

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу**

«На правах рукопису»

УДК 330.354

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ О.Л. ТИМОЩУК

«__» _____ 20__ р.

**Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз фінансового
ринку»
спеціальності 124 «Системний аналіз»
на тему: « Математичні моделі економічного зростання та їх роль у
забезпеченні стабільності національної економіки »**

Виконав:

студент II курсу, групи КА-02мп

Тихоненко Дмитро Володимирович _____

Керівник:

професор кафедри ММСА,

д.ф.-м.н., проф. Лопатін Олексій Костянтинович _____

Рецензент:

доцент кафедри інтелектуальних технологій

КНУ ім. Т. Шевченка

к.т.н., доц. Красовська Ганна Валеріївна _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____

Київ
2021

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

Інститут прикладного системного аналізу

Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 124 «Системний аналіз»

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз фінансового ринку»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.Л. ТИМОЩУК

«___» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Тихоненко Дмитру Володимировичу

1. Тема дисертації: « Математичні моделі економічного зростання та їх роль у забезпеченні стабільності національної економіки », науковий керівник дисертації Лопатін Олексій Костянтинівич, доктор ф.-м. наук, професор, затверджені наказом по університету від «02» листопада 2021 р. № 3651-с

2. Термін подання студентом роботи: 12 грудня 2021 року

3. Об'єкт дослідження: закон еволюційного розвитку технологій та інноваційних процесів.

4. Предмет дослідження: модифікована модель економічного росту Солоу з виробничою функцією у вигляді S-кривої Річардса.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

- Здійснити огляд технічної літератури за темою роботи;
- Ознайомитись із моделлю Солоу;
- Модифікувати модель Солоу за допомогою S-функції Річардса;
- Провести моделювання економік з різними параметрами;
- Провести аналіз результатів;
- Оформити пояснювальну записку.

6. Перелік ілюстративного матеріалу:

- Фазова діаграма для модифікованої моделі Солоу;
- Часовий ряд для модифікованої моделі Солоу;
- Залежність побудованої моделі від зміни параметру α ;
- Часові ряди побудованої моделі у випадку наявності стійкої точки, періодичних коливань та хаосу.

7. Дата видачі завдання: 5 вересня 2021

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання магістерської дисертації	Примітка
1	Отримання завдання	01.09.2021 – 05.09.2021	Виконано
2	Збір інформації	06.09.2021 – 12.09.2021	Виконано
3	Ознайомлення з літературою і підготовка теоретичної частини магістерської дисертації	13.09.2021 – 26.09.2021	Виконано
4	Аналіз вимог завдання, вибір методів і засобів розв'язання поставленої задачі	27.09.2021 – 3.10.2021	Виконано
5	Проведення практичних досліджень	4.10.2021 – 31.10.2021	Виконано
6	Проведення аналізу ринкових можливостей стартап-проекту	1.11.2021 – 7.11.2021	Виконано
7	Отримання висновків після тестування	8.11.2021 – 15.11.2021	Виконано
8	Оформлення магістерської дисертації	15.11.2021 – 12.12.2021	Виконано
9	Отримання допуску до захисту та подача роботи до ДЕК	13.12.2021 – 14.12.2021	Виконано

Студент

Д.В. Тихоненко

Керівник

О.К. Лопатін

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 99 с., 25 рис., 21 табл., 15 джерел.

ДИНАМІЧНА СИСТЕМА, МОДЕЛЬ РОСТУ СОЛОУ, ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ПРОГРЕС, S-КРИВА РІЧАРДСА, ТЕХНОЛОГІЧНИЙ РОЗРИВ, СТІЙКА ТОЧКА, ПЕРІОДИЧНІ КОЛИВАННЯ, ХАОС.

Об'єкт дослідження: закон еволюційного розвитку технологій та інноваційних процесів.

Предмет дослідження: модифікована модель економічного росту Солоу з виробничою функцією у вигляді S-кривої Річардса.

Мета дослідження:

1. Дослідження модифікованої моделі економічного зростання Солоу на основі S-кривої Річардса.
2. Змодельовати явище технологічного розриву та відобразити його вплив на економіку.

Була змодельована економіка за допомогою модифікованої моделі економічного зростання Солоу на основі S-функцій Верхольста та Річардса.

При переході від однієї S-функції до іншої побачили технологічний розрив, який неминуче з'являється при «оновленні» технологій. Також було розглянуто 3 варіанти розвитку подій при появі технологічного розриву, а саме:

- наявність стійкої точки рівноваги;
- періодичні коливання;
- хаос.

ABSTRACT

Master's thesis explanatory note: 99 p., 25 fig., 21 tables, 15 sources.

DYNAMIC SYSTEM, SOLOW GROWTH MODEL, TECHNOLOGICAL PROGRESS, RICHARD S-CURVE, TECHNOLOGICAL GAP, STABILITY POINT, PERIODIC FLUCTUATIONS, CHAOS.

Object of research: the law of evolutionary development of technologies and innovative processes.

Subject of research: modified Solow's model of economic growth with a production function in the form of a Richard S-curve.

The purpose of research:

1. Study modified Solow's model of economic growth based on Richard S-curve.
2. To model technological gap and show how it affects the economy.

Modeled economic with modified Solow's model of economic growth based on both, Verhulst and Richard S-curves. Changing Verhulst curve with Richard generates technological gap, which appears inevitably while replacing old technologies with the new one.

Also 3 options were reviewed:

- stability point;
- periodic fluctuations;
- chaos.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	8
РОЗДІЛ 1. ВВЕДЕННЯ В ТЕОРІЮ МОДЕЛЕЙ В ЕКОНОМІЦІ.....	9
1.1 Ендогенне зростання та ефект масштабу.....	9
1.2 Критика моделей без ефекту масштабу	11
1.3 Особливості моделей	15
1.4 Макроекономічна модель знань і технологій.....	17
1.5 Передумови моделі	17
1.6 Короткострокова динаміка моделі	19
1.7 Траєкторія збалансованого зростання.....	21
1.8 Структура економіки	23
1.9 Формалізація моделі	25
1.10 Функція прибутку для однієї технології.....	30
1.11 Рівняння Ейлера для однієї точки.....	35
1.12 Висновки до розділу 1	39
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЬ РОСТУ СОЛОУ	40
2.1 Структура економіки в базовій моделі Солоу.....	40
2.2 Модель Солоу в дискретному часі	48
2.3 Перехідна динаміка в моделі Солоу в дискретному часі	54
2.4 Модель Солоу з технологічним прогресом	57
2.5 Висновки до розділу 2	64
РОЗДІЛ 3. РЕАЛІЗАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОГРЕСУ НА ОСНОВІ МОДИФІКОВАНОЇ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ СОЛОУ З S- ФУНКЦІЯМИ ВЕРХОЛЬСТА ТА РІЧАРДСА	65
3.1 S-подібна крива	65
3.2 Модифікована версія моделі Солоу	68
3.3 Двоступінчаста модель Солоу з S-функцією Річардса.....	72
3.4 Висновки до розділу 3	81
РОЗДІЛ 4 АНАЛІЗ СТАРТАП ПРОЕКТУ	83
4.1 Опис ідеї стартап проекту	83
4.2 Технологічний аудит ідеї проекту.....	85

4.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту	85
4.4 Розроблення ринкової стратегії проекту.....	91
4.5 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту	94
4.6 Висновки до розділу 4	95
ВИСНОВКИ	96
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	98

ВСТУП

Рівень життя в межах країни залежить від того, в якому стані знаходиться державна економіка. В свою чергу економіка, як складна структура, залежить від великої кількості різноманітних факторів, зовнішніх та внутрішніх, таких як географічне положення, трудові ресурси, міжнародні зв'язки, розвиток господарства та промисловості тощо.

Економічне зростання – це регулярне розширення масштабів діяльності всіх суб'єктів господарювання, яке виявляється у збільшенні абсолютних розмірів ВВП, ВНП, НД в країні в цілому і на душу населення. Характер і динаміка економічного розвитку країни є предметом найпильнішої уваги вчених. Від того, які процеси відбуваються в динаміці і рівні розвитку, які при цьому відбуваються структурні зміни в національній економіці, залежить дуже багато чого в житті країни та її перспективи.

РОЗДІЛ 1. ВВЕДЕННЯ В ТЕОРІЮ МОДЕЛЕЙ В ЕКОНОМІЦІ

1.1 Ендогенне зростання та ефект масштабу

Важливість дослідження факторів економічного зростання складно переоцінити. Виявлення механізмів економічного зростання допомагає проводити економічну політику, що стимулює розвиток, і як наслідок вирішує економічні і соціальні проблеми (Істерлі, 2006). Сучасними моделями економічного зростання є моделі ендогенного зростання, заснованого на дослідженнях і розробках (НДДКР, R&D) – моделі Ромер (Romer (1990)), Гроссман та Хелпман (Grossman, Helpman (1991)), Агіон і Ховітт (Aghion, Howitt (1992)). Сектор R&D грає ключову роль в сучасних моделях економічного зростання. Моделі, в яких рішення в секторі досліджень і розробок приймаються агентами при максимізації прибутку, є одним з видів моделей ендогенного росту.

Моделі ендогенного зростання є основним інструментом для аналізу проблем, пов'язаних з економічним зростанням, і визначенням напрямів інноваційної політики. Але ці моделі не узгоджуються з даними, оскільки пророкують наявність ефекту масштабу: при збільшенні кількості ресурсів, задіяних в дослідженнях і розробках, темпи економічного зростання повинні вирости (Джонс (Jones (1995a), Jones (1995b))).

Джонс (Jones (2005)) зазначає, що наявність ефекту масштабу пов'язана з властивостями інновацій, виробництвом яких займається сектор досліджень і розробок. Оскільки інновації є неконкурентним благом, то використання ідеї однією людиною не зменшує корисність від використання даної ідеї для іншої людини. Таким чином, багато дослідників можуть одночасно користуватися одними тими ж ідеями, виробленими в секторі R&D. Тому при збільшенні кількості ресурсів, задіяних в секторі R&D, кількість ідей зростає, і ростуть темпи економічного зростання [1].

Однак більшість емпіричних досліджень спростовує наявність ефекту масштабу для розвинених країн в 1950-1990 рр, що можна спостерігати на рисунках 1.1 та 1.2.

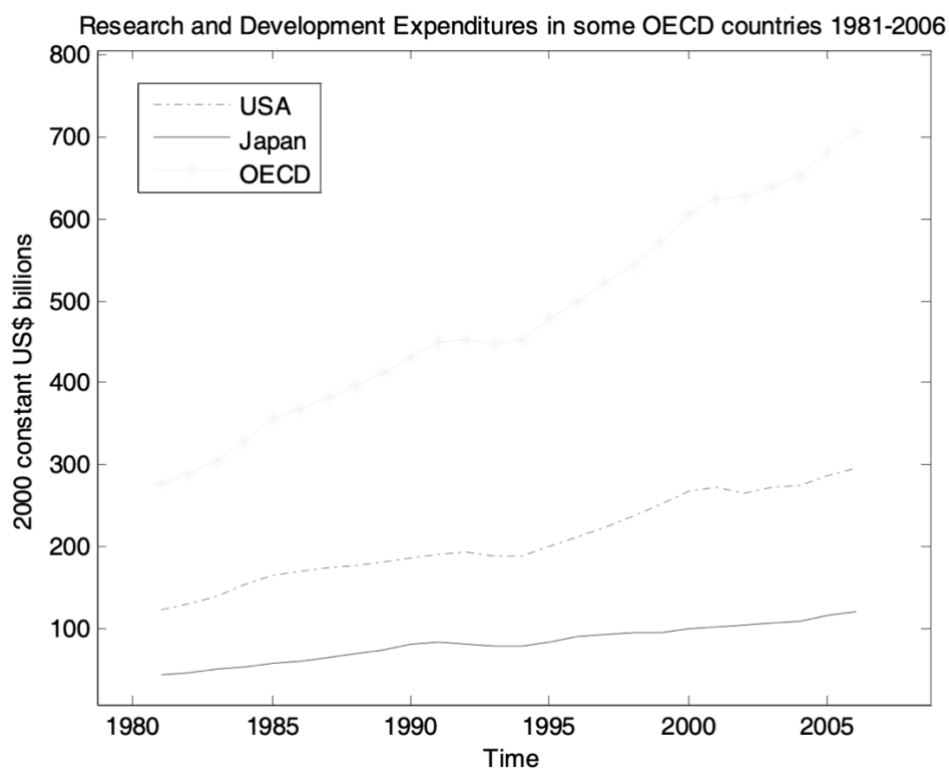


Рисунок 1.1 – Витрати на дослідження та розробку в відсотках від ВВП в США, Японії та країнах OECD в 1981-2006рр.

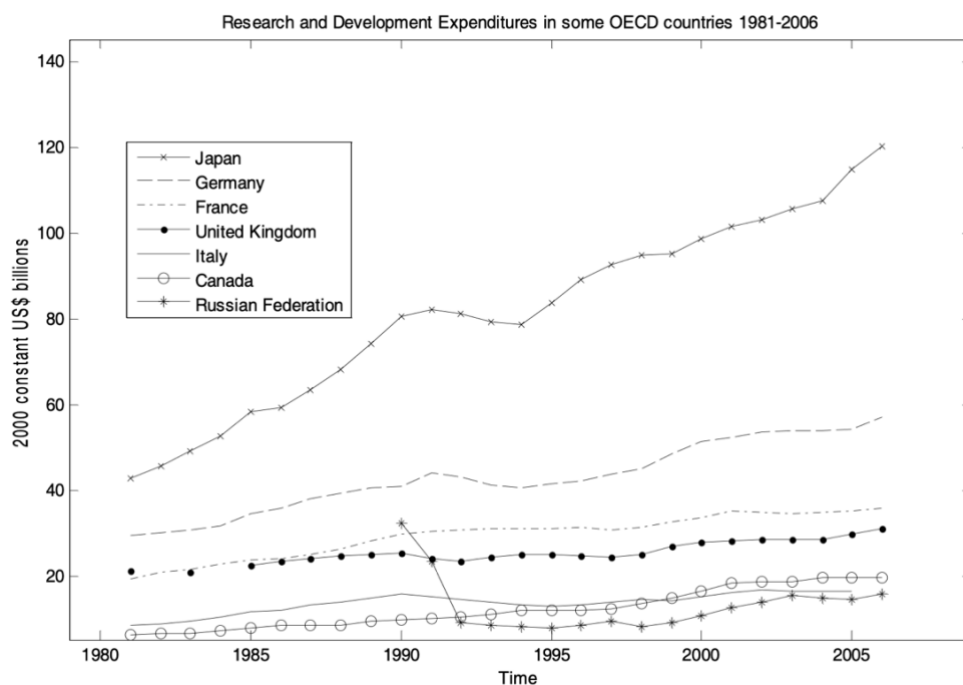


Рисунок 1.2 – Витрати на дослідження та розробку в відсотках від ВВП в Японії, Німеччині, Франції, Великобританії, Італії, Канаді та Росії в 1981-2006рр.

Як ми бачимо, за період з 1981 до 2006 рр. відбулося істотне збільшення витрат на дослідження і розробку в країнах OECD. Однак темпи зростання економік за даний період залишалися приблизно сталими.

Крім зазначеного ефекту масштабу, який зазвичай називають сильним ефектом масштабу (Strong Scale Effect, SSE), також в літературі виділяється слабкий ефект масштабу (Weak Scale Effect, WSE): при збільшенні темпів зростання кількості ресурсів, задіяних в R&D, темп зростання економіки буде рости. Слабкий ефект масштабу спостерігається в більшості моделей ендогенного зростання, заснованих на дослідженнях і розробках. Деякі автори вважають наявність слабого ефекту масштабу недоліком моделей такого типу, наприклад, Гроссман (Grossman, V. (2008)). Проте, Гроссман зауважує, що емпіричні тести не дають підстави прийняти або відкинути наявність слабого ефекту масштабу. Одночасно з цим Джонс (Jones (2005)) вважає, що наявність слабого ефекту масштабу є характерним для моделей ендогенного зростання, заснованих на дослідженнях і розробках, і не є недоліком, а лише відображає неконкурентну властивість ідей. В цілому можна зробити висновок, що лише сильний ефект масштабу є проблемою для використання моделей зростання, заснованих на R&D, для розробки практичних рекомендацій проведення економічної політики, що стимулює зростання.

1.2 Критика моделей без ефекту масштабу

Емпірична неузгодженість первинних моделей ендогенного зростання породила цілий клас моделей, автори яких намагалися модифікувати моделі ендогенного зростання так, щоб виключити пророкування про наявність ефекту масштабу, зберігши основні переваги моделей ендогенного зростання: можливість впливу економічної політики на темпи економічного зростання в довгостроковому періоді і мікроекономічна обґрунтованість даних моделей.

Обговорення існуючих моделей ендогенного зростання без ефекту масштабу засноване на статті Джонса (Jones (1999)).

Один з підходів до вирішення даної проблеми запропоновано Джонсом (Jones (1995a)), Кортумом (Kortum (1997)), Сегерстремом (Segerstrom (1998)). Автори пропонують врахувати те, що створення нових товарів стає все складніше через недостатній обмін знаннями між різними галузями виробництва товарів. В результаті в моделях не спостерігається ефект масштабу на траєкторії збалансованого росту. Але в моделях такого типу довгострокові темпи зростання випуску на душу населення залежать від параметрів, які прийнято вважати екзогенними, тобто економічна політика не може бути використана для стимулювання довгострокового зростання. Саме з цієї причини дані моделі отримали назву моделей напівендогенного зростання. Крім неможливості стимулювання довгострокового економічного зростання за допомогою економічної політики в моделях напівендогенного зростання з'являється нереалістичний висновок: при нульовому темпі зростання населення економічне зростання припиниться [2].

Тепер зупинимось на аналізі даного типу моделей. В даних моделях для виробництва кінцевої продукції Y використовуються знання, які виробляються в секторі R&D, A та робітники L_Y :

$$Y = A^\sigma L_Y, \quad (1.1)$$

де $\sigma > 0$ – параметр, що задає віддачу знань в секторі кінцевої продукції.

В секторі виробництва знань (R&D) дослідники (їх кількість позначається L_A) проводять дослідження, використовуючи A , у відповідності до виробничої функції

$$\dot{A} = \gamma A^\phi L_A, \quad (1.2)$$

де γ – параметр продуктивності в секторі R&D та $\phi < 1$ – показник віддачі від запасу знань в секторі R&D. Відзначимо, що в перших моделях ендогенного росту – Ромер (Romer (1990)), Гроссман та Хелпман (Grossman, Helpman (1991)), Агіон та Ховітт (Aghion, Howitt (1992)) – $\phi = 1$, в такому випадку спостерігається ефект масштабу.

Як ми бачимо, у виробничому секторі та секторі виробництва знань беруть участь лише трудові ресурси (передумова для спрощення), тоді ринок праці знаходиться в рівновазі, якщо $L_A + L_Y = L$. Нехай населення зростає з постійним темпом, тобто $\dot{L} = nL$. Для спрощення підрахунків припускається, що частка $0 < s < 1$ використання праці постійна в обох секторах, тоді $L_Y = sL$ та $L_A = (1 - s)L$.

Використовуючи визначення $g_Y = \left(\frac{\dot{Y}}{Y}\right)$ та обчислювання $g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = \sigma \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}_Y}{L}$, отримаємо:

$$g_Y = \sigma \gamma A^{\phi-1} L_A + n. \quad (1.3)$$

З формули (1.3) можна зробити висновок, що при збільшенні ресурсів, задіяних в R&D без припущення про те, що економіка знаходиться на траєкторії збалансованого зростання, темпи зростання економіки виростуть. Іншими словами, ефект масштабу спостерігається в перехідній динаміці даного типу моделей, що виключають ефект масштабу.

Зазначені недоліки даних моделей Джонс (Jones (1995a)), Кортум (Kortum (1997)), Сегерстрем (Segerstrom (1998)) привели до появи іншого підходу – в роботах Янг (Young (1998)), Перетт (Peretto (1998)) , Агіон та Ховітт (Aghion, Howitt (1998)), Дінополос, Томпсон (Dinopoulos, Thompson (1998a), (1998b)), який полягає в тому, що дослідники працюють над новими ідеями для існуючих товарів і створюють нові види товарів.

Слідуючи роботі Джонс (Jones (1999)), формалізуємо даний підхід наступним чином.

Нехай агреговане споживання є функцією CES від різних благ:

$$C = \left(\int_0^B Y_i^{\frac{1}{\theta}} di \right)^{\theta}, \quad (1.4)$$

де B – доступна різноманітність благ, Y_i – кількість благ виду i , та $\theta > 1$ визначає еластичність заміщення між благами. Нехай Y_i виробляються відповідно до (1.1) і (1.2). Припустимо, що B – різноманітність благ (кількість різних благ) визначається як $B = L^{\beta}$, де $\beta > 0$ – параметр моделі.

Для простоти аналізу моделі припустимо, що всі проміжні блага $Y_i = Y$ виробляються в однакових кількостях. Тоді рівняння (1.4) приймає вигляд

$$C = YB^{\theta} \quad (1.5)$$

Тоді випуск на душу населення $c \equiv \frac{C}{L}$ дорівнює

$$c = B^{\theta} y, \quad (1.6)$$

де $y \equiv \frac{Y}{L}$ – споживання блага певного виду на душу населення.

Знайдемо темп росту виробництва на душу населення g_c : $g_c = \theta g_B + \sigma g_A = \theta \beta n + \sigma g_A$, де g_B – темп росту видів благ, а g_A – темп технологічного прогресу. Із виробничої функції для сектору R&D з урахуванням того, що для кожного виду благ використовується праця дослідників у розмірі $\frac{L_A}{B}$, отримуємо $g_A = \gamma A^{\phi-1} L_A \neq B$.

В такому випадку кінцеве рівняння для темпу росту випуску в моделях Янг, Паретто, Агіон та Ховітт, Дінополос та Томпсон виглядає наступним чином:

$$g_c = \theta g_B + \sigma g_A = \theta \beta n + \sigma \gamma A^{\phi-1} (1-s) L^{1-\beta}, \quad (1.7)$$

Автори статей припускали, що $\beta = 1$, та розглядали траєкторію збалансованого зростання. Тоді, на траєкторії збалансованого зростання, при збільшенні кількості ресурсів, що вкладаються в дослідження, вони розподіляються між великою кількістю секторів і ефекту масштабу не спостерігається. Крім того, при нульових темпах зростання населення стає можливим довгострокове економічне зростання [3].

Але тим не менше, аналогічно до попереднього типу моделей, створених для усунення ефекту масштабу, на перехідній динаміці спостерігається збільшення темпів зростання економіки при зростанні ресурсів, задіяних в R&D.

1.3 Особливості моделей

Підводячи підсумок щодо основних підходів для виключення ефекту масштабу, можна помітити, що всі вони концентрували свою увагу на вивченні довгострокових властивостей економіки, тобто її властивостей на траєкторії збалансованого зростання. Але в моделях ендогенного зростання термін, за який економіка проходить половину шляху до траєкторії збалансованого зростання, становить близько 50-100 років. Тому емпіричні дані по динаміці макроекономічних показників розвинених економік в 1950-90-х рр. скоріше є свідченням того, що ефект масштабу не спостерігається в економіці, що знаходиться на перехідній динаміці. Така картина спостерігалася в США і в інших розвинених країнах. У всіх згаданих підходах ефект масштабу, хоч і не спостерігається на траєкторії збалансованого зростання, але все ж таки присутній в перехідній динаміці. Тому для вирішення протиріччя між моделями ендогенного економічного зростання і емпіричними даними необхідний новий підхід [4].

Таким чином, метою дослідження є вирішити протиріччя між прогнозом про наявність ефекту масштабу в моделях ендогенного зростання і його

відсутністю в емпіричних даних. Завданням дослідження є побудова моделі ендогенного зростання, яка враховувала б новий підхід.

Пропонований новий підхід заснований на наступних ідеях.

По-перше, розмежовуються технології і знання. Їх ключова відмінність полягає в тому, що технології використовуються у виробництві кінцевої продукції, тоді як знання є лише фактором виробництва технологій, причому для економічного зростання важливі не тільки нові знання (потік знань), а весь наявний запас знань, з якого технології виробляються за допомогою комбінацій зі знань і технологій.

По-друге, основним агентом є підприємець, який використовує весь наявний запас знання для створення технологій, які використовуються для:

- створення нового товару (горизонтальні інновації);
- поліпшення якості існуючого товару (вертикальні інновації);
- створення нового товару або способу виробництва за допомогою комбінування;
- технологій, що вже використовуються (комбінаторні інновації).

Моделі горизонтальних і вертикальних інновацій є стандартними для літератури по ендогенному економічному зростанню, заснованому на дослідженнях і розробках, що не можна сказати про останній виді інновацій – об'єднання старих ідей в нові, ще не існуючі, комбінації.

По-третє, увага зосереджена на перехідній динаміці моделі. Не відомі переконливі свідчення того, що реальні економіки знаходяться на траєкторіях збалансованого зростання і що траєкторія збалансованого зростання існує. І, як вже було згадано, пророкування про ефект масштабу не знаходить підтвердження на проміжку близько 50 років, що, швидше за все, характеризує поведінку економіки, що знаходиться в перехідній динаміці.

1.4 Макроекономічна модель знань і технологій

У запропонованій макроекономічній моделі проводиться поділ між знаннями і технологіями, що допомагає вирішити проблему неузгодженості моделей ендогенного зростання з емпіричними даними за допомогою усунення ефекту масштабу. Замість традиційної передумови про те, що нові технології створюються дослідниками в секторі R&D, ми вважаємо, що нові технології створюють підприємці, використовуючи знання, накопичені в секторі R&D. Як наслідок, темп економічного зростання визначається не потоком нових досліджень, а накопиченим запасом знань, що вирішує вищезазначене протиріччя [5].

Дійсно, збільшення запасу знань в економіці може не збільшити випуск кінцевої продукції, оскільки спочатку знання повинні бути застосовані для виробництва кінцевої продукції. Тому повинен існувати підприємець, який використовує існуючі знання для виробництва продукції, тобто створення технології. Накопичення знань збільшує темпи економічного зростання лише в тій мірі, в якій вони допомагають підприємцям створювати нові види бізнесу.

1.5 Передумови моделі

В економіці три сектори: сектор виробництва кінцевої продукції, сектор виробництва технологій і сектор виробництва знань (сектор R&D).

Виробнича функція в секторі виробництва кінцевої продукції має постійну віддачу від масштабу. Постійна віддача від масштабу в секторі виробництва кінцевої продукції призведе до нульового прибутку. Постійна віддача від масштабу в секторі виробництва кінцевої є стандартною в теорії економічного росту.

В даному секторі праця L_Y , капітал K та технології T використовуються для виробництва кінцевої продукції Y .

$$Y = K^\alpha (TL_Y)^{1-\alpha}, \quad (1.8)$$

де α – параметр виробничої функції.

Макроекономічна тотожність про рівність сукупних доходів і витрат слідує, що $Y = C + I$ (з урахуванням відсутності державного сектора і розгляду закритої економіки), і передумова про постійну норму заощаджень s призводить до динаміки капіталу такого вигляду:

$$\dot{K} = sY - \delta K, \quad (1.9)$$

де s – норма заощаджень, δ – норма амортизації.

Технології створюються підприємцями, чисельність яких складає L_E . При створенні нової технології підприємці спираються на весь доступний запас знань A та інформацію щодо існуючих технологій T . Припустимо, що виробнича функція в секторі виробництва технологій задається в загальному вигляді як

$$\dot{T} = \phi A^\beta L_E^\theta T^\xi, \quad (1.10)$$

де $\phi > 0, \beta, \xi$ – параметри.

В секторі R&D L_A людей проводять дослідження, використовуючи існуючий запас знань, відповідно, виробнича функція в сфері виробництва знань виглядає наступним чином:

$$\dot{A} = \gamma A^\lambda L_A^\mu, \quad (1.11)$$

де γ – параметр технології виробництва знань, λ, μ – параметри. Гіпотеза щодо того, що виробнича функція в секторі виробництва знань має такий вигляд, являється типовою для моделей ендогенного зростання.

Умова рівноваги на ринку праці:

$$L = L_Y + L_A + L_E, \quad (1.12)$$

ми припускаємо, що частки праці, яка задіяна в кожному з секторів, є постійними, а саме:

$$L_Y = s_Y L \quad (1.13a)$$

$$L_A = s_A L \quad (1.13b)$$

$$L_E = s_E L, \quad (1.13c)$$

де s_Y – частка праці, зайнятої виробництвом кінцевої продукції, s_A – частка праці, зайнятої виробництвом знань, s_E – частка праці, зайнятої виробництвом технологій (підприємці). Відзначимо, що дана передумова не є нешкідливою, проте вона значно полегшує розрахунки та робиться для отримання результату в першому наближенні [6].

Населення зростає з постійним темпом $n > 0$:

$$\dot{L} = nL \quad (1.14)$$

1.6 Короткострокова динаміка моделі

Ми хочемо показати, що в моделі відсутня залежність темпів зростання випуску на душу населення від кількості ресурсів, задіяних в секторі R&D, тобто в моделі не спостерігається ефект масштабу в короткостроковому періоді.

Знайдемо темп зростання випуску на душу населення, логодиференціюючи виробничу функцію в секторі кінцевої продукції (1.8):

$$g_Y \equiv \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = \alpha g_K + (1 - \alpha) \left(\frac{\dot{T}}{T} + \frac{\dot{L}_Y}{L_Y} - n \right), \quad (1.15)$$

Спростимо дане рівняння, щоб можна було зрозуміти, чи залежать темпи росту виробництва на душу населення від кількості ресурсів, що спрямовані на R&D.

Відзначимо, що $\dot{L}_Y = nL_Y$, оскільки частка праці, що займається виробництвом кінцевої продукції, постійна, а темп росту технологій знайдемо з (1.10):

$$g_T \equiv \frac{\dot{T}}{T} = \phi A^\beta L_\theta^E T^{\xi-1} \quad (1.16)$$

З рівняння динаміки капіталу (1.9) знаходимо, що

$$g_K = s \frac{Y}{K} - \delta \quad (1.17)$$

Відповідно можна переписати рівняння (1.15) для темпу зростання випуску на душу населення як:

$$g_Y = \alpha \left(s \frac{Y}{K} - \delta \right) + (1 - \alpha) (\phi A^\beta L_E^\theta T^{\xi-1}) \quad (1.18)$$

З виразу (1.18) видно, що в даній моделі ефект масштабу відсутній в короткостроковому періоді, тому що темп зростання випуску не залежить явно від кількості ресурсів, задіяних в R&D. Збільшення L_A кількості дослідників, що займаються R&D, не змінює темп зростання випуску на душу населення g_Y . Збільшення L_A відіб'ється на g_Y лише в довгостроковому періоді, коли зростання

дослідників призведе до чисельно значущого зростання знань A . Таким чином, в короткостроковому періоді динаміка змінних запропонованої макроекономічної моделі не суперечить часовим рядам для розвинених країн у другій половині 20 століття.

1.7 Траєкторія збалансованого зростання

У даній моделі можливо три випадки. Перший випадок полягає в тому, що траєкторії збалансованого зростання не існує і економіка демонструє вибухову динаміку. У другому випадку траєкторія збалансованого зростання існує, але довгостроковий темп зростання не залежить від кількості ресурсів, задіяних в R&D. У третьому випадку траєкторія збалансованого зростання також існує, але довгостроковий темп зростання залежить від кількості ресурсів, залучених в R&D.

У даній моделі чотири ендогенних змінних - Y , K , T і A . Отже, щоб знайти траєкторію збалансованого зростання, ми повинні знайти умови, при яких дані змінні зростають з постійним темпом.

На траєкторії збалансованого зростання темп зростання знань повинен бути постійний, тобто $\dot{g}_A = 0$, отримуємо:

$$\frac{\dot{g}_A}{g_A} = (\lambda - 1)g_A + \mu n. \quad (1.19)$$

З (1.19) маємо, що стаціонарний стан існує лише якщо $\lambda < 1$. В іншому випадку модель матиме вибухову динаміку. На траєкторії збалансованого зростання темп моделі знань дорівнює:

$$g_A = \frac{\mu n}{1 - \lambda} \quad (1.20)$$

На траєкторії збалансованого зростання темп зростання капіталу повинен бути постійним. Щоб знайти умову, при якій g_K буде постійним, логодифференціюємо вираз (1.17), звідки отримуємо:

$$\frac{\dot{g}_K}{g_K} = s \left(\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{K}}{K} \right) = s(g_Y - g_K). \quad (1.21)$$

З виразу (1.21) слідує, що темп росту капіталу буде постійним, якщо $g_Y = g_K$.

Перейдемо до темпу росту технологій. Ми вже знайшли вираз, що задає темп росту технологій, – рівняння (1.16). Тепер знайдемо умови, при яких він буде постійним, для цього логдифференціюємо рівняння (1.16):

$$\frac{\dot{g}_T}{g_T} = \beta \frac{\dot{A}}{A} + \theta \frac{\dot{L}_E}{L_E} + (\xi - 1)g_T, \quad (1.22)$$

де $\dot{L}_E = nL_E$, оскільки частка людей, що займаються підприємництвом, постійна, та $g_A = \frac{\dot{A}}{A}$ – темп росту знань.

Траєкторія збалансованого росту існує, якщо в рівнянні (1.22) $\xi < 1$, і, якщо вона існує, то з (1.22) слідує, що для постійності темпів росту технологій g_T на траєкторії збалансованого росту має виконуватись співвідношення:

$$g_T = \frac{\beta g_A + \theta n}{1 - \xi}. \quad (1.23)$$

З наведених вище міркувань слідує, що траєкторія збалансованого росту може й не існувати. Вона існує, якщо $\lambda < 1$ та $\xi < 1$, при чому темпи економічного зростання можуть як залежить від кількості ресурсів, що спрямовуються в R&D сектор, так і не залежати від них. В результаті була побудована макроекономічна модель ендогенного зростання, яка має наступні переваги. По-перше, вона зберігає всі переваги моделей ендогенного зростання

(мікрообґрунтування і можливість впливу політики на довгострокові темпи зростання). І по-друге, вона вирішує емпіричну неузгодженість моделей ендогенного зростання, оскільки вона не суперечить емпіричним даним (в моделі відсутній ефект масштабу), представленим в статті Джонса (Jones (1995)).

Таким чином, в моделі на макроекономічному рівні можливо виключити ефект масштабу на перехідній динаміці при обліку вищевикладених міркувань. У той час як існування траєкторії збалансованого зростання залежить від значень параметрів, що характеризують виробничі функції в секторах виробництва технологій і знань.

1.8 Структура економіки

Економіка складається з трьох секторів: сектор досліджень і розробок, сектор виробництва проміжної продукції та сектор виробництва кінцевої продукції. Як фактори виробництва використовуються праця і проміжна продукція. Ми абстрагуємося від накопичення капіталу, і вважаємо, що ставка відсотка, за якою підприємці дисконтують майбутні доходи, задається екзогенно.

Існує два типи проміжної продукції. Проміжна продукція першого типу проводиться в секторі виробництва проміжної продукції, а проміжна продукція другого типу проводиться в секторі виробництва кінцевих товарів і послуг. Таким чином, проміжна продукція другого типу – це частина випуску, не використана для споживання.

У секторі досліджень і розробок виробляються нові знання, які можуть бути використані для створення технологій в секторі проміжної продукції. Сектор досліджень і розробок може фінансуватися як за рахунок приватних джерел, так і за рахунок держави. Якщо дослідження та розробки фінансуються за рахунок держави (за рахунок акордних податків), інформація про них стає тут же доступною в усій економіці. Якщо ж дослідження фінансуються за рахунок

приватних коштів, інформація про ці дослідження стане доступною всьому суспільству тільки після того, як відповідна фірма почне використовувати відповідні фундаментальні знання у виробництві.

У секторі виробництва проміжної продукції фірми комбінують наявні знання, створюючи нові технології виробництва і нові проміжні блага першого типу. Якщо фірма в секторі проміжної продукції створює унікальну технологію, вона монополізує відповідний ринок проміжної продукції. Якщо ж технології декількох фірм є досконалыми субститутами один одному, то фірми конкурують один з одним по Бертрону. Як фактори виробництва в секторі проміжної продукції використовується тільки проміжний продукт другого типу, вироблений в секторі виробництва кінцевої продукції.

Сектор кінцевої продукції є цілком конкурентним. Фірми в секторі кінцевої продукції купують працю і проміжний продукт першого типу за цінами, відповідним їх граничній продуктивності, і виробляють кінцевий продукт і проміжні блага другого типу. Проміжні блага другого типу можуть використовуватися для досліджень і розробок, витрат на пошуки нових комбінацій в секторі проміжної продукції, і на виробництво проміжних благ в секторі проміжної продукції. Кінцевий випуск в економіці в цілому (аналог ВВП) визначається як випуск в секторі виробництва кінцевих благ за вирахуванням проміжного споживання в секторі виробництва проміжних благ (таким чином, витрати на дослідження і розробки розглядаються як частина ВВП). Таке визначення випуску обрано не з економічних міркувань, а з метою отримання показника, статистично найбільш близького до ВВП.

Структура економіки представлена на рисунку 1.3.

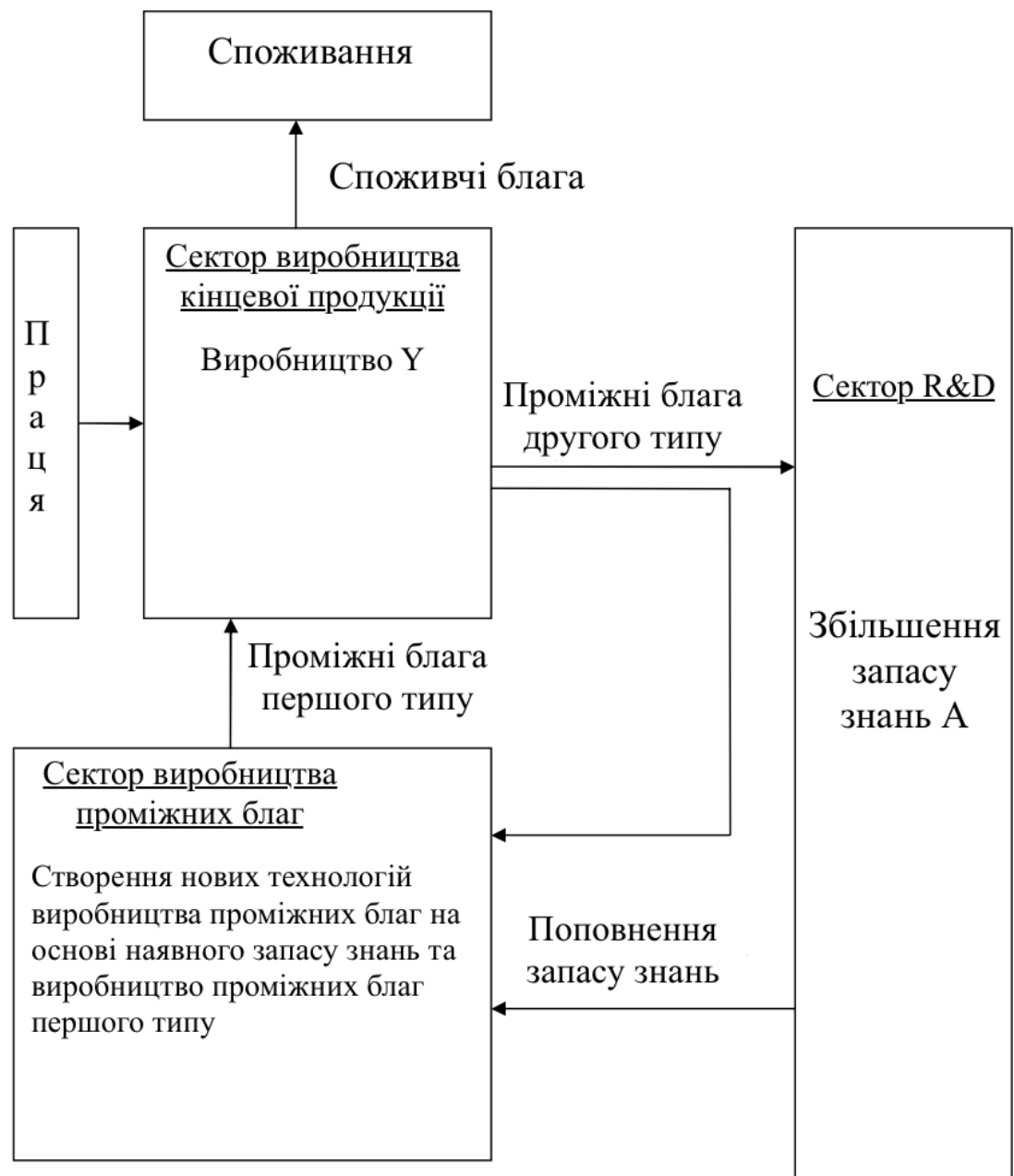


Рисунок 1.3 – Структура економіки

1.9 Формалізація моделі

Валовий випуск сектору виробництва кінцевої продукції Y ділиться між споживанням C , проміжним споживанням в секторі виробництва проміжних благ X і витратами на дослідження і розробки N в секторі досліджень і розробок:

$$Y = C + X + N. \quad (1.25)$$

Кінцевим випуском (аналогом ВВП) ми називаємо суму споживання і витрат на дослідження і розробки. У зв'язку з тим, що витрати на випуск проміжної продукції в секторі проміжних благ статистично не відрізняються від витрат на пошуки нових технологій, вся величина витрат в секторі проміжної продукції розглядається як проміжне споживання.

Ціна кінцевого блага нормована до одиниці.

Нехай A - загальний обсяг знань (знання пронумеровані на відрізку $[0, A]$, континуальної множини потужності A), вироблених в секторі досліджень і розробок. Використання N одиниць проміжної продукції другого типу для досліджень і розробок дозволяє нарощувати знання зі швидкістю χN , де χ – параметр моделі:

$$\dot{A} = \chi N. \quad (1.27)$$

У секторі виробництва проміжної продукції наявний запас знань A адаптується для виробництва проміжної продукції першого типу. Рівнем складності технології виробництва конкретного проміжного блага першого типу ми називаємо кількість різних точок на відрізку запасу знань $[0, A]$, використаних в даній технології. Так, технології першого рівня складності використовують тільки одну ідею з запасу A і задаються індексом $i_1 \in [0, A]$. Технології другого рівня використовують дві (різні) ідеї i_1 та i_2 , кожна з яких відповідає відрізку $[0, A]$. Таким чином, технологія рівня n може бути задана вектором $S_n = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, елементи якого відрізняються, і кожен елемент належить відрізку $[0, A]$.

Кожна технологія $S_n = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, доступна фірмі j характеризується технологічним параметром $\gamma_j(S_n)$. Чим більше значення $\gamma_j(S_n)$, тим з меншими

витратами фірма може виробляти проміжне благо, використовуючи технологію S_n ; конкретна залежність витрат від $\gamma_j(S_n)$ буде задана пізніше.

Нехай $\Omega(S_n)$ – множина всіх технологій, які є ненульовими підмножинами S_n . Кількість комбінацій окремих елементів S_n дорівнює $\sum_{k=1}^n c_n^k$.

Таким чином, $\Omega(S_n)$ включає в себе $2^n - 1$ різних технологій. Множина $\hat{\Omega}(S_n)$ включає в себе всі елементи $\Omega(S_n)$ крім елемента S_n , $\hat{\Omega}(S_n) = \Omega(S_n) \setminus S_n$.

Кожна технологія відповідає одному ринку, блага на якому є однорідними, тобто досконалими субститутами один одному. Близькість двох технологій S_n і S_m визначається тим, скільки елементів вектору S_n збігаються з елементами вектору S_m , тобто скільки загальних ринків містять безлічі $\Omega(S_n)$ і $\Omega(S_m)$.

Фірми можуть вкладати ресурси в створення нових технологій. Ми вважаємо, що фірма j не може створити технологію S_n до тих пір, поки кожна з технологій $\Omega(S_n)$ не створена хоча б однією фірмою (можливо, не фірмою j), і до тих пір, поки ця фірма не розробила хоча б одну технологію попереднього рівня $S_{n-1} \in \hat{\Omega}(S_n)$. Таким чином, ми апріорі припускаємо, що технології в кожній фірмі і в економіці в цілому розвиваються від простих до складних.

Щоб взяти до уваги заміщення близьких технологій, а також зростання витрат, пов'язаних зі збільшенням рівня розвитку технології, ми робимо наступне припущення. Ми вважаємо, що якщо фірма хоче використовувати технологію S_n , вона змушена допрацьовувати всі технології множини $\hat{\Omega}(S_n)$ (навіть якщо вона не продає якісь продукти з множини $\hat{\Omega}(S_n)$ з огляду на неспроможність конкурувати на відповідному ринку). З одного боку, це означає, що її зусилля на розробку технології будуть рівномірно розподілятися між усіма технологіями множини $\Omega(S_n)$, число яких становить $2^n - 1$, і складніші технології будуть вимагати більших загальних витрат. З іншого боку, це означає, що вона доб'ється поліпшення технології не тільки на ринку S_n , але і на всіх ринках множини $\hat{\Omega}(S_n)$, отже, складніші технології будуть відповідати більшій віддачі. Який ефект виявиться сильніше, буде визначатися сформованими умовами конкуренції для даної фірми.

Інтенсивність пошуку нових технологій фірмою j на ринку проміжних благ задається як c_j . Якщо фірма концентрує зусилля на розвитку технології S_n , то на кожне проміжне благо з множини $\Omega(S_n)$ припадає інтенсивність, рівна $\frac{c_j}{2^{n-1}}$. Якщо фірма є новачком на відповідному ринку з множини $\Omega(S_n)$, то це дозволяє фірмі створювати нові технології на цьому ринку зі швидкістю $\frac{\lambda c_j}{2^{n-1}}$, де λ – параметр моделі. При цьому новостворені технології фірма отримує з параметром продуктивності γ , рівним 1. Якщо фірма вже знає технологію виробництва відповідного блага, то значення параметра продуктивності γ зростає зі швидкістю $\frac{\tilde{\lambda} c_j}{2^{n-1}}$ (тобто $\dot{\gamma} = \frac{\tilde{\lambda} c_j}{2^{n-1}}$). Для спрощення ми вважаємо, що $\tilde{\lambda} = \lambda$.

У рівновазі можлива ситуація, коли кілька фірм будуть прагнути розробити або поліпшити одну і ту ж технологію виробництва. В цьому випадку, не дивлячись на відсутність невизначеності в моделі в явному вигляді, ми вважаємо, що одна фірма досягне успіху раніше, ніж інші. При цьому у всіх фірм рівні шанси опинитися попереду конкурентів. Крім того, при аналізі вироджених випадків, замість детермінованого розширення ринку або поліпшення технології ми припускаємо граничний випадок пуассонівського процесу, при якому в одиницю часу відбувається нескінченне число нескінченно малих інновацій. Такий процес цілком може мати позитивний очікуваний приріст і дисперсію, яка прямує до нуля.

Ми припускаємо спадну віддачу від масштабу при розвитку технології виробництва, щоб уникнути рівноваги, в якому всі ринки монополізуються однією єдиною фірмою. Припустимо, що витрати фірми j на розвиток її технологій задаються виразом

$$RC_j(c_j) = \frac{c_j^\theta}{\theta}, \quad (1.28)$$

де θ – параметр моделі, $1 < \theta < 2$. Зазначимо, що функція витрат є зростаючою і опуклою, а граничні витрати є зростаючою і увігнутою функцією від інтенсивності досліджень c_j .

Якщо фірма є лідером в технології S_n (тобто є єдиним володарем технології S_n , або володіє найбільшим значенням параметра $\gamma(S_n)$ серед всіх фірм), вона отримує можливість виробляти проміжне благо $x(S_n)$. Для цього вона закуповує x одиниць проміжної продукції другого типу за ціною 1, і продає x одиниць проміжної продукції першого типу за монопольною ціною p . Монопольна ціна визначається або з еластичності попиту на її продукцію в секторі виробництва кінцевих товарів і послуг, або з обмеження на максимальну ціну фірми-лідера в рівновазі по Бертрону. Відповідно, її прибуток від виробництва проміжної продукції першого типу задається рівнянням:

$$\pi(S_n) = (p(S_n) - 1)x(S_n) \quad (1.29)$$

У рівновазі загальна кількість проміжного продукту другого типу, використаного для виробництва проміжного продукту першого типу усіма фірмами, в сумі з загальними витратами на дослідження кожної фірми RC_j , має дорівнювати загальній кількості проміжного продукту другого типу X .

У секторі виробництва кінцевої продукції проміжне благо першого типу використовується для виробництва кінцевих товарів і послуг відповідно до технології

$$y(S_n) = (\gamma(S_n))^{\alpha-1} (x(S_n))^\alpha, \quad (1.30)$$

якщо технологія S_n використовується, та $y(S_n) = 0$, в іншому випадку.

Задамо y_n наступним чином:

$$y_n = \int_{i_1=0}^A \int_{i_2=0}^A \dots \int_{i_n=0}^A y(S_n) di_1 di_2 \dots di_n. \quad (1.31)$$

Тоді валовий випуск в секторі кінцевої продукції задається рівнянням

$$Y = L^{1-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \quad (1.32)$$

де L – праця. Кожна окрема людина представлений індексом $j \in [0, L]$. Потужність континуальної множини робочої сили дорівнює L . Для спрощення ми вважаємо, що $L = 1$.

1.10 Функція прибутку для однієї технології

Для того щоб зрозуміти стратегію розвитку технологій однією фірмою, виведемо вигоди, яка отримає одна фірма від володіння конкретним набором технологій. Ми почнемо з аналізу прибутку від володіння однією єдиною технологією.

Розглянемо одну точку в багатовимірному просторі технологій, що відповідає технології S_n . Вже згадана фірма може бути як лідером на ринку S_n , так і послідовником. Наша мета – вивести прибуток, яку отримує дана фірма від володіння даною технологією як функцію від її технологічного параметра і технологічного параметра найсильнішого з конкурентів.

Нехай γ – досягнутий рівень технології розглянутої фірми на ринку S_n , а $\hat{\gamma}$ – рівень технології найсильнішого з конкурентів (якщо у фірми немає конкурентів на ринку S_n , то $\hat{\gamma} = 0$). Якщо $\gamma > \hat{\gamma}$, то розглянута фірма є лідером на ринку S_n , якщо $\gamma < \hat{\gamma}$, то фірма є послідовником.

Якщо розглянута фірма є послідовником, то лідер може встановити таку вартість проміжного блага, при якій даній фірмі буде не вигідно виробляти відповідне проміжне благо, і її прибуток буде дорівнює нулю. Таким чином, нас цікавить лише випадок, коли фірма є лідером [7].

Якщо фірма є лідером, при цьому γ досить сильно перевищує $\hat{\gamma}$ (конкретна умова буде введена пізніше), то фірма буде максимізувати прибуток так, ніби вона є єдиним продавцем на цьому ринку. В цьому випадку вона стикається з кривою попиту на проміжне благо S_n , заданої граничною продуктивністю цього блага в секторі виробництва кінцевої продукції. З рівняння (1.30) отримуємо:

$$p = \alpha \gamma^{\alpha-1} x^{\alpha-1} \quad (1.33)$$

Підставивши цей вираз в визначення прибутку (1.29), отримуємо

$$\pi = (\alpha \gamma^{1-\alpha} x^{\alpha-1} - 1)x \quad (1.34)$$

Максимізація π по x дає нам наступну комбінацію ціни p , обсягу продажів x і прибутку π монополіста:

$$p = \frac{1}{\alpha} \quad (1.35)$$

$$x = \gamma \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \quad (1.36)$$

$$\pi = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)x = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\gamma \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \quad (1.37)$$

В іншому випадку, коли значення γ не надто велике щодо $\hat{\gamma}$, лідер буде встановлювати таку ціну, щоб виробляти проміжне благо, використовуючи технологію послідовника, було не вигідно.

Нехай x – випуск відповідного проміжного блага лідером, а $\hat{x}$ – випуск послідовника (в рівновазі $\hat{x} = 0$). Оскільки проміжні блага лідера і послідовника є досконалими субститутами один одного, рівняння (1.30) може бути переписано в наступному вигляді:

$$y = \left(\gamma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} x + \hat{\gamma}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \hat{x}\right)^{\alpha} \quad (1.38)$$

Послідовник виробить нульовий випуск, якщо при заданому значенні x і $\hat{x} = 0$ гранична продуктивність $\hat{x}$ не перевищуватиме собівартість виробництва $\hat{x}$, рівну одиниці. Отже, граничне значення x знаходиться з умови $tr\hat{x} = 1$, звідки при $\hat{x} = 0$ отримуємо:

$$1 = \alpha \hat{\gamma}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\gamma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} x \right)^{\alpha-1} \quad (1.39)$$

При цьому ціна x повинна як і раніше дорівнювати граничній продуктивності x , звідки маємо:

$$p = \alpha \gamma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\gamma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} x \right)^{\alpha-1} \quad (1.40)$$

Тоді оптимальна ціна від лідера виглядатиме наступним чином:

$$p = \left(\frac{\gamma}{\hat{\gamma}} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad (1.41)$$

Підставляючи (1.41) в (1.35) і (1.36), отримуємо оптимальні значення x та π :

$$x = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \hat{\gamma}^{\frac{1}{\alpha}} \gamma^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (1.42)$$

$$\pi = \left(\hat{\gamma}^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \gamma^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right) \alpha^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \hat{\gamma}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.43)$$

Відзначимо, що випуск u , в даному випадку залежить від параметра продуктивності послідовника, але не залежить від параметра продуктивності лідера:

$$y = \hat{\gamma} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (1.44)$$

Випуск лідера не залежить від параметра продуктивності лідера, оскільки лідеру доводиться встановлювати ціну і поставляти кількість проміжної продукції, що буде оптимальною для послідовника (тоді послідовник, конкуруючи по Бертрону з лідером, отримає нульовий прибуток) [8].

Зіставимо (1.41) та (1.35), і знайдемо граничне значення $\hat{\gamma}$, при якому фірмі буде все рівно, як встановлювати ціну, у відповідності до правила (1.41) або (1.35):

$$\bar{\gamma} = \hat{\gamma} \alpha^{-\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)} \quad (1.45)$$

Таким чином, функція прибутку задається наступним виразом:

$$\pi(\gamma, \hat{\gamma}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \gamma \leq \hat{\gamma} \\ \left(\hat{\gamma}^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \gamma^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right) \alpha^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \hat{\gamma}^{\frac{1}{\alpha}}, & \text{if } \hat{\gamma} < \gamma \leq \hat{\gamma} \alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \gamma, & \text{if } \gamma > \hat{\gamma} \alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{cases} \quad (1.46)$$

В подальшому нам також знадобиться формула $\pi'_\gamma(\gamma, \hat{\gamma})$, яка задається з (1.46) наступним рівнянням:

$$\pi'_\gamma(\gamma, \hat{\gamma}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \gamma \leq \hat{\gamma} \\ (1 - \alpha) \alpha^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \hat{\gamma}^{\frac{1}{\alpha}} \gamma^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)}, & \text{if } \hat{\gamma} < \gamma \leq \hat{\gamma} \alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}, & \text{if } \gamma > \hat{\gamma} \alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{cases} \quad (1.47)$$

Функції $\pi(\gamma, \hat{\gamma})$ та $\pi'_\gamma(\gamma, \hat{\gamma})$ схематично зображені на рисунку 1.4.

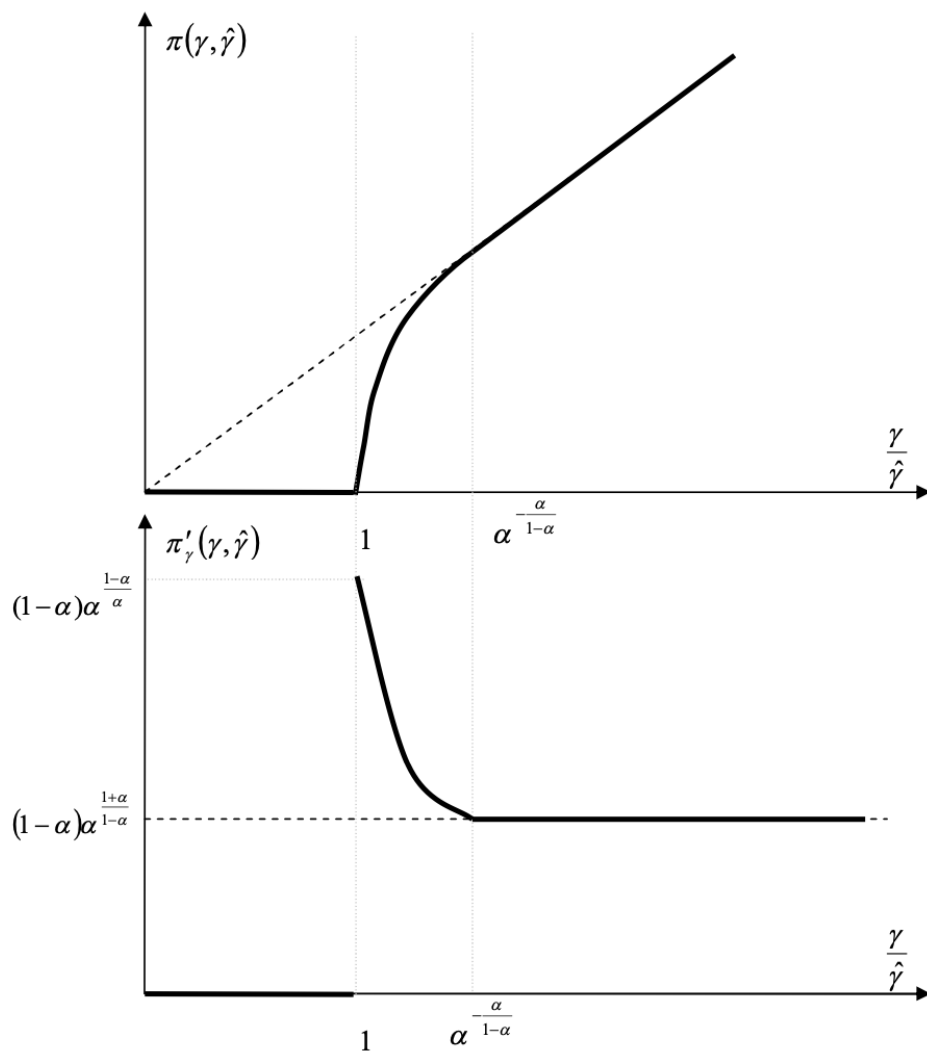


Рисунок 1.4 – Функція прибутку $\pi(\gamma, \hat{\gamma})$ та похідної прибутку $\pi'_\gamma(\gamma, \hat{\gamma})$ для заданого значення $\hat{\gamma}$

Залежність випуску сектора кінцевої продукції з даного проміжного блага y та кінцевого випуску gdp від γ представлена на рисунку 1.5 та задається наступними умовами:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{if } \gamma < \hat{\gamma} \\ \hat{\gamma} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, & \text{if } \hat{\gamma} < \gamma \leq \hat{\gamma} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \gamma \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}, & \text{if } \gamma > \hat{\gamma} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{cases} \quad (1.48)$$

$$gdp = y - x = \begin{cases} 0, & \text{if } \gamma \leq \hat{\gamma} \\ \hat{\gamma} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right), & \text{if } \hat{\gamma} < \gamma \leq \hat{\gamma} \alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \gamma \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right), & \text{if } \gamma > \hat{\gamma} \alpha^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{cases} \quad (1.49)$$

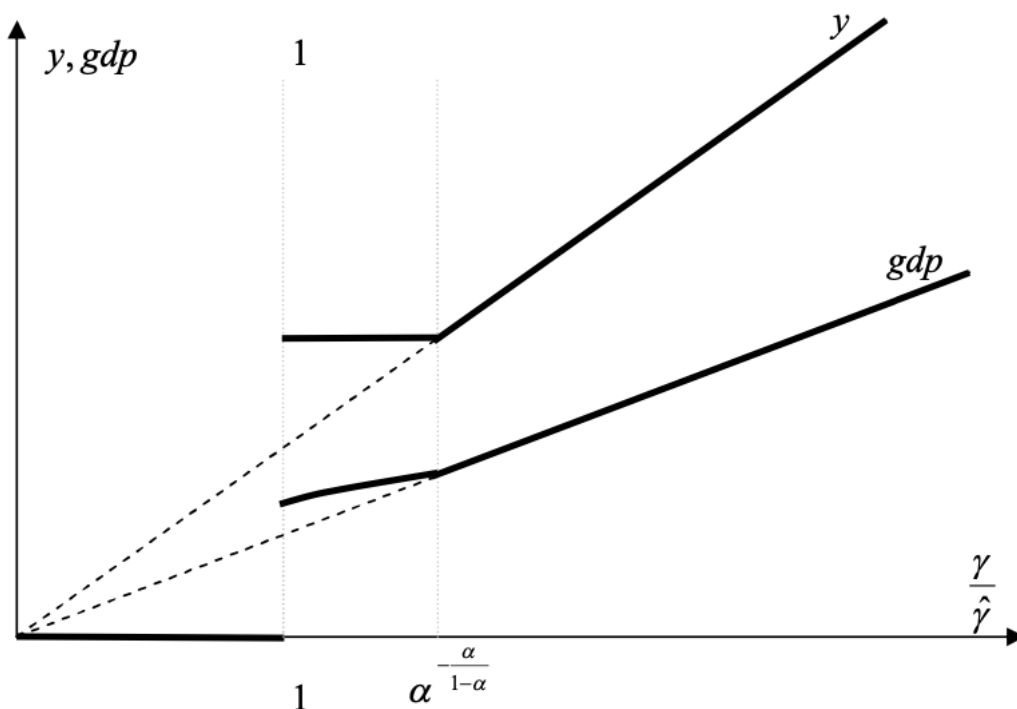


Рисунок 1.5 – Залежність вкладу заданої технології у випуск сектору кінцевої продукції y та в кінцевий випуск gdp як функції від γ для заданого $\hat{\gamma}$

1.11 Рівняння Ейлера для однієї точки

Витрати на розширення ринку або поліпшення технології – це складна функція від структури ринків і структури конкретної технології, яка буде розібрана пізніше. Припустимо, що ці витрати є функцією від інтенсивності розробки даного ринку, яку ми позначимо $F(\xi)$, де ξ – інтенсивність дослідження

даного ринку. Нехай η – інтенсивність дослідження цього ж ринку конкурентами.

Функція Беллмана для конкретної точки і для даної фірми задається як функція від рівня розвитку технології даної фірми, рівня розвитку технології конкурентами і часу, $V(\gamma, \hat{\gamma}, t)$. Час в функції Беллмана відображає той факт, що різні стани ринку можуть привести до різної очікуваної динаміки $\hat{\gamma}$, так як стан всього ринку в цілому кожна фірма приймає заданим, вона може розглядати стан ринку як функцію від часу.

Рівняння Беллмана для задачі фірми виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned} rV(\gamma, \hat{\gamma}, t) = \max_{\xi} (\pi(\gamma, \hat{\gamma}) - \Phi(\xi) + \lambda \xi V'_{\gamma}(\gamma, \hat{\gamma}, t) + \\ + \lambda \eta V'_{\hat{\gamma}}(\gamma, \hat{\gamma}, t) + V'_t) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Умова першого порядку виглядає наступним чином:

$$\Phi'(\xi) = \lambda V'_{\gamma}(\gamma, \hat{\gamma}, t) \quad (1.51)$$

З теореми про обвідну гіперплощину, маємо:

$$rV'_{\gamma}(\gamma, \hat{\gamma}, t) = \pi'_{\gamma}(\gamma, \hat{\gamma}) + \lambda \xi V''_{\gamma\gamma}(\gamma, \hat{\gamma}, t) + \lambda \eta V''_{\gamma\hat{\gamma}}(\gamma, \hat{\gamma}, t) + V''_{t\gamma} \quad (1.52)$$

Введемо нову змінну μ :

$$\mu = \lambda V'_{\gamma}(\gamma, \hat{\gamma}, t) \quad (1.53)$$

Економічна інтерпретація μ – тіньова вартість нескінченно малого приросту значення γ з точки зору розглянутої фірми. Продиференціювавши (1.53) за часом, маємо:

$$\frac{\dot{\mu}}{\lambda} = \lambda \xi V''_{\gamma\gamma}(\gamma, \hat{\gamma}, t) + \lambda \eta V''_{\gamma\hat{\gamma}}(\gamma, \hat{\gamma}, t) + V'' \quad (1.54)$$

Порівнюючи умови (1.51), (1.52), (1.53) і (1.54), ми бачимо, що умови першого порядку завдання фірми можуть бути записані таким чином:

$$\begin{cases} r\mu = \lambda \pi'_\gamma(\gamma, \hat{\gamma}) + \dot{\mu} \\ \mu = \Phi'(\xi) \\ \dot{\gamma} = \lambda \xi \end{cases} \quad (1.55)$$

Верхнє рівняння являє собою рівняння Ейлера для даного завдання. Це рівняння є аналогом арбітражного рівняння для ціни фінансового активу. Таке рівняння має нескінченну кількість рішень, фундаментальне рішення може бути знайдено на основі критерію Саржента-Уолеса, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mu(t)e^{rt}| = 0$.

Якщо значення γ досить велике (а саме, $\gamma > \hat{\gamma} \alpha^{-\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}$), при цьому ми очікуємо, що γ буде рости швидше ніж $\hat{\gamma}$, тоді в майбутньому завжди буде виконуватись умова $\mu = \frac{\lambda}{r} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}$, і фундаментальне рішення верхнього рівняння (1.55) приймає вигляд:

$$\mu = \frac{\lambda}{r} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^{\frac{2}{1-\alpha}} \quad (1.56)$$

Крім того, рисунок 1.6 дозволяє нам відновити форму функцію Беллмана на рисунку 1.7.

Якщо $1 < \gamma < \hat{\gamma} \alpha^{-\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}$, фундаментальне рішення виглядає складніше, проте його не складно вивести графічно. Приклад окремого випадку фундаментального рішення для μ представлений на рисунку 1.7 (при аналізі прийнято до уваги, що $\Phi(\xi)$ пропорційне ξ^θ).

Форма функції $\pi'_\gamma(\gamma, \hat{\gamma})$ взята з рисунка 1.4.

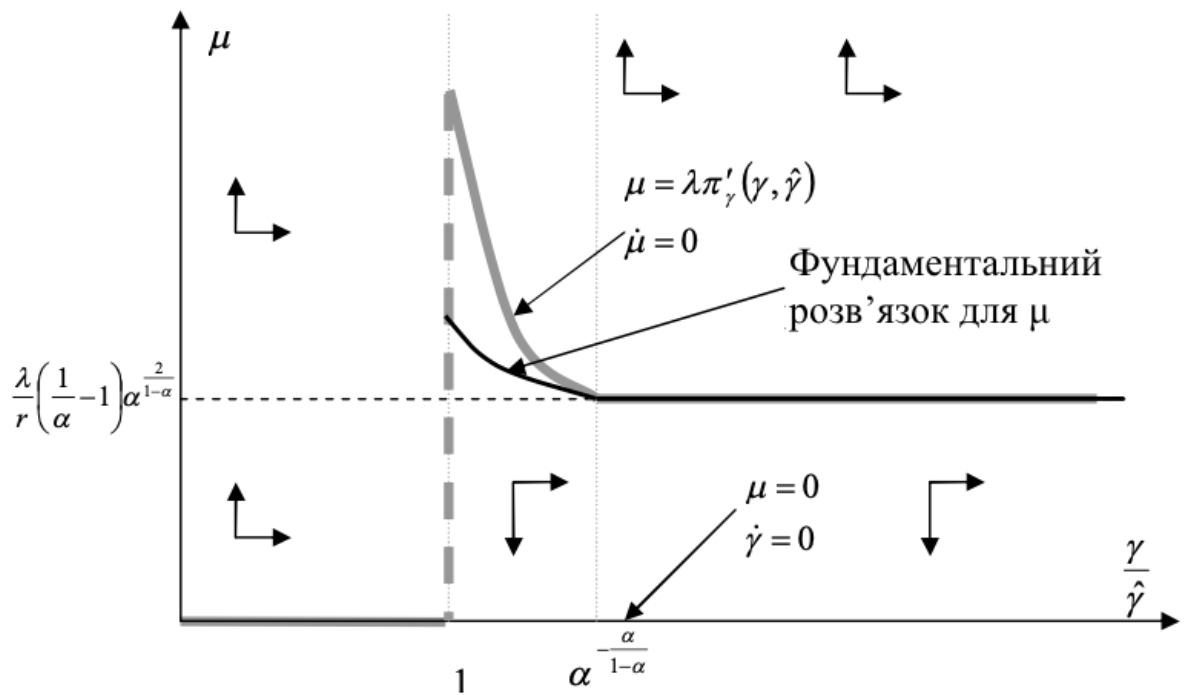


Рисунок 1.6 – Графічний пошук фундаментального розв'язку для μ при $\gamma > \hat{\gamma}$ та при сталому значенні $\hat{\gamma}$

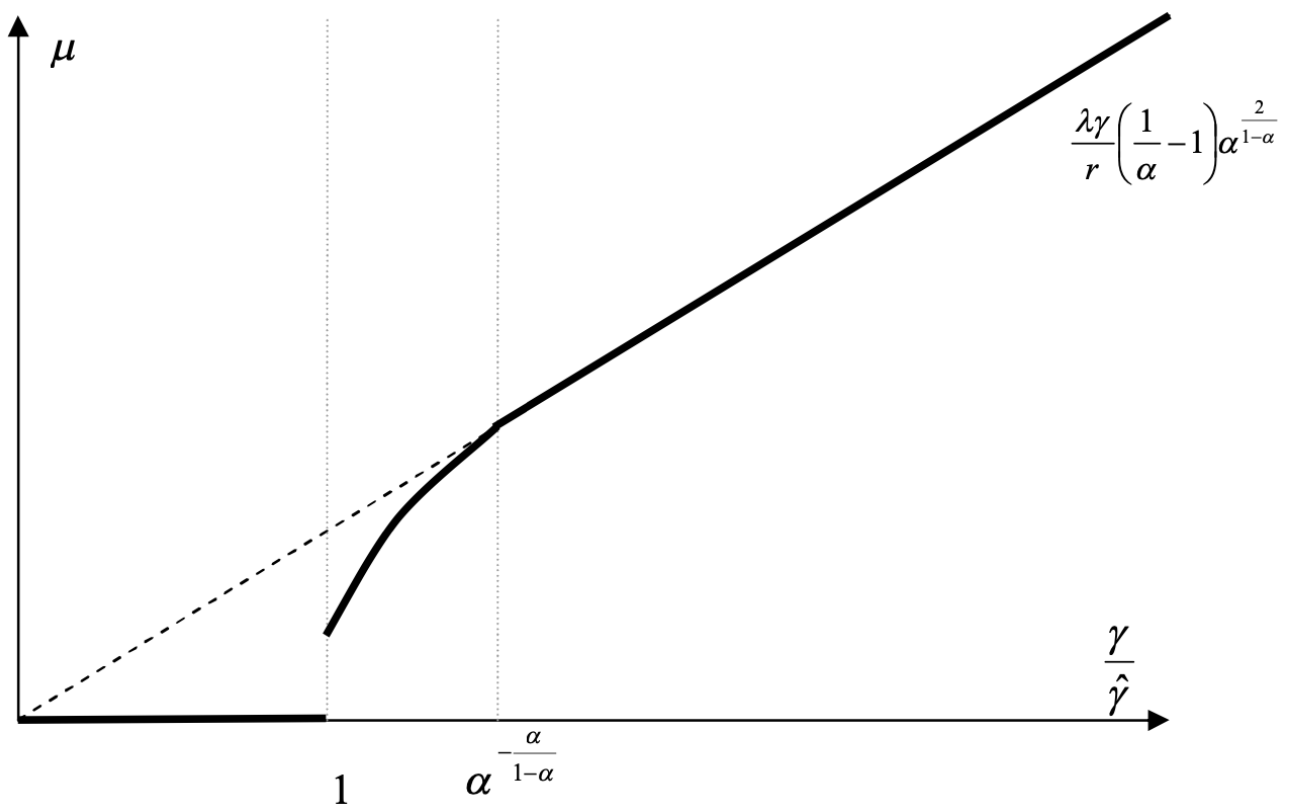


Рисунок 1.7 – Приклад функції Беллмана (value function) при $\gamma > \hat{\gamma}$ та при сталому значенні $\hat{\gamma}$

1.12 Висновки до розділу 1

У першому розділі ми розглянули загальну теорію щодо економічних моделей. Ввели поняття ендогенного зростання та ефекту масштабу, описали які недоліки у моделей, що не мають цього ефекту. Розглянули основні особливості економічних моделей та як вони враховують ті чи інші макроекономічні показники. Ввели поняття траєкторії збалансованого зростання, та розглянули 3 випадки, а саме:

- траєкторії не існує
- темп зростання не залежить від кількості ресурсів
- темп зростання залежить від кількості ресурсів

Описали структуру економіки, для якої частіш за все використовують економічні моделі.

А також розглянули залежність функції прибутку від технологій. Визначили, що без технологічного прогресу розвиток економіки в певний момент часу стає просто неможливим.

РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЬ РОСТУ СОЛОУ

Економічне зростання та розвиток являються процесами динамічними, і тому для їх вивчення потрібні динамічні моделі. Не зважаючи на свою простоту, модель Солоу являється динамічною моделлю загальної рівноваги.

Побудувати модель Солоу можна як в дискретному, так і в неперервному часі. Ми будемо розглядати модель лише в дискретному часі, оскільки вона простіша та може використовуватися в багатьох макроекономічних процесах.

2.1 Структура економіки в базовій моделі Солоу

Розглянемо закриту економіку з одним кінцевим товаром. Періодом можна вважати будь який цілий відрізок часу, в даному випадку це не так важливо. Нехай економіка має велику кількість споживачів. Модель Солоу припускає, що всі споживачі в економіці ідентичні. Отже, попит на продукцію та пропозицію щодо праці можна розглядати відносно лише одного господарства (споживача).

Модель не потребує великої кількості інформації про господарства. Ми не будемо використовувати для них функцію корисності. Замість цього ми припустимо, що господарства зберігають екзогенно певну фіксовану долю свого прибутку $s \in (0, 1)$ незалежно від подій, що відбуваються в економіці.

Іншою важливою частиною економіки являються фірми, що виробляють кінцевий товар. В реальному житті вони, звичайно, відрізняються одна від одної, як і споживачі, але ми вважатимемо, що всі вони мають доступ до однакової технології виробництва кінцевого продукту, це дасть нам змогу спростити модель.

Зобразимо виробничу функцію єдиного кінцевого товару (2.1):

$$Y(t) = F(K(t), L(t), A(t)), \quad (2.1)$$

де $Y(t)$ – загальна кількість виробленого товару за період t , $K(t)$ – кількість капіталу, $L(t)$ – загальна зайнятість, $A(t)$ – рівень технологій в момент t . Зайнятість можна розраховувати по різному, наприклад як загальну кількість людино-годин праці, або як загальну кількість робітників. Загальну кількість устаткування та потужностей, що використовуються у виробництві, будемо вважати капіталом. Задля спрощення ми також будемо вважати, що весь капітал в економіці однорідний.

Технології не можна виміряти наявними одиницями, тому технології $A(t)$ будуть для нас змінною, що зміщує виробничу функцію (2.1).

Важливим припущенням моделі росту Солоу являється те, що технології вважаються безкоштовними. Вони вважаються суспільним благом, яке доступне кожному. Тобто після того, як технологія з'явилась у певної компанії – вона може абсолютно безперешкодно з'явитися в усіх інших. Наслідком такого припущення являється можливість використання $A(t)$ всіма фірмами безкоштовно.

Припущення 1 (щодо неперервності, диференційованості, позитивного та регресного граничного продукту та сталості віддачі від масштабу). Виробнича функція $F: R_+^3 \rightarrow R_+$ являється двічі диференційованою за K і L , та задовольняє наступним умовам:

$$F'_K(K, L, A) \equiv \frac{\partial F(K, L, A)}{\partial K} > 0, F'_L(K, L, A) \equiv \frac{\partial F(K, L, A)}{\partial L} > 0,$$

$$F''_K(K, L, A) \equiv \frac{\partial^2 F(K, L, A)}{\partial K^2} < 0, F''_L(K, L, A) \equiv \frac{\partial^2 F(K, L, A)}{\partial L^2} < 0.$$

Також функція F має властивість постійної віддачі від масштабу за змінними K і L , якщо вона являється лінійно однорідною за цими змінними:

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Функція $g: \mathbb{R}^{k+2} \rightarrow \mathbb{R}$ називається однорідною степені m по $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ якщо

$$g(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^m g(x, y, z) \text{ для всіх } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ та } z \in \mathbb{R}^k.$$

З припущення щодо лінійної однорідності також витікає властивість нестрогої увігнутості.

Постійна залежність віддачі від масштабу являється ще одним важливим припущенням. Будемо вважати, що функція F має властивість постійної залежності віддачі від масштабу за змінники K та L , якщо вона є лінійно однорідною за цими змінними:

Нехай $K \in \mathbb{N}$. Функція $g: \mathbb{R}^{K+2} \rightarrow \mathbb{R}$ називається лінійно однорідною степені m по $x \in \mathbb{R}$, та $y \in \mathbb{R}$ якщо

$$g(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^m g(x, y, z) \text{ для всіх } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ та } z \in \mathbb{R}^K.$$

Теорема Ейлера. Нехай функція $g: \mathbb{R}^{K+2} \rightarrow \mathbb{R}$ диференційована по $x \in \mathbb{R}$, та $y \in \mathbb{R}$ та являється однорідною степені m по $x \in \mathbb{R}$, та $y \in \mathbb{R}$.

Позначимо часткові похідні g як g_x та g_y . Тоді

$$mg(x, y, z) = g_x(x, y, z)x + g_y(x, y, z)y$$

для всіх $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^K$.

Більш того, $g_x(x, y, z)$ та $g_y(x, y, z)$ також являються однорідними степені $m - 1$ по $x \in \mathbb{R}$, та $y \in \mathbb{R}$.

Перш ніж приступити до опису торгівлі на конкурентному ринку, треба визначити права власності на всі запаси в економіці. Оскільки припущення щодо конкуренції має сенс лише в тому випадку, коли в економіці присутня приватна власність що розповсюджується на активи та засоби виробництва, можемо

припустити, що фактори виробництва належать господарствам. Припустимо, що господарства володіють всіма трудовими ресурсами, а їх пропозиція абсолютно нееластична. Тобто запаси праці в економіці $\bar{L}(t)$, що наприклад дорівнюють населенню країни, і всі вони будуть використані, незалежно від їх орендної вартості, якщо вона невід’ємна.

Рівновагу на ринку праці можна описати у вигляді рівняння (2.2):

$$L(t) = \bar{L}(t) \quad (2.2)$$

для всіх t , де $L(t)$ відображає попит на працю (та одночасно кількість зайнятих в економіці). Також до рівняння (2.2) варто додати умову нежорсткості (2.3):

$$L(t) \leq \bar{L}(t), w(t) \geq 0 \text{ і } (L(t) - \bar{L}(t))w(t) = 0, \quad (2.3)$$

де $w(t)$ – орендна вартість праці або заробітна платня в момент часу t .

Умова нежорсткості гарантує, що під час рівноваги на ринку праці заробітна платня не буде від’ємною. Якщо ж попиту на працю буде недостатньо, зайнятість може стати меншою ніж $\bar{L}(t)$, при нульовій платні. Проте в нашому випадку краще використовувати простіше формулювання рівноваги на ринку праці та позначити попит та пропозицію праці в момент t змінною $L(t)$.

Також господарства мають в своєму розпорядженні капітал та здають його в оренду фірмам. Орендну вартість капіталу позначимо змінною $R(t)$. Умова рівноваги на ринку капіталу виглядатиме так:

$$K(t) = \bar{K}(t),$$

де $\bar{K}(t)$ – пропозиція капіталу господарствами, а $K(t)$ – попит на нього з боку фірм.

Тепер розглянемо амортизацію капіталу. Будемо вважати, що машини, які використовуються в виробництві, схильні зношуватись, і тому втрачають

частину своєї вартості. Припустимо, що амортизація відбувається експоненційно, це значно полегшить нам побудову моделі. Вважатимемо, що капітал вибуває експоненційно з темпом $\delta \in (0, 1)$, тобто від одиниці капіталу в даний період залишається лише $1 - \delta$ в наступний. Хоча ми розглядаємо амортизацію як процес зношування обладнання, в більш складних моделях її розглядають як процес заміни старого обладнання на нове.

Втрата частини капіталу в результаті амортизації впливає на відсоткову ставку (прибутковість заощаджень), яка доступна господарствам. Із припущення щодо експоненційного характеру амортизації та нормалізації ціни кінцевого товару одиницею витікає, що відсоткова ставка, яка доступна господарствам, дорівнює

$$r(t) = R(t) - \delta,$$

де $R(t)$ – орендна вартість капіталу в період t . Кінцевий товару може бути використаний для споживання в даний момент часу або відданий як капітал в оренду фірмам. В останньому випадку господарство отримує прибуток $R(t)$ на свої заощадження в розмірі орендної вартості капіталу в момент t , але втрачає δ одиниць капіталу, оскільки його частина δ зношується протягом періоду. Таким чином, господарство відмовилось від одиниці споживання кінцевого товару в періоді $t - 1$ і отримало $1 + r(t) = R(t) + 1 - \delta$ одиниць кінцевого товару в періоді t , тобто $r(t) = R(t) - \delta$. Ця залежність між змінними $r(t)$ та $R(t)$ пояснює вибір позначень для відсоткової ставки та орендної вартості капіталу.

При заданих раніше значеннях технології $A(t)$ та цін факторів виробництва $R(t)$ та $w(t)$ задача максимізації прибутку репрезентативною фірмою в момент часу t може бути представлена в наступному статичному вигляді (2.4):

$$\max_{K \geq 0, L \geq 0} F(K, L, A(t)) - R(t)K - w(t)L. \quad (2.4)$$

У випадку, коли присутні незворотні інвестиції або зміни кількості капіталу задача оптимізації для фірми стає динамічною. Проте при їх відсутності максимізація прибутку фірмою в кожен момент часу t еквівалентна максимізації чистої поточної вартості сукупного прибутку фірми.

Відзначимо ряд додаткових деталей, пов'язаних з задачею максимізації прибутку:

- задача максимізації поставлена в термінах агрегованих змінних, однак це не обмежує загальності аналізу, враховуючи припущення щодо наявності репрезентативної фірми;
- перед доданком F в (2.4) немає коефіцієнту. Це пов'язано з нормалізацією ціни кінцевого товару. Більш того, перший доданок – це дохід репрезентативної фірми (або всіх фірм в економіці);
- спосіб постановки задачі передбачає конкурентну пропозицію на ринку, оскільки фірми розглядають орендну вартість праці та капіталу ($w(t)$ та $R(t)$) як задані;
- через те, що функція F увігнута, вся задача також являється увігнутою.

В силу припущення щодо постійної залежності віддачі від масштабу, задача максимізації не має єдиного розв'язку (максимальний прибуток може дорівнювати нескінченності, тоді розв'язок задачі відсутній, або $K = L = 0$, або максимум, що дорівнює 0, досягається на нескінченній кількості пар (K, L)). Такий висновок пов'язаний з тим, що при постійній залежності віддачі від масштабу оптимальний розмір фірм не визначений. Щоб обрати єдиний розв'язок необхідна додаткова умова, що ринки факторів виробництва повинні перебувати в стані рівноваги. Іншими словами, в будь-який момент часу попит на працю та капітал повинен дорівнювати їх пропозиції. З цього маємо, що репрезентативна фірма отримує нульовий прибуток, а інакше її попит на працю та капітал був би нескінченно великим та обігнав би пропозицію, яка обмежена скінченною величиною. Також з припущення витікає, що сукупний попит на працю L та капітал K повинні дорівнювати наявній пропозиції праці $L(t)$ та капіталу $K(t)$. Інакше, у випадку $L < L(t)$, в економіці була б присутня

надлишкова пропозиція праці, що призведе до того, що заробітна плата стане нульовою. Проте це не узгоджується з максимізацією прибутку, оскільки тоді фірма бажала би наймати необмежену кількість працівників, що перевершило би пропозицію. З цього аргументу та припущення щодо диференційованості F також випливає, що при заданій пропозиції праці $L(t)$ та капіталу $K(t)$ в момент часу t ціна факторів виробництва (2.5), (2.6) повинна задовольняти стандартним умовам та дорівнювати відповідному граничному продукту:

$$w(t) = F_L(K(t), L(t), A(t)), \quad (2.5)$$

$$R(t) = F_K(K(t), L(t), A(t)). \quad (2.6)$$

З теореми Ейлера випливає, що при таких цінах на фактори виробництва прибуток фірми дорівнює нулю.

Нехай припущення 1 виконано. Тоді на траєкторії рівноваги моделі росту Солоу фірми мають нульовий прибуток, а також:

$$Y(t) = w(t)L(t) + R(t)K(t).$$

На додачу до стандартних припущень щодо вигляду виробничої функції, часто припускається, що наступні граничні умови (умови Інади) являються виконаними при аналізі макроекономічної рівноваги в молах росту.

Припущення 2 (умови Інади).

Функція F задовольняє умовам Інади, якщо

$$\lim_{K \rightarrow 0} F_K(K, L, A) = \infty$$

та

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F_K(K, L, A) = 0$$

для всіх $K > 0$ і для всіх A ,

$$\lim_{L \rightarrow 0} F_L(K, L, A) = \infty$$

та

$$\lim_{L \rightarrow \infty} F_L(K, L, A) = 0$$

для всіх $K > 0$ і для всіх A .

Більш того, $F(0, L, A) = 0$ для всіх L та A .

З цих умов випливає, що спочатку праця та капітал являються дуже високопродуктивними, а їх граничний продукт прямує до нуля, коли їх кількість стає надлишковою. Умова $F(0, L, A) = 0$ для всіх L та A робить капітал необхідним фактором виробництва.

Рис 2.1 показує графіки функції $F(K, L, A)$ як функції від кількості капіталу K при заданих L та A у двох випадках: (А) умови Інади виконані, а (В) – ні.

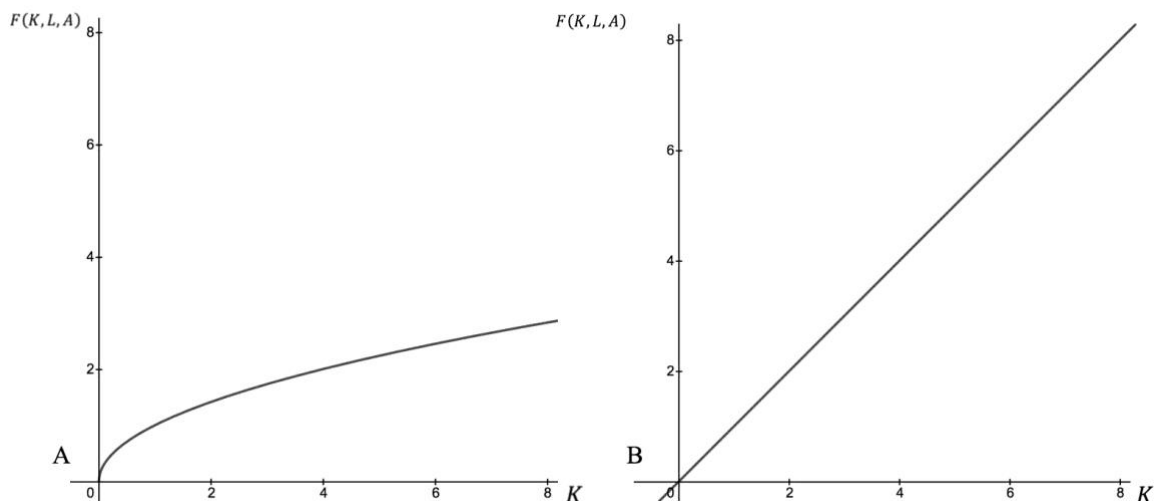


Рисунок 2.1 – Виробнича функція. (А) задовольняє умовам Інади в припущенні 2, а (В) – ні

2.2 Модель Солоу в дискретному часі

Зношення капіталу K являється експоненційним, з чого випливає, що зміну кількості капіталу можна описати рівнянням (2.7):

$$K(t + 1) = (1 - \delta)K(t) + I(t), \quad (2.7)$$

де змінна $I(t)$ позначає інвестиції в періоді t .

Тотожності системи національних рахунків в закритій економіці гарантує, що весь вироблений продукт використовується для споживання, або для інвестицій (2.8), тобто

$$Y(t) = C(t) + I(t), \quad (2.8)$$

де змінна $C(t)$ позначає споживання в періоді t . Із рівнянь (2.1), (2.7) та (2.8) випливає, що будь-яке доступне динамічне розподілення ресурсів має задовольняти наступній умові:

$$K(t + 1) \leq F(K(t), L(t), A(t)) + (1 - \delta)K(t) - C(t)$$

при $t = 0, 1, \dots$ Нашою задачею є пошук рівноважного динамічного розподілу ресурсів в множині всіх можливих розподілів. В даному випадку правило поведінки споживачів, які зберігають певну фіксовану частину свого прибутку, значно полегшує структуру рівноваги. З цього маємо, що всі оцінки та порівняння рівня добробуту агентів, які базуються на моделі Солоу, варто розглядати з певною долею скептицизму, так як ми не знаємо напевне які насправді вподобання у наших господарств.

Оскільки ми розглядаємо закриту економіку (в якій державні витрати відсутні), сукупні інвестиції в якій дорівнюють заощадженням:

$$S(t) = I(t) = Y(t) - C(t).$$

Припущення щодо того, що господарства зберігають постійну долю прибутку $s \in (0, 1)$ можна записати у вигляді рівняння (2.9):

$$S(t) = sY(t), \quad (2.9)$$

з чого, в свою чергу, витікає, що вони споживають долю прибутку (2.10), що залишилась $(1 - s)$, тобто

$$C(t) = (1 - s)Y(t). \quad (2.10)$$

Рівняння рівноваги на ринку капіталу (2.9) означає, що кількість капіталу, який наявний в економіці в результаті дій споживачів, в момент часу $t + 1$ можна виразити як

$$K(t + 1) = (1 - \delta)K(t) + S(t) = (1 - \delta)K(t) + sY(t).$$

Прирівнюючи попит та пропозицію на ринку капіталу та використовуючи рівняння (2.1) та (2.7), ми отримуємо фундаментальний закон накопичення капіталу в моделі Солоу (2.11):

$$K(t + 1) = sF(K(t), L(t), A(t)) + (1 - \delta)K(t). \quad (2.11)$$

Це нелінійне різницеве рівняння. Рівновага в моделі Солоу описується рівнянням (2.11) та рівняннями, що описують динаміку змінних $L(t)$ та $A(t)$.

Модель Солоу знаходиться десь між моделями кейнсіанського типу та сучасними динамічними макроекономічними моделями. В ній рішення господарств щодо споживання та накопичення не являються наслідками

оптимізації. Рівняння (2.9) та (2.10) являються припущеннями щодо поведінки господарств. Не зважаючи на це, ми моделюємо, що фірми бажають максимізувати свій прибуток та припускаємо, що ринки факторів виробництва знаходяться в рівновазі. Завдяки цьому ми можемо визначити поняття рівноваги звичним для сучасних динамічних макроекономічних моделей способом.

Зафіксуємо послідовності $\{L(t), A(t)\}_{t=0}^{\infty}$ та початкове значення капіталу $K(0)$. Рівноважною траєкторією називають набір послідовностей $\{K(t), Y(t), C(t), w(t), R(t)\}_{t=0}^{\infty}$, таких, що $K(t)$ задовольняє умову (2.11), $Y(t)$ задається рівнянням (2.1), $C(t)$ задається рівнянням (2.11), а $w(t)$ та $R(t)$ задовольняють рівнянням (2.5) та (2.6).

Варто відзначити найважливішу частину визначення. Рівновага визначається як динамічна траєкторія розподілу ресурсів. Економічна рівновага не є статичною, вона описує поведінку агентів протягом всього часу існування. Також відзначимо, що визначення включає в себе умови рівноваги на ринках факторів виробництва (2.5) та (2.6). Такий підхід є стандартним в макроекономічних моделях та моделях економічного росту.

Почнемо описання рівноваги з наступних припущень:

- населення в економіці не змінюється. $L(t) = L, L > 0$;
- технологічний прогрес відсутній. $A(t) = A$.

Введемо поняття відношення капіталу до праці (капіталоозброєності) в економіці (2.12):

$$k(t) = \frac{K(t)}{L}. \quad (2.12)$$

З припущення щодо постійної віддачі від масштабу випливає, що випуск (прибуток) на душу населення $y(t) \equiv Y(t)/L$ може бути представленим у вигляді рівняння (2.13):

$$y(t) = K\left(\frac{K(t)}{L}, 1, A\right) \equiv f(k(t)). \quad (2.13)$$

Інакше кажучи, при постійній віддачі від масштабу прибутку на душу населення є функцією від капіталоозброєності економіки.

Ми можемо взяти виробничу функцію і, поділив обидві частини рівняння (2.11) на L , отримаємо різницеве рівняння моделі Солоу (2.14). Воно описує динаміку капіталоозброєності економіки $k(t)$:

$$k(t + 1) = sf(k(t)) - (1 - \delta)k(t). \quad (2.14)$$

Введемо визначення що таке стаціонарна рівновага в моделі Солоу.

Стаціонарною рівновагою моделі, в якій відсутній ріст населення та технологічний прогрес, називають рівноважну траєкторію, на якій $k(t) = k^*$ для всіх t .

В існуванні стаціонарного розв'язку можна впевнитися графічно. Для цього необхідно представити динаміку рівноважного різницевого рівняння (2.14) на графіку. Такий спосіб представлено на рис. 2.2. Суцільна лінія зображує праву частину рівняння (2.14), а пунктирна є бісектрисою і пролягає під кутом 45° . Їх перетин в додатній області визначає значення капіталоозброєності економіки в стаціонарній рівновазі k^* та задовольняє умові (2.15):

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{s}. \quad (2.15)$$

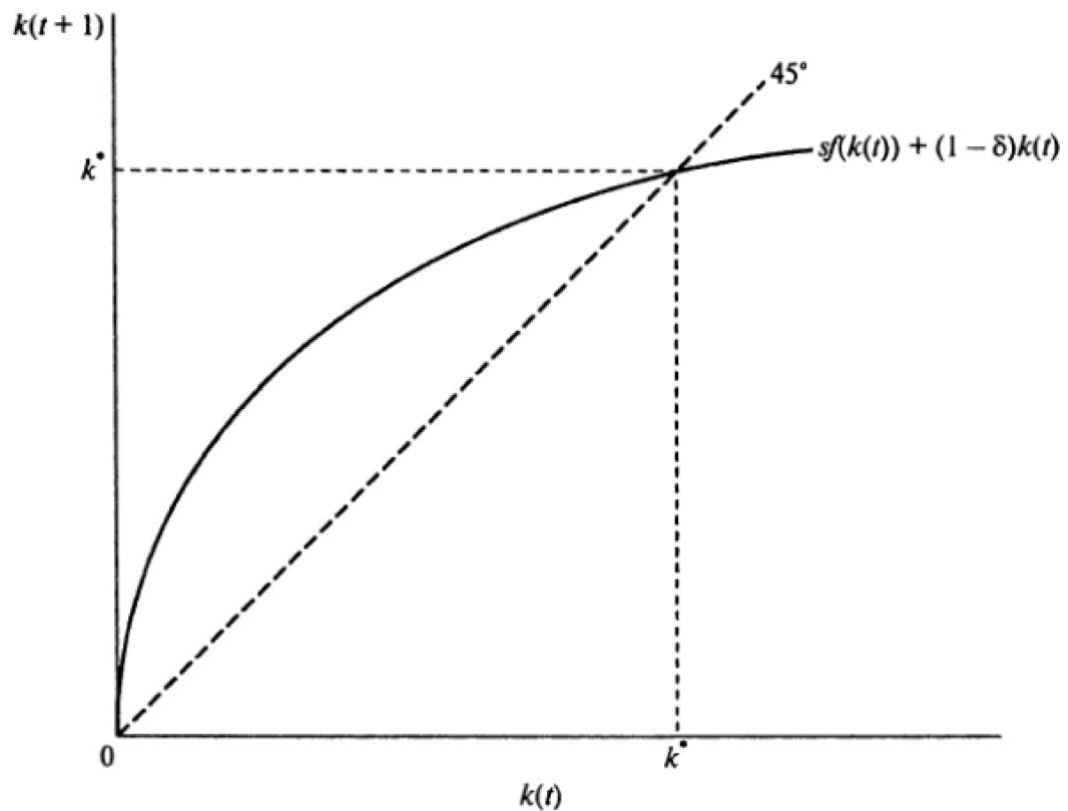


Рисунок 2.2 – Визначення капіталоозброєності в стаціонарній рівновазі в моделі без росту населення та технологічного прогресу

Також на рис. 2.2 можна помітити ще один перетин, що знаходиться в точці $k = 0$. Його існування витікає із умов Інади, однак ми його розглядати не будемо.

Розглянемо базову модель Солоу в припущеннях 1 та 2. Тоді вона має єдину стаціонарну рівновагу, в якій капіталоозброєність $k^* \in (0, \infty)$ задовольняє умові (2.15), в такому випадку випуск на душу населення матиме вигляд (2.16):

$$y^* = f(k^*), \quad (2.16)$$

а споживання на душу населення можна буде описати рівнянням (2.17):

$$c^* = (1 - s)f(k^*). \quad (2.17)$$

Структура моделі Солоу, що розглядається, є досить обмеженою. Модель має невелику кількість параметрів та абстрагується від багатьох особливостей реального світу. Однак основною задачею для нас є знаходження зв'язку між відмінностями значень певних параметрів в різних країнах та відмінностями темпів їх розвитку.

Розглянемо виробничу функцію й припустимо, що вона задана наступним чином:

$$f(k) = A\tilde{f}(k),$$

де $A > 0$. Ми можемо розглядати змінну A як множник, що впливає на продуктивність факторів. Чим більше значення, тим більша продуктивність. Для нас це зручний спосіб параметризації відмінностей в продуктивності факторів різних країн. Оскільки ми припускаємо, що функція $f(k)$ задовольняє умовам гладкості, то функція $\tilde{f}(k)$ – також.

Нехай припущення 1 та 2 виконуються, а $f(k) = A\tilde{f}(k)$. Позначимо значення капіталоозброєності та випуску в стаціонарній рівновазі $k^*(A, s, \delta)$ та $y^*(A, s, \delta)$ відповідно, де A, s та δ – параметри моделі. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial k^*(A, s, \delta)}{\partial A} &> 0, \frac{\partial k^*(A, s, \delta)}{\partial s} > 0 \text{ та } \frac{\partial k^*(A, s, \delta)}{\partial \delta} < 0, \\ \frac{\partial y^*(A, s, \delta)}{\partial A} &> 0, \frac{\partial y^*(A, s, \delta)}{\partial s} > 0 \text{ та } \frac{\partial y^*(A, s, \delta)}{\partial \delta} < 0. \end{aligned}$$

З цього випливає, що країни, у яких норма накопичення вища, а технологія краща, матимуть більш високу капіталоозброєність і через це будуть заможнішими. Країни з більшою амортизацією матимуть менше відношення капіталу до праці і будуть біднішими. Ці результати досить інтуїтивні та дають нам перший погляд на можливі фактори, які визначають значення капіталоозброєності економіки та рівня прибутку в ній.

2.3 Перехідна динаміка в моделі Солоу в дискретному часі

Поведінка системи в економіці поза стаціонарною точкою підпорядковується закону рівності попиту та пропозиції та являється наслідком оптимізаційної поведінки фірм та господарств. Більшість реальних економік проводять більшу частину часу саме поза станом стаціонарної рівноваги. Тому нам цікава вся рівноважна траєкторія розвитку економіки, а не лише її стаціонарний стан.

Щоб визначити, як виглядає рівноважна траєкторія простої економіки, яку ми вивчаємо, необхідно дослідити перехідну динаміку рівноважного різницевого рівняння (2.14), починаючи з будь-якого значення капіталоозброєності економіки в початковий момент часу $k(0) > 0$. Особливо нас цікавить чи буде економіка сходитись до стаціонарної рівноваги, починаючи з довільного значення відношення капіталу до праці, та яка буде її динаміка на траєкторії збіжності. Необхідно визначити, чи буде рівняння (2.14) приводити економіку до єдиної стаціонарної рівноваги незалежно від початкової умови відношення капіталу до праці.

Розглянемо нелінійну систему автономних різницевих рівнянь (2.18):

$$x(t+1) = G(x(t)), \quad (2.18)$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$ і $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{R}$. Назвемо x^* нерухомою точкою відображення $G(\cdot)$, якщо

$$x^* = G(x^*).$$

Ми також називатимемо x^* стаціонарною точкою різницевого рівняння (2.18).

Стаціонарна точка різницевого рівняння (2.18) x^* називається локально асимптотично стійкою, якщо існує відкрита множина $B(x^*)$, яка містить x^* такий, що для будь-якого розв'язку рівняння (2.18) $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ з $x(0) \in B(x^*)$ впливає $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$. Точка x^* називається глобально асимптотично стійкою, якщо $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$ для будь-якого розв'язку рівняння (2.18) $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ при будь-якому $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Розглянемо систему лінійних різницевих рівнянь (2.19):

$$x(t+1) = Ax(t) + b, \quad (2.19)$$

з початковою умовою $x(0)$, де $x(t) \in \mathbb{R}^n$ для будь-якого t , A – матриця $n \times n$, b – вектор $n \times 1$. Нехай x^* – стаціонарна точка системи різницевих рівнянь (2.19), тобто $x^* = Ax^* + b$. Нехай всі власні значення матриці A лежать строго всередині одиничного кола комплексної площини. В такому випадку стаціонарна точка системи рівнянь (2.19) x^* являється глобально асимптотично стійкою, тобто для будь-якого $x(0) \in \mathbb{R}^n$ єдиний розв'язок $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ задовольняє властивості $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$.

Розглянемо систему різницевих рівнянь (2.18). Нехай x^* – стаціонарна точка системи. Припустимо, що оператор G диференційований по x . Визначимо матрицю

$$A \equiv DG(x^*),$$

де DG – матриця часткових похідних (якобіан) відображення G .

Припустимо, що всі власні значення матриці A лежать на комплексній площині строго всередині одиничного кола. Тоді стаціонарна точка системи різницевих рівнянь (2.18) x^* є локально асимптотично стійкою, тобто існує відкритий окіл точки x^* , $B(x^*) \subset \mathbb{R}^n$ така, що для будь-якого розв'язку системи (2.18), задовольняючого умові $x(0) \in B(x^*)$, $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$.

З цього маємо наступні наслідки:

Нехай $x(t), a, b \in \mathbb{R}$. Якщо $|a| < 1$, то єдиний стаціонарний розв'язок лінійного різницевого рівняння $x(t+1) = ax(t) + b$ є глобально асимптотично стійким, тобто $x(t) \rightarrow x^* = \frac{b}{1-a}$ при $t \rightarrow \infty$.

Нехай $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, диференційована в околі стаціонарної точки x^* , де $g(x^*) = x^*$. Припустимо, що $|g'(x^*)| < 1$. Тоді стаціонарний розв'язок нелінійного різницевого рівняння $x(t+1) = g(x(t))$ є локально асимптотично стійким. Більш того, якщо функція g є неперервно диференційованою на всій числовій прямій $\mathbb{R}$ та $|g'(x)| < 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то стаціонарний розв'язок x^* є глобально асимптотично стійким.

Тепер ми можемо застосувати перший наслідок до рівноважного різницевого рівняння моделі Солоу (2.14) та переконатися в локальній стійкості стаціонарної рівноваги. Глобальна рівновага з наслідку не випливає.

Нехай припущення 1 та 2 виконані. Тоді стаціонарна рівновага моделі росту Солоу, що описана рівнянням (2.14), є глобально асимптотично стійкою і капіталоозброєність економіки $k(t)$ монотонно збігається до k^* при будь-яких початкових умовах $k(0) > 0$.

Нехай припущення 1 та 2 виконані, і $k(0) < k^*$. Тоді рівноважна траєкторія заробітної платні $\{w(t)\}_{t=0}^{\infty}$ є зростаючою послідовністю, а рівноважна траєкторія орендної вартості капіталу $\{R(t)\}_{t=0}^{\infty}$ є спадною послідовністю. Якщо $k(0) > k^*$ все навпаки, заробітна платня є спадною послідовністю, а орендна вартість капіталу – зростаючою.

Отже, можна побачити, що у випадку, коли кількість капіталу в економіці в початковий момент часу мала по відношенню до пропозиції праці, то відношення капіталу до праці буде зростати. Тому як наслідок спадаючої віддачі від капіталу його граничний продукт буде скорочуватися, а заробітна платня зростати. Аналогічно, якщо економіка стартує із занадто великою кількістю капіталу на душу населення, то вона буде скорочуватись і в процесі розвитку заробітна платня буде спадати, а орендна вартість капіталу зростати.

Аналіз моделі Солоу показує, що вона має ряд корисних властивостей: єдиність стаціонарної рівноваги, глобальна асимптотична стійкість, а також проста та зрозуміла порівняльна статика моделі. Однак в розглянутій версії моделі наразі відсутній ріст економіки. В стаціонарній рівновазі капіталоозброєність економіки незмінна, розширення капіталу не відбувається і тому дохід на душу населення також є сталим. Отже, економічний розвиток в базовій моделі Солоу, без технологічного прогресу, можливий лише тоді, коли $k(0) < k^*$, проте він не є стійким, з часом він сповільнюється та економіка перестає рости.

2.4 Модель Солоу з технологічним прогресом

Поки що ми розглядали модель Солоу без технічного прогресу. Для відображення змін в технологічних можливостях економіки ми будемо використовувати змінну $A(t)$, її ріст буде відображати розвиток технологій та накопичення знань в економіці. Годі й сумніватися у тому, що нині суспільство виробляє набагато більше товарів та послуг, ніж у минулому, більш того, воно робить це значно ефективніше. За останній час доступні нам виробничі технології значно покращилися. Тому буде цілком логічно ввести в модель можливість технологічного прогресу.

Головне питання, полягає в тому, яким чином буде виглядати вплив зміни $A(t)$ на агреговану виробничу функцію. Стандартний підхід полягає в тому, щоб накласти обмеження на тип технологічного прогресу так, щоб рівновага розподілу ресурсів була узгодженою з траєкторією збалансованого росту, як вона визначається фактами Калдора. Він помітив, що не зважаючи на збільшення випуску на душу населення в багатьох країнах світу, інші показники: капіталоозброєність, норма процента та розподіл прибутку між працею та

капіталом, залишаються незмінними. Наприклад, на рис. 2.3 зображена динаміка часток прибутку капіталу та праці в національному прибутку в США.

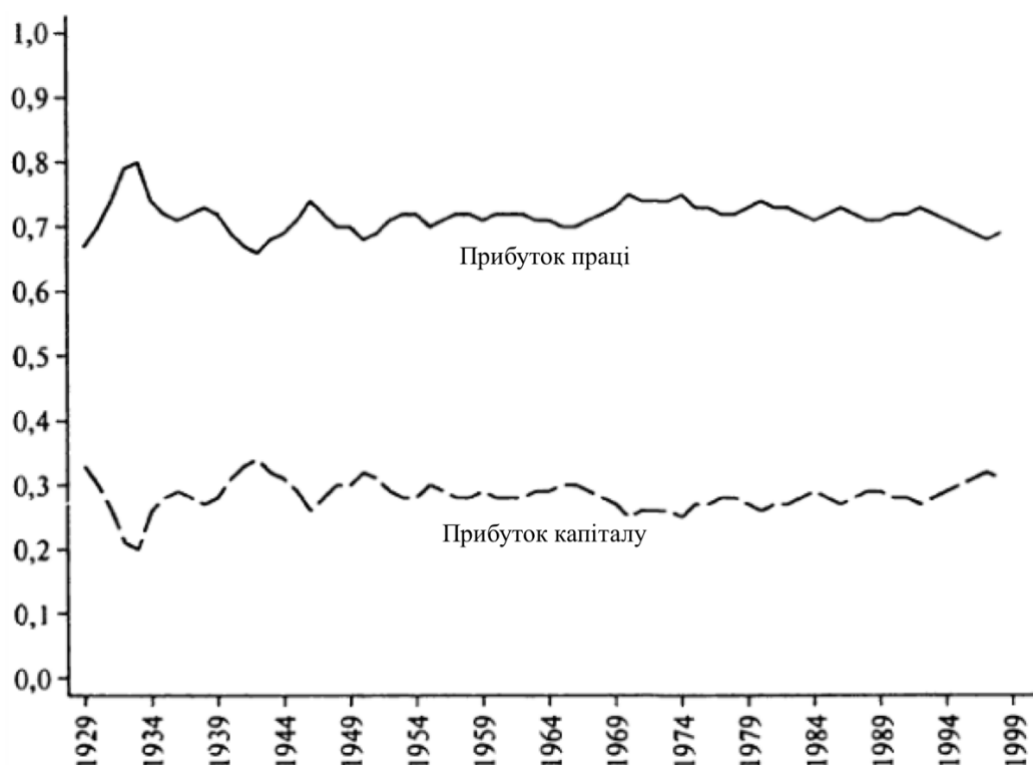


Рисунок 2.3 – Частки прибутку капіталу та праці в ВВП США

Рисунок 2.3 показує, що, не зважаючи на значні коливання, динаміка часток не має вираженого тренду. Більш того, емпіричні свідчення кажуть про відсутність вираженого тренду в динаміці норми процентів на довгостроковому проміжку часу.

Також з рис. 2.3 можна помітити, що частка прибутку капіталу в національному прибутку складає близько $1/3$, а доля трудових прибутків – близько $2/3$. Ці оцінки ігнорують частку прибутків землевласників, оскільки в сучасній економіці земля не являється важливим фактором виробництва. Це, разом з бажанням багатьох економістів працювати з простими моделями, призвело до вибору виробничої функції Кобба-Дугласа у вигляді $AK^{1/3}L^{2/3}$ як стандарту багатьох макроекономічних моделей.

Також динаміку моделей з траєкторією збалансованого росту значно легше аналізувати, в порівнянні з моделями, у яких така траєкторія відсутня. Ця простота є наслідком того, що при наявності такої траєкторії, рівняння, що визначає динаміку моделі, при трансформації змінних стає диференціальним або різницеvim рівнянням з добре визначеною стаціонарною точкою. Це дає нам змогу використовувати для аналізу моделей економічного росту методи аналізу автономних систем. Однак варто пам'ятати, що в реальності економічний ріст світової економіки має ряд характеристик, що не притаманні збалансованій траєкторії. Наприклад, частка різних секторів економіки постійно змінюється в процесі росту: частка сільського господарства зменшується, частка промисловості спочатку збільшується, а потім також скорочується, тощо.

Загальний вигляд виробничої функції $F(K(t), L(t), A(t))$ виявляється занадто «широким» для досягнення збалансованої траєкторії і лише декілька спеціальних видів виробничої функції узгоджуються зі збалансованим ростом економіки в рівновазі. Щоб переконатися в цьому, візьмемо виробничу функцію $\tilde{F}$ та розглянемо кілька типів нейтрального технологічного прогресу. Одним з варіантів являється наступний:

$$\tilde{F}(K(t), L(t), A(t)) = A(t)F(K(t), L(t))$$

з деякою функцією F з постійною віддачею від масштабу. Ця функціональна форма припускає, що технологічна змінна A є мультиплікативним множником перед деякою квазівиробничою функцією F . Такий тип технологічного прогресу називають нейтральним по Хіксу. Він зображений на рис. 2.4, на якому зображені ізокванти функції $\tilde{F}(K(t), L(t), A(t))$, тобто пари значень праці та капіталу, що відповідають заданому значенню випуску при фіксованому значенні змінної $A(t)$.

Іншою альтернативою є нейтральний по Солоу, або капіталоінтенсивний, технологічний прогрес, зображений на рис. 2.4. Функціонально його можна представити як

$$\tilde{F}(K(t), L(t), A(t)) = F(A(t)K(t), L(t)).$$

Капіталоінтенсивним його називають через те, що в цьому випадку технологічний прогрес еквівалентний збільшенню капіталу в економіці.

Останнім випадком є технологічний прогрес нейтральний по Харроду, рис. 2.4. Він має таке функціональне представлення:

$$\tilde{F}(K(t), L(t), A(t)) = F[K(t), A(t)L(t)].$$

Тут збільшення технологічної змінної $A(t)$ збільшує випуск в економіці.

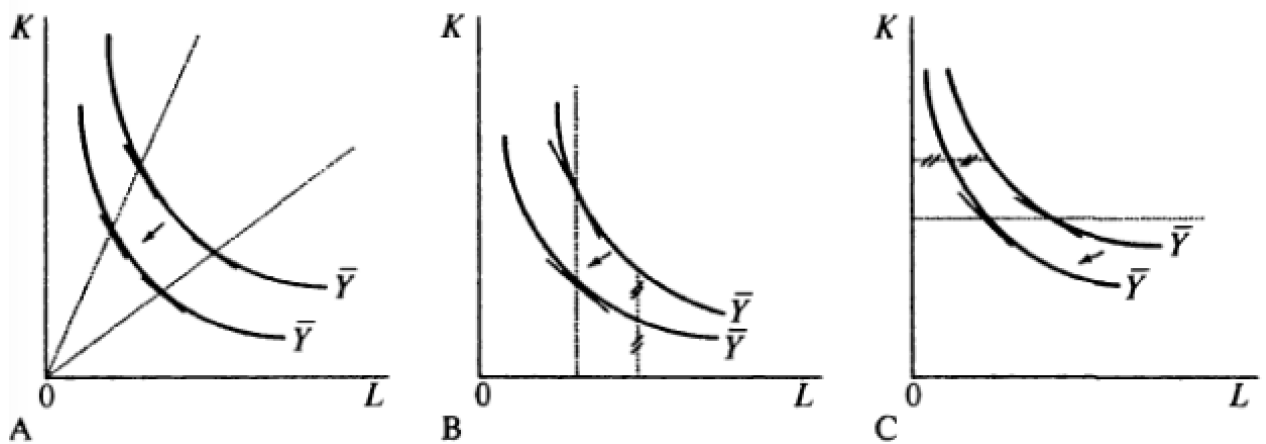


Рисунок 2.4 – Технологічний прогрес (А) нейтральний по Хіксі, (В) нейтральний по Солоу, (С) нейтральний по Харроду

В житті, звичайно, технологічні зміни можуть бути комбінацією описаних нами типів технологічного прогресу.

Не зважаючи на те, що всі типи технологічного прогресу виглядають однаково прийнятними для опису реальної економіки, лише прогрес по Харроду узгоджується з наявністю траєкторії збалансованого росту.

Долі капіталу та праці в національному прибутку задаються наступним чином:

$$\alpha_K(t) \equiv \frac{R(t)K(t)}{Y(t)} \text{ та } \alpha_L(t) \equiv \frac{w(t)L(t)}{Y(t)},$$

$$\alpha_K(t) + \alpha_L(t) = 1.$$

Розглянемо теорему, яка показує, що з припущення щодо постійних темпів росту випуску, капіталу та споживання, в купі з припущенням щодо постійної віддачі від масштабу приводить до того, що агрегована виробнича функція повинна мати вигляд, що відповідає технологічному прогресу нейтральному по Харроду.

Перша теорема Узави. Розглянемо модель економічного росту з агрегованою виробничою функцією вигляду:

$$Y(t) = \tilde{F}(K(t), L(t), A(t)),$$

де функція $\tilde{F}: \mathbb{R}_+^2 \times A \rightarrow \mathbb{R}_+$, а змінна $\tilde{A}(t) \in A$ представляє технологію в момент часу t , і A – деяка довільна підмножина $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Припустимо, що функція $\tilde{F}$ має властивість постійної віддачі від масштабу по змінним K та L . Сукупне ресурсне обмеження в економіці виглядає так

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - \delta K(t).$$

Припустимо, що населення росте з постійним темпом n , тобто $L(t) = \exp(nt)L(0)$ та існує константа $T < \infty$, така, що для всіх

$$t \geq \frac{T\dot{Y}(t)}{Y(t)} = g_Y > 0, \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = g_K > 0, \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = g_C > 0.$$

Тоді

$$- \quad g_Y = g_K = g_C;$$

- для всіх $t \geq T$ однорідна степені 1 функція $F: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, така, що агрегована виробнича функція може бути представленою у вигляді:

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)),$$

де $A(t) \in \mathbb{R}_+$ і

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g = g_Y - n.$$

Наслідком теореми є те, що для всіх $t \geq T$ технологічний прогрес може бути представленим в формі нейтрального по Харроду.

Варто відзначити, що теорема не потребує щоб виробнича функція мала вигляд

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)).$$

Вона лише стверджує, що такий вигляд існує.

Розглянемо агреговану виробничу функцію Кобба-Дугласа:

$$Y(t) = (A_K(t)K(t))^\alpha (A_L(t)L(t))^{1-\alpha}.$$

На траєкторії збалансованого росту обидві технологічні змінні $A_K(t)$ та $A_L(t)$ повинні рости з однаковим темпом. Якщо ми визначимо нову змінну $A(t)$ як $A(t) = A_K(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_L(t)$, то виробнича функція може бути представлена у вигляді:

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha},$$

тож технологічний прогрес виявляється праце-інтенсивним, як того и потребує перша теорема Узави.

Проте ця теорема нічого не каже про поведінку цін факторів виробництва. В той же час факти Калдора потребують, щоб долі факторів в національному прибутку були сталими. Оскільки капітал та випуск ростуть з однаковим темпом, орендна вартість капіталу має бути сталою.

Наступна теорема показує, що якщо частки факторів виробництва в національному прибутку стали, то на траєкторії збалансованого росту часткові похідні $\tilde{F}$ та F будуть узгодженими, і навпаки.

Друга теорема Узави. Нехай всі умови першої теореми виконані. Також припустимо що наявна досконала конкуренція на ринках факторів виробництва і що орендна вартість капіталу задовольняє умові $R(t) = R^*$ для всіх $t \geq T$. Тоді для часткових похідних функцій $\tilde{F}$ та F по їх обом аргументам виконуються рівності:

$$\tilde{F}_K(K(t), L(t), \tilde{A}(t)) = F_K(K(t), A(t)L(t))$$

і

$$\tilde{F}_L(K(t), L(t), \tilde{A}(t)) = A(t)F_L(K(t), A(t)L(t)).$$

Більш того, якщо виконуються ці рівності і ринки факторів виробництва конкурентні, то $R(t) = R^*$ для всіх $t \geq T$.

З цієї теореми випливає, що будь-який розподіл ресурсів з постійними темпами росту випуску, капіталу та споживання повинен бути траєкторією збалансованого росту. Також з неї випливає, що траєкторія збалансованого росту може існувати лише коли технологічний прогрес в виробничій функції є нейтральним по Харроду.

Друга теорема показує додаткову економічну інтуїцію, що стоїть за першою теоремою. Нехай виробнича функція має спеціальний вигляд

$$F(A_K(t)K(t), A_L(t)L(t)).$$

З другої теореми випливає, що частки факторів виробництва мають бути постійними при $t \rightarrow \infty$. Тоді, беручи до уваги властивість постійної віддачі від масштабу, наявність траєкторії збалансованого росту починаючи з деякого моменту часу T можлива лише в тому випадку, коли ефективна кількість капіталу $A_K(t)K(t)$ та ефективна кількість праці $A_L(t)L(t)$ ростуть з однаковими темпами. Інакше частка капіталу або праці перестане бути постійною. Якщо ж вони все ж таки ростуть з однаковими темпами, то випуск $Y(t)$ буде рости з таким самим темпом, в силу постійності віддачі від масштабу. З іншого боку, з того, що відношення капіталу до випуску постійно знаходиться в стані стаціонарної рівноваги, випливає, що ефективна кількість капіталу $K(t)$ повинна рости з тим самим темпом, що і випуск, а отже і змінна $A_L(t)L(t)$ також. З усього цього маємо, що для збалансованого росту необхідно, аби змінна $A_K(t)$ залишалася незмінною починаючи з деякого моменту часу T .

2.5 Висновки до розділу 2

У другому розділі дипломної роботи ми навели загальну теорію щодо моделі росту Солоу в дискретному часі. Описали структуру економіки, яку можна моделювати за допомогою моделі Солоу. Визначили виробничу функцію та загальні вимоги до ринку капіталу, праці, конкуренції, попиту та пропозиції.

Визначили, що без технологічного прогресу розвиток економіки в певний момент часу стає просто неможливим.

РОЗДІЛ 3. РЕАЛІЗАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОГРЕСУ НА ОСНОВІ МОДИФІКОВАНОЇ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ СОЛОУ З S-ФУНКЦІЯМИ ВЕРХОЛЬСТА ТА РІЧАРДСА

3.1 S-подібна крива

Про фундаментальне значення інновацій для економічного розвитку суспільства писали у своїх роботах ще такі видні економісти минулого, як Йозеф Шумпетер (1883–1950), який розкрив важливість інновацій для еволюційного розвитку економіки та показав їх дискретний розвиток у часі, і Н.Д. Кондратьєв (1892-1938) – основоположник концепції «довгих хвиль» та відповідних технологічних укладів.

Ролі інновацій в економічному та соціальному розвитку суспільства присвячено безліч наукових та науково-публіцистичних праць та статей, але на окрему згадку заслуговує концепція S-подібних кривих Р. Фостера, що розкриває деякі важливі особливості інноваційних процесів. Розуміння суті цієї концепції необхідне усвідомлення, як інноваційні процеси економіки відбиваються на діяльності окремих підприємств, життя покупців, безліч функціонуванні суспільства загалом.

Річард Фостер, будучи директором однієї з американських консалтингових компаній у сфері бізнесу, також вивчав вплив інноваційних технологій на діяльність підприємств, внаслідок чого виявив цілу низку важливих закономірностей [9].

Майже кожен продукт має певний термін життя, після якого він морально застаріває. На початковому етапі, перш ніж продукт надійде у виробництво, він має бути розроблений, всіляко вивчений та опрацьований – у технологічному, економічному, комерційному, маркетинговому та будь-якому іншому відношенні. Іншими словами, ще до початку виробництва тієї чи іншої продукції її розробку необхідно вкласти певні кошти і працю. Далі слідує етап виробництва продукції та її активного збуту. Однак, у якийсь момент обсяги продажів

падають або взагалі зводяться нанівець, оскільки на ринок надходить продукція вищої якості та технологічного рівня. Якщо підприємство вчасно не перейде на випуск нової продукції, воно неминуче зазнає збитків або навіть зазнає краху.

При цьому Р. Фостер виявив таку закономірність: якщо скласти графік залежності економічних та інших результатів впровадження будь-якої нової технології від зусиль та витрат на її освоєння та впровадження, а також на виробництво та збут відповідної продукції, то в загальному випадку вийде S-подібна крива (рис. 3.1).

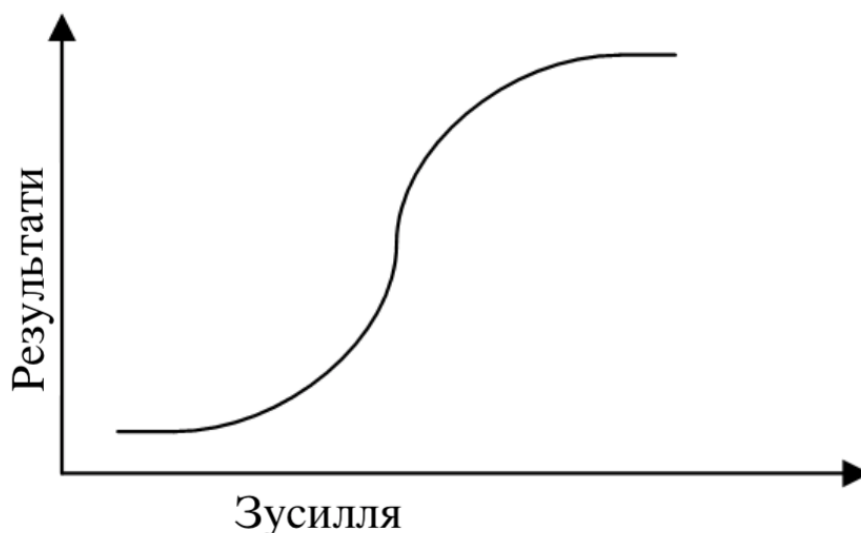


Рисунок 3.1 – Загальний вигляд S-подібної кривої

У початковий період («зародження технології» – нижній «хвостик» S-подібної кривої) зусилля та витрати великі, але практичної віддачі від них немає. Це період НДДКР, освоєння та впровадження у виробництво нової технології. Далі, навпаки, слідує період відносно невеликих витрат, але при цьому спостерігається значне зростання результатів. Це етап активного виробництва, комерціалізації та збуту продукції. Однак у якийсь момент, скільки б коштів підприємство не вкладало в даний продукт і відповідну технологію, віддачі (зростання результатів) від вкладених коштів не буде, оскільки для цієї технології настає межа («стадія повної зрілості» – верхній «хвостик» S-подібної

кривої). Ті підприємства, які продовжуватимуть інвестувати у відповідну продукцію та випускати її, неминуче програють підприємствам, які вчасно відчували вказану технологічну межу та почали виробляти аналогічну продукцію вже на новому технологічному рівні, наприклад плоскі рідкокристалічні екрани замість старих із кінескопом.

Але нова технологія не випливає із старої: стара технологія переривається, а нова приходить на зміну, тобто відбувається те, що Фостер назвав технологічним розривом (рис. 3.2). Нова технологія також буде S-подібною, але на вищому технологічному рівні, як, наприклад, світлодіодні лампи замість ламп розжарювання.

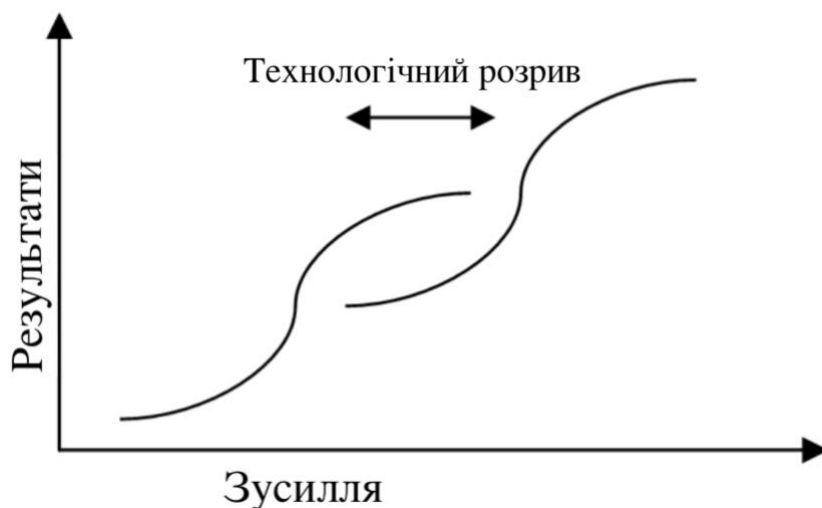


Рисунок 3.2 – Технологічний розрив для S-подібних кривих

Важливо також відзначити, що найчастіше з'являється навіть не одна нова технологія, а відразу декілька, і вони не лише витісняють стару технологію, а й конкурують між собою. Як приклад можна навести те, як на зміну лампам розжарювання почали приходити так звані енергозберігаючі лампи, але й їх уже активно тіснять технологічно досконаліші світлодіодні лампи. При цьому важливо розуміти, що всі ці технології у будь-якому випадку мають S-подібну природу з технологічною межею у верхній частині. Та згодом навіть їх замінять

інші, більш досконалі технології – зі своєю S-подібною кривою та своєю технологічною межею.

Сказане вище має значення як для конкретних підприємств, так й для суспільства в цілому, оскільки підприємствам, а точніше їх керівникам, необхідно навчитися вчасно виявляти майбутню технологічну межу існуючої технології та починати розробляти та впроваджувати нову технологію. Ті підприємства, які вміють це робити, успішно працюють протягом десятиліть, забезпечуючи гідне життя своїми працівниками та, відповідно, соціальну стабільність суспільства. А підприємства що «обороняються», ті що залишаються на старих технологіях, хоч би якими потужними вони були в минулому, зрештою неминуче програють своїм «атакуючим» конкурентам, що мають цілу низку переваг і не інвестують у застарілі технології.

3.2 Модифікована версія моделі Солоу

Модифікована версія моделі Солоу введена в роботі [10]. Нехай є деяка S-крива, що залежить від $p + 2$ параметрів, до того ж параметр m відповідає за зсув по осі абсцис, а параметр u – по осі ординат.

$$S_{pf}(v_1, \dots, v_p, m, u).$$

Приклад. S-крива Верхольста (Verholst).

$$S_{pf}(k_t) = \frac{A}{1+B \cdot \exp(-a \cdot (k_t - m))} + u, \quad (3.3)$$

де $k_t = \frac{K_t}{L_t}$. $A = 5, B = 0.5, a = 1, m = 4, u = 0$.

Нова виробнича функція, яку ми будемо називати n-ступінчатою

виробничою функцією ($n = 1$), задається формулою:

$$Y = LS_{pf} \left(\frac{K}{L} \right). \quad (3.4)$$

Нехай $k = \frac{K}{L}$, $y = \frac{Y}{L}$ та $f(k) = S_{pf}(k)$. Тоді рівняння (3.4) записується як виробнича функція в інтенсивній формі

$$y = f(k).$$

Вважається, що зміна кількості працюючих в економіці описується формулою:

$$L_{t+1}(t) = (1 + n) * L_t.$$

Економічне зростання визначається поведінкою основного капіталу K :

$$K_{t+1} = s * L_t S_{pf} \left(\frac{K_t}{L_t} \right) + (1 - d) K_t. \quad (3.5)$$

Поділив обидві частини рівняння (3.5) на L_t , та провівши деякі перетворення, отримаємо:

$$k_{t+1} = \frac{s}{1+n} f(K_t) + \frac{1-d}{1+n} k_t. \quad (3.6)$$

Це нелінійне різницеве рівняння першого порядку. Тут $d = 0.2$ – норма амортизації, $s = 0.3$ – нерухома доля виробництва $0 < s < 1, t = 0, 1, \dots, N$

Рівняння (3.6) назвемо модифікованою моделлю Солоу з одноступінчастою виробничою функцією. Модель з n -ступінчастою виробничою функцією

розглядалась в [10], а з 2-ступінчастою – розглядається в подальшому у даній роботі.

Характеристики модифікованої моделі Солоу:

- всі попередні припущення приймаються;
- виробнича функція може бути як зростаючою, так і спадаючою (Рисунки 3.3 та 3.4);
- з трьох випадків рівноваги для фазової траєкторії обираємо випадок 1: розвинутий світ. Фазова крива розташована вище за бісектрису та має з нею одну точку перетину (стійкий стан рівноваги)[10];
- виробнича функція (3.3) має більше параметрів, ніж неокласична виробнича функція;
- при зміні параметрів m та u виробничу функцію можна змістити у будь-яку точку першого квадранту. Умова $f(0) = 0$ не виконана;
- необхідність використання теорії нелінійних динамічних систем для дослідження кількісних та якісних характеристик розв'язків модифікованої моделі Солоу. Для неокласичної моделі така техніка не використовувалась раніше в повному обсязі;
- s-подібна виробнича функція описує життєвий цикл кожної технології: походження, скачок та поступове досягнення стадії повної зрілості технологічного процесу або продукту. Щоб крива мала практичну цінність, вона повинна передбачати технологічні зміни, що насуваються.

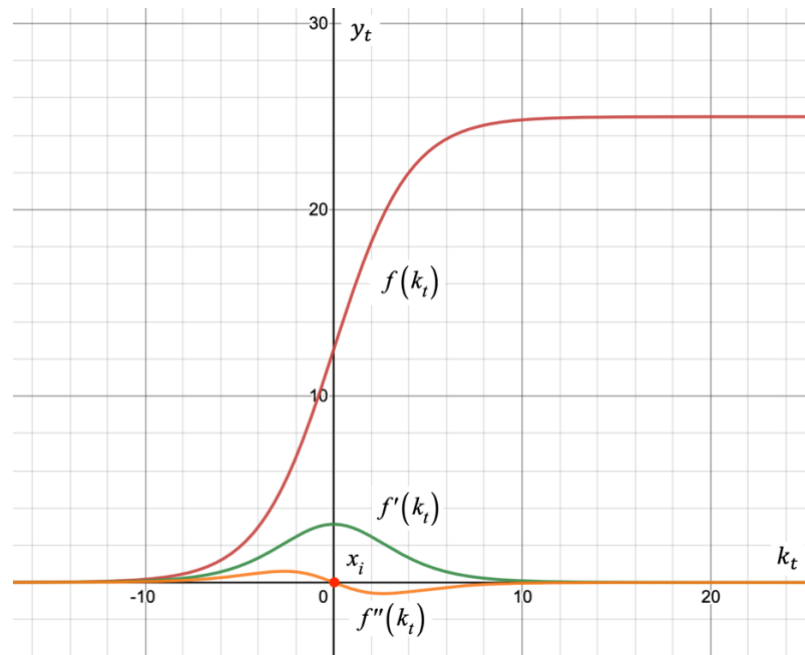


Рисунок 3.3 – Зростаюча виробнича функція $f(k)$

$$\begin{cases} f'(k) > 0, f''(k) > 0, & \text{якщо } x \geq x_i \\ f'(k) > 0, f''(k) < 0, & \text{якщо } x < x_i \end{cases}$$

де x_i – точка перегину зростаючої виробничої функції $f(k)$.

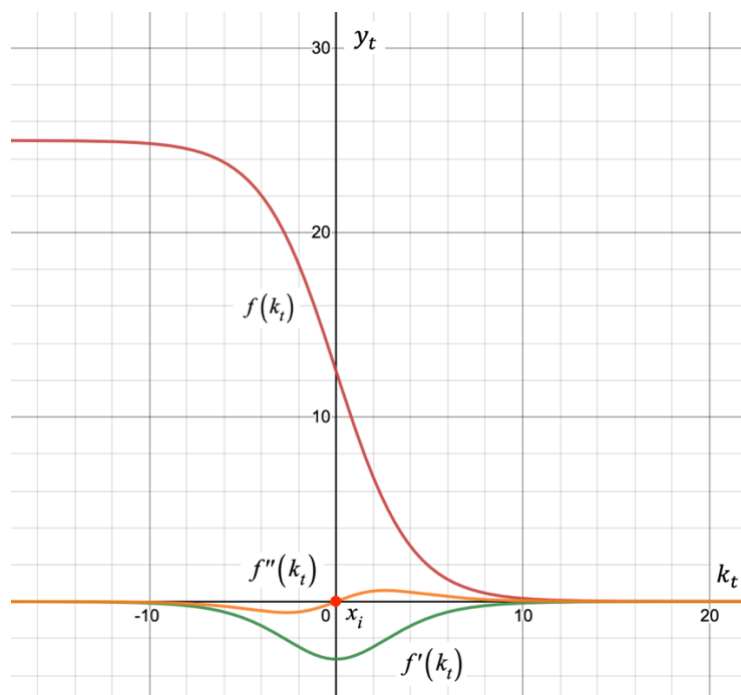


Рисунок 3.4 – Спадаюча виробнича функція $f(k)$

$$\begin{cases} f'(k) > 0, f''(k) > 0, & \text{якщо } x \geq x_i \\ f'(k) > 0, f''(k) < 0, & \text{якщо } x < x_i \end{cases}$$

де x_i – точка перегину спадаючої виробничої функції $f(k)$.

3.3 Двоступінчаста модель Солоу з S-функцією Річардса

Якщо виробнича функція описується двоступінчастою функцією, де одна – зростаюча, а друга – спадаюча, то в даній моделі може виникнути n-періодичні коливання, або хаос. Вперше ця задача була розглянута в роботі [11], узагальнення цієї роботи полягає в тому, що замість функції Верхольста ми обираємо функцію Річардса. Якісно друга задача нагадує першу задачу.

Розглянемо дві виробничі функції, що зображені на рисунку 3.5.

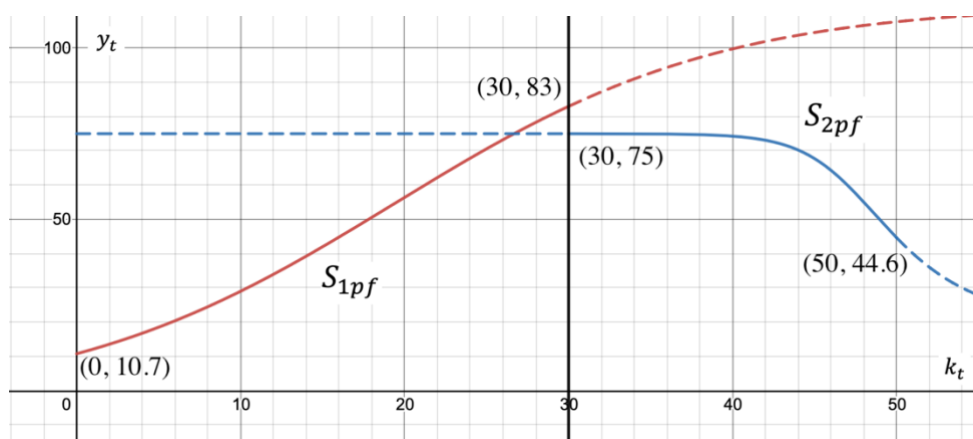


Рисунок 3.5 – Інтенсивні виробничі функції S_{1pf} та S_{2pf}

Тут

$$S_{1pf}(k_t) = C_1 + \frac{A_1}{1+B_1 * e^{(-\alpha_1 * (k_t - m_1))}}, 0 \leq k_t < 30, \quad (3.7)$$

$$S_{2pf}(k_t) = C_2 + A_2 * (1 + B_2 * e^{-\alpha*(k_t-m_2)})^{M_2}, 30 \leq k_t < 50. \quad (3.8)$$

В рівняннях Верхольтста (3.7) та Річардса (3.8) параметри мають наступні значення (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1 – Значення використаних параметрів.

A_1	B_1	C_1	α_1	m_1	A_2	B_2	C_2	α_2	m_2	M_2
117	6.9	-14.1	0.1	0	55	4	10	-0.5	50	-0.5

Техніка знаходження змінних $k_t, 1, 2, \dots, N$ буде розглянута нижче.

$$S_{1ph}(k_t) = \frac{s}{1+n} S_{1pf} - \frac{1-d}{1+n} k_t, 0 \leq k_t < 30. \quad (3.9)$$

Тут $d = 0.2$ – норма амортизації, $s = 0.3$ – доля інвестицій, $n = 0.004$ – коефіцієнт зміни кількості працюючих в економіці:

$$L_{t+1}(t) = (1 + n)L_t, L_{t+N}(t) = L_0(1 + n)^N, L_0 = 33.$$

Легко помітити, що фазова крива $S_{1ph}(k_t)$ (3.9) являється правою частиною модифікованого рівняння Солоу

$$k_{t+1} = S_{1ph}(k_t).$$

Аналогічним чином запишемо рівняння для фазової кривої $S_{2ph}(k_t)$:

$$S_{2ph}(k_t) = \frac{s}{1+n} S_{2pf} - \frac{1-d}{1+n} k_t, 30 \leq k_t < 50 \quad (3.10)$$

у відповідне модифіковане рівняння Солоу

$$k_{t+1} = S_{2ph}(k_t),$$

та $S_{2ss}(k_t)$, які використовуються для знаходження стійких станів.

$$S_{1ss}(k_t) = s * S_{1fp}(k_t), S_{2ss}(k_t) = s * S_{2fp}(k_t).$$

Щоб знайти точки встановленого стану змінної k_t модифікованого рівняння Солоу (3.9), побудуємо діаграму (рисунок 3.6).

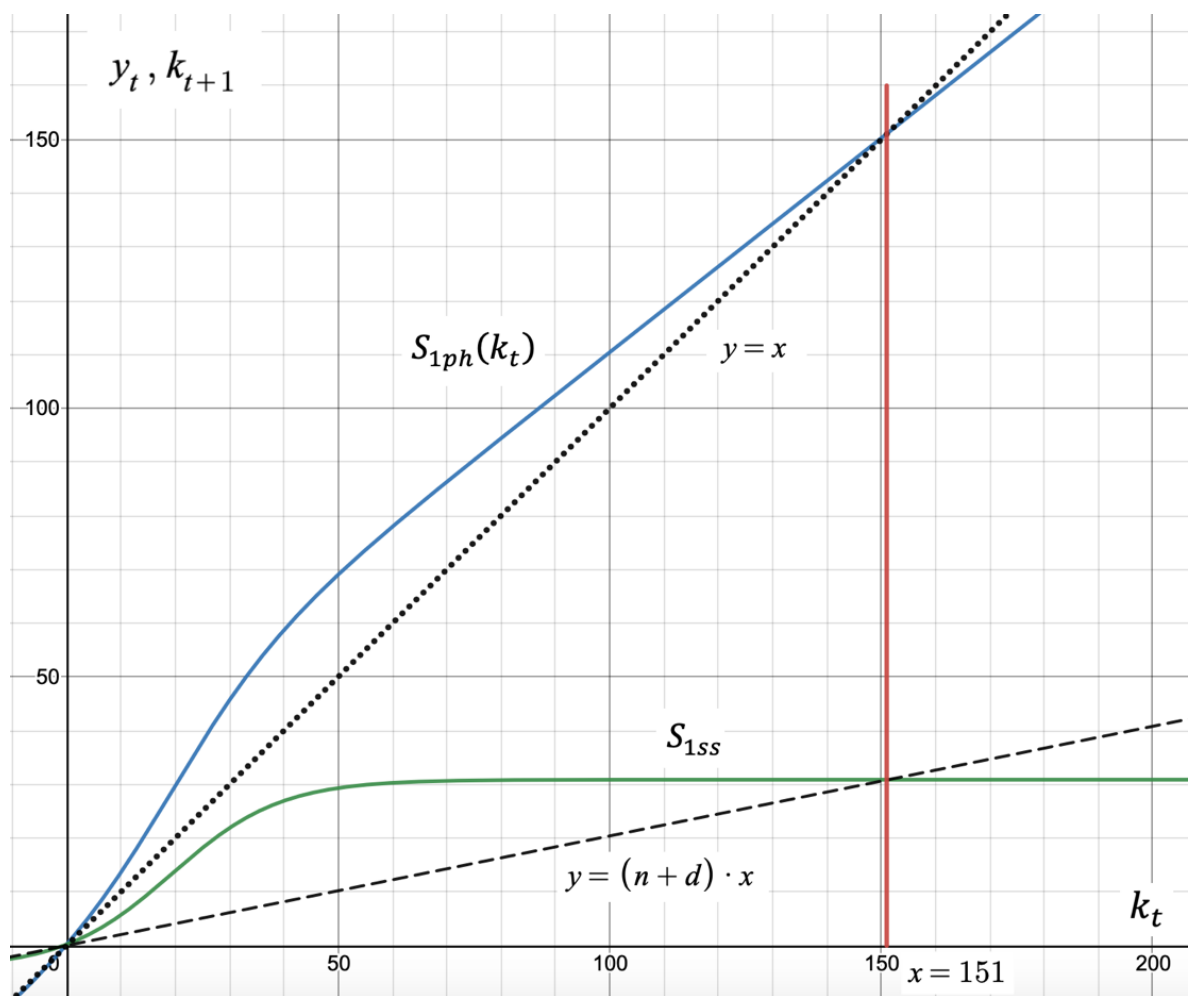


Рисунок 3.6 – Пошук точок стійкого стану. Пунктирна лінія $y = k_t$ – бісектриса, точкова лінія $y = (n + d)k_t$ – лінійна функція

На рисунку 3.6 зображено, що точка встановленого стану $y = k_t$ лежить за межами того місця, де розглядається рівняння (3.9), тому її не треба брати до

уваги. Щоб контролювати правильність побудови, необхідно впевнитись, що точки встановленого стану, які генеруються фазовими кривими S_{1ph} та S_{1ss} , співпадають.

Побудуємо аналогічну діаграму для другої функції (рисунок 3.7).

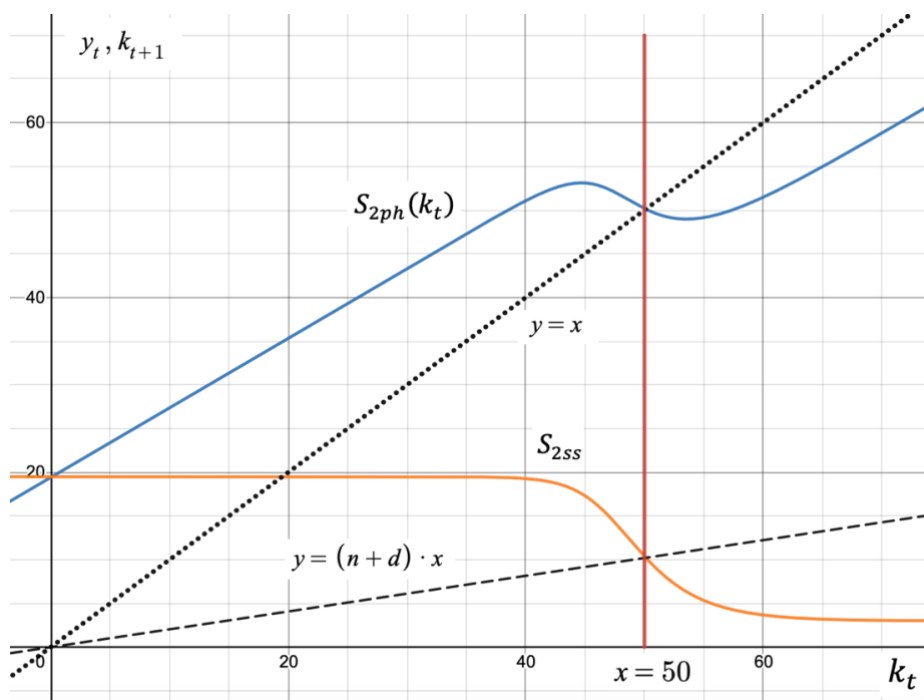


Рисунок 3.7 – Пошук точок стійкого стану. Пунктирна лінія $y = k_t$ – бісектриса, точкова лінія $y = (n + d)k_t$ – лінійна функція

На рисунку 3.7 зображено, що точка встановленого стану $y = k_t$ знаходиться в межах, де розглядається рівняння (3.10), і тому на неї варто звернути увагу.

Щоб контролювати правильність побудови, необхідно впевнитись, що точки встановленого стану, які генеруються фазовими кривими S_{2ph} та S_{2ss} , співпадають.

Введемо двох-ступінчасту виробничу функцію $S_2(k_t)$, що задається рівнянням

$$S_2(k_t) = \begin{cases} S_{1pf}(k_t), & \text{якщо } 0 \leq k_t < 30, \\ S_{2pf}(k_t), & \text{якщо } 30 \leq k_t < 50. \end{cases}$$

Вихід продукції на одного робітника $y_1(k_t)$ можна знайти з відношення

$$y(k_t) = S_2(k_t).$$

Введемо двох-ступінчасту фазову криву $S_2(k_t)$, що задається рівнянням:

$$G_2(k_{t+1}) = \begin{cases} S_{1ph}(k_t), & \text{якщо } 0 \leq k_t < 30, \\ S_{2ph}(k_t), & \text{якщо } 30 \leq k_t < 50. \end{cases}$$

Для функції $S_2(k_t)$ можна записати модифіковане рівняння Солоу:

$$y(k_t) = G_2(k_t). \quad (3.11)$$

Це нелінійне дискретне рівняння першого порядку з кусково-неперервними коефіцієнтами. Теорія нелінійних дискретних динамічних систем першого порядку гарно розвинена [12]. Чисельне моделювання має вирішальне значення при дослідженні нелінійних систем. Необхідно вирішити рівняння (3.11) та провести його якісне дослідження. Для цього використаємо програмний пакет E&F Chaos [13].

Побудуємо фазову діаграму рівняння (рисунок 3.8), його часовий ряд (рисунок 3.9) а також залежність стану системи від зміни параметру α (рисунок 3.10 та 3.11).

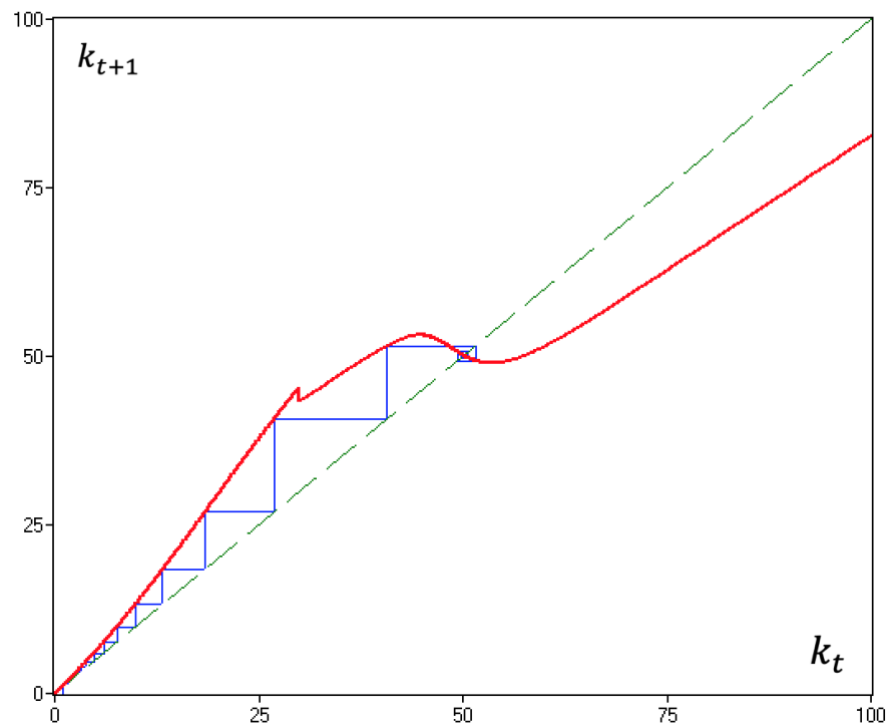


Рисунок 3.8 – Стійка нерухома точка (стабільний 1-цикл) рівняння (3.11)

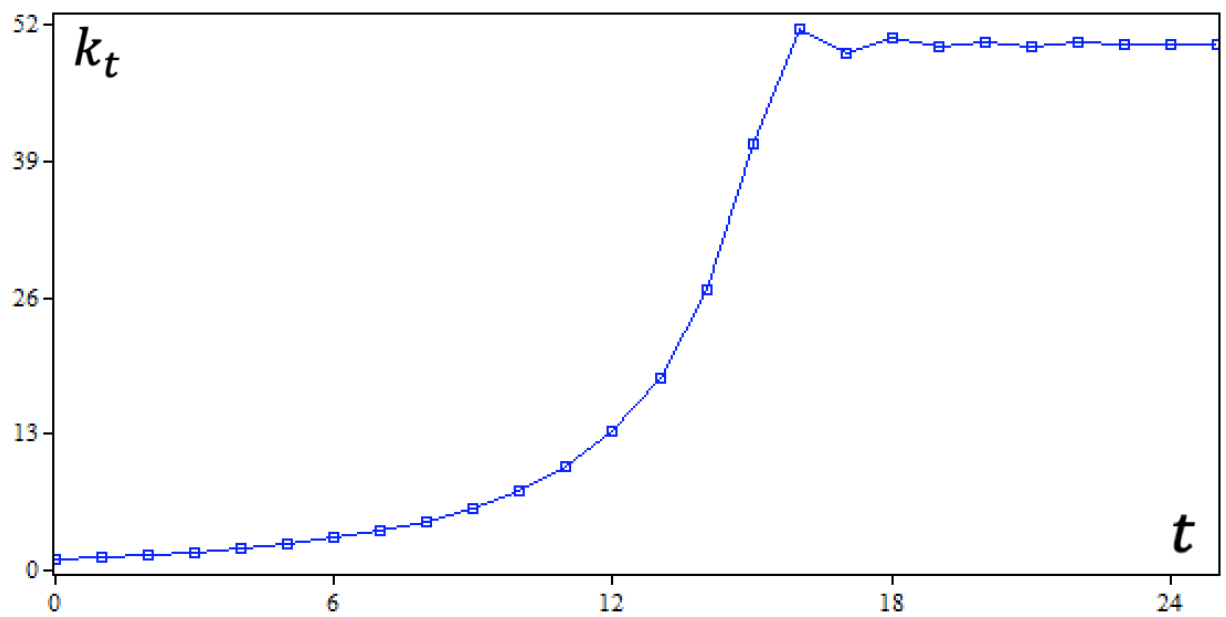


Рисунок 3.9 – Графік часового ряду стійкого 1-циклу рівняння (3.11)

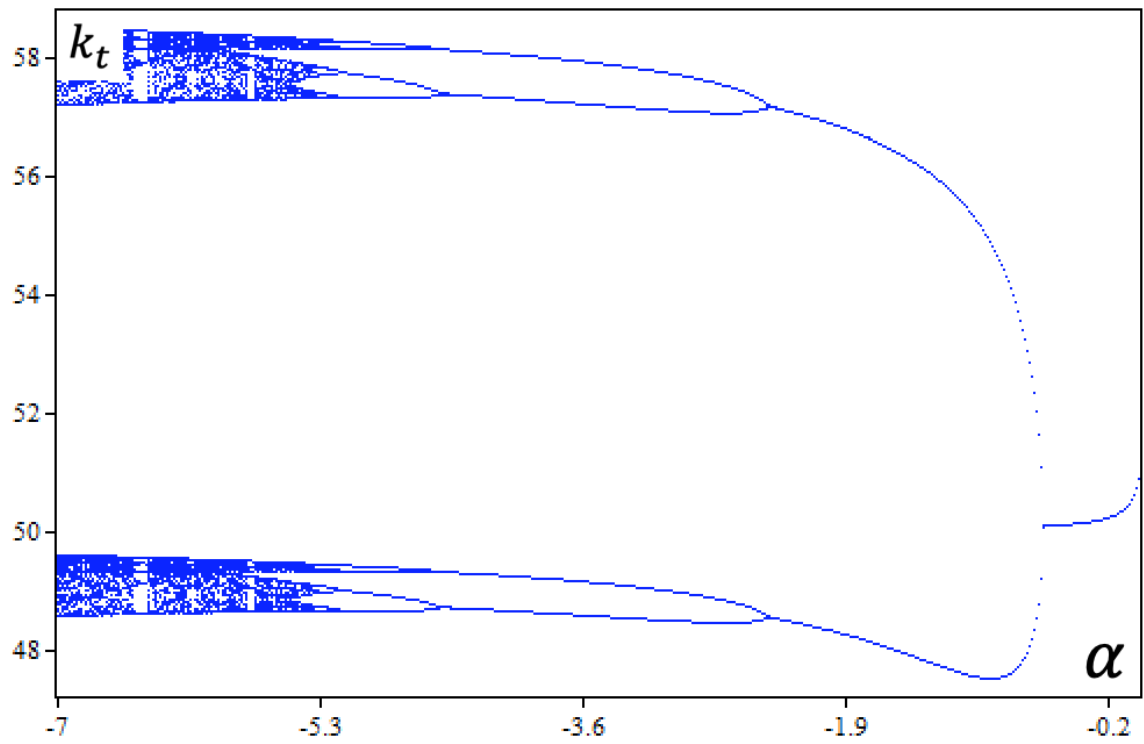


Рисунок 3.10 – Подвоєння періоду оберненої біфуркації зі створенням 2-циклу (3.11)

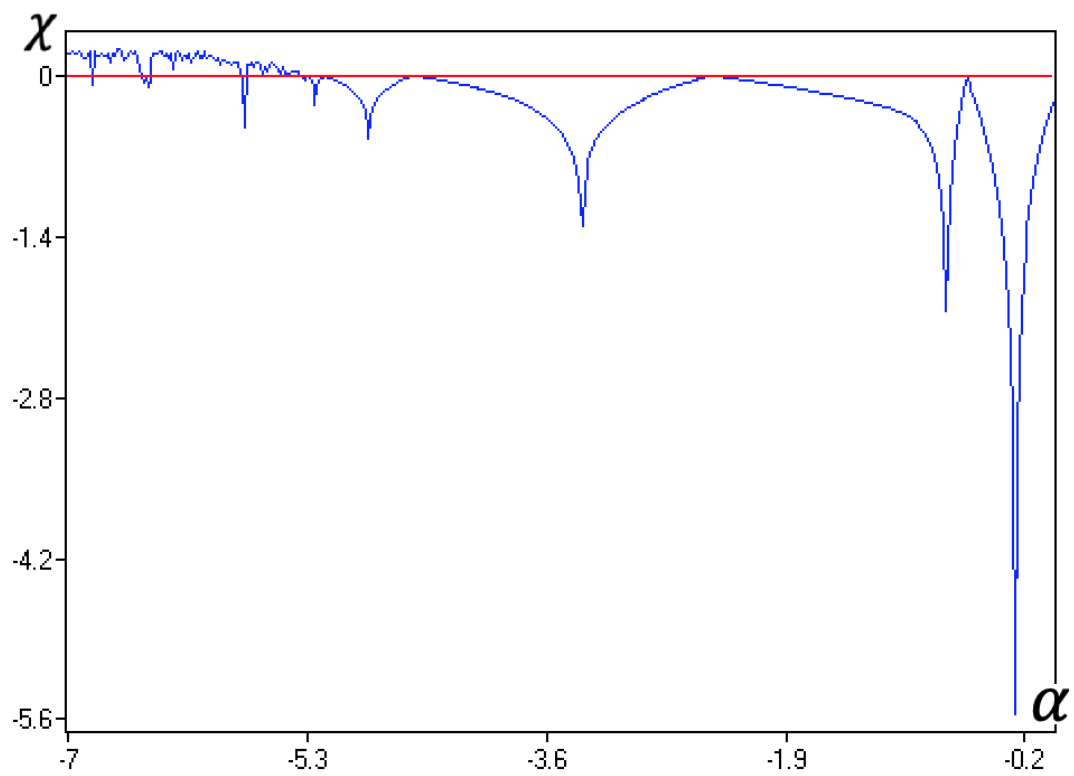


Рисунок 3.11 – Старший (найбільший) показник Ляпунова збільшився від -7 до 0 для рівняння (3.11)

На рисунку 3.10 при збільшенні параметру a_2 від -7 до 0 можна помітити: кожен стійкий цикл проходить через нескінченну послідовність подвоєнь періоду.

Наприклад, стійка нерухома точка породжує стійкий 2-цикл, як тільки нерухома точка стає нестійкою.

Цей стійкий 2-цикл породжує стійкий 4-цикл, як тільки 2-цикл стає нестійким.

Цей стійкий 4-цикл породжує стійкий 8-цикл, як тільки 4-цикл стає нестійким.

В загальному випадку любий стійкий n -цикл породжує сімейство:

$$2n - cycle \rightarrow 4n - cycle \rightarrow 8n - cycle \rightarrow 16n - cycle.$$

Амплітуда kn -циклу прямує до нуля, коли k прямує до нескінченності. Системи з двома властивостями: біфуркацією та подвоєнням періоду, чуттєвою залежністю від початкових умов або додатнім старшим показником Ляпунова, в певному сенсі вважаються хаотичними. Їх називають шляхом до хаосу.

На рисунку 3.11 старший показник Ляпунова – це середня швидкість росту нескінченно малого збудження стану вздовж типової траєкторії (орбіти). Для періодичних режимів найбільший показник Ляпунова від’ємний. Це означає, що вони асимптотично стійкі по Ляпунову відносно малих змін початкових умов. Для хаотичних режимів найбільший показник Ляпунова додатній. Це означає, що вони асимптотично нестійкі по Ляпунову відносно малих змін початкових умов (чуттєва залежність від початкових умов).

Для того щоб впевнитись у висновках – змодельюємо поведінку системи для інших значень α , та отримаємо наступні результати:

- двох періодичні коливання (рисунок 3.12);
- чотирьох періодичні коливання (рисунок 3.13);
- хаос (рисунок 3.14).

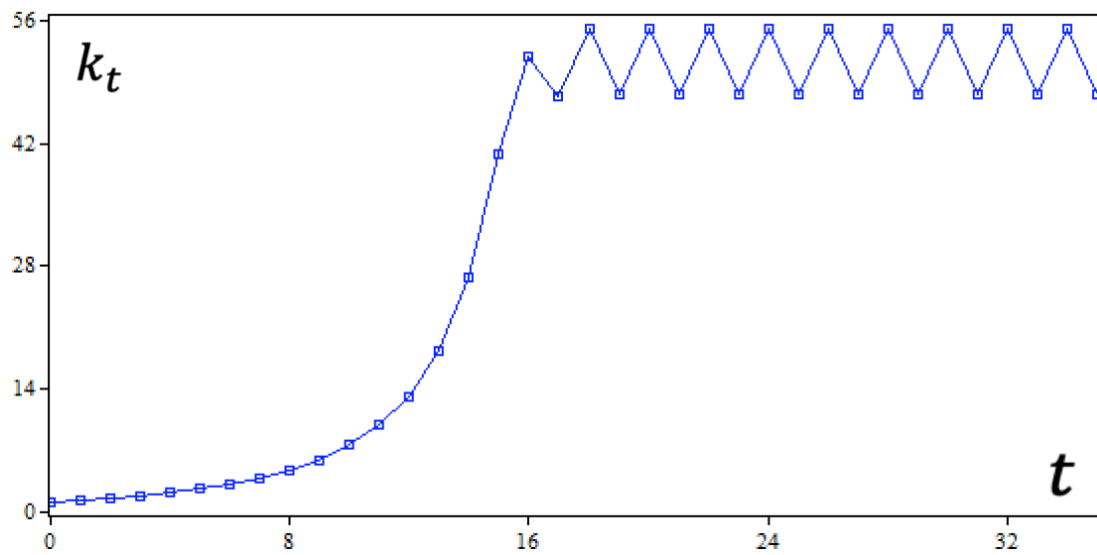


Рисунок 3.12 – Часовий ряд стійкого 2-циклу при $a_2 = -1.5$ для рівняння
(3.11)

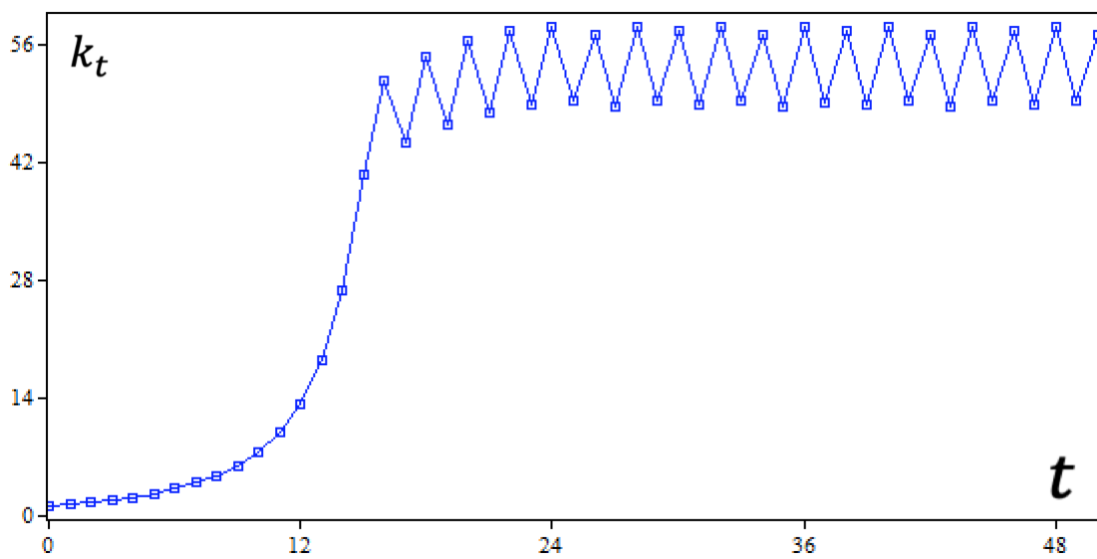


Рисунок 3.13 – Часовий ряд стійкого 4-циклу при $a_2 = -3$ для рівняння
(3.11)

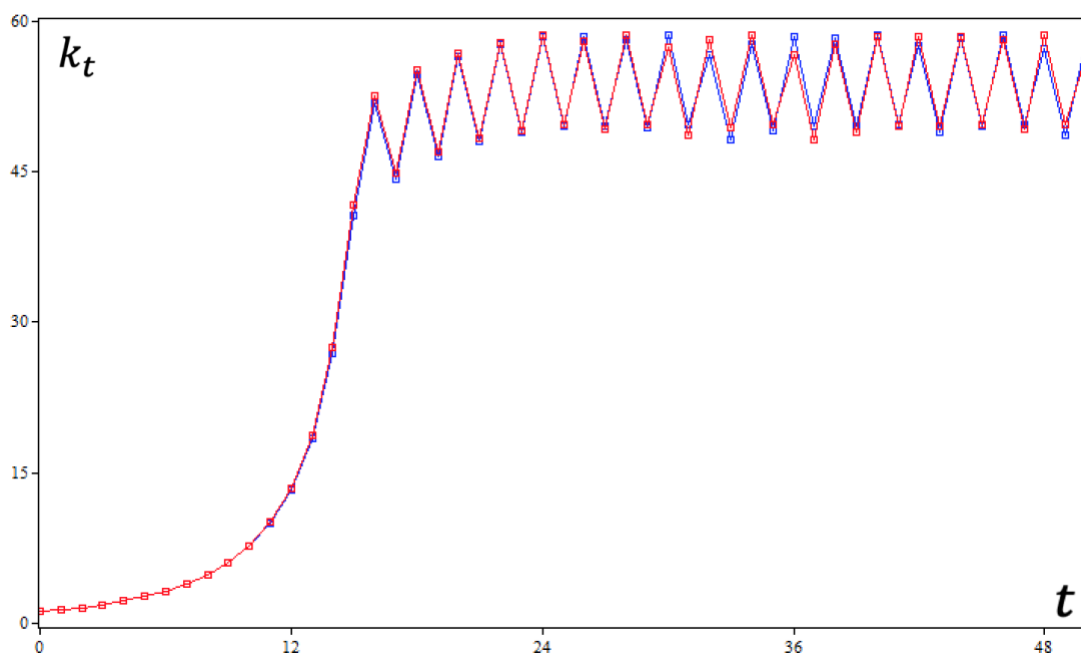


Рисунок. 3.14 – Хаос: чуттєва залежність від початкових умов при $a_2 = -7$ для рівняння (3.11)

На рисунку 3.14 зображені дві траєкторії при різних початкових умовах:

- синя – $k_0 = 1.1$;
- червона – $k_0 = 1.11$.

Незважаючи на невелику різницю в значеннях початкових умов, траєкторії спочатку співпадають, а потім розходяться, спостерігається ефект чуттєвості рішень до початкових умов.

3.4 Висновки до розділу 3

Порівняльний аналіз неокласичної моделі Солоу та модифікованої моделі Солоу при реалізації технічного прогресу показав безсуперечні переваги модифікованої моделі Солоу. Екзогенно введена S-подібна виробнича функція описує життєвий цикл технології на кожному етапі: зародження, стрибок та

поступове досягнення стадії повної зрілості технологічного прогресу або продукта на кожному етапі. Модифікований варіант моделі економічного росту Солоу, що базується на n -ступінчастій виробничій функції у вигляді n S -подібних функцій для реалізації техночного прогресу, забезпечує ріст економіки на достатньо великому часовому інтервалі, який співпадає з тривалістю життєвого циклу досліджуваної економіки.

Використання теорії нелінійних динамічних систем для дослідження розв'язків модифікованої моделі Солоу (на основі S -функції Річардса, замість Верхольста, розглянутій в роботі [11]) значно покращує їх кількісні та якісні характеристики. Для неокласичної моделі раніше цей прийом не застосовувався в повній мірі.

Перевага модифікованої моделі Солоу на базі функції Річардса дає можливість описати як працює технологічний стрибок, внаслідок чого виникають одно-, двох-, чотирьох-періодичні коливання. Технологічний стрибок – це період коли зростаюча функція переходить в спадаючу.

Створена модифікована модель, яка генерує періодичні та хаотичні цикли для 2-х S -подібних виробничих функцій.

Вона пояснює механізм поведінки при переході від зростаючої S -подібної виробничої функції до спадаючої S -подібної виробничої функції на певному інтервалі функціонування досліджуваної економічної системи.

В цьому інтервалі, який називається «технологічним розривом», інтенсивний випуск $y(t)$ може втілюватись у відповідності до наступних варіантів

- стійка точка рівноваги (стійкий 1-цикл) досліджуваної моделі;
- коливання (стійкі n -цикли, $n = 2, 4, 8, 16, \dots$);
- хаотичні коливання.

РОЗДІЛ 4 АНАЛІЗ СТАРТАП ПРОЕКТУ

4.1 Опис ідеї стартап проекту

Спочатку визначимо стартап-проект. В таблиці 4.1 наведено основну ідею проекту.

Таблиця 4.1 – Опис ідеї стартап-проекту

<i>Зміст ідеї</i>	<i>Напрямки застосування</i>	<i>Вигоди для користувача</i>
Моделювання економічного розвитку країн	Пошук точок рівноваги	Знаходження моментів, коли необхідно оновлювати технологічну базу країни
	Визначення значень параметрів, які призводять до спаду економіки	Розуміння на якому рівні необхідно підтримувати економічні показники, аби запобігти спаду економіки
	Навчання	Огляд методів та їх використання

Далі необхідно визначити конкурентів на ринку і зробити порівняльний аналіз, виявити їх переваги та недоліки. Прямих аналогів не існує, тому вибрали конкурентів, частини функціоналу яких співпадає. В таблиці 4.2 наведені основні характеристики ідеї.

Таблиця 4.2 – Визначення сильних, слабких та нейтральних характеристик ідеї проекту

№ п/ п	Техніко- економічні характерис тики ідеї	(потенційні) товари/концепції конкурентів			W (сла бка сто рон а)	N (ней трал ьна стор она)	S (сил ьна сто рон а)
		Мій проект	Kaggle	Наукові інститути			
1	Складність у використанні	Середній рівень	Середній рівень	Високий рівень		+	
2	Ціна	Задовільна	Задовільна	Висока			+
3	Функціонал	Пошук точок рівноваги, вплив макроекон омічних показників на розвиток економіки	Прогнозув ання розвитку економіки на основі макроекон омічних показників , підтримка спільноти дата сайнтистів	Будь-які дослідженн я в області економіки, пошук способів розвитку економіки	+		

4.2 Технологічний аудит ідеї проекту

Наступним необхідним кроком є аудит технологій. В таблиці 4.3 наведений аналіз складових частин.

Таблиця 4.3 – Технологічна здійсненність ідеї проекту

<i>№ n/n</i>	<i>Ідея проекту</i>	<i>Технології її реалізації</i>	<i>Наявність технологій</i>	<i>Доступність технологій</i>
1	Моделювання економічного розвитку країн	Використання мови програмування R	Наявні	Доступні
2		Використання мови програмування Python	Наявні	Доступні
3		Використання програмного забезпечення E&F Chaos	Наявні	Доступні
Обрана технологія реалізації ідеї проекту: програмне забезпечення E&F Chaos				

4.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Стартап не існує в вакуумі, тому необхідно проаналізувати ринок, на який ми виходимо. В таблиці 4.4 наведена характеристика ринку.

Таблиця 4.4 – Попередня характеристика потенційного ринку стартап-проекту

<i>№ n/n</i>	<i>Показники стану ринку (найменування)</i>	<i>Характеристика</i>
1	Кількість головних гравців, од	150
2	Загальний обсяг продаж	1 млн. \$
3	Динаміка ринку (якісна оцінка)	Зростає
4	Наявність обмежень для входу (вказати характер обмежень)	Немає
5	Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації	Немає
6	Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), %	10

Наступним кроком необхідно охарактеризувати основні групи потенційних користувачів продукту і скласти опис вимог кожної такої групи (таблиця 4.5).

Таблиця 4.5 – Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

<i>№ n/n</i>	<i>Потреба, що формує ринок</i>	<i>Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)</i>	<i>Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів</i>	<i>Вимоги споживачів до товару</i>
1	Дослідження розвитку економіки та пошуки способів її покращення	Спеціалісти	Мають досвід в області	Якість

Продовження таблиці 4.5

2	Вивчення економічних моделей та дослідження їх показників	Студенти	Початківці	Наявність корисної інформації
3	Вплив нових технологій на розвиток економіки	Компанії-виробники технологій	Цікавить які технології впливають найбільше	Ціна, якість

Далі необхідно проаналізувати загрози, які можуть виникнути та перешкодити вдалому запуску проекту. Результати представлені у таблиці 4.6.

Таблиця 4.6 – Фактори загроз

<i>№ n/n</i>	<i>Фактор</i>	<i>Зміст загрози</i>	<i>Можлива реакція компанії</i>
1	Мала інформованість	Багато людей можуть просто не знати про стартап	Рекламна кампанія
2	Архаїчність інтерфейсу	Багато людей можуть просто не розібратись	Спростити інтерфейс
3	Необхідність наявності релевантних знань	Багато людей можуть не мати необхідної теоретичної підготовки	Написати довідник користувача з теорією

Також необхідно розглянути фактори, які можуть сприяти проекту. Результати представлені у таблиці 4.7.

Таблиця 4.7 – Фактори можливостей

<i>№ n/n</i>	<i>Фактор</i>	<i>Зміст можливості</i>	<i>Можлива реакція компанії</i>
1	Проведення державою тендерів	Деякі держави можуть проводити відповідні тендери	Участь у таких тендерах
2	Поява розробника	Поява R розробника у штаті компанії	Найм такого працівника

Далі необхідно охарактеризувати конкурентне середовище. Результати аналізу наведено у таблиці 4.8. Також виконаємо аналіз конкуренції за моделлю п'яти сил конкуренції Майкла Портера. Результати аналізу зведено в таблицю 4.9.

Таблиця 4.8 – Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

<i>Особливості конкурентного середовища</i>	<i>В чому проявляється дана характеристика</i>	<i>Вплив на діяльність підприємства (можливі дії компанії, щоб бути конкурентоспроможною)</i>
1. Вказати тип конкуренції: Чиста	Багато систем/ спеціалістів	Розробити відомий продукт
2. За рівнем конкурентної боротьби: міжнаціональна	Є системи з різних країн	Розширити аудиторію, додати підтримку інших іноземних мов
3. За галузевою ознакою: міжгалузева	Застосовується в різних цілях	Розширити можливості, написати інструкцію користувача

Продовження таблиці 4.8

4. Конкуренція за видами товарів: товарно-родова	Конкуренція з іншими подібними інструментами	Покращити UI/UX
5. За характером конкурентних переваг: Нецінова	Різні інструменти для моделювання	Збільшення якості та функціоналу
6. За інтенсивністю: Марочна	Відомий бренд надає переваги	Розвивати бренд, брати участь у тендерах, писати статі, давати інтерв'ю

Таблиця 4.9 – Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

<i>Складові аналізу</i>	<i>Прямі конкуренти в галузі</i>	<i>Потенційні конкуренти</i>	<i>Постачальники</i>	<i>Клієнти</i>	<i>Товаризамінники</i>
	<i>Kaggle, Науково-Дослідницькі інститути</i>	<i>Спеціалізована ніша ринку, необхідність наявності теоретичної бази</i>	<i>Велика кількість реалізацій від спільноти, фінансування з боку держави</i>	<i>Наявність бюджетів</i>	<i>Більш висока якість, більша кількість учасників в розробці</i>
Висновки	Можлива інтенсивна боротьба	Є можливості та потенційні конкуренти	Не диктують	Частково диктують	Товаризамінники присутні, проте не створюють обмеження

Результати аналізу підтверджують, що на ринку сприятливі умови для створення і запуску даного стартап-проекту. Були сформульовані та обґрунтовані перелік факторів конкурентоспроможності. Аналіз оформлено в таблицю 4.10.

Таблиця 4.10 – Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

<i>№ n/n</i>	<i>Фактор конкурентоспроможності</i>	<i>Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)</i>
1	Багатофункціональність	Проект може задовольнити потреби як студентів, так і корпорацій та держав
2	Доступність програмного продукту	Загальнодоступність та кросплатформеність
3	Розширення підтримки	Додавання до інструменту інших іноземних мов та служби підтримки користувачів

Після проведення аналізу можна виділити сильні та слабкі (які потребують вдосконалення) сторони продукту (таблиця 4.11).

Таблиця 4.11 – Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін системи

<i>№ n/ n</i>	<i>Фактор конкурентоспроможності</i>	<i>Бали 1-20</i>	<i>Рейтинг товарів-конкурентів</i>						
			-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
1	Багатофункціональність	18		+					
2	Доступність програмного продукту	20				+			
3	Розширення підтримки	20				+			

SWOT-аналіз дозволяє оцінити можливості та загрози бізнесу, а також сильні і слабкі сторони продукту. Результати наведені у таблиці 4.12.

Таблиця 4.12 – SWOT- аналіз стартап-проекту

Сильні сторони: Якість та багатофункціональність	Слабкі сторони: інтерфейс
Можливості: попит та вдосконалення	Загрози: конкуренція, збут

На основі SWOT-аналізу було спроектовано альтернативну ринкову поведінку для інтеграції стартап-проекту (таблиця 4.13).

Таблиця 4.13 – Альтернативи ринкового впровадження стартап проекту

<i>№ п/п</i>	<i>Альтернатива ринкової поведінки</i>	<i>Ймовірність отримання ресурсів</i>	<i>Строки реалізації</i>
1	Швидкий вихід з MVP	15%	4 місяці
2	Поступовий вихід з якісним продуктом	65%	10 місяців

4.4 Розроблення ринкової стратегії проекту

Розроблення ринкової стратегії розпочинається з визначення стратегії охоплення ринку. Для цього необхідно охарактеризувати цільові групи потенційних споживачів (таблиця 4.14).

Таблиця 4.14 – Вибір цільових груп потенційних споживачів

<i>№ п/п</i>	<i>Опис профілю цільової групи потенційних клієнтів</i>	<i>Готовність споживачів сприйняти продукт</i>	<i>Орієнтовний попит в межах цільової групи (сегменту)</i>	<i>Інтенсивність конкуренції в сегменті</i>	<i>Простота входу у сегмент</i>
1	Спеціаліст	Середня	35%	Середня	Середня
2	Студент	Висока	30%	Низька	Середня
3	Компанія	Висока	35%	Середня	Середня
Які цільові групи обрано: 1, 2, 3					

Для роботи в обраних сегментах ринку сформуємо базову стратегію розвитку (таблиці 4.15, 4.16, 4.17).

Таблиця 4.15 – Визначення базової стратегії розвитку

<i>№</i>	<i>Обрана альтернатива розвитку проекту</i>	<i>Стратегія охоплення ринку</i>	<i>Ключові конкурентоспроможні позиції відповідно до обраної альтернативи</i>	<i>Базова стратегія розвитку*</i>
1	2	Стратегія спеціалізації	Функціональність, багатогалузевість, якість, підтримка різних мов	Стратегія диференційованого маркетингу

Таблиця 4.16 – Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

<i>№ n/n</i>	<i>Чи є проект «першопрохідцем» на ринку?</i>	<i>Чи буде компанія шукати нових споживачів, або забирати існуючих у конкурентів?</i>	<i>Чи буде компанія копіювати основні характеристики товару конкурента, і які?</i>	<i>Стратегія конкурентної поведінки*</i>
1	Ні	Так	Ні	Стратегія лідеру

Таблиця 4.17 – Визначення стратегії позиціонування

<i>№ n/ n</i>	<i>Вимоги до товару цільової аудиторії</i>	<i>Базова стратегія розвитку</i>	<i>Ключові конкурентоспромож ні позиції власного стартап-проекту</i>	<i>Вибір асоціацій, які мають сформуват и комплексну позицію власного проекту</i>
1	Якість, функціональніст ь, зрозумілий інтерфейс	Стратегія диференційовано го маркетингу	Якість, висока функціональність, служба підтримки користувачів	Імідж, якість, спеціалізаці я

4.5 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту

Кінцевим етапом є формування маркетингової концепції товару. Спочатку необхідно визначити ключових переваг концепції потенційного товару (таблиця 4.18). Також опишемо три рівні моделі товару (таблиця 4.19).

Таблиця 4.18 – Визначення ключових переваг концепції потенційного товару

№ n/n	Потреба	Вигода, яку пропонує товар	Ключові переваги перед конкурентами (існуючі або такі, що потрібно створити)
1	Моделювання економіки	Інструментарій для моделювання	Відносна легкість у розгортанні та використанні
2	Пошук точок впливу технологій на економіку	Інструментарій для зображення залежності економіки від цільових змінних	Унікальність

Таблиця 4.19 – Опис трьох рівнів моделі товару

Рівні товару	Сутність та складові		
I. Товар за задумом	Моделювання економіки та пошук точок впливу технологій на неї		
II. Товар у реальному виконанні	Властивості/характеристики	М/Нм	Вр/Тх/Тл/Е/Ор
	Програмний продукт – складна, комплексна система		
	Якість: тестування фірмами		
	Пакування - інсталятор		

Продовження таблиці 4.19

	Марка: назва організації-розробника + назва товару
III. Товар із підкріпленням	До продажу: гнучка оплата, доставка
	Після продажу: гарантія якості та оновлення, служба підтримки користувачів
Захист від копіювання: захист інтелектуальної власності, патент	

Далі необхідно визначити цінові межі продукту (таблиця 4.20).

Таблиця 4.20 – Визначення меж встановлення ціни

№ п/п	Рівень цін на товари-замінники	Рівень цін на товари-аналоги	Рівень доходів цільової групи споживачів	Верхня та нижня межі встановлення ціни на товар/послугу
1	1000	2000	1 млн.	700-1000

4.6 Висновки до розділу 4

Був виконаний перший етап розроблення стартап проекту, а саме, маркетинговий аналіз стартап проекту.

Можна сказати, що існує можливість ринкової комерціалізації проекту, адже на ринку відсутні конкуренти та наявна величезна потенційна аудиторія, до того ж рентабельність проекту є задовільною та ринок зростає.

Для реалізації проекту краще обрати варіант, де застосовується програмне забезпечення E&F Chaos. У проекту є великі шанси для подальшого розвитку та покращення.

ВИСНОВКИ

У даній роботі ми отримали подальший розвиток модифікованої версії моделі економічного зростання Солоу, заснованої на n -кроковій технологічній функції у вигляді n S-функцій для реалізації технічного прогресу, запропонованого в [10].

Обґрунтування залежності макроекономічної динаміки від технологічних інвестиційних пріоритетів у вигляді виробничих S-функцій розглянуто в численних роботах ([14] і [15]). Процес розвитку кожної технологічної парадигми в цілому описується логістичною кривою, яка виражає найбільш загальні закономірності динаміки прогресивних циклічних процесів.

На початку життєвого циклу кожної технологічної парадигми значні витрати на її розробку дають незначні результати – цьому періоду відповідає перша полога ділянка логістичної кривої. Потім, у міру розвитку і практичного освоєння відповідних технічних і технологічних принципів, невеликі витрати починають приносити значний ефект, і крива круто піднімається вгору. Далі, у міру того, як технології цієї парадигми наближаються до своїх технологічних меж, ця технологічна парадигма знову входить в пологую ділянку кривої, і навіть великомасштабні інвестиції в її розвиток вже не можуть принести значного ефекту. У розпорядженні інвестора в будь-який момент часу є обмежена кількість технологій, які потенційно можуть бути підтримані його інвестиційними ресурсами. Сенса подолання періоду технологічного розриву, який час від часу повторюється в кожній галузі економіки, полягає в швидкому і мінімально можливому переході від однієї логістичної кривої до іншої, відповідної більш прогресивному технологічному укладу. В цьому випадку правильний вибір технології-замінника повністю залежить від правильності оцінки верхніх технологічних меж кількох конкуруючих технологій, призначених для вирішення однієї технічної задачі. Необхідно перейти до нової технологічної парадигми. Це одна з найскладніших проблем техніко-

економічного прогнозування.

Модифікована версія моделі економічного зростання Солоу, заснована на n -ступінчастій виробничій функції у вигляді n S -функцій для реалізації технічного прогресу, запропонована в [10], дає адекватний математичний апарат для вирішення цієї проблеми.

Дана робота розвиває результати роботи [10] за наступними напрямками:

- порівняльний аналіз неокласичної моделі Солоу і модифікованої моделі Солоу в реалізації технологічного прогресу на основі S -функції Річардса;
- розробка конструктивного алгоритму на основі апарату нелінійних дискретних динамічних систем;
- розробка модифікованої моделі, яка генерує періодичні та хаотичні цикли.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Easterly W. The Elusive Quest for Growth: Economists' Adventures and Misadventures in the Tropics. Cambridge. MA: MIT Press, 2001. 400 p.
2. Aghion P., Howitt P. Endogenous growth theory. Cambridge. MA: MIT Press, 1998. 710 p.
3. Aghion P., Howitt P. The Economics of Growth. Cambridge. MA: MIT Press, 2009. 504 p.
4. Antony J. New Combinations and Growth. *Discussion Paper Series*. 2007. Vol. 290. P. 80-84.
5. Frankel J.A., Romer D. Does Trade Cause Growth? *American Economic Review*. 1999. Vol. 89. P. 379-399.
6. Grossman G., Helpman E. Quality Ladders in the Theory of Growth. *Review of Economic Studies*. 1991. Vol. 58. P. 43-61.
7. Grossman, V. Enterpreneurial innovation and Economic Growth. *CESifo Working Paper*. 2008. Vol. 2264. P. 51-56.
8. Jones C. I. Growth: With or without Scale Effects? *American Economic Review*. 1999. Vol. 89. P. 495-525.
9. Foster R. Innovation: The Attacker's Advantage. New York: Summit, 1986. 316 p.
10. Alexey Lopatin. A Modified Version of Solow's Economic Growth Model with Successive Using Composite S-Curves for Technological Progress Implementation. *2020 IEEE 2nd International Conference on System Analysis Intelligent Computing (SAIC)*. 2020. P. 60-63.
11. Alexey Lopatin. Technology progress implementation based on a modified version of Solow's economic growth model with n-stage production function. *System Researches and Information Technologies*. 2021. No. 3. P. 99-109.
12. Medio A., Lines M. Nonlinear dynamics: A primer. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 316 p.

13. Cees Diks, Cars Hommes, Valentyn Panchenko. E&F Chaos: A User Friendly Software Package for Nonlinear Economic Dynamics. *Computational Economics*. 2008. Vol. 32. P. 221-244.
14. Dmitry Kucharavy , Roland De Guio. Application of S-shaped curves. *Procedia Engineering*. 2007. Vol. 9. P. 113-116.
15. Semenychev V.K., Korobetskaya A.A., Kozhukhova V.N. Proposals of econometric tools for modeling and forecasting evolutionary processes: a monograph. Samara: SAGMU, 2015. 384 p.