-t}}{t} - \frac{e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}e^{-t} - 2e^{-\alpha t} + 2e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}} \right) dt = \\
 &= \int_0^{\infty} \left(2\frac{e^{-\alpha t} - e^{-t}}{t} + 2\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-\alpha t}(e^{-t} - 1) + 2e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}} \right) dt = \\
 &= 2\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-t}}{t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt + 2\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Тут перший доданок – помножений на 2 інтеграл Фрулані, який вже було розглянуто з застосуванням формули (2.5.1) і одержано його значення:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{-t}}{t} \right) dt = -\ln \alpha.$$

Другий доданок: $\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$

Третій доданок згідно з (2.8.20) – значення дігама-функції:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}} \right) dt = \psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{d \ln \Gamma(a)}{d\alpha}.$$

В результаті будемо мати:

$$I'(\alpha) = -2 \ln \alpha + \frac{1}{\alpha} + 2 \frac{d \ln \Gamma(a)}{d\alpha}.$$

Інтегруючи по проміжку $[1, \alpha]$, одержимо:

$$\int_1^{\alpha} I'(\beta) = I(\alpha) - I(1) = \int_1^{\alpha} \left(-2 \ln \beta + \frac{1}{\beta} + 2 \frac{d \ln \Gamma(\beta)}{d\beta} \right) =$$

$$= -2\alpha \ln \alpha + 2\alpha - 2 + \ln \alpha + 2 \ln \Gamma(\alpha) \Rightarrow$$

$$I(1) = I(\alpha) + 2\alpha \ln \alpha - 2\alpha + 2 - \ln \alpha - 2 \ln \Gamma(\alpha).$$

Перейдемо до границі при $\alpha \rightarrow \infty$, використовуючи формулу Біне:

$$I(1) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(I(\alpha) + 2\alpha \ln \alpha - 2\alpha + 2 - \ln \alpha - \right.$$

$$\left. -2\alpha \ln \alpha + \ln \alpha + 2\alpha - \ln 2\pi + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right) = 2 - \ln 2\pi.$$

Відповідь: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \left(\operatorname{cthx} - \frac{1}{x} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx = 2 - \ln(2\pi).$

Задача 2.9.23. Знайти інтеграл $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x^2)}} dx.$

Введемо заміну: $x = \sin \theta, \theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \forall x: 0 \rightarrow 1, dx = \cos \theta d\theta \Rightarrow$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin \theta}{\sqrt{\sin \theta \cos^2 \theta}} \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin \theta}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta.$$

Розглянемо допоміжний інтеграл:

$$J(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^s \theta d\theta.$$

Легко бачити, що виконуються умови теореми Лейбниці про диференціювання під інтегралом:

$$\frac{dJ(s)}{ds} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial s} \sin^s \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^s \theta) \ln \sin \theta d\theta.$$

Тоді

$$I = \left. \frac{dJ(s)}{ds} \right|_{s=-\frac{1}{2}}.$$

Відомо:

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2u-1} \theta \cos^{2v-1} \theta d\theta.$$

Тоді

$$J(s) = \frac{1}{2} B\left(\frac{s+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$J(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{s+1}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{s+2}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{s+2}{2}\right)}.$$

Використаємо дігама-функцію:

$$\psi(s) = \frac{d}{ds}(\ln \Gamma(s)) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \Rightarrow \Gamma'(s) = \Gamma(s)\psi(s) \Rightarrow$$

$$J'(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\psi\left(\frac{s+1}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)\psi\left(\frac{s+2}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{s+2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)} \left(\psi\left(\frac{s+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{s+2}{2}\right) \right).$$

Підставимо $s = -\frac{1}{2}$:

$$J' \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma \left(\frac{1}{4} \right)}{\Gamma \left(\frac{3}{4} \right)} \left(\psi \left(\frac{1}{4} \right) - \psi \left(\frac{3}{4} \right) \right)$$

і скористаємось висновком з формули доповнення:

$$\ln \Gamma(z) + \ln \Gamma(1-z) = \ln \pi - \ln \sin \pi z.$$

Після диференціювання одержимо:

$$\psi(z) - \psi(1-z) = -\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = -\pi \operatorname{ctg} \pi z.$$

Підставимо $z = \frac{1}{4}$:

$$\psi \left(\frac{1}{4} \right) - \psi \left(\frac{3}{4} \right) = -\pi.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I = J' \left(-\frac{1}{2} \right) &= -\frac{\pi \sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma \left(\frac{1}{4} \right)}{\Gamma \left(\frac{3}{4} \right)} = -\frac{\pi \sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma^2 \left(\frac{1}{4} \right)}{\Gamma \left(\frac{3}{4} \right) \Gamma \left(\frac{1}{4} \right)} = \\ &= -\frac{\pi \sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma^2 \left(\frac{1}{4} \right)}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \Gamma^2 \left(\frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Згадуючи, що $\Gamma^2 \left(\frac{1}{4} \right) = 2\sqrt{2\pi} \varpi$ (2.8.21), одержимо:

$$I = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) = -\pi\varpi,$$

Відповідь: $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x^2)}} dx = -\pi\varpi.$

Задача 1 для самостійного розв'язання: $I_{n,c} = \int_0^\infty \cos x^n dx.$

Вказівка: використати техніку, застосовану при розв'язанні попередньої задачі 2.9.21.

Відповідь: $I_{n,c} = \int_0^\infty \cos x^n dx = \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{\cos u}{u^{1-\frac{1}{n}}} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n}}{n}.$

Зауваження. При $n = 2$ ця відповідь співпадає з відповіддю задачі 2.9.21, і це є значення двох інтегралів Френеля.

Задача 2 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^1 x \ln^3 x dx.$

Вказівка: зробити заміну і перейти до гама-функції.

Відповідь: $-\frac{3}{8}.$

Задача 3 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2 + 1} dx.$

Вказівка: впевнитись, що заміна $x \rightarrow \frac{1}{x}$ не змінює інтеграла. Потім зробити

заміну $x = e^t$, один з множників, а саме, $(1 + e^{-2t})^{-1}$, в підінтегральній функції розкласти у степеневий ряд і перейти до ряду гама-функцій.

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{2}\right)^3.$

Задача 4 для самостійного розв'язання: $I = \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx.$

Відповідь: $3!\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$.

Вказівка: ζ - це дзета-функція Рімана, яка у Практикумі зустрічалась, напр., в 3.2 та в задачі 2.1.5.

Задача 5 для самостійного розв'язання: Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[5]{\operatorname{ctg} \theta} \frac{\ln(\cos^2 \theta)}{\sin 2\theta} d\theta.$$

Відповідь: $I = -5\pi\varphi, \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2.10. Формула Валліса

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

Будемо застосовувати формулу інтегрування за частинами:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d \cos x = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \Rightarrow$$

$$n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx.$$

Одержали рекурентне співвідношення:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Розглянемо два випадки.

1). $n = 2m$.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}.$$

2). $n = 2m + 1$.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \Rightarrow I_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

Посилаючись на відомий результат (див. задачу 2.1.17)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx,$$

одержимо такі самі формули для інтеграла від косинуса.

Нехай $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Тоді $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$. Звідси

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx.$$

Скористаємось тільки що одержаними значеннями для інтегралів:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

звідки

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n}.$$

Оцінимо різницю між крайніми виразами:

$$\begin{aligned} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n} - \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} &= \frac{1}{2n(2n+1)} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 < \\ &< \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Отже, різниця між верхньою і нижньою оцінками для $\frac{\pi}{2}$ прямує до нуля і це означає, що

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n-1)}$$

Одержали формулу Валліса.

2.11. Формула Стірлінга

Розглянемо логарифмічні ряди:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

Звідси

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n+1} - \dots \right)$$

Підставимо в цей вираз $x = \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді ліва частина має вигляд

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \frac{n+1}{n}. \text{ В результаті}$$

$$\ln \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right) \Rightarrow$$

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots$$

Оцінимо вираз в правій частині:

$$1 < 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots < 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2 \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)} = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2 - 1} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)} \Rightarrow$$

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)} \Rightarrow$$

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Розглянемо послідовність

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Звідси

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n (n+1)^{n+\frac{1}{2}+1}}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{n+1} (n+1)!} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}.$$

Застосовуючи тільки що доведені оцінки, одержимо

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

Отже, з одного боку послідовність $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ монотонно спадна і обмежена

знизу, наприклад, нулем і тому має границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. З іншого боку,

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}},$$

тобто, послідовність $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ строго монотонно зростає і має ту саму границю, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n e^{-\frac{1}{12n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{12n}} = a$.

Виконуються нерівності $a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n$. Тому для кожного члена послідовності a_n існує число $\theta_n \in (0,1)$ таке, що $a = a_n e^{-\frac{\theta_n}{12n}} \Rightarrow a_n = a e^{\frac{\theta_n}{12n}}$. Після підстановки сюди значення a_n , будемо мати:

$$a = \frac{n! e^n}{n^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\theta_n}{12n}} \Rightarrow n! = a \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

Для знаходження a використаємо формулу Валліса, в яку будемо підставляти з тільки що знайденої формули вираз для $n!$.

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}.$$

Зробимо наступні перетворення:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n)!!} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!}.$$

Підставимо у праву частину значення $n! = a \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, а також

$$(2n)! = a \sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e} \right)^{2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}} :$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n} a^2 n \left(\frac{n}{e} \right)^{2n} e^{\frac{\theta_n}{6n}}}{a \sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e} \right)^{2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}} = a \sqrt{\frac{n}{2}} e^{\frac{4\theta_n - \theta_{2n}}{24n}},$$

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = a^2 \frac{n}{2} e^{\frac{4\theta_n - \theta_{2n}}{12n}}.$$

Звідси з урахуванням того, що $|4\theta_n - \theta_{2n}| < 4 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|4\theta_n - \theta_{2n}|}{12n} = 0$.

$$\frac{\pi}{2} = a^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{n}{2} e^{\frac{\theta}{12n}} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow a = \sqrt{2\pi}.$$

І остаточно приходимо до важливого результату - до формули Стірлінга:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \theta \in (0,1).$$

3. ДОПОВНЕННЯ

3.1. Числа Бернуллі

Будемо досліджувати суми степенів цілих невід'ємних чисел:

$$S_k(n) = 0^k + 1^k + \dots + (n-1)^k,$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, і при цьому будемо за означенням (в даній задачі), що $0^0 \triangleq 1$, тому

$$S_0(n) = n.$$

Використавши формулу бінома Ньютона, знайдемо:

$$(a+1)^{k+1} - a^{k+1} = C_{k+1}^1 a^k + C_{k+1}^2 a^{k-1} + \dots + C_{k+1}^k a + 1.$$

Знайдемо тепер суми лівих і правих частин при $a: 0 \rightarrow n-1$. Очевидно, зліва всі

члени крім останнього знищуються і залишиться n^{k+1} , зліва при додаванні

однакових степенів цілих чисел будуть виникати суми вказаного вигляду:

$$n^{k+1} = C_{k+1}^1 S_k(n) + C_{k+1}^2 S_{k-1}(n) + \dots + C_{k+1}^k S_1(n) + S_0(n)$$

Звідси, враховуючи, що $C_{k+1}^1 = k+1$, одержимо:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left(n^{k+1} - C_{k+1}^2 S_{k-1}(n) - C_{k+1}^3 S_{k-2}(n) - \dots - C_{k+1}^k S_1(n) - S_0(n) \right).$$

Твердження. $S_k(n)$ - многочлен від n степені $k+1$ з нульовим вільним членом.

Доведення. $S_0(n) = n, S_1(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ - ці суми не містять вільних членів,

$S_0(n) = n$ має степінь 1, $S_1(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ має степінь 2. Проведемо доведення за

індукцією. При визначенні степені $S_k(n)$ відзначимо, що у дужках тільки один, а саме перший доданок, має степінь $k+1$ і інші за припущенням індукції мають нижчі степені. Так само за припущенням індукції всі суми не мають вільного члена (для $n = 0, 1$ це було встановлено), то і сума в дужках його не має.

Введемо тепер числа Бернуллі B_k .

Означення. B_k - це коефіцієнт при n (у першій степені) у многочлені $S_k(n)$.

Знайдемо рекурентне співвідношення між числами Бернуллі.

З рекурентного співвідношення для сум одержимо:

$$B_k = -\frac{1}{k+1} (C_{k+1}^2 B_{k-1} + C_{k+1}^3 B_{k-2} + \dots + C_{k+1}^k B_1 + B_0); B_0 = 1.$$

Враховуючи властивість біноміальних коефіцієнтів $C_{k+1}^j = C_{k+1}^{k+1-j}$, перепишемо цю рівність у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} B_k &= -\frac{1}{k+1} (C_{k+1}^2 B_{k-1} + C_{k+1}^3 B_{k-2} + \dots + C_{k+1}^k B_1 + C_{k+1}^{k+1} B_0) = \\ &= -\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+1}^j B_j, B_0 = 1. \end{aligned}$$

Доведемо, що числа Бернуллі з непарними індексами (для зручності будемо називати їх непарними числами Бернуллі), починаючи з третього, дорівнюють нулю. Звідси можна зробити висновок, що знаки у чисел Бернуллі з парними

індексами (для зручності будемо називати їх парними числами Бернуллі) будуть чергуватись і $B_{2n} = (-1)^{n+1} |B_{2n}|$.

Застосовуючи двічі формулу бінома Ньютона, одержимо:

$$(1+a)^{2m} - (1-a)^{2m} = 2(C_{2m}^1 a + C_{2m}^3 a^3 + C_{2m}^5 a^5 + \dots + C_{2m}^{2m-3} a^{2m-3} + C_{2m}^{2m-1} a^{2m-1}).$$

Підставляючи сюди по черзі $a = 0, 1, 2, \dots, n-1$ і додаючи одержані вирази, отримаємо в лівій частині:

$$\begin{aligned} & 1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + \dots + (n-2)^{2m} + (n-1)^{2m} + n^{2m} - \\ & - (1^{2m} + 0^{2m} + 1^{2m} + 2^{2m} + \dots + (n-3)^{2m} + (n-2)^{2m}) = \\ & = (n-1)^{2m} + n^{2m} - 1 \end{aligned}$$

Права частина матиме вигляд:

$$2(C_{2m}^1 S_1(n) + C_{2m}^3 S_3(n) + C_{2m}^5 S_5(n) + \dots + C_{2m}^{2m-3} S_{2n-3}(n) + C_{2m}^{2m-1} S_{2n-1}(n)).$$

Одержимо:

$$(n-1)^{2m} + n^{2m} - 1 = 2(C_{2m}^1 S_1(n) + C_{2m}^3 S_3(n) + C_{2m}^5 S_5(n) + \dots + C_{2m}^{2m-1} S_{2m-1}(n)).$$

Коефіцієнт при першій степені n у лівій частині згідно з формулою бінома Ньютона дорівнює $-C_{2m}^1 = -2m$. Для знаходження коефіцієнта в правій частині рівності треба згідно з означенням чисел Бернуллі замінити кожен суму $S_{2n-j}(n)$ на B_{2n-j} . Тоді

$$C_{2m}^1 B_1 + C_{2m}^3 B_3 + \dots + C_{2m}^{2m-j} B_{2m-j} + \dots + C_{2m}^{2m-1} B_{2m-1} = -m.$$

Оскільки $C_{2m}^1 B_1 = 2m \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -m$, то $-m$ взаємно знищиться в обох частинах рівності і одержимо співвідношення для чисел Бернуллі:

$$C_{2m}^3 B_3 + \dots + C_{2m}^{2m-j} B_{2m-j} + \dots + C_{2m}^{2m-1} B_{2m-1} = 0$$

Зважаючи на те, що $C_{2m}^j = 0 \forall j > 2m$, одержимо звідси по черзі : при $m = 2$ в лівій частині рівності буде тільки $C_4^3 B_3$, а в правій - 0, то робимо висновок: $B_3 = 0$. При $m = 3$ одержимо рівняння:

$$C_6^3 B_3 + C_6^5 B_5 = 0 \Rightarrow B_5 = 0.$$

Продовжуючи підставляти $m = 4, 5, \dots$, прийдемо до висновку, що при $m \geq 3$

$$B_3 = B_5 = B_7 = \dots = B_{2k+1} = \dots = 0.$$

Повернемося до рівності

$$B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+1}^j B_j.$$

Спочатку зазначимо, що цю суму можна переписати так, щоб не враховувати нульові члени, які виникають завдяки присутності непарних чисел Бернуллі, що дорівнюють нулю:

$$B_{2k} = -\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k+1} \sum_{n=1}^{k-1} C_{2k+1}^{2n} B_{2n}.$$

Перепишемо попередню рівність $B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} C_{k+1}^j B_j$ у вигляді лінійної комбінації чисел Бернуллі, знову помноживши обидві частини на $k+1 = C_{k+1}^1$ і перенісши все в одну частину:

$$C_{k+1}^1 B_k + C_{k+1}^2 B_{k-1} + C_{k+1}^3 B_{k-2} + \dots + C_{k+1}^k B_1 + B_0 = 0.$$

Це співвідношення має зміст при $k \geq 1$, а при $k=0$ воно дорівнює 1. Якщо ввести дельта Кронекера $\delta_{i,j} = 0 \forall i \neq j$; $\delta_{i,j} = 1 \forall i = j$, його можна переписати у вигляді

$$C_{k+1}^1 B_k + C_{k+1}^2 B_{k-1} + C_{k+1}^3 B_{k-2} + \dots + C_{k+1}^k B_1 + B_0 = \delta_{k,0}$$

або

$$\sum_{j=0}^k C_{k+1}^{k+1-j} B_j = \delta_{k,0}.$$

Перепишемо цю рівність у більш зручному вигляді, присвоюючи значенню $k+1$ значення n і помічаючи, що $\delta_{k,0} = \delta_{k+1,1} = \delta_{n,1}$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_n^j B_j = \delta_{n,1}.$$

Випишемо кілька перших парних чисел Бернуллі (непарні, починаючи з третього, дорівнюють нулю):

| | | | | | | | |
|-------|----------------|---------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|---------------------|
| n | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| B_n | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{5}{66}$ | $-\frac{691}{2730}$ |

| | | | | | |
|---------------|---------------------|---------------------|-----------------------|----------------------|---------------------------|
| 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| $\frac{7}{6}$ | $-\frac{3617}{510}$ | $\frac{43867}{798}$ | $-\frac{174611}{330}$ | $\frac{854513}{138}$ | $-\frac{236364091}{2730}$ |

Розкладемо у ряд Тейлора в околі нуля функцію $\frac{x}{e^x - 1}$, зауваживши, що вона має у нулі усувний розрив, і її довізначимо в ньому граничним значенням 1. Будемо записувати цей розклад у вигляді

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

з поки що невідомими коефіцієнтами. Помножимо обидві частини цієї рівності на знаменник:

$$(e^x - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = x.$$

Розкладемо функцію у дужках у ряд Тейлора:

$$\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) \left(B_0 + \frac{B_1 x}{1!} + \frac{B_2 x^2}{2!} + \frac{B_3 x^3}{3!} + \dots + \frac{B_n x^n}{n!} + \dots \right) = x.$$

Оскільки це тотожність, то коефіцієнти при однакових степенях в ній повинні бути рівні:

$$x | B_0 = 1,$$

$$x^2 | \frac{B_1}{1!} + \frac{B_0}{2!} = 0,$$

$$x^3 | \frac{B_2}{2!} + \frac{B_1}{2!1!} + \frac{B_0}{3!0!} = 0,$$

$$x^4 | \frac{B_3}{3!} + \frac{B_2}{2!2!} + \frac{B_1}{3!1!} + \frac{B_0}{4!0!} = 0$$

...

Треба знайти закономірність: як кожен коефіцієнт виражається через попередні. Розглянемо частинний випадок – перетворимо четверту рівність, помноживши

обидві її частини на $4!$: $4B_3 + \frac{4!}{2!2!}B_2 + \frac{4!}{3!1!}B_1 + \frac{4!}{4!0!}B_0 = 0.$

Очевидно, числові дробові коефіцієнти тут мають зміст кількості сполучень з чотирьох по 2, 3, 4 відповідно. Звідси

$$B_3 = -\frac{1}{4}(C_4^2 B_2 + C_4^1 B_1 + C_4^0 B_0) = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^2 C_4^k B_k.$$

За індукцією неважко довести загальну формулу:

$$B_n = -\frac{1}{n+1}(C_{n+1}^0 B_0 + C_{n+1}^1 B_1 + C_{n+1}^2 B_2 + \dots + C_{n+1}^{n-1} B_{n-1}) = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k, \quad B_0 = 1.$$

Звідси бачимо, що це є числа Бернуллі, які вже з'являлись у зв'язку зі знаходженням сум степенів членів натурального ряду.

Підставимо у розклад даної в умові задачі функції замість x значення $2x$:

$$\frac{2x}{e^{2x} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n B_n}{n!} x^n.$$

Додамо x до обох частин цієї рівності, але спочатку перетворимо ліву частину:

$$\frac{2x}{e^{2x} - 1} + x = x \left(\frac{2}{e^{2x} - 1} + 1 \right) = x \left(\frac{2e^{-x}}{e^x - e^{-x}} + 1 \right) = x \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) = x \operatorname{cth} x \Rightarrow$$

$$x \operatorname{cth} x = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n B_n}{n!} x^n = x + B_0 + 2B_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n B_n}{n!} x^n =$$

$$= x + 1 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n B_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n B_n}{n!} x^n.$$

Отже, одержали наступний розклад у ряд Тейлора:

$$x \operatorname{cth} x = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n B_n}{n!} x^n .$$

Зліва функція парна, значить і справа – теж парна, а це має місце тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти ряду при непарних степенях (починаючи з третьої) дорівнюють нулю: $B_{2k-1} = 0 \forall k \geq 2$. Зауважимо, що цей факт вже було доведено раніше зовсім іншим методом. Враховуючи це, запишемо ряд у більш зручній формі (зауваживши, що $2n : 2 \rightarrow \infty \forall n : 1 \rightarrow \infty$):

$$x \operatorname{cth} x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} .$$

Поки що без доведення радіус збіжності цього ряду: $R = \pi$.

Підставимо тепер ix замість x і згадаємо про зв'язок між гіперболічними і тригонометричними функціями: $ix \operatorname{cth} ix = ix \frac{\operatorname{ch} ix}{\operatorname{sh} ix} = ix \frac{\cos x}{i \sin x} = x \operatorname{ctg} x$. Тоді,

враховуючи, що $(ix)^{2n} = (-1)^n x^{2n}$, одержимо:

$$x \operatorname{ctg} x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} |B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n} .$$

Виведемо відому тригонометричну формулу:

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2x} = 2 \operatorname{ctg} 2x \Rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x .$$

Після її застосування одержимо розклад тангенса у ряд Тейлора:

$$xtgx = xctgx - 2xctg2x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} |B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n} |B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) |B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n} \Rightarrow$$

$$tgx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) |B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

Поки що без доведення радіус збіжності цього ряду: $R = \frac{\pi}{2}$.

3.2. Зв'язок чисел Бернуллі з дзета-функцією Рімана

Нагадаємо визначення дзета-функції Рімана:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

Як відомо (напр. [4], стор. 32), котангенс може бути розкладений у ряд з елементарних дробів:

$$\pi ctg\pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right),$$

звідки

$$\pi x ctg\pi x = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right).$$

Перетворимо цей вираз:

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{n^2 - x^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(\frac{x}{n}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)}.$$

Кожен член цього ряду пов'язаний з певною нескінченно спадною геометричною прогресією:

$$\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{2k}, \quad |x| < 1, \quad n \geq 1.$$

З огляду на це маємо:

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k}} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

Таким чином одержали зображення функції зліва у степеневий ряд, коефіцієнти якого є значення дзета-функції Рімана при парних натуральних значеннях аргумента:

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) x^{2k}.$$

Зробимо заміну: $t = \pi x \Rightarrow x = \frac{t}{\pi}; |x| < 1 \Rightarrow |t| < \pi$:

$$t \operatorname{ctg} t = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} t^{2k}.$$

Раніше ми одержали розклад в ряд тієї ж функції:

$$t \operatorname{ctg} t = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} |B_{2k}|}{(2k)!} t^{2k}.$$

Тепер зрозуміла область збіжності цього ряду: вона така ж сама, як і першого:

$$|t| < \pi.$$

Завдяки єдиності розкладу в степеневий ряд коефіцієнти рядів при однакових степенях рівні:

$$\frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}} = \frac{2^{2k} |B_{2k}|}{(2k)!} \Rightarrow \zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k} |B_{2k}|}{2(2k)!}.$$

Беручи з таблиці кілька чисел Бернуллі, знайдемо суми рядів, які є значеннями дзета-функції Рімана при кількох парних натуральних значеннях аргументу:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645,$$

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1,082,$$

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \approx 1,017,$$

$$\zeta(8) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450} \approx 1,004.$$

Задача 3.2.1. Зв'язок між гама- і дзета-функціями. $I(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, s > 1.$

Розв'язання. Зробимо наступні перетворення підінтегральної функції:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx.$$

Зробимо заміну: $t = nx \Rightarrow x = \frac{t}{n}, dx = \frac{1}{n} dt.$

Продовжуємо:

$$I(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Gamma(s) \zeta(s), s > 1.$$

Остаточню:

$$I(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s)\zeta(s), s > 1.$$

Відомо значення дзета-функції при цілих парних значеннях аргументу, а гама-функції – при цілих і напівцілих значеннях. Отже, ми можемо знайти точні значення таких інтегралів:

$$J(k) \triangleq \int_0^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(2k)\zeta(2k) = (2k-1)! \frac{|B_{2k}|(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} = \frac{|B_{2k}|(2\pi)^{2k}}{4k}.$$

Зробимо заміну: $x = 2\pi t \Rightarrow dx = 2\pi dt \Rightarrow$

$$\frac{|B_{2k}|(2\pi)^{2k}}{4k} = (2\pi)^{2k} \int_0^{\infty} \frac{t^{2k-1}}{e^{2\pi t} - 1} dt \Rightarrow \frac{|B_{2k}|}{4k} = \int_0^{\infty} \frac{t^{2k-1}}{e^{2\pi t} - 1} dt.$$

Отже, одержали значення інтегралу:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2k-1}}{e^{2\pi t} - 1} dt = \frac{|B_{2k}|}{4k}.$$

Задача 3.2.2. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1 - tg\varphi)}{tg\varphi} d\varphi$

Зробимо заміну: $x = tg\varphi \Rightarrow \varphi = arctgx, d\varphi = \frac{dx}{1+x^2}, x: 0 \rightarrow 1 \forall \varphi: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}.$

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x(1+x^2)} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx - \int_0^1 \frac{x \ln(1-x)}{1+x^2} dx \triangleq I_1 - I_2.$$

Зробимо в $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$ заміну:

$$\ln(1-x) = -t \Rightarrow 1-x = e^{-t}, x = 1 - e^{-t}, dx = e^{-t} dt, t: 0 \rightarrow +\infty \forall x: 0 \rightarrow 1-0 \Rightarrow$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = - \int_0^\infty \frac{t dt}{e^t - 1} = -\Gamma(2)\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

тут ми застосували результат попереднього прикладу.

Знайдемо інтеграл I_2 . Включимо його в сім'ю

$$J(\alpha) = \int_0^1 \frac{x \ln(1-\alpha x)}{1+x^2} dx, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Відзначимо: $J(0) = 0, J(1) = I_2$. Читачу пропонується довести, що до цього інтеграла, що залежить від параметра, можна застосувати правило Лейбниці:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} J(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 \frac{x \ln(1-\alpha x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln(1-\alpha x) dx = \\ &= - \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)(1-\alpha x)} = \frac{1}{1+\alpha^2} \left(- \int_0^1 \frac{dx}{1-\alpha x} + \alpha \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \frac{1}{1+\alpha^2} \left(\frac{\ln(1-\alpha x)}{\alpha} \Big|_0^1 + \alpha \frac{\ln(1+x^2)}{2} \Big|_0^1 + \arctg x \Big|_0^1 \right) = \\ &= \frac{\ln(1-\alpha)}{\alpha(1+\alpha^2)} + \frac{\ln 2}{2} \frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\pi}{4} \frac{1}{1+\alpha^2}. \end{aligned}$$

Проінтегруємо обидві частини, враховуючи відомі значення інтегралу J :

$$\int_0^1 \frac{d}{d\alpha} J(\alpha) d\alpha = J(1) - J(0) = I_2 =$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha)}{\alpha(1+\alpha^2)} d\alpha + \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{\alpha d\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{d\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Зауважимо, що перший доданок – це шуканий інтеграл $I = I_1 - I_2$. Отже,

$$I_2 = I_1 - I_2 + \frac{\ln 2}{4} \ln(1+\alpha^2) \Big|_0^1 + \frac{\pi}{4} \operatorname{arctg} \alpha \Big|_0^1 = -\frac{\pi^2}{6} - I_2 + \frac{\ln^2 2}{4} + \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= -I_2 + \frac{\ln^2 2}{4} - \frac{5}{48} \pi^2 \Rightarrow I_2 = \frac{\ln^2 2}{8} - \frac{5}{96} \pi^2 \Rightarrow$$

$$I = I_1 - I_2 = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{5\pi^2}{96} - \frac{\ln^2 2}{8} = -\frac{11\pi^2}{96} - \frac{\ln^2 2}{8}.$$

Остаточню:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1-tg\varphi)}{tg\varphi} d\varphi = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x(1+x^2)} dx = -\frac{11\pi^2}{96} - \frac{\ln^2 2}{8}.$$

Задача 3.2.3. $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\pi\sqrt{x}} - 1} dx$

Для його знаходження будемо використовувати тільки що знайдене значення

$I(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s)\zeta(s)$, $s > 1$. Зробимо заміну в цьому інтегралі:

$$x = \pi\sqrt{t}, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{t}} dt. \text{ Тоді } I(s) = \Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{(\pi\sqrt{t})^{s-1}}{e^{(\pi\sqrt{t})} - 1} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{t}} dt = \frac{\pi^s}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{s}{2}-1}}{e^{(\pi\sqrt{t})} - 1} dt.$$

Знайдемо значення цієї функції (інтегралу, що залежить від параметра) при

$s = 2$:

$$I(2) = \Gamma(2)\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{(\pi\sqrt{t})} - 1} dt \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{(\pi\sqrt{t})} - 1} dt = \frac{1}{3}$$

Відповідь: $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\pi\sqrt{x}} - 1} dx = \frac{1}{3}$.

Задача 3.2.4. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx &= \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (ax)^{2n-1}}{(2n-1)!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x - 1} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{|B_{2n}| (2\pi)^{2n}}{2 \cdot 2n} = \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} (2\pi a)^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Про числа Бернуллі відомо:

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = 1 - \frac{1}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

В лівій частині – так звана твірна функція чисел Бернуллі, які є коефіцієнтами ряду у правій частині. Деякі автори визначають числа Бернуллі, виходячи саме з їхньої твірної функції. В межах даного посібника ми не маємо змоги детально викласти різні підходи до досить розвиненої теорії чисел Бернуллі.

Виразимо суму ряду з попередньої рівності:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} = \frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{1}{2} x.$$

Тут урахували рівність нулю непарних чисел Бернуллі.

Підставимо сюди $x = 2\pi a$ і одержимо: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(2\pi a)^{2n}}{(2n)!}$ - і саме така сума фігурує

в значенні шуканого інтеграла:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(2\pi a)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2a} \left(\frac{2\pi a}{e^{2\pi a} - 1} - 1 + \pi a \right) = \frac{\pi}{e^{2\pi a} - 1} - \frac{1}{2a} + \frac{\pi}{2}.$$

Нагадаємо, що ми використали згадуване раніше значення ряду, який збігався при $|x| < 2\pi \Rightarrow 0 < a < 1$. Але одержана відповідь має зміст при всіх значеннях a .

Задача 3.2.5. $\int_0^1 x^{tx^a} dx$. Виразити інтеграл через числовий ряд.

$$x^{tx^a} = e^{tx^a \ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx^a \ln x)^n}{n!} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 x^{tx^a} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx^a \ln x)^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^1 x^{an} \ln^n x dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n! (an+1)^{n+1}} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(an+1)^{n+1}} t^n.$$

Тут було використано відоме значення інтегралу (див. задачу 2.7.2):

$$\int_0^1 x^{an} \ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(an+1)^{n+1}}.$$

Для доведення досить продиференціювати n разів за параметром a рівність

$$\int_0^1 x^{an} dx = \frac{1}{an+1}.$$

Звідси

$$\frac{d}{da} \int_0^1 x^{an} dx = n \int_0^1 x^{an} \ln x dx = \frac{(-1)n}{(an+1)^2} \Rightarrow \int_0^1 x^{an} \ln x dx = \frac{(-1)1!}{(an+1)^2}.$$

Радимо читачу продовжити процес диференціювання самостійно.

Також читач повинен самостійно перевірити можливість перестановки суми і інтегралу.

Одержали результат:

$$\int_0^1 x^{t x^a} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(an+1)^{n+1}} t^n.$$

Розглянемо деякі частинні випадки.

1). $a = t = 1$.

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^m}.$$

2). $a = 1, t = -1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Результат дещо несподіваний, тому що під інтегралом і під знаком суми ряду стоять однакові вирази.

3). $a = 2, t = 1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{n+1}}.$$

4). Звести два наступні інтеграли до сум рядів

$$I_c = \int_0^1 \cos(x \ln x) dx, I_s = \int_0^1 \sin(x \ln x) dx$$

Покладемо $a = 1, t = i$.

$$I = \int_0^1 x^{ix} dx = \int_0^1 e^{ix \ln x} dx = \int_0^1 (\cos(x \ln x) + i \sin(x \ln x)) dx = I_c + iI_s .$$

З доведеної формули випливає:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(x \ln x) dx + i \int_0^1 \sin(x \ln x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= \left(1 + \frac{i^2}{3^3} + \frac{i^4}{5^5} + \frac{i^6}{7^7} + \dots \right) + \left(-\frac{i}{2^2} - \frac{i^3}{4^4} - \frac{i^5}{6^6} - \frac{i^7}{8^8} \dots \right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^7} + \dots \right) + i \left(-\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^8} \dots \right) \Rightarrow \\ \int_0^1 \cos(x \ln x) dx &= 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^7} + \dots \\ \int_0^1 \sin(x \ln x) dx &= -\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^8} \dots \end{aligned}$$

В пропонованому посібнику розглянуто деякі важливі факти з теорії інтегрування, в тому числі, з інтегралів, що залежать від параметра, зокрема, функцій Ейлера. Ні в якому разі не можна претендувати на повноту викладення. В математичній літературі можна знайти і інші цікаві, важливі і глибокі результати цієї теорії. Бажаючі можуть продовжити знайомство з цим змістовним розділом математичного аналізу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Математичний аналіз: Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Частина I [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,2 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 83 с.
2. Математичний аналіз: Диференціальне числення функцій однієї змінної [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,56 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 162 с.
3. Математичний аналіз. Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Ряди і інтеграли, що залежать від параметра. Частина 2. [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / Ю. Є. Бохонов ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,13 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 239 с.
4. Математичний аналіз: Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли, гармонічний аналіз, частина 3. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,76 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 111 с.
5. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: підручник / А. Я. Дороговцев. – К.: "Либідь". 1993. 323 с.
6. Шкіль. М. І. Математичний аналіз: підручн. у 2-х ч. /М. І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2005. – 447 с.
7. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., І. І. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с.
8. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко, Р. К. Клименко, В. В. Крочук, М. А. Мартиненко ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.