

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Національний технічний університет України “Київський
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”**

М. Я. Островерхов, А. М. Сільвестров, К. Х. Зеленський

**МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ І
КОМПЛЕКСІВ**

Монографія

Рекомендовано Вченою радою НТУУ “КПІ ім. Ігоря Сікорського”

Київ – 2019

УДК 681.5.015: 621
ББК з 960.2 – 024
О 771

Рецензенти:

Островерхов М. Я.

О 771 Методи дослідження електротехнічних комплексів і систем.
монографія/ М. Я. Островерхов, А. М. Сільвестров, К. Х. Зеленський –
К.:

Виконано дослідження електротехнічних, електротехнологічних комплексів, систем та їх елементів з позиції системного підходу, за якого об'єкт дослідження розглядається як елемент багаторівневої (ієрархічної) системи, головний показник якості якої залежатиме від якості побудови математичних моделей її складових. Викладено низку існуючих і нових, ефективніших методів побудови статичних і динамічних, лінійних і нелінійних математичних моделей електротехнічних об'єктів із зосередженими та розподіленими параметрами за результатами теоретичних та експериментальних досліджень. Запропоновані методи ідентифікації надають можливість отримати незміщені та ефективні оцінки параметрів математичних моделей об'єктів автоматичного, адаптивного чи робастного керування в умовах зашумленості вимірів їх змінних стану, невизначеності і не стаціонарності характеристик шумів.

Наведено багато прикладів електротехнічних об'єктів, їх структурно-параметричної ідентифікації та оптимізації управління. Новими й ефективними за структурою та алгоритмами функціонування є адаптивні системи автоматичного керування електротехнологічними процесами із використанням підсистем цілеспрямованої ідентифікації. Розглянуто процеси безконтактної електродинамічної дії у задачах прокату листових матеріалів, плівко-намотувальних механізмів, виготовлення і нанесення ізоляції на кабелі високої напруги та багато інших об'єктів електротехніки.

Для спеціалістів – дослідників електротехнічних та інших динамічних об'єктів з метою побудови оптимального адаптивного керування, діагностики, прогнозування стану простих і складних електротехнічних об'єктів.

ISBN
УДК 681.5.015: 621
ББК з 960.2 – 024

Вступ

Електротехнічні та електротехнологічні комплекси мають широке використання в різних галузях промисловості та сільського господарства. Будь-який комплекс – то є система взаємопов'язаних елементів – об'єктів дослідження. Без детального, цілеспрямованого на основну задачу комплексу, дослідження неможливо забезпечити не тільки високу якість його функціонування, а часто взагалі його безаварійність.

В монографії розглянуто завдання оптимізації функціонування електротехнологічних комплексів металургійної, кабельної, прокатної технологій, яка є необхідним підґрунтям для обґрунтування необхідності побудови фізико-математичних моделей як окремих елементів комплексу (підсистем вимірювання технологічних змінних, побудови математичних моделей керованої і керуючої підсистем комплексу), так і комплексу у цілому.

Отже з позиції цілеорієнтації на основну мету комплексу у монографії подано нові та ефективні складові сучасної теорії ідентифікації, а саме:

- теорія багатократно адаптивних систем ідентифікації, як найдосконаліших систем ідентифікації (СІ), в яких на ґрунті принципів цілеорієнтації, раціонального ускладнення цілеорієнтованих математичних моделей, розширення множин моделей, методів і критеріїв і селекції найбільш підходящих елементів цих множин, з позиції цілеорієнтації на головний показник якості системи, де СІ виступає як підсистема, із урахуванням апріорної та апостеріорної інформації про ситуацію на реальному об'єкті ідентифікації, на основі розширеного поняття релаксаційного проєкту (РП) визначаються оптимальні структура і параметри математичної моделі (ММ) не за показником якості ідентифікації, а за основним показником якості системи у цілому;

- чіткі класифікація СІ від найпростіших до багатократних адаптивних систем ідентифікації (БАСІ) та організація багатокрокового РП дають алгоритм гарантованого визначення оптимальної за головним критерієм ММ об'єкту, що досліджується;

- виходячи з принципів побудови БАСІ (доцільності, раціонального ускладнення, коректності визначення структури і параметрів ММ), наведено приклади побудови **нових** високоефективних елементів БАСІ:

- 1) метод структурно-параметричної ідентифікації складної нелінійної ММ шляхом композиції простих локальних ММ на основі кратного ряду Тейлора;

- 2) корекція прогнозів на основі принципу гладкості фізичних процесів;

- 3) інтегрований метод найменших квадратів (ІМНК), як розвиток методів конфлюентного аналізу, який дає ефективні і незміщені оцінки параметрів ММ у ситуації, коли метод найменших квадратів не працює;

- 4) використання критерію гладкості Пухова - Хатіашвили у задачах коректного визначення непараметричної ММ нелінійної складової динамічних моделей Вінера і Гамерштейна;

- 5) приклад ефективної роботи БАСІ у задачах прогнозування часових рядів

– показників економіки України;

6) єдність і розбіжність підходів до сигнальної і параметричної ідентифікації та методика простого експерименту із коректного визначення лінійної складової рівнянь Ріккати, що наприклад, описують динаміку руху літальних апаратів;

7) узгодження показників якості багаторівневих систем, як спосіб покращення збіжності РП оптимізації систем;

8) математичне моделювання процесу нанесення ізоляції на електрокабель надвисоких напруг;

9) адаптивне керування ТП прокатного стану із використанням цілеспрямованої підсистеми ідентифікації.

Зміст

1	Методологічні основи системного підходу у дослідженні ЕТО	18
1.1	Структура та визначення ЕТО	18
1.2	Визначення ЕТО як системи	23
1.3	Багаторівнева декомпозиція систем з ідентифікатором ЕТО	29
1.4	Принцип узгодженості показників якості підсистем ієрархічного ЕТО	37
1.5	Композиція підсистем різних рівнів ієрархічної ЕТС в єдину систему	42
1.6	Побудова проекторів у БАСІ	44
1.6.1	Алгоритми роботи проекторів	44
1.6.2	Методика оцінювання кількісних характеристик методу ідентифікації	46
1.6.3	Вибір із множини найкращого методу ідентифікації для конкретної ситуації	48
1.7	Дослідження БАСІ у задачах прогнозу електроенергетичних показників	49
2	Елементи класичних методів оцінювання у структурі БАСІ	61
2.1	МНК-оцінювання статичних характеристик ЕТО	61
2.1.1	Регресійні моделі електротехнічних об'єктів	61
2.1.2	Оцінювання вектору коефіцієнтів регресійної моделі за МНК	63
2.1.3	Числові характеристики оцінки за МНК	63
2.1.4	Числові характеристики рівняння регресії	64
2.1.5	Довірчі інтервали регресійної моделі та її параметрів	68
2.1.6	Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів рівняння регресійної моделі	69
2.1.7	Перевірка загальної якості моделі ЕТО за зовнішнім статистичним критерієм	69
2.1.8	Приклад визначення моделі статистики генератора постійного струму за МНК	71
2.1.9	Приклад побудови нелінійних динамічних моделей резистивних елементів на основі МНК і активного експерименту	74

2.2	Універсальний алгоритм оцінювання параметрів ЕТО	84
2.3	Множина методів оцінювання дискретних моделей ЕТО	92
2.3.1	Оцінювання дискретних моделей динаміки ЕТО за МНК	92
2.3.2	Оцінювання за методом допоміжних змінних	96
2.3.3	Оцінювання за методом максимальної правдоподібності	97
2.3.4	Оцінювання за методом стохастичної апроксимації	99
2.3.5	Порівняння характеристик рекурентних методів оцінювання різницевиими моделями ЕТО	100
2.4	Використання трьох типів моделей	103
2.4.1	Приклад розбіжності РП при застосуванні двох моделей	107
2.4.2	Приклад застосування трьох моделей	108
2.5	Підвищення якості оцінювання параметрів	109
2.5.1	Приклад звстосування мінімаксного підходу	112
3	Нові методи конфлюєнтного аналізу у блоці $\{Opt, \alpha\}$ БАСІ	115
3.1	Зсув МНК-оцінок параметрів у реальній ситуації зашумленомті вхідних сигналів ЕТО	115
3.2	Узагальнений МНК та його практична реалізація	118
3.3	Теоретико-експериментальні дослідження ІМНК	120
3.3.1	Загальні положення	120
3.3.2	Аналіз складових методу	121
3.3.3	Кількісні показники оцінки за ІМНК	124
3.3.3.1	Оцінка дисперсії оцінки $\hat{\beta}$	125
3.3.4	Рекурентна форма обчислення	126
3.3.5	Вагова функція інтегрованого МНК	128
3.3.6	Тестування ІМНК	128
3.4	Метод одноразового ділення (МОД)	134
3.4.1	Сутність методу	134
3.4.2	Зміщення оцінок	136
3.5	Метод прогнозу кореляцій	137
3.5.1	Множина $\{Opt, \alpha\}$ модифікованих градієнтних алгоритмів оцінювання	139
4	Оцінювання структури і параметрів нелінійних ЕТО	144
4.1	Метод оцінювання лінійної складової нелінійної динаміки ЕТО	144
4.1.1	Оцінювання лінійної складової нелінійної моделі двигуна постійного струму	144
4.1.2	Тестовий приклад	146
4.1.3	Реальний приклад	149
4.2	Оцінювання багатовимірних нелінійних залежностей за результатами стендових випробувань ЕТО	150
4.2.1	Нелінійна модель тягового зусилля двигуна AI-20м	150

4.2.2	Інші приклади	151
4.2.3	Побудова залежності енергії від добротності RLC-кола . . .	153
4.3	Оцінювання статичної нелінійної складової динамічного ЕТО . .	154
4.3.1	Алгоритм визначення гладкої статичної нелінійності із динаміки ЕТО	156
4.3.2	Тестовий приклад визначення статичної нелінійності електроприводу	157
4.4	Метод об'єднання часткових кусково-аналітичних моделей в єдину аналітичну	160
4.4.1	Загальні положення	160
4.4.2	Інтеграція кусково-аналітичних залежностей в єдину аналітичну	160
4.4.3	Побудова залежності ЕРС машини постійного струму (МПС) від струму збудження магнітного потоку	163
4.4.4	Аналітична модель залежності температури θ у камері горіння на ТЕЦ від витрат повітря $G_{\text{пов}}$ і палива $G_{\text{пал}}$. . .	165
4.4.5	Аналітична модель нелінійності характеристики заслінки газопроводу ТЕЦ	166
4.4.6	Аналітична модель вольт-амперних характеристик транзисторів	166
4.4.7	Аналітична модель асинхронного електроприводу відцентрового насосу	169
4.4.8	Побудова аналітичної моделі $\{\Sigma, \beta\}$ з метою забезпечення інваріантності напруги $U_{\text{я}}$ до струму $I_{\text{я}}$ якоря генератора постійного струму (ГПС)	172
4.4.9	Побудова аналітичної моделі $\{\Sigma, \beta\}$ сонячної батареї з метою максимізації її потужності	174
4.4.10	Виявлення аналітичних закономірностей $\{\Sigma, \beta\}$ у вібраціях електричних машин з метою діагностики та прогнозування їх стану	175
5	Адаптивне керування ТП	179
5.1	Опис технології виробництва кабелю	179
5.1.1	Електричний кабель із полімерною ізоляцією на надвисокій напруги як продукт виробництва	179
5.1.2	Технологічна лінія виробництва електричного кабелю . . .	182
5.2	Особливості нанесення на жилу ізоляції	188
5.2.1	Основні блоки і характеристики системи	191
5.3	Ідентифікація системи векторного керування лінійним асинхронним двигуном	192
5.3.1	Система векторного керування електродинамічним зусиллям безконтактного виконавчого пристрою прокатного стану	192

5.3.2	Цілеспрямована на побудову адаптивної системи векторного керування підсистема ідентифікації	201
5.3.3	Електромеханічний перехідний процес в системі регульованого руху надвисоковольтного кабелю в похилій екструзійній лінії	204
5.3.4	Опис похилої лінії	206
5.3.5	Розробка Simulink-моделі електромеханічної системи	208
5.3.6	Аналіз результатів моделювання	211
5.4	Висновок	213
6	Моделювання процесу ізоляційного покриття кабелів	215
6.1	Термодинаміка шнекового формування	216
6.1.1	Розрахунок температурного поля корпусу	217
6.2	Дослідження процесів у гвинтовому каналі шнека	223
6.2.1	Моделювання процесів руху та температурного поля у гвинтовому каналі шнека	225
6.3	Реологія полімерів	229
6.3.1	Неньютонівська рідина	229
6.3.2	Залежність в'язкості від температури	230
6.3.3	В'язкопружні рідини	231
6.4	Дослідження впливу охолодження шнека на процес екструзії	233
6.5	Розв'язання задачі	236
7	Плівка	244
7.1	Цілеспрямована на оптимізацію процесу намотування ідентифікація пружного стану плівки	244
7.1.1	Інформація відносно конструкції намотувальних пристроїв	244
7.1.2	Системи управління намотувальними пристроями	246
7.1.3	Математичні моделі виробів, що рулонуються, як об'єктів ідентифікації	248
7.1.4	Використання методу селективних вагових функцій для ідентифікації просторового розподілу механічних напруг матеріалу	250
7.1.5	Ідентифікація процесу рулонування з метою побудови адаптації САК	258
7.1.5.1	Математична модель процесу	258
7.1.6	Використання еталонної моделі в програмній системі управління намотуванням плівки	261
7.1.7	Ідентифікація моделі плівки з метою адаптації та оптимізації процесу рулонування	263
7.2	Застосування фільтру Брауна у системах керування ЕТО із запізненням	266

7.3	Система моделювання процесів екструзії полімерних матеріалів .	277
7.3.1	Характеристика процесу отримання рукавних плівок як об'єкту управління	277
7.3.2	Математична модель підготовки розплаву в екструдерах з модульними шнеками	280
7.3.3	Структура системи моделювання	284
7.4	Висновки	285
7.5	Список використаних джерел	286

Перелік ілюстрацій

1.1	Структура електротехнологічних систем	18
1.2	Електричне коло	23
1.3	Три рівні оптимізації в багаторівневій системі	30
1.4	Цілеорієнтована система: 1) – підсистема ідентифікації сигналів; 2) – підсистема ідентифікації об'єкту	32
1.5	Цілеорієнтована система: 3) – підсистема оптимального адаптив- ного керування об'єктом	32
1.6	Функціональна схема багаторазово адаптивної підсистеми іденти- фікації	44
1.7	Задана крива $y(t)$ (суцільна лінія) та її прогнозуючі моделі (пун- ктирні лінії)	50
1.8	Прогнозне $\hat{x}(k_i)$ та виміряне $x(k_i)$ значення ряду, $i = 1, 2, 3$	54
1.9	Часовий ряд одного із показників енергетики України	56
1.10	Залежність ідеального показника I^*	60
1.11	Регресійна залежність показників	60
2.1	Графік нагріву резистора	75
2.2	Графік залежності опору	75
2.3	Графік залежності струму	75
2.4	Схема заміщення резистора	76
2.5	Залежність $\sigma_{y_1}^2$ від I^2	81
2.6	ВАХ резисторів	82
2.7	Поверхні строго випуклих функціоналів J_1, J_2 і траєкторії нала- штування $\hat{\beta}(t)$, компоненти $\partial J_1 / \partial \hat{\beta}$ і $\partial J_2 / \partial \hat{\beta}$ ортогональні	91
2.8	Перетин цих функціоналів по траєкторії $\hat{\beta}(t)$	92
2.9	Поверхні функціоналів J_1, J_2 і траєкторії налаштувань $\hat{\beta}(t)$, ком- поненти $\partial J_1 / \partial \hat{\beta}_1$ і $\partial J_2 / \partial \hat{\beta}_2$ лінійно незалежні	93
2.10	Поверхні функціоналів J_1, J_2 і траєкторії налаштувань $\hat{\beta}(t)$, ком- поненти $\partial J_1 / \partial \hat{\beta}_1$ і $\partial J_2 / \partial \hat{\beta}_2$ лінійно залежні (б)	94
2.11	Поверхня невиклоного (J_1 – функція Розенброка) і виклоного (J_2 – функціоналів) та траєкторія налаштування $\hat{\beta}(t)$	95
2.12	Схема системи оцінювання за методом трьох моделей	106

2.13	Залежність значень оцінок для методів узагальненої послідовно-паралельної моделі (пунктир): трьох моделей (суцільні лінії) від відношення шум/ сигнал	108
2.14	Залежність оптимальної ваги C^* від ступеня кореляції і зашумленості оцінок	114
3.1	Залежність $\eta(m, \theta, \gamma)$. а - $\theta = 0, \gamma = 0, 1$; б - $\theta = 0, \gamma = 1$;	128
3.2	Залежність $\eta(m, \theta, \gamma)$. с - $\theta = 2, \gamma = 0, 1$; д - $\theta = 2, \gamma = 1$	128
3.3	Графік функції $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$	129
3.4	Графік вагової функції $\eta(l, -2, 0, 1)$	130
3.5	Графік вагової функції $\eta(l, -1, 0, 1)$	132
3.6	Графік функцій y при дії на виміри вхідних та вихідних значень білого шуму	132
3.7	Графік лінійної екстраполяції опуклої (а) і увігнутої (б) кореляційних функцій	139
3.8	Структурна схема системи ідентифікації за модифікацією (3.61) метода Ньютона- Рафсона	143
4.1	Залежність відхилень $\Delta\beta_i$ від $x_{\max}$:	147
4.2	Точне значення β та її оцінка $\hat{\beta}$, що отримана із умови мінімуму функціоналу (4.7) для різних апіорних значень β_{apr}	149
4.3	Залежність $\hat{K}$ від $\ I_3\ $ та її МНК-апроксимація	150
4.4	Характеристики тягового зусилля двигуна АІ-20М (неперервні лінії – модель; пунктирні – експериментальні дані): а) - $x_1 = 3000$ m, б) $x_1 = 6000$ m, с) $x_1 = 10\,000$ m	151
4.5	Залежність $y(x_1, x_2)$	152
4.6	Залежність $J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (- - -) та її модель $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (-)	152
4.8	Моделі Гаммерштейна: а) – нелінійність на вході, б) – на виході	154
4.9	Інверсна модель	155
4.10	Отримання статичної нелінійної залежності за МНК	158
4.11	Статична нелінійна залежність за МНК за методом компенсації динаміки	159
4.12	Кусково-аналітична залежність	162
4.13	Залежність $E(I_3)$ та її апроксимація поліномами: 1 – кусково-аналітичним; 2 – дев'ятим степенем; 3 – четвертим степенем	164
4.14	Множина залежностей $\theta(G_{\text{пов}}, G_{\text{пав}})$	165
4.15	Характеристика заслінки газопроводу	167
4.16	ВАХ транзистора МП25, МП26, $\Delta I_B = 0,1$ mA	167
4.17	Апроксимація ВАХ транзистора поліномом п'ятого степеню	168
4.18	Графік аналітичної моделі ВАХ транзистору	169
4.19	Множина напірних характеристик насоса Д6300-80-2	170

4.20	Виникнення коливань між вимірами внаслідок високого порядку поліномау(4.50)	171
4.21	Модель залежності напору H від витрати Q , зовнішнього діаметра робочого колеса D та кількості обертів n асинхронного електро-двигуна	171
4.22	Графіки $E_y(I_z)$ (...) та її апроксимація (-)	173
4.23	Графіки $I_z(E_y)$ (...) та її апроксимація (-)	173
4.24	Лінеаризована та інваріантна до збурення I_y система розімкнено-го керування ГПС	173
4.25	Графіки вимірів $u(t)$, $i(t)$	175
4.26	Непараметрична і параметрична (4.61), що майже збігається з нею, моделі ВАХ $I(U)$ та залежність $P(U)$	175
4.27	Зміна з плином часу рівня вібрації підшипника гойдання (кочення) 176	
4.28	Зміна з плином часу рівня вібрації підшипника гойдання (кочення) 176	
4.29	Виникнення пульсацій при апроксимації поліномом 9-го степеню 177	
4.30	Модель зміни рівня вібрації редуктора	177
4.31	Модель зміни рівня вібрації підшипника	178
4.32	Перша (1) і друга (2) похідні від A по T моделі (4.66)	178
5.1	Загальний вигляд трифазної кабельної лінії	181
5.2	Конструкція кабелю з ізоляцією із зшитого поліетилену заводу “Південкабель”	181
5.3	Трійнг, що зародився на чужорідному включенні в ізоляції	181
5.4	Загальний вигляд лінії нахилоного типу з виробництва кабелю	182
5.5	Блок екструдерів (1) та датчики (2)	183
5.6	Загальний вигляд “чистої” кімнати	184
5.7	Загальний вигляд камери вулканізації та охолодження	185
5.8	Загальний вигляд приймального пристрою	185
5.9	Загальний вигляд накопичувача	186
5.10	Багаторівнева система виробництва кабелю	187
5.11	Структура електротехнічного комплексу технологічної лінії виробництва кабелю	188
5.12	Система векторного керування електродинамічним зусиллям БВП 196	
5.13	Структурна схема регулятора головного потокозчеплення Ψ	198
5.14	Аналогічна до регулятора структурна схема регулятора складовою I_{s2}	199
5.15	Графік перехідного процесу головного потокозчеплення	199
5.16	Графік перехідного процесу електродинамічного зусилля у штабі 199	
5.17	Графік перехідного процесу струму I_{sa}	200
5.18	Графік перехідного процесу струму I_{sv}	200
5.19	Графік перехідного процесу напруги U_{sa}	200
5.20	Графік перехідного процесу напруги U_{sb}	200

5.21	Похибки керування зусиллям у штабі	201
5.22		206
5.23	Похила есктрузійна шина	207
5.24	Модель системи із двома електроприводами	209
5.25	Модель приводу пристрою приймання	209
5.26	Часові діаграми	211
5.27	Часові діаграми	211
5.28	Часові діаграми	212
5.29	Залежність зменшення швидкості від зменшення напруги	213
6.1	Схема теплових потоків при шнековому формуванні	216
6.2	Графіки функції $q(\gamma)$	220
6.3	Температурне поле корпусу шнека за фіксованого t	222
6.4	Температурне поле корпусу шнека за фіксованого r	222
6.5	Температурне поле полімерної маси за фіксованого t	229
6.6	Температурне поле полімерної маси за фіксованого r	229
6.7		233
6.8		243
6.9		243
6.10		243
6.11		243
7.1	Автоматичний пристрій центрального типу	245
7.2	Пристрій периферійного типу	246
7.3	Схема визначення радіусу намотування	247
7.4	Схема трьохконтурної САУ	247
7.5	Електропривод з комбінованим керуванням	248
7.6	Розрахункова схема рулону	249
7.7	Кінематична схема пристрою намотування у рулон	250
7.8	Розрахункова схема механічної частини системи	251
7.9	Апроксимація моделлю (7.6) розподілу відносних окружних на- пружень по радіусу рулону плівки	253
7.10	Апроксимація моделлю (7.7), (7.8)	253
7.11	Розподіл відносних радіальних напружень σ_r/σ_0 по радіусу руло- ну плівки r	254
7.12	під час намотування із $\sigma_0 = \text{const}$	254
7.13	Розподіл σ_r/σ_0 по радіусу рулону плівки r під час намотування із $M_H = \text{const}$	255
7.14	Розподіл σ_r/σ_0	255
7.15	Розподіл σ_Q/N_0 по радіусу рулону плівки r під час намотування із $M_H = \text{const}$	255
7.16	на товарний ролик $d = 100$ мм до кінцевого $d = 400$ мм	255

7.17	Розподіл питомих натягів $N(r)/\sigma_0$ по радіусу r під час намотування із $\sigma_0 = \text{const}$	256
7.18		256
7.19	Розподіл відносних радіальних напружень σ_r/σ_0 по радіусу руло- ну плівки r під час намотування із $N_0 = \text{const}$	257
7.20	Розподіл відносних радіальних напружень σ_r/σ_0 по радіусу руло- ну плівки r під час намотування із $N_0 = \text{const}$	257
7.21	Структурна схема пристрою намотування	260
7.22	Трьохконтурна система автоматичного керування натягненням з моделлю об'єкту	262
7.23	Схема контуру натягу	262
7.24	Структура моделі плівки, $1/p$ – оператор інтегрування	264
7.25	Схема визначення $\Delta F(t)$	264
7.26	Структурна схема визначення функції чутливості зусилля F від жорсткості C	265
7.27	Структурна схема визначення функції чутливості зусилля F від в'язкості μ	266
7.28	Загальна схема визначення функцій чутливості	266
7.29	Функціональна схема системи стабілізації товщини ізоляції	267
7.30	Аналогова реалізація фільтра-екстраполятора Брауна	268
7.31	Процес згладжування суми лінійного сигналу $x(k) = k$ і шуму $\varepsilon(\infty) \approx 20$	269
7.32	Процес згладжування фільтром Р. Брауна суми квадратично зро- стаючого сигналу $x(k) = 0,25k^2$ і випадкового збурення	270
7.33	Ноніусне ввімкнення фільтрів Р. Брауна	271
7.34	Процес прогнозу і компенсації похибки слідування	272
7.35	Процес прогнозу і компенсації похибки слідування	272
7.36	Процес адаптації параметра α до змінної σ	273
7.37	Вхідний, корисний і відфільтрований сигнал множини вимірів $n =$ $\overline{0, 100}$	273
7.38	$n = [9900 \div 10000]$	273
7.39	Зміна α упродовж процесу адаптації	274
7.40	Зміна α упродовж процесу адаптації при $k = 0,5$	274
7.41	Зміна α упродовж процесу адаптації при $k = 2$	274
7.42	Вхідний, корисний і відфільтрований сигнал при $n \in [0; 100]$	275
7.43	$n \in [9900; 10000]$	275
7.44	Зміна α упродовж процесу адаптації	275
7.45	Зміна α упродовж процесу адаптації	275
7.46	Вхідний, корисний і відфільтрований сигнал множини вимірів $n =$ $[0 \div 550]$	276
7.47	Фільтрація і прогноз синусоїдного сигналу	276

7.48	Фрагмент вхідного, корисного і відфільтрованого сигналу множини вимірів $n \in [3150 \div 3650]$	276
7.49	Зміна α упродовж процесу адаптації	276
7.50	Формалізований опис процесу отримання рукавних плівок	278
7.51	Функціональна структура системи моделювання	284

Перелік таблиць

1.1	Систематизація систем ідентифікації за ступенем їх досконалості	27
1.2	Матриця оптимального плану експерименту на ЕТО	40
1.3	Числові значення факторів θ_i	46
1.4	Регресійні моделі показника	49
1.5	Результати прогнозу невідомої закономірності	50
1.6	Дискретні значення часового ряду	56
1.7	Результати моделювання роботи БАСІ у задачі прогнозу	59
2.1	Залежність напруги генератора від струмів	72
2.2	Результати вимірювання напруги	79
2.3	Залежність значень оцінок $\hat{\beta}_i$ від відношення шум/сигнал для методу послідовно- паралельної моделі (ППМ) та методу трьох моделей (МТМ)	109
2.4	Множники можливих відхилень оцінок дисперсій	112
2.5	Оптимальні значення дисперсій	113
3.1	Вхідні та вихідні значення істинних змінних моделі $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$	129
3.2	Значення змінних моделі $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$ з білим адитивним шумом, що діє на x_1 та x_2	131
3.3	Значення шумів і відповідних змінних із шумами	133
3.4	Значення функції $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$ із білим шумом на y	134
3.5	Результати оцінювання у випадку зашумленості $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{y}(t)$ білим шумом	135
3.6	Результати оцінювання у випадку зашумленості тільки $y(t)$	136
4.1	Апріорні і апостеріорні значення параметрів (рис. 4.2)	148
4.2	Залежність відносної СКП	164
4.3	Залежність відносної СКП від n	166
5.1	Марки кабелів з ізоляцією із зшитого поліетилену	180

6.1	Енергія активації течії для поліетилену у температурному інтервалі 108–230 °C	231
-----	---	-----

РОЗДІЛ 1

Методологічні основи системного підходу у дослідженні ЕТО

1.1. Структура та визначення ЕТО

Процеси, що використовують електричну енергію, називають електротехнологічними. Вони реалізуються за допомогою електротехнологічних систем (ЕТС), які поділяються [93] на:

- 1) електромеханічні;
- 2) електротермічні;
- 3) зварювальні;
- 4) п'єзоелектричні;
- 5) електричної обробки матеріалів;
- 6) спеціалізовані.

Електротехнологічні системи (ЕТС), як об'єкти дослідження, незалежно від призначення мають [93] загальну структуру (рис. 1.1).

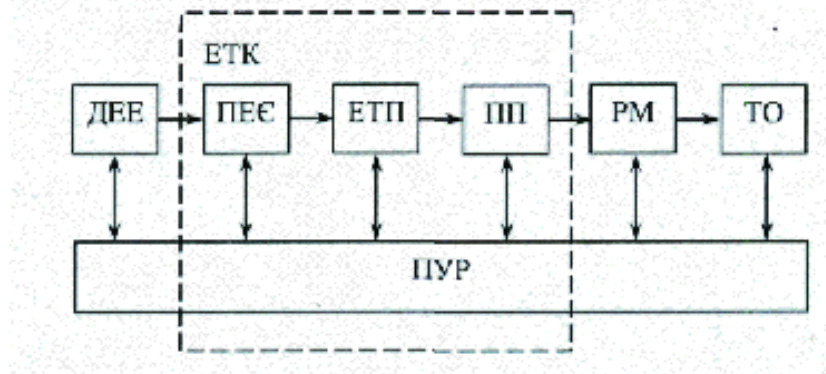


Рис. 1.1. Структура електротехнологічних систем

Електротехнологічні системи складаються з наступних елементів:

- 1) ДЕЕ – джерело електричної енергії, в якості якого може виступати пе-

ретворювач будь-якого виду енергії в електричну енергію (автономні джерела електроживлення, вторинні джерела електроживлення, акумуляторні і сонячні батареї, фотоелементи, термопари тощо). Крім цього, ДЕЕ може бути промисловою мережею, енергосистемою, електромережею транспортних засобів і рухомих об'єктів;

2) *ПЕЕ* – перетворювач електричної енергії, пристрій, що перетворює електричну енергію з одними параметрами в електричну енергію із іншими параметрами (трансформатори, напівпровідникові перетворювачі, височастотні електричні машини, керовані вентильні перетворювачі з автоматичним регулюванням зовнішньої характеристики, електронні гармати, тощо) і призначений для узгодження параметрів джерела електричної енергії із параметрами електротехнологічного пристрою, і управління електротехнологічним пристроєм відповідно до сигналів пристрою управління;

3) *ЕТП* – електротехнологічний пристрій, що перетворює електричну енергію в енергію іншого виду (механічну, теплову, хімічну, гідравлічну, акустичну, світлову), яка називається “технологічною”. Він призначений для реалізації основного технологічного процесу і є основним елементом електротехнологічної системи у цілому;

4) *ПП* – перетворювальні пристрої виконують перетворення “технологічної” енергії із одними параметрами на “технологічну” енергію із іншими параметрами (редуктори, мультиплікатори, гідропідсилювачі, пневмопідсилювачі, пристрої каналізації теплової енергії, системи охолодження, футерування, теплоізоляції тощо) і призначені для узгодження параметрів електротехнологічного перетворювача енергії з параметрами робочої машини і управління робочою машиною відповідно до сигналів пристрою управління і регулювання;

5) *РМ* – робочий механізм. До нього належить частина вищенаведеного електроустаткування, що безпосередньо забезпечує реалізацію необхідних робочих процесів у конкретному технологічному процесі (високотемпературні і низькотемпературні камери для термохімічної обробки виробів із чорних і кольорових металів, вузли, механізми і машини, приведені в рух електричними двигунами, тощо);

6) *ТО* – технологічний об'єкт. Це об'єкт, який піддається перетворенням у результаті виконання технологічних операцій. Саме для нього створюється дана технологічна система;

7) *ПУР* – пристрій управління. До нього належать інформаційні системи, що забезпечують управління і регулювання параметрів перетворення енергії у ході виконання технологічного процесу;

8) *ЕТК* – електротехнічний комплекс, підсистема електротехнологічної системи, що призначена для реалізації робочих процесів робочої машини у заданому технологічному процесі.

Сукупність різномірних підсистем, що взаємодіють із ЕТК на ґрунті закону загального взаємозв'язку, складають “довкілля”.

ЕТО може представляти собою як увесь ЕТК, так і окремі його частини і елементи. В залежності від виконуваних завдань ЕТО бувають [93]:

- 1) технологічні, де відбувається перетворення початкових матеріалів у готові вироби;
- 2) транспортні, де відбувається переміщення сировини, напівфабрикатів або готових виробів;
- 3) енергетичні, де відбуваються перетворення енергій;
- 4) інформаційні, у яких здійснюються процеси, пов'язані з управлінням (керуванням) об'єктами.

Високоякісна продукція є продукт високоякісних складових багатостадійного технологічного процесу (ТП), де кожна ділянка робить свій внесок у вихідний показник підсистеми верхнього рівня, у якість і собівартість продукції. Тому дуже важливо формалізувати та узгодити з головним показником показники якості процесу на кожній ділянці та побудувати адаптивні (до природної зміни параметрів) оптимальні системи автоматичного керування (САК) кожною ділянкою. Останнє можливо лише за наявності підсистем ідентифікації ділянок ТП як об'єктів керування з використанням принципів побудови багаторівневих систем. Модель даного об'єкту – це зображення істотних сторін реальної (чи конструйованої) системи у зручній формі, що відбиває необхідну для досягнення головної мети інформацію про систему. Це визначення можна застосувати і до математичних моделей ЕТО, серед яких розрізняють [93]:

1) Непараметричні моделі ЕТО, які припускають використання деякого перетворення або функціонального простору, за допомогою якого можна представити вхідний і вихідний сигнали. Прикладами таких перетворень можуть слугувати розкладання у ряд Фур'є, розкладання за ортогональними сигналами прямокутної форми, розкладання у ряд по функціях Лягера та інші. Побудова моделей цього типу полягає у визначенні зв'язку між функціональними просторами вхідних і вихідних сигналів. Використовується ідея "чорної скриньки", яка не враховує фізичну природу ЕТО, що досліджується. Перевагою цих моделей є те, що вони не вимагають знання структури об'єкту. Недолік – функціональний простір є практично нескінченновимірний, що ускладнює його використання, зокрема, моделі непридатні для задач діагностики параметрів об'єкту.

2) Параметричні моделі ЕТО є системи із диференціальних або диференціально - алгебраїчних рівнянь скінченної розмірності. Параметри цих рівнянь, які є параметри моделей, виступають як координати деякого простору. Перевагою параметричних моделей є використання простору параметрів скінченної розмірності, а також урахування апріорної інформації про головні складові структури і фізичні параметри ЕТО.

Саме теорія ідентифікації на основі попередньої (апріорної) і поточної (апостеріорної) інформації про причини (вхідні змінні ЕТО) і наслідки (вихідні змінні ЕТО) займається визначенням математичної моделі, що зв'язує ці змінні. Абсолютно точну ізоморфну модель ЕТО побудувати неможливо, оскільки

за законами реального світу не існує ідеально ізольованого автономного об'єкта (все із усім взаємно пов'язане); не існує нічого стаціонарного (сталого), бо рух і матерія нероздільні, а виходячи з цього, як наслідок, не існує лінійних стаціонарних систем. Отже, будь-яка математична модель реального ЕТО буде наближеною. Тому для отримання якісного наслідку в задачах керування, діагностики внутрішніх параметрів і змінних стану ЕТО, необхідно методами теорії ідентифікації побудувати таку математичну модель, за якої як найкраще вирішується головне завдання (керування, прогноз, діагностика, тощо). Теорія ідентифікації – це фактично формалізована математична теорія пізнання об'єктів реального світу.

Для кількісної і якісної оцінки процесів енергоперетворення, що протікають в ЕТО, використовуються параметричні математичні моделі, що припускають застосування систем диференціальних або диференціально-алгебраїчних рівнянь [5, 7, 20, 21, 22]. Найбільш загальним підходом у математичному моделюванні цього типу, який дозволяє детальніше враховувати процеси перетворення енергії в ЕТО, є енергетичний формалізм Лагранжа [7, 22, 23]. Відповідно до сучасних уявлень енергія є міра кількості руху матерії незалежно від форми її прояву (механічною, електромагнітною, тепловою, хімічною, атомною). Енергія може акумулюватися на одних елементах ЕТО у вигляді потенціальної або кінетичної складової (індуктивні і ємнісні елементи електричних кіл, пружні елементи механічних пристроїв, теплопередавальні елементи теплових пристроїв тощо). На інших елементах ЕТО енергія розсіюється (резистивні елементи електричних пристроїв, дисипативні елементи механічних пристроїв, теплопередавальні елементи теплових пристроїв).

Для системи, що складається із M елементів, запасена енергія визначається виразом

$$W_K = \sum_{i=1}^N W_i^T + \sum_{j=1}^P W_j^U, \quad (1.1)$$

де W_i^T , $i = \overline{1, N}$, $N \leq M$ – величина кінетичної енергії, що запасена в N елементах ЕТО; W_j^U , $j = \overline{1, P}$, $P \leq M$ – величина потенціальної енергії, що запасена в P елементах ЕТО.

Якщо у системі наявні G елементів, кожен із яких розсіює енергію W_k^R , тоді розсіяна енергія визначається сумою

$$W_R = \sum_{k=1}^G W_k^R. \quad (1.2)$$

Стан ЕТО визначається набором змінних, що характеризують процеси у підсистемах. Кожен із наборів є окрема підсистема певної фізичної природи. Для представлення процесів перетворення енергії ЕТО у цілому і для взаємозв'язку різнорідних підсистем між собою згідно з формалізмом Лагранжа, запроваджуються:

– узагальнені координати q_i , $i = \overline{1, S}$ – усі S фізичних змінних незалежно від їхньої фізичної природи, які однозначно визначають стан ЕТО у цілому (кут повороту, заряд, температура тощо);

– узагальнені сили F_i – сили, що діють у напрямі узагальнених координат q_i , й які визначаються $f_i = dW_i/dq_i$;

– співвідношення, що називаються силовими функціями: $L = W^T - W^U$, $H = W^T + W^U$.

Силові функції відомі як функція Лагранжа L і функція Гамільтона H . Вони містять досить глибоку інформацію про процеси у підсистемах та їх взаємодію. За їх допомогою досягається універсальність моделювання різномірних підсистем ЕТО із одночасним збігом опису електричних кіл рівняннями Кірхгофа, які моделюють в ЕТО основний елемент – електротехнологічний перетворювач (ЕТП).

Рівняння Лагранжа другого роду для систем, в яких наявні елементи, що розсіюють енергію, і на які діють зовнішні сили $F(t)$, має вигляд [4, 15, 24, 25]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_m} = F(t), \quad m = \overline{1, M}, \quad (1.3)$$

де D – функція розсіювання Релея; $\dot{q}_m = dq_m/dt$ – швидкість змін m -ї узагальненої координати.

Рівняння має низку властивостей, які роблять їхній вибір переважним порівняно із іншими підходами:

1) для основної частини ЕТО (джерела електричної енергії, електричного перетворювача, електротехнологічного перетворювача) рівняння Лагранжа другого роду тотожні рівнянням, складеним за законами Кірхгофа, що дає можливість використання прийомів, методів і способів, добре розроблених у теорії електричних кіл [22];

2) рівняння Лагранжа, так само як і рівняння для енергій, зберігають незмінною свою форму для різномірних підсистем, унаслідок чого відпадає необхідність використання відповідно різномірних систем змінних параметрів і понять;

3) рівняння Лагранжа другого роду визначають через силову функцію Лагранжа, яка дозволяє визначити всі необхідні векторні величини (сили, моменти, швидкості тощо), будучи у той самий час скалярною функцією, чим досягається спрощення процедури моделювання.

Для ілюстрації застосування енергетичного формалізму Лагранжа розглянемо найпростіший приклад.

Приклад. Електричне RLC-коло містить активний опір R , індуктивний K і ємнісний C елементи (рис. 1.2).

$$W_k^T = 0,5L \cdot i^2, \quad D = R \cdot i^2, \quad W_k^U = q^2/(2C).$$

Дана система характеризується однією узагальненою координатою q_1 – електричним зарядом q . Швидкість зміни узагальненої координати q_1 є струм у

колі $q_1 = i$. Кінетичною енергією у даному випадку є енергія магнітного поля, що запасена індуктивним елементом $W_k^T = 0,5L \cdot i^2$. В якості потенціальної енергії виступає енергія електричного поля, що запасється конденсатором, $W_k^U = q^2/(2C)$. На активному опорі відбувається розсіювання частини енергії системи. За законом Джоуля–Ленца величина розсіяної енергії в одиницю часу $D = R \cdot i^2$. У системі присутня одна узагальнена сила $F_1(t)$, яка дорівнює значенню ЕРС джерела $e(t)$. Якщо значення активного опору, індуктивності і ємності, що називаються параметрами системи, вважати сталими, тоді силова функція Лагранжа має вигляд

$$L_k = \frac{1}{2}L \cdot i^2 - \frac{q^2}{2C}. \quad (1.4)$$

Похідні, що входять у рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{\partial L_k}{\partial \dot{q}_1} = L \cdot i; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_k}{\partial \dot{q}_1} \right) = L \frac{di}{dt}; \quad \frac{\partial L_k}{\partial q_1} = \frac{q}{C}; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = R \cdot i. \quad (1.5)$$

Підставляючи отримані вирази (1.5) у рівняння Лагранжа (1.3), отримують

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{q}{C} = e. \quad (1.6)$$

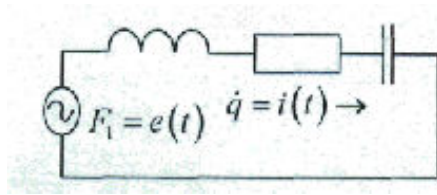


Рис. 1.2. Електричне коло

Співвідношення (1.6), що складено за допомогою рівняння Лагранжа другого роду, повністю збігається із рівнянням для даного кола, що отримується за II законом Кірхгофа. Воно може бути використане для визначення поточних значень узагальненої координати за відомими значеннями

параметрів системи і закону зміни узагальненої сили (пряме завдання), або для визначення невідомих значень параметрів за відомими законами зміни узагальненої координати і узагальненої сили (завдання ідентифікації або зворотне завдання).

Але, реальне RLC-коло (коло із реальними елементами) має складнішу модель, оскільки RLC -параметри на основі фундаментального закону загального взаємозв'язку залежать від змінних стану $I(t)$, $q(t)$ і вхідного впливу $F(t)$. Вочевидь, будь-яка математична модель лише наближено відтворює поведінку реального ЕТО. Отже, постає завдання відшукати таку модель, за якої найкраще вирішується головна задача ЕТК. Така задача може бути успішно вирішена лише з використанням системного підходу.

1.2. Визначення ЕТО як системи

Важливим кроком розв'язання задачі дослідження ЕТО є її формалізація. Постановка задачі полягає у відображенні невизначеної ситуації, що пов'язана

із ЕТО, у формалізовану задачу, визначену на множині кількісно порівнянних елементів. Такими елементами є система, процеси, що в ній протікають, критерії (цілі) і стратегії їх оптимізації (досягнення цілей).

З умови фізичної реалізуємості подано фундаментальні визначення стаціонарної, дискретної, неперервної, скінченновимірної, лінійної, гладкої системи та динамічної системи з точки зору їх зовнішньої поведінки, тобто, спостерігача [86]. Для гладких систем (реальні системи майже всі гладкі) Р. Калманом доведено, що перехідна функція стану, тобто відображення

$$T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X \quad (1.7)$$

водночас є розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.8)$$

де $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \in \Omega$, $t \in T$; T – впорядкована множина моментів часу; Ω, X – множина вхідних впливів і змінних стану.

Стан системи – це інформація про минуле, яка необхідна для повного опису майбутньої поведінки (тобто вихідних змінних) системи, якщо поведінка її вхідних змінних відома, починаючи з поточного часу t_0 .

Якщо множина X належить скінченновимірному простору, модель (1.8) у загальному випадку являє собою скінченновимірну систему нелінійних нестационарних диференціальних рівнянь першого порядку.

Для гладкої системи (1.8) справедливе існування таких $X_1 \subset X$, $\omega_1 \subset \Omega$, $T_1 \subset T$, що (із точністю до наперед заданої малої похибки ε) системі (1.8) буде еквівалентна система лінійних диференціальних рівнянь із матрицями $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ сталих коефіцієнтів:

$$\frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_1(t); \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{x}_1(t), \quad (1.9)$$

де $\mathbf{x}_1(t)$ – вектор-функція (x_{1i} , $i = \overline{1, n}$; $\mathbf{y}_1(t)$ – вектор-функція вимірювань $\{y_{1i}(t), i = \overline{1, r}\}$; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – матриці розміру $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ відповідно.

Структура і рангові властивості матриць $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ визначають умови керованості, спостережності та ідентифіковності системи (1.9) [57].

Критерій оптимальності або мета, поставлена системою більш високого рівня ієрархії, може мати “розмитий” характер. Однак у багатьох випадках формалізація критерію досягається шляхом завдання функціоналу, який однозначно визначає ефективність поведінки системи. Під функціоналом I мають на увазі відображення

$$T \times T \times X \times \Omega \rightarrow R, \quad (1.10)$$

де R – множина дійсних чисел.

Мета системи – забезпечення екстремального значення I^* цього функціоналу. Системам (1.8), (1.9) для фіксованих початкових $t_0 \in T$ і кінцевих $t_1 \in T$

моментів часу, станів $\mathbf{x}_0 \in X$, $\mathbf{x}_1 \in X$, поведінки системи $\mathbf{x}(t)$, яка викликана ненульовими початковими умовами та керувальним впливом $\mathbf{u}(t)$, відповідає конкретне дійсне число I із множини R . Керуючий вплив $\mathbf{u}^*(t)$ є оптимальний, якщо число I із урахуванням початкових умов, рівняння (1.8) чи (1.9) та інших обмежень на $\mathbf{x}(t)$ та $\mathbf{u}(t)$ набуває екстремальне значення. Для відшукування оптимальної стратегії управління $\mathbf{u}^*(t)$ реальним об'єктом необхідна його модель (1.8), тобто структура і параметри відображення F .

Визначення відображення F у рівнянні (1.8) за результатами вимірів $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ є завдання ідентифікації. Оптимальність моделі $\hat{f}$ відображення F оцінюється критерієм якості ідентифікації J , який також є функціонал, що відображає множини реалізацій або конкретні реалізації $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{x}_M(t)$ у дійсне число J , де $\mathbf{x}_M(t)$ є розв'язок рівняння моделі для спільного із об'єктом вектора $\mathbf{u}(t)$ входних впливів.

$$\frac{dx_M}{dt} = \hat{f}(t, x_M, \mathbf{u}), \quad (1.11)$$

Оскільки у загальному випадку $\hat{f} \neq f$, оптимальне для моделі (1.11) значення $\hat{I}^*$, отримане при керуючому впливі на об'єкти, буде дещо гірше істинно оптимального значення I^* .

Моделю (1.11), побудовану із урахуванням не тільки функціоналу J , але й I , назовемо цілеорієнтованою [141].

Якщо на множині $\{F_i\}$ ($i = \overline{1, n}$) допустимих відображень $\hat{f}$ (1.11) для фіксованого управління $\mathbf{u}(t)$ дає екстремальне значення $\hat{I}^*$, тобто $\hat{f} = \arg \operatorname{extr}_{\hat{f} \in \{f_i\}} I$,

таку модель назовемо *цілеорієнтованою оптимальною*. Близькість моделі до цілеорієнтованої оптимальної визначається близькістю вимірюваних змінних $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $\hat{\mathbf{u}}(t)$ до дійсних змінних $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{u}(t)$ реального об'єкта. При вирішенні задачі ідентифікації в (1.11) і в $J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_M)$ заміщуються не $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{u}(t)$, а їхні оцінки $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $\hat{\mathbf{u}}(t)$, формування яких є задача ідентифікації сигналів об'єкту.

Оцінки $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $\hat{\mathbf{u}}(t)$ сигналів $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{u}(t)$ в (1.8) отримують за допомогою фільтрів

$$\frac{d\hat{\mathbf{z}}}{dt} = \hat{f}_\phi(t, \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{z}), \quad (1.12)$$

де $\mathbf{z}(t)$ – вектор-функція вимірюваних первинними перетворювачами сигналів $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{u}(t)$;

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix},$$

N_x, N_u – похибки вимірювання $\mathbf{x}$ і $\mathbf{u}$ відповідно.

Оптимальність фільтрів (1.12) оцінюється критерієм якості фільтрації J_ϕ – функціоналом від сигналів $\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{z}$ або їхніх спектральних характеристик. Оскільки J_ϕ не дає ідеального перетворення $\mathbf{z}$ в $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, від критерію J_ϕ у задачі ідентифікації сигналів $\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{z}$ залежатиме значення критерію J у задачі ідентифікації

відображення $\hat{f}$ в (1.11), від якого (своєю чергою) залежить значення критерію I якості управління реальним об'єктом. Так само як і для моделі (1.11), для фільтру (1.12) запровадимо поняття цілеорієнтовності та оптимальності. Фільтр (1.12) цілеорієнтовний, якщо при його побудові певним чином бралася до уваги задача ідентифікації $\hat{f}$ в (1.11). Якщо на множині допустимих відображень $\{f_\phi\}$ відображення J_ϕ в (1.12) за фіксованого $\hat{f}$ забезпечує екстремальне значення J^* , тобто

$$f_\phi = \arg \operatorname{extr}_{f_{\phi_i} \in \{\phi, i\}} J, \quad (1.13)$$

фільтр (1.12) буде оптимальним *цілеорієнтованим на задачу ідентифікації*.

Оптимізація функціоналів I, J, J_ϕ пов'язана із поняттям релаксаційного процесу [115]. Множина $\{Q_k\}$, $k \geq 0$, кожен елемент якої належить деякій (зазвичай опуклій) області G нормованого простору, називається *релаксаційним процесом* (РП) щодо функції $F(Q_k)$, якщо послідовність $F(Q_k)$ для упорядкованого за значенням k також упорядкована. Так, у задачі мінімізації послідовність $F(Q_k)$ така, що $F(Q_0) \geq F(Q_1) \cdots \geq F(Q_n)$. РП збігається за функціоналом, якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} (F(Q_k) - F(Q^*)) = 0$, і просто збігається, якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = Q^*$, де Q^* – істинне значення. Надалі визначення РП поширимо на випадок, коли елементи Q_k належать області G простору, в якому не задано поняття норми або відстані (знак $\geq$ розуміється як символ відношення порядку). Так, у задачі ідентифікації при введенні підмножини структур Σ моделей і множин методів оптимального оцінювання вектору β параметрів моделі (Σ, β) РП не є строго релаксаційний. Множину $\{Q_k\}$, $k \geq 0$, назвемо РП щодо $F(Q_k)$, якщо для будь-якого $k > 0$ існує таке значення $j > 0$, що $F_{k+j} \leq F_k$. Такий РП не є релаксаційний і збіжність його за функціоналом F або за Q_k залежить від розмірності і впорядкованості підмножини ненормованих елементів (у нашому випадку це $\{\Sigma, Opt\}$).

Системою ідентифікації у загальному вигляді будемо називати прямий добуток підмножин $\{\Sigma, \beta\}$, $\{Opt, \alpha\}$, $\{J\}$, $\{I\}$, $\{T\}$, що позначається як $\{\{Opt, \alpha\}, \{J\}, \{I\}, \{T\}\}$ і наділений структурою, яка дозволяє реалізувати релаксаційний процес відносно показника F , такий що

$$F_{k+j} \leq F_k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad j > 0; \quad Q_k \in \{\{Opt, \alpha\}\}, \quad F_k \in \{\{J\}, \{I\}\}.$$

Тут $\{\Sigma, \beta\}$ – підмножина моделей; $\{Opt, \alpha\}$ – підмножина методів оцінювання вектора β параметрів моделей $\{\Sigma, \beta\}$; α – вектор параметрів методу Opt; $\{J\}$ – підмножина функціоналів від $\varepsilon(\beta, t)$, що оптимізуються за β методами $\{Opt, \alpha\}$; $\varepsilon(\beta, t)$ – різниця вимірюваних координат реального об'єкта Σ_∞ і моделі; $\{I\}$ – підмножина основних функціоналів, що визначають якість вирішення основної задачі для реальної системи Σ_∞ із використанням моделі $\{\Sigma, \beta\}$; $\{T\}$ – підмножина моментів t_k часу, на якому реальну систему Σ_∞ представлено набором даних $\{u(t_k), y(t_i)\}$ у вигляді системи з точки зору її зовнішнього поведіння [57].

У табл. 1.1 визначено різні за $\{Q_k\}$ і $\{F_k\}$ системи ідентифікації.

У практичному застосуванні система ідентифікації тим ефективніша, чим менше потрібно для її роботи апіорної інформації. Забезпечення необхідної якості ідентифікації досягається адаптацією [69,70,142,143], що полягає у цілеспрямованій зміні одного, кількох або всіх елементів підмножини $\{Q_k\}$ з метою досягнення екстремуму головного показника F . За інших рівних умов, чим краще алгоритм адаптації, тим ефективніша система. Якщо не враховувати фактор складності, при адаптації $\{Q_k\}$ результат тим ефективніший, чим ширша підмножина $\{Q_k\}$. У разі врахування у показнику F складності системи існує оптимальна за F потужність підмножини $\{Q_k\}$. Спільним для всіх видів систем ідентифікації є наявність РП $\{\beta_k\}$ щодо показника J , а різним – склад підмножин $\{Q_k\}$ і $\{F_k\}$.

Табл. 1.1. Систематизація систем ідентифікації за ступенем їх досконалості

N	Тип системи	$\{Q_k\}$			$\{F_k\}$		
		β	Σ	α	Opt	J	I
1	сі	$\{\beta_k\}$	Σ	α	Opt	J	-
2	CI	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	α	Opt	J	-
3	aci	$\{\beta_k\}$	Σ	$\{\alpha_k\}$	Opt	J	-
4	ACI	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	Opt	J	-
5	бaci	$\{\beta_k\}$	Σ	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	I
6	БACI	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	I
7	CC	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	$\{I_k\}$

Відповідно до табл. 1.1 можливі такі системи ідентифікації:

1) Системи ідентифікації у вузькому сенсі (**сі**) реалізують РП $\{\beta_k\}$ щодо J за сталих Σ , Opt , α і порожній множині I , тобто $Q_k = \{\beta_k\}$, $F = J$. Тут задача ідентифікації еквівалентна задачі оптимізації функції $J(\beta_k)$.

2) Системи ідентифікації в широкому сенсі (**CI**) реалізують РП $\{\Sigma_k \beta_k\}$ щодо J за сталих Opt , α , і порожній множині I , тобто $Q_k = \{\Sigma_k \beta_k\}$, $F = J$. Наприклад, у [57,138, 143] розглянуто динамічні ортогональні, ноніусні або регресійні моделі із вектором β_k змінної розмірності, для яких оптимальна по J пара $\{\Sigma^*, \beta^*\}$ визначається за умови

$$\{\Sigma^*, \beta^*\} = \arg \min_{\{\Sigma_k, \beta_k\}} J(\{\Sigma_k, \beta_k\}).$$

3) Адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (**aci**) реалізують РП $\{\beta_k, \alpha_k\}$ щодо J при постійному Opt і порожній множині I , тобто $Q_k = \{\beta_k, \alpha_k\}$, $F = J$. Так, системи [110], що використовують прискорений градієнтний спуск $\{\beta_k\}$ по J , як α_k мають параметр регуляризації, що оптимізується за допоміжної умови мінімуму різниці середньоквадратичних значень похибок для двох

однотипних моделей, які налаштовуються однаковими алгоритмами Opt , але відрізняються параметром α : для першого $\alpha = \alpha_k$, для другого $\alpha = \alpha_k + \Delta$, де $\Delta > 0$, $\alpha_k > 0$.

4) Адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі (**АСІ**) реалізують РП $\{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\}$ щодо показника J при постійному Opt і порожній множині I , тобто $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\}$, $F = J$. Наприклад, системи вибору “найкращої регресії” при оцінюванні вектора β , що розширюється за розмірністю, із застосуванням параметра α , що регуляризує, який підбирається за алгоритмом гребеневої регресії [51].

5) Багаторазово адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (**басі**) реалізують РП щодо основного показника I у вигляді композиції двох РП: а) $\{\beta_{kn}\}$, $n = 1, 2, \dots$ щодо J_k ; б) $\{Opt_k, \alpha_k, I_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, щодо I , тобто $Q_k = \{\beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$, $F = \{\{I_k\}, \{I\}\}$. Поняття багаторазовості пов’язано з повторенням РП $\{\beta_{kn}\}$ для кожного елемента $\{Opt_k, \alpha_k, I_k\}$ РП вищого рангу. Якщо кожному показнику J_k відповідає конкретний метод Opt або для евристичних алгоритмів показник J_k взагалі відсутній, відносно I оптимізується пара “метод – його параметри” $\{Opt_k, \alpha_k\}$. Прикладом **басі** може слугувати система [39], в якій для заданої за одним із п’яти показників I (або їх зваженої суми), що включають критерії регулярності та незміщеності [68], точності прогнозування по моделі тощо, із семи методів $\{Opt_k\}$ та їхніх параметрів $\{\alpha_k\}$ - визначався оптимальний елемент $\{\beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$ згідно із пп. 5а і 5б.

6) Багаторазові адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі (**БАСІ**) реалізують РП відносно головного показника I $\{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ у вигляді композиції двох РП :

а) $\{\beta_{kn}\}$, $n = 1, 2, \dots$ щодо J_k ;

б) $\{\Sigma_k, Opt_k, \alpha_k, I_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, щодо I , тобто $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$, $F = \{\{I_k\}, \{I\}\}$, де I – показник більш високого рівня.

Прикладом **БАСІ** (для одноелементної множини $\{Opt\}$ є системи, побудовані на основі методу групового урахування аргументів [51], у яких структуру Σ та параметри β підбирають за умови екстремуму I . За інших рівних умов обґрунтоване розширення множини $\{Opt_k\}$ дозволить отримати моделі, ефективніші за критерієм I . Якісною відмінністю систем за пп. 5, 6 є їхня цілеорієнтація на показник I , який регуляризує і оптимізує задачу вибору $\{\Sigma^*, \beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$. У багаторазово адаптивних системах знімається традиційне для систем за пп. 1–4 питання: як оцінити якість моделі, що отримано у результаті ідентифікації [143]? Якість моделі оцінюють за показником I . Це найоб’єктивніша оцінка, оскільки найкраща та модель, застосування якої дає найкраще рішення основної задачі, якість якої визначено показником I .

7) Системи керування, що самоорганізуються (**СС**), реалізують РП щодо деякого показника $\Lambda(I)$ більш високого рангу $\{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k, J_k, I_k\}$ у вигляді композиції трьох РП:

а) $\{\beta_{qkn}\}$, $n = 1, 2, \dots$ (q і k фіксовані), щодо J_{qk} зі стаціонарною точкою

$$\beta_{qk} = \arg \operatorname{extr}_{\beta_{qkn}} J_{qk}(\beta_{qkn}, \Sigma_q, Opt_{qk}, \alpha_{qk}) = \arg J_{qk}^*$$

б) $\{J_{qk}^*(\beta_{qk}, \Sigma_{qk}, Opt_{qk}, \alpha_{qk})\}$, $k = 1, 2, \dots$ (q фіксоване), щодо I_q зі стаціонарною точкою

$$J_q^* = J_q(\beta_q, \Sigma_q, Opt_q, \alpha_q) = \arg \operatorname{extr} I_q(J_q^*) = \arg I_q^*;$$

в) $\{J_q^*(\beta_q, \Sigma_q, Opt_q, \alpha_q)\}$, $q = 1, 2, \dots$, щодо показника Λ більш високого рівня зі стаціонарною точкою $I^* = \arg \operatorname{extr} \Lambda(I_q^*) = \arg \Lambda^*$ тобто $Q_k = \{(\beta_q, \Sigma_q, Opt_q, \alpha_q)\}$, $F = \{J, I_k\}$.

Наприклад, задача вдосконалення процесу автоматизованого керування кабельним виробництвом. Λ – показник ефективності підприємства; $\{I_q\} = \{I_1, I_1\}$, I_1 – показник якості стабілізації технологічних змінних x агрегату в області робочих режимів x_0 , що задаються експертами (технологами); I_2 – показник якості роботи агрегату; $\{J_{qk}\}$ – множина показників якості ідентифікації локальними моделями $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$, які відображають перетворення керуючого впливу u у вихідну змінну x ($k = 1$), і моделями якості $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$, що відображають перетворення I_2 . На першому етапі автоматизації ($I_q = I_1$) за J_{1k} визначають локальні моделі $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$ за допомогою найпростіших методів ідентифікації $\{Opt_{1k}, \alpha_{1k}\}$. За моделями $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$ підбирають локальні регулятори, які стабілізують x в області x_0 за критерієм мінімуму I_1 . Згідно РП пп. 7а, 7б визначають оптимальний по I_1 елемент. На другому етапі, після автоматизації процесу збирання і обробки інформації, переходять до побудови повнішої моделі $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$, що пов'язує I_2 зі змінними x, u . По моделям $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$, які містять у собі моделі $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$, уточнюють параметри локальних регуляторів та оптимальне значення уставок x_0^* робочих режимів x_0 . Далі оптимальний за I_2 елемент $\{(\beta_2^*, \Sigma_q^*, Opt_2^*, \alpha_2^*)\}$ визначають уже за результатом РП пп. 7а, 7б. Отже, перехід від Σ_1 до Σ_2 призвів до заміни (згідно РП п. 7в) основного показника I_1^* на I_2^* , як аргументу головного показника Λ .

1.3. Багаторівнева декомпозиція систем з ідентифікатором ЕТО

Декомпозиція надає можливість представити систему великої розмірності зі складною мережею прямих і зворотних зв'язків системою простіших підсистем, які краще піддаються формалізації. Уявімо завдання проектування системи і саму систему оптимального адаптивного управління ЕТО у вигляді трьох підзадач і відповідних їм підсистем (рис. 1.3):

- оптимального управління (рівень 3);
- ідентифікації відображення вхід–вихід ЕТО (рівень 2);
- ідентифікації сигналів (рівень 1).

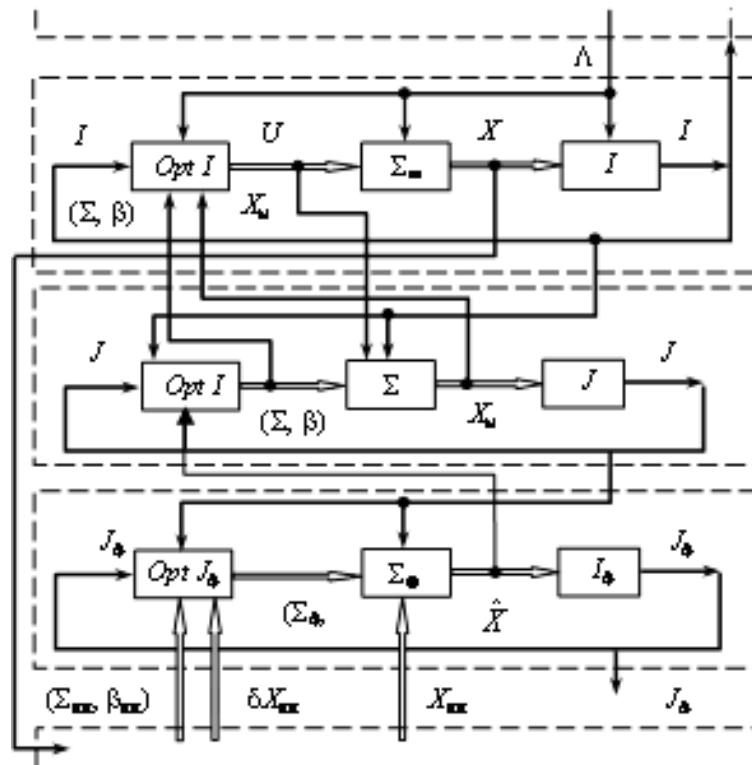


Рис. 1.3. Три рівні оптимізації в багаторівневій системі

Елементи кожної підсистеми утворюють замкнену за місцевим показником якості систему оптимізації, що функціонує за алгоритмом систем зі зворотним зв'язком:

- видача керуючого впливу на ЕТО;
- вимір або розрахунок реакції ЕТО;
- оцінка оптимальності підсистеми за критерієм її рівня.

Між собою підсистеми об'єднані прямими (знизу вгору) і зворотними (згори вниз) зв'язками. Крайні підсистеми об'єднані такими зв'язками з не розглянутими тут системами більш низького та високого рівнів. Наведемо позначення і фізичний зміст елементів, внутрішніх і зовнішніх прямих і зворотних зв'язків.

Підсистема ідентифікації сигналів ЕТО (рівень 1) має такі елементи та зв'язки:

J_ϕ – формувач показника якості фільтрації вектора x сигналів об'єкта;

Σ_ϕ – фільтр, що перетворює сигнал виходу первинного перетворювача $X_{\text{пп}}$ в його оцінку ;

$\text{Opt} J_\phi$ – оптимізатор по J_ϕ структури Σ_ϕ і вектора β_ϕ параметрів фільтра;

$\Sigma_{\text{пп}}, \beta_{\text{пп}}$ – інформація про структуру і параметри первинних перетворювачів

чів (датчиків) фізичних змінних об'єкта;

$\Sigma_{пп}$ – передаточна функція датчика, статична (тарувальна) характеристика, тощо;

$\delta X_{пп}$ – інформація про похибки датчиків: систематичні, випадкові, часові, частотні та ймовірнісні характеристики;

J, J_{ϕ} – інформація про критерії оптимальності систем ідентифікації об'єкту і його сигналів: J надходить по каналу зворотного зв'язку у дану підсистему, J_{ϕ} – у підсистему первинних перетворювачів.

Підсистема ідентифікації ЕТО (рівень 2) містить:

J – формувач показника якості ідентифікації об'єкта;

Σ, β – модель об'єкта зі структурою Σ і вектором β параметрів;

$OptJ$ – оптимізатор за показником J структури Σ і вектором β параметрів моделі;

$\Sigma_{\phi}, \beta_{\phi}, \hat{X}$ – інформація про фільтр і оцінку $\hat{x}$ сигналу X , отриману з сигналу $x_{пп}$ первинного перетворювача;

Σ, β, x_M – інформацію про модель (Σ, β) об'єкту управління і оцінку x_M сигналу X , отриману за сигналом $\hat{X}$ фільтра;

I, J – коригувальні зворотні зв'язки з системи управління у систему ідентифікації і з системи ідентифікації об'єкта у систему ідентифікації сигналів.

Підсистема оптимального управління ЕТО (рівень 3) містить:

I – формувач показника якості управління;

Σ_{∞} – реальний об'єкт (його вхідні і вихідні змінні u і x);

$OptI$ – оптимізатор показника I по керуючому впливу u ;

x – вихід ЕТО – вхід підсистеми первинних перетворювачів;

u – вхід ЕТО і моделі;

Λ, I – коригувальні зворотні зв'язки із системи більш високого рівня у систему управління і з системи управління у систему ідентифікації відповідно.

Кожен елемент (оптимізатор, модель, формувач критерію) має три складові:

- безпосередньо елемент, зав'язаний на розв'язанні своєї задачі;
- множину таких елементів, упорядкованих за їх властивостями;
- проектор (ПР), що вибирає з множини елементів оптимальний за показником якості системи більш високого рангу.

На рис. 1.4 подано структури трьох рівнів підсистем і відповідно схеми задач проектування. Індокси q, q_k, q_{kn} відповідають позначенням кроків композиційного релаксаційного процесу оптимізації системи. Наприклад, q – номер ітерації зміни виду показника I ; q_k – відповідно зміни J ; q_{kn} – номер кроку в оптимізації β у системі ідентифікації об'єкта.

Цілеорієнтована система складається із 27 елементів, серед яких елементи $\{OptJ_{\phi}^q\}, \{OptJ_q\}, \{OptI_q\}$ – множини методів оптимізації, критеріїв $\{J_{\phi}^q\}, \{J_q\}, \{i_q\}$ і моделей $\{\Sigma_{\phi}^q\}, \{\Sigma_q\}, \{\Sigma_{\infty}\}$ складаються із множин наявних упорядкованих елементів. Для конкретного критерію теоретично існує єдиний оптимальний

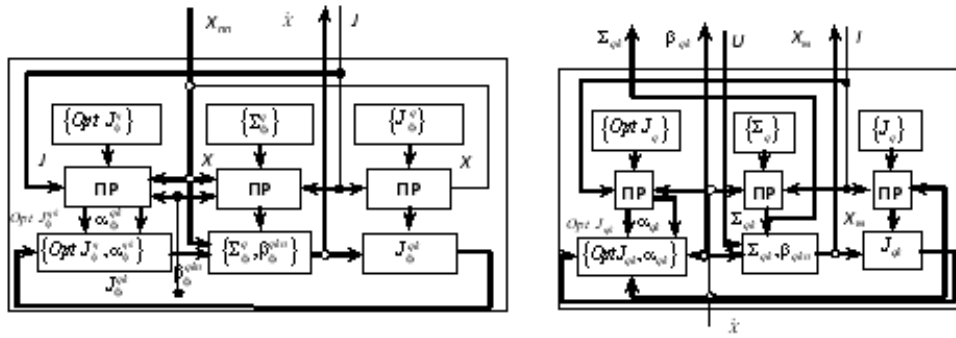


Рис. 1.4. Цілеорієнтована система: 1) – підсистема ідентифікації сигналів; 2) – підсистема ідентифікації об'єкту

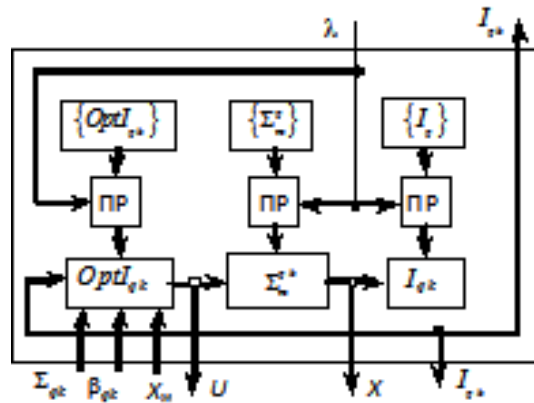


Рис. 1.5. Цілеорієнтована система: 3) – підсистема оптимального адаптивного керування об'єктом

набір цих елементів та їхніх параметрів. Завдання полягає у виборі “відповідного” (близького за I_q до оптимального) набору за обмежених витрат на його пошук у системі. Для повної апріорної невизначеності про всі елементи системи та їх властивості проблема відшукування “підходящого” набору може здійснюватися методом перебирання варіантів. Повне перебирання гарантує відшукування оптимального набору, якщо у критерій оптимальності не входять витрати на пошук оптимуму. Якщо ці витрати істотні, вони впливають на оптимальність рішення. Тому, щоб дана декомпозиція не призвела до ускладнень, необхідний ретельний аналіз підсистем та їх елементів, який дозволяє за допомогою проєкторів ПР систем кожного рівня (рис. 1.4) істотно звузити вихідні множини елементів до обмежених підмножин претендентів на оптимальні для конкретної ситуації.

Принцип декомпозиції ефективний для складних систем та їх елементів. Так, неможливість одним функціоналом сформулювати всі вимоги до системи, що створюється, призвела на практиці до розв'язання задачі декомпозиції цього не формалізованого критерію на множини критеріїв, які піддаються чіткій формалізації, і розв'язанням багатокритеріальної задачі оптимізації. Таке розв'язання не дає єдиного результату. Воно лише дозволяє виділити обмежену область (підмножина Парето) у просторі критеріїв-функціоналів від оптимізованих змінних. Остаточний варіант розв'язання, що обирається проектувальником, належить цій підмножині.

Найпоширенішими принципами декомпозиції для методів оптимізації ЕТО є такі:

- метод покоординатної оптимізації I (метод Гауса–Зейделя), а також метод групової релаксації, які реалізують декомпозицію простору оптимізованих змінних і почергову покоординатну або групову оптимізацію;
- для лінійних оптимальних за квадратичним функціоналом стохастичних систем управління ЕТО декомпозиція загальної задачі на підзадачі оптимального оцінювання станів та пошуку оптимальної стратегії управління [39] дозволяє суттєво спростити складну задачу дуального управління;
- для задачі спільного оцінювання параметрів і станів стохастичних ЕТО (розширений фільтр Калмана [170], метод квазілінеаризації та інваріантного занурення), поділ на незалежні підзадачі оцінювання сигналів, їх коваріаційних матриць, а далі параметрів, дозволяє отримати рішення, близьке до оптимального, досить простими алгоритмами.

Задача декомпозиції моделі ЕТО, що описується системою нелінійних нестационарних рівнянь виду (1.1)

$$x_E(t) = f_g(t; x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m), \quad g = \overline{1, n}, \quad (1.14)$$

полягає в отриманні множини лінійних систем виду (1.2), яка описує з необхідною точністю поведінку системи (1.14) в обмежених областях визначення змінних t, x, u . Локальні моделі виду (1.2) дають змогу у межах лінійно-пропорційних систем легко розв'язувати задачі аналізу, синтезу і реалізації оптимальних стратегій керування та ідентифікації. За локальними моделями ЕТО можна розв'язати задачу ідентифікації структури невідомої нелінійної залежності F моделі (1.14). Запровадимо у рівняння (1.14) позначення вектора $\mathbf{v}$ із компонентами v_i :

$$v_i = \begin{cases} x_i, & i = \overline{1, n}, \\ u_i, & i = \overline{n+1, n+m}, \\ t, & i = n+m+1 = s. \end{cases}$$

У силу неперервності і L -кратної диференційовності залежності (1.14) вона мо-

же бути подана кратним рядом Тейлора

$$\begin{aligned} y(v(t)) = y(v_0) + \sum_{i=1}^s \frac{\partial y}{\partial v_i} \Big|_{v_0} \Delta v_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0} \Delta v_i \Delta v_j + \\ + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \Big|_{v_0} \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k + \dots + R_l(v), \end{aligned} \quad (1.15)$$

де $\Delta v_i(t) = v_i(t) - v_{i0}$; $v \in G$, $v_0 \in G$; $\text{Sup} R_l(v) \leq \delta$, δ – допустима похибка апроксимації залежності (1.14) рядом (1.15).

З метою декомпозиції розіб'ємо область G завдання змінних v_i на підобласті G_r так, що

$$a) \cup G_r = G, \quad v_{r0} \in G_r, \quad G_r \cap G_{r'} = \emptyset, \quad r \neq r',$$

$$b) \forall G_r \exists \beta_r = \arg \min_{\beta_r \in R} \sup_{v_{r0} \in G_{rv_{r0}}} \left| \frac{dy}{dt} - \beta_r \right| < h,$$

де β_r – вектор параметрів лінійної моделі, v_{r0} – центр.

$$\Delta y_1(t) = \beta_r^T \Delta v(t), \quad (1.16)$$

Для області G_0 , яка містить глобальний центр v_0 розкладання (1.15) за моделлю (1.16) і даними $y_1(t)$, $v(t)$, знайдемо вектор β_r , який дорівнює (із точністю до h) вектору $\partial y / \partial \mathbf{v}|_{\mathbf{v}_0}$, тобто отримаємо оцінки перших похідних $\partial y / \partial \mathbf{v}|_{\mathbf{v}_0}$ у (1.15). Аналогічно обчислимо вектори β_r часткових моделей для решти областей $G_r \subset G$. Тепер за значеннями β_r та $\mathbf{v}_{r0}$ можна оцінити похідні вищих порядків. Так, якщо об'єднати сусідні з G_0 підобласті у розширену область $G_{01} = \cup G_r$, $m_1 \geq s$, (для простоти позначень будемо вважати, що області перенумеровані з віддаленням від “центральної” G_0), таку, що

$$\sup_{\mathbf{v} \in G_{0j}} R_3(\mathbf{v}) \leq \delta, \quad (1.17)$$

то розкладання (1.15) із точністю до δ , міститиме члени не вище другого порядку.

Продиференціюємо (1.15) в області G_{01} по v_j , тоді із точністю до $\partial R_3(\mathbf{v}) / \partial v_j$,

$$\frac{\partial y(\mathbf{v}(t))}{\partial v_j} = \frac{\partial y}{\partial v_j} \Big|_{v_0} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0} \Delta v_i, \quad (1.18)$$

де $\frac{\partial y}{\partial v} \Big|_{v_0}$ визначено з (1.17) для підобласті G_0 . Якщо різниця $\Delta v_i = v_{r0i} - v_{0i}$, їй наближено відповідає похідна

$$\frac{\partial y(\mathbf{v}(t))}{\partial v_j} \Big|_{v_0} \approx \beta_{rj}. \quad (1.19)$$

Отже, вираз (1.18) можна подати у вигляді

$$\beta_{rj} = \beta_{0j} + \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0} (v_{r0i} - v_{0i}). \quad (1.20)$$

Звідси для $r \geq s$ і, за умови лінійної незалежності хоча б s із r векторів $(\mathbf{v}_{r0} - \mathbf{v}_0)$, однозначно визначаються s других похідних.

Для відшукування всіх коефіцієнтів $\frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \Big|_{v_0}$ ряду (1.15) необхідно мати не менше s розширених навколо G_{r1}^* підобластей G_{r1}^* , подібних G_{01} (число таких центральних підобластей має бути не менше s). Для кожної G_{r1}^* із рівняння (1.20), у якому замість β_{0j} і v_{0i} взято значення, що отримані для центральної підобласті r_0 , відшукуються другі похідні. Після подвійного диференціювання (1.7) маємо

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_{r*0}} = \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \Big|_{v_0} (v_{r*0k} - v_{0k}).$$

Звідси для $r^* \geq s$ та за умови лінійної незалежності хоча б s векторів $(\mathbf{v}_{r*k} - \mathbf{v}_k)$ однозначно визначають треті похідні. Аналогічно отримуються всі похідні ряду (1.15) і тим самим визначається його структура.

За недостатньої кількості підобластей G_r можливо відновлення частини структури з тих $\mathbf{v}_j$, які змінюються від області до області.

Під час проведення активного експерименту мінімізація числа областей G_r і оптимізація точності оцінок похідних в (1.15) досягається застосуванням композиційного планування експерименту, яке забезпечує ортогональність векторів $(\mathbf{v}_{r0} - \mathbf{v}_0)$, $(\mathbf{v}_{r*0} - \mathbf{v}_0)$.

Перевагою такого підходу є обмежена на кожному кроці розширення розмірність вектора невідомих параметрів, можливість аналізу на кожному кроці значущості знайдених коефіцієнтів ряду (1.15) та відкидання незначущих коефіцієнтів.

Приклад. Нехай невідома двовимірна залежність виду (1.14)) в ЕТО має вигляд

$$y(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1(t) + 0,5\mathbf{v}_1(t)\mathbf{v}_2(t) + \mathbf{v}_2^2(t), \quad (1.21)$$

де змінні $y(\mathbf{v})$, $\mathbf{v}_i(t)$ визначені в області трьох центрів: $(v_{01} = 0, v_{02} = 0) \in G_0$; $(v_{11} = -1, v_{12} = 0) \in G_1$; $(v_{21} = -1, v_{22} = -1) \in G_2$; $y(0) = 0$. У кожній області є по два вимірювання $\mathbf{v}_i(t_{jr})$, відхилення яких від центрів для кожної області становлять: $\Delta v_1(t_{1r}) = 0, 1$, $\Delta v_2(t_{1r}) = 0$, $\Delta v_1(t_{2r}) = 0$, $\Delta v_2(t_{2r}) = -0, 1$. Враховуючи ці відхилення, отримуємо;

$$\Delta y(t_{10}) = 0, 1; \quad \Delta y(t_{11}) = 0, 005; \quad \Delta y(t_{12}) = 0, 1;$$

$$\Delta y(t_{20}) = 0, 055; \quad \Delta y(t_{21}) = 0, 5; \quad \Delta y(t_{22}) = 0, 105;$$

Потрібно визначити структуру і параметри невідомої залежності $y(\mathbf{v})$.

Розв'язання:

а) для G_0 складемо рівняння виду (1.16)

$$\Delta y(t_{j0}) = \beta_{01} \Delta v_i(t_{j0}) + \beta_{02} \Delta v_2(t_{j0});$$

підставивши дані, отримаємо

$$0,1 = \beta_{01} \cdot 0,1 + \beta_{02} \cdot 0,005; \quad 0,005 = \beta_{01} \cdot 0 + \beta_{02} \cdot (-0,1);$$

звідси маємо шукані перші члени ряду (1.15):

$$\beta_{01} = 1; \quad \beta_{02} = -0,05.$$

б) для G_1 :

$$\Delta y(t_{j1}) = \beta_{11} \Delta v_i(t_{j1}) + \beta_{12} \Delta v_2(t_{j1}),$$

звідси $\beta_{11} = 1; \beta_{12} = 0,55$.

в) для G_2 :

$$\Delta y(t_{j2}) = \beta_{21} \Delta v_i(t_{j2}) + \beta_{22} \Delta v_2(t_{j2}),$$

звідси $\beta_{21} = 0,5; \beta_{22} = 1,05$.

г) маючи β_{ir} , можна, згідно з рівнянням (1.20), переходити до відшукування оцінок других похідних у (1.15):

$$\left. \frac{\partial y}{\partial v_1} \right|_{v_{r0}} - \left. \frac{\partial y}{\partial v_1} \right|_{v_0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \right|_{v_0} (v_{r01} - v_{01}) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} (v_{r02} - v_{02}).$$

де ліворуч різниця β_{r1} , $r = 1, 2$.

Аналогічно друге рівняння

$$\left. \frac{\partial y}{\partial v_2} \right|_{v_{r0}} - \left. \frac{\partial y}{\partial v_2} \right|_{v_0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \right|_{v_0} (v_{r02} - v_{02}) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} (v_{r01} - v_{01}).$$

Аналогічно, із другого рівняння отримаємо розв'язання

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \right|_{v_0} = 1; \quad \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} = 0,5.$$

Отримані значення перших і других похідних підставимо в (1.15). Враховуючи, що $\mathbf{v}_0 = 0$, $y_0 = 0$, знаходимо оцінку $\hat{y}(\mathbf{v})$ невідомої залежності $y(\mathbf{v})$:

$$\hat{y}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1(t) - 0,05\mathbf{v}_2(t) + 0,5\mathbf{v}_1(t)\mathbf{v}_2(t) + \mathbf{v}_2^2(t). \quad (1.22)$$

Оцінка (1.22) відрізняється від реальної залежності $y(\mathbf{v})$ (1.21) на несуттєву для області G величину $-0,05\mathbf{v}_2(t)$, яка з'явилася внаслідок наближеності обчислення похідних.

Не менш ефективний принцип декомпозиції має місце і під час опису сигналів. Можна говорити про часове і частотне розбиття сигналів.

Часове розбиття можна будувати за різними ознаками, наприклад виділення інтервалів, відповідних статичним і динамічним режимам ЕТО, для незалежного вивчення його статистики та динаміки; виділення сильно- і слабозашумлених ділянок записів змінних для оптимального вибору інтервалів та алгоритмів оцінювання сигналів; виділення “інформативних” (у сенсі ідентифікації моделі ЕТО) ділянок записів із некорельованими або ортогональними змінними.

Частотне розбиття еквівалентно розкладенню сигналів ЕТО в ряд Фур’є. Перехід у частотну область дозволяє досить просто синтезувати оптимальний фільтр Вінера для оцінювання сигналів [52]. Сучасна спектральна теорія аналізу і синтезу систем [5] також заснована на розкладанні сигналів та їхніх функціональних відображень. Розкладання проводиться за системою ортогональних функцій. Декомпозиція сигналів складних коливальних ЕТО дозволяє виділити окремі тони і побудувати для них часткові спрощені моделі. Отже, принцип декомпозиції доцільний на всіх рівнях і для всіх елементів складних ЕТО.

1.4. Принцип узгодженості показників якості підсистем ієрархічного ЕТО

Для ієрархічної системи управління (рис. 1.3) існує одне значення для елементів множини

$$\{I, OptI, J, OptJ, \Sigma, \beta, J_\phi, OptJ_\phi, \Sigma_\phi, \beta_\phi\} \quad (1.23)$$

за якого головний показник Λ є оптимальний. Але реальні оптимізаційні задачі не можуть не враховувати втрати. Тому релаксаційний процес відшукування абсолютного екстремуму (наприклад, мінімуму) зупиняється на етапі, коли подальший приріст втрат на пошук (1.23) перевищить зменшення решти частини функціоналу. За повної відсутності інформації про залежність Λ від елементів множини пошук абсолютного екстремуму виконується за методом перебору: із усіх n можливих значень змінних множини F вибирається m оптимальних значень. Загальне число кроків РП $\tilde{N}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ для реальних значень m та n надмірно велике. Задача набагато спрощується, якщо кожен із функціоналів $\Lambda, I, \dots, I_{ii}$ оптимізується на підмножині змінних свого рівня: $X, u, \dots, (\Sigma_{nn}, \beta_{nn})$. Це призводить до композиції умовно оптимальних рішень

$$\Lambda^* = extr \Lambda, \quad (1.24)$$

де ліворуч від кожної вертикальної риски змінна, що оптимізує функціонал “свого” рівня, праворуч – результат умовної оптимізації на нижніх рівнях.

Оптимізаційна задача кожного рівня піддається досить чіткій формалізації, що дозволяє інтенсифікувати процес пошуку умовного екстремуму.

Проблема розмірності знімається, але залишається проблема ефективності вирішення (1.24). Щоб процедура (1.24) давала рішення, близьке до абсолютного екстремуму головного функціонала, необхідно забезпечити непротиворічність критеріїв $\Lambda, I, \dots, J_{ii}$. Назвемо їх абсолютно узгодженими, якщо композиція умовних рішень (1.24) призводить до глобального екстремуму головного показника Λ . Два сусідніх за рівнями функціонали назвемо локально несуперечливими, якщо їхні варіації подібні в обмеженій області G простору змінних підсистеми нижнього рівня

$$\begin{aligned}\delta\Lambda(u + \delta u) &= k_1 \delta I(u + \delta u); \\ \delta I(\beta + \delta\beta) &= k_2 \delta J(\beta + \delta\beta); \\ \delta J(\beta_\phi + \delta\beta_\phi) &= k_3 \delta J_\phi(\beta_\phi + \delta\beta_\phi); \\ \delta J_\phi(\beta_{ii} + \delta\beta_{ii}) &= k_4 \delta J_{ii}(\beta_{ii} + \delta\beta_{ii}).\end{aligned}$$

Якщо перетин областей G_I існування змінних i -х рівнів є не порожня множина, яка містить точку, що визначає глобальний екстремум за Λ , їх багаторазова послідовна оптимізація від $J_{\text{пп}}$ до Λ та назад від Λ до $J_{\text{пп}}$ дозволяє відшукати глобальний екстремум Λ . Проте досягти його не просто. Пояснюється це тим, що оптимально будувати функціонали зверху вниз неможливо через незнання оптимальних по верхньому функціоналу значень елементів нижніх рівнів. Так, не можна синтезувати функціонал I управління u на об'єкті Σ_∞ , не знаючи якою математичною моделлю (Σ, β) він буде описаний, який рівень і вид шумів є в оцінках x_M , отриманих за оцінками підсистеми фільтрації, тощо. Можна застосувати мінімакський підхід [74] і будувати I так, щоб для найгіршої моделі (Σ, β) та оцінок x_M сигналу отримати найкраще гарантоване вирішення. Але ж у загальній системі (рис. 1.3) є підсистема ідентифікації, яка у результаті оптимізації дасть завжди рішення не гірше гіршого, тому, застосовуючи мінімакський підхід, програємо в оптимальності. Доцільним є наступний алгоритм побудови локально несуперечливих функціоналів:

1) На підставі апріорної інформації про об'єкт Σ_∞ , головний функціонал Λ і наявні елементи підсистем усіх рівнів, з урахуванням принципу раціонального ускладнення [127], на першому кроці багаторівневого РП приймають найпростіші, що задовольняють апріорно відомим даним, підсистеми первинних перетворювачів, оцінювання сигналів x та моделі (Σ, β) і оптимального управління u .

2) Вибрані підсистеми i -го рівня оптимізують за методом перебору структур і методів оптимізації за апріорно прийнятим критерієм підсистем $i + 1$ -го рівня: Σ_{ii} по J_ϕ , $(\Sigma_\phi, \text{Opt } J_\phi)$ по J , $(\Sigma, \text{Opt } J)$ по I , $(\text{Opt } I)$ по Λ . Оскільки розмірності цих змінних невеликі, витрати на пошук допустимі. У результаті цієї оптимізації отримаємо оптимальну систему першого наближення.

3) Далі методами теорії чутливості або моделювання і планування експерименту проектують несуперечливі критерії $I, J, J_\phi, J_{\text{пп}}$.

Розглянемо також підхід, заснований на аналітичному обчисленні чутливості функціоналів. Нехай є оптимальна система першого наближення, в якій реальний об'єкт Σ_∞ замінено його моделлю (Σ, β) . Знайдемо варіацію основного функціоналу якості вихідного продукту виробництва Λ відносно його екстремального значення $\Lambda^*(u^*)$, викликану варіацією δU оптимального управління об'єктом. Нехай $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \varepsilon \delta \mathbf{u}(t)$, де ε – мала величина; $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$ – вектор-функція часу t . Нехай

$$\Lambda(\mathbf{u}(t)) = \int_{\theta_1} \lambda(\mathbf{u}^*(t) + \delta \mathbf{u}(t)\varepsilon) dt,$$

де θ_1 – інтервал часу t ; $\lambda(\cdot)$ – скалярна функція векторного аргументу $\mathbf{u}$.

Знайдемо першу варіацію Λ :

$$\delta \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon} = \int_{\theta_1} \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon} dt = \int_{\theta_1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} dt.$$

Далі знайдемо другу варіацію

$$\delta^2 \Lambda = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{\theta_1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} dt = \int_{\theta_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} \right] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varepsilon} dt, \quad (1.25)$$

де

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{u}^T \partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_1 \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_1 \partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_m \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_m \partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Якщо Λ визначено на $x(t)$, а не на $u(t)$, діючи аналогічно, отримаємо

$$\delta^2 \Lambda = \int_{\theta_1} \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} dt,$$

або

$$\delta^2 \Lambda = \int_{\theta_1} \delta \mathbf{u}^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \right) \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dt, \quad (1.26)$$

де

$$\delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u},$$

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \vdots \\ \delta u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Зіставляючи (1.25) та (1.26), бачимо, що

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{u}^T \partial \mathbf{u}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}}.$$

На екстремалі $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$ перша варіація дорівнює нулю, друга варіація (1.25) або (1.26) визначає еталонну для функціоналу $I(\mathbf{u})$ поверхню у функціональному просторі варіацій $\delta \mathbf{u}(t)$. Нехай $\delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{1}(t)$ – одинична вектор-функція від t , тоді (1.26) являє еталонну для I матрицю A_1 дійсних чисел

$$\delta^2 \Lambda = A_1 = \int_{\theta} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} dt.$$

Табл. 1.2. Матриця оптимального плану експерименту на ЕТО

План	Нормовані змінні $X(k)$										
	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$y(k)$
	1	-1	-1	-1	1	1	1	$1 - c$	$1 - c$	$1 - c$	$y(1)$
	1	1	-1	-1	-1	-1	1	$1 - c$	$1 - c$	$1 - c$	$y(2)$
	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	$1 - c$	$1 - c$	$1 - c$	$y(3)$
1	1	1	1	-1	1	-1	-1	$1 - c$	$1 - c$	$1 - c$	$y(4)$
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	$1 - c$	$1 - c$	$1 - c$	$y(5)$
	1	1	-1	1	-1	1	-1	$1 - c$	$1 - c$	$1 - c$	$y(6)$
	1	-1	1	1	-1	-1	1	$1 - c$	$1 - c$	$1 - c$	$y(7)$
	1	1	1	1	1	1	1	$1 - c$	$1 - c$	$1 - c$	$y(8)$
	1	$-\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2 - c$	$-c$	$-c$	$y(9)$
	1	α	0	0	0	0	0	$\alpha^2 - c$	$-c$	$-c$	$y(10)$
	1	0	$-\alpha$	0	0	0	0	$-c$	$\alpha^2 - c$	$-c$	$y(11)$
2	1	0	α	0	0	0	0	$-c$	$\alpha^2 - c$	$-c$	$y(12)$
	1	0	0	$-\alpha$	0	0	0	$-c$	$-c$	$\alpha^2 - c$	$y(13)$
	1	0	0	α	0	0	0	$-c$	$-c$	$\alpha^2 - c$	$y(14)$
	1	0	0	0	0	0	0	$-c$	$-c$	$-c$	$y(15)$

Під час побудови функціонала якості керування I будемо прагнути, щоб аргументи екстремумів Λ та I збіглися, а другі варіації були подібні. Для скорочення числа варіантів доцільно застосовувати оптимальні плани експерименту [87]. Якщо експеримент виконується для дослідження області екстремуму функціоналу, за відомого значення екстремуму для визначення других варіацій необхідно і достатньо виконувати “зірковий експеримент”, що полягає у

почерговому відхиленні на величину “зоряного плеча” $\pm\alpha$ кожної зі змінних, за якими відшукується друга варіація функціонала. Якщо координати екстремуму функціоналу невідомі, оптимальним експериментом, з метою побудови квадратичної моделі виду

$$y(\mathbf{x}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2, \quad (1.27)$$

буде центральний композиційний план Бокса [87]. Цей план можна зробити ортогональним. Нормовані змінні моделі (1.27) приймають п'ять значень $-0, \pm 1, \pm\alpha$. План експерименту містить:

- 1) повний факторний експеримент 2^n або дробові репліки (якщо $n \gg 5$);
- 2) “зірковий план”;
- 3) точку в центрі плану (усього N експериментів).

Для побудови ортогонального плану модель (1.27) перетворюють до виду

$$y(\mathbf{x}) = b_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{x}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \tilde{x}_i^2, \quad (1.28)$$

де

$$b_0 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_{ii}^2, \quad \tilde{x}_i^2 = x_i^2 - c, \quad c = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_i^2(k), \quad k - \text{номер досліджу.}$$

Нові змінні $\tilde{x}_i^2$ будуть зміщуватися на значення $-c$. Це дасть змогу підібрати α так, щоб усі стовпці матриці експерименту були попарно ортогональні. Наприклад, для $n = 3$ моделі (1.27) матриця плану Боксу подана в табл. 1.2, де $c = 1/15$, $\sum_{k=1}^{15} x_i^2(k) = (8 + 2\alpha^2)/15$, для будь-якого i . “Зоряне плече” підбирають згідно з табл. 1.2 за умови ортогональності $\tilde{x}_i^2$:

$$\sum_{k=1}^N \tilde{x}_i^2(k) \tilde{x}_j^2(k) = 8(1 - c) - 4c(\alpha^2 - c) + 3c^2 = 0.$$

Підставивши сюди вирази для c , отримаємо $\alpha = \sqrt{30} - 4 \approx 1,5$, $\tilde{n} \approx 0,83$. Унаслідок взаємної ортогональності коефіцієнти $b_0, \alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{jj}$ моделі (1.28) визначають незалежно за методом найменших квадратів. Від цих коефіцієнтів легко перейти до коефіцієнтів моделі (1.27), а від неї до моделі із ненормованими змінними. Для цього α_j ділять на модуль кроку варіювання i -ї змінної, α_{ij} – на добуток цих модулів j -ї та i -ї змінної $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

За наявності моделей функціоналів підсистем верхнього і нижнього рівнів, нижній конструюють по верхньому шляхом варіювання структури і параметрів

нижньої підсистеми за умови мінімуму додаткового функціоналу різниці коефіцієнтів α_i , α_{ij} , α_{jj} , моделей (1.27) двох рівнів. Узгодивши критерії підсистем усіх рівнів та оптимізувавши їх, отримаємо оптимальну систему другого наближення. Повторивши для неї процедуру узгодження критеріїв і оптимізувавши їх, отримаємо третє наближення. Процес узгодження припиняється, якщо результати подальших ітерацій мало різняться.

Забезпечення несуперечності критеріїв теоретичним або імітаційним моделюванням на ЕОМ певною мірою наблизить задачу умовної оптимізації ЕТО до задачі визначення глобального екстремуму головного критерію Λ .

1.5. Композиція підсистем різних рівнів ієрархічної ЕТС в єдину систему

Третім, завершальним, етапом розробки близьких до оптимальних за головним показником Λ структури і алгоритмів функціонування багаторівневої системи оптимізації ЕТС, є етап композиції окремих підсистем в єдиний ЕТК. Сформульовані визначення системи, релаксаційних процесів, принципи раціонального ускладнення [69,70] дозволяють окреслити коло основних підходів до проблеми композиції. Це:

- упорядкування елементів множин моделей і методів оптимізації;
- вибір оптимальної системи першого наближення;
- організація релаксаційних процесів ускладнення і вдосконалення окремих елементів систем і, можливо, структури самої системи, починаючи з оптимальної системи за I першого наближення і закінчуючи оптимальною за Λ .

Упорядкування елементів підсистем реалізується проекторами PR_1 , які звужують на першому кроці початкову множину елементів до підмножин допустимих, а потім до підмножин претендентів на оптимальні елементи. Наприклад, допустимими за неповної прямої спостережуваності змінних об'єкту Σ_∞ є методи ідентифікації по входу – виходу Σ_∞ .

На першому рівні проектори PR_1 виділяють ті елементи (методи і моделі), які можуть бути застосовані у цій ситуації, що визначається сигналами $\hat{u}$, $\hat{x}$, що спостерігаються, і заданими критеріями J_Φ , J , I , Λ . Тут проектори є багатовимірні дискримінатори, що пропускають на вихід ті елементи, властивості яких повністю узгоджуються з факторами, що визначають реальну ситуацію.

На другому рівні проектори PR_2 виділяють два-три претенденти на оптимальність. Для цього у проекторі PR_2 для кожного елементу мають бути закладені регресійні залежності відповідних критеріїв $\hat{J}_\Phi, \dots, \hat{\Lambda}$ від кількісно розрахованого вектора факторів θ , який характеризує конкретну ситуацію. Для елементів-методів $\{Opt, \alpha\}$ чинниками є співвідношення сигнал-шум за амплітудою і шириною спектрів, корельованість сигналів, наближеність моделі (величина кінцевої похибки апроксимації) та ін.

Визначивши у просторі цих факторів кілька найбільш характерних для практики регресійного аналізу областей, далі для кожної області будують ре-

гресійну залежність відповідного критерію J_Φ , J, I, Λ або його оцінки $\hat{J}_\Phi, \dots, \hat{\Lambda}$ від θ . Тоді проектор ПР_1 визначає область, а ПР_2 для кожного елементу визначає значення критерію для конкретного θ , що належить цій області. Задача побудови проекторів належить до етапу проектування **БАСІ** і вимагає тим більших витрат, чим точніше проектори і ширше області та розмірності факторів θ .

Розглянемо варіант структури підсистеми ідентифікації у багаторівневій системі оптимізації головного показника Λ (якщо Σ^* і Opt^* апріорно невідомі).

Згідно табл. 1.2 розглянемо структуру **БАСІ**, для якої характерна замкненість по основному (для неї) критерію I і неединичність елементів Σ, Opt . Складемо функціональну схему **БАСІ**, визначивши її взаємозв'язок з підсистемами верхніх і нижніх рівнів (рис. 1.6). Характерні частини системи (підсистеми) обведено пунктиром і пронумеровано: 1 – оптимізація Λ ; 2 – оптимізація I ; 3 – оптимізація J , що доповнює найпростішу систему ідентифікації (частина 4) до багатократно адаптивної (частини 3 і 4); 5 – оптимізація J_Φ . Частина 4 системи містить функціонал J_{qk} , який задається вище, модель Σ_{qk} із вектором β_{qkn} параметрів, що налаштовуються, оптимізатор $\{\text{Opt}_{qk1}, \alpha_q\}$. Тут реалізується РП $\{\beta_{qkn}\}$, після закінчення РП інформацію про оптимізатора Opt_{qk1} структури Σ_{qk} і вектори β_{qk} параметрів моделі надходить у підсистеми верхніх рівнів.

Частина 3 містить три множини $\{\Sigma_{qk1}\}, \{\text{Opt}_{qk1}\}, \{J_{qk1}\}$; проектори першого рівня ПР_1 , що звужують ці множини до підмножин $\{\Sigma_{qk}\}, \{\text{Opt}_{qk}\}, \{J_{qk}\}$ допустимих елементів; проектори ПР_2 другого рівня, що вибирають із числа допустимих претенденти на оптимальні елементи. Для конкретного виду I_q і потрібного значення J_{qk} , що задається вище, проектори $\text{ПР}_1, \text{ПР}_2$ задають елементи $J_{ql}, \Sigma_{ql}, \text{Opt}_{ql}, \alpha_{ql}$ частини 4, де у результаті РП $\{\beta_{qkn}\}$ отримують оптимальну по J_{qk} модель $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$. У підсистемі частини 2 на реальному об'єкті Σ_∞ або його моделі $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$ оцінюється значення критерію I_{qk} для k -й структури **БАСІ**, і якщо воно не задовольняє необхідному, в одному із проекторів ПР_2 відбувається зміна претендента.

Знову повторюється процес $\{\beta_{qkn}\}$ і так до виконання умови, що I_{qk} буде не гірше необхідного, або до закінчення процесу перебору всіх претендентів. При зміні I_{qk} у частинах 4 та 5 можливі зміни структури і параметрів підсистеми нижнього рівня. У частинах 3 та 4 має місце композиція двох РП $\{\beta_{qkn}\}$ по n і $\{I_{qk}\}$ по k , що відповідає визначенню **БАСІ**. Частина 2 містить реальний об'єкт Σ_∞ , його оптимізатор $\text{Opt}_u I_q$, множину $\{I_{qk}\}$ і проектор ПР , що визначає (на основі значень I_{qk} і Λ) вид I_q критерію I_{qk} . Сигнал $\mathbf{x}$ з виходу об'єкту Σ_∞ надходить у підсистему нижнього рівня, з виходу якої його оцінка $\hat{\mathbf{x}}$ потрапляє у систему ідентифікації і управління. Оптимізатор $\text{Opt}_u I_{qk}$ на основі інформації $\Sigma_{ql}, \beta_{ql}, I_{ql}, \hat{\mathbf{x}}$ виробляє керувальний вплив $\mathbf{u}$, що надходить на об'єкт або його модель (на стадії пошуку оптимальних елементів системи). Якщо після закінчення РП $\{\beta_{qk}\}$ по k оптимальне значення I_q не задовольняє систему частини 1, з системи верхнього рівня може надійти команда у проектор ПР на зміну по

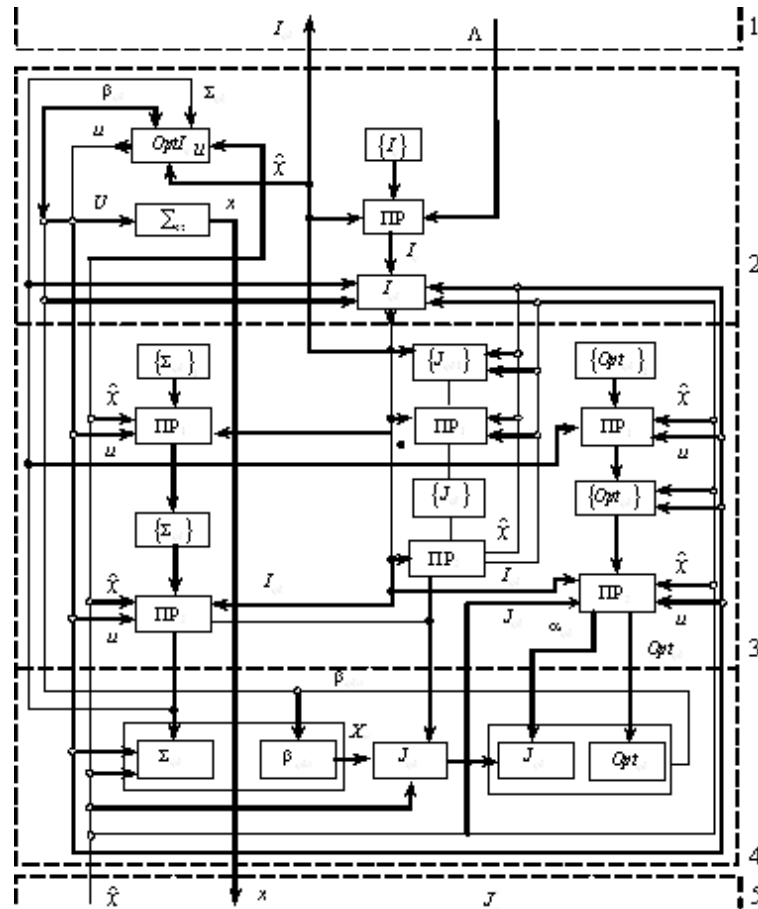


Рис. 1.6. Функціональна схема багаторазово адаптивної підсистеми ідентифікації

q функціоналу I_q . Крок по q призводить до повторення кроків по k , а k по n в БАСІ, тобто у частинах 1–4 має місце композиція із трьох РП, що відповідає визначенню системи, яка самоорганізується (СС) (див. табл. 1.1).

Глибокий зворотний зв'язок за критеріями від Λ до I , від I до J від J до J_f , що оптимізує та цілеорієнтує структуру і параметри підсистеми всіх рівнів ЕТО, здійснює регуляризацію рішення у широкому сенсі, вирішує проблему традиційної теорії ідентифікації – “яка модель найкраща?”.

1.6. Побудова проекторів у БАСІ

1.6.1. Алгоритми роботи проекторів

Ефективність підсистеми другого рівня БАСІ визначається потужністю множин $\{Opt_q\}$ і кінцевим результатом $\{Opt_{qk}\}$ роботи проекторів $\Pi P_1, \Pi P_2$.

Оптимальність по I_{qk} елементу $\{Opt_{qk}\}$ залежність від правила побудови у проекторах відображення сигналів $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ об'єкту в індекс k . Відображення $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \rightarrow k$ в PP_1 реалізується таблицями із обмеженим входом ($\xi \in \{0, 1\}$), а в PP_2 необмеженим, якщо $\xi \in R$, R – множина дійсних чисел. В i -му рядку таких таблиць розташовані коефіцієнти зв'язку i -го елементу (Opt_i або Σ_i) або його показника якості з j -ою властивістю даних $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$. Індекс k оптимальної підмножини $\{Opt_{qk}\}$ в PP_1 відшукується за умови

$$k = \arg \max_{i=1, r} \{\xi, \Theta\}, \quad (1.29)$$

де ξ – матриця бінарних коефіцієнтів $\xi_{ij} \in \{0, 1\}$; $\xi_{ij} = 0$, якщо ефект впливу j -го елементу на i -й фактор негативний і, навпаки, $\xi_{ij} = 1$, якщо ефект позитивний; Θ – вектор бінарних факторів $\theta_j \in \{0, 1\}$, які вказують на присутність чи відсутність відповідної властивості; r – потужність множини $\{Opt_{qk}\}$.

У проекторі PP_2 із підмножини претендентів на оптимальність, яка внаслідок бінарності ξ_{ij} в PP_1 може містити кілька елементів $\{Opt_{qk}\}$, відбирається єдиний найкращий Opt_k^* елемент за умови

$$k = \arg \min \xi \cdot \text{diag} [\eta_j] \cdot \theta, \quad (1.30)$$

де Ξ – матриця ξ_{ij} коефіцієнтів чутливості показника I якості i -го елементу до j -го фактору; $\xi_{ij} \in R$; η_j – коефіцієнт подібності між тестовим θ_j і реальним $\eta_j \theta_j$ рівняннями j -го фактору; θ – вектор рівнів тестових факторів.

Для реалізації правила (1.29) побудуємо рівняння тестової моделі

$$y^*(k) = \beta_1^* x_1^*(k) + \beta_2^* x_2^*(k) + \varepsilon_0(k) \theta_6, \quad (1.31)$$

де $\varepsilon_0(k) \theta_6$ – нев'язка, що визначена наближеністю структури моделі (1.31);

$$y(k) = y^*(k) + N_0(k) \theta_1; \quad x_1(k) = x_1^*(k) + N_1(k) \theta_2; \quad \beta_1^* = \beta_2^* = 1;$$

$$x_2(k) = x_2^*(k) + N_2(k) \theta_2;$$

$$x_1^*(k) = \sin \frac{2\pi k}{M} \theta_7; \quad x_2^*(k) = \sin \left(\frac{2\pi k}{M} \theta_7 + \theta_8 \right);$$

$$\varepsilon_0(k) = \sin \left(\frac{2\pi k}{M} \theta_7 + \frac{\theta_4}{2} \right);$$

$$N_i(k) = \theta_3 N_i^0(k) + (1 - \theta_3) N_i(k - 1); \quad i = 0, 1, 2;$$

$N_i^0(k)$ – гаусів білий шум із одиничною дисперсією.

Сутність факторів та їх рівень: θ_1 та θ_2 – рівень перешкод у змінних y та x ; θ_3 та θ_7 – ширина спектрів сигналу і шуму; θ_4 – взаємозв'язок оцінок β_1 і β_2 унаслідок неортогональності x_1 і x_2 ; β_5 – представництво вибірок даних; β_6 – наближеність моделі (1.31).

1.6.2. Методика оцінювання кількісних характеристик методу ідентифікації

Побудуємо ортогональний план у вигляді адамарової матриці 8-го порядку [44], i -й рядок якої є i -а функція Уолша (табл. 1.3). Для цього запровадимо нормовані змінні

$$\bar{\theta}_i = (\theta_i - \theta_{i\delta}) / \Delta\theta_{i\delta}, \quad i = \overline{1,7} \quad (1.32)$$

де $\bar{\theta}_{i\phi}$ – значення θ_i для базового режиму; $\Delta\theta_{i\phi}$ – крок варіювання фактору θ_i ; I_j – значення показника якості методу ідентифікації для j -го набору факторів.

Табл. 1.3. Числові значення факторів θ_i

N	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	$\bar{I}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\bar{I}_1$
2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	$\bar{I}_2$
3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	$\bar{I}_3$
4	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	$\bar{I}_4$
5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-	$\bar{I}_5$
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$\bar{I}_6$
7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	$\bar{I}_7$
8	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	$\bar{I}_8$

У табл. 1.3 наведено числові значення факторів θ_i , які відповідають трьом значенням нормованих факторів $\bar{\theta}_i$, а також значення відхилень $\Delta\theta_{i\phi}$. Як показник I_j було прийнято значення модулів зміщення I_{1j} і I_{2j} оцінок $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ плюс три кореня із оцінок I_{3j}^2 і I_{4j}^2 дисперсій оцінок $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$.

$$I_j = \frac{|I_{1j}| + |I_{3j}|}{2} + 3\sqrt{\frac{I_{3j}^2 + I_{4j}^2}{2}}, \quad j = \overline{1,8} \quad (1.33)$$

причому: $\beta_1^* = \beta_2^* = 1$, якщо $\bar{\theta}_6 = -1$ (точна модель); $\beta_1^* = \beta_2^* = 1,251$, якщо $\bar{\theta}_6 = 1$ (модель наближена), а коефіцієнти β_1^*, β_2^* визначено за методом найменших квадратів (МНК) відсутності перешкод зміщення в об'єкті внаслідок перешкод в $x(t)$ та три середньоквадратичні відхилення внаслідок перешкод в $y(t)$. Базові значення факторів: $\theta_{1a} = 50\%$ – рівень перешкод в $y(k)$; $\theta_{2a} = 50\%$ – рівень перешкод в $x(k)$; $\theta_{3a} = 0,8$ – час автокореляції перешкод ($5 \div 8$ дискретів k); автокореляційна функція експоненційна зі сталою часу $T \approx \Delta\tau/\theta_1$, $\Delta\tau$ – крок між дискетами k ; $\theta_{4a} = 19\pi/120 \approx 28^\circ$ – зсув по фазі між сигналами $x_1^*(k)$ і $x_2^*(k)$; коефіцієнт кореляції $r_{x_1^*, x_2^*} = \cos 28^\circ = 0,87$.

Якщо модель ЕТО n -вимірною, інваріантною до розмірності n буде величина

визначника D_1 кореляційної матриці

$$D_1 = \begin{vmatrix} r_{x_1 x_1} & \dots & r_{x_1 x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{x_n x_1} & \dots & r_{x_n x_n} \end{vmatrix} \quad (1.34)$$

Для базового варіанту

$$D_T = \begin{vmatrix} 1 & 0,87 \\ 0,87 & 1 \end{vmatrix} = 0,243;$$

$\theta_{5a} = 500$ точок k ; $\theta_{6a} = 0,25$ (тобто $\varepsilon_0(k)$ становить 25% амплітуди $x_1^*(k)$ і $x_2^*(k)$ або 12,5% амплітуди $y^*(t)$). Комп'ютерний експеримент відповідно до плану, наведеного у табл. 1.3, виконувався m_j разів, кожного разу із новими шумами та усередненням результатів. Дані експерименту представлено у вигляді такої таблиці:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 &= \begin{cases} +1, & \text{“Сильна” перешкода в } x_1(k), \\ 0, & \text{“Середня” перешкода в } x_1(k), \\ -1, & \text{“Слабка” перешкода в } x_1(k) \end{cases} \quad \theta_1 = \begin{cases} 1, \\ 0,5, \\ 0. \end{cases} \quad \Delta\theta_{1\delta} = 0,5; \\ \bar{\theta}_2 &= \begin{cases} +1, & \text{“Сильна” перешкода в } x_2(k), \\ 0, & \text{“Середня” перешкода в } x_2(k), \\ -1, & \text{“Слабка” перешкода в } x_2(k) \end{cases} \quad \theta_2 = \begin{cases} 1, \\ 0,5, \\ 0. \end{cases} \quad \Delta\theta_{2\delta} = 0,5; \\ \bar{\theta}_4 &= \begin{cases} +1, & \text{“Сильна” взаємодія змінних } x_i, \\ 0, & \text{“Середня” взаємодія змінних } x_i, \\ -1, & \text{“Слабка” взаємодія змінних } x_i \end{cases} \quad \theta_4 = \begin{cases} \pi/15, \\ 19\pi/120, \\ \pi/4. \end{cases} \quad \Delta\theta_{4\delta} = \frac{11\pi}{120}; \\ \bar{\theta}_5 &= \begin{cases} +1, & \text{“Мала” вибірка,} \\ 0, & \text{“Сильна” вибірка,} \\ -1, & \text{“Велика” вибірка,} \end{cases} \quad \theta_5 = \begin{cases} 200 \text{ точок,} \\ 500 \text{ точок,} \\ 800 \text{ точок;} \end{cases} \quad \Delta\theta_{5\delta} = 0,5; \\ \bar{\theta}_6 &= \begin{cases} +1, & \text{“Сильно” наближена модель,} \\ 0, & \text{“Наближено” наближена модель,} \\ -1, & \text{“Точна” наближена модель} \end{cases} \quad \theta_6 = \begin{cases} 0,5, \\ 0,025, \\ 0, \end{cases} \quad \Delta\theta_{6\delta} = 0,25 \end{aligned}$$

Далі, внаслідок ортогональності $\bar{\theta}_i(j)$ по МНК незалежно обчислювались коефіцієнти

$$\xi_i = \frac{\Delta\theta_{ib}}{8} \sum_{j=1}^8 I(j)\bar{\theta}_i(j), \quad i = \overline{1,5},$$

регресійної моделі залежності показника (1.33)

$$I(j) = \sum_{i=0}^7 \xi_i \theta_i(j); \quad j = \overline{1, 8},$$

де ξ_0 – значення I для базового режиму θ_a ; ξ_1, ξ_2 – визначають чутливість показника I_1 до перешкод в $y(k)$ та $x(k)$; $\xi_3 \div \xi_6$ – чутливість до змін полоси спектру перешкод, корельованості $x_i(k)$, розмірності вибірок даних, неточності структури моделі відповідно.

1.6.3. Вибір із множини найкращого методу ідентифікації для конкретної ситуації

Шляхом експрес-аналізу оцінюються рівні реальних факторів

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^M (y(k) - \hat{y}(k))^2}{\hat{y}^2(k)}}, \quad (1.35)$$

де $\hat{y}(k)$ – згладжене ковзним середнім значення $y(k)$; θ_2 – середнє по всіх $x_i(t)$ значення шум-сигнал; θ_3 – визначається шляхом апроксимації експонентою $R_e(\tau) = \sigma_e^2 \cdot e^{-k\Delta t/T}$ автокореляційної функції оцінки перешкоди в $y(k)$; $\theta_3 = \Delta t/R$; $\theta_4 = \frac{19}{120} \pi \frac{D_1}{D_T}$; θ_4 – кількість M точок реальної вибірки; $\theta_6 = \sqrt{\varepsilon^T \varepsilon / (\hat{Y}^T \hat{Y})}$ – норми СКО, де ε – похибка між Y і $\hat{Y}$; $\theta_7 = [5\hat{I}/(r-1)]/90$ – середній період оцінки $\hat{y}(k)$ сигналу $y^*(k)$, де r – кількість перетинів $\hat{y}(k)$ її середнього значення (у базовому варіанті $2\hat{I}/(r-1) = 90$).

Після обчислення експрес-аналізом оцінки реальних факторів, визначається значення показника (1.33) для конкретного s -го методу Opt_s

$$I_s = I_0 + \sum_{i=0}^7 \xi_i \cdot \theta_i. \quad (1.36)$$

Як найкращий беруть той метод, для якого показник (1.36) мінімальний. У табл. 1.4 наведено регресійні моделі (1.36) показника I (1.33) для множини методів ідентифікації [117]: МНК – метод найменших квадратів; УМНК – узагальнений МНК; МПК – метод прогнозу кореляцій; МБК – метод багатократного корелювання; МОД – метод однократного ділення; МБД – метод багатократно-го ділення.

В [127] за результатами тестування методів Opt_{qk} зроблено такі висновки: СМНК добре працює, якщо шуми N в X типу “білого шуму”, модель наближена ($\varepsilon^* \neq 0$), X^* – гладка функція, N_i в N взаємно не корельовані; МПК на відміну від СМНК добре працює з “кольоровим” шумом в УМНК – на відміну від МНК перешкоди можуть бути взаємнокорельовані; МБК має робастність до збоїв у

Табл. 1.4. Регресійні моделі показника

	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
МНК								
J	0,83	0,72	0,18	-1,9	0,7	1,15	-0,89	-0,15
УМНК								
J	0,77	0,89	0,1	-1,37	0,78	1,4	-0,65	-0,08
МПК								
J	1,6	-1,17	2,17	-4,53	1,75	-2,05	3,04	-0,48
МБК								
J	1,6	-1,17	2,17	-4,53	1,75	-2,05	3,04	-0,48
МОД								
J	1,6	-1,17	2,17	-4,53	1,75	-2,05	3,04	-0,48
МБД								
J	1,6	-1,17	2,17	-4,53	1,75	-2,05	3,04	-0,48

даних, але чутливий до неточності моделі (бажана малість ε^*); МБД – стійкий до широкосмугових перешкод, в іншому подібний до МБК; МОД – простіший за МНК, для малих ε^* дає незміщені оцінки параметрів β за наявності шумів в X .

1.7. Дослідження БАСІ у задачах прогнозу електроенергетичних показників

Пояснимо ефект регуляризації задачі прогнозу в БАСІ на простому прикладі. На рис. 1.7 показано графік $y(t)$, що заданий на інтервалі $[0, t_0]$, $t_0 = T$ та який відображає невідому досліднику закономірність

$$y(t) = \beta_0^* + \beta_1^* t + \beta_2^* \sin \omega t + \varepsilon(t), \quad (1.37)$$

де $\omega = 2\pi/T$; $\varepsilon(t)$ – досить мала складова неврахованих ефектів в ЕТО.

Нехай множина $\{Opt_{qk}\}$ методів ідентифікації в АСІ (див. табл. 1.1) складається тільки з методу найменших квадратів (МНК), для якого вектор α параметрів, що налаштовується, відсутній, а множину $\{\Sigma_{qk}\}$ моделей складено із

$$\begin{aligned} \Sigma_{q1} : \hat{y}(t) &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t; & \Sigma_{q2} : \hat{y}(t) &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 t^2; \\ \Sigma_{q2} : \hat{y}(t) &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 t^2 + \hat{\beta}_3 t^3. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Головний критерій $I = |y(t_0 + \tau) - \hat{y}(t_0 + \tau)|$, що характеризує точність прогнозу, фізично не може бути реалізованим, тому що на практиці графік $y(t)$ відомий тільки на інтервалі $t \in [0, t_0]$. Розіб'ємо інтервал $[0, t_0]$ на два підінтервали $[0, T - \tau_i]$ та $[T - \tau_i, T]$, $i = 1, 2$. На першому інтервалі по МНК знайдемо

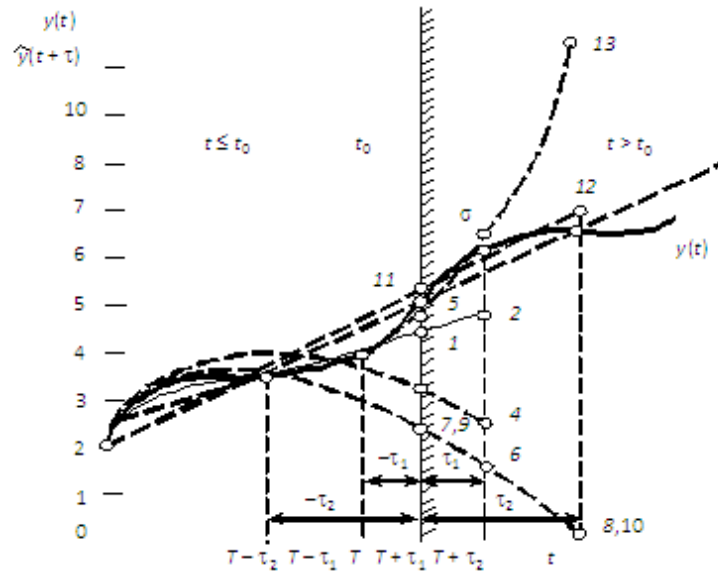


Рис. 1.7. Задана крива $y(t)$ (суцільна лінія) та її прогнозуючі моделі (пунктирні лінії)

β для моделей $\{\Sigma_{q1}\}$ (1.38), на кінці другого перевіримо моделі за оцінкою $\hat{I}$ головного критерію I

$$\hat{I} = |y(t_0) - \hat{y}(t_0)|. \quad (1.39)$$

Припустимо, що τ_1 дорівнює τ прогнозу, тоді із малості оцінки критерію $\hat{I}$ випливає малість основного критерію I . У табл. 1.5 наведені значення критеріїв $\hat{I}$ та I для $\tau_1 = 0, 2T$; $\tau_2 = 0, 5T$, а також номери прогнозуючих точок на графіку (рис. 1.7).

Табл. 1.5. Результати прогнозу невідомої закономірності

$\{\Sigma\}$	τ_I	$\hat{I}$	Номер точки, що прогн.	I	Номер точки, що прогн.
Σ_1	0,2	0,7	1	1,4	2
Σ_2	0,2	1,8	3	3,6	4
Σ_3	0,2	0,2	5	0,4	6
Σ_4	0,5	5	7	6,2	8
Σ_5	0,5	5	9	6,2	10
Σ_6	0,5	0,2	11	0,3	12

Як видно з рис. 1.7 та табл. 1.5, для $\tau = 0, 2T$ оптимальною і по $\hat{I}$, і по I буде модель Σ_3 , а для $\tau = 0, 5T$ за обома критеріями – Σ_1 .

Застосування оптимальної за $\hat{I}$ та I для $\tau = 0, 2T$ моделі Σ_3 для прогнозу на $\tau = 0, 5T$ (точка 13 на рис. 1.7) призводить до різкого зростання I . Ефект регуляризації полягає у тому, що за одних і тих самих даних, чим більше τ , тим простіша модель обирається за критерієм $\hat{I}$. Оскільки в силу неточності оцінок $\hat{\beta}$ і самої структури Σ моделі для великих степенів I степеневого поліному та великих τ значення неточних компонент $\beta_i(t + \tau)$ можуть вносити значну похибку (точка 13) прогнозу процесу $y(t)$ за оцінкою $\hat{y}(t)$. Тому, за критерієм $\hat{I}$ відкидаються ці елементи для $\tau = 0, 5T$, регуляризуючи задачу прогнозу. На якість прогнозу буде істотно впливати метод *Opt* і його параметри α . Додаткове перебирання в **БАСІ** на підмножині методів $\{Opt_{qk}, \alpha_{qk}\}$ за критерієм $\hat{I}$ дозволяє вибрати оптимальну у розумінні I пару $\{Opt^*, \alpha^*\}$. При застосуванні методу регуляризації за Тіхоновим [140], що полягає у запровадженні стабілізуючої домішки α у критерій МНК

$$J = \varepsilon^T \varepsilon + \alpha(\hat{\beta} - \hat{\beta}_a)^T(\hat{\beta} - \hat{\beta}_a),$$

за відповідних значень α можуть бути отримані аналогічні результати. Але не маючи критерію $\hat{I}$, невідомо, як вибрати ваги α і як задати апріорні значення β_0 вектора β параметрів моделі Σ , тоді як в класі **БАСІ** вони вибираються об'єктивно за умови

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \min_{(\alpha, \beta)} \hat{I}. \quad (1.40)$$

Багаторазово адаптивні системи ідентифікації мають ширші можливості регуляризації порівняно зі звичайними. Ефективність **БАСІ** очевидна настільки, наскільки очевидна нерівність

$$\inf I_q(\Sigma, Opt, \alpha, u) \Big|_{\beta=\arg \min J} < \inf I_q(u) \Big|_{[\Sigma=\text{const}, (Opt, \alpha)=\text{const}, \beta=\arg \min J]}, \quad (1.41)$$

де права частина рівняння відповідає системам мінімізації I_q зі звичайним ідентифікатором (тільки частина 4 схеми на рис. 1.7), а ліва – системам з **БАСІ**-ідентифікатором (частини 2, 3, 4, 5).

Якщо I_q не враховує втрат на пошук $\inf I_q$ (як у прикладі прогнозу), нерівність строга. Якщо враховує, для великої розмірності елементів Σ, Opt, α і неякісній їх впорядкованості проекторами PP_1, PP_2 **БАСІ** нерівність може не виконуватися. У таких системах порушено принцип раціонального ускладнення. Ускладнення (розширення розмірності елементів) багаторівневої системи з **БАСІ**-ідентифікатором має бути таким, щоб нерівність (1.41) не послаблювалася, а посилювалася.

Розглянемо випадок (приклад), за якого очевидна наявність періодичної складової часового ряду, наприклад, помісячний обсяг споживання електроенергії. Хоча цей показник рік від року змінюється, але у межах кожного року, тобто періодично у часі має місце збільшення його узимку і зменшення влітку. На рис. 1.8 наведено вибірку в 312 точок середньомісячних значень електроспоживання в Україні за 26 років (1960–1986 рр.). Відсутність вхідної змінної

$u(t)$ (в основному зростання промислових потужностей) не дає змоги побудувати модель “вхід – вихід” або “причина - наслідок”. Аналізуючи лише наслідок, маємо можливість представити його однорідним диференціальним рівнянням

$$(T_1 p - 1)(T_2^2 p^2 - 2\xi T_2 p + 1)x(t) = 0. \quad (1.42)$$

де $p = d/dt$, $x(0) = 2000$; $px(0) \sim 70$ МВт/місяць.

Така модель відповідає тенденції зростання середньорічного споживання (корінь рівняння $p_1 = 1/T$) і поступового зростання коливань (корені)

$$(p_{2,3} = \xi/T \pm i\sqrt{(\xi - 1)/T^2}).$$

Але експоненціальна тенденція зростання має місце для $k = \overline{0, 200}$. Далі процес виходить на усталений режим. Тому точнішою буде модель зі змінними у часі коефіцієнтами T_1 і $\xi(t)$, тоді як T_2 залишається незмінним і дорівнює 12 місяцям. За такої постановки прогнозне значення $\hat{x}(T + \tau)$ обчислюється по моделі (1.42), як її рішення для прогнозних значень $T_1(T + \tau)$ і $\xi(T + \tau)$. На рис. 1.8 наведено виміряні $x(k_i)$ та прогнозні $\hat{x}(k_i)$ на один рік уперед значення електроспоживання.

Прогноз виконано нестационарною різницевою моделлю з річним кроком 12 місяців, яка розраховувалась за попередніми трьома роками

$$(\hat{x}(k + 12) = \beta_0 x(k) + \beta_1 x(k - 12) + \beta_2 x(k - 24) + \beta_3 x(k - 36)). \quad (1.43)$$

Ця модель є різницевий еквівалент неперервної моделі (1.42) зі змінними у часі коефіцієнтами. Оцінки β_i , $i = \overline{0, 3}$, моделі (1.43) визначено за методом найменших квадратів. Для селекції моделей (степені n) необхідно скористатися зовнішнім критерієм, наприклад, критерієм “регулярності” [8]:

$$\hat{I} = \left[\frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{np}}} (x_i^{\text{np}}(k) - \hat{x}_i^{\text{np}}(k))^2}{\sum_{k=1}^{N_{\text{np}}} (x_i^{\text{np}}(k))^2} \right]^{1/2}, \quad (1.44)$$

де $x_i^{\text{np}}(k)$, $k = \overline{1, N_{\text{np}}}$ – значення часового ряду $x_i(k)$, $k = \overline{1, M}$, вибрані у перевіірочну послідовність; $\hat{x}_i^{\text{np}}(k)$ – прогнозні оцінки $x(k_i)$ на перевіірочній послідовності, отримані по моделі, побудованій на робочій послідовності $M_1 = M - N_{\text{np}}$ точок k ($k = \overline{1, M_1}$).

Недоліком побудови моделей за критерієм (1.44) є надмірна критичність моделей до способу вибору точок у перевіірочній та робочій послідовностях [69]. Для більшої ефективності селекції моделей критерій (1.44), як правило, доповнюють критеріями незміщеності або балансу змінних. Це дає можливість

будувати досить якісні моделі для середньострокового та довгострокового прогнозування часових рядів. Взагалі моделі часових рядів у вигляді однорідних диференціальних чи авторегресійних різницьових рівнянь можна розглядати, як неоднорідні, у яких вхідну змінну $u(t)$ представлено додатковою системою диференціальних рівнянь порядку m : $\dot{u} = cu$, $u(0) = u_0$. Тоді замість системи порядку n отримаємо однорідну систему розширеної розмірності. Саме це і спостерігається при описі часових рядів. Так, однорідне рівняння (1.42) штучно розширене до третього порядку внаслідок відсутності керуючого впливу $u(t)$, яким може бути внутрішній валовий продукт, загальний обсяг виробництва, що утворює аперіодичну (середньорічну) складову ряду; витрати на опалення, що складають коливальну складову, а їх зв'язок з енергоспоживанням носить безінерційний характер, чи, максимум, інерційність першого порядку та неодиничний коефіцієнт передачі (унаслідок втрат). Звідси зрозуміло, що більш точними і фізичними є моделі, що враховують основні причинно-наслідкові зв'язки в об'єкті, що досліджується. За відсутності інформації про ці зв'язки слід проводити селекцію структур моделей по зовнішньому критерію I , починаючи з простіших (мінімальної вимірності параметрів, що оцінюються), але таких, які б враховували, якнайкраще, властивості часових рядів, моделі яких задовольняють умови (1.43):

- 1) $y_1 = \beta_1 \sin(\beta_2 + \beta_3)$ – синусоїда, витягнута у β_1 разів по y , утиснута в β_2 разів по x , зсунута по осі на відрізок β_3/β_2 , із періодом $T = 2\pi/\beta_2$, має нулі у точках $x = n\pi - \beta_3/\beta_2$;
- 2) $y_2 = \beta_1 \operatorname{tg}(\beta_2 x + \beta_3)$ – має період π/β_2 , розриви по y_2 у точках $x = \frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{\beta_3}{\beta_2}$, які слід виключити з розгляду;
- 3) $y_3 = \beta_1 \arcsin(\beta_2 x)$ – монотонно зростає від $-\pi/2$ до $\pi/2$ при зміні x від $-1/\beta_2$ до $+1/\beta_2$;
- 4) $y_4 = \beta_1 \operatorname{arctg}(\beta_2 x)$ – монотонно зростає від $-\pi/2$ до $\pi/2$ при зміні x від $-\infty$ до ∞ ;
- 5) $y_5 = \beta_1 x^{\beta_2}$ – монотонно росте з прискоренням зростання при $\beta_2 > 1$ та з уповільненням при $\beta_2 < 1$;
- 6) $y_6 = \beta_1 \log_{\beta_2} x$ ($\beta_2 > 0$) – при $\beta_1 = 1$ є дзеркальне відображення y_5 відносно лінії $y_6 = x$;
- 7) $y_7 = \beta_1 e^{-(\beta_2)^2}$ – монотонно зростає від 0 до β_1 і зменшується від β_1 до 0 симетрично відносно $x = 0$;
- 8) $y_8 = \beta_1 e^{\beta_2 x} + \beta_3 e^{\beta_4 x}$ – монотонно змінює конфігурацію залежно від знаків і величин β_1, β_4 ;
- 9) $y_9 = \beta_1 e^{\beta_2 x + \beta_3 x^2}$ – несиметрична зростаюча (при $\beta_1 > 0$) або спадаюча (при $|\beta_3| > |\beta_2|$, $\beta_2 < 0$ до β_1);
- 10) $y_{10} = \beta_1 x + \beta_2 e^{\beta_3 x}$, $x > 0$ – зростаюча при $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$, екстремальна, випукла, несиметрична, дзвіноподібна із зсувом екстремуму по осі ОХ тим більше, чим більше β_3 .

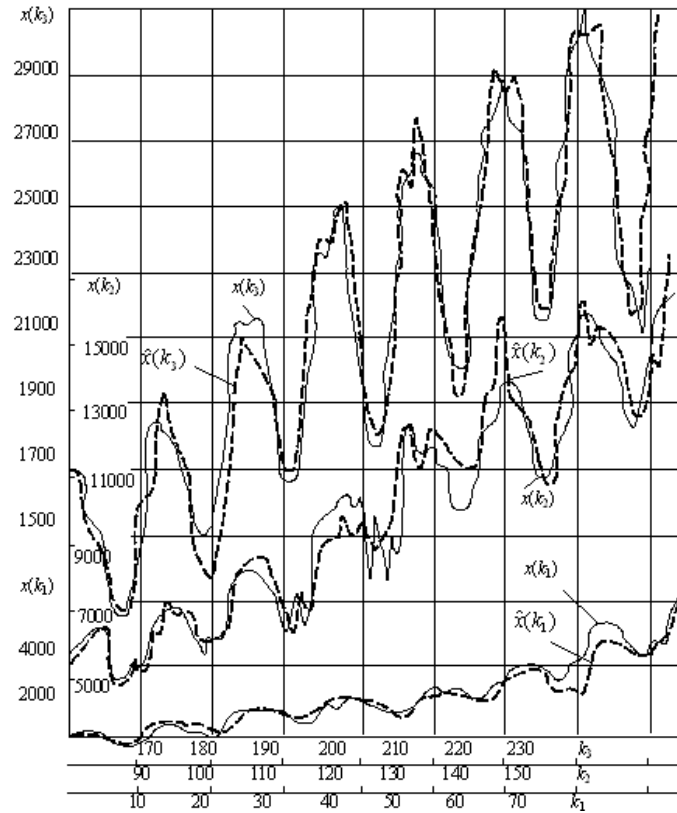


Рис. 1.8. Прогнозне $\hat{x}(k_i)$ та виміряне $x(k_i)$ значення ряду, $i = 1, 2, 3$

Аналізуючи ряд, який досліджується, за наведеними для функцій $y_1(x)$ – $y_{10}(x)$ ознаками, де x для часових рядів це t , можна підібрати оптимальну за критерієм мінімальної складності модель. Такий аналіз легко автоматизувати, використовуючи алгоритми розпізнавання образів, що побудовані на основі теорії нечітких множин, нейроноподібних структур чи статистичних методів. Показники енергетики ЕТК, як функції часу, можуть мати найрізноманітнішу структуру, довжину ряду, точність, тип прихованої закономірності розвитку (зміни) у часі, кроку у часі, інтервалу прогнозу та ін. [127].

Елементи, із яких складається модель часового ряду, можуть бути аналітичними функціями часу t (степеневі: t^i , $-\infty < i < \infty$; періодичні тригонометричні: $\sin(\omega t + \varphi)$; комбіновані: $\sin^i(\omega t + \varphi)$) та іншими точно заданими функціями $F(t)$) або затриманими у часі t значеннями самого ряду $y(t)$ ($y(t - \tau)$, $0 \leq \tau \leq t_k$, де t_k – кінцеве значення часу). Як правило, час t представлено дискретами t_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ не завжди із рівномірним кроком Δt [22]. У випадку невідомої структури моделі ряду, перебираючи різні варіанти структур, побудованих на

вказаних елементах, можна підібрати найкращу (за основним критерієм I (критерієм точності прогнозу)) структуру.

Моделі зі степеневими елементами, як правило, краще використовувати для коротких рядів, а авторегресійні – для довгих (де не так сильно впливає невідомість початкових умов).

Розглянемо роботу БАСІ у задачах прогнозу одного із показників енергетики України. Показник I точності прогнозу, який фізично реалізується, представимо зваженою сумою часткових показників I_i ($i=1,2,3$), що відповідають за якість окремих властивостей моделі ряду.

Показник

$$I_1 = \frac{1}{n} \text{tr} \left[\text{diag} \frac{|\hat{\beta}_i^{\text{п}} - \hat{\beta}_i^{\text{н}}|}{|\hat{\beta}_i|} \right], \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.45)$$

де $\hat{\beta}_i^{\text{п}}, \hat{\beta}_i^{\text{н}}, \hat{\beta}_i$ – оцінки i -го параметра моделі, що отримані за вибіркою парних, непарних та всіх дискретів k часу t_k ; це, так званий параметричний показник регулярності [16].

Показник

$$I_2 = (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})(\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}})^{-1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(M)]^T; \quad \hat{\mathbf{x}}^T = [\hat{x}(1), \dots, \hat{x}(M)]^T, \quad (1.46)$$

де $\varepsilon(k)$ – похибки апроксимації сигналу $x(k)$ відповідною моделлю у k -й точці ряду; це так званий сигнальний показник незміщеності, або точності моделювання ряду моделлю [37].

Показник [38]

$$I_3 = |1 - K|, \quad K = \frac{\sum_{i=1}^L \eta_i |x(M-i)\hat{x}(M-i)|}{\sum_{i=1}^L \eta_i |x(M-i)| \sum_{i=1}^L \eta_i |\hat{x}(M-i)|}. \quad (1.47)$$

де η_i – коефіцієнт розподілу бажаної точності прогнозу по L останнім точкам вибірки $x(k)$, $k = \overline{1, M}$; $\sum_{i=1}^L \eta_i = 1$, $\hat{x}(M-i)$ – прогнозні значення $x(M-i)$, що отримані з моделі, побудованої на скороченій на L останніх точок вибірці $k = \overline{1, M-L}$.

Оскільки вважається, що прогнозований ряд $x(k)$ складається із прихованої детермінованої гладкої у часі складової та випадкової складової, близької до гаусівського “білого шуму”, то у варіаційному ряді упорядкованих за складністю (вимірності вектору β невідомих параметрів) моделей, показники I_1 і I_3 обмежують вимірність n вектору β , в той час, як показник I_2 зі зростанням n монотонно зменшується. В БАСІ, залежно від мети ідентифікації, варіюються коефіцієнти ваги g_i зваженої суми цих трьох показників:

$$I = g_1 I_1 + g_2 I_2 + g_3 I_3; \quad g_1 + g_2 + g_3 = 1, \quad g_i \geq 0. \quad (1.48)$$

Так, для задачі контролю параметрів β_i моделі відомої структури максимальна вага становить g_1 ; для задачі точної апроксимації ряду $x(k)$ моделлю $\hat{x}(k) - g_2$; для задачі прогнозу – g_3 . Сукупність показників I_1, I_2, I_3 забезпечує компроміс між стабільністю оцінок моделі, точністю $\epsilon^T \epsilon$ апроксимації та точністю прогнозу.

Маємо конкретний приклад реального часового ряду (рис. 1.9 та табл. 1.7), що має 43 дискрети $x(k)$ із рівномірним кроком $\Delta t = 4$ місяці (один із показників в енергетиці України). Розглянемо рішення задачі прогнозу $x(k)$ на 6 останніх точках $k = \overline{1, 37}$, вважаючи їх невідомими.

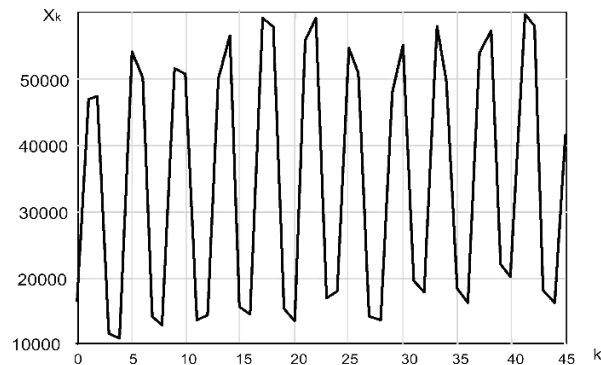


Рис. 1.9. Часовий ряд одного із показників енергетики України

Табл. 1.6. Дискретні значення часового ряду

k	x	k	x	k	x	k	x
1	10550	12	13600	23	59250	34	57800
2	47070	13	14550	24	16850	35	49630
3	47350	14	49900	25	17830	36	18780
4	11500	15	56750	26	54800	37	16000
5	10900	16	16050	27	50700	38	53500
6	54700	17	14680	28	14150	39	57500
7	50000	18	59300	29	13550	40	22000
8	14320	19	57700	30	47430	41	19650
9	12900	20	15500	31	56350	42	59900
10	51650	21	13350	32	19450	43	57550
11	50740	22	55600	33	17600		

Така постановка задачі дає можливість реалізувати, фізично не реалізований при прогнозі у майбутнє, об'єктивний показник I відносної точності про-

гнозу на ці 6 точок

$$I = \frac{[\varepsilon(38), \dots, \varepsilon(43)][\varepsilon(38), \dots, \varepsilon(43)]^T}{x(38), \dots, x(43)} [x(38), \dots, x(43)]^T, \quad (1.49)$$

тобто відносне середньоквадратичне відхилення $\varepsilon(k) = \hat{x}(k) - x(k)$, $k = \overline{38, 43}$ прогнозних значень $\hat{x}(k)$ від відомих $x(k)$. В критерії (1.47) взято $\eta_i = 1/L = 1/6$. Коефіцієнти ваги g_i в узагальненому критерії 1.47): $g_1 = 0,9$; $g_2 = 0,4$; $g_3 = 0,4$. Середнє значення ряду дорівнює 35100, середньоквадратичне відхилення ряду від середнього – 19550, коефіцієнт варіації – 0,55. Наведеному у табл. 1.6 ряду в **БАСІ** із множини $\{\Sigma, \beta\}$ ставились у відповідність різні математичні моделі:

1) моделі у вигляді різного (цілочислового та дробового) порядку степеневого поліному від t , тобто від дискретів k часу:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k; \quad (1.50)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2; \quad (1.51)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \beta_3 k^3; \quad (1.52)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k^{1/4} + \beta_2 k^{1/3} + \beta_3 k^{1/2} + \beta_4 k^{3/2}; \quad (1.53)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^{-1} + \beta_3 k^{-3}; \quad (1.54)$$

2) моделі авторегресії від k зі сталим та змінним кроками:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1); \quad (1.55)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2); \quad (1.56)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3); \quad (1.57)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3) + \beta_4 x(k-4); \quad (1.58)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-4); \quad (1.59)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-4); \quad (1.60)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-4) + \beta_3 x(k-8); \quad (1.61)$$

3) комбіновані поліноміально - авторегресійні моделі, структуру яких у свій час виявила сама **БАСІ** при прогнозуванні великої кількості часових рядів – показників економіки України [38]:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1); \quad (1.62)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-4); \quad (1.63)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1) + \beta_3 x(k-4). \quad (1.64)$$

На множині структур (1.50)–(1.64) моделей часового ряду та множині, запропонованих у [34] методів (МНК, УМНК, ІМНК, МДЗ), було перевірено ефективність використання критерію, який фізично реалізується ((1.48), на предмет його близькості до ідеального критерію, що фізично не реалізується (1.49). Тут під ефективністю розумілася правильність вибору найкращого за критерієм (1.49) методу, вибраного за критерієм (1.48). Результати числового моделювання представлено в табл. 1.7, де в 15 рядках і в 10 стовпчиках подано:

1 – типи моделей (степеневі (1.50)–(1.54), авторегресійні (1.55)–(1.61), комбіновані (1.62)–(1.64);

2 – відносну середньоквадратичну похибку моделювання ряду відповідною моделлю при $k = \overline{1, 37}$ й ідентифікації її по МНК;

3 – ідеальний критерій, який фізично не реалізується (1.60) по МНК;

4 – критерій, який фізично реалізується (1.48) при ідентифікації моделі по МНК;

5 – найкращий за критерієм (1.48) метод ідентифікації для відповідної до рядка моделі;

6 – значення ідеального критерію (1.49) для вибраного по реальному критерію (1.48) методу для відповідної до рядка моделі;

7 – значення критерію (1.48) для вибраного за ним найкращого методу ідентифікації для відповідної до рядка моделі;

8 – найкращий за ідеальним критерієм (1.49) метод ідентифікації відповідної до рядка моделі;

9 – значення ідеального критерію (1.49) для найкращого за ним методу ідентифікації моделі відповідного рядка;

10 – значення реального критерію ((1.48) для найкращого за критерієм (1.49) методу ідентифікації моделі відповідного рядка;

11 – коефіцієнт ефективності роботи **БАСІ** по вибору оптимального методу $\{Opt^*, \alpha^*\}$ відносно МНК.

Проаналізуємо отримані результати досліджень:

1) На множині із 15-ти структур моделей і 4 методів ідентифікації для конкретного ряду (табл. 1.7) найкращою по ідеальному критерію (1.49) виявилась авторегресійна модель (1.61) зі змінним запізненням на $k - 1$, $k - 4$ та $k - 8$ кроків; найкращий метод – МДЗ. За реальним критерієм (1.48) отримано той самий результат. Взагалі, із 15 розглянутих випадків у восьми оптимальний метод ідентифікації по реальному критерію (1.48) було вибрано вірно (рядки 2, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 15 табл. 1.7), тобто він збігся із методом, вибраним по ідеальному критерію (1.49). В інших семи випадках (рядки 1, 4, 5, 8, 9, 13, 14) ідеальний показник (1.49) для методу, вибраного за реальним показником (1.48), несуттєво гірший за цей показник для оптимального по ідеальному показнику методу (стовпчики 6 і 9 табл. 1.7).

На рис. 1.10 наведено залежність ідеального I^* , отриманого для оптимального для нього методу ідентифікації, від того самого показника для оптималь-

Табл. 1.7. Результати моделювання роботи БАСІ у задачі прогнозу

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	10,89	0,49	0,47	0,25	умнк	0,41	0,242	мод	0,363	0,26	1,3
2	10,90	0,484	0,59	0,26	імнк	0,42	0,223	імнк	0,415	0,22	1,43
3	10,91	0,476	0,88	0,41	імнк	0,38	0,2	імнк	0,38	0,2	2,32
4	10,92	0,485	0,59	0,27	умнк	0,43	0,226	імнк	0,365	0,23	1,62
5	10,93	0,488	0,49	0,25	умнк	0,45	0,23	умнк	0,425	0,24	1,15
6	10,94	0,49	0,43	0,24	умнк	0,42	0,235	умнк	0,415	0,24	1,05
7	10,95	0,62	0,58	0,28	умнк	0,56	0,252	умнк	0,558	0,26	1,04
8	10,96	0,123	0,14	0,04	мнк	0,14	0,04	мод	0,096	0,05	1,49
9	10,97	0,133	0,1	0,03	мнк	0,1	0,03	мод	0,088	0,13	1,13
10	10,98	0,113	0,12	0,04	мдз	0,092	0,03	мод	0,092	0,03	1,33
11	10,99	0,131	0,10	0,03	мдз	0,091	0,031	мод	0,091	0,03	1,13
12	10,10	0,009	0,09	0,01	мдз	0,063	0,011	мод	0,063	0,01	1,46
13	10,10	0,488	0,47	0,26	мдз	0,489	0,225	умнк	0,411	0,24	1,14
14	10,10	0,132	0,11	0,03	мнк	0,108	0,035	мод	0,018	0,04	1,33
15	10,10	0,131	0,11	0,04	мнк	0,111	0,037	мнк	0,111	0,04	1

ного по реальному показнику $\hat{I}$ методу ідентифікації, з якого наочно випливає висновок про сильну кореляцію показників (1.48) і (1.49) і, як наслідок, можливість ефективного використання критерію, який фізично реалізується (1.48).

2) У міру ускладнення моделей (1.50), (1.51), (1.52), що є степеневі ряди, показник (1.46) середньоквадратичної похибки апроксимації ряду моделями (1.50)–(1.52) зменшується, що природно впливає з першої теореми Вєрштрасса про апроксимацію степеневими поліномами (рядами Тейлора). У той же час ідеальний критерій (1.41) точності прогнозу при ускладненні моделей погіршується (рядки 1, 2, 3 третього стовпчика табл. 1.7). Це підтверджує не-об'єктивність внутрішнього апроксимативного критерію (1.46), некоректність його використання для задачі прогнозу.

3) Дещо інша ситуація має місце для авторегресійних і змішаних поліноміально-авторегресійних моделей (1.55)–(1.64). Тут унаслідок властивості МНК регуляризувати, коли змінні зашумлені, внутрішній критерій (1.46) середньоквадратичної міри близькості на ділянці апроксимації і зовнішній, як ідеальний (1.49), так і реальний (1.48) критерії стають достатньо сильно корельованими (рис.). Тобто, для цього класу моделей використання апроксимативного критерію (1.46) у задачі прогнозу по зашумленим даним у точках є менш критичне. Тут має місце саморегуляризація. Чим складніше авторегресія, тим гірше обумовленість інформаційної матриці МНК для точних даних. Але для зашумлених некорельованою перешкодою даних діагональні елементи цієї матриці збільшуються і, як результат, зменшуються (за модулем) МНК-оцінки коефіцієнтів моделі, тим самим спрощуючи (регуляризуючи за Тихоновим [45]) модель ЕТО.

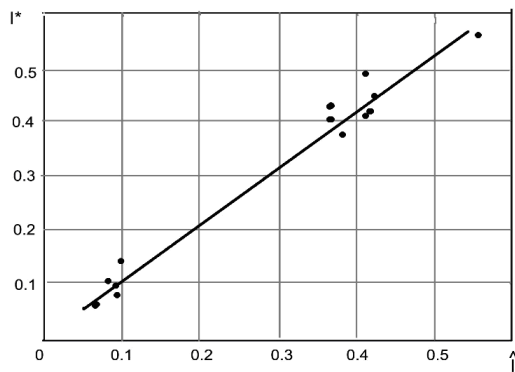
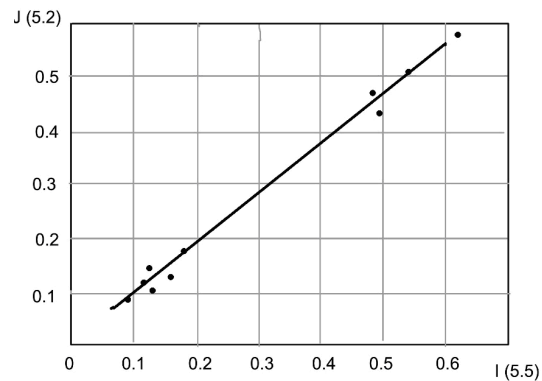
Рис. 1.10. Залежність ідеального показника I^* 

Рис. 1.11. Регресійна залежність показників

4) Зіставимо значення ідеального критерію (1.49) для моделей, отриманих по МНК (стовпчик 3 табл. 1.7) одному із запропонованих методів (стовпчик 6) з оптимізацією по реальному критерію (1.48). Із 15 моделей тільки для моделі (1.62) показник (1.49) несуттєво менший. Тобто, тільки тут за критерієм (1.48) помилково замість МНК було вибрано МДЗ. В інших 14 випадках метод, знайдений за умови мінімуму критерію точності прогнозу, який фізично реалізується (1.48), дав кращі результати, ніж МНК, або такі самі, якщо по (1.48) вибирався, як кращий, МНК (стовпчики 6 та 3 табл. 1.7).

5) Отже, система типу **БАСІ**, навіть за обмежених потужностей множин методів і моделей, має суттєву перевагу порівняно із звичайними системами типу “сі” та “СІ” (табл. 1.1).

Елементи класичних методів оцінювання у структурі БАСІ

2.1. МНК-оцінювання статичних характеристик ЕТО

2.1.1. Регресійні моделі електротехнічних об'єктів

Лінійні і нелінійні, одновимірні і багатовимірні статичні залежності між змінними стану ЕТО можна подати рядом Тейлора або степеневим поліномом від однієї чи кількох змінних, складові якого можна умовно розглядати як незалежні змінні x_i лінійної (відносно невідомих коефіцієнтів β_i) регресійної моделі вихідної змінної Y . Якщо на вихідну змінну Y впливає кілька вхідних $X_1, X_2, \dots, X_m$, маємо множинну регресію [40,49,71,111,141]:

$$M\{Y/X_1, X_2, \dots, X_m\} = X\beta,$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$ – вектор параметрів β_i , які оцінюються; $M\{y/x\}$ – умовне математичне сподівання вихідної змінної y від m вхідних $(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

У покомпонентній формі маємо

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \cdots + \beta_m x_{1m} + \varepsilon_1, \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \cdots + \beta_m x_{2m} + \varepsilon_2, \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \cdots + \beta_m x_{nm} + \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $\beta_i, i = \overline{0, m}$ – теоретичні коефіцієнти регресії.

Для однозначного визначення параметрів β_i необхідно, щоб $n \geq m + 1$, де $m + 1$ - кількість параметрів, якими визначається теоретична множинна лінійна регресія (2.1), значення яких оцінюються на основі обробки вибірки із n даних експерименту на ЕТО.

Векторно-матрична форма системи рівнянь (2.1) має вигляд

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.2)$$

де

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Похибка $\boldsymbol{\varepsilon}$ є випадковий вектор, компоненти ε_i якого характеризують відхилення, викликані випадковими збуреннями, які не враховано у структурі моделі (2.2). Емпірична модель є статистичний аналог теоретичної. За її допомогою визначаються оцінки параметрів моделі (2.1) шляхом статистичної обробки вибірки даних. Емпірична модель $\mathbf{y}$ у векторно-матричній формі

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^* + \mathbf{e}, \quad (2.3)$$

де

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^* = \begin{bmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_m^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{\beta}^*$ – статистична оцінка теоретичного вектору $\boldsymbol{\beta}$ лінійної множинної регресії (2.2); $\mathbf{e}$ – статистична оцінка випадкового вектору похибок $\boldsymbol{\varepsilon}$ цієї ж моделі.

Якщо компоненти вектору $\boldsymbol{\varepsilon}$ – невідомі випадкові величини, компоненти e_i вектору $\mathbf{e}$ можуть бути обчислені за даними вибірки. Для визначення вектору $\boldsymbol{\beta}^*$ використовують метод найменших квадратів, для оптимальності якого мають бути виконані умови Гауса –Маркова

$$1) \quad M[\varepsilon_i] = 0, \quad i = \overline{1, n};$$

$$2) \quad \text{cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \sigma_\varepsilon^2, & i = j. \end{cases}$$

тобто між випадковими відхиленнями ε_i і ε_j має бути відсутній кореляційний зв'язок, а дисперсія $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \text{const} = \sigma_\varepsilon^2$;

3) між регресорами моделі і випадковим вектором $\boldsymbol{\varepsilon}$ теж має бути відсутній кореляційний зв'язок, тобто $\text{cov}(\varepsilon_i x_i) = 0, i = \overline{1, n}$;

4) регресори $\mathbf{X}$ моделі (2.2) мають бути точними;

5) модель лінійна відносно параметрів $\boldsymbol{\beta}$;

6) між векторами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$, де $\mathbf{x}_i = [x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}]^T$, $i = \overline{1, m}$, має бути відсутня лінійна залежність, щоб визначник матриці $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ не дорівнював нулю;

7) випадковий вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ має багатовимірний нормальний закон розподілу ймовірностей, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma \cdot \mathbf{I}_n)$, кожний компонент ε_i вектору $\boldsymbol{\varepsilon}$ також матиме нормальний закон розподілу $\varepsilon \sim N(0, \sigma)$;

8) ранг $r(\mathbf{X})$ матриці $\mathbf{X}$ має бути не менше $(m + 1)$.

Виконання цих умов дає право на використання звичайного МНК для визначення статистично-оптимальних оцінок параметрів $\boldsymbol{\beta}^*$ теоретичної лінійної множинної регресії.

2.1.2. Оцінювання вектору коефіцієнтів регресійної моделі за МНК

Із виразу (2.3) вектор похибок $\mathbf{e}$ дорівнюватиме

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*,$$

Для визначення компонент вектору $\boldsymbol{\beta}^*$ – статистичних оцінок компонент вектору $\boldsymbol{\beta}$ використовується МНК. Він полягає у мінімізації по $\boldsymbol{\beta}^*$ суми квадратів похибок $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T \mathbf{e} &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*) = (\mathbf{y}^T - (\boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{X}^T) (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^* \\ &\quad - (\boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + (\boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}^* = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2(\boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + (\boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}^*. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Необхідна умова мінімуму виразу (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\beta}^*} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}^*} [\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2(\boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + (\boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}^*] = -2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}^* + [(\boldsymbol{\beta}^*)^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}]^T \\ &= -2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}^* = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Звідси отримаємо оцінку $\boldsymbol{\beta}^*$ вектору $\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\beta}^* = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}, \quad (2.6)$$

яка складається із точного значення $\boldsymbol{\beta}$ і випадкової складової

$$\boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\beta} + [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.7)$$

2.1.3. Числові характеристики оцінки за МНК

Оскільки $\boldsymbol{\beta}^*$ є випадковий вектор, його компоненти β_i^* будуть випадковими величинами. Виникає потреба у визначенні їхніх числових характеристик. Враховуючи (2.7), отримаємо математичне сподівання $M[\boldsymbol{\beta}]$ МНК-оцінки $\boldsymbol{\beta}^*$:

$$M[\boldsymbol{\beta}] = M\{\boldsymbol{\beta} + [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}\} = \boldsymbol{\beta} + [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T M[\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\beta}.$$

Оскільки $M[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$, $M[\boldsymbol{\beta}^*] = \boldsymbol{\beta}$. Отже, емпіричний вектор $\boldsymbol{\beta}^*$ є точкова незміщена статистична оцінка для теоретичного вектору $\boldsymbol{\beta}$ параметрів. Для отримання дисперсій компонентів β_i емпіричного вектору $\boldsymbol{\beta}^*$ як випадкових величин визначимо коваріаційний момент:

$$\begin{aligned} \text{cov} [(\boldsymbol{\beta}^*(\boldsymbol{\beta}^*)^T)] &= M[(\boldsymbol{\beta}^* - \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^* - \boldsymbol{\beta})^T] \\ &= M\{(\boldsymbol{\beta} + [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta} + [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta})^T\} \\ &= M\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}]^T\} = M\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T\} \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \mathbf{I}_n \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}. \end{aligned}$$

оскільки $\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 = \text{const}$ та $M[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0$ для $i \neq j$. Отже, коваріаційна матриця оцінок $\boldsymbol{\beta}^*$ дорівнює

$$\text{cov} [\boldsymbol{\beta}^*(\boldsymbol{\beta}^*)^T] = \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}.$$

Позначимо c_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) елементи зворотної матриці $\mathbf{C} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$. Тоді

$$\text{cov} [\boldsymbol{\beta}^*(\boldsymbol{\beta}^*)^T] = \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \mathbf{C}. \quad (2.8)$$

Оскільки $\text{cov} [(\boldsymbol{\beta}_i^*)^2] = D(\beta_i^*) = \sigma_{\beta_i^*}^2$, $i = \overline{1, m}$, вираз (2.8) набуває такого вигляду:

$$\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,m+1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{m+1,m+1} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

де враховано, що $\sigma_{\beta_k^*}^2 = \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 c_{kk}$, $k = \overline{1, m+1}$.

2.1.4. Числові характеристики рівняння регресії

Рівняння множинної лінійної регресії із параметрами β_i^* ($i = \overline{0, m}$), що визначені за даними вибірки

$$y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m, \quad (2.10)$$

де y_i^* – одне із можливих значень для заданого вектора $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Оскільки емпіричні коефіцієнти функції (2.10) – випадкові величини, емпірична функція y_i^* також буде випадковою величиною із такими характеристиками

1) Математичне сподівання

$$\begin{aligned} M[y_i^*] &= M[\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m] = \\ &= M[\beta_0^*] + x_1 M[\beta_1^*] + \dots + x_m M[\beta_m^*] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тобто, $y^* = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}^*$ є незміщена оцінка теоретичної функції $y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}$. Із рівняння (2.11) випливає, що для емпіричної функції регресії $y^* = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*$ буде виконуватися рівність

$$M[y_i^*] = M[\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*] = \mathbf{X} M[\boldsymbol{\beta}^*] = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}.$$

2) Дисперсія

$$\begin{aligned} D[y^*] &= D[\beta_0^* + \beta_1^*x_1 + \beta_2^*x_2 + \dots + \beta_m^*x_m] = D[\beta_0^*] + x_1^2 D(\beta_1^*) + x_2^2 D(\beta_2^*) + \dots + x_m^2 D(\beta_m^*) \\ &\quad + 2x_1 \text{cov} [\beta_0^*, \beta_1^*] + 2x_2 \text{cov} [\beta_0^*, \beta_2^*] + \dots + 2x_m \text{cov} [\beta_0^*, \beta_m^*] + 2x_1x_2 \text{cov} [\beta_1^*, \beta_2^*] \\ &\quad \dots + 2x_1x_m \text{cov} [\beta_1^*, \beta_m^*] + \dots + 2x_{m-1}x_m \text{cov} [\beta_{m-1}^*, \beta_m^*] = \\ &= \mathbf{x}^T [(\boldsymbol{\beta}^*)^T \boldsymbol{\beta}^*] \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Векторно-матричний вигляд рівняння (2.12):

$$D[y_i^*] = \sigma_\epsilon \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}.$$

3) Середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_{y_i^*} = \sigma_\epsilon \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}}.$$

4) Коефіцієнт детермінації для множинної лінійної регресії – це неспадна функція від числа m регресорів $\mathbf{x}$:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}. \quad (2.13)$$

Кожна нова змінна надає моделі додаткову інформацію і область невизначеності при цьому зменшується. При обчисленні R^2 для отримання її незміщених статистичних оцінок здійснюють поправку у чисельнику і знаменнику (2.13) на число ступенів вільності $q_1 = n - 1$, $q_2 = n - m - 1$. Такий коефіцієнт називають скоригованим [49, 71].

$$R_{\text{ск}}^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2 / q_2}{\sum (y_i - \bar{y})^2 / q_1} = 1 - \frac{q_1 \sum e_i^2}{q_2 \sum (y_i - \bar{y})^2}. \quad (2.14)$$

Враховуючи, що

$$\frac{\sum y_i^2}{(y_i - \bar{y})^2} = 1 - R^2,$$

остаточно отримаємо

$$R_{\text{ск}}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - m - 1}. \quad (2.15)$$

5) Довірчі інтервали.

Для перевірки значущості статистичних оцінок β_i^* і, щоб знайти для них, а також для множинної лінійної регресії, довірчі інтервали, необхідно визначити їхні закони розподілу, як випадкових величин. Оскільки $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ випадковий вектор, який має n -вимірний нормальний закон розподілу $N(0, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_n)$, із (2.7) випливає, що

$$\beta_i^* \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{C}^{-1}).$$

Відповідно, компоненти β_i^* вектору $\boldsymbol{\beta}^*$ матимуть розподіли

$$\beta_i^* \sim N(\beta_i, \sigma_\varepsilon^2 c_{ii}).$$

Розподіл випадкової величини

$$\frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sigma_\varepsilon \sqrt{c_{ii}}} \sim N(0, 1). \quad (2.16)$$

Розподіл випадкової величини

$$(\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m) \sim N(\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m = \boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}).$$

Позначимо

$$y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m,$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m.$$

Тоді випадкова величина $(y_i^* - y_i)/\sigma_{y_i^*}$ також матиме нормований нормальний закон (2.16) розподілу ймовірностей

$$\frac{y_i^* - y_i}{\sigma_{y_i^*}} \sim N(0, 1). \quad (2.17)$$

Для визначення законів розподілу ймовірностей оцінок дисперсій як випадкових величин s_ε^2 треба дослідити випадковий вектор залишків ε_i . Відповідно до передумов МНК компоненти ε_i вектору $\boldsymbol{\varepsilon}$ мають нормальний закон розподілу із параметрами $[\varepsilon_i] = 0$, $D[\varepsilon_i] = \sigma_\varepsilon^2 = \text{const}$, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$. Тоді

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (n - m - 1) \sum \varepsilon_i^2. \quad (2.18)$$

Враховуючи, що $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma_\varepsilon)$, випадкова величина матиме χ^2 -розподіл із $k = n - m - 1$ ступенями вільності

$$\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{(n - m - 1) \sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2(n - m - 1). \quad (2.19)$$

Якщо

$$\mathbf{e} = \mathbf{T}\mathbf{Y} = \mathbf{T}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{T}\mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{T}^T = \mathbf{T},$$

то

$$\mathbf{e}^T = (\mathbf{T}\mathbf{y})^T = (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{T}^T = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{T}^T.$$

Тоді випадкова величина (2.19) матиме χ^2 -розподіл із $k = n - m - 1$ ступенями вільності $\mathbf{e}\mathbf{e}^T/\sigma^2 \sim \chi^2(k)$.

Отже, оцінка дисперсії похибки $\boldsymbol{\varepsilon}$ дорівнює

$$s_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \sim \chi^2(n - m - 1),$$

й її середньоквадратичне значення

$$s_{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim \chi(n - m - 1),$$

відповідно мають розподіл χ^2 і розподіл χ із $k = n - m - 1$ ступенями вільності. Враховуючи, що $\boldsymbol{\beta}^*$ та $\mathbf{e}$ статистично незалежні, випадкова величина t матиме розподіл Стюдента із $b = m - 1$ ступенями вільності:

$$t = \frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sqrt{\sum e_i^2 / (n - m - 1) c_{ii}}} \sim t(n - m - 1). \quad (2.20)$$

Аналогічно, для функції регресії маємо випадкову величину

$$\frac{y_i^* - y_i}{s_{y_i^*}} \sim t(n - m - 1), \quad (2.21)$$

яка має t -розподіл із $k = n - m - 1$ ступенями вільності, де

$$s_{y_i^*} = s_{\boldsymbol{\varepsilon}} \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}}. \quad (2.22)$$

Оскільки

$$\frac{\sum_{i=1}^m (\beta_i^* - \beta_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m),$$

а

$$\frac{\sum e_i^2}{\sigma^2(n - m - 1)} \sim \chi^2(n - m - 1),$$

відношення

$$\frac{\sum (\beta_i^* - \beta_i)^2 / m}{\sum e_i^2 / (n - m - 1)} \sim F(k_1 = m, k_2 = n - m - 1)$$

матиме F -розподіл Фішера із $k_1 = m$, $k_2 = n - m - 1$ ступенями вільності.

2.1.5. Довірчі інтервали регресійної моделі та її параметрів

Для побудови довірчих інтервалів моделі (2.10) та оцінок β_i^* параметрів β_i використовуються співвідношення (2.20). Із надійністю γ цей інтервал визначається за умови, що

$$P \left(\left| \frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{(n-m-1)} c_{ii}}} \right| < t(\gamma, k) \right) = \gamma. \quad (2.23)$$

Враховуючи, що $\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{(n-m-1)} c_{ii}} = s_{\beta_i^*}$ є незміщена оцінка середньоквадратичного відхилення для β_i^* , вираз (2.23) набуває вигляду

$$P \left(\left| \frac{\beta_i^* - \beta_i}{s_{\beta_i^*}} \right| < t(\gamma, k) \right) = \gamma,$$

або

$$P(\beta_i^* - t(\gamma, k)s_{\beta_i^*} < \beta_i < \beta_i^* + t(\gamma, k)s_{\beta_i^*}) = \gamma.$$

Тобто, із заданою надійністю γ параметр β_i міститься у проміжку

$$\beta_i^* - t(\gamma, k)s_{\beta_i^*} < \beta_i < \beta_i^* + t(\gamma, k)s_{\beta_i^*},$$

де $t(\gamma, k)$ знаходять за заданою надійністю γ і числом ступенів вільності $k = n - m - 1$.

Аналогічно для побудови довірчого інтервалу для теоретичної множинної лінійної функції регресії із заданою надійністю γ використовується рівність

$$P \left(\left| \frac{y_i^* - y_i}{s_{y_i^*}} \right| \sim t(\gamma, k) \right) = \gamma,$$

або

$$y_i^* - t(\gamma, k)s_{y_i^*} < y_i < y_i^* + t(\gamma, k)s_{y_i^*},$$

де $y_i^*, s_{y_i^*}$ визначають за формулами (2.10), (2.20) для фіксованих значень вектора $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Якщо до значень $y = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_m x_m$ додати можливі відхилення залежної змінної Y від функції регресії, до дисперсії $D(t_i^*)$ необхідно додати дисперсії випадкової величини ε_i , яка дорівнює σ_ε^2 . Але, враховуючи, що σ_ε^2 – невідома величина, використовуємо її точкову незміщену статистичну оцінку s_ε :

$$(s_{y_i^*}^*)^2 = s_\varepsilon^2 (\mathbf{I} + \mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}).$$

Тоді довірчий інтервал для y_i дорівнюватиме

$$y_i^* - t(\gamma, k)s_{y_i^*} < y_i < y_i^* + t(\gamma, k)s_{y_i^*},$$

2.1.6. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів рівняння регресійної моделі

Статистична значущість коефіцієнтів теоретичної множинної лінійної регресії (2.10) із m регресорами здійснюється на основі t -статистики

$$t_{\beta_i}^* = \frac{\beta_i^* - \beta_i}{s_{\beta_i^*}}, \quad i = \overline{1, m},$$

яка має розподіл Стюдента із $k = n - m - 1$ ступенями вільності. Для заданого рівняння значущості α здійснюється перевірка правдивості статистичної гіпотези $H_0 : \beta_i = 0$ за альтернативної гіпотези $H_\alpha : \beta_i \neq 0$. Формулювання альтернативної гіпотези дає підстави для побудови двобічної критичної області. Враховуючи, що t -розподіл визначається парною диференційною функцією, за заданим значенням α і числом ступенів вільності $k = n - m - 1$ знаходять критичне значення $t''_{\text{кр}}(\alpha/2; k)$.

Враховуючи, що $|t'_{\text{кр}}(\alpha/2; k)| = t''_{\text{кр}}(\alpha/2; k)$, тобто критичні точки симетрично розташовані відносно нуля, область прийняття гіпотези H_0 дорівнюватиме

$$[t'_{\text{кр}}(\alpha/2; k), t''_{\text{кр}}(\alpha/2; k)].$$

Значення статистичного критерію, що спостерігається,

$$t_{\beta_i}^* = \beta_i^* / s_{\beta_i^*}.$$

Якщо

$$t_{\beta_i}^* \in [t'_{\text{кр}}(\alpha/2; k), t''_{\text{кр}}(\alpha/2; k)],$$

коефіцієнти β_i вважаються статистично незначущими, близькими до нуля. За виявлення такої ситуації рекомендується їх вивести із моделі, що не викличе зниження її якості. Якщо ж

$$t_{\beta_i}^* \notin [t'_{\text{кр}}(\alpha/2; k), t''_{\text{кр}}(\alpha/2; k)],$$

коефіцієнти β_i вважаються статистично значущими, а вхідна змінна X_i має вплив на вихідну змінну Y об'єкту.

2.1.7. Перевірка загальної якості моделі ЕТО за зовнішнім статистичним критерієм

Після оцінювання індивідуальної статистичної значущості кожного із коефіцієнтів здійснюється сукупна перевірка коефіцієнтів, тобто перевіряється на правдивість статистична гіпотеза

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$$

для заданого рівня довіри α . Якщо H_0 не відхиляється, можна зробити висновок, що сукупний вплив усіх m змінних x_i на залежну змінну Y можна вважати

несуттєвим, а загальну якість рівняння регресії низькою. Перевірку цієї гіпотези можна здійснити на основі дисперсійного аналізу, де порівнюються пояснювальна ($\sum[(y^* - \bar{y})^2]/m$) та залишкова дисперсії. У цьому разі нульова гіпотеза набуває такого формулювання:

$$H_0 : \frac{\sum[(y^* - \bar{y})^2]}{m} = \frac{\sum e_i^2}{n - m - 1},$$

за альтернативної гіпотези

$$H_\alpha : \frac{\sum[(y^* - \bar{y})^2]}{m} > \frac{\sum e_i^2}{n - m - 1}.$$

Для перевірки правдивості H_0 беруть статистичний критерій

$$F = \frac{\frac{\sum(y^* - \bar{y})^2}{m}}{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n - m - 1}} = \frac{(n - m - 1) \sum(y_i^* - \bar{y})^2}{m \sum(y_1 - y_i^*)^2}, \quad (2.24)$$

який має розподіл Фішера із $k_1 = m$, $k_2 = n - m - 1$, ступенями вільності, що визначений на інтервалі $[0, \infty)$. Формулювання альтернативної гіпотези дає підстави для побудови правобічної критичної області. Критична точка для неї визначається за заданим α і числом ступенів вільності $k_1 = m$, $k_2 = n - m - 1$ за таблицею F -критерію. Значення критерію, що спостерігається, $F_{\text{сп}}^*$ обчислюється за формулою (2.24). Якщо $F_{\text{сп}}^* > [F_{\text{кр}}(\alpha, k_1; k_2)]$, H_0 відхиляється на користь H_α . Це означає, що пояснювальна дисперсія є суттєво більша за залишкову. Це говорить про те, що рівняння регресії якісно моделює об'єкт. За умови $F_{\text{сп}}^* \in [0; F_{\text{кр}}(\alpha, k_1; k_2)]$ немає підстави для відхилення H_0 . Це означає, що пояснювальна дисперсія буде спільновимірною із дисперсією, що викликана впливом випадкових факторів. Це дає підстави стверджувати, що сукупний вплив пояснювальних змінних моделі на залежну змінну Y несуттєвий, а тому якість моделі у цьому випадку буде низькою. На практиці частіше замість розглянутої гіпотези перевіряється на правдивість гіпотеза про статистичну значущість коефіцієнта детермінації

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2},$$

де $\frac{\sum e_i^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$ визначає частку розсіювання залежної змінної Y відносно емпіричної регресії.

Отже, необхідно перевірити правдивість $H_0 : R^2 = 0$ при альтернативній $H_\alpha : R^2 > 0$. За статистичний критерій обирають випадкову величину

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - m - 1}{m}, \quad (2.25)$$

яка має розподіл Фішера із $k_1 = m$, $k_2 = n - m - 1$ ступенями вільності

$$F = \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{\sum (y_i - y_i^*)^2} \frac{n - m - 1}{m}, \quad (2.26)$$

Критерій (2.25) отримано із F -статистики, якщо чисельник і знаменник поділити на $\sum (y_i^* - \bar{y})^2$. Із виразу (2.25) випливає, що $F = 0$ при $R^2 = 0$. Отже, для перевірки статистичної гіпотези $H_0 : F = 0 (R^2 = 0)$ для заданого рівня значущості α відшукується $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$, який визначатиме критичну область $F_{кр}[(\alpha; k_1; k_2); \infty]$. Обчисливши значення критерію, що спостерігається, за формулою (2.25) визначається таке:

1) якщо $F_{сп}^* > F_{кр}$, H_0 відхиляється, а це рівнозначно твердженню, що $R^2 > 0$, тобто R^2 є статистично значущий. Можна зробити висновок, що рівняння регресії досить якісно моделює динаміку зміни залежної змінної Y ;

2) якщо $F_{сп}^* < F_{кр}$, немає підстав для відхилення $H_0, R^2 = 0$, а це інформує про те, що сукупний вплив регресорів моделі несуттєвий, а якість моделі у цьому випадку низька.

2.1.8. Приклад визначення моделі статичного генератора постійного струму за МНК

Нехай за даними пасивного експерименту (табл. 2.1) необхідно знайти залежність напруги генератора Y (позначено $U_{я}$) від струмів якоря X_1 (позначено $I_{я}$) та збудження X_2 (позначено $I_{зб}$). Неточність вимірів напруги цифровим мультиметром пов'язана із безінерційністю приладу і наявності випадкових пульсацій напруги. Інерційні стрілочні амперметри досить точно згладжують відповідні пульсації вимірюваних струмів. Покладемо лінійну залежність напруги Y від струмів X_1 і X_2 :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon.$$

Необхідно:

- 1) обчислити статистичну оцінку вектору $\beta^T = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$;
- 2) проаналізувати ступінь адекватності побудованої моделі вибіркоким даним;
- 3) виконати дисперсійний аналіз моделі та обчислити коефіцієнт множинної детермінації R^2 ;
- 4) перевірити статистичну значущість коефіцієнту детермінації на основі критерію Фішера;
- 5) визначити оцінки дисперсій $s_{\beta_0}^2, s_{\beta_1}^2, s_{\beta_2}^2$, та середньоквадратичні відхилення $s_{\beta_0}, s_{\beta_1}, s_{\beta_2}$ для статистичних оцінок $\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*$;
- 6) для заданої надійності $\gamma = 0,95$ побудувати довірчі інтервали параметрів.

Розв'язання завдання:

- 1) Обчислення статистичної оцінки вектору β .

Емпіричний вектор β^* визначається за формулою (2.6):

$$\beta^* = (X^T X)^{-1} X^T y,$$

де

$$(X^T X)^{-1} = C^{-1} = \begin{bmatrix} 0,6722 & -0,0289 & -0,2134 \\ -0,0289 & 0,0033 & 0,0044 \\ -0,2134 & 0,0044 & 0,0866 \end{bmatrix}; \quad X^T y = \begin{bmatrix} 325,6 \\ 1400,4 \\ 762,95 \end{bmatrix}.$$

Статистичні точкові МНК-оцінки параметрів моделі

$$\beta_0^* = 115,4; \quad \beta_1^* = -1,44; \quad \beta_2^* = 2,79.$$

Табл. 2.1. Залежність напруги генератора від струмів

№	Генератор - $U_{\text{я}}, B$	Якорь - $I_{\text{я}}, A$	Збудження $I_{\text{зб}}, A$
1	111	6	3
2	103,2	10	1,3
3	108,7	10	1,8
4	101,6	16	1,8
5	117	2	2,4
6	118,9	4	4
7	115,8	3	2
8	118	6	3
9	119	3	4
10	106	6	1,6
11	113	6	1,6
12	123	5	3,1
13	114	3	2
14	111	3	2
15	109,5	8	2,6
16	128	3	2,2
17	106	8	1,8
18	105,8	9	1,6
19	102,8	11	1,6
20	126	1	1,6
21	110,5	6	2
22	116,9	7	2,3
23	103,4	9	1,5
24	114	1	1,4
25	123	1	1,8
Середнє	113,024	5,88	2,16

Залежність напруги від струмів якоря і збудження

$$y_i^* = 115,4 - 1,44x_{i1} + 2,79x_{i2}, \quad i = \overline{1, 25}.$$

2) Аналіз адекватності моделі вибіркоким даним.

Обчислюється вектор $y_i^* = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^*$.

Правильність розрахунків перевіряється із порівняння середніх значень $\bar{y}$ та $\bar{y}^*$, де

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 130,24; \quad \bar{y}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^* = 130,24,$$

оскільки $\bar{y} = \bar{y}^*$, попередні розрахунки правильні.

Визначається ступінь адекватності моделі за статистичними даними табл. 2.1 через відхилення між фактичними значеннями та обчисленими за моделлю

$$e_i = y_i - y_i^*.$$

Середнє значення дорівнює нулю, отже, розбіжностей не існує і модель адекватна.

3) Перевірка статистичної значущості коефіцієнту множинної детермінації R^2 .

Для перевірки статистичної значущості впливу регресорів на залежну змінну моделі використовується критерій Фішера

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - m - 1}{m}.$$

Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ і $k_1 = m = 2$ та $k_2 = n - m - 1 = 22$ ступенях вільності за таблицею відшукується $F(\alpha; k_1; k_2) = 3,44$.

Значення критерію Фішера, що спостерігається:

$$F^* = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,6736}{1 - 0,6736} \cdot \frac{22}{2} = 22,7.$$

Критерій Фішера має правобічну критичну область із критичною точкою 3,44. Оскільки $F^* > F$, статистична гіпотеза $H_0: R^2 = 0$ відхиляється, отже, всі регресори мають вплив на залежну змінну.

5) Оцінювання дисперсій $s_{\beta_0}^2, s_{\beta_1}^2, s_{\beta_2}^2$ оцінок параметрів та їх стандартних похибок $s_{\beta_0}, s_{\beta_1}, s_{\beta_2}$.

Незміщена оцінка дисперсії залишків σ_ε^2

$$s_\varepsilon^2 = \frac{1}{n - m - 1} \sum e_i^2 = 19,9.$$

Коваріаційна матриця оцінок параметрів

$$\text{cov}(\beta^* (\beta^*)^T) = s_\varepsilon^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}.$$

Звідси дисперсії оцінок параметрів

$$s_{\beta_0}^2 = 13,38; \quad s_{\beta_1}^2 = 0,0658; \quad s_{\beta_2}^2 = 1,725.$$

Середньоквадратичні відхилення оцінок параметрів

$$s_{\beta_0} = 3,6587 \quad s_{\beta_1} = 0,256; \quad s_{\beta_2} = 1,313.$$

6) Перевірка статистичної значущості оцінок параметрів $\beta_0, \beta_1, \beta_2$.

Нульова гіпотеза $H_0: \beta_i = 0$ за альтернативної гіпотези $H_\alpha: \beta_i \neq 0$

$$t_{\beta_0}^* = \frac{115,4}{3,658} = 31,5; \quad t_{\beta_1}^* = \frac{1,44}{0,256} = 5,62, \quad t_{\beta_2}^* = \frac{2,79}{1,313} = 2,12.$$

Оскільки за обчисленими значеннями $t_{\beta_i}^* > 2,07$, нульова гіпотеза відхиляється.

7) Розрахунок довірчих інтервалів оцінок параметрів β_1 та β_2 із надійністю $\gamma = 0,95$.

$$\begin{cases} (115,4 - 3,658 \cdot 2,07) < \beta_0 < (115,4 + 3,658 \cdot 2,07); \\ (-1,44 - 0,256 \cdot 2,07) < \beta_1 < (-1,44 + 0,256 \cdot 2,07); \\ (2,79 - 1,313 \cdot 2,07) < \beta_2 < (2,79 + 1,313 \cdot 2,07); \end{cases} \quad (2.27)$$

або

$$107 < \beta_0 < 123; \quad -1,97 < \beta_1 < -0,91; \quad 0,067 < \beta_2 < 5,516.$$

Як видно, із пасивного експерименту (табл. 2.1) за неточно виміряної напруги U довірчі області оцінок параметрів досить великі. Суттєве зменшення розкиду інтервального оцінок (2.27) можливе шляхом побудови активного експерименту, за якого матрицю C можна зробити діагональною.

2.1.9. Приклад побудови нелінійних динамічних моделей резистивних елементів на основі МНК і активного експерименту

Головною метою є перевірка резистивних елементів лабораторного стенду ЭВ-4 на предмет їхньої лінійності і безінерційності. Традиційно більшість резистивних елементів прийнято вважати ідеальними (лінійними, стаціонарними, безінерційними). Ідеальний резистор повинен мати активний опір R , на якому згідно до закону Джоуля–Ленца електрична енергія W_e за час t перетворюється на теплову:

$$Q = I^2 R t.$$

Теплова енергія витрачається на нагрів резистора і середовища. Традиційна модель опору R резистора

$$R = l / (\gamma S),$$

де l – довжина; S – площа поперечного перетину; γ – питома провідність провідника резистора.

Питома провідність :

$$\gamma = |e| n \beta,$$

де $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона; n – концентрація вільних електронів у провіднику; β – коефіцієнт вільного пробігу електрону, який для металів зменшується при збільшенні температури θ° :

$$\beta = \beta(\theta^\circ).$$

Тоді опір R буде функцією θ° . Для малих змін $\Delta\theta^\circ$ залежність майже лінійна:

$$R(\theta^\circ) \cong \theta_0^\circ [1 + \alpha \Delta\theta^\circ], \quad (2.28)$$

де α – температурний коефіцієнт опору.

Для малих приростів теплоти ΔQ має місце диференціал:

$$dQ = cm d\theta^0 + K_{ТВ} S_{ОХ} \Delta\theta^0 dt,$$

де c – теплоємність; m – маса; $K_{\text{ТВ}}$ – коефіцієнт тепловіддачі, $S_{\text{ОХ}}$ – площа охолодження резистора. Швидкістю зміни теплоти Q є потужність:

$$\frac{dQ}{dt} = P = I^2 R(\theta^0) = cm \frac{d\theta^0}{dt} + K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}} \Delta\theta^0. \quad (2.29)$$

Якщо прийняти, що потужність P незмінна, в усталеному режимі

$$P = I^2 R(\theta_{\infty}^0) = K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}} \Delta\theta_{\infty}^0.$$

де $\Delta\theta_{\infty}^0 = \theta_{\infty}^0 - \theta_0^0$. Тоді рівняння (2.29) набуває вигляду

$$\tau_m \frac{d\Delta\theta^0}{dt} + \Delta\theta^0 = \Delta\theta_{\infty}^0. \quad (2.30)$$

де $\tau_m = \frac{cm}{K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}}}$ – теплова стала часу резистора; $\Delta\theta^0 = \theta^0(t) - \theta_0^0$.

Для потужних резисторів стала часу може бути значною. Нагрів провідника резистора згідно (2.30) відбувається за експоненціальним законом (рис. 2.1)

$$\theta^0(t) = \theta^0(0) + \Delta\theta^0(t) = \theta^0(0) + \Delta\theta_{\infty}^0 (1 - e^{-t/\tau_m}).$$

Відповідно, $R(\theta^0(t))$ буде змінюватись у часі за тією самою експонентою (рис. 2.2)

$$R(\theta^0(t)) = R(\theta^0(0)) [1 + \alpha \Delta\theta^0(t)] = R(\theta^0(0)) \left[1 + \alpha \Delta\theta_{\infty}^0 (1 - e^{-t/\tau_m}) \right]. \quad (2.31)$$

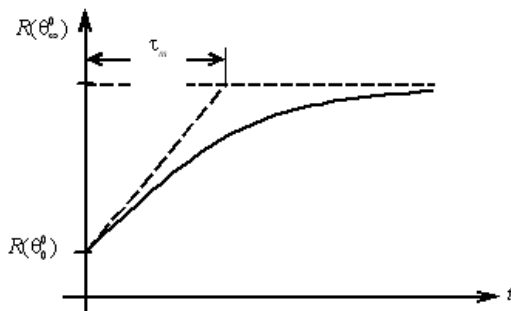


Рис. 2.2. Графік залежності опору

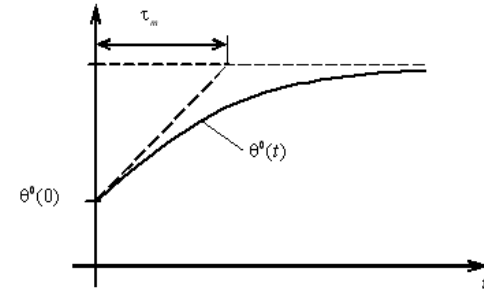


Рис. 2.1. Графік нагріву резистора

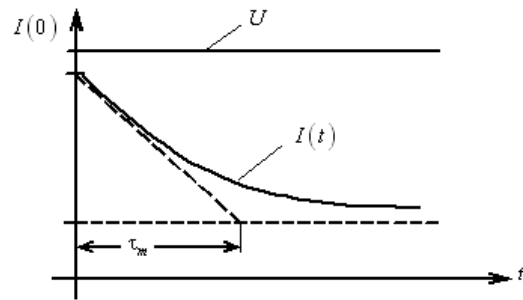


Рис. 2.3. Графік залежності струму

При підключенні резистора до ідеального джерела постійної напруги U струм у колі “джерело-резистор” із урахуванням залежності (2.31) буде зменшуватись у часі приблизно за тим же експоненціальним законом (рис. 2.3)

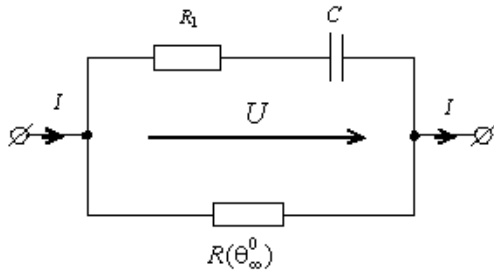
$$I(y) = \frac{U}{R(\theta^0(0)) [1 + \alpha \Delta \theta_\infty^0 (1 - e^{-t/\tau_m})]} \approx I(0) \left[1 - \alpha \Delta \theta_\infty^0 (1 - e^{-t/\tau_m}) \right]. \quad (2.32)$$

Графіку $I(t)$ (рис. 2.3) відповідає схема заміщення реального резистора (рис. 2.4), як RC -двополюсника. У момент $t = 0$ комутації ємнісний опір нульовий, тому

$$\frac{R_1 R(\theta_\infty^0)}{R_1 + R(\theta_\infty^0)} = R(\theta^0(0)),$$

звідки

$$R_1 = \frac{R_0 R_\infty}{R_\infty - R_0}.$$



Ємність C визначається за умови $\tau_m = R_1 C$ із урахуванням (2.31) та (2.30):

$$C = \frac{cm(R_\infty - R_0)}{K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}} R_\infty R_0}.$$

Залежно від динаміки зміни напруги U , коефіцієнтів m , $K_{\text{ТВ}}$, $S_{\text{ОХ}}$, C , σ , приросту $\Delta \theta^0$ залежність $R[I^2(\theta^0(t))]$ може бути як суттєвою, так і несуттєвою.

Рис. 2.4. Схема заміщення резистора

Відповідно резистор може розглядатися як безінерційний чи інерційний, як лінійний елемент зі сталим опором R , так і нелінійний, в якому опір залежить від квадрату струму I^2 . Визначимо залежність $R(t)$ для усталеного режиму. Із рівняння (2.29) при $d\theta^0/dt = 0$ та $t \rightarrow \infty$ отримаємо

$$I^2 R(\theta_\infty^0) = K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}} \Delta \theta_\infty^0.$$

Звідси знайдемо $\Delta \theta_\infty^0$ і підставимо у рівняння (2.28):

$$R(\theta_\infty^0) = R(\theta_0^0) \left[1 + \alpha \frac{R(\theta_\infty^0)}{K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}}} I^2 \right],$$

або

$$R(\theta_\infty^0) = \frac{R(\theta_0^0)}{1 - \alpha \frac{R(\theta_\infty^0)}{K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}}} I^2}. \quad (2.33)$$

Враховуючи, що для матеріалу резисторів $\alpha \frac{R(\theta_\infty^0)}{K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}}} I^2 \ll 1$, розклавши рівняння (2.33) у ряд Тейлора із збереженням тільки першого члена розкладання, отримаємо

$$R(\theta_\infty^0) = R(\theta_0^0)(1 + \eta I^2), \quad (2.34)$$

де η – параметр резистора, який визначає нелінійний вплив струму I на опір R

$$\eta = \alpha \frac{R(\theta_0^0)}{K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}}}.$$

Параметр η пропорційний α і зворотно пропорційний $K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}}$. Залежно від величини η та I^2 , а також точності вимірювань, резистор слід розглядати як лінійний чи нелінійний елемент. У наступному експерименті при його плануванні слід розглядати дві цілі. По-перше - для існуючих в ЕТК на стенді приладів перевірити чи будуть резистори лінійними (опір R незмінним) із урахуванням точності вимірювання напруги U і струму I ; по-друге - шляхом оптимального планування експерименту (значень U, I і кількості їх вимірювань) визначити малий параметр η .

Для досягнення першої мети (перевірки чи можна вважати резистори стенду лінійними елементами у межах похибок вимірювальних приладів стенду) проведемо планування експерименту із вибором оптимального варіанту. Наприклад, лабораторний стенд "ЭВ-4", як ЕТК, має стрілочні амперметри із рівномірною шкалою від 0 до 5 А класом точності $\gamma = 1,5\%$; цифровий мультиметр виміру напруги або опору з абсолютною похибкою $\pm 10^{-5}$. Опір $R(0)$ холодного резистора можна досить точно виміряти цифровим омметром. Струм омметра практично не змінить температуру резистора внаслідок його малості. Опір нагрітого резистора визначимо методом вольтметра -амперметра для максимально допустимого струму $I_{\text{max}} \cong 1,2 I_i$, де I_i – номінальне значення. Резистори стенда мають паспортні дані $P = 50$ Вт, $R = 100$ Ом, тоді $I_{\text{max}} \approx 0,84$. Для зменшення систематичної похибки, пов'язаної із ненульовим опором амперметра, вимірюємо його опір за допомогою цифрового омметра. Тоді незміщена оцінка $\hat{R}$ опору резистора R дорівнюватиме

$$\hat{R} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} - R_A, \quad (2.35)$$

де $\hat{U}, \hat{I}$ – виміри цифровим вольтметром напруги джерела, аналоговим амперметром струму та R_A – вимір опору амперметра (маючи велику точність цифрового омметра, можна вважати точним).

Виміри $\hat{U}, \hat{I}$ мають некорельовані випадкові похибки і нормальний Гаусовий розподіл. Абсолютну похибку амперметра визначимо за його класом точності ($\gamma = 1,5\%$)

$$\Delta \hat{I} = \gamma I_{\text{max}} / 100 = 0,015 \text{ А}.$$

Абсолютна похибка вимірювання напруги пов'язана із нестабільністю напруги джерела U . Для оцінювання нестабільності виконаємо n вимірювань $\hat{U}$ і знайдемо оцінку середнього значення

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{U}(k) \quad (2.36)$$

та оцінку $\hat{\sigma}_U$ середньоквадратичного розкиду σ_U вимірів $\hat{U}(k)$ відносно $\bar{U}$:

$$\hat{\sigma}_U = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\hat{U}(k) - \bar{U})^2 \right)^{1/2} \quad (2.37)$$

Оцінку опору нагрітого резистора для $I_{\max} = 0,84$ отримаємо за формулою (2.35), де в якості $\hat{U}$ візьмемо $\bar{U}$ (2.36). Висновок про лінійність чи нелінійність резистору із відповідною достовірністю можна зробити шляхом співставлення опору R холодного резистора (вимір омметром) та $\hat{R}$ як відношення (2.35) $\bar{U}$ до $\hat{I}$. Вважаючи похибку $\delta\hat{R}/R$ досить малою, наближено маємо

$$\frac{\delta\hat{R}}{R} \approx \left[\frac{\partial\hat{R}}{\partial\hat{U}} \Big|_{U,I} \delta\hat{U} + \frac{\partial\hat{R}}{\partial\hat{I}} \Big|_{U,I} \delta\hat{I} \right] R^{-1} = \frac{\delta\hat{U}}{U} - \frac{\delta\hat{I}}{I}. \quad (2.38)$$

Похибки $\delta\hat{U}$ та $\delta\hat{I}$ за своєю сутністю мають випадковий характер. Це, як правило, нормальний розподіл із нульовим математичним сподіванням і дисперсіями $\sigma_{\hat{U}}^2$, $\sigma_{\hat{I}}^2$. У результаті n спостережень напруги U маємо вибірку $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n$ обсягу n . У процесі виміру $\hat{U}(k)$, $k = \overline{1, n}$ показ стрілочного амперметра $\hat{I}$, внаслідок його інерційності і грубості, майже не змінюється. Таким чином незміщена оцінка $s_{\hat{U}}^2$ дисперсії $\sigma_{\hat{U}}^2$ визначається із експерименту

$$s_{\hat{U}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\hat{U}(k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{U}(k) \right)^2, \quad (2.39)$$

а оцінка $s_{\hat{I}}^2$ дисперсії $\sigma_{\hat{I}}^2$ визначається через клас точності γ амперметра як квадрат абсолютної похибки ΔI , яку приймемо рівною двом $\sigma_{\hat{I}}^2$

$$\hat{\sigma}_I = \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma I_{\max}}{100 \hat{I}} \right)^2. \quad (2.40)$$

Враховуючи взаємну некорельованість випадкових похибок $\delta\hat{U}$ і $\delta\hat{I}$, та їх малість відносно U і I із урахуванням (2.38) отримаємо оцінку $S_{\delta\hat{R}/R}$ кореня із дисперсії $\sigma_{\delta\hat{R}/R}^2$:

$$S_{\delta\hat{R}/R} \approx \sqrt{S_{\hat{U}}^2/\bar{U}^2 + S_{\hat{I}}^2/\bar{I}^2},$$

де $\bar{U}$, $\bar{I}$ – середні значення напруги і струму за n дослідів.

Результат вимірювання опору R холодного резистора цифровим омметром із точністю до п'яти десяткових розрядів можна прийняти за точне значення $R(\theta_0^0)$. Результати вимірювання (2.35) опору $R(\theta^0)$ резистору, нагрітого струмом $I = 1, 2I_H$, мають середнє значення

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{R}_k$$

і оцінку дисперсії

$$S_{\delta R} = \bar{R} \left(S_{\bar{U}}^2 / \bar{U}^2 + S_{\bar{I}}^2 / \bar{I}^2 \right). \quad (2.41)$$

Для прийняття рішення щодо неістотності зміни опору від струму (H_0 -гіпотеза), чи істотності (H_α -гіпотеза) побудуємо випадкову величину t :

$$t = \lim_{S_{\delta \hat{R}(\theta_0^0)} \rightarrow 0} \frac{\bar{R}(\theta^0) - \bar{R}(\theta_0^0)}{\sqrt{\frac{2}{n} \frac{(n-1)S_{\delta \hat{R}(\theta^0)}^2 + (n-1)S_{\delta \hat{R}(\theta_0^0)}^2}{2n-2}}} = \frac{\bar{R}(\theta^0) - \bar{R}}{S_{\delta \hat{R}(\theta^0)}} \sqrt{n} \quad (2.42)$$

Величина t має розподіл Стюдента із $n - 1$ ступенями свободи. Двобічна критична область симетрична відносно нуля і відшукується за умови, що ймовірність прийняття гіпотези H_α дорівнює взятому рівню значущості α , коли правильна гіпотеза H_0 (α – похибка першого роду). Критична точка $t_{n-1, \alpha}$ відшукується за таблицею розподілу Стюдента для кількості ступенів вільності $n - 1$ та ймовірності

$$P\{|t| \leq t_{n-1, \alpha}\} = 1 - \alpha.$$

Якщо $|t| < t_{n-1, \alpha}$, приймається гіпотеза H_0 , а якщо $|t| > t_{n-1, \alpha}$, – гіпотеза H_α . Перевіримо H_0 -гіпотезу для опору резистора і опору лампи розжарювання при зміні струму від мінімального до струму 120% від номінального.

Перевірка резистора на лінійність.

Точні показання омметра становлять $\bar{R}(\theta_0^0) = 100$ Ом. Десять результатів вимірювання напруги $\hat{U}_k$, $k = \overline{1, n}$, $n = 10$, (табл. 2.2).

Табл. 2.2. Результати вимірювання напруги

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{U}, \text{В}$	80,4	79,5	80,5	79,8	81	78	82	80	80,5	79
$\hat{R}, \text{Ом}$	100,5	99,37	100,5	99,75	101,3	97,5	102,5	100	100,6	98,75

Результати розрахунків:

- 1) $\bar{U} = 80,06 \text{ В}; s_{\bar{U}}^2 = 1,213B^2, \bar{R} = 100,09 \text{ Ом};$
- 2) оцінка (2.40) $s_{\hat{I}}^2 = \left(\frac{1,5 \cdot 1}{100 \cdot 0,8} \right)^2 = 0,000117;$
- 3) оцінка (2.41) $s_{\delta R}^2 = 100 \left(\frac{1,213}{6411} + \frac{0,000117}{0,64} \right) = 0,037;$
- 4) величина (2.42) $t = \frac{100,09 - 100}{\sqrt{0,037}} \sqrt{10} = 1,48;$
- 5) кількість ступенів вільності дорівнює 9;
- 6) похибка першого роду $\alpha = 0,05;$
- 7) критичне значення (за таблицями t -критерію Стьюдента) $t_{9;0,95} = 2,26.$

Оскільки $|t| = 1,48$ менше за $t(9; 0,95) = 2,26$, можна вважати, що нуль-гіпотеза справедлива і можна розглядати резистори стенду «ЭВ-4» як лінійні.

Для досягнення другої мети (визначення малого параметра моделі (2.34) резистивного елементу) слід спланувати і провести точніший експеримент. Запишемо залежність (2.34) із урахуванням корекції (2.35) для k -го результату вимірювання ($k = \bar{1}, n$):

$$\hat{R}(I_k) = \frac{\hat{U}_k}{\hat{I}_k} - R_A \approx R(\theta_0^0)(1 + \eta I_k^2) + \delta_{\hat{R}_k}, \quad (2.43)$$

де $\delta_{\hat{R}_k}$ – випадкова нормально розподілена похибка оцінки $\hat{R}$ у k -му досліді.

Подамо рівняння (2.43) у стандартному для регресійного аналізу вигляді (2.3)

$$y(k) = \beta_0 + \beta_1 I_k^2 + \delta y_k, \quad (2.44)$$

де $\beta_0 = R(\theta_0^0)$, $\beta_1 = R(\theta_0^0)\eta$, $\delta y_k = \delta_{\hat{R}_k}$.

Апріорі відомо, що $|\delta_{\hat{I}}| \ll I$, $|\delta_0| \ll U$, тому

$$\delta y = \left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{U}} \right|_{U,I} \delta \hat{U} + \left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{I}} \right|_{U,I} \delta \hat{I} = \frac{1}{I} \delta \hat{U} - \frac{R}{I} \delta \hat{I} = \frac{\delta \hat{U} - R \delta \hat{I}}{I}. \quad (2.45)$$

Математичне сподівання δy внаслідок симетричності розподілу похибок $\delta \hat{U}$ і $\delta \hat{I}$ дорівнює нулю. Дисперсія k -го результату вимірювання

$$\sigma_{y_k}^2 = M \left[\left(\frac{\delta \hat{U}_k - R \delta \hat{I}_k}{I_k} \right)^2 \right] = \frac{\sigma_{\hat{U}_k}^2 + R \sigma_{\hat{I}_k}^2}{I_k^2} = \frac{\sigma^2}{I_k^2}. \quad (2.46)$$

Похибки незалежні, тому їх коваріаційна матриця діагональна:

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{y_2}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{y_n}^2 \end{bmatrix}.$$

Процес (2.45) – гетероскадестичний, має залежну (рис. 2.5) від I_k дисперсію (2.46).

Для таких процесів оптимальним за точністю оцінок $\hat{\beta}_0$ і $\hat{\beta}_1$ буде метод марковських оцінок (зважений МНК), в якому ці оцінки відшукуються за умови мінімуму зваженого середнього квадрату різниці $\hat{y}_k$ і $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 I_k^2$ моделі (2.44).

$$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \arg \min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 / \sigma_k^2, \quad (2.47)$$

де $\varepsilon_k^2 = [\hat{y}_k - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 I_k^2]$, $\sigma_k^2 = I_k^2 / \sigma^2$.

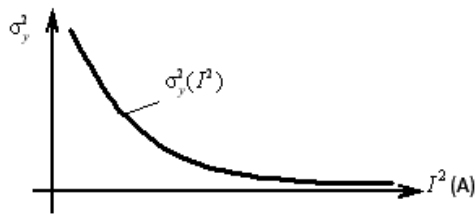


Рис. 2.5. Залежність $\sigma_{y_1}^2$ від I^2

Інакше кажучи, мінімізується середній квадрат різниці лівої і правої частин рівняння

$$\hat{y}_k \frac{I_k}{\sigma} = \beta_0 \frac{I_k}{\sigma} + \beta_1 \frac{I_k^2}{\sigma}. \quad (2.48)$$

Скоротимо на σ і замінимо $\hat{y}_k I_k$ на $\hat{U}_k$. Тоді рівняння (2.44) набуває вигляду

$$\hat{U}_k = \beta_0 I_k + \beta_1 I_k^2 + \delta \hat{U}_k, \quad (2.49)$$

для якого коефіцієнти β_0, β_1 визначаються за звичайним методом найменших квадратів

$$\hat{\beta} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x}) \mathbf{x}^T \mathbf{y}, \quad (2.50)$$

де

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \hat{U}_k \hat{I}_k \\ \sum_{k=1}^n \hat{U}_k \hat{I}_k^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^2 & \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 \\ \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 & \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^6 \end{bmatrix}.$$

Якщо струм I_k аналогового вимірювального приладу вважати точним, коваріація оцінок $\hat{\beta}$ дорівнюватиме

$$\text{cov } \hat{\beta} = \sigma_{\hat{U}}^2 (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1}, \quad (2.51)$$

де

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{x}^T \mathbf{x}|} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^6 & - \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 \\ - \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 & \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^2 \end{bmatrix}; \quad |\mathbf{x}^T \mathbf{x}| = \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^2 \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^6 - \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4.$$

Еліпс розкиду оцінок відповідно до (2.48) і (2.51) буде мінімальним. Але оцінки (2.50) будуть зміщені внаслідок неточності вимірювання. Для зменшення похибки в оцінюванні параметрів $\hat{\beta}_0$ і особливо $\hat{\beta}_1$ моделі (2.44), скористаємося додатковою апіорною інформацією про те, що вольт-амперна характеристика резистору обов'язково проходить через нуль. З урахуванням цього побудуємо оптимальний план експерименту. Вольт-амперні характеристики лінійного

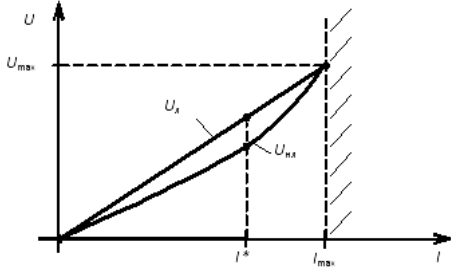
$$U_{\text{л}} = R_{\text{ст max}} I = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{max}}} I \quad (2.52)$$

і нелінійного

$$U_{\text{нл}} = (\beta_0 + \beta_1 I^2) I \quad (2.53)$$

резисторів показано на рис. 2.6. У точках $(0,0)$ та $(U_{\text{max}}, I_{\text{max}})$ вольт-амперна характеристика лінійного і нелінійного резисторів збігаються. Тоді $R_{\text{ст max}} = \beta_0 + \beta_1 I_{\text{max}}^2$. Підставимо $R_{\text{ст max}}$ у рівняння (2.52) і віднімемо із (2.52) рівняння (2.53):

$$U_{\text{л}} - U_{\text{нл}} = \beta_1 (I_{\text{max}}^2 - I^2) I. \quad (2.54)$$



Визначимо оптимальне значення I^* , за якого різниця між $U_{\text{л}}$ та $U_{\text{нл}}$ є максимальна

$$\frac{d}{dt}(U_{\text{л}} - U_{\text{нл}}) = \beta_1 I_{\text{max}}^2 - 3\beta_1 (I^*)^2 = 0 \rightarrow$$

$$I^* = I_{\text{max}} / \sqrt{3}. \quad (2.55)$$

Отже, маємо дві точки оптимального плану експерименту: I^* і I_{max} . Із (2.54), (2.55) отримуємо, що

Рис. 2.6. ВАХ резисторів

$$\beta_1 = \frac{U_{\text{л}} - U_{\text{нл}}}{(I_{\text{max}}^2 - (I^*)^2) I^*} \quad (2.56)$$

Підставивши (2.56) у (2.53) при $I = I_{\text{max}}$, отримаємо

$$\beta_0 = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{max}}} - \beta_1 I_{\text{max}}^2 = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{max}}} - \frac{U_{\text{л}} - U_{\text{нл}}}{I^*} \frac{I_{\text{max}}^2}{I_{\text{max}}^2 - (I^*)^2}. \quad (2.57)$$

Оскільки $U_{\text{л}} = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{max}}} I^*$, $\frac{U^*}{I^*} = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{max}}}$, вираз (2.56) можна записати так

$$\beta_1 = \frac{U_{\text{max}}(I^*/I_{\text{max}}) - U_{\text{нл}}^*}{(I_{\text{max}}^2 - (I^*)^2) I^*} = \frac{U_{\text{max}}/\sqrt{3} - U_{\text{нл}}^*}{2I_{\text{max}}^3/(3\sqrt{3})} = \frac{3[U_{\text{max}} - \sqrt{3}U_{\text{нл}}^*]}{2I_{\text{max}}^3}.. \quad (2.58)$$

Вираз (2.57) отримаємо у такій формі:

$$\beta_0 = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} - \beta_1 I_{\max}^2 = \frac{3\sqrt{3}U_{\text{нл}}^* - U_{\max}}{2I_{\max}}. \quad (2.59)$$

Якщо похибка вимірювання $I_{\max}$ і I^* набагато менша нестабільності $U_{\max}$ і $U_{\text{нл}}^*$, похибка $\delta\hat{\beta}_1$ визначається першим диференціалом

$$\delta\hat{\beta}_1 \approx \frac{3}{2I_{\max}^3} \delta U_{\max} - \frac{3}{2I_{\max}^3} \delta U_{\text{нл}}^*.$$

Дисперсія $\hat{\beta}_1$:

$$\sigma_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{9}{4} \frac{1}{I_{\max}^6} \left[\sigma_{\hat{U}_{\max}}^2 + 3\sigma_{\hat{U}_{\text{нл}}^*}^2 \right]. \quad (2.60)$$

Оскільки $U_{\max}$ і $U_{\text{нл}}^*$ вимірюються одним і тим самим приладом, їхні дисперсії будуть однаковими і рівними $\sigma_{\hat{U}}^2$. Загальну кількість n вимірювань розіб'ємо на kn вимірювань $U_{\max}$ та $(1-kn)$ вимірювань $U_{\text{нл}}^*$, де $k < 1$. Дисперсії усереднених значень $U_{\max}$ і $U_{\text{нл}}^*$ будуть в kn і $(1-kn)$ разів меншими. Тоді рівняння (2.60) набуває вигляду

$$\sigma_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{9}{4} \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{I_{\max}^6} \left[\frac{1}{kn} + \frac{3}{(1-kn)n} \right] = \frac{9}{4} \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{I_{\max}^6} \frac{1+2k}{k(1-k)n}. \quad (2.61)$$

Визначимо k^* за умови мінімуму $\sigma_{\hat{\beta}_1}$:

$$\frac{\partial \sigma_{\hat{\beta}_1}^2}{\partial k} = \frac{9}{4} \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{I_{\max}^6} \frac{2k(1-k)n - (n-2kn)(1+2k)}{[k(1-k)n]^2} = 0. \quad (2.62)$$

Звідси $k^* = 0,365$. Тепер із співвідношень (2.61), (2.62) можна визначити необхідну кількість n^* дослідів, щоб за відомими $\sigma_{\hat{U}}^2$ і k^* отримати оцінку $\hat{\beta}_1$ із заданою дисперсією $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$:

$$n^* = 16,8 \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{\sigma_{\hat{\beta}_1}^2} \frac{1}{I_{\max}^6}. \quad (2.63)$$

Чим менше β_1 і відповідно бажане $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$, тим більше n^* . Але значення β_1 невідоме. Тому, маючи оптимальний план ($I^* = I_{\max}/\sqrt{3}, I_{\max}$), де кількість вимірювань у точці складає $(1-k)n$, а $I_{\max} - kn$, або відповідно $0,645n$ і $0,365n$, будемо поступово збільшувати n , наприклад $n = 10, n = 20, \dots$. Для кожного $n_i, i = 1, 2, \dots$, розраховуємо оцінку $\hat{\beta}_1$, як середнє по n_i значення (2.58):

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{3[U_{\max}(j) - \sqrt{3}U_{\text{нл}}^*(j)]}{2I_{\max}^3(j)}, \quad (2.64)$$

по (2.64) розрахуємо її середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_{\hat{\beta}_1}^2 = \sqrt{16,8 \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{n_i} \frac{1}{I_{\max}^6}}, \quad (2.65)$$

перевіримо значущість оцінки $\hat{\beta}_1$ (2.64), що має оцінку (2.65) середнього квадратичного відхилення, за таблицею t -критерію Стюдента для $\alpha = 0,1$ та $n_i - 1$ ступенів вільності. Якщо

$$\frac{\hat{\beta}_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} < t(n_i - k; 0,9), \quad (2.66)$$

оцінка значуща; якщо ні, слід продовжити експеримент із більшим n_i доки не виконається умова (2.66).

Отримання параметрів β_0 і β_1 слаболінійної залежності $U(I)$ дає можливість (шляхом уведення корекції) використовувати неідеальні резистори у відповідних вимірювальних пристроях ЕТК.

2.2. Універсальний алгоритм оцінювання параметрів ЕТО

Розглянемо алгоритм [117], який об'єднав алгоритми МНК, Гауса–Ньютона, Байеса, Маркова, Тихонова з розширеним вектором констант α , які дозволяють оптимізувати задачу оцінювання лінійних і нелінійних, неперервних і дискретних, стаціонарних і нестаціонарних, одно- і багатовимірних, детермінованих і стохастичних об'єктів, з однією і кількома вибірками даних (X, Y) . Загалом

$$X = \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_n(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M) & \dots & x_n(M) \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y_1(1) & \dots & y_m(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(M) & \dots & y_m(M) \end{bmatrix},$$

$$x_i(k) = x_i^*(k) + N_i(k), \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq m;$$

$$y_i(k) = y_i^*(k) + \varepsilon_i(k), \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, M}; \quad M \geq n,$$

де x_i^*, y_i^* – точні значення; N_i, ε_i – їх випадкові взаємно-некорельовані похибки, тобто для будь-якого зсуву τ та будь-яких i $R_{N_i N_e} = R_{x_i^* N_j} = R_{N_i y_j^*}(\tau) = 0$, якщо $i \neq j$.

Модель об'єкту оцінювання

$$y^* = f(\mathbf{x}^*, \beta, t), \quad (2.67)$$

де $\mathbf{f}^T = [f_1, \dots, f_m]$.

Зокрема, якщо $y^* = \dot{\mathbf{x}}_1^*$, $\mathbf{x}_2^* = \mathbf{u}$, $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*)$, модель (2.67) еквівалентна системі нелінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{\mathbf{x}}_1^* = f(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{u}, \beta, t),$$

які описують динаміку ЕТО, де $\mathbf{u}$ – керуючі змінні; якщо $y^* = \mathbf{x}_1^*(k+1)$, $x_1^* = \mathbf{u}(k)$, рівняння (2.67) еквівалентне системі нелінійних різницьових рівнянь $\mathbf{x}_1^*(k+1) = f(\mathbf{x}_1^*(k), \mathbf{u}, \mathbf{x}(k), \beta, k)$.

Варіюючи розмірностями відповідних векторів, можна отримати системи зі скалярними або векторними змінними.

Узагальнений критерій якості задачі оцінювання складено із чотирьох компонентів.

$$J = \sum_{p=1}^4 J_p. \quad (2.68)$$

Перший компонент критерію (2.68)

$$J_1 = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j^T Q_j^{-1} J \varepsilon_j, \quad \varepsilon_j^* = \varepsilon_j - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \beta^T} \Delta \beta, \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta \beta)^T} = \left[\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \beta_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \beta_s} \right], \quad \varepsilon_j = \varepsilon_j(\hat{\beta}(q-1)) = y_j - \hat{y}_j[\hat{\beta}(q-1)],$$

де $\hat{y}_j$ ($j = \overline{1, m}$) – вихід моделі на $(q-1)$ -му кроці; q – номер кроку ітерації; $\beta^T = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ – вектор невідомих параметрів;

$$Q_j = \begin{bmatrix} M[\tilde{\varepsilon}_j(1)\tilde{\varepsilon}_j(1)] & \dots & M[\tilde{\varepsilon}_j(M)\tilde{\varepsilon}_j(1)] \\ \dots & \dots & \dots \\ M[\tilde{\varepsilon}_j(1)\tilde{\varepsilon}_j(M)] & \dots & M[\tilde{\varepsilon}_j(M)\tilde{\varepsilon}_j(M)] \end{bmatrix}.$$

Попередній вираз – коваріаційна матриця перешкод або груба її оцінка, отримана за припущення ергодичності випадкового процесу $\tilde{\varepsilon}(k)$, $k = \overline{1, m}$, як матриця оцінок кореляційних функцій $R_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(\tau)$:

$$Q_j = \begin{bmatrix} \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(0) & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(1) & \dots & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(M) & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(M-1) & \dots & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(0) \end{bmatrix}$$

де

$$\hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{M-\tau} \sum_{k=1}^{M-\tau} \tilde{\varepsilon}_j(k)\tilde{\varepsilon}_j(k+\tau), & \tau \leq \tau_m, \\ 0, & \tau > \tau_m. \end{cases}$$

τ_m – зсув, за якого оцінка $\hat{R}(\tau)$ порівнянна із її похибкою. У найпростішому випадку, якщо $\tau_m = 1$, матриця Q діагональна.

Другий компонент критерію (2.68)

$$\begin{aligned} J_2 &= (\hat{\beta}(q) - \beta_a)^T P_a^{-1} (\hat{\beta}(q) - \beta_a) = (\hat{\beta}(q-1) + \Delta \hat{\beta}(q) - \beta_a)^T P_a^{-1} (\hat{\beta}(q-1) + \Delta \hat{\beta}(q) - \beta_a) \\ &= (\hat{\beta}(q) - \Delta \beta_a(q-1))^T P_a^{-1} (\hat{\beta}(q) - \Delta \hat{\beta}(q-1)), \end{aligned} \quad (2.70)$$

де $\Delta\hat{\beta}(q) = \hat{\beta}(q) - \hat{\beta}(q-1)$; $\Delta\hat{\beta}_a(q-1) = \beta_a - \hat{\beta}(q-1)$; P_a^{-1} – коваріаційна матриця апріорних значень коефіцієнтів β_a .

За відсутності апріорної інформації про β_a значення $P_a \rightarrow \infty$ і $J_2 = 0$; для відомих меж $\beta_{ia \max}$, $\beta_{ia \min}$ компонентів вектору β_a матриця P_a може виявитися діагональною. При цьому елементи P_{ia} діагоналі P_a задаються із точністю до параметра α_1 :

$$P_{ia} = \alpha_1^2 |\beta_{ia \max} - \beta_{ia \min}|^2, \quad \alpha_1 \approx 0,3 \div 1.$$

Третій компонент критерію (2.68)

$$J_3 = \Delta\hat{\beta}(q) - (\Delta\hat{\beta}_{\text{апос}}(q-1))^T P_{\text{апос}}^{-1} (\Delta\hat{\beta}(q) - (\Delta\hat{\beta}_{\text{апос}}(q-1))), \quad (2.71)$$

де $\Delta\hat{\beta}_{\text{апос}}(q-1) = \hat{\beta}(q-1) - \hat{\beta}_{\text{апос}}$; $\hat{\beta}_{\text{апос}}$ – апостеріорна оцінка β , що отримана із попереднього обчислення, якщо при обробці конкретної вибірки даних враховуються результати, отримані із інших вибірок; $P_{\text{апос}}$ – коваріаційна матриця апостеріорних оцінок чи, в найпростішому випадку, апроксимація її діагональною матрицею із елементами $\hat{\sigma}_{\beta_{\text{апос}}}^2$, які обчислюють як розкид оцінок $\hat{\beta}_i$, що отримано для різних вибірок даних.

Четвертий компонент критерію (2.68)

$$J_4 = (\Delta\hat{\beta})^T(q) \lambda^{-1} \Delta\hat{\beta}(q), \quad (2.72)$$

де λ – зазвичай діагональна матриця коефіцієнтів α_2 , що регуляризують.

Якщо $\alpha_2 \rightarrow 0$, матриця $\lambda^{-1} \rightarrow \infty$ і, навпаки, якщо $\alpha_2 \rightarrow \infty$, матриця $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ і компонент J_4 не впливає на значення $\Delta\hat{\beta}(q)$ на q -му кроці релаксаційного процесу. Градієнт функції (2.68):

$$\frac{\partial J[\hat{\beta}(q-1)]}{\partial \Delta\hat{\beta}} = \sum_{p=1}^4 \frac{\partial J_p}{\partial \Delta\hat{\beta}}. \quad (2.73)$$

Зокрема,

$$\frac{\partial J_1}{\partial \Delta\hat{\beta}} = -2 \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial e_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} \right)^T Q_j^{-1} e_j = -2 \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} \right)^T Q_j^{-1} \varepsilon_j. \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \Delta\hat{\beta}} = 2P_a^{-1} (\Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\beta_a(q-1)), \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \Delta\hat{\beta}} = 2P_{\text{апос}}^{-1} (\Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\beta_{\text{апос}}(q-1)), \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial J_4}{\partial \Delta\hat{\beta}} = 2\lambda^{-1} (\Delta\hat{\beta}(q-1)), \quad (2.77)$$

Із умови рівності нулю (2.73), враховуючи (2.69), (2.77), отримаємо систему нормальних рівнянь відносно вектору $\Delta\hat{\beta}(q-1)$ невідомих приростів вектору $\hat{\beta}(q)$ на q -му кроці ітерації:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta\hat{\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{\text{апос}}^{-1} + \lambda^{-1} \right] \Delta\hat{\beta}(q) = \\ & = \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \varepsilon_j + P_a^{-1} \Delta\beta_a(q-1) + P_{\text{апос}}^{-1} \Delta\hat{\beta}_{\text{апос}}(q-1). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Перед тим як розв'язувати систему (2.78), запровадимо параметр α_3 , який покращить збіжність для неквадратичного функціоналу (2.68):

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta\hat{\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{\text{апос}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right] \Delta\hat{\beta}(q) = \\ & = \alpha_3 \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \varepsilon_j + P_a^{-1} \Delta\beta_a(q-1) + P_{\text{апос}}^{-1} \Delta\hat{\beta}_{\text{апос}}(q-1). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Звідси

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\beta}(q) &= \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta\hat{\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{\text{апос}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right]^{-1} \\ &\cdot \left[\alpha_3 \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \varepsilon_j + P_a^{-1} \Delta\beta_a(q-1) + P_{\text{апос}}^{-1} \Delta\hat{\beta}_{\text{апос}}(q-1) \right], \end{aligned} \quad (2.80)$$

тоді

$$\hat{\beta}(q) = \hat{\beta}(q-1) + \Delta\hat{\beta}(q), \quad (2.81)$$

де $\alpha_3 \in [1, \infty)$.

Алгоритм (2.80), (2.81) узагальнює низку методів:

- для точно заданих Q_j^{-1} , P_a^{-1} , $P_{\text{апос}}^{-1}$, $\lambda^{-1} = 0$, $\alpha_3 = 1$ та гаусівських густин розподілу $\tilde{\varepsilon}$, $\hat{\beta}_a$, $\hat{\beta}_{\text{апос}}$ він відповідає байєсівському ;
- для $P_a^{-1} = P_{\text{апос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0$, $\alpha_3 = 1$ і точно заданої Q_j^{-1} – марковському;
- для $Q_j^{-1} = E$, $P_a^{-1} = P_{\text{апос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0$, $\alpha_3 = 1$ – методу Гауса–Ньютона;
- для $P_a^{-1} = P_{\text{апос}}^{-1} = 0$ – регуляризації Тихонова; для великих λ^{-1} і α_3 – градієнтному, для середніх – методу Марквардта [45].

Зміщення оцінки (2.81)

$$M[\delta\hat{\beta}(q)] = \lim_{q \rightarrow \infty} \hat{\beta}(q) - \beta$$

залежить від того, чи збігається послідовність (2.81) і чи досягнуто при $\hat{\beta}(q) - \beta$ стаціонарної точки J^* , яка відповідає необхідній умові оптимальності

$$\frac{\partial J^*}{\partial \Delta\hat{\beta}} = 0. \quad (2.82)$$

Вибором параметру α_3 можна гарантувати збіжність за функціоналом $J(\hat{\beta})$ до стаціонарної точки $J^*(\hat{\beta})$, в якій справедлива умова (2.82). Математичне сподівання для (2.81) як середнє за множиною кінцевих реалізацій для нескінченного числа q кроків із врахуванням (2.74)-(2.77) дорівнює:

$$\sum_{j=1}^m M \left[\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \varepsilon_j \right] + P_a^{-1} (\hat{\beta}(\infty) - \beta_a) + P_{\text{апоc}}^{-1} (\hat{\beta}(\infty) - \beta_{\text{апоc}}) = 0. \quad (2.83)$$

де згідно формулі (2.69)

$$\begin{aligned} M \left[\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \varepsilon_j \right] &= M \left[-\frac{\partial \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty))}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} [y_j - \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty))] \right] = \\ &= -M \left[\frac{\partial \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty))}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} y_j \right] + M \left[\frac{\partial \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty))}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty)) \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Оскільки

$$\hat{y}_j = \hat{y}_j(\beta(\infty, x + N, t)), \quad y_j = f_j(\beta, \mathbf{x}^*, t) + \tilde{\varepsilon}_j,$$

для того щоб рівняння (2.84) було близьке до нуля, необхідно у моделі замість $x + N$ мати x^* або його оцінку $\hat{x}^*$, близьку до x^* . Із рівняння (2.83) очевидна й інша причина зміщення, яка полягає у тому, що для $\beta_a \neq \beta$, $\beta_{\text{апоc}} \neq \beta$, $M < \infty$, $P_{\text{апоc}}^{-1} > 0$, з'являється додаткове зміщення від неточного завдання $\beta_{\text{апоc}}$ і β_a .

Коваріація оцінки (2.81) може бути визначена наближено. У точці (2.82) дамо невелику варіацію величини ε , яка призведе до варіації оцінки $\delta \eta$. Тоді умова (2.82) справедлива для $\beta^* + \delta \beta$:

$$0 = \frac{\partial J(\beta^* + \delta \beta, y^* + \tilde{\varepsilon})}{\partial \delta \beta} \approx \frac{\partial J(\beta^*, y^*)}{\partial \delta \beta} + \frac{\partial^2 J(\beta^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\delta \hat{\beta})^T} \delta \hat{\beta} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 J(\beta^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta} \partial \varepsilon_j} \tilde{\varepsilon}_j, \quad (2.85)$$

де

$$\frac{\partial J(\beta^*, y^*)}{\partial \delta \beta} = 0.$$

Із умови (2.85) визначимо

$$\delta \hat{\beta} = - \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\delta \hat{\beta})^T} \right)^{-1} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 J(\beta^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta} \partial \varepsilon_j} \tilde{\varepsilon}_j, \quad (2.86)$$

де згідно із рівняннями 2.68)–(2.80),

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\delta \hat{\beta})^T} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta \hat{\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{\text{апоc}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1}, \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} (\partial \varepsilon_j)^T} = \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.88)$$

Зважаючи на вираз (2.87), рівняння (2.88) є детерміноване і, вважаючи відсутність кореляції між $\tilde{\varepsilon}_j$ і $\tilde{\varepsilon}_i$ ($i \neq j$, $i, j = \overline{1, m}$), отримуємо коваріацію оцінки (2.86):

$$\begin{aligned} \text{cov} [\delta \hat{\beta}] &= M[\delta \hat{\beta} (\delta \hat{\beta})^T] \\ &= \left[\frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\delta \hat{\beta})^T} \right]^{-1} \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} (\partial \varepsilon_j)^T} Q_j^* \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} (\partial \varepsilon_j)^T} \right)^T \right] \left[\frac{\partial^2 J}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\delta \hat{\beta})^T} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

де Q_j^* – коваріаційна матриця похибки $\tilde{\varepsilon}_j(k)$.

Підставивши вирази (2.87), (2.88) у рівняння (2.89), отримаємо

$$\begin{aligned} \text{cov} [\delta \hat{\beta}] &= \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta \hat{\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{\text{апос}}^{-1} + \frac{\alpha_3}{\lambda} \right)^{-1} \times \\ &\times \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} Q_j^* \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta \hat{\beta})^T} \right] \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta \hat{\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{\text{апос}}^{-1} + \frac{\alpha_3}{\lambda} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Вираз (2.90) залежно від значень Q_j , Q_j^* , P_a , $P_{\text{апос}}$, α_3 , λ визначає коваріацію байєсівських оцінок ($\lambda^{-1} = 0$, $Q_j = Q_j^*$, марковських $P_a^{-1} = P_{\text{апос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0$, $Q_j = Q_j^*$, Гауса–Ньютона $Q_j = I$, $P_a^{-1} = P_{\text{апос}}^{-1} = 0$, Тихонова ($P_a^{-1} = P_{\text{апос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0$), градієнтних ($\lambda^{-1} \rightarrow \infty$, $\alpha_3 \rightarrow 0$). Збіжність оцінок узагальненого алгоритму (2.80), (2.81) залежить від апіорних та апостеріорних оцінок β_a і $\hat{\beta}_{\text{апос}}$, від регулюючого доданку $\alpha_3 \lambda^{-1}$, від матриць Q_j і особливо від функції J_1 (2.69). Для строго випуклої квадратичної за β поверхні J оцінка $\hat{\beta}$ збігається (якщо $\alpha_3 = 0$) до оптимальної точки за один крок, оскільки вираз (2.70) є точний. У решті випадків збіжність може бути покращена за рахунок покращення числа обумовленості матриць

$$\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta \hat{\beta})^T} \quad (2.91)$$

та адаптації параметру α_3 . Покращення обумовленості досягається плануванням експерименту, який ортогоналізує компоненти $\partial \hat{y}_j / \partial \delta \beta_j$, $i = \overline{1, n}$, або (для достатньо інформативних вибірок) таким спеціальним “зважуванням” даних, яке частково ортогоналізує компоненти $\partial \hat{y}_j / \partial \delta \beta_j$, наприклад, запровадженням у вираз (2.91) порядково у кожен рядок вагових функцій

$$\eta_{ij}(k) = n \frac{\left| \frac{\partial \hat{y}_j(k)}{\partial \beta_i} \right|^{\alpha_4}}{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \hat{y}_j(k)}{\partial \beta_i} \right|^{\alpha_4}}, \quad \eta_{ij} \in [0, 1].$$

які для $\alpha_4 = 0$ не вносять змін, якщо $\alpha_4 > 0$ виділяють ті точки k , у яких амплітуда діагонального елемента i -го рядку (при оцінці β_i) більша за амплітуди решти компонентів. Для великих α_4 різко зростає вага ортогональних векторів, для яких значення β_i прямує до одиниці. Це призводить до ортогоналізації (2.91), що збільшує обумовленість і зменшує коваріацію оцінок. Разом з тим “збіднення” вибірки внаслідок нерівномірного зважування має призвести до збільшення коваріації $\hat{\beta}$. Для обмежених вибірок оптимальне α_4^* може бути нульовим, зі збільшенням числа M (довжина вибірки) α_4^* зміщується у бік більших значень. Параметр α_3 для неквадратичних унімодальних поверхонь підбирають із умови забезпечення строгого релаксаційного процесу $\hat{\beta}(q)$, який задовольняє вимогу збіжності по J . Задаючи матриці Q_j , P_a , $P_{\text{апоc}}$, λ і параметри α_i , $i = 1, 2, 3, 4$, з універсального методу можна отримати його оптимальну для конкретних умов різновидність.

Проілюструємо вплив неортогональності компонента градієнту показника J і неточності завдання функції $J(\delta\beta)$ на якість оцінок β . Припустимо, що оцінюється двовимірний вектор β у рівнянні $y = \beta^T x$ за двома компонентами J_1 і J_2 квадратичного за $\delta\beta$ показника (2.68) (рис. 2.9, 2.10, 2.11). На рис. 2.9, 2.10 побудовано лінії рівня J_1 і J_2 для двох різних апріорних значень β'_a і β''_a вагів P_a^{-1} (J'_2 має більшу вагу за J''_2). Змінні $x_1(k)$ і $x_2(k)$ ортогональні (осі еліпса J_1 збігаються із осями $(\beta_i - \beta_i^*)$, $i = 1, 2$). Оскільки вихідна інформація зашумлена, функціонал J_1 обчислюють із точністю до величини δJ_1 . Лінія рівня δJ визначає область невизначеності (заштрихована область), яка вміщує коваріації оцінок $\text{cov}[\beta]$. Область невизначеності J_1 більша за $J_1 + J_2$, причому

$$\text{cov}[\hat{\beta}''] < \text{cov}[\hat{\beta}'] < \text{cov}[\hat{\beta}],$$

де $\text{cov}[\hat{\beta}'']$, $\text{cov}[\hat{\beta}']$, $\text{cov}[\hat{\beta}]$ – коваріації оцінок, що отримано із умов мінімуму J_1 , $J_1 + J'_2$, $J_1 + J''_2$ відповідно.

Зміщення оцінок розподілені у зворотному порядку

$$\delta\hat{\beta}'' > \delta\hat{\beta}' > \delta\hat{\beta} = 0.$$

Чим більша вага P_a^{-1} регуляризуючого додатку (для неточного β_a), тим більше зміщення. Як видно, для ортогональних $x_1(k)$ і $x_2(k)$ оцінки $\hat{\beta}'$ і $\hat{\beta}''$, що отримані за вибіркою довжиною M , все ж ближчі до істинної β^* . Пунктиром показано, що якщо $M \rightarrow \infty$, області невизначеності стягуються у точку, а оцінки $\hat{\beta}'$ і $\hat{\beta}''$ прямують до істинного β^* . Для скінченних M оцінки $\hat{\beta}'$ і $\hat{\beta}''$ будуть гіршими, ніж оцінка β^* , що отримана лише за показником J_1 , якщо точка β_a не належить області невизначеності. На рис. 2.8 подано перетин показників за траєкторією руху $\beta''_a \rightarrow \beta_a^* \rightarrow \beta'_a$. Із рис. 2.9 видно, що збільшення ваги J'_2 порівняно із J''_2 призводить до збільшення зміщення і зменшення коваріаційних оцінок. Це випадок, коли $x_1(k)$ і $x_2(k)$ не ортогональні, але лінійно незалежні.

Еліпс показника J_1 повернутий відносно осей $\beta_i - \beta_i^*$. Довжина головної діагоналі залежить від взаємозв'язку $x_1(k)$ і $x_2(k)$. На відміну від попередніх рисунків, тут для остаточного значення M уточнюються тільки компоненти $\hat{\beta}_1$, а оцінка $\hat{\beta}_2$ погіршується (її зміщення стає більшим за апіорне).

На відміну від попереднього, тут навіть в асимптотиці (при $M \rightarrow \infty$) оцінки $\hat{\beta}'_\infty$ і $\hat{\beta}''_\infty$ не збігаються із $\hat{\beta}^*$. Нарешті, якщо залежність $y(\beta)$ – нелінійна (функція Розенброка), можлива ситуація (рис. 2.11), за якої обидві оцінки $\hat{\beta}'_\infty$ і $\hat{\beta}''_\infty$ через неправильну апіорну інформацію про β_a і невиклуклість функціоналу $J(\beta)$ не уточнюватимуться:

$$(\hat{\beta} - \hat{\beta}_\infty)^T \text{cov}[\hat{\beta}]^{-1} (\hat{\beta} - \hat{\beta}_\infty) \leq \delta J. \quad (2.92)$$

У таких випадках доцільно збільшити компонент $\alpha_3 \lambda^{-1}$ алгоритму (2.80), (2.81), спростивши його до градієнтного.

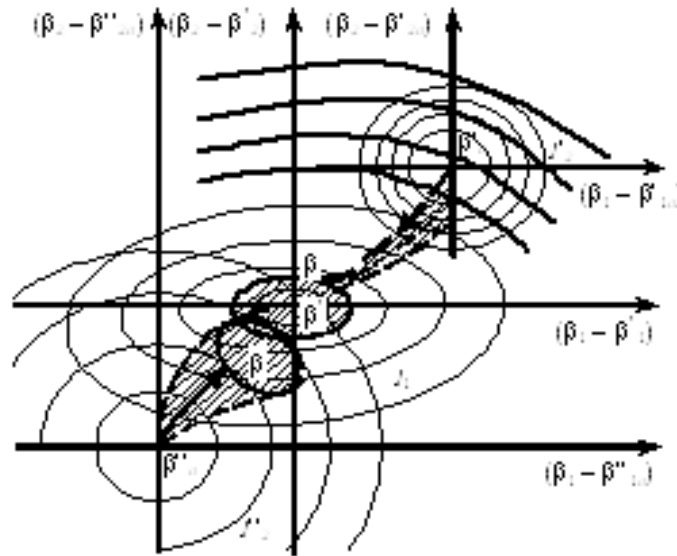
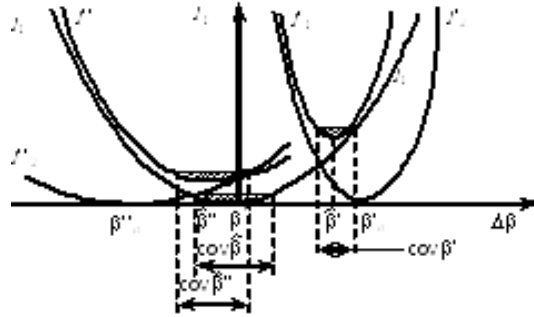


Рис. 2.7. Поверхні строго виклуклих функціоналів J_1, J_2 і траєкторії налаштування $\hat{\beta}(t)$, компоненти $\partial J_1 / \partial \hat{\beta}$ і $\partial J_2 / \partial \hat{\beta}$ ортогональні

Правильність завдання апіорних і апостеріорних даних $(\beta_a, P_a, P_{\text{апос}}, \beta_{\text{апос}})$ можна перевірити, зіставивши незміщені оцінки, що отримані при $P_a^{-1} = P_{\text{апос}}$, λ , та їх коваріацію із оцінками для заданих $P_a, P_{\text{апос}}, \lambda, \beta_a, \hat{\beta}_{\text{апос}}$. Якщо скористатися поняттям довірчих областей і взяти їх подібними областям невизначеності, за припущення нормальності розподілу оцінки $\hat{\beta}$ із коваріацією $\text{cov}[\hat{\beta}]$ і для заданої довірчої ймовірності γ значення δJ визначається як верхній γ -квантиль розподілу χ^2 . Задавшись γ , а отже, і значенням δJ і переходячи в (2.92) від нерівності до рівності, отримаємо поверхню спільної довірчої області

Рис. 2.8. Перетин цих функціоналів по траєкторії $\hat{\beta}(t)$

(еліпсоїда). Побудуємо ці поверхні для незміщених оцінок $\hat{\beta}(J_1)$ і $\hat{\beta}(J_1, J_2)$ із урахуванням P_a , $P_{\text{апос}}$.

Якщо область (2.92) значень оцінок $\hat{\beta}(J_1)$ містить у собі область (2.92) для $\hat{\beta}(J_1, J_2)$ виходять оцінки, які не поступаються оцінкам $\hat{\beta}(J_1)$, інакше апіорна й апостеріорна інформації задані неправильно й із ймовірністю γ кращою виявляється оцінка $\hat{\beta}(J_1)$. Показником оптимальності вектору α параметрів алгоритму може бути обсяг області (2.92), що дорівнює

$$v(\delta J) = (\delta J \pi)^{n/2} \sqrt{\left| \frac{\text{cov}[\hat{\beta}]}{\Gamma(n/2 + 1)} \right|}, \quad (2.93)$$

де Γ – гамма-функція, або D -критерій, який дорівнює $|\text{cov}[\hat{\beta}]|$ [56].

Алгоритми нелінійного оцінювання дають оптимальні оцінки параметрів моделі ЕТО тільки за умови унімодалності показника J якості і статистичної достовірності матриці Q коваріацій похибки ϵ . Для цього необхідно мати великі статистично представницькі вибірки даних експерименту на ЕТО.

2.3. Множина методів оцінювання дискретних моделей ЕТО

2.3.1. Оцінювання дискретних моделей динаміки ЕТО за МНК

Параметричне оцінювання дозволяє відшукувати значення коефіцієнтів моделі за вимірювальним значенням керованого y і керуючого u сигналів ЕТО. Передбачається, що структура й порядок моделі об'єкта відомі. Вимірювальні значення y і u представляються у вигляді часового ряду, тому оцінюються параметри авторегресії ковзного середнього АРКС-моделі об'єкта, або параметри його дискретної передатної функції. За коефіцієнтами АРКС-моделі та її структурою за необхідності можна перейти до неперервної моделі ЕТО [22,82,115]. Підставимо у рівняння АРКС-моделі значення сигналів $y(k)$ і $u(k)$, а також оцін-

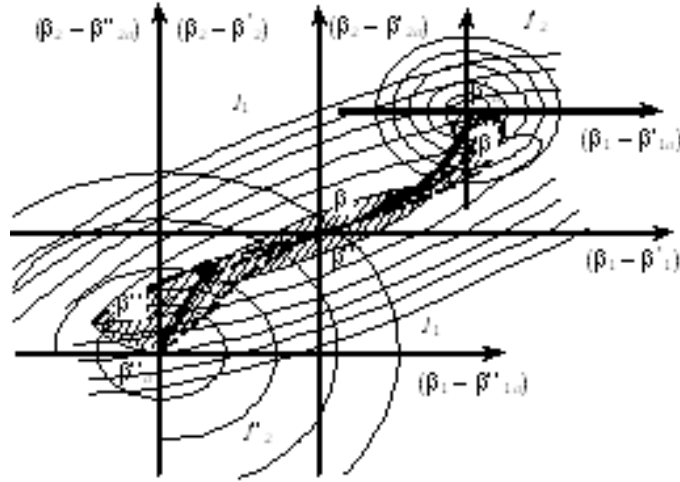


Рис. 2.9. Поверхні функціоналів J_1 , J_2 і траєкторії налаштувань $\hat{\beta}(t)$, компоненти $\partial J_1 / \partial \hat{\beta}_1$ і $\partial J_2 / \partial \hat{\beta}_2$ лінійно незалежні

ки параметрів об'єкта, отримані після $(k-1)$ -го такту рекурентного МНК:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) - b_1 u(k-d-1) - \dots - b_m u(k-d-m) = e(k).$$

Змінна похибка $e(k)$ відображає присутність похибки вимірювань виходу і неточність оцінок параметрів a_i і b_i моделі. Позначимо значення $y(k)$ як значення $y(k|k-1)$, що передбачене у момент $(k-1)$ на момент k . Тоді

$$y(k|k-1) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n) + b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m),$$

або

$$y(k|k-1) = \Psi^T(k) \hat{\theta}(k-1),$$

де $\hat{\theta}(k-1) = [a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m]$ – вектор оцінок параметрів; $\Psi^T(k) = [-y(k-1), \dots, y(k-n); u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)]$ – вектор даних; d – величина дискретного запізнення.

Похибка

$$e(k) = y(k) - y(k|k-1), \quad (2.94)$$

де $y(k)$ – нове вимірювання; $y(k|k-1)$ – передбачене за моделлю значення вимірювання.

Припустимо, що вимірювання виконано на інтервалі $k = 1, 2, \dots, n + d + N$, а порядок АРКС-моделі – (n, m) . Тоді на основі (2.93) і (2.94) отримаємо векторно-матричне рівняння

$$y(k) = \Psi^T(k) \hat{\theta}(k-1) + e(k). \quad (2.95)$$

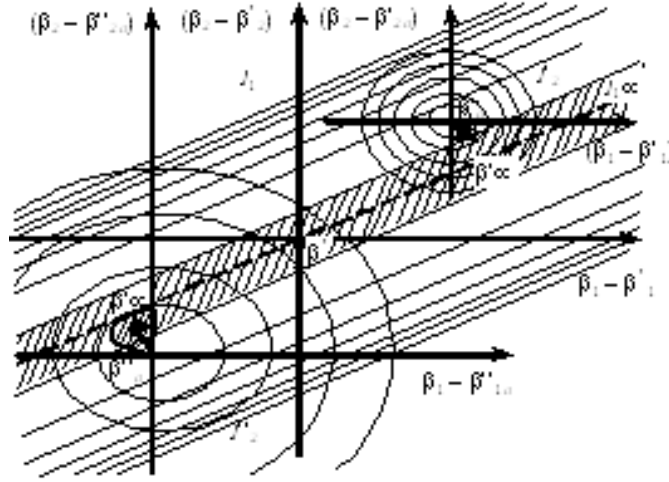


Рис. 2.10. Поверхні функціоналів J_1 , J_2 і траєкторії налаштувань $\hat{\beta}(t)$, компоненти $\partial J_1 / \partial \beta_1$ і $\partial J_2 / \partial \beta_2$ лінійно залежні (б)

де $\mathbf{y}^T(k) = [y(n+d), y(n+d+1), \dots, y(n+d+N)]$ – вектор виходу;
матриця даних:

$$\Psi(k) = \begin{bmatrix} -y(n+d-1) & \dots & -y(d) & u(n-1) & \dots & u(0) \\ -y(n+d) & \dots & -y(d+1) & u(n) & \dots & u(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(n+d+N+1) & \dots & -y(m+d) & u(n+N-1) & \dots & u(N) \end{bmatrix};$$

$\mathbf{e}^T(m+d+N) = [e(n+d), e(n+d+1), \dots, e(n+d+N)]$ – вектор похибок.
Показник J :

$$J = \mathbf{e}^T(n+d+N)\mathbf{e}(n+d+N) = \sum_{k=n+d}^{n+d+N} e^2(l). \quad (2.96)$$

Його мінімум відшукується за умови $dJ/d\theta = 0$.

За припущення, що $N \gg 2n$, позначимо

$$P(n+d+N) = [\Psi^T(n+d+N)\Psi(n+d+N)]^{-1}.$$

Тоді оцінка, що отримана шляхом мінімізації показника (2.96), матиме вигляд:

$$\hat{\theta}(n+d+N) = P(n+d+N)\Psi^T(n+d+N)\mathbf{y}(n+d+N). \quad (2.97)$$

Алгоритм (2.97) – рекурентний, побудований за методом найменших квадратів, оскільки обчислення оцінок параметрів $\hat{\theta}(n+d+N)$ моделі виконується

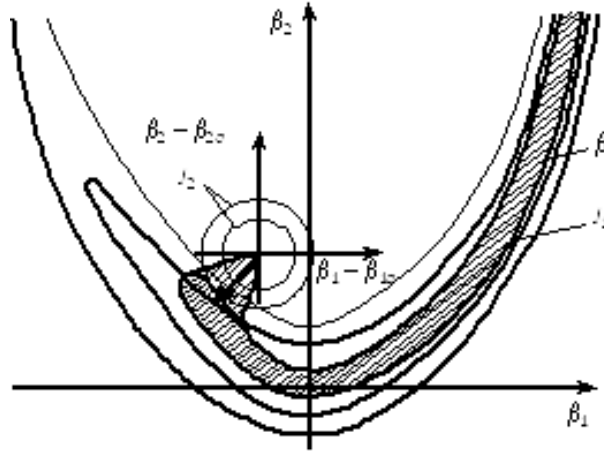


Рис. 2.11. Поверхня невипуклого (J_1 – функція Розенброка) і випуклого (J_2 – функціоналів) та траєкторія налаштування $\hat{\beta}(t)$

лише після того, як формується увесь масив вхідних та вихідних даних об'єкта $\Psi(n+d+N)$. Рекурентний алгоритм МНК отримують після запису нової $\hat{\theta}(k+1)$ і старої $\hat{\theta}(k)$ оцінок і віднімання однієї із іншої:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)[y(k+1) - \Psi^T(k+1)\hat{\theta}(k)]. \quad (2.98)$$

Вектор γ корекції визначається зі співвідношення:

$$\gamma(k) = \frac{P(k)\Psi(k+1)}{\Psi^T(k+1)P(k)\Psi(k+1) + 1}. \quad (2.99)$$

Вектор $P(k+1)$ на наступному кроці обчислюється як

$$P(k+1) = [\mathbf{I} - \gamma(k)\Psi^T(k+1)P(k)]. \quad (2.100)$$

Алгоритм рекурентного методу найменших квадратів:

1. Задаються початкові значення вектору оцінок параметрів моделі і вектору даних:

$\hat{\theta}(0) = 0$, $P(0) = \alpha \mathbf{I}$, де $\alpha \gg 1$, $\mathbf{I}$ – одинична матриця відповідної розмірності.

2. Виконується вимірювання вхідного і вихідного сигналів об'єкту і формується новий вектор даних $\Psi(k+1)$.

3. Обчислюється вектор (2.99) корекції $\gamma(k)$.

4. Знаходиться нова оцінка (2.98) параметрів $\theta(k+1)$.

5. Обчислюється новий вектор $P(k+1)$ за формулою (2.100).

Зазвичай має місце корельованість у часі шумів $\mathbf{e}(k)$. Як було показано, використання звичайного МНК викликає зміщення оцінок параметрів. Погіршення цих оцінок призводить до погіршення оцінок змінних станів $\mathbf{x}(k)$ моделі. Для

отримання незміщених оцінок використовується узагальнений МНК (УМНК), за якого оцінюються параметри моделей об'єкту і шуму на виході. Оцінюванню підлягає модель максимальної правдоподібності [54, 55] (МП-модель), для якої зв'язок між змінними задається рівнянням

$$A(x)y(z) - B(z)z^{-d}u(z) = D(z)\mathbf{e}(z). \quad (2.101)$$

Запровадимо розширені вектори даних і параметрів

$$\hat{\Psi}^T(k) = [y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n), \hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-n)]. \quad (2.102)$$

Тоді вихідний сигнал об'єкту можна записати через (2.102) і (2.95):

$$y(k) = \hat{\Psi}^T(k)\hat{\theta}(k-1). \quad (2.103)$$

Оцінка параметрів МП-моделі обчислюється аналогічно МНК за формулами (2.98)-(2.102).

2.3.2. Оцінювання за методом допоміжних змінних

Метод допоміжних змінних (МДЗ) використовується, якщо існує кореляція між сигналом шуму $\mathbf{e}(k)$ та елементами вектору даних $\hat{\Psi}^T(k+1)$. Модель об'єкту і шум представлені у вигляді повної моделі:

$$y(z) = \frac{D(z)}{A(z)}z^{-d}u(z) + \frac{D(z)}{C(z)}\mathbf{e}(z), \quad (2.104)$$

де z^{-d} враховує можливе запізнення на d кроків Δt .

Алгоритм оцінювання за методом допоміжних змінних подібний до алгоритму МНК. Тільки для реалізації алгоритму запроваджують вектор допоміжних змінних

$$H^T(k) = [-h(k-1), \dots, -h(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n)], \quad (2.105)$$

у яких використовуються вихідні сигнали $h(k)$ допоміжної моделі із параметрами $\hat{\theta}_b(k)$:

$$h(k) = H^T(k)\hat{\theta}_b(k). \quad (2.106)$$

Для зменшення ступеню кореляції між допоміжними змінними та похибкою, параметри допоміжної моделі визначаються як вихід низькочастотного дискретного фільтру першого порядку із запізненням, на вхід якого подається оцінка параметрів об'єкту

$$\hat{\theta}_b(k) = (1 - \beta)\hat{\theta}_b(k-1) + \beta\hat{\theta}(k-n), \quad 0,01 \leq \beta \leq 0,1. \quad (2.107)$$

Вектор корекції

$$\gamma(k) = \frac{P(k)\Psi(k+1)}{\Psi^T(k+1)P(k)\Psi(k+1) + 1}, \quad (2.108)$$

нове значення вектору

$$P(k+1) = [\mathbf{I} - \gamma(k)\Psi^T(k+1)P(k)]. \quad (2.109)$$

Оцінки вектору параметрів обчислюються за формулою (2.98). На початковому рівні метод є чутливий до вибору вихідних значень $\hat{\theta}(0)$ і $P(0)$, а також коефіцієнту β фільтру (2.107). Для підвищення стійкості алгоритму на початку доцільно скористатися звичайним МНК. МДЗ дозволяє обчислити лише оцінки параметрів об'єкту, якщо для оцінювання параметрів моделі формуючого фільтру шуму можливо використати МНК. Модель шуму представлена стаціонарним авторегресійним процесом із ковзним середнім

$$y(k) = c_1 y(k-1) + \dots + c_p y(k-p) = v(k) + d_1 v(k-1) + \dots + d_p v(k-p). \quad (2.110)$$

Запровадимо вектор даних

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-p), v(k-1), \dots, v(k-p)],$$

і вектор параметрів

$$\boldsymbol{\rho}^T = [c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_p],$$

записуємо (2.110) у вигляді векторно-матричного рівняння, аналогічного МНК

$$y(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{\rho}(k-1) + \mathbf{v}(k). \quad (2.111)$$

Щоб застосувати алгоритм МНК до АРКС, моделі невідомих перешкод замінюються їх оцінками. Із рівняння (2.111) маємо

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k)\hat{\boldsymbol{\rho}}(k-1), \quad (2.112)$$

де

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-p), \hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-p)].$$

Після цього обчислюється нова оцінка вектору даних

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k+1) = [-y(k), \dots, -y(k-p+1), \hat{v}(k), \dots, \hat{v}(k-p+1)].$$

Як початкові значення беруться

$$\hat{y}(0) = 0; \quad \hat{\theta}(0) = 0; \quad P(0) = \alpha^2, \quad \alpha \gg 1.$$

2.3.3. Оцінювання за методом максимальної правдоподібності

Похибка оцінювання $e(k)$ є дискретна випадкова величина E , яка залежить від вектору параметрів Θ АРКС-моделі. Нехай у результаті проведення вимірювань отримано вибірку випадкової величини $(x_1, x_2, \dots, x_l)$ обсягом n . Позначимо ймовірність появи якого-небудь числа вибірки $P(E = e_j)$ через $p_i(\theta)$, а через

$f_1, f_2, \dots, f_r$ – абсолютні частоти, із якими з’являються значення $(x_1, x_2, \dots, x_l)$ у вибірці, причому $\sum_{j=1}^r f_j = n$. У цьому випадку функцією правдоподібності називають функцію параметрів моделі, яка визначається співвідношенням [55]:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_l, \theta) = p_1^{f_1}(\theta) p_2^{f_2}(\theta) \cdots p_r^{f_r}(\theta). \quad (2.113)$$

Метод максимальної правдоподібності (ММП) полягає у тому, що в якості оцінки параметрів Θ беруться такі їх значення, за яких функція правдоподібності досягає свого максимуму. Це значення

$$\theta_{\max} = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_l).$$

Відповідна функція вибірки $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_l)$ називається найправдоподібнішою оцінкою θ . Її отримують при розв’язанні системи рівнянь:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0,$$

або

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0,$$

Максимально правдоподібні оцінки за достатньо загальних умов є незалежні та асимптотично- нормально розподілені (але не завжди незміщені), і мають серед усіх асимптотично- нормально розподілених оцінок найбільшу ефективність. Щоб записати вираз для функції правдоподібності, треба знати аналітичний вираз закону розподілу. Часто вважається, що адитивні перешкоди у рівнянні моделі розподілені нормально. У цьому випадку оцінки ММП для лінійних моделей із незалежним шумом збігаються із оцінками МНК, а метод максимальної правдоподібності дає такий самий вираз для функції втрат, що й метод найменших квадратів:

$$L(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e^2(k). \quad (2.114)$$

Оскільки до функції правдоподібності (функції втрат) параметри моделі входять нелінійно, для їх оцінок необхідно мінімізувати функцію втрат, розв’язавши систему нелінійних алгебраїчних рівнянь. Оскільки результати отриманого розв’язання є функція вибірки (2.112), метод максимальної правдоподібності може реалізовуватися лише у рекурентному вигляді. Але якщо провести лінеаризацію функції правдоподібності у малому, а потім її мінімізувати, можна отримати рекурентний алгоритм:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)e(k+1), \quad (2.115)$$

де

$$\gamma(k) = P(k+1)\varphi(k+1) + \frac{P(k)\varphi(k+1)}{1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}; \quad (2.116)$$

$$P(k) = \frac{1}{\frac{\partial^2 L[\theta(l+1), k]}{\partial \theta^2}}; \quad (2.117)$$

$$P(k+1) = [\mathbf{I} - \gamma(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k+1)]P(k); \quad (2.118)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k+1) = [-y'(k), \dots, -y'(k-n+1), u'(k-d), \dots, u'(k-d-n+1), e'(k), \dots, e'(k-n+1)];$$

$$y'(k) = y(k) - \hat{d}_1 y'(k-1) - \dots - \hat{d}_1 y'(k-n);$$

$$u'(k) = y(k-d) - \hat{d}_1 u'(k-d-1) - \dots - \hat{d}_n u'(k-d-n);$$

$$e'(k) = e(k) - \hat{d}_1 e'(k-1) - \dots - \hat{d}_1 e'(k-n);$$

$$e(k) = y(k) - \Psi^T(k)\theta(k);$$

$$\hat{v}(k+1) = e(k+1).$$

Початкові значення параметрів $\theta(0) = 0$; $P(0) = \alpha \mathbf{I}$; $\varphi(0) = 0$; $\alpha \gg 1$. Вектор $\boldsymbol{\Psi}(k+1)$ аналогічний вектору (2.102) в УМНК. На відміну від УМНК у ММП використовується модифікований вектор даних $\boldsymbol{\varphi}(k+1)$, як у методі допоміжної змінної. Але, на відміну від МДЗ, у ММП вектор даних корелює із шумами. Оцінки ММП асимптотично ефективні, нормально розподілені [115].

2.3.4. Оцінювання за методом стохастичної апроксимації

Нехай, наприклад, у лінійному різницевого рівнянні (2.95) треба визначити вектор параметрів $\boldsymbol{\theta}$. Під час кожного вимірювання дійсне значення $y_0(k)$ не спостерігається, а спостерігається деяке значення $y(k)$, на яке діє перешкода $v(k)$, про яку відомо, що

$$M[y(k)] = M[y_0(k)].$$

Метод стохастичної апроксимації (МСА) формує послідовність розв'язків для відшукування оцінки вектору параметрів при кожному вимірюванні $\hat{\theta}(k)$ таку, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}(k) = \theta. \quad (2.119)$$

Члени цієї послідовності утворюються рекурентною формулою

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)[y(k+1) - \boldsymbol{\Psi}^T(k+1)\hat{\theta}(k)], \quad (2.120)$$

яка аналогічна формулі рекурентного МНК. Відмінність полягає у векторі корекції $y(k)$. Доведено [54], що, якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^2(k) < \infty \quad (2.121)$$

дисперсія перешкод $\gamma(k)$ обмежена і модель об'єкту стійка, виконується асимптотична умова (2.119) збіжності $\hat{\theta}$ до θ . Вираз у квадратних дужках у рівнянні (2.120) позначений $\mathbf{e}(k)$ і називається похибкою; $\gamma(k)$ – коефіцієнт корекції. Вектору параметрів $\hat{\theta}$ відповідає вектор похибок

$$\mathbf{e}(k) = [y(k+1) - \Psi^T(k+1)\theta(k)]$$

та матриця коефіцієнтів. Умовам (2.121) відповідає велика кількість послідовностей, наприклад,

$$\gamma(k) = c/k, \quad c = \text{const.}$$

Метод стохастичної апроксимації легко використовується в умовах послідовного отримання оцінок (рекурентне оцінювання). Нехай рівняння моделі задано у вигляді (2.95), $M[\mathbf{e}(k)] = 0$, та функція втрат (2.96) подана у вигляді

$$J = \mathbf{e}^T(N)\mathbf{e}(N) = \sum_{k=1}^N e^2(k). \quad (2.122)$$

Тоді

$$\mathbf{e}(k+1) = \frac{dJ}{d\theta}(\theta - \hat{\theta}) \quad (2.123)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)\Psi^T(k+1)[\gamma(k+1) - \Psi^T(k+1)\theta(k)]. \quad (2.124)$$

Необхідно відзначити, що математичне сподівання вектору похибки у точці $\theta = \hat{\theta}$ на кожному кроці дорівнюватиме нулю. Коефіцієнт корекції:

$$\gamma(k+1) = \frac{c}{k+1} \quad (2.125)$$

Недолік МСА – повільна збіжність оцінок $\hat{\theta}(k)$, навіть якщо дисперсія $\mathbf{e}(k)$ істотно менша за дисперсію $y(k)$. Попри повільну збіжність оцінок, алгоритми МСА за своєї простоти знаходять застосування у практичних задачах оцінювання лінійними та нелінійними моделями ЕТО із незалежним адитивним шумом.

2.3.5. Порівняння характеристик рекурентних методів оцінювання різницевиими моделями ЕТО

Подані вище алгоритми рекурентного оцінювання (РМНК, РУМНК, РМДЗ, РММП, МСА) можуть бути приведені до єдиної форми [121]:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)\mathbf{e}(k+1); \quad (2.126)$$

$$\gamma(k) = \mu(k+1)P(k)\varphi(k+1); \quad (2.127)$$

$$\mathbf{e}(k+1) = y(k+1) - \Psi^T(k+1)\theta(k). \quad (2.128)$$

Для різних методів їх опис відрізняється лише векторами $\hat{\theta}(k)$, $\Psi(k+1)$ та $\gamma(k)$.

Рекурентний метод найменших квадратів (РМНК):

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) &= [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]; \\ \boldsymbol{\Psi}^T(k) &= [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)]; \\ \mu(k+1) &= 1/(1 + \boldsymbol{\Psi}^T(k+1)P(k)\boldsymbol{\Psi}(k)); \\ P(k) &= 1/[\boldsymbol{\Psi}^T(k)\boldsymbol{\Psi}(k)]; \\ P(k+1) &= \mathbf{I} - \gamma(k)\boldsymbol{\Psi}^T(k+1)P(k); \\ \boldsymbol{\varphi}(k+1) &= \boldsymbol{\Psi}(k+1); \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(0) &= 0; \quad P(0) = \alpha\mathbf{I}, \quad \alpha \gg 1.\end{aligned}$$

Узагальнений рекурентний метод найменших квадратів (УРМНК):

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}^T &= [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n]; \\ \boldsymbol{\Psi}^T(k) &= [y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n)\hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-n)]; \\ \mu(k+1) &= \frac{1}{1 + \boldsymbol{\Psi}^T(k+1)P(k)\boldsymbol{\Psi}(k+1)}; \\ P(k) &= 1/[\boldsymbol{\Psi}^T(k)\boldsymbol{\Psi}(k)]; \\ P(k+1) &= \mathbf{I} - \gamma(k)\boldsymbol{\Psi}^T(k+1)P(k); \\ \boldsymbol{\varphi}(k+1) &= \boldsymbol{\Psi}(k+1); \\ \boldsymbol{\theta}(x, t)|_{t=0} &= \boldsymbol{\theta}(x, v)|_{v=0} = \boldsymbol{\theta}(x, 0), \quad \alpha \gg 1.\end{aligned}$$

Рекурентний метод допоміжних змінних (РМДЗ):

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) &= [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]; \\ \boldsymbol{\Psi}^T(k) &= [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)]; \\ \boldsymbol{\varphi}^T(k) &= [-h(k-1), \dots, -h(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n)]; \\ h(k) &= \boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{\theta}_b(k); \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_b(k) &= (1 - \beta)\hat{\boldsymbol{\theta}}_b(k-1) + \beta\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1), \quad 0, 01 \leq \beta \leq 0, 1; \\ \mu(k+1) &= \frac{1}{1 + \boldsymbol{\Psi}^T(k+1)P(k)\boldsymbol{\Psi}(k+1)}; \\ P(k+1) &= \mathbf{I} - \gamma(k)\boldsymbol{\Psi}^T(k+1)P(k); \\ \hat{v}(0) &= y(0); \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = 0; \quad P(0) = \alpha\mathbf{I}.\end{aligned}$$

Рекурентний метод максимальної правдоподібності (РММП):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n];$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}^T(k+1) &= [-y'(k), \dots, -y'(k-n+1), u'(k-d), \dots, u'(k-d-n+1), e'(k), \dots, e'(k-n-1)]; \\
u'(k) &= y(k-d) - \hat{d}_1 u'(k-d-1) - \dots - \hat{d}_n u'(k-d-n); \\
e'(k) &= e(k) - \hat{d}_1 e'(k-1) - \dots - \hat{d}_n e'(k-n); \\
\mu(k+1) &= \frac{1}{1 + \boldsymbol{\Psi}^T(k+1)P(k)\boldsymbol{\Psi}(k+1)}; \\
P(k+1) &= \mathbf{I} - \gamma(k)\boldsymbol{\Psi}^T(k+1)P(k); \\
\boldsymbol{\varphi}(0) &= \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{0}; \quad P(0) = \alpha\mathbf{I}.
\end{aligned}$$

Метод стохастичної апроксимації (МСА)

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) &= [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]; \\
\boldsymbol{\Psi}^T(k) &= [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)]; \quad \mu(k+1) = 1; \\
P(k+1) &= \frac{c}{k+1}; \\
\boldsymbol{\varphi}(k+1) &= \boldsymbol{\Psi}(k+1); \\
\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) &= \mathbf{0}; \quad P(0) = \alpha\mathbf{I}.
\end{aligned} \tag{2.129}$$

Якщо параметри об'єкту на інтервалі вимірювань $k = \overline{0, N}$ залишалися сталими, вимірювання $u(k), y(k)$ та похибки $e(k)$ входять із однаковою вагою, незалежно від k . Якщо оцінюються параметри нестационарного об'єкта, новим вимірюванням потрібно надавати більшу вагу, ніж тим, що були раніше. З цього випливає, що має бути передбачений механізм забування старих значень. У МНК він може бути запроваджений шляхом зміни функції втрат (метод експоненціально зважених найменших квадратів):

$$J = \sum_{k=n+d}^{n+d+N} w(k)e^2(k), \tag{2.130}$$

де $w(k) = \lambda^{n+d+N-k}$, $0 < \lambda < 1$.

У зв'язку з цим формули рекурентних методів необхідно змінити: у знаменнику для $\mu(k+1)$ одиниця замінюється на λ , а матриця $P(k+1)$ перемножується на $1/\lambda$. Задаючись показником згасання λ , доводиться вибирати між високим ступенем заглушування шуму (λ близьким до 1) та кращим відслідковуванням параметрів, що змінюються (λ менше 1). Результати дослідів рекурентних алгоритмів дозволяють зробити висновки про умови їх використання. РМНК застосовують для малих відношень інтенсивностей шуму та корисного сигналу. В іншому випадку він дає сильне зміщення оцінок параметрів. Надійна збіжність оцінок вимагає відносно невеликого обсягу обчислень.

Щодо УРМНК, то якщо справедлива модель шуму D/A , він застосовується при більш високих відношеннях шуму до сигналу. Спочатку оцінки збігаються

повільно або навіть розбігаються. Оцінки фільтра шуму $D = [d_1, \dots, d_m]$ збігаються повільніше за оцінки параметрів об'єкту. Він потребує більшого обсягу обчислень, ніж РМНК.

РМДЗ забезпечує достатньо точну оцінку параметрів. Використовується для високих інтенсивностей перешкод та їх кореляції зі змінними об'єкту. Для збіжності оцінок на початковому етапі рекомендується використовувати РМНК. Він має досить великий обсяг обчислень. Щодо РММП, то якщо справедлива модель шуму вигляду D/A , він забезпечує високу точність оцінок. Спочатку оцінки збігаються повільно. Розбігаються різкіше, ніж УРМНК. Оцінки фільтра шуму $D = [d_1, \dots, d_m]$ збігаються повільніше і потребують більшого обсягу обчислень, ніж УРМНК. У МСА прийнятна точність досягається за досить великої кількості вимірювань. Збіжність визначається числом s у рівнянні (2.129). Обсяг обчислень малий. За малих обсягів обчислень та шуму високої інтенсивності усі методи (крім МСА) мають однакову якість оцінок. Перевагу надають РМНК, оскільки він легший від інших та гарантує збіжність релаксаційного процесу $\beta(k)$. Перевага РММП проявляється для великих обсягів вибірок.

2.4. Використання трьох типів моделей

Для забезпечення збіжності релаксаційного процесу параметричного оцінювання припускається, що для ЕТО, що досліджується, відображення (2.67) $f^*(x^*, \beta^*, t)$, де вхід $x(t)$ і вихід $y(t)$ може бути із малою похибкою δ представлено паралельною $f(x, \hat{\beta}, t)$, послідовно-паралельною f_1, f_2 або композицією із паралельної і лінійної (за вектором параметрів β^m) додаткових моделей [129]. Додаткова модель:

$$y(t) = (\beta^m)^T \varphi^T(x, t), \quad (2.131)$$

де

$$(\beta^m)^T = [\beta_1^m, \dots, \beta_r^m], \quad \varphi^T(\cdot) = [\varphi_1(x, t), \dots, \varphi_r(x, t)].$$

Вважається, що сигнал $x(t)$ вимірюється досить точно. Сигнал на виході ЕТО складається із точного значення $y^*(t)$ моделі, випадкової складової $\hat{\varepsilon}(t)$ і складової $\varepsilon^*(t)$ загальної похибки, пов'язаної із неточністю структури моделі

$$y(t) = y^*(t) + \hat{\varepsilon}(t) + \varepsilon^*(t).$$

Апріорна інформація про $\hat{\beta}$ відсутня, тому функціонал $J(\varepsilon)$ у загальному випадку є функція від $\Delta\beta$, яка може мати кілька екстремумів. Необхідно отримати незміщену оцінку $\hat{\beta}$ коефіцієнтів β^* моделі:

$$y(t) = f(x^*(t), \hat{\beta}, t), \quad (2.132)$$

для якої

$$\hat{\beta} \in G_{\hat{\beta}}, \quad \|y^*(t) - \hat{y}(t)\|^2 \leq \delta J(\delta\beta),$$

де $\delta J(\delta\beta)$ – припустима похибка δJ , що відповідає області (2.93) невизначеності $\delta\beta$ оцінки $\hat{\beta}$.

Виміри проводять у дискретні моменти часу $t_k = \Delta k$ (або просто k), значення $x^*(k)$ точне, $y(k) = y^*(k) + \tilde{\varepsilon}(k) + \varepsilon(k)$, початкові умови нульові.

Алгоритм оцінювання $\hat{\beta}$ для моделі (2.132):

Крок 1. Задамо відображення f у виразі (2.132) таким чином:

$$f(x, \beta, t)x,$$

що відповідає одиничній паралельній моделі. Апроксимуємо вихідний сигнал об'єкту $y(k)$, $k = \overline{1, M}$, вихідним сигналом моделі (2.131), додаткової (до одиничної на першому кроці) моделі (2.132). Як міру близькості $y(k)$ і $\hat{y}(k)$ приймемо середній за M дискретами квадрат похибки

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k), \quad (2.133)$$

де на цьому кроці

$$\hat{y}_1(k) = (\beta^*)^T \varphi(x, k). \quad (2.134)$$

Із умови мінімуму $\sum_{k=1}^M \varepsilon^2(k)$ отримаємо систему нормальних рівнянь:

$$A_1 \beta^m = B_1, \quad (2.135)$$

де

$$A_1 = \varphi^T \varphi; \quad \varphi^T = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \dots & \varphi_1(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_r(1) & \varphi_r(2) & \dots & \varphi_r(M) \end{bmatrix}, \quad (\beta^m)^T = [\beta_1^m, \dots, \beta_r^m];$$

$$B_1 = \varphi^T y, \quad y^T = [y(1), \dots, y(M)],$$

де $\varphi_i(k)$ – скорочене позначення для $\varphi_i(x(k))$. Із системи (2.135) знайдемо оцінку вектора β^m :

$$\beta^m = A_1^{-1} B_1. \quad (2.136)$$

Підставивши (2.136) у (2.134), отримаємо оцінку $\hat{y}_1(k)$ першого наближення.

Крок 2. Розглядаючи оцінку $\hat{y}_1(k)$ як згладжений сигнал $y(k)$ об'єкту, поставимо відображенню (2.134) у відповідність паралельну модель із вектором β , параметри якого одержимо через вектори β' , β'' послідовно-паралельної моделі. Для цього із умови мінімуму середнього квадрату $\sum_{k=1}^M \varepsilon_0^2(k)$ узагальненої похибки ε_0 послідовно-паралельної моделі

$$\varepsilon_0 = f_1^T(x, \hat{y}, t) \beta' - f_2^T(x, \hat{y}, t) \beta'',$$

отримаємо систему нормальних рівнянь

$$A_2 \hat{\beta}^T = B_2. \quad (2.137)$$

де $\hat{\beta}^T = ((\beta')^T, (\beta'')^T)$;

$$A_2 = F^T F; \quad F^T = \begin{bmatrix} F_1(1) & F_1(2) & \dots & F_1(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_p(1) & F_p(2) & \dots & F_p(M) \end{bmatrix}, \quad p = n + m;$$

$$F_i(k) = \begin{cases} f_{1i}, & i = \overline{1, m}, \\ f_{2, i-m}, & i = \overline{m+1, n+m}. \end{cases}$$

Із виразу (2.137) визначимо оцінку $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = A^{-1} - 2B_2$$

і підставимо її у модель (2.132). У результаті отримаємо оцінку $\hat{y}_2$ сигналу y у другому наближенні і оцінку $\hat{\beta}$ параметрів паралельної моделі у першому наближенні.

Крок 3. Повторення кроку 1, де в якості входу для моделі (2.134) береться вихід $\hat{y}_2$ паралельної моделі, що отримано на кроці 2. На виході моделі отримаємо точнішу оцінку $\hat{y}_3$ сигналу y .

Крок 4. Повторення кроку 2, але вже для точнішої апроксимації $\hat{y}_3$. Далі кроки повторюються до виконання умови зупинки, якою може бути величина δ відносно зміни модуля норми вектора $\hat{\beta}$ на $(l+1)$ -му і l -му кроках:

$$\delta = \left| \frac{\|\hat{\beta}(l+1)\|}{\|\hat{\beta}(l)\|} - 1 \right|.$$

Оскільки для оцінювання β^m і $\hat{\beta}$ використовувалися лише квадратичні функціонали (тому, що β^m і $\hat{\beta} = [\hat{\beta}', \hat{\beta}'']$ входять лінійно в ϵ і ϵ_0 відповідно), величина δ монотонно зменшується по мірі зростання L .

Швидкість збіжності оцінок $\hat{\beta}$ до β^* залежить від того, наскільки точно додаткова модель апроксимує сигнал y (особливо на кроці 1, коли входом для неї слугує сигнал x). Для покращення апроксимаційних властивостей додаткову модель можна будувати за ноніусним принципом [117,123] з адаптацією структури операторів; зручні також ортогональні моделі.

На рис. 2.12 зображено схему оцінювання за методом трьох моделей. Система має три типи моделей і два блоки $\beta^m(\varphi, \epsilon)$ і $\beta(f, \epsilon_0)$ оцінювання параметрів.

Окрім циклічного алгоритму уточнення параметрів можливим є рекурентний. При рекурентному алгоритмі блоки $\beta^m(\varphi, \epsilon)$ і $\hat{\beta}(f, \epsilon_0)$ реалізують градієнтне налагодження параметрів, причому із умов стійкості алгоритм блоку

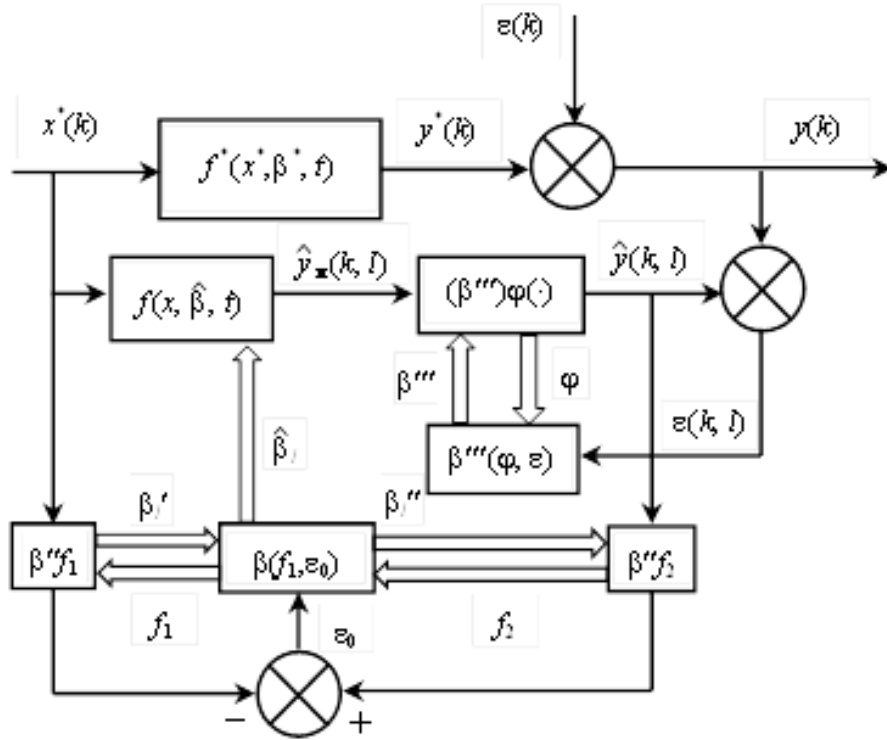


Рис. 2.12. Схема системи оцінювання за методом трьох моделей

$\beta^m(\varphi, \varepsilon)$ має бути швидкодієнішим. У надзвичайно простому випадку оператором $(\beta^m)^T(\varphi(\cdot))$ допоміжної моделі є скаляр β^m , що налагоджується за градієнтним алгоритмом:

$$\frac{d\Delta\beta'''}{dt} = \lambda \text{grad } \varepsilon(t) \hat{y}_1(t) = -2\lambda \varepsilon(t) \hat{y}_1(t) \quad (2.138)$$

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon}(t) + \hat{y}(t) \Delta\beta''',$$

або

$$\frac{d\Delta\beta'''}{dt} = -2\lambda [\varepsilon(t) \hat{y}_1(t) + \Delta\beta''' \hat{y}_1^2(t)]. \quad (2.139)$$

Така допоміжна модель являє собою стохастичну систему із параметрично-зворотнім зв'язком

$$\frac{d\Delta\beta'''}{dt} + 2\lambda \Delta\beta''' \hat{y}_1^2(t) = -2\lambda \varepsilon(t) \hat{y}_1(t),$$

для якої за відповідної нестационарності $\hat{\beta}(t)$ і перешкоді $\tilde{\varepsilon}(t)$ існує оптимальне значення λ , коли середній квадрат $\bar{\varepsilon}^2$ похибки (2.133) є мінімальний і близький до квадрату перешкоди. Додаткова модель безперервно доповнює вихід

$\hat{y}(k)$ паралельної моделі до істинного виходу $y^*(t)$ об'єкта. Тоді на послідовно-паралельній моделі за сигналами $x(k)$ і $\hat{y}(k) = y^*(k)$ буде одержано значення вектору $\hat{\beta}$, близьке до істинного $\hat{\beta}^*$. Найпростіша допоміжна модель може застосовуватися лише для уточнення вектору $\hat{\beta}$ у паралельній моделі. При оцінюванні стаціонарних систем для $\lambda \rightarrow \infty$ справедлива рівність $\hat{y}(k) = y(k)$, тобто послідовно-паралельна модель виходить ніби підключеною до об'єкту і оцінка $\hat{\beta}$ буде зміщеною. Якщо у міру налагодження паралельної моделі значення λ зменшувати, оцінка $\hat{\beta}$ прямує до $\hat{\beta}^*$. Метод дозволяє одержати асимптотично незміщені оцінки $\hat{\beta}$ невідомого вектору $\hat{\beta}^*$, який нелінійно входить в оператор $f(x, \hat{\beta}, t)$ паралельної моделі.

2.4.1. Приклад розбіжності РП при застосуванні двох моделей

ЕТО із чистим запізненням подано моделлю

$$y^*(t) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^m \hat{a}_i p^i} x(t), \quad x(t) = x_0 \sin \omega t (p = d/dt, \quad a_i = \tau^i / i!).$$

Необхідно за $y(t) = y^*(t) + \tilde{\varepsilon}(t)$, $\tilde{\varepsilon}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a \delta(t - t_j)$, де δ – функція Дірака; t_j – випадкові значення із середнім періодом $T_{\text{сер}}$ і $x(t)$, оцінити параметр τ , що входить нелінійно у рівняння об'єкту, користуючись не трьома, а двома моделями. Оскільки ЕТО – це ланка із чистим запізненням τ , для синусоїдного сигналу $x(t)$, область унімодальності середнього квадрату похибки $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}_1(t)$, як функції $\Delta\tau$, буде обмежена величиною $\pm \max \Delta\tau = \pm \pi / \omega$, $\Delta\tau = \tau \hat{a} u - \tau$. Якщо скористатися методом двох моделей, тобто безпосередньо до об'єкту застосувати послідовно-паралельну модель із послідовним $f_1 = W_1(p)$ і паралельним $f_2 = W_2(p)$ операторами відповідно:

$$W_1(p) = \frac{1 + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i p^i}{1 + Tp}; \quad W_2(p) = \frac{1}{1 + Tp},$$

то

$$\varepsilon_0(t) = W_2(p)[y^*(t) + \hat{\varepsilon}(t)] - W_1(p)x(t) \approx \Delta\tau \frac{p}{Tp + 1} x(t + \Delta\tau) + \frac{\hat{\varepsilon}(t + \hat{\tau})}{Tp + 1}.$$

Тоді математичне сподівання оцінки $\hat{\tau}$, що відповідає умові

$$M \left[\frac{\partial \varepsilon_0^2}{\partial \hat{\tau}} \right] = M \left[\varepsilon_0(t) \frac{\partial \varepsilon_0(t)}{\partial \hat{\tau}} \right] = \Delta\tau \frac{\omega^2}{T^2 \omega^2 + 1} \frac{x_0^2}{2} - \frac{a_s^2}{2T^2 T_{\text{сер}}} = 0,$$

буде зміщено на величину для $\omega T > 1$, яка дорівнює відношенню перешкода – сигнал:

$$\Delta\tau = \frac{a_s^2}{T_{\text{сер}} x_0^2} \frac{T\omega^2 + 1}{T^2 \omega^2} \approx \frac{a_s^2}{T_{\text{сер}}} \frac{1}{x_0^2},$$

де T – стала часу фільтру.

Якщо $|\Delta\tau| > \pi/\omega$, оцінка $\hat{\tau}$ за паралельною моделлю із початковим значенням $\hat{\tau}(0)$, яке взяте із послідовно-паралельної, не зійдеться до τ , а призведе до одного із хибних значень $\tau \pm 2\pi/\omega \cdot k$, $k = 1, 2, \dots$, тобто застосування методу двох моделей не дало бажаного результату.

2.4.2. Приклад застосування трьох моделей

За вхідним сигналом $u(t)$ ЕТО, що являє собою одиничну сходинку, і вихідним сигналом $x(t)$ потрібно визначити три коефіцієнти $\hat{\beta}_j$ ($j = 1, 2, 3$) диференціального рівняння моделі об'єкту, наприклад, моделі розгінної характеристики електродвигуна:

$$\frac{d^2 x^*(t)}{dt^2} + \hat{\beta}_2 \frac{dx^*(t)}{dt} + \hat{\beta}_1 x^*(t) = \hat{\beta}_3 U(t). \quad (2.140)$$

де $x(t)$ – кутова швидкість; $U(t)$ – напруга.

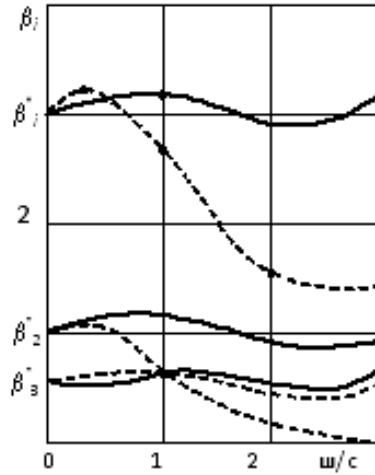


Рис. 2.13. Залежність значень оцінок для методів узагальненої послідовно-паралельної моделі (пунктир): трьох моделей (суцільні лінії) від відношення шум/ сигнал

Сигнали $U(t)$ і $x^*(t)$ виміряні у дискретні моменти часу k із кроком $\Delta t = 0,05$ с. Вимірювання $x(k)$ ($k = \overline{1, 100}$ сигналу $x^*(k)$) зашумлено адитивною перешкодою $N(k)$ типу гаусівського білого шуму із нульовим середнім значенням. Задачу розв'язуватимемо методом послідовно-паралельної моделі та методом трьох моделей. Фільтри послідовно-паралельної моделі задамо оператором $W_f(p) = 1/(p^3 - 5p^2 + 6p + 7)$, який значною мірою згладжує перешкоду $N(t)$. Але за великих рівнів шуму оцінки $\hat{\beta}_1$ і $\hat{\beta}_2$ суттєво занижені, оцінка $\hat{\beta}_3$ для обох методів близька до істинної, оскільки сигнал $u(t)$ вимірюється точно (рис. 2.13). Деяке відхилення її від точного значення викликане лише неортогональністю матриці МНК. На рис. 2.13 і в табл.і 2.3 наведено залежність значень

оцінок $\hat{\beta}_i$ за методом послідовно-паралельної моделі (ППМ) (штрихові лінії) і за методом трьох моделей (МТМ) (суцільні лінії) від відношення середньоквадратичних значень шуму $N(k)$ і сигналу $x^*(k)$ (шум/сигнал). Як бачимо, в МТМ шум в $x(t)$ не призводить до зміщення оцінок, вони гарантовано збігаються за дві ітерації, тоді як у методі ППМ оцінки $\hat{\beta}_1$ і $\hat{\beta}_2$ зі зростанням відношення шум/сигнал суттєво зменшуються.

Табл. 2.3. Залежність значень оцінок $\hat{\beta}_i$ від відношення шум/сигнал для методу послідовно-паралельної моделі (ППМ) та методу трьох моделей (МТМ)

$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_1$		$\hat{\beta}_2$		$\hat{\beta}_3$	
Шум/сигнал	ППМ	MNM	ППМ	MNM	ППМ	MNM
0	3	3	1	1	0,5	0,5
0,1	3,06	3,06	1,03	1,02	0,504	0,504
0,2	3,11	3,08	1,04	1,03	0,508	0,507
0,5	3,15	3,10	1,01	1,1	0,517	0,516
1	2,69	3,15	0,71	1,14	0,6	0,62
2	1,56	2,82	0,16	0,96	0,49	0,48
3	1,39	3,22	0,02	0,95	0,53	0,58

2.5. Підвищення якості оцінювання параметрів

Підвищити якість оцінювання параметрів можна шляхом комплексування методів і моделей в БАСІ-системах.

Очевидність нерівності (1.30) пояснимо наступним. Стійкість динамічних ЕТО є важлива характеристика, особливо якщо вони нестационарні, не повністю відомі і схильні до випадкових перешкод у вимірювальних каналах змінних стану. Для малих відхилень змінних від режиму балансування рух ЕТО описується системою рівнянь першого порядку. Наприклад, рівняння (2.140) може бути подано таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}u, \end{aligned} \quad (2.141)$$

Системі (2.141) еквівалентні (передатні) функції, що передають, які відображають вхідний сигнал u у виходи x_{1M} або x_{2M} моделі, наприклад, u в x_{2M} :

$$W_u^{x_2}(p) = \frac{\beta_{23}p + (\beta_{23}\beta_{11} - \beta_{13}\beta_{22})}{p^2 - (\beta_{11} + \beta_{22})p + (\beta_{22}\beta_{11} - \beta_{12}\beta_{21})}. \quad (2.142)$$

Коефіцієнти $(\beta_{11} + \beta_{22}) = -a_1$ і $(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) = a_0$ знаменника визначають відповідно коливальний і аперіодичний запас стійкості ЕТО. Коефіцієнти β_{13} ,

β_{23} визначають ефективність керуючого впливу; β_{12} , β_{22} – демпфувальні сили і моменти. Оцінювання коефіцієнтів β_{ij} ЕТО, за якими визначається стійкість і керованість, є актуальні завдання. Обмежені вартістю натурного експерименту і нестаціонарністю експерименту, нелінійністю – діапазон зміни змінних, не дозволяють із досить високою точністю одержати оцінки $\hat{\beta}_{ij}$ коефіцієнтів β_{ij} із зашумлених перешкодами вимірювань $\hat{x}_i$, $\hat{u}$. Підвищити точність оцінювання коефіцієнтів без збільшення часу експерименту можна, скориставшись методом статистичного моделювання перешкод. Для цього, з огляду на апріорну інформацію про рознесені спектри сигналів і перешкод (перешкоди більш високочастотні), досить для кожного сигналу виконати фільтрацію перешкод і, як різницю відфільтрованого і вихідного сигналу, отримати наближену реалізацію перешкоди. Далі слід визначити статистичні характеристики цих реалізацій і згенерувати m статистично подібних реалізацій перешкод для кожної змінної x_i , u . Склавши ці реалізації із відповідними відфільтрованими сигналами, отримаємо m псевдо-вибірок даних експерименту. Маючи у наявності m статистично ідентичних вибірок, p методів оцінювання і q моделей ЕТО, можна скористатися їх надмірністю для одержання точніших оцінок. Розглянемо три моделі: (2.141), (2.142) і модель (2.143), що впливає із двох перших:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= (\beta_{11} + \beta_{22}) \frac{d^2 x_2}{dt^2} - (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})x_2 + \beta_{23} \frac{du}{dt} - (\beta_{11}\beta_{23} - \beta_{13}\beta_{22})u = \\ &= -a_1 \frac{dx_2}{dt} - a_0 x_2 + a_2 \frac{du}{dt} + a_3 u. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Кількість p методів визначення коефіцієнтів визначається кількістю функціоналів близькості змінних ЕТО і його моделей (2.144), (2.145), (2.146). Із умови мінімуму цих функціоналів визначаються оптимальні оцінки $\hat{\beta}_{ij}$ коефіцієнтів β_{ij} :

$$\{\beta_{ij}^*\} = \arg \min_{\beta_{ij}} \|\hat{x}_i - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \hat{x}_j - \beta_{i3} \hat{U}\|^2, \quad (2.144)$$

де $\hat{x}_i$, $\hat{U}$ – згладжені фільтром змінні.

$$\{a_i^*\} = \arg \min_{a_i} \|x_2 - x_{2M}\|^2; \quad (2.145)$$

$$\{a_i^*\} = \arg \min_{a_i} \|\hat{\hat{x}}_2 + a_1 \hat{x}_2 + a_0 x_2 - a_2 \hat{U} - a_3 \hat{U}\|^2. \quad (2.146)$$

Згладжування всіх змінних здійснюється одним і тим самим фільтром, щоб не внести методичну похибку у лінійні рівняння ЕТО. Далі для кожного із алгоритмів (2.144)–(2.146) на множині із m реалізацій для кожної реалізації визначаються оптимальні значення β_{ij}^* , a_i^* , їх середні значення за m реалізаціями $\bar{\beta}_{ij}^*$, $\bar{a}_i^*$, оцінки власних $\hat{\sigma}_{\beta_{ij}^*}^2(k)$, $\hat{\sigma}_{a_i^*}^2(k)$, і взаємних $\hat{\sigma}_{\beta_{ij}^*(k)\beta_{ij}^*(l)}$, $\hat{\sigma}_{a_i^*(k)a_i^*(l)}$ дисперсій,

де $k = 1, 2, 3$; $p = 3$; $l = 1, 2, 3$; $k \neq l$. Для стислості запису елементи множин β_{ij} , a_i позначимо через $\{\alpha_i\}$. Тоді шукатимемо найкращу на множині із трьох методів-моделей оцінку α_i^* у вигляді:

$$\alpha_i^* = \sum_{k=1}^3 C_k \alpha_i(k), \quad \sum_{k=1}^3 C_k = 1. \quad (2.147)$$

Коефіцієнти C_k визначимо із умови:

$$C_1 = 1 - C_2 - C_3; \quad \frac{\partial \hat{\sigma}_{\alpha_i^*}^2}{\partial C_k} = 0, \quad k = 2, 3; \quad (2.148)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\alpha_i^*}^2 &= \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^3 C_k [\alpha_{ji}(k, j) - \bar{\alpha}_i(k, j)] \right)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^3 C_k^2 \hat{\sigma}_{\alpha_i(k)}^2 + \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^3 C_k C_l \hat{\sigma}_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)}^2 = C^T A C. \end{aligned}$$

Для стислості позначимо $\hat{\sigma}_{\alpha_i(k)}^2 = \hat{\alpha}_k^2$, $\hat{\sigma}_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)}^2 = \hat{\alpha}_{kl}^2$, тоді

$$C^T = [C_2, C_3],$$

$$A = \begin{bmatrix} (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2 - 2\hat{\alpha}_{12}^2) & (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2 - \hat{\alpha}_{13}^2 - \hat{\alpha}_{12}^2) \\ (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2 - \hat{\alpha}_{13}^2 - \hat{\alpha}_{12}^2) & (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_3^2 - 2\hat{\alpha}_{13}^2) \end{bmatrix}.$$

Тепер умова $AC = B$ еквівалентна системі:

$$B = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{12}^2 \\ \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad (2.149)$$

Розв'язок $C = A^{-1}B$ системи (2.149) існує, якщо матриця A позитивно визначена. Чим менше корельовані похибки в оцінюванні α_i різними методами, тим ближче матриця A до діагональної. Оскільки норми близькості (2.144)–(2.146) взяті у просторі змінних x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$, можна чекати слабку кореляцію у похибках оцінок α_i різними методами-моделями. Підставивши знайдені із системи (2.149) оптимальні значення C_2 , C_3 , а також $C_1 = 1 - C_2 - C_3$ у рівняння (2.147), отримаємо оптимально зважену оцінку α_i^* коефіцієнту α_i (за умови гарної обумовленості матриці A і невеликої похибки оцінок $\hat{\sigma}_i^2$, $\hat{\sigma}_{ij}^2$, дисперсій σ_i^2 , σ_{ij}^2). В іншому випадку для гарантії не погіршення результату для зважування оцінок α_i слід скористатися мінімаксним підходом. Оцінки $\hat{\sigma}_i^2$, $\hat{\sigma}_{ij}^2$, що обчислені за m згенерованими вибірками даних, мають похибки із χ^2 -розподілом, якщо похибки оцінок $\alpha_i(k)$ розподілені за нормальним законом. Істинні значення σ_i^2 , σ_{ij}^2 для

заданого рівня достовірності містяться в інтервалі $(1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_i^2, (1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_i^2$, або приблизно $(1 \pm \gamma)^{-1} \sigma_i^2, (1 \pm \gamma)^{-1} \sigma_{ij}^2$, де γ -квантиль $\chi^2(p, m)$ -розподілу, $\gamma \ll 1$. Нехай $\sigma_i^2 = (1 + \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_i^2$, для $i = \overline{1, n_1}$, $\sigma_j^2 = (1 - \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_j^2$, для $j = \overline{n_1 + 1, n}$. Тоді $\sigma_{ij}^2 = (1 - \gamma) \hat{\sigma}_{ij}^2$ для $i, j \in I$; $\sigma_{ij}^2 = (1 + \gamma) \hat{\sigma}_{ij}^2$, для $i, j \in J$; $\sigma_{ij}^2 = \sqrt{1 - \gamma^2} \hat{\sigma}_{ij}^2$, для $i \in I, j \in J$ або $i \in J, j \in I$.

Оцінка дисперсії зваженої оцінки α_r^* r -го коефіцієнта:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\alpha_r^*}^2 = & \sum_{i \in I} C_i^2 \hat{\sigma}_i^2 (1 + \gamma) + \sum_{j \in J} C_j^2 \hat{\sigma}_j^2 (1 - \gamma) + \sum_{\substack{i, j \in I \\ i \neq j}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 (1 + \gamma) + \\ & + \sum_{\substack{i, j \in I \\ i \neq j}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 (1 - \gamma) + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{1 - \gamma^2} + \sum_{\substack{i \in J \\ j \in I}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{1 - \gamma^2}. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Вираз (2.150) береться L разів для всіх можливих комбінацій $\hat{\sigma}_{ij}^2 (1 \pm \gamma)$, $i = 1, 2, 3$. Для кожного j -го поєднання із умови (2.148) отримуємо систему, аналогічну (2.149), розв'язуючи яку, отримуємо оптимальний ξ -й вектор $C^*(\xi)$:

$$C^*(\xi) = [C_1^*(\xi), C_2^*(\xi), C_3^*(\xi)]^T, \quad \xi = \overline{1, L}. \quad (2.151)$$

і обчислюємо $\sigma_{\alpha_r^*}^2(S, C^*(\xi))$, $\xi = \overline{1, L}$, $S = \overline{1, L}$. Мінімаксна оцінка C^* визначається із умови

$$C^* = \arg \min_{\xi \in \{1, L\}} \max_{S \in \{1, L\}} \hat{\sigma}_{\alpha_r^*}^2(S, C^*(\xi)). \quad (2.152)$$

Тобто кожен вектор (2.151) підставляють у кожний варіант дисперсії (2.150) і за C^* приймається той, найбільше значення якого за всіх варіантів (2.150) є мінімальне серед найбільших значень інших векторів (2.152).

2.5.1. Приклад звстосування мінімаксного підходу

Для наочності розглянемо двовимірний випадок ($p = 2$). Нехай $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 9$, $\sigma_{12}^2 = 2, 8$, $\gamma = 0, 1$. Можливі поєднання наведено у табл. 2.4. Оцінка (2.147):

$$\alpha_1^* = C \alpha_i C \alpha_i (1) + (1 - C) \alpha_i (2).$$

Табл. 2.4. Множники можливих відхилень оцінок дисперсій

N варіанта	Множники для $\hat{\sigma}_{12}^2$		
1	$1 + \gamma$	$1 + \gamma$	$1 + \gamma$
2	$1 - \gamma$	$1 - \gamma$	$1 - \gamma$
3	$1 + \gamma$	$1 - \gamma$	$\sqrt{1 - \gamma^2}$
4	$1 - \gamma$	$1 - \gamma$	$\sqrt{1 - \gamma^2}$

Дисперсія (2.150):

$$\sigma_{\alpha_r^*}^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)C^2 + 2(\sigma_{12}^2 - \sigma_1^2)C + \sigma_2^2. \quad (2.153)$$

Підставивши замість дисперсій чотири варіанти їх оцінки із табл. 2.4 і виконавши операції (2.148), (2.149), отримаємо набір для чотирьох варіантів (2.152):

$$C^*(1) = C^*(2) = \frac{\hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{12}^2}{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - \hat{\sigma}_{12}^2} = 1,41.$$

$$C^*(3) = \frac{\hat{\sigma}_1^2(1 - \gamma) - \hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1 - \gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1 + \gamma) + \hat{\sigma}_2^2(1 - \gamma) - 2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1 - \gamma^2}} = 1,465;$$

$$C^*(4) = \frac{\hat{\sigma}_2^2(1 - \gamma) - \hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1 - \gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1 - \gamma) + \hat{\sigma}_2^2(1 + \gamma) - 2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1 - \gamma^2}} = 1,361.$$

Значення $\sigma_{\alpha_r^*}^2(S, C^*(\xi))$ зведено у табл. 2.5. У табл. 2.5 жирною рамкою виділено варіанти із $\max \sigma_{\alpha_r^*}^2(S, C^*(\xi))$, подвійною рамкою – із

$$\min_{\xi \in \{1,4\}} \max_{S \in \{1,4\}} \sigma_{\alpha_r^*}^2(3, C^*(3)) = 0,316,$$

із її аргументом $C^* = 1,465$, $(1 - C^*) = -0,465$.

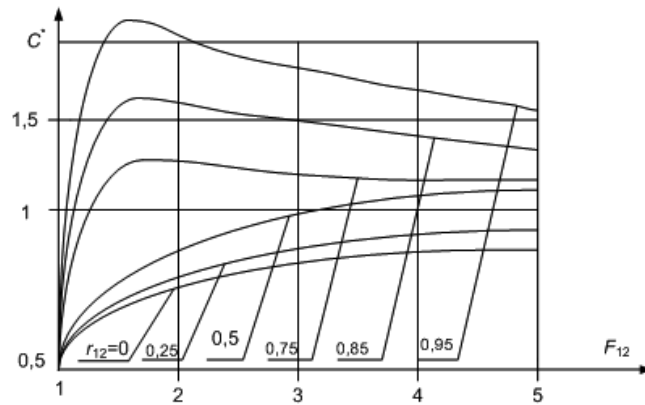
Табл. 2.5. Оптимальні значення дисперсій

$\sigma_{\alpha_r^*}^2(S, C^*(\xi))$									
ξ/S	1	2	3	4	ξ	1	2	3	4
1	0,290	0,290	0,304	0,300	1	0,081	0,081	0,089	0,087
2	0,236	0,236	0,249	0,245	2	0,067	0,067	0,073	0,071
3	0,327	0,327	0,316	0,354	3	0,082	0,082	0,078	0,099
4	0,232	0,232	0,275	0,218	4	0,076	0,076	0,094	0,070

Якщо взяти $\sigma_1^2 = 1$; $\sigma_2^2 = 0$; $\sigma_{12}^2 = 2,8$; $\gamma = 0,1$, то $C^*(1) = C^*(2) = 0,756$; $C^*(3) = 0,737$; ; ; $C^*(4) = 0,737$. Відповідно

$$\min_{\xi \in \{1,4\}} \max_{S \in \{1,4\}} \sigma_{\alpha_r^*}^2(S, C^*(\xi)) = 0,082,$$

$C^* = 0,756$, $(1 - C^*) = 0,244$. Якщо припустити, що $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$, для різних значень коефіцієнту кореляції $r_{12} = \frac{\sigma_{12}^2}{\sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2}}$ та співвідношення $r_{12} = \sigma_2/\sigma_1$ одержимо множину графіків $C^*(r_{12}, F)$ (рис. 2.14).

Рис. 2.14. Залежність оптимальної ваги C^* від ступеня кореляції і зашумленості оцінок

Для $F_{12} = 1$, $C^* = 0,5$ для будь-яких r_{12} ; при $F_{12} \rightarrow \infty$, $C^* \rightarrow 1$, $(1 - C^*) \rightarrow 0$, тобто не ефективний метод виключається. Характерно, що для однакових $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{12}^2$ величина $\sigma_{\alpha_r}^2$ залежить від знаку σ_{12}^2 (0,316 для позитивної і 0,082 – для негативної). Зважування двох методів із негативною σ_{12}^2 дає кращий результат. У даному прикладі для $\sigma_{12}^2 = 0$ дисперсія $\sigma_{\alpha_r}^2 = 0,9$. Це набагато більше мінімаксних значень дисперсій при $\sigma_{12}^2 = \pm 2,8$ (0,316 і 0,082 відповідно). Тобто взаємна кореляція дозволяє підвищити точність мінімаксної оцінки.

Отже, використовуючи в БАСІ кілька моделей ЕТО і кілька методів їх параметричного оцінювання спільно із технологією статистичного моделювання перешкод, можна істотно підвищити точність оцінок параметрів ЕТО без збільшення довжини вибірки даних натурних випробувань підсилити нерівність (1.30), тобто перевагу БАСІ над СІ (Табл. 1.1). Тим більше, що з огляду на нестационарність характеристик реального ЕТО, вибірки не можуть бути як завгодно великими.

РОЗДІЛ 3

Нові методи конфлюєнтного аналізу у блоці $\{Opt, \alpha\}$ БАСІ

3.1. Зсув МНК-оцінок параметрів у реальній ситуації зашумленості вхідних сигналів ЕТО

За відповідних умов точна нелінійна нестационарна модель ЕТО може бути зображена наближено лінійною стаціонарною моделлю, кожен i -й рядок якої

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^N b_{ik} U_k(t)$$

можна подати як рівняння регресії (Розділ 2), де $y(t) = \dot{x}_i(t)$, а множина функцій $\{x_j(t), U_k(t)\}$ утворює вектор-функцію $\mathbf{x}(t)$ відповідних регресорів, $\{a_{ij}, b_{ik}\}$ – вектор $\boldsymbol{\beta}$ параметрів.

Але, реально маємо ситуацію, за якої всі змінні вимірюються із випадковими похибками на обмеженому відрізку часу. Наявність випадкових збурень у вимірах незалежних змінних $\mathbf{x}$ призводить до зміщення МНК-оцінок $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ вектора $\boldsymbol{\beta}$ параметрів моделі $\mathbf{y} = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}$. Лише за наявності апіорної інформації про дисперсії σ_i^2 білих шумів у вимірах $x_i(k)$, ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$, $m \gg n$) ситуацію можна дещо виправити, якщо від діагональних елементів a_{ii} матриці $X^T X$ відняти присутню у них складову $M[\sigma_i^2]$. Тоді в асимптотиці ($m \rightarrow \infty$) – математичне сподівання оцінки $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ буде незміщеним: $M(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$, якщо складова $\text{diag } \sigma_i^2 \cdot M$ буде скомпенсована.

Якщо апіорі відомо, що $x_i^*(t_k)$ – гладкі низькочастотні функції, а шуми $N_i(t_k)$ вимірів $x_i(t_k)$ високочастотні, оцінку $\hat{\sigma}_i^2$ дисперсії σ_i^2 шуму у вимірах $x_i(t_k)$ можна отримати шляхом низькочастотної фільтрації сигналів $x_i(t_k)$ і формування моделі шуму $\hat{N}_i(t)$ як різниці $x_i(t_k)$ і $\hat{x}_i(t_k)$, де $\hat{x}_i(t_k)$ – відфільтроване значення. Тоді оцінка $\hat{N}(t_k)$ шуму дорівнюватиме у вимірах x_i^* :

$$\hat{N}_i(t_k) = x_i(t_k) - \hat{x}_i(t_k), \quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m [x_i(t_k) - \hat{x}_i(t_k)]^2.$$

Скоригувавши діагональні елементи інформаційної матриці $X^T X$ на ці дисперсії, отримаємо незміщені МНК-оцінки $\hat{\beta}_i$ вектору β .

Практична постановка задачі часто містить у собі суттєву частку невизначеності статистичних властивостей шумів у вимірах вхідних X і вихідних Y даних про ЕТО, модель якого може бути подано як регресійну:

$$Y^* = X^* \beta^* + \epsilon^*, \quad (3.1)$$

де $Y^*, X^*, \beta^*, \epsilon^*$ – точні значення змінних виходу, входу і нев'язки, яка утворюється за умови, що оцінку β^* для точних значень отримано за методом найменших квадратів:

$$\beta^* = [(X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T} Y^* = C^* Y^*, \quad (3.2)$$

де $C^* = (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T}$, тобто, за умови

$$\beta^* = \arg \min(\epsilon^*)^T \epsilon^*. \quad (3.3)$$

Але, часто на практиці точних X^* не буває і МНК-оцінку (3.2) некоректно отримують за сигналами, збуреними перешкодами N_x і N_y :

$$X = X^* + N_x; \quad Y = Y^* + N_y, \quad (3.4)$$

МНК-оцінку (3.2) $\hat{\beta}$ вектору β^* відшуковують із умови (3.3), але вже для реальних даних (3.4) у звичайній

$$\hat{\beta} = [(X)^T X]^{-1} (X)^T Y = CY, \quad (3.5)$$

або рекурентній формі:

$$\hat{\beta}(j+1) = \hat{\beta}(j) + P(j+1)X(j)[Y(j) - X^T(j)\hat{\beta}(j)];$$

$$P(j+1) = P(j) - X(j)[X^T(j)P(j)X(j) + 1]^{-1}X^T(j)P(j)$$

із початковими умовами $P(0), \hat{\beta}(0)$. Якщо останні невідомі, то $\hat{\beta}(0) = 0, P(0) = \sigma^2 \beta \mathbf{I}, \sigma^2 \beta(0) \rightarrow \infty$.

Нехай (в ідеалі) перешкоди N_x, N_y – гаусівські білі шуми, авто- і взаємно некорельовані. Визначимо зсув $\Delta \beta$ оцінки (3.5) відносно точного значення (3.2):

$$\begin{aligned} \Delta \beta &= M[\hat{\beta}] - \beta^* = M\{[C^* + \delta C(N)][Y_i^* + \epsilon^* + N_y]\} - \beta^* = M\{[C^* + \delta C(N)][Y^* - \beta^*]\} \\ &= \{X^{*T} X^* + M[N_x^T N_x]\}^{-1} (X^{*T} Y^* - \beta^* = [X^{*T} X^* + x\sigma_i^2 \mathbf{I}]^{-1} X^{*T} Y^* - \beta^*. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Позначимо $X^{*T}X^* = A^*$, $M[N_x^T N_x] = \delta A$, $X^{*T}Y^* = B^* = M[X^T Y] = B^*$. Тоді

$$(A^*)^{-1}B^* = \hat{\beta}^*, \quad [A^* + \delta A]\hat{\beta} = B^*.$$

Звідси

$$\delta A(\beta^* + \Delta\hat{\beta}) = -A^*\Delta\hat{\beta},$$

або

$$\Delta\hat{\beta} = -(A^* + \delta A)^{-1}\delta A\beta^*. \quad (3.7)$$

Як бачимо, оцінка $\hat{\beta}$ за умов навіть некорельованих білих шумів N_x , N_y буде занижена відносно істинної β^* на величину (3.7). За умови, що норма $\|\delta A\| \rightarrow 0$, а $\hat{\beta} \rightarrow \beta^*$; за умови, що норма $\|\delta A\| \rightarrow \infty$ оцінка $\hat{\beta}$ прямує до нуля.

Коваріація оцінки (3.5) за наведених вище умов та за припущення, що норма $\|N_x^T \epsilon\|$ набагато менша за $\|(X^{*T}\|$ або $\|N_x^T Y^*\|$, наближено дорівнює:

$$\begin{aligned} \text{cov} [\hat{\beta}] &= M\{[C_1\epsilon + C_2N_x][C_1\epsilon + C_2N_x]^T\} = \\ &= C_1\{[C_1 M[\epsilon\epsilon^T]C_1^T + C_2 M[N_x N_x^T]C_2^T, \end{aligned} \quad (3.8)$$

де $\epsilon = \epsilon^* + N_y$,

$$C_1 = \{X^{*T}X^* + M[N_x N_x^T]\}^{-1}X^{*T}, \quad C_2 = \{X^{*T}X^* + M[N_x N_x^T]\}^{-1}Y^{*T}.$$

Перша складова виразу (3.8) зі зростанням рівня N_x зменшується, у другій C_2 зменшується, а $M[N_x N_x^T]$ збільшується. Але C_2 входить до виразу (3.8) квадратично, тоді як $M[N_x N_x^T]$ – лінійно. Тому для білого шуму, якщо $M[N_x N_x^T] = \sigma_{N_x}^2 m$, зі зростанням $\sigma_{N_x}^2$ коваріація оцінки $\hat{\beta}$ зменшуватиметься.

Отже, МНК має властивість регуляризації системи нормальних рівнянь, подібно до регуляризації за Тихоновим [45]. Остання полягає у мінімізації звичайного квадратичного функціоналу $I = \epsilon^m \epsilon$ із регуляризуючим додатком $\alpha \hat{\beta}^T \hat{\beta}$, де α – параметр регуляризації:

$$I = \epsilon^T \epsilon = (Y - X)^{*T}(Y - X^*) + \alpha \hat{\beta}^T \hat{\beta}. \quad (3.9)$$

Тоді із умови

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{\beta}} = 0 = 2(X^{*T}X^*\hat{\beta} - (X^{*T}Y + \alpha\hat{\beta}))$$

отримаємо дещо занижену регуляризовану оцінку $\hat{\beta} = [(X^{*T}X^* + \alpha\mathbf{I})^{-1}X^{*T}Y]$. Зіставляючи (3.7) і (3.9), бачимо, що в МНК параметр Тихонова дорівнює $\text{diag } \sigma_i^2 \cdot M$.

3.2. Узагальнений МНК та його практична реалізація

У цьому методі [111, 114] відшукуються МНК-оцінки за зваженими U^{-1} (відфільтрованими) даними:

$$\hat{X} = U^{-1}X, \quad \hat{Y} = U^{-1}Y.$$

Це еквівалентно мінімізації функціоналу

$$I = 0,5 \sum_{j=1}^M \|y(j) - x(j)\hat{\beta}\|^2 Q^{-1}, \quad (3.10)$$

де Q – матриця ваги кожного j -го виміру: $Q = (\text{cov } \hat{\beta})U^T$.

Тоді зважена вагою Q^{-1} оцінка узагальненого МНК (УМНК), що отримана за умови мінімуму (3.10), дорівнює

$$\hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} X^T Q^{-1} Y. \quad (3.11)$$

Коваріація оцінки (3.11):

$$\text{cov } \hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} X^T M[N_y N_y^T] Q^{-1} X (X^T Q^{-1} X)^{-1}.$$

Оцінка (3.11) має мінімальну дисперсію за умови, що $Q = M[N_y N_y^T]$, тоді

$$\text{cov } \hat{\beta} = \{X^T M[N_y N_y^T] X\}^{-1}.$$

Для некорельованого білого шуму у вимірах Y матриця $Q = \sigma_y^2(j)\mathbf{I}$. Тоді рекурентна формула УМНК збігається із зваженим МНК:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(j+1) &= \hat{\beta}(j) + P(j+1)X(j) \frac{1}{\sigma_{y(j)}^2} [Y(j) - X^T(j)\hat{\beta}(j)]; \\ P(j+1) &= P(j) - X(j)[X^T(j)P(j)X(j) + \sigma_y^2(j)]^{-1} X^T(j)P(j). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Неточність визначення чи апріорного завдання матриці Q^{-1} призводить до суттєвої втрати оптимальності оцінок (3.11), (3.12). Алгоритм не є робастний [137]. Статистична незначна неадекватність матриці Q коваріації перешкод N_y викликана, наприклад, окремими збоями у даних, які утворюють у законі розподілення перешкод N_y так звані “тяжкі хвости” [147] при оцінюванні вектора $\hat{\beta}$ за алгоритмом (3.11) може призвести до суттєвої похибки. Тому у практичній реалізації зручнішим і надійнішим буде квазіоптимальний УМНК:

– на першому етапі відбувається виявлення та виправлення аномальних даних та квазіоптимальне оцінювання сигналів X, Y шляхом згладжування лінійними фільтрами їх зашумлених вибірок $X(j), Y(j), j = \overline{1, M}$;

– на другому – МНК-оцінювання вектору $\hat{\beta}$ за отриманими на першому етапі оцінками $\hat{X}$ і $\hat{Y}$ і точних значень X^* , Y^* сигналів.

Для такого підходу перешкоди можуть бути взаємо корельованими. Крім того, оскільки модель (3.1) лінійна, за умови фільтрації всіх змінних $X_i(t)$, $Y_i(t)$ одним лінійним фільтром, невідповідність згладжених значень $\hat{X}$ і $\hat{Y}$ істинним X^* , Y^* не призводить до зміщення оцінки $\hat{\beta}$ відносно β . Дійсно, знак рівності у рівнянні (3.1) не порушується, якщо на його ліву і праву частину подіяти лінійним оператором фільтра W_f :

$$W_f \cdot \{Y^*\} = W_f[X^*\beta^* + \epsilon^*] = W_f\{X^*\}\beta^* + W_f\{\epsilon^*\}. \quad (3.13)$$

Математичне сподівання оцінки $\hat{\beta}$:

$$M[\hat{\beta}] = \{\hat{X}^{*T}\hat{X}^* + M[\hat{N}_x\hat{N}_x^T]\}^{-1}\hat{X}^*\hat{Y}^*.$$

Якщо для спрощення прийняти що $M[\hat{N}_x\hat{N}_x^T] = \text{diag}\{\sigma_{N_x}^2\}\mathbf{I}$, а також покласти, що власні значення матриці $\mathbf{Z} = (\hat{X}^{*T}\hat{X}^*)^{-1}\text{diag}\{\sigma_{N_x}^2\}$ менше одиниці, вираз $[\mathbf{I} + \mathbf{Z}^{-1}\text{diag}\{\sigma_{N_x}^2\}]^{-1}$ можна подати рядом. Тоді:

$$(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*)\hat{\beta} = [\mathbf{I} + (\hat{X}^{*T}\hat{X}^*)^{-1}\text{diag}\{\sigma_{N_x}^2\}]^{-1}\hat{X}^T\hat{Y} = [\mathbf{I} - (\hat{X}^{*T}\hat{X}^*)^{-1}\text{diag}\{\sigma_{N_x}^2\}]\hat{X}^{*T}\hat{Y}^*.$$

Звідси

$$\hat{\beta} = (\hat{X}^{*T}\hat{X}^*)^{-1}[\hat{X}^{*T}\hat{Y}^* - (\hat{X}^{*T}\hat{X}^*)^{-1}\text{diag}\{\sigma_{N_x}^2\}]^{-1}\hat{X}^{*T}\hat{Y}^*.$$

Враховуючи, що точне значення β дорівнює

$$\beta = [X^{*T}X^*]^{-1}X^{*T}Y^*,$$

отримаємо вираз для зсуву:

$$\Delta\hat{\beta} = \hat{\beta} - \beta = -\text{diag}\{\sigma_{N_x}^2\}(\hat{X}^T\hat{X})^{-1}\hat{\beta}. \quad (3.14)$$

Оскільки норма $\Delta\hat{\beta}$ не більше добутку норм складових правої частини рівняння (3.14), справедлива нерівність:

$$\frac{\|\Delta\hat{\beta}\|}{\|\hat{\beta}\|} \leq \|\text{diag}\{\sigma_{N_x}^2\}\| \cdot \|\hat{X}^T\hat{Y}\|^{-1}. \quad (3.15)$$

Чим сильніша фільтрація X, Y оператором W_f фільтру, тим менша норма матриці збурень $\sigma_{N_x}^2$. Тобто фільтр заглушує перешкоди. Але згладжування фільтром складових $X_i(t)$ вектор-функції $X(t)$ звужує їхні частотні спектри і, як наслідок, зменшує їх лінійну незалежність. Зменшується число обумовленості матриці $(\hat{X}^T\hat{Y})$ і, відповідно, збільшується норма зворотної матриці $(\hat{X}^T\hat{Y})^{-1}$. Для кожних конкретних випадків в БАСІ існує оптимальне значення згладжувального ефекту фільтру W_Φ , за якого норма зміщення (3.15) буде мінімальною. Коваріація оцінки $\hat{\beta}$ за методом УМНК за припущення взаємної некорельованості перешкод, подібна до МНК (3.8), але матриці $M[\epsilon^T\epsilon]$, $M[N_yN_y^T]$ вже не діагональні. Чим далі рознесено спектри сигналу і перешкоди, то краща фільтрація і, відповідно, оцінки квазіоптимального УМНК.

3.3. Теоретико-експериментальні дослідження ІМНК

3.3.1. Загальні положення

МНК- і УМНК-оцінки відшуковуються як координата точки мінімуму відповідних функціоналів $\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ і $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Оскільки функціонал є усереднене на скінченному інтервалі T значення квадрату $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ чи $\boldsymbol{\varepsilon}$, які є суміш корисного сигналу $Y^* - X^* \boldsymbol{\beta}$, як функція від $\boldsymbol{\beta}$, не є точний.

Відомо, що операція диференціювання $\partial(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})/\partial \boldsymbol{\beta}$ зашумленої функції $\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ некоректна. Цим обумовлена невисока точність МНК-оцінок на коротких сильно зашумлених вибірках даних X, Y . УМНК дещо покращує точність завдяки згладжуванню перешкод в X, Y . Але на коротких вибіркахна точність фільтрації впливає невизначеність межових умов. Крім цього, згладжування зменшує обумовленість матриці $\hat{X}^T \hat{X}$, що еквівалентне зменшенню крутизни функціоналу. Тоді знову зростає область невизначеності оцінки $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Бажано зменшити розкид значень функціоналу, не зменшуючи його кривизни у зоні екстремуму. Це можливо зробити для незгладжених X, Y шляхом додаткового усереднення по множині квазістатистично незалежних функціоналів, близьких до середньоквадратичного для точних даних. Такими функціоналами можуть бути зсунуті у часі t на інтервал θ середні добутки $1/T \int_0^T \boldsymbol{\varepsilon}(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t + \theta)$. Усереднюючи їх на відрізок $[-\tau_1, \tau_1]$, отримуємо функціонал [119]:

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T \boldsymbol{\varepsilon}(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t + \theta) dt d\theta, \quad (3.16)$$

де $\eta(\theta)$ – функція ваги, у найпростішому вигляді одинична. Необхідна умова мінімуму J за β_k , $k = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \beta_k} &= \frac{1}{2} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t)}{\partial \beta_k} \boldsymbol{\varepsilon}(t + \theta) + \boldsymbol{\varepsilon}(t) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(t + \theta)}{\partial \beta_k} \right] dt d\theta = \\ &= \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T \left\{ -x_k(t) \left[y(t + \theta) - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i(t + \theta) \right] - x_k(t + \theta) \left[y(t) - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i(t) \right] \right\} dt d\theta = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Виразу (3.17) еквівалентна система нормальних рівнянь:

$$A \hat{\boldsymbol{\beta}} = B, \quad (3.18)$$

де A – матриця $n \times n$ із елементами a_{ik} ; B – матриця-стовпчик $n \times 1$ із елементами b_k ;

$$a_{ik} = \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T [x_i(t + \theta) x_k(t) + x_i(t) x_k(t + \theta)] dt d\theta,$$

$$b_k = \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T [y(t+\theta)x_k(t) + y(t)x_k(t+\theta)] dt d\theta.$$

Для дискретних у часі t вибірок інтеграли замінимо сумами. Тоді:

$$a_{ik} = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M [x_i(j+l)x_k(l) + x_i(j)x_k(j+l)],$$

$$b_k = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M [y(j+l)x_k(l) + y(j)x_k(j+l)].$$

Розв'язок системи (3.18) дає шукану оцінку $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = A^{-1}B. \quad (3.19)$$

3.3.2. Аналіз складових методу

Проаналізуємо наскільки оцінка (3.19) відрізняється від істинної β^* (3.2). Спочатку розглянемо одну зі складових інтегралу (3.16), поданого сумою

$$I_e = \frac{1}{2} \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M \varepsilon(j)\varepsilon(j+l), \quad (3.20)$$

наприклад, якщо $l = -m$. Тобто зсув $\tau = -m\Delta t$, де Δt – крок дискретності вимірів X, Y у часі t . Тоді, без урахування ваги $\eta(m)$ складова дискретної моделі (3.20) інтегро- кореляційного критерію (3.16) дорівнюватиме:

$$I_m = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon_{-\tau} = \frac{1}{2} (Y_0 - X_0 \hat{\beta})^T (Y_{-\tau} - X_{-\tau} \hat{\beta}) =$$

$$= \frac{1}{2} Y_0^T Y_{-\tau} - \frac{1}{2} \hat{\beta}^T (X_0^T Y_{-\tau} + X_{-\tau}^T Y_0) + \frac{1}{2} \hat{\beta}^T X_0^T X_{-\tau} \hat{\beta}, \quad (3.21)$$

де індекс $-\tau$ означає зсув $x_i(t)$, $y(t)$ на $\tau = m\Delta t$:

$$X_{-\tau} = \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & \dots & x_n(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M-m) & \dots & x_n(M-m) \end{bmatrix}; \quad Y_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(M-m) \end{bmatrix}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1(m+1) & \dots & x_n(m+1) \\ x_1(m+2) & \dots & x_n(m+2) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M) & \dots & x_n(M) \end{bmatrix}; \quad Y_0 = \begin{bmatrix} y(m+1) \\ y(m+2) \\ \vdots \\ y(M) \end{bmatrix}$$

Якщо зсув τ більше за час кореляції перешкод N і $\hat{\epsilon}$, математичне сподівання I_m (3.21) буде інваріантним до цих перешкод:

$$M[I_m] = \frac{1}{2}(\epsilon^*)_0^T \epsilon_{-\tau}^*.$$

Необхідна умова мінімуму I_m :

$$\frac{\partial I_m}{\partial \hat{\beta}^T} = -\frac{1}{2}(X_0^T Y_{-\tau} + X_{-\tau}^T Y_0) + \frac{1}{2}(X_0^T Y_{-\tau} + X_{-\tau}^T Y_0) \hat{\beta} = 0, \quad (3.22)$$

достатня умова

$$X_0^T X_{-\tau} + X_{-\tau}^T X_0 > 0. \quad (3.23)$$

На відміну від МНК, для додатної визначеності матриці $X_0^T X_{-\tau} + X_{-\tau}^T X_0$ в (3.23) не достатньо лінійної незалежності функції $x_i(k)$. Визначимо верхню границю $\tau_{\text{гр}}$ для зсуву τ , за якого нерівність (3.23) перетворюється у рівність, тобто система стає виродженою. Оскільки перешкода N лише покращує обумовленість матриці $X^T X$, при виведенні (3.23) братимемо $N = 0$, $X = X^*$. Подамо $X_{-\tau}^*$ рядом Тейлора:

$$X_{-\tau}^* = X_0^* - \tau \dot{X}_0^* + R_1(\ddot{X}_0^*), \quad (3.24)$$

де $\dot{X}_0^* = dX_0^*/dt$, $\ddot{X}_0^* = d^2 X_0^*/dt^2$, $R_1(\ddot{X}_0^*)$ – матриця залишкових членів у розкладанні (3.24). З точністю до $R_1(\ddot{X}_0^*)$ маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X_0^{*T} X_{-\tau}^*) + X_{-\tau}^{*T} X_0^* &\approx \frac{1}{2}[(X_0^{*T} (X_0^* - \tau \dot{X}_0^*) + (X_0^* - \tau \dot{X}_0^*)^T X_0^*)] = \\ &= (X_0^{*T} X_0^* \frac{\tau}{2} ((X_0^{*T} \dot{X}_0^* + (\dot{X}_0^*)^T X_0^*)) = \Gamma - \frac{\tau}{2} \Gamma_1, \end{aligned} \quad (3.25)$$

де Γ , Γ_1 – симетричні матриці: Γ – матриця Грама, яка додатно визначена.

Відомо [44,88], що дві симетричні матриці, з яких одна додатно визначена, перетворенням T можна одночасно привести до діагонального виду так, що на діагоналі матриці Γ будуть всі одиниці, а на діагоналі Γ_1 – власні значення λ_i матриці Γ^{-1} (для виразу (3.25) – $\tau/2\Gamma^{-1}\Gamma_1$):

$$T^{-1} \left(\Gamma - \frac{\tau}{2} \Gamma_1 \right) T = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} - \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_{1n} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Граничне значення $\tau_{\text{гр}}$ зсуву визначається за умови $1 - \tau_{\text{гр}}/2 \max \lambda_{1i} = 0$ звідки

$$\tau_{\text{гр}} = \frac{1}{\max \lambda_{1i}}, \quad (3.27)$$

де λ_{1i} – власні значення матриці $1/2\Gamma^{-1}\Gamma_1$. Чим більше τ , тим гірше обумовлена матриця Γ (більше за $\|\Gamma^{-1}\|$, більше $\max \lambda_{1i}$, менший граничний зсув $\tau_{\text{гр}}$).

Розглянемо тепер, як вплине симетрія зсуву $\pm\tau$ на граничне значення. Тут

$$\begin{aligned} I &= \boldsymbol{\varepsilon}_0^T (\boldsymbol{\varepsilon}_\tau + \boldsymbol{\varepsilon}_{-\tau}) = (Y_0 - X_0 \hat{\boldsymbol{\beta}})^T (Y_\tau + Y_{-\tau} - (X_\tau + X_{-\tau}) \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \\ &= Y_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T [X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0] + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) \hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad (3.28) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} X_\tau &= \begin{bmatrix} x_1(2m+1) & \dots & x_n(2m+1) \\ x_1(2m+2) & \dots & x_n(2m+2) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M) & \dots & x_n(M) \end{bmatrix}; \quad Y_\tau = \begin{bmatrix} y(2m+1) \\ y(2m+2) \\ \vdots \\ y(M) \end{bmatrix}; \\ X_{-\tau} &= \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & \dots & x_n(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M-2m) & \dots & x_n(M-2m) \end{bmatrix}; \quad Y_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(M-2m) \end{bmatrix}; \quad \tau = m. \end{aligned}$$

Необхідна умова мінімуму I :

$$\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} = [X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0] + [X_0^T (X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0] \hat{\boldsymbol{\beta}} = 0.$$

Достатня умова мінімуму I :

$$\left| \frac{\partial^2 I}{\partial \boldsymbol{\beta}^2} \right| = |X_0^T (X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0| > 0. \quad (3.29)$$

Аналогічно (3.27) знайдемо граничне $\tau_{\text{гр}}$ із умови, що у (3.29) визначник дорівнює нулю. Розглянемо вже три члени ряду (3.24):

$$\begin{aligned} X_\tau^* &= X_0^* + \tau \dot{X}_0^* + \frac{\tau^2}{4} \ddot{X}_0^* + R_3(\ddot{X}_0^*, \tau), \\ X_{-\tau}^* &= X_0^* - \tau \dot{X}_0^* + \frac{\tau^2}{4} \ddot{X}_0^* + R_3(\ddot{X}_0^*, -\tau). \end{aligned} \quad (3.30)$$

З точністю до $R_3(\ddot{X}_0^*, \pm\tau)$ отримуємо

$$(X_0^{*T} (X_\tau + X_{-\tau}) + ((X_\tau + X_{-\tau})^T X_0 = (X_0^{*T} X_0^* + \frac{\tau^2}{4} [(X_0^{*T} X_0^* + (X_0^{*T} X_0^*)] = \Gamma + \frac{\tau^2}{4} \Gamma_2, \quad (3.31)$$

де Γ і Γ_2 – матриці, подібні до матриць у рівнянні (3.26); Γ – додатно визначена матриця Грама.

Тоді, як і рівняння (3.26), вираз (3.31) приводиться T -перетворенням до вигляду:

$$T^{-1} \left(\Gamma + \frac{\tau^2}{4} \Gamma_2 \right) T = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} \lambda_{21} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_{2n} \end{bmatrix}.$$

де λ_{2i} – власні значення матриці $T^{-1}\Gamma_2$. Граничне значення зсуву $\tau_{\text{гр}}$ визначається із умови

$$I + \frac{\tau_{\text{гр}}^2}{4} \max |\lambda_{2i}| = 0,$$

або

$$\tau_{\text{гр}} = \frac{2}{\sqrt{\max |\lambda_{2i}|}}, \quad (3.32)$$

де $\max |\lambda_{2i}|$ береться за множиною $\{\lambda_{2i}\}$ від'ємних власних значень матриці $T^{-1}\Gamma_2$ на відміну від (3.27) для несиметричного зсуву.

Якщо продовжити розкладання (3.30) і підставити його в (3.29), легко впевнитися, що всі непарні члени розкладання (3.29) скоротяться. Таким чином, для точних X^* матриця

$$X_0^{*T}(X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0$$

відрізняється від матриці $X_0^{*T} X_0^*$ МНК лише парними членами розкладання (3.30), урахувуючи припущення гладкості $x_0(t)$. Ця різниця буде суттєво меншою, ніж у (3.23) для точних X^* , оскільки там присутні всі члени розкладання (3.30). Таким чином, граничне значення (3.32) більше, ніж за умовою (3.27), а при тому ж τ показник (3.28) за неточних $X = X^* + N$ ближче до показника МНК (за точних X^*), ніж показник у рівнянні (3.21). Щоб це підтвердити, розглянемо зсув і коваріацію оцінки $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = [X_0^{*T}(X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0]^{-1} [(X_0^{*T}(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0)]. \quad (3.33)$$

3.3.3. Кількісні показники оцінки за ІМНК

Зсув $\Delta \hat{\beta}$:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\beta} &= M[\hat{\beta} - \beta^*] = M\{[X_0^T(X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0]^{-1} \cdot \\ &\cdot M\{[X_0^T(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0] - [(X_0^{*T} X_0^*)^{-1}(X_0^{*T} Y_0^*)]\} = \\ &= [X_0^{*T}(X_\tau + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + M\{N_0^T(N_\tau + N_{-\tau}) + (N_\tau + N_{-\tau})^T N_0\}]^{-1} \\ &\cdot [X_0^T(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0] \\ &+ M[(X_0^{*T}(\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T \epsilon_0) - ((X_0^{*T} X_0^*)^{-1} X_0^{*T} Y_0^*]. \end{aligned}$$

Скориставшись розкладанням (3.30) і формулою (3.31), отримаємо:

$$\Delta\hat{\beta} = [4\Gamma + \tau^2\Gamma_2 + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} \cdot$$

$\cdot [4(X_0^{*T}Y_0^* + \tau^2(X_0^{*T}\ddot{Y}_0^* + \ddot{X}^{*T}Y_0^*)) + 2(M - 2m)(R_{X^*\varepsilon^*}(\tau) + R_{X^*\varepsilon^*}(-\tau)) - \Gamma^{-1}(X_0^{*T}X_0^*)]$,
де $R_{NN}(\tau)$ – матриця $(n \times n)$ кореляційних функцій $R_{N_iN_j}(\tau)$, $i, j = \overline{1, n}$; $R_{X^*\varepsilon^*}(\pm\tau)$ – вектор-стовпчик кореляційних функцій.

Зсув $\Delta\hat{\beta}$ викликано членами $(M - 2m)R_{NN}(\tau)$ і $(M - 2m)[R_{X^*\varepsilon^*}(\tau) + R_{X^*\varepsilon^*}(-\tau)]$. Член при τ , більший за час кореляції перешкод, дорівнює нулю. Друга складова

$$(M - 2m)[R_{X^*\varepsilon^*}(\tau)] \approx \frac{\tau^2}{4}(X_0^{*T}\ddot{\varepsilon}_0^* + (\ddot{X}^*)_0^T\varepsilon_0^*).$$

Тоді

$$\Delta\hat{\beta} = \left(2\Gamma + \frac{\tau^2}{4}\Gamma_2\right)^{-1} [(M - 2m)R_{X^*\varepsilon^*}(\tau) + R_{X^*\varepsilon^*}(-\tau)].$$

Звідси бачимо, що зсув $\Delta\hat{\beta}$ зменшується, якщо виконується нерівність

$$\frac{M - 2m}{M - m} \|(2\Gamma + \tau^2/4\Gamma_2)^{-1}\| < \|(2\Gamma - \tau\Gamma_2)^{-1}\|. \quad (3.34)$$

або за того ж зміщення $\Delta\hat{\beta}$ оцінки $\hat{\beta}$ граничне $\tau_{\text{Гр}}$ зросло.

3.3.3.1. Оцінка дисперсії оцінки $\hat{\beta}$

Оцінимо дисперсію оцінки $\Delta\hat{\beta}$, що задана формулою (3.33):

$$\text{cov} [\hat{\beta}] = M\{(\hat{\beta} - M[\hat{\beta}])(\hat{\beta} - M[\hat{\beta}])^T\}.$$

Подано $\hat{\beta}$ із рівняння (3.33) у такій формі:

$$\hat{\beta} = [X_0^T(X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau) + \xi(X^*, N, \tau)]^{-1} \cdot$$

$$\cdot [(X_0^T + N_0^T)(Y_\tau^* + \varepsilon_\tau + Y_{-\tau}^* + \varepsilon_{-\tau}) + (X_\tau^* + N_\tau + X_{-\tau}^* + N_{-\tau})^T(Y_0^* + \varepsilon_0)].$$

За великих M , нехтуючи випадковою складовою і випадковими компонентами

$$[N_0^T(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})(N + N_{-\tau})\varepsilon_0]$$

другого порядку малості, отримаємо:

$$\text{cov} [\hat{\beta}] =$$

$$= C_5' [M\{(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^T\} + 2M\{(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})\varepsilon_0^T\} + 2M\{\varepsilon_0(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})\} + M\{\varepsilon_0\varepsilon_0^T\}] +$$

$$+ C_6 M\{N_0(N_\tau + N_{-\tau})^T\} + M\{N_0N_0^T\}C_6^T = C_5Q_3C_5^T + C_6F_3C_6^T, \quad (3.35)$$

де $C'_1 \approx C''_1 \approx C'''_1 = C_5$, $C'_2 \approx C''_2 \approx C_6$.

$$\begin{aligned} C'_1 &= [X_0^{*T}(X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} X_0^{*T}; \\ C''_1 &= [X_0^{*T}(X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} X_{-\tau}^{*T}; \\ C'''_1 &= [X_0^{*T}(X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} X_\tau^{*T}; \\ C'_2 &= [X_0^{*T}(X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} Y_0^*; \\ C''_2 &= [X_0^{*T}(X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} Y_{-\tau}^*; \\ C'''_2 &= [X_0^{*T}(X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)]^{-1} Y_\tau^*. \end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення (3.34), для $|\tau| > 0$ можна сподіватися, що

$$\|C_3\| > \|C_5\| > \|C_1\|, \quad \|C_4\| > \|C_6\| > \|C_2\|,$$

тоді як $\|Q_3\| = \|Q_2\|$, $\|F_3\| = \|F_2\|$.

Унаслідок того, що в (3.35) має місце співвідношення діагональних і нільпотентних матриць, при рівних τ зсув і коваріація оцінок $\hat{\beta}$ при $\pm\tau$ буде менше, ніж для $-\tau$. Тобто симетричний зсув краще наближає критерії $(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})\varepsilon_0^T$ до ідеального $\varepsilon_0^{*T}\varepsilon_0^*$. Таким чином, кожна m -та складова інтегро-кореляційного критерію (3.20) у межах зсуву $\pm\Delta t = \pm\tau$, меншого за модулем $\tau_{\text{гр}}$ (3.32), при її мінімізації дає оцінку $\hat{\beta}$ (3.33), близьку до істинної β , якщо зсув τ більший за час кореляції перешкод і менший за граничний $\tau_{\text{гр}}$.

3.3.4. Рекурентна форма обчислення

Розглянемо рекурентну форму обчислення за критеріями (3.21) і (3.28) для M вимірів із кроком Δt , тобто, $t_k = k\Delta t$, $k = \overline{1, M}$:

$$J = \sum_{k=1}^M \left[y(k) - \sum_{i=0}^n \hat{\beta}_{i2} x_i(k) \right] \left[y(k+m) - \sum_{i=0}^M \hat{\beta}_{i2} x_i(k+m) \right].$$

Із умови (3.22) отримаємо систему:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M [y(k)x_j(k+m) + y(k+m)x_j(k)] = \\ & = \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i \sum_{k=1}^M x_i(k)x_j(k+m) + x_j(k+m)x_i(k), \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

або у векторній формі:

$$\hat{\beta} = X^T Y_m + X_m^T Y_0.$$

Позначимо

$$P = [X_0^T X_m + X_m^T X_0]^{-1}. \quad (3.36)$$

Тоді

$$\hat{\beta} = p[X^T Y_m + X_m^T Y_0]. \quad (3.37)$$

Подамо рівняння (3.36) у блочному вигляді для $(k+1)$ -го виміру:

$$\begin{aligned} P_{k+1} \{ [X_{0,(k-1)}^T X_{m,(k-1)} + X_{m,(k-1)}^T X_{0,(k-1)}] + [X_{0k} X_{m,k}^T + X_{m,k} X_{0k}^T] \}^{-1} \\ + [X_{0k}^T X_{mk} + X_{mk}^T X_{0k}]^{-1} = P_k^{-1} + [X_{0k} X_{m,k}^T + X_{m,k} X_{0k}^T]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

де

$$\begin{aligned} X_{0,k}^T &= [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]; \\ X_{m,k}^T &= [x_1(k+m), x_2(k+m), \dots, x_n(k+m)]; \\ P_{k+1}^{-1} - P_k^{-1} &= X_{0k} X_{m,k}^T + X_{m,k} X_{0k}^T. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Тоді для k -го виміру отримуємо:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(k+1) &= P_{k+1} (X_{0,(k-1)}^T Y_{m,k} + X_{m,k}^T Y_{0,k}) = P_{k+1}^{-1} [X_{0,k}^T, X_{0,k}] \begin{bmatrix} Y_{m,(k-1)} \\ y(k+m) \end{bmatrix} + \\ &+ [X_{n,(k-1)}^T, X_{m,k}] \begin{bmatrix} Y_{0,(k-1)} \\ y(k) \end{bmatrix} + \hat{\beta}(k) + P_{k+1} [X_{0,k} y(k+m) + X_{m,k} y(k) + (P_k^{-1} - P_{k+1}^{-1}) \hat{\beta}(k)] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Із формули (3.40), враховуючи (3.39), отримаємо:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(k+1) &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} [X_{0,k} y(k+m) + X_{m,k} y(k) - (X_{0,k} X_{m,k}^T + X_{m,k} X_{0,k}^T)] = \\ &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} [X_{0,k} \varepsilon(k+m) + X_{m,k} \varepsilon(k)], \end{aligned}$$

де P_{k+1} визначено згідно із рівнянням (3.38), $\varepsilon(e) = y(e) - X_e^T \beta(e)$, $e = k, k+m$. Для критерію (3.28) із умови мінімуму отримуємо систему:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M [(y(k+m) + y(k-m))x_j(k) + y(k)](x_j(k+m) + x_j(k-m)) = \\ = \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i [(x_i(k+m) + x_i(k-m))x_j(k) + x_i(k)(x_j(k+m) + x_j(k-m))], \end{aligned}$$

або у векторній формі:

$$[X_0^T Z + Z^T X_0] \hat{\beta} = X_0^T (Y_m + Y_{-m}) + Z^T Y_0,$$

де $Z = X_m + X_{-m}$. Позначимо:

$$[X_0^T Z + Z^T X_0]^{-1} = P.$$

Тоді

$$\hat{\beta} = P[X_0^T (Y_m + Y_{-m}) + Z^T Y_0].$$

3.3.5. Вагова функція інтегрованого МНК

В умовах невизначеності характеристик збурень N_x і N_y вибір вагової функції $\eta(m)$ функціоналу (3.16) слід виконувати за зовнішнім (головним) показником I у структурі БАСІ. Задано $\eta(m)$ у класі симетричних відносно $m = 0$ фінітних функцій (таких, що $\eta(0) = \eta(\pm m) = 0$), наприклад:

$$\eta(m) = \eta(m, \gamma, \theta) = (1 + |m|)^\theta (1 - \cos |\pi m / m_{kr}|)^\gamma,$$

де $\theta \in (\pm\infty)$, $\gamma \in (0, \infty)$, m_{kr} визначається за умови (3.32), параметри θ і γ оптимізуються (у системах класу БАСІ) за головним показником I . Параметр Γ впливає на ширину імпульсу $\eta(m)$, а θ – на його асиметрію відносно максимуму (рис. 3.1).

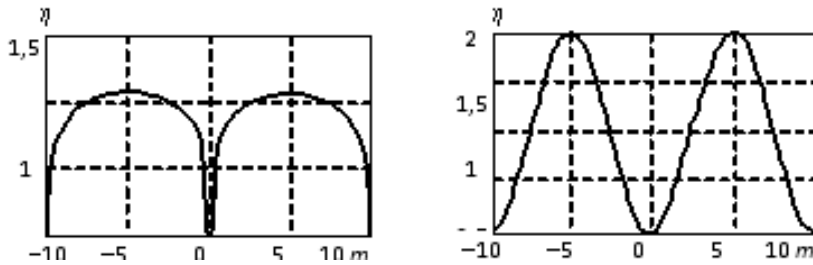


Рис. 3.1. Залежність $\eta(m, \theta, \gamma)$. а – $\theta = 0$, $\gamma = 0, 1$; б – $\theta = 0$, $\gamma = 1$.

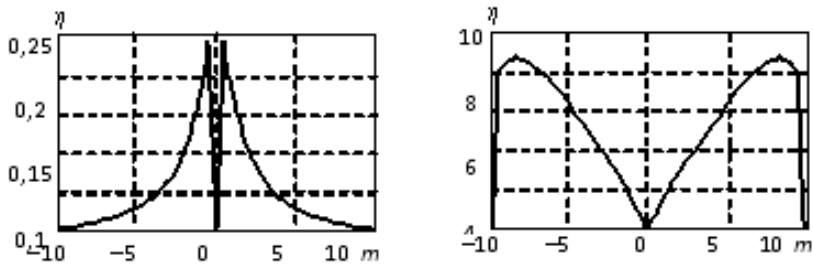


Рис. 3.2. Залежність $\eta(m, \theta, \gamma)$. с – $\theta = 2$, $\gamma = 0, 1$; д – $\theta = 2$, $\gamma = 1$.

Якщо $\gamma \rightarrow 0$, $\eta(m)$ прямує до прямокутного імпульсу; якщо $\gamma \rightarrow \infty$, $\eta(m)$ – до δ -функції Дірака, тоді маємо оцінку (3.38); якщо $\theta \rightarrow 0$, імпульси $\eta(m)$ симетричні відносно їх максимумів; якщо $\theta \rightarrow \infty$, імпульс $\eta(m)$ наближається до $m = 0$, а метод до МНК; якщо $\theta \rightarrow -\infty$, маємо оцінку (3.33) для $m = m_{kr}$. Змінюючи θ і γ , за умови екстремуму I можна забезпечити оптимальність оцінки (3.19) інтегрованого МНК, тобто узгодженості критерію J (3.16) ідентифікації із головним критерієм I в структурі БАСІ.

3.3.6. Тестування ІМНК

Для тестування ІМНК [119] згенеруємо множину вхідних та вихідних значень моделі $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$ для 1000 вимірів, які частково представлені

в табл. 3.1 та на рис. 3.3, де $\beta_0 = 0$; $\beta_1 = \beta_2 = 1$; $t = k\eta t$; $k = \overline{1, N}$; $N = 100$; $\Delta t = T/1000$; $x_1(t) = \sin \omega t$; $x_2(t) = \sin(\omega t + \varphi)$; $\omega = 2\pi/T$; $\varphi = 30^\circ C$.

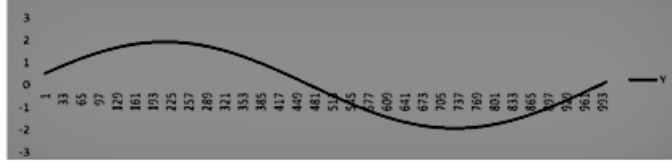


Рис. 3.3. Графік функції $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$

Табл. 3.1. Вхідні та вихідні значення істинних змінних моделі $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$

№	x_1	x_2	y	№	x_1	x_2	y
1	0,00613	0,5053	0,51143	991	-0,24907	0,26854	0,019467
2	0,012223	0,51055	0,52277	992	-0,24317	0,274403	0,031236
3	0,018314	0,51577	0,53409	993	-0,23725	0,280257	0,043003
4	0,04405	0,520987	0,54539	994	-0,23133	0,2861	0,05477
5	0,030495	0,526177	0,55667	995	-0,2254	0,29193	0,06653
6	0,036584	0,53135	0,56793	996	-0,21946	0,29775	0,07829
7	0,04267	0,5365	0,57917	997	-0,213512	0,303564	0,09005
8	0,04876	0,54163	0,59039	998	-0,207556	0,30936	0,101807
9	0,05484	0,54674	0,60158	999	-0,20159	0,31515	0,11356
10	0,06092	0,55183	0,61276	1000	-0,19562	0,320927	0,125305

Для дослідження ІМНК та підтвердження його ефективності використаємо порівняння з МНК. Відомо, що у реальних процесах на виміри вхідних та вихідних змінних діють шуми різного роду. Як експеримент розглянемо вибірки, де шум діє тільки на вхідні значення, тільки на вихідні значення та вхідні і вихідні значення одночасно.

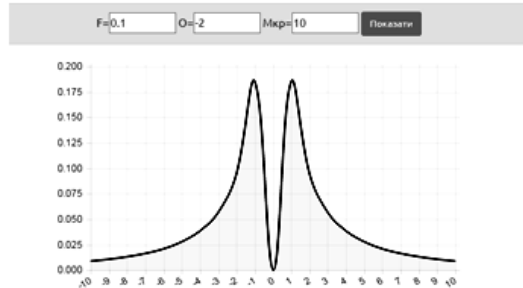
1. Шум діє на вхідні змінні x_1 та x_2 ЕТО.

Накладемо на вхідні значення x_1 та x_2 білий шум, прикладом якого є випадкові числа із діапазону $[-1; 1]$ із рівномірним розподілом (табл. 3.2).

Для порівняння оцінок параметрів застосуємо для вибірки (табл. 3.2) методи ІМНК та МНК. Для застосування методу ІМНК використовується програмне забезпечення, розроблене згідно алгоритму ІМНК. Коефіцієнти вагової функції було обрано із урахуванням типу шуму, тобто білого: Графік вагової функції представлено на рис. 3.4.

У результаті проведених обчислень даних табл. 3.2 за методом ІМНК отримано такі оцінки параметрів:

$$\hat{\beta}_0 = 0, \quad \hat{\beta}_1 = 0,98, \quad \hat{\beta}_2 = 1,05.$$

Рис. 3.4. Графік вагової функції $\eta(l, -2, 0, 1)$

Отже, згідно обчислень за допомогою ІМНК отримано модель:

$$\hat{y}(t) = 0,98x_1(t) + 1,05x_2(t),$$

де оцінки 0,98 і 1,05 близькі до істинних одиничних. x_1, x_2 Для застосування методу МНК використаємо додаток Analysis Tools Park у середовищі MS Excel. У результаті застосування методу МНК у середовищі MS Excel, отримано такі оцінки моделі:

$$\hat{\beta}_0 = 0,0228, \quad \hat{\beta}_1 = 0,7641, \quad \hat{\beta}_2 = 0,751.$$

Згідно розрахунків методом МНК отримано модель:

$$\hat{y}(t) = 0,02 + 0,76x_1(t) + 0,75x_2(t),$$

де оцінки 0,76 і 0,75 суттєво занижені (3.7) відносно істинних одиничних.

2. Шум діє на виміри вхідних x_1, x_2 та вихідних y змінних ЕТО.

Розглянемо випадок, за якого на вхідні значення x_1, x_2 та вихідне значення y моделі ЕТО діє білий шум, прикладом якого є випадкові числа із діапазону $[-1; 1]$ із рівномірним розподілом (табл. 3.3).

Застосуємо для вибірки (табл. 3.3) методи ІМНК та МНК для порівняння оцінок параметрів. Коефіцієнти вагової функції: $\theta = -1, \gamma = 0, 1$. Графік вагової функції представлено на рис. 3.5.

У результаті проведених обчислень отримано такі оцінки параметрів за методом ІМНК:

$$\hat{\beta}_0 = 0, \quad \hat{\beta}_1 = 0,99, \quad \hat{\beta}_2 = 1,007.$$

Отже, згідно обчислених оцінок параметрів за допомогою ІМНК отримано модель

$$\hat{y}(t) = 0,99x_1(t) + 10,007x_2(t)$$

із параметрами 0,99 і 1,007, близькими до одиничних.

Табл. 3.2. Значення змінних моделі $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$ з білим адитивним шумом, що діє на x_1 та x_2

N	e_{x_1}	e_{x_2}	$x_1 + e_{x_1}$	$x_2 + e_{x_2}$	y
1	-0,41719	0,9494	-0,4111	1,4547	0,51143
2	0,87579	-0,4579	0,88802	0,05265	0,52277
3	-0,71408	-0,2781	-0,6958	0,28768	0,53409
4	0,81505	0,24285	0,8395	0,76384	0,5454
5	-0,30516	-0,9774	-0,2747	-0,4512	0,55667
6	0,3628	0,16344	0,3994	0,6918	0,5679
7	-0,13308	-0,24138	-0,0904	0,2951	0,5792
8	0,9039	0,5283	0,9527	1,06998	0,59039
...	...	...	...	...	...
993	-0,19056	-0,75164	-0,4519	-0,4655	0,0548
994	-0,98983	0,29558	-1,2152	0,5875	0,06653
995	-0,00093	0,29925	-0,2204	0,597	0,07829
996	0,299	-0,5705	0,08546	-0,267	0,090
997	0,22116	0,0987	0,0136	0,4081	0,10181
998	-0,6638	-0,24225	-0,8653	0,0729	0,11356
999	0,80118	,4474	0,60556	0,7683	0,1253
1000	-0,10431	0,1552	-0,294	0,4819	0,13705

Для застосування методу МНК використано Analysis Tools Park у середовищі MS Excel. У результаті застосування методу МНК у середовищі MS Excel, отримано:

$$\hat{\beta}_0 = 0,0263; \quad \hat{\beta}_1 = 0,7566; \quad \hat{\beta}_2 = 0,741.$$

Згідно розрахунків методом МНК отримано модель

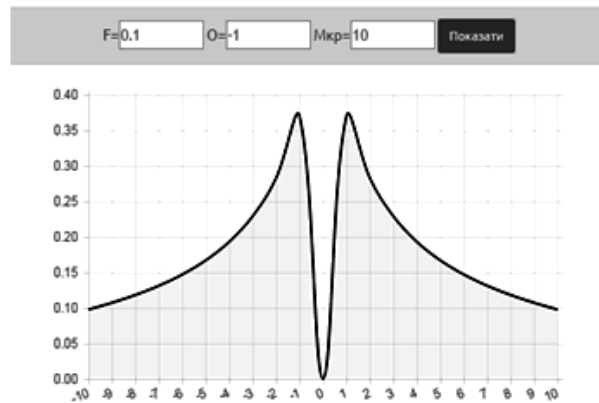
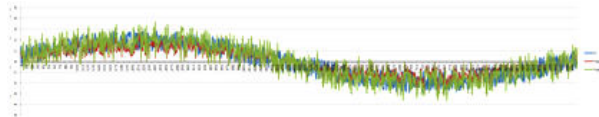
$$\hat{y}(t) = -0,02 + 0,75x_1(tr) + 0,674x_2(t).$$

із заниженими значеннями коефіцієнтів: $0,75 < 1$; $0,74 < 1$ і сталою складовою $-0,02$. На рис. 3.6 зображено графік функцій $y(t)$.

3. Шум діє тільки на вихідне значення y .

Розглянемо випадок, коли тільки на вихідне значення у моделі діє білий шум. Накладемо на y білий шум і розглянемо коротку вибірку із 100 вимірів (табл. 3.4). Така ситуація відповідає вимогам до оптимального використання МНК.

Застосуємо для вибірки (табл. 3.4) методи ІМНК та МНК для порівняння оцінок параметрів. Коефіцієнти вагової функції: $\theta = -1$, $\gamma = 0,1$. Графік вагової функції представлено на рис. 3.5. У результаті проведених обчислень отримано

Рис. 3.5. Графік вагової функції $\eta(l, -1, 0, 1)$ Рис. 3.6. Графік функцій y при дії на виміри вхідних та вихідних значень білого шуму

оцінки параметрів за методом ІМНК:

$$\hat{\beta}_0 = 0; \quad \hat{\beta}_1 = 0,97; \quad \hat{\beta}_2 = 0,98.$$

Отже, отримано модель:

$$\hat{y}(t) = 0,97x_1(t) + 0,98x_2(t).$$

Для застосування методу МНК використано додаток Analysis Tools Park у середовищі MS Excel. У результаті застосування методу МНК у середовищі MS Excel, отримано такі оцінки:

$$\hat{\beta}_0 = 0,2173; \quad \hat{\beta}_1 = 1,2398; \quad \hat{\beta}_2 = 0,5625.$$

і, відповідно, модель:

$$\hat{y}(t) = -0,21 + 1,24x_1(t) + 0,56x_2(t).$$

Випадковий розкид коефіцієнтів за МНК $\Delta\beta_0 = 0,217$ відносно 0; $\Delta\beta_1 = 0,2239$ відносно 1; $\Delta\beta_2 = -0,563$ відносно 1 суттєво більший за відповідного розкиду в ІМНК:

$$\Delta\beta_0 = 0; \quad \Delta\beta_1 = -0,03; \quad \Delta\beta_2 = -0,02.$$

Табл. 3.3. Значення шумів і відповідних змінних із шумами

№	e_{x_1}	e_{x_2}	e_y	$x_1 + e_{x_1}$	$x_2 + e_{x_2}$	$y + e_y$
1	0,03523	0,43 416	0,8843	0,04136	0,9395	1,3957
2	0,91505	-0,3273	-0,2608	0,92727	0,18323	0,26194
3	-0,1975	0,10229	0,9520	-0,1792	0,6181	-0,4179
4	0,26788	0,39887	0,88018	0,29229	0,918	1,45557
5	0,62405	0,65983	0,01143	9,65454	1,18601	0,5681
6	-0,75662	-0,62205	-0,86077	-0,72	-0,0907	0,2928
7	-0,73792	-0,12008	-0,09057	-0,6952	0,41641	0,4882
8	0,1537	0,2182	-0,52428	0,20246	0,75983	0,06611
9	0,36053	-0,90514	-0,50758	0,40537	-0,3584	0,094
10	-0,98164	-0,17513	-0,77603	-0,9207	0,3767	-0,1633
...	...	...	...	...	...	...
991	0,79511	-0,75669	-0,05716	0,55194	-0,4823	-0,0269
992	0,48254	0,97649	-0,82096	0,24529	1,25674	-0,775
993	-0,7957	-0,30183	0,850	-1,-27	0,58793	0,9048
994	0,96817	-0,38296	0,68086	0,74277	-0,091	0,74765
995	0,494 88	0,02347	0,53962	0,27542	0,32123	0,61792
996	0,48263	0,79136	-0,052786	0,26912	1,09493	-0,4378
997	0,1311	0,37606	-0,52786	0,26912	1,09493	-0,4378
998	0,2233	-0,87892	0,10663	0,02171	-0,5638	0,22019
999	-0,45633	-0,31366	-0,13423	-0,6519	0,00727	-0,0089
1000	0,71854	0,44905	-0,41454	0,5289	0,77575	-0,2775

Для статистично об'єктивнішого оцінювання зміщення і розкиду оцінок $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ відносно істинних β_1 , β_2 згенеруємо 10 статистично незалежних реалізацій шумів. Результати ідентифікації коефіцієнтів β_1 , β_2 за МНК та запропонованим методом наведено в табл. 3.5. Оцінки β_1 , β_2 за МНК (табл. 3.5) занижено майже на 50%. Проте має місце регуляризація (3.9): розкид оцінок складає 0,02 і 0,05. В запропонованому методі (табл. 3.6) оцінки майже не зміщені: 1,005 і 0,943, але розкид більший, ніж у регуляризованому МНК (0, 15; 0,16). Зменшення розкиду можливе за рахунок компромісу між зміщенням і розкидом шляхом зміни параметрів θ і γ вагової функції $\eta(\theta)$. У випадку шуму тільки у вихідній змінній (табл. 3.2) (ідеальна ситуація для МНК) оцінки незміщені, але розкид оцінок по МНК (0,07 і 0,09) більший за розкид (0,05 і 0,08) оцінок запропонованим методом без оптимізації параметрів і функції. У випадку, якщо є можливість оптимізації (наприклад, в БАСІ) [38], виграш запропонованого методу у сенсі незміщеності і ефективності оцінок відносно МНК буде суттєво більшим.

Результати оцінювання параметрів у ситуації зашумленості тільки вихідних

Табл. 3.4. Значення функції $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$ із білим шумом на y

N	e_y	x_1	x_2	$y + e_y$
1	0,88429	0,04136	0,93946	1,3957
2	-0,26083	0,92727	0,18323	0,26194
3	-0,952	-0,1792	0,61607	-0,4179
4	0,88018	0,29229	0,91986	1,42557
5	0,01143	0,65454	1,18601	0,5681
6	-0,86077	-0,72	-0,0907	-0,2928
7	-0,09057	-0,6952	0,4184	0,4886
8	-0,52428	0,20248	0,75983	0,06641
9	-0,50758	0,40537	-0,3584	0,094

змінних запропонованим методом і МНК представлено в табл. 3.6.

Отже, як показали теоретичні і експериментальні розрахунки, запропонований метод дозволяє у реальній ситуації зашумлених вимірів вхідних і вихідних сигналів первинних перетворювачів отримати незміщені оцінки параметрів, близькі до оцінок по МНК для точних вимірів, а також розкид оцінок, менший за розкид для МНК. Це дає можливість ефективно використовувати його у системах адаптивного керування реальними об'єктами, наприклад, у загальних системах стабілізації технологічних параметрів процесу виробництва кабелів.

3.4. Метод одноразового ділення (МОД)

3.4.1. Сутність методу

Даний метод можна розглядати як метод допоміжних змінних, в якому допоміжна змінна

$$U = \begin{bmatrix} u_1(1) & u_2(1) & \dots & u_n(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1(M) & u_2(M) & \dots & u_n(M) \end{bmatrix}$$

має вигляд:

$$u_{ij} = \begin{cases} x_i^{-1}(j), & |x_i^{-1}(j)| \geq \Delta_i \\ 0, & |x_i^{-1}(j)| < \Delta_i, \quad j = \overline{1, M}, \Delta_i > 0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Система функцій $\{x_i^{-1}(j)\}$ лінійно незалежна, оскільки за умовою система $\{x_i(t)\}$ лінійно незалежна. Згідно з методом допоміжних змінних, існує оцінка, яка може бути знайдена із рівняння

$$U^T Y = U^T X \hat{\beta},$$

Табл. 3.5. Результати оцінювання у випадку зашумленості $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{y}(t)$ білим шумом

	МНК		ІМНК	
N	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_1$
1	0,4790	0,4981	1,0282	0,9094
2	0,4607	0,4493	1,0179	0,8844
3	0,4843	0,5663	1,0916	0,8435
4	0,5024	0,5401	1,0020	0,9290
5	0,5246	0,4659	1,0313	0,9798
6	0,4997	0,5058	1,2904	0,7437
7	0,4849	0,5255	0,7093	1,2307
8	0,4919	0,4431	0,8283	1,1910
9	0,46476	0,4856	1,0825	0,7197
10	0,4642	0,5015	0,9653	1,0112
β	0,4860	0,5082	1,0047	0,943
$\sigma_{\beta_i}^2$	0,00038	0,0026	0,0241	0,0283
σ_{β_i}	0,0197	0,0541	0,1551	0,1682

тобто

$$\hat{\beta} = [U^T X]^{-1} Y, \quad (3.42)$$

де

$$U^T X = \begin{bmatrix} M & \sum_{k=1}^M x_2(k)x_1^{-1}(k) & \dots & \sum_{k=1}^M x_n(k)x_1^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^M x_1(k)x_2^{-1}(k) & M & \dots & \sum_{k=1}^M x_n(k)x_2^{-1}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^M x_1(k)x_n^{-1}(k) & \sum_{k=1}^M x_2(k)x_n^{-1}(k) & \dots & M \end{bmatrix};$$

$$U^T Y = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M y(k)x_1^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^M y(k)x_2^{-1}(k) \\ \dots \\ \sum_{k=1}^M y(k)x_n^{-1}(k) \end{bmatrix},$$

множина M відліків k береться за умови: $|x_i^{-1}(j)| \geq \Delta_i$, де Δ_i – параметри методу, $i = \overline{1, n}$.

Табл. 3.6. Результати оцінювання у випадку зашумленості тільки $y(t)$

	МНК		ІМНК	
	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_1$
1	0,9781	0,9212	0,9497	1,1019
2	1,0541	0,9371	1,0234	0,8554
3	0,9329	1,0817	0,9825	1,0818
4	1,1181	0,8819	1,0111	0,9132
5	0,9847	1,0327	1,1907	0,9807
6	1,0009	1,0192	1,1018	0,9823
7	1,1549	0,8258	1,0216	0,9879
8	0,9407	1,0765	1,0216	0,9879
9	0,9578	1,0523	0,9639	1,0881
10	1,0007	0,9432	1,0961	0,9946
β	1,0123	0,9800	1,0280	1,0089
$\sigma_{\beta_i}^2$	0,0055	0,0083	0,0027	0,0073
σ_{β_i}	0,0744	0,0911	0,0522	0,0854

3.4.2. Зміщення оцінок

Якщо перешкоди N_i не корелюють між собою, а також із X, Y і малі, вважаючи наближено

$$x_u^{-1}(j) \equiv x_u^{*-1}(j) - N_i(j),$$

неважко отримати, що оцінка $\hat{\beta}$ для точної структури моделі, коли $\varepsilon^* = 0$, буде незміщеною, оскільки

$$M[U^T X] = U^{*T} X^*; \quad M[U^T Y] = U^{*T} Y^*.$$

Зміщення $\delta\hat{\beta}$ може мати місце для наближеної моделі, якщо $\varepsilon^* = 0$:

$$\delta\hat{\beta} = [U^{*T} X^*]^{-1} U^{*T} \varepsilon, \quad (3.43)$$

оскільки із умови $X^{*T} \varepsilon^* = 0$ у загальному випадку не впливає умова $U^{*T} \varepsilon^* = 0$, хоча U^* та X^* зв'язані співвідношенням (3.41). Зміщення (3.43) менше зміщення оцінок МНК через перешкоди N_i в X , якщо вплив $\varepsilon^* \neq 0$ із формули (3.43) менше впливу перешкод N на зміщення оцінок МНК.

Коваріація оцінок $\hat{\beta}$:

$$\text{cov} [\hat{\beta}] = M\{[\hat{\beta} - M[\hat{\beta}]] [\hat{\beta} - M[\hat{\beta}]]^T\}.$$

Вважаючи некорельованість випадкових похибок у $(U^T X)^{-1}$ і $(U^T Y)$, беручи перші члени, розкладаємо (3.42) у ряд Тейлора

$$\hat{\beta} \approx M[\hat{\beta}] + [\delta(U^T X)^{-1}] [U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1} [\delta U^T Y^* + U^{*T} \varepsilon],$$

отримаємо вираз для коваріації оцінок $\hat{\beta}$:

$$\begin{aligned} \text{cov } [\hat{\beta}] &= M\{[\delta(U^T X)^{-1}][U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1}[\delta U^T Y^* + U^{*T} \tilde{\varepsilon}] \times \\ &\quad \times [[\delta(U^T X)^{-1}][U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1}[\delta U^T Y^* + U^{*T} \tilde{\varepsilon}]]^T = \\ &= M\{[\delta(U^T X)^{-1}][U^{*T} Y^*][U^{*T} Y^*]^T [\delta(U^T X)^{-1}]^T\} + (U^{*T} X^*)^{-1} Y^{*T} \\ &\quad \times M[\delta U \delta U^T] [(U^{*T} X^*)^T]^{-1} Y^* + (U^{*T} X^*)^{-1} U^{*T} M[\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}^T] [(U^{*T} X^*)^T]^{-1} U^*. \end{aligned} \quad (3.44)$$

де перша і друга компоненти залежать від порогів Δ_i у (3.41) і від шумів N в X , а третя – від шумів у Y . При зменшенні порогу Δ до нуля перший компонент (як і в МНК, яка залежить від N) прямує до нуля, оскільки при $\Delta \rightarrow 0$ можуть існувати точки k , в яких $u_i(k) \rightarrow \infty$, а отже, $\|(U^T X)^{-1}\| \rightarrow 0$. При $\Delta \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$, тобто перший компонент при зменшенні Δ спадає. Другий компонент (3.44) пропорційний коваріаційній матриці $[\delta U \delta U^T]$ і за $\Delta \rightarrow 0$ прямує до нескінченності, а за $\Delta \rightarrow \infty$ – до нуля. Третій компонент від параметра Δ не залежить. Отже, для конкретних умов існує оптимальний вектор порогів Δ_i^* , $i = \overline{1, n}$, за якого норма коваріації мінімальна.

Якщо перешкоди N_i , $\tilde{\varepsilon}$ некорельовані, а $\varepsilon^* \rightarrow 0$, оцінка (3.42) буде незміщеною. Ефективність оцінок оптимізується в БАСІ (рис. 3.1) за основним показником I_{qk} шляхом підбору вектора Δ .

3.5. Метод прогнозу кореляцій

Постановка задачі така ж, як і для попереднього методу: сигнали X^*, Y^* гладкі, перешкоди N, ε взаємо некорельовані, нормовані кореляційні функції перешкод згасають швидше, ніж відповідні функції сигналів X^*, Y^* ; за зашумленими вибірками X, Y треба отримати оцінку $\hat{\beta}$, близьку до оцінки МНК для точних даних. Згідно з МНК,

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = A^{-1} B, \quad (3.45)$$

де $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, B – вектор-стовпчик скалярних добутків $(y(k), x_i(k))$, $k = \overline{1, M}$. Коефіцієнти a_{ij} можна подати як відповідні кореляційні функції при нульовому зсуві змінних:

$$a_{ij} = M\{R_{x_i x_j}(0)\}; \quad b_i = M\{R_{y x_i}(0)\}.$$

Відповідно для зсуву m маємо

$$a_{ij}^{(m)} = M\{R_{x_i x_j}(m)\}; \quad b_i^{(m)} = M\{R_{y x_i}(m)\}.$$

Нехай

$$R_{x_i x_j}(\tau) = R_{x_i x_j}^*(\tau) + \delta R_{x_i x_j}(\tau), \quad 0 < \tau < r_+,$$

де $\delta R_{x_i x_j}$ – похибка, що переважно пов'язана із шумами N_i у вимірах x_i . Покладемо в інтервалі $[m, rm]$ лінійну модель автокореляції

$$\hat{R}_{x_i x_j}(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1(\tau - \tau_{\text{ср}}). \quad (3.46)$$

Тоді для оцінювання коефіцієнтів a_{ij} у формулі (3.45) візьмемо прогнозні у точку $k = 0$ оцінки рівняння (3.46) кореляційних функцій, побудованих на інтервалі $[m, rm]$, кореляційна функція перешкод майже відсутня:

$$\hat{\alpha}_{ii} = M\{\hat{R}_{x_i x_j}(0)\} = \alpha_{0i}, \quad a_{ij} = M\{R_{x_i x_j}(0)\}. \quad (3.47)$$

У рівнянні (3.46) моделі $\hat{R}_{x_i x_j}$ параметри α_0 і α_1 визначаються за МНК:

$$\begin{aligned} \tau_{cp} &= \frac{1}{r+1} \sum_{k=m}^{r+m} \tau_k; \quad \alpha_0 = \frac{1}{r+1} \sum_{k=m}^{r+m} R_{x_i x_j}(\tau_k); \\ \alpha_{1i} &= \frac{\sum_{k=m}^{r+m} (\tau_k - \tau_{cp}) R_{x_i x_j}(\tau_k)}{\sum_{k=m}^{r+m} (\tau_k - \tau_{cp})^2}. \end{aligned}$$

Тоді вирази (3.45) і (3.47) визначають $\hat{\beta}_{\text{МПК}}$ -оцінку за методом прогнозу кореляцій (МПК). Позначимо

$$\alpha_{ii} - \hat{\alpha}_{ii} = \delta a_{ii}, \quad \delta A = [\delta \alpha_{ii}]_{i=1}^n$$

– вектор-стовпчик;

$$\mathbf{E} \delta \alpha = \delta A_{\text{МПК}}, \quad A = A^* + \delta A_{\text{МПК}},$$

. де через A^* позначено матрицю A для МНК за відсутності шумів, $\mathbf{E}$ – діагональна одинична матриця. Використовуючи розкладання у ряд Тейлора, загалом отримаємо

$$\delta \beta = (A^* + \delta A)^{-1} B^* - A^{*-1} B^* \approx -A^* \delta A A^{*-1} B^* = -A^{*-1} \delta A \beta^*.$$

Розглянемо два випадки:

1) на рис. 3.7, а $\hat{R}_{x_i^* x_j^*}(\tau)$, $\tau \in [0, r+m]$ – опукла функція. Тоді $\alpha_{ii} > \hat{\alpha}_{ii}$, $\delta A_{\text{МНК}} > \delta A_{\text{МРК}}$. Отже, $\|\delta \beta_{\text{МРК}}\| < \|\delta \beta_{\text{МНК}}\|$;

2) на рис. 3.7, б $R_{x_i^* x_j^*}(\tau)$ – увігнута функція. Підбором інтервалу (m, r) можна досягти аналогічного результату й у цьому випадку. Із рис. 3.3 видно, що інтервал (m_2, r_2) задовольняє ці вимоги на відміну від інтервалу (m_1, r_1) . Отже, й у цьому випадку можна отримати менший зсув. Для опису $R_{x^* x^*}(\tau)$ можуть застосовуватися ортогональні системи функцій та інші види моделей. У системах типу БАСІ структура і параметри $R(\tau)$ можуть вибиратися за головним показником I_{qk} . Метод передбачає згладжування і прогнозування у точці кореляційних функцій від сигналів $x_i(t)$, $x_j(t)$. Аналізуючи дисперсії цих оцінок кореляцій, легко переконатися, що $\sigma_{\delta R}^2$ тим більше, чим менша довжина вибірки T .

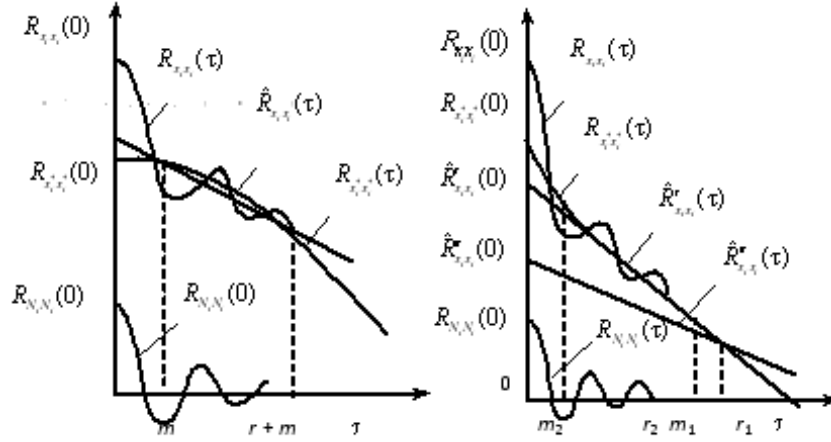


Рис. 3.7. Графік лінійної екстраполяції опуклої (а) і увігнутої (б) кореляційних функцій

3.5.1. Множина $\{Opt, \alpha\}$ модифікованих градієнтних алгоритмів оцінювання

В алгоритмах нелінійного оцінювання, за невизначеності статистичних характеристик поверхні $J(\beta)$, практично реалізується лише градієнтна процедура [44]:

$$\hat{\beta}(q+1) = \hat{\beta}(q) - \lambda(q) \frac{\partial I(\hat{\beta}(q))}{\partial \hat{\beta}(q)}. \quad (3.48)$$

Для збіжності алгоритму (3.48) необхідно, щоб $J(\beta)$ був неперервно диференційовний за Фреше по $\hat{\beta}$, тобто:

$$\lim_{\Delta \hat{\beta} \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial I(\hat{\beta} + \Delta \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta} + \Delta \hat{\beta}} - \frac{\partial I(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} \right\| = 0, \quad (3.49)$$

а також задовольнялася умова Ліпшица для градієнту від I :

$$\lim_{\hat{\beta}_1 \rightarrow \hat{\beta}_2} \left\| \frac{\partial I(\hat{\beta}_1)}{\partial \hat{\beta}_1} - \frac{\partial I(\hat{\beta}_2)}{\partial \hat{\beta}_2} \right\| \leq L \|\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2\|, \quad (3.50)$$

де $L > 0$ $\|\cdot\|$ – норма у банаховому просторі [4].

Враховуючи умову (3.49), можна записати:

$$I(\hat{\beta} + \Delta \hat{\beta}) - I(\hat{\beta}) = \frac{\partial I(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}^T} \Delta \hat{\beta} + \varepsilon(\|\Delta \hat{\beta}\|), \quad (3.51)$$

де

$$\lim_{\Delta \hat{\beta} \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\|\Delta \hat{\beta}\|)}{\|\Delta \hat{\beta}\|} = 0, \quad \Delta \hat{\beta} = \hat{\beta}(q) - \beta^*.$$

За виконання умов (3.50) (3.49) існують [82] такі $\lambda(q)$, за яких алгоритм (3.48) збігається до стаціонарної точки, яка для сильно випуклого функціоналу відповідає β^* . Так, для квадратичного сильно випуклого функціоналу

$$I(\hat{\beta}(q)) = I_0 + \Delta\hat{\beta}^T \frac{\partial^2 I}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^T} \Delta\hat{\beta}(q), \quad \Delta\hat{\beta} = \hat{\beta} - \beta^*,$$

узявши похідну по β і підставивши її у (3.48), отримаємо:

$$\Delta\hat{\beta}(q+1) = -\lambda(q) \frac{\partial^2 I}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^T} \Delta\hat{\beta}(q) \quad (3.52)$$

Тоді існують такі не рівні нулю $\lambda(q) = \text{diag} [\lambda_i(q)]$, що система (3.52) буде асимптотично стійкою. Практично градієнт розраховується неточно внаслідок випадкових перешкод. Суттєвим недоліком градієнтного алгоритму є мала швидкість збіжності в ситуаціях “яру”. Для прискорення збіжності пропонується модифікація “метода яру”, яка полягає у застосуванні n однотипних моделей із початковими значеннями параметрів $\hat{\beta}^{(l)}(0)$, ($l = \overline{1, n}$). I -ї моделі, заданими в I -й вершині n -вимірного куба, в межах якого знаходиться значення β^* . Тоді для кожної I -ї моделі можна побудувати показник $J_1^{(l)}$ із доданком, який прискорює збіжність:

$$J_2^{(l)} = \alpha_1 (\Delta\hat{\beta}_H^{(l)})^T \Delta\hat{\beta}_H^{(l)}, \quad (3.53)$$

де α_1 – параметр алгоритму,

$$(\Delta\hat{\beta}_H^{(l)})^T = \left[\frac{\hat{\beta}_1^{(l)} - \bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_1}, \dots, \frac{\hat{\beta}_n^{(l)} - \bar{\beta}_n}{\bar{\beta}_n} \right],$$

$$\bar{\beta}_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \hat{\beta}_i^{(l)} :$$

$$J_2^{(l)} = \alpha_1 (\Delta\hat{\beta}_H^{(l)})^T \Delta\hat{\beta}_H^{(l)}, \quad (3.54)$$

Замість (3.54) в (3.48)). Отримаємо градієнтні алгоритми із прискореною збіжністю у ситуаціях “яру”. При $\alpha_1 = 0$ має місце градієнтне налаштування n моделей. За розкидом стаціонарних точок між моделями можна зробити висновок про розкид оцінки $\hat{\beta}$:

$$\text{cov} [\hat{\beta}] = \left[\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j}^2 \right]_{i,j=1}^n; \quad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^n (\hat{\beta}_i^{(l)} - \bar{\beta}_i)(\hat{\beta}_j^{(l)} - \bar{\beta}_j) \quad (3.55)$$

При $l_1 \rightarrow \infty$ у (3.53) усі n моделей одразу перебудують свої параметри до середньої відносно початкових значень величини, тобто до $\hat{\beta}_0$, відповідного центру гіперкуба початкових значень. Доцільно α_1 задавати зростаючим від нуля. Тоді на перших кроках має місце незалежний рух параметрів кожної моделі

на “дно яру”, а потім затягування по яру оцінок $\hat{\beta}^{(l)}$ до середньої $\bar{\beta}$, яка також змінюється, наближаючись до стаціонарної точки β^* . Число моделей може бути як більшим, так і меншим n . Так, застосування тільки двох моделей дозволяє побудувати алгоритм із бажаним законом зміни показника J у часі t :

$$J = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + \alpha_1(\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)})^T(\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \quad (3.56)$$

Задамося бажаним законом

$$f(t) = \frac{dJ}{dt} < 0, \quad (3.57)$$

де $f(t)$ – бажана функція часу, наприклад, експонента, константа тощо.

Підставимо із (3.56) значення в (3.57). Тоді отримаємо:

$$f(t) = \left(\frac{\partial J_1^{(1)}}{\partial \hat{\beta}^{(1)}} \right)^T \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} + \left(\frac{\partial J_1^{(2)}}{\partial \hat{\beta}^{(2)}} \right)^T \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} + 2\alpha_1(\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)})^T \left(\frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} - \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} \right),$$

або

$$\left[\left(\frac{\partial J_1^{(1)}}{\partial \hat{\beta}^{(1)}} \right) + 2\alpha_1(\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right]^T \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} = f(t) - \left[\left(\frac{\partial J_1^{(2)}}{\partial \hat{\beta}^{(2)}} \right) - 2\alpha_1(\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right]^T \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt}.$$

Позначимо

$$A_1 = \left[\left(\frac{\partial J_1^{(1)}}{\partial \hat{\beta}^{(1)}} \right) + 2\alpha_1(\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right], \quad A_2 = \left[\left(\frac{\partial J_1^{(2)}}{\partial \hat{\beta}^{(2)}} \right) - 2\alpha_1(\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right].$$

Тоді остаточно отримаємо таку модифікацію методу градієнту:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} &= (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 \left(f(t) - A_2^T \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} \right), \\ \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} &= (A_2 A_2^T)^{-1} A_2 \left(f(t) - A_1^T \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

За умови випуклості функціоналу (3.56) алгоритми (3.58), побудовані за умови (3.57), гарантують збіжність не тільки за функціоналом (3.56), але і за параметрами $\hat{\beta}^{(1)}$, $\hat{\beta}^{(2)}$ до β^* для заданого закону зменшення J_1 . В умовах нестационарності сигналів, перешкод та параметрів доцільна додаткова фільтрація, наприклад, інерційним фільтром першого порядку

$$W_f(p) = \frac{1}{\alpha p + 1},$$

де α – стала фільтру. Тоді градієнтний алгоритм (3.48) перетворюється на метод “важкої кульки” [61]

$$\alpha \frac{d^2 \hat{\beta}}{dt^2} + \frac{d\hat{\beta}}{dt} = -\lambda \frac{\partial J(\hat{\beta}, t)}{\partial \hat{\beta}}, \quad (3.59)$$

в якому параметр α “вага кульки” може бути адаптивним: “вага” має бути такою, щоб гладко “скачувалася” по нестационарній стохастичній поверхні функціоналу до мінімуму. Для стаціонарних об’єктів (згідно з методом стохастичної апроксимації) можна вимагати, щоб $\alpha(t)$ необмежено зростала. Суттєво впливає на збіжність алгоритму (3.59) множник λ . З метою доцільного вибору його структури перепишемо (3.59) із урахуванням (3.52):

$$\alpha \frac{d^2 \Delta \hat{\beta}}{dt^2} + \frac{d\Delta \hat{\beta}}{dt} + \lambda \frac{\partial^2 J(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T} \Delta \hat{\beta} = 0, \quad (3.60)$$

де

$$V = \frac{\partial^2 J(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T}$$

– стохастична нестационарна симетрична матриця миттєвих значень.

Достатньою умовою стійкості системи (3.60) є діагональність цієї матриці. Для цього не обов’язково розраховувати матрицю V^{-1} , тим паче, що для не усереднених значень вона не завжди існує.

Нехай $V = A(t)$, тоді $V^{-1} = \frac{A_{ij}(t)}{|A(t)|}$, де $A_{ij}(t)$ – алгебраїчне доповнення ij -го елемента матриці $A(t)$. Для ортогоналізації (3.60) досить задати

$$\lambda = \alpha' [A_{ij}(t)] = \alpha' |A| A^{-1},$$

тоді

$$\alpha \frac{d^2 \Delta \hat{\beta}}{dt^2} + \frac{d\Delta \hat{\beta}}{dt} + \alpha' |A| A^{-1} \Delta \hat{\beta} = 0,$$

де α' – параметр алгоритму.

Такий алгоритм буде адаптивним до “інформативності даних”: якщо фішєрівська матриця A не інформативна (вироджена), $|A(t)|$ близький до нуля і (за $\alpha = \text{const}$) $\Delta \hat{\beta} = 0$, а при появі корисної інформації відбувається незалежна настройка кожного елемента вектора $\hat{\beta}$. На практиці реалізується алгоритм

$$\frac{d\Delta \hat{\beta}}{dt} = -\alpha [\hat{A}_{ij}(t)] \frac{d\hat{J}(t)}{d\hat{\beta}}, \quad (3.61)$$

де $\hat{A}(t)$, $\partial \hat{J}(t) / \partial \hat{\beta}$ – згладжені фільтром W_f значення $A(t)$, $\partial J(t) / \partial \hat{\beta}$. На рис. 3.8 подано функціональну схему алгоритму (3.61) ортогональної настройки $\hat{\beta}_i$ з адаптацією до інформативності сигналів об’єкта.

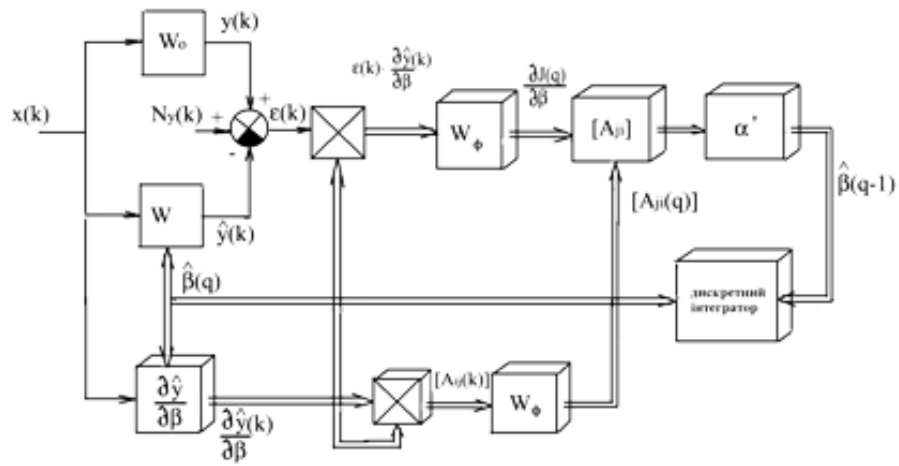


Рис. 3.8. Структурна схема системи ідентифікації за модифікацією (3.61) метода Ньютона–Рафсона

Оцінювання структури і параметрів нелінійних ЕТО

4.1. Метод оцінювання лінійної складової нелінійної динаміки ЕТО

Динаміка збуреного руху реального ЕТО описується нелінійною моделлю. Тому основною похибкою оцінок параметрів лінійної складової моделі є їх зміщення внаслідок наближеності лінійної моделі, яка не враховує нелінійність характеристик ЕТО. Розумним компромісом між лінійною моделлю ЕТО (справедливою для малих відхилень), і нелінійною (справедливою для більших відхилень), буде модель, представлена першими і другими членами розкладання нелінійної моделі у ряд Тейлора відносно базового режиму. Лінійна складова такої моделі визначає умови стійкості системи “у малому”, спостережуваності та керованості [37].

4.1.1. Оцінювання лінійної складової нелінійної моделі двигуна постійного струму

Шляхом розкладання механічного моменту m електродвигуна постійного струму (ДПС) в обмежений другими похідними ряд Тейлора як функції струму якоря $I_{\text{я}}$, струму I_3 збудження магнітного потоку і напруги $U_{\text{я}}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} m(t) \cong m(t_0) &+ \left. \frac{\partial m}{\partial I_{\text{я}}} \right|_{t_0} \Delta I_{\text{я}}(t) + \left. \frac{\partial m}{\partial I_3} \right|_{t_0} \Delta I_3(t) + \left. \frac{\partial m}{\partial U_{\text{я}}} \right|_{t_0} \Delta U_{\text{я}}(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left. \frac{\partial^2 m}{\partial I_{\text{я}}^2} \right|_{t_0} (\Delta I_{\text{я}}(t))^2 + \left. \frac{\partial^2 m}{\partial I_3^2} \right|_{t_0} (\Delta I_3(t))^2 + \left. \frac{\partial^2 m}{\partial U_{\text{я}}^2} \right|_{t_0} (\Delta U_{\text{я}}(t))^2 + \right. \\ &+ \left. \left. \left. \frac{\partial^2 m}{\partial I_{\text{я}} \partial I_3} \right|_{t_0} \Delta I_{\text{я}}(t) \Delta I_3(t) + \frac{\partial^2 m}{\partial I_{\text{я}} \partial U_{\text{я}}} \right|_{t_0} \Delta I_{\text{я}}(t) \Delta U_{\text{я}}(t) + \frac{\partial^2 m}{\partial I_3 \partial U_{\text{я}}} \right|_{t_0} \Delta I_3(t) \Delta U_{\text{я}}(t) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Така модель наближено враховує несиметрію режимів розгону і гальмування для обмежених відхилень. Але велика кількість її членів (дев'ять), серед яких

тільки $\Delta U_{\text{я}}(t)$ – незалежна змінна, а інші, із урахуванням взаємозв'язку у рівнянні двигуна, є її наслідки; взаємна корельованість, обмеженість і наближеність вимірювань відхилень, обмеженість часу одного режиму, роблять завдання оцінювання всіх коефіцієнтів некоректним внаслідок фізичної неможливості забезпечення лінійної незалежності змінних і статистично достатньої довжини вибірок. Відповідно до мети, якою могла бути оптимальна стабілізація базового режиму, треба визначити перші три лінійні члена розкладання (4.1), тобто лінійну модель в області малих відхилень від базового режиму роботи ДПС. Для їх оцінювання сплануємо натурний експеримент за такою схемою.

Нехай всі відхилення змінних рівняння (4.1) будуть близькі за формою: $\Delta U_{\text{я}}(t)$ – “сходинка”; $\Delta I_{\text{я}}(t)$, $\Delta I_{\text{з}}(t)$ – відповідно до рівнянь динаміки експоненціальні функції-реакції ДПС на вплив $U_{\text{я}}(t)$. Перепишемо (4.1) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta m(t) = & [m^{I_{\text{я}}} + (m^{I_{\text{я}}^2} \Delta I_{\text{я}}(t) + m^{I_{\text{я}} I_{\text{з}}} \Delta I_{\text{з}}(t) + m^{I_{\text{я}} U_{\text{я}}} \Delta U_{\text{я}}(t))] \Delta I_{\text{я}}(t) + \\ & + [m^{I_{\text{з}}} + (m^{I_{\text{я}} I_{\text{з}}} \Delta I_{\text{я}}(t) + (m^{I_{\text{з}}^2} \Delta I_{\text{з}}(t) + (m^{I_{\text{з}} U_{\text{я}}} \Delta U_{\text{я}}(t))] \Delta I_{\text{з}}(t) + \\ & + [m^{U_{\text{я}}} + (m^{U_{\text{я}} I_{\text{я}}} \Delta I_{\text{я}}(t) + m^{U_{\text{я}} I_{\text{з}}} \Delta I_{\text{з}}(t) + m^{U_{\text{я}}^2} \Delta U_{\text{я}}(t))] \Delta U_{\text{я}}(t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

де кожний коефіцієнт складається із шуканого і лінійної функції від $\Delta I_{\text{я}}$, $\Delta I_{\text{з}}$, $\Delta U_{\text{я}}$.

Якщо з певним досить грубим ступенем наближення у виразах для коефіцієнтів $\Delta I_{\text{я}}(t)$, $\Delta I_{\text{з}}(t)$, $\Delta U_{\text{я}}(t)$ рівняння (4.2) замінити відповідними ступінчастими функціями $\Delta I_{\text{я}}(\infty)$, $\Delta I_{\text{з}}(\infty)$, $\Delta U_{\text{я}}(\infty)$, де аргумент (∞) відповідає часу появи сталого значення $I_{\text{я}}$, $I_{\text{з}}$, $U_{\text{я}}$, із точністю до цього наближення рівняння (4.2) можна подати у такому вигляді:

$$\Delta m(t) \approx a_1 \Delta I_{\text{з}}(t) + a_2 \Delta I_{\text{я}}(t) + b_1 \Delta U_{\text{я}}(t), \quad (4.3)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= m^{I_{\text{з}}} + m^{I_{\text{я}} I_{\text{з}}} \Delta I_{\text{я}}(\infty) + m^{I_{\text{з}}^2} \Delta I_{\text{з}}(\infty) + m^{I_{\text{з}} U_{\text{я}}} \Delta U_{\text{я}}(\infty); \\ a_2 &= m^{I_{\text{я}}} + m^{I_{\text{я}}^2} \Delta I_{\text{я}}(\infty) + m^{I_{\text{я}} I_{\text{з}}} \Delta I_{\text{з}}(\infty) + (m^{I_{\text{я}} U_{\text{я}}} \Delta U_{\text{я}}(\infty); \\ b_1 &= m^{U_{\text{я}}} + m^{U_{\text{я}} I_{\text{я}}} \Delta I_{\text{я}}(\infty) + m^{U_{\text{я}} I_{\text{з}}} \Delta I_{\text{з}}(\infty) + m^{U_{\text{я}}^2} \Delta U_{\text{я}}(\infty). \end{aligned}$$

Чим ближче форма сигналів до “сходинки”, тим точніше рівняння (4.3), але і тим гірше обумовленість інформаційної матриці МНК. У силу взаємозв'язку змінних $\Delta U_{\text{я}}$, $\Delta I_{\text{я}}$, $\Delta I_{\text{з}}$ управляти “ступінчастістю” немає можливості. Але, змінюючи амплітуду $\Delta U_{\text{я}}(\infty)$, ми можемо пропорційно змінювати пов'язаний із наближеністю моделі (4.3) зсув оцінок коефіцієнтів a_1 , a_2 , b_1 відносно шуканих частинних похідних $m^{I_{\text{я}}}$, $m^{I_{\text{з}}}$, $m^{U_{\text{я}}}$. Отже, альтернативна до ортогональної постановка експерименту полягає у подачі послідовності сходинки напруги $U_{\text{я}}$ різної амплітуди, визначення зміщених коефіцієнтів a_1 , a_2 , b_1 рівняння (4.3) і

компенсації цього зміщення шляхом лінійної апроксимації коефіцієнтів a_1, a_2, b_1 у функції однієї зі змінних $\Delta I_{\text{я}}(\infty), \Delta U_{\text{я}}(\infty), \Delta I_{\text{р}}(\infty)$. Наприклад:

$$a_{1i} = m^{I_{\text{я}i}} + k_1 \Delta I_{\text{я}i}(\infty); \quad a_{2i} = m^{I_{\text{я}i}} + k_2 \Delta I_{\text{я}i}(\infty) \quad b_{1i} = m^{I_{\text{я}i}} + k_3 \Delta I_{\text{я}i}(\infty),$$

де i – номери сходинок різної амплітуди.

У загальному випадку i -й рядок векторно-матричного рівняння руху ЕТО, що враховує лінійні та квадратичні члени розкладання має такий вигляд:

$$\Delta y_i = \Delta X A_i + \Delta X B_i \Delta X^{-1}, \quad (4.4)$$

де

$$\Delta y_i^T = [\Delta y_i(1), \Delta y_i(2), \dots, \Delta y_i(N)]; \quad A_i^T = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN}].$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x_1(1) & \Delta x_2(1) & \dots & \Delta x_n(1) \\ \Delta x_1(2) & \Delta x_2(2) & \dots & \Delta x_n(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta x_1(N) & \Delta x_2(N) & \dots & \Delta x_n(N) \end{bmatrix}; \quad B_i = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & \dots & b_{1n}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i & \dots & b_{2n}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}^i & b_{n2}^i & \dots & b_{nn}^i \end{bmatrix}.$$

де N і n – відповідно числа дискретів за часом і розмірністю вектора A_i . Зміщена внаслідок неврахування квадратичної форми $\Delta X B_i \Delta X^T$ МНК-оцінка $\hat{A}_i$ дорівнює

$$\hat{A}_i = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T \Delta y_i. \quad (4.5)$$

Її зсув буде пропорційний ΔX^T :

$$\hat{A}_i - A_i = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T \Delta X B_i \Delta X^T = B_i \Delta X^T.$$

У загальному випадку модель (4.4) має бути розширена членами третього і вище порядку, і залежність зміщення оцінок від ΔX буде носити нелінійний характер. Тому для ефективної реалізації цього підходу слід обмежити знизу і зверху діапазони зміни ΔX . Для ілюстрації доцільності такого підходу розглянемо приклад.

4.1.2. Тестовий приклад

Точна нелінійна модель ЕТО

$$y(k) = \sum_{j=1}^3 x_j(k) + \sum_{i,q=1, i \neq q}^3 x_i(k) x_q(k) \quad (4.6)$$

із вектором β одиничних коефіцієнтів для чотирьох вибірок різної амплітуди X_{max} апроксимувалася її лінійною частиною

$$y(k) = \sum_{j=1}^3 x_j(k) \hat{\beta}_j$$

за таких сигналів:

$$x_1(k) = x_{\max}(l) \sin \left(\pi \frac{k-1}{M-1} \right); \quad x_2(k) = x_{\max}(l) \sin \left(2\pi \frac{k-1}{M-1} \right);$$

$$x_3(k) = x_{\max}(l) \cos \left(2\pi \frac{k-1}{M-1} \right); \quad k = \overline{1, M}, \quad l = \overline{1, 4}.$$

Оцінки $\hat{\beta}_j$, $j = 1, 2, 3$, обчислювалися за методом найменших квадратів. При цьому показник $\epsilon^T \epsilon$ похибки ϵ апроксимації лінійною моделлю $y(k) = \hat{\beta}_1 x_1(k) + \hat{\beta}_2 x_2(k) + \hat{\beta}_3 x_3(k)$ був на два порядки менше норми $\|\Delta y\|$. Тобто задача сигнальної апроксимації $y(k)$ лінійною моделлю вирішується досить якісно. Але оцінки $\hat{\beta}_i$ коефіцієнтів відносно істинних (одичинних) коефіцієнтів були істотно зміщені (рис. 4.1).

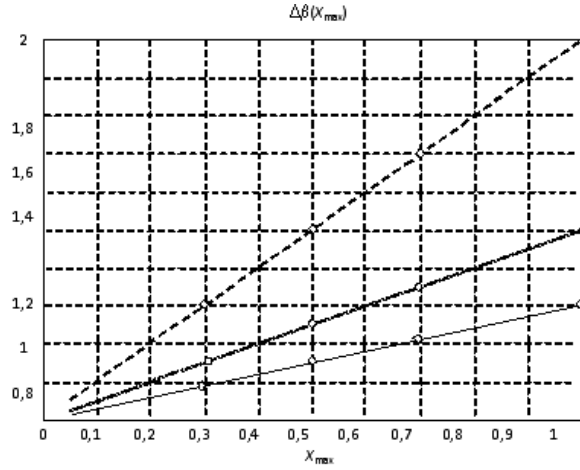


Рис. 4.1. Залежність відхилень $\Delta\beta_i$ від $x_{\max}$:

Але, як видно з рис. 4.1, лінійні регресійні залежності зсувів $\Delta\beta_i$ від $x_{\max}(l)$, $l = \overline{1, 4}$, збігаються за нульової амплітуди $x_{\max}$ до нуля; відповідно оцінки $\hat{\beta}_j$ збігаються до істинних значень $\beta_j = 1$. Якщо бралася повна модель (4.6), то із регуляризацією за Тихоновим МНК-оцінювання коефіцієнтів повної моделі (4.6) дало практично нульове значення сигнального показника $\epsilon^T \epsilon$. Регуляризований показник за Тихоновим:

$$(\hat{\beta}, \alpha) = \|\Delta Y(y) - \Delta \hat{Y}(\hat{\beta}, t)\| + \alpha \|\hat{\beta} - \beta_{\text{апр}}\|, \quad (4.7)$$

де α – параметр регуляризації; $\beta_{\text{апр}}$ – апіорі заданий вектор параметрів.

Практично нульове значення показника $\epsilon^T \epsilon$ досягається для самих різних значень $\beta_{\text{апр}}$, але оцінка $\hat{\beta}$ близька до $\beta_{\text{апр}}$, а не до дійсної, яка дорівнює одиниці. Для більшої наочності розглянемо двовимірну задачу, де модель і об'єкт ідентичні:

$$y(k) = \beta_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k),$$

але $x_1(k)$ і $x_2(k)$ сильно взаємно корельовані. Тому функціонал $\epsilon^T \epsilon$ (пунктирні

Табл. 4.1. Апріорні і апостеріорні значення параметрів (рис. 4.2)

$\beta_{\text{апр}1}$	$\hat{\beta}_1$	$\beta_{\text{апр}2}$	$\hat{\beta}_2$	$\frac{\ \Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(t)\ }{\ \Delta Y(t)\ }$
1	1	1	1	0
-1	0,904	-1	0,904	0,0091
-2	0,857	-2	0,857	0,0091
-3	0,809	-3	0,809	0,036
2	1,048	2	1,048	0,0023
3	1,095	3	1,095	0,0091
1	1,9	-1	0,0015	0,0045
2	2,85	-2	-0,95	0,011
3	3,8	-3	-1,9	0,0226
-1	0,0015	1	1,9	0,0045
-2	-0,95	2	2,85	0,011
-3	-1,9	3	3,8	0,0226

лінії на рис. 4.2) як функція $\hat{\beta}$, сильно випуклий для першого і третього квадранта площини (β_1, β_1) і слабо випуклий (“рівчак”) для другого і четвертого квадрантів. Регуляризуючий десятивідсотковий доданок $\alpha \|\hat{\beta} - \beta_{\text{апр}}\|$ функціонала (4.7) (круги на рисунку 4.2) строго випуклий і, відповідно, робить випуклим функціонал (4.7). Стрілками показано процес мінімізації функціонала (4.7), у результаті якого з апріорної оцінки $\beta_{\text{апр}}$ отримана апостеріорна оцінка (табл. 4.1). Як впливає із табл. 4.1 і рис. 4.2, оцінки $\hat{\beta}$ прямують в область, близьку до дійсного значення, якщо $\beta_{\text{апр}}$ міститься у першому і третьому квадранті (ближче або далі від β залежно від віддалення $\beta_{\text{апр}}$ від β). Якщо ж $\beta_{\text{апр}}$ міститься у другому і четвертому квадрантах, оцінки, у результаті мінімізації регуляризованого функціонала (4.7), не відходять далеко від апріорних, знаходячи точку компромісу між зростаючою добавкою $\alpha \|\hat{\beta} - \beta_{\text{апр}}\|$ і спадним значенням норми $\|\Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(\hat{\beta}, t)\|$.

При цьому відношення $\epsilon^T \epsilon$ до $\|\Delta Y(t)\|$ не перевищує 2,26 %. Тобто якість сигнальної ідентифікації достатньо висока, тоді як параметрична ідентифікація взагалі не коректна: у другому квадранті $\hat{\beta}_2$ навіть йде від $\beta_{\text{апр}}$ у протилежний від $\hat{\beta}_2$ бік, аналогічно $\hat{\beta}_3$ у четвертому квадранті. У загальному випадку, для n змінних, функція $J(\beta)$ може мати кілька “рівчаків” мінімальної або навіть нульової крутизни, що ще більше ускладнює завдання параметричної ідентифікації за недостатньої інформативності даних.

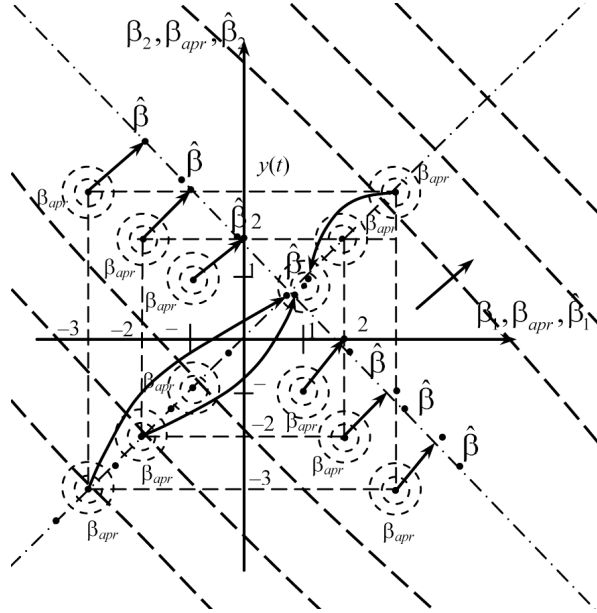


Рис. 4.2. Точне значення β та її оцінка $\hat{\beta}$, що отримана із умови мінімуму функціоналу (4.7) для різних апіорних значень β_{apr}

4.1.3. Реальний приклад

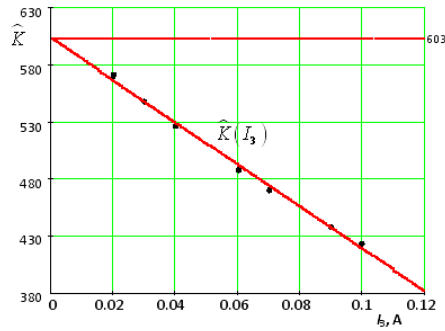
Маємо сім режимів зміни струму збудження I_3 (0.02, 0.03, 0.04, 0.06, 0.07, 0.09, 0.1) двигуна постійного струму (ДПС) і, відповідно, кутової швидкості $\Omega(t)$. Повна динамічна модель залежності $\Omega(t)$ від $I_3(t)$ є нелінійна. У кожному із семи режимів визначалися зміщені внаслідок наближеності моделі, оцінки коефіцієнтів $\hat{\beta}_j$, $j = 1, 2, 3$, лінеаризованого диференційного рівняння:

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} + \beta_1 \frac{d\Omega}{dt} + \beta_2 \Omega = K I_3.$$

За ними розраховувався статичний коефіцієнт K зв'язку I_3 із Ω . Далі коефіцієнт K апроксимувався поліномом першого степеню у функції $\|I_3\|$ (рис. 4.3):

$$K(\|I_3\|) = 603,5 + 1850\|I_3\|.$$

Прогнозне в $I_3 = 0$ значення $K(0)$, що дорівнює 620, міститься в області дійсних значень. Просте усереднювання результатів дасть істотно зміщену (занижену) оцінку $K \approx 480$. Даний метод за рахунок скорочення базису дає можливість отримати зміщені, але ефективні оцінки коефіцієнтів лінійної складової, зміщення яких мінімізується шляхом апроксимації залежності кожного коефіцієнта $\hat{\beta}_i$ у функції норми відхилень змінних від базового режиму.

Рис. 4.3. Залежність $\hat{K}$ від $\|I_3\|$ та її МНК-апроксимація

4.2. Оцінювання багатовимірних нелінійних залежностей за результатами стендових випробувань ЕТО

Відсутність інформації про структуру нелінійної багатовимірної залежності $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не дає можливості застосувати методику оптимального планування експерименту. Як правило, на стенді знімаються часткові перетини $y(x_i)$ за сталих x_j , ($j = \overline{1, n-1}$, $j \neq i$). Скориставшись властивістю гладкості $y(x)$, подамо цю залежність кратним рядом Тейлора або його степеневим еквівалентом:

$$Y(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \dots \quad (4.8)$$

Для часткового k -го перетину за умови $x_i = \text{const}$, $i = \overline{1, n-1}$, $k \neq i$, із виразу (4.8) отримаємо одновимірну залежність

$$y(x_k) = \beta_{0k} + \beta_{1k} x_k + \beta_{2k} x_k^2 + \dots \quad (4.9)$$

Структура залежності (4.9) і параметри $\beta_{0k}, \beta_{1k}, \dots$ відшукуються за МНК для різних, але фіксованих значень інших змінних. Далі коефіцієнти часткових моделей послідовно апроксимуються як функції цих змінних [18, 118, 120, 125, 123].

4.2.1. Нелінійна модель тягового зусилля двигуна AI-20м

Розглянемо залежність тяги y від висоти x_1 , швидкості x_2 та керуючого впливу x_3 (рис. 4.4). Математична модель (неперервні лінії) отримана з локальних моделей перерізів $y(x_k)$, $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, за умови, що $x_1 = C_i$, $x_2 = C_j$;

$$y(x_3) = \beta_0'' + \beta_1'' x_3$$

шляхом МНК-апроксимації її коефіцієнтів лінійною моделлю по x_2 :

$$\beta_0'' = \beta_{01}' x_2 + \beta_{02}', \quad \beta_1'' = \beta_{11}' x_2 + \beta_{12}' \quad (4.10)$$

і подальшої апроксимації статистично значущих коефіцієнтів моделей (4.10) квадратичною моделлю по x_1

$$\beta'_i = \beta_{i0} + \beta_{i1}x_1 + \beta_{i2}x_1^2, \quad i = 0, 1.$$

Тоді повна модель набуває такого вигляду:

$$y = (\beta_{00} + \beta_{01}x_1 + \beta_{02}x_1^2) + (\beta_{10} + \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_1^2)x_2 + (\beta_{20} + \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_1^2)x_3 + \\ + (\beta_{30} + \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_1^2)x_2x_3 + (\beta_{40} + \beta_{41}x_1 + \beta_{42}x_1^2)x_2^2.$$

Максимальна похибка апроксимації склала 2 % від $y_{\max}$

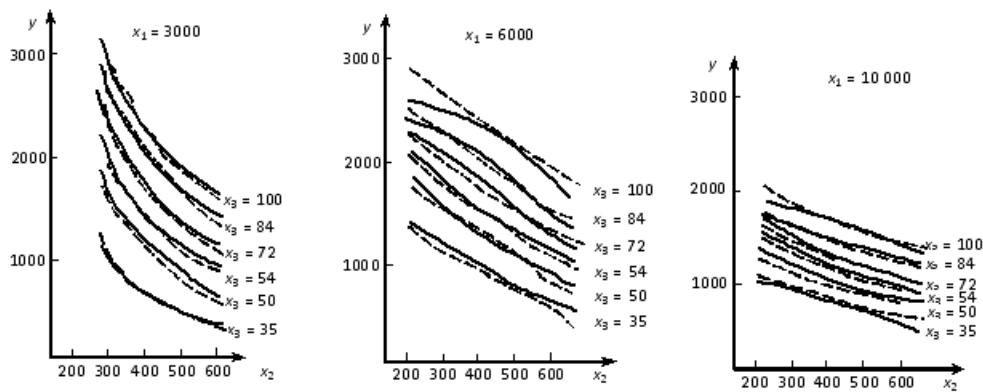


Рис. 4.4. Характеристики тягового зусилля двигуна AI-20M (неперервні лінії – модель; пунктирні – експериментальні дані): а) - $x_1 = 3000$ m, б) $x_1 = 6000$ m, в) $x_1 = 10\,000$ m

4.2.2. Інші приклади

Практично збіглися [94] (рис. 4.5) експериментальні дані з рухомого об'єкту з моделлю залежної змінної y у функції від x_1, x_2 . Тут із локальних моделей

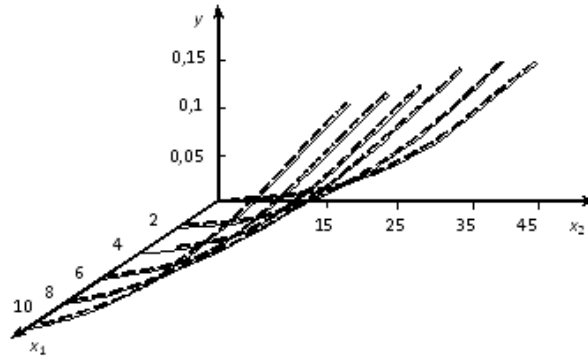
$$y(x_2) = \beta_{i1}x_2 + \beta_{i2}x_2^2, \quad x_1 = \text{const}, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (4.11)$$

лінійною по x_1 апроксимацією коефіцієнтів моделі (4.11)

$$\beta''_{i1}x_1 = \beta_1 + \beta_2x_1; \quad \beta''_{i2}x_1 = \beta_3 + \beta_4x_1 \quad (4.12)$$

отримана повна модель

$$y = \beta_1x_2 + \beta_2x_1x_2 + \beta_3x_2^2 + \beta_4x_1x_2^2 \quad (4.13)$$

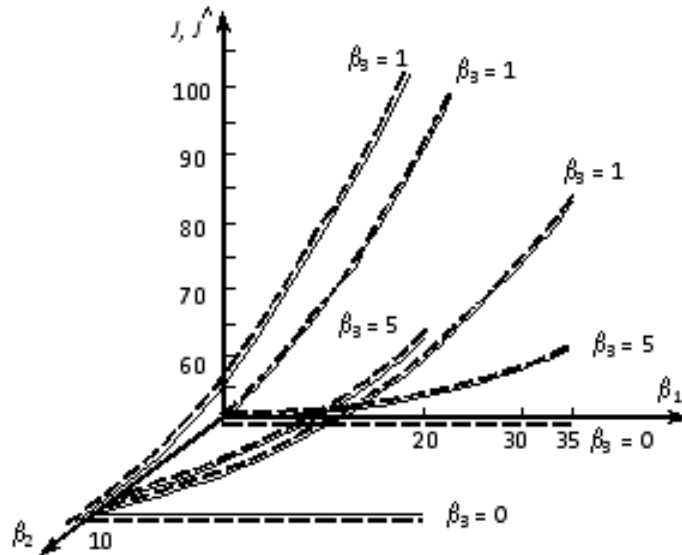
Рис. 4.5. Залежність $y(x_1, x_2)$

Залежність деякого показника $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (рис. 4.6), отримано [66] аналогічним шляхом:

$$J(\beta_1) = \alpha_{1ik}\beta_1 + \alpha_{2ik}\beta_1^2, \quad i, k = 1, 2, 3; \quad (4.14)$$

$$\alpha_{jik}(\beta_2) = \alpha_{jk}^1\beta_2 + \alpha_{jk}^2\beta_2^2; \quad (4.15)$$

$$\alpha_{ik}^{(l)}(\beta_3) = \alpha_j'\beta_3 + \alpha_j''\beta_3^2. \quad (4.16)$$

Рис. 4.6. Залежність $J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (---) та її модель $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (—)

Після підстановки коефіцієнтів (4.16) в (4.15), а (4.15) в (4.14) отримано

структуру і параметри невідомої залежності $\hat{J}(\beta)$:

$$\begin{aligned}\hat{J}(\beta) = & -0,96 \cdot 10^{-6} \beta_1 \beta_2 \beta_3 - 0,61 \cdot 10^{-2} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3^2 + 0,9 \cdot 10^{-2} \beta_2^2 \beta_3^2 + 0,23 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3^2 + \\ & + 0,04 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - 0,46 \cdot 10^{-5} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3 - \\ & - 0,023 \beta_2^2 \beta_3 - 0,0126 \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3 + 0,133 \beta_1 \beta_2^2 \beta_3 + 1,02 \beta_2 \beta_3.\end{aligned}$$

Похибка апроксимації не перевищує 0,5% від максимального значення J . У разі, якщо допустима похибка 5 % цей вираз суттєво спрощується:

$$\hat{J}(\beta) = [(0,133 - 0,012\beta_1 + 0,23\beta_1\beta_3 - 0,0061\beta_2 + 0,04\beta_3)\beta_1 + 1,02 - 0,0232\beta_2 - 1,72\beta_3]\beta_2\beta_3.$$

Даний алгоритм дає можливість досить просто визначити структуру і параметри складних багатовимірних нелінійних залежностей між вхідними і вихідною змінними реальних об'єктів, поданих таблично за результатами натурних експериментів.

4.2.3. Побудова залежності енергії від добротності RLC -кола

Необхідно визначити аналітичну залежність енергії першої півхвилі струму розряду конденсатора C у колі із індуктивністю L , опором R , залежно від добротності β контуру силового перетворювача енергії. Струм x з R, L, C – параметрами кола пов'язано рівняннями:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC}x = 0, \quad \int_{-\infty}^0 x(t)dt = CU_C(0), \quad \beta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.17)$$

де $U_C(0)$ – початкові умови по напрузі U_C на конденсаторі, $x(0) = 0$. Показник якості, що підлягає оптимізації:

$$J(\beta) = \frac{2}{CU_C^2(0)} \int_0^{t_1} Rx^2(t)dt; \quad t_1 = \text{Arg} \sup_{t \in (0, \infty)} x^2(t). \quad (4.18)$$

Задачу (4.17), (4.18) вирішено чисельним методом. Отриману залежність далі було апроксимовано дробово-раціональною функцією від β

$$\hat{J}(\beta) = \frac{-0,031 + 1,06\beta - 0,658\beta^2 + 0,149\beta^3}{1 + 0,23\beta - 8,87 \cdot 10^{-5}\beta^2 + 1,112 \cdot 10^{-5}\beta^3} \quad (4.19)$$

З моделі (4.19) визначалась оцінка $\hat{\beta}^*$ оптимального значення β^* за умови, що $\partial \hat{J}(\beta)/\partial \beta = 0$, $\partial^2 \hat{J}(\beta)/\partial \beta^2 = 0$. Це набагато простіше, ніж вирішувати цю саму задачу на основі інтегро- диференціальних рівнянь (4.17), (4.18). Відносна максимальна похибка визначення β^* склала 0,05 % .

4.3. Оцінювання статичної нелінійної складової динамічного ЕТО

Модель Гаммерштейна (рис. 4.8) описує по входу ($x_{\text{вх}}$) – виходу ($x_{\text{вих}}$) реальну систему комбінацією лінійного рівняння

$$\beta'_n \frac{d^n x_{\text{вих}}}{dt^n} + \dots + \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} + x_{\text{вих}}(t) = \gamma_m \frac{d^m x_{\text{вх}}}{dt^m} + \dots + \gamma_1 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + \gamma_0 x_{\text{вх}} \quad (4.20)$$

зі статичною нелінійною $f(u)$, де зазвичай остання розкладається із коефіцієнтами l_k за системою лінійно-незалежних (бажано ортогональних) функцій $\varphi_k(u)$:

$$f(u) = \sum_{k=1}^r l_k \varphi_k(u). \quad (4.21)$$

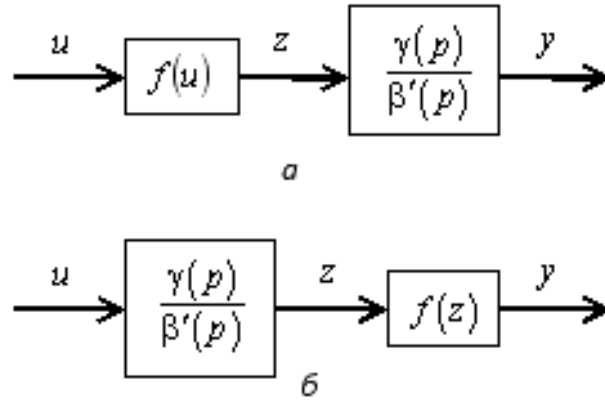


Рис. 4.8. Моделі Гаммерштейна: а) – нелінійність на вході, б) – на виході

Залежно від розташування нелінійності (рис. 4.8), позначивши оператор $d^i/dt^i = p^i$ і підставивши розкладання (4.21) і динаміку (4.20) у відповідні структури (рис. 4.8), отримаємо для варіантів (рис. 4.8, а), де нелінійності на вході, модель:

$$\beta'(p)y(t) = \sum_{i=1}^m \gamma_i p^i \left(\sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi_k(u) \right); \quad (4.22)$$

для варіанта (рис. 4.8, б), де нелінійність на виході, модель

$$\sum_{i=0}^n \beta'_i p^i \left(\sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi_k(y(t)) \right) = \gamma(p)u(t), \quad (4.23)$$

де $\beta'(p) = \beta'_n p^n + \beta'_{n-1} p^{n-1} + \dots + \beta'_1 p + 1$, $\gamma(p) = \gamma_m p^m + \dots + \gamma_1 p + \gamma_0$. За такого підходу у задачі ідентифікації необхідно визначити $n + m + r + 2$

параметрів $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. При цьому в моделі (4.22) параметри α_i, γ_i входять як множина їх добутків, в моделі (4.23) та ж ситуація для параметрів β_i, α_i . Це суттєво ускладнює розв'язок задачі оцінювання. Крім того, якщо $u(t)$ навіть таке, що забезпечує ортогональність (що досить складно реалізувати), проте ортогональність порушується внаслідок диференціювання функцій $\varphi_k(u(t))$ у часі. Наприклад, якщо φ_k – це синус-косинусний ряд, уже перша похідна від φ_k буде лінійно залежною функцією від φ_{k+1} . Використання степеневого поліному

$$f[u(t)] = \sum_{k=0}^r \alpha_k u^k(t) \quad (4.24)$$

теж не створює ортогональності. Все це погіршує практичне використання моделей (4.22), (4.23), особливо у реальних умовах зашумленості сигналів, які підлягають диференціюванню. Тому, враховуючи обмеженість смуги спектру сигналів $x_{\text{вх}}, x_{\text{вих}}$, допускаючи кінцеву похибку Δ апроксимації диференційного рівняння (4.20), де $m < n$, рівнянням пониженого порядку

$$\sum_{i=0}^n \beta_{n-i} \frac{d^{n-i} x_{\text{вих}}}{dt^{n-i}} = x_{\text{вх}}(t) + \Delta(t), \quad (4.25)$$

отримаємо спрощені моделі Гаммерштейна

$$\beta(p)y(t) = \sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi_k(u) \quad (4.26)$$

$$\sum_{i=0}^n \beta_i p^i \left(\sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi_k[y(t)] \right) = u(t). \quad (4.27)$$

Останню можна подати у вигляді (4.26), якщо розглядати не пряму $y(t)$, а інверсну залежність $u(y)$ (рис. 4.9).

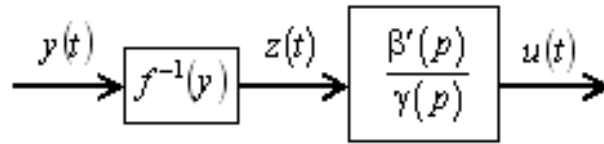


Рис. 4.9. Інверсна модель

Отже, задача ідентифікації обох моделей зводиться до задачі ідентифікації моделі (4.26) із $n + r + 1$ невідомими. Подальше спрощення задачі досягається шляхом урахування фундаментальної закономірності всіх відображень, а саме гладкості залежності $f(u)$. Замість мінімуму середнього квадрату похибки було запропоновано [38] мінімізувати у загальному випадку середнє значення

квадрату $(r + 1)$ -ї кінцевої різниці $\Delta^{r+1}\varepsilon$, яка є різницевий еквівалент $r + 1$ -ї похідної виходу нелінійності від входу:

$$I = \sum (\Delta^{r+1}\varepsilon)^2 \rightarrow \min, \quad (4.28)$$

де, якщо $r = 1$, має місце наближення за гладкістю, якщо $r = 2$ – наближення за кривизною і так далі. Порядок різниці $r + 1$ встановлюється апіорі, якщо відомий порядок моделі (4.21), або відшукується поступово, починаючи із $r = 1$.

4.3.1. Алгоритм визначення гладкої статичної нелінійності із динаміки ЕТО

Нехай динаміка ЕТО описується нелінійним диференціальним рівнянням

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k}y(t)}{dt^{n-k}} = f[x(t)] \quad (4.29)$$

де $f[x(t)]$ – статична нелінійність, на вхід якої надходить сигнал $x(t)$, а вихід цієї нелінійності впливає на динаміку об'єкту.

З метою визначення непараметричної моделі $\hat{f}[x(t)]$ статичної нелінійності $f[x(t)]$ визначимо скомпенсований по першій і другій похідних вихід об'єкта:

$$y_{\text{ск}}(t) = \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2},$$

де параметри β_1, β_2 визначаються за умови (4.28).

Приймаючи до уваги дискретність у часі вимірювань вихідної величини y , замість r -ї похідної використано відповідний їй дискретний аналог. Для цього послідовність $x(t_k)$, яка вимірюється зі сталим кроком у часі Δt , перетворюється у послідовність зі сталим прирощенням Δx , але зі змінним кроком у часі. Ця задача вирішується наступним чином. Це надасть можливість звужити смугу частот і зменшити порядок n похідних до $n = 2$ та обчислити $\hat{y}(t)$, $d\hat{y}(t)/dt$, $d^2\hat{y}(t)/dt^2$.

Впорядковуємо значення вхідної змінної $x(t_k)$, що згладжено, за зростанням. Далі, для визначення значень t_k , які відповідають значенням вхідної змінної, що змінюються зі сталим кроком, виконаємо інтерполювання отриманої послідовності за допомогою інтерполяційних сплайнів:

$$S_2(t) = x_k + m_k(t - t_k) + c_k(t - t_k)^2, \quad t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}].$$

Значення t_j , які відповідають $j\Delta x$, отримуємо шляхом розв'язання рівняння сплайну:

$$t_{j_k} = t_k + \frac{1}{2c} \left(-m_k + \sqrt{m_k^2 + 4c_k j \Delta x} \right),$$

де

$$j = \bar{l}_k, \quad l_k = [x(t_{k+1}) - x(t_k)]/\Delta x.$$

Після визначення всіх t_{j_k} обчислюються значення $\hat{y}(t_{j_k})$, $d\hat{y}(t)/dt$, $d^2\hat{y}(t_{j_k})/dt^2$. Далі замість похідних по x використовуються скінченні різниці,

$$\Delta^r y_{\text{ск}} = \Delta^r \left[\hat{y}(t) - \beta_1 \frac{\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2} \right]. \quad (4.30)$$

Зокрема, для $r = 2$ маємо:

$$\Delta^2 y_{\text{ск}} = [y_{\text{ск}}(t_{k+2}) - 2y_{\text{ск}}(t_{k+1}) + y_{\text{ск}}(t_k)]/(\Delta x)^2.$$

для $r = 3$:

$$\Delta^3 y_{\text{ск}} = [y_{\text{ск}}(t_{k+3}) - 3y_{\text{ск}}(t_{k+2}) + 3y_{\text{ск}}(t_{k+1}) - y_{\text{ск}}(t_k)]/(\Delta x)^3$$

Мінімізація функціоналу гладкості полягає у розв'язанні відносно β_1 , β_2 системи нормальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left[\Delta^r \hat{y}(t_k) - \beta_1 \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} - \beta_2 \Delta^r \frac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2} \right] \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} &= 0; \\ \sum_{k=1}^N \left[\Delta^r \hat{y}(t_k) - \beta_1 \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} - \beta_2 \Delta^r \frac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2} \right] \Delta^r \frac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Після визначення параметрів β_1, β_2 непараметрична модель гладкої статичної нелінійності визначається за формулою

$$f[x(t)] = \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2}.$$

4.3.2. Тестовий приклад визначення статичної нелінійності електроприводу

Для контролю стійкості та точності системи автоматизованого електроприводу необхідно визначити величину та асиметрію зони нечутливості, крутизну та рівні насиченості нелінійної залежності швидкості обертання вихідного валу системи від напруги $U_{\text{я}}$ на валу якоря двигуна постійного струму у режимі реверсу, тобто переходу швидкості від $-\Omega_{\text{max}}$ до Ω_{max} . Динаміці цього процесу відповідає диференціальне рівняння

$$a_2 \frac{d^2\Omega(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t) = f[U_{\text{я}}(t)], \quad q = 16. \quad (4.32)$$

де $U_{\text{я}}$ змінюється ступінчасто у межах від $-U_{\text{max}}$ до U_{max} :

$$U_{\text{max}}(t) = U_{\text{max}} \left[-1 + \frac{1}{q/2} \sum_{k=1}^q 1(t - k\Delta t) \right].$$

Числові значення параметрів a_1, a_2 невідомі. Параметри тестуючого впливу $U_{\max} = 120$ В, $\Delta t = 1$ с. Початкові умови: $\Omega(0) = -\Omega_{\max} = -300$ рад/с, $d\omega(t)/dt = 0$. Подамо невідоме значення нелінійної залежності виразом:

$$\Omega U_{\max}(t) = 3U_{\max}(t) - 60 \sin(0,065U_{\max}(t)),$$

який відповідає умові гладкості залежності із зонами нечутливості та насичення. Вимірювання вихідного сигналу приводу здійснюються із кроком $\Delta t = 0,1$ с при $N = 200$, $q = 16$.

Згладжування вхідних $U_{\max}(t)$ та вихідних $\hat{y}(t_k)$, $k = \overline{1, N}$, значень, що вимірюються.

Упорядкування значень $U_{\max}(t)$ у порядку їхнього зростання.

Інтерполяція цих значень за допомогою інтерполяційних сплайнів.

Визначення значень t_k , що відповідають рівномірному змінюванню згладжених $[U_{\max}(t)]$ зі сталим кроком ΔU .

Обчислення значень $\hat{y}(t_k)$, а також похідних першого та другого порядку від цих значень.

Мінімізація функціоналу (4.28) шляхом складання та розв'язання системи рівнянь (4.31) за методом найменших квадратів.

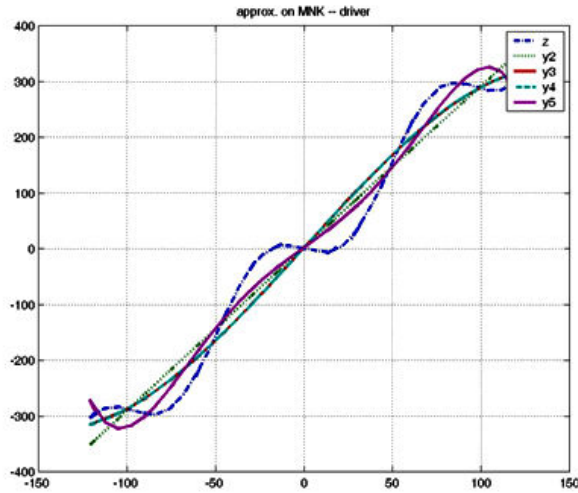


Рис. 4.10. Отримання статичної нелінійної залежності за МНК

Щоб пояснити, чому важлива непараметрична апроксимація, апроксимуємо тестову залежність $\Omega U_{\max}(t)$ поліномом (4.24) степеню $m = 3$ рис. 4.10 бачимо, що оптимальне значення відповідає $m = 5$ при значенні середньоквадратичної похибки $\varepsilon_5 = 26,72$. Цю саму задачу розв'язано за допомогою методу компенсації динаміки об'єкта контролю. Перші три кроки ті самі.

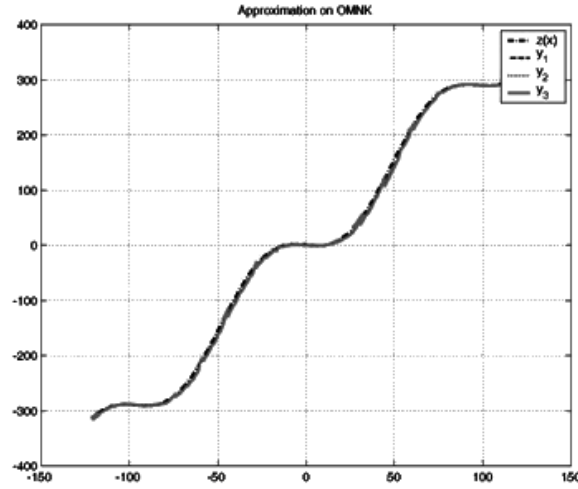


Рис. 4.11. Статична нелінійна залежність за МНК за методом компенсації динаміки

Після виконання кроків 4 та 5, тобто визначення часових інтервалів, що відповідають сталому припущенню значень тестуючого сигналу, та визначення значень вихідного сигналу, які відповідають значенням часу t_{j_k} кроку 5 виконуємо мінімізацію функціоналу (4.30) по β_1, β_2 за МНК:

$$\min J_{\text{СК}} = \min \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^r \hat{y}_{\text{СК}}(t_k)}{\partial U^r(t)} \right)^2.$$

У результаті отримано оцінки $\hat{\beta}_1 = 0,0196$, $\hat{\beta}_2 = 0,000134$ Непараметрична оцінка шуканої нелінійності визначається таким чином:

$$f[U_{\text{я}}] = y(t) - 0,0196 \frac{dy(t)}{dt} - 0,000134 \frac{d^2 y(t)}{dt^2}.$$

Результати моделювання для $r = 1, 2, 3$ наведено на рис. 4.10. Залишкова похибка виявилась найменшою для $r = 2$ і дорівнює $\varepsilon = 3,067$, що менше 0,5 %. Отримавши точну залежність (рис. 4.11), можна із рівняння (4.32) точніше визначити коефіцієнти лінійної динамічної складової моделі. А для отримання точної і простої параметричної моделі доцільно скористатися наступним методом.

4.4. Метод об'єднання часткових кусково-аналітичних моделей в єдину аналітичну

4.4.1. Загальні положення

Останнім часом все більшу увагу приділяють чисельним методам комп'ютерного моделювання об'єктів ідентифікації [44, 45]. З одного боку це обґрунтовано складністю процесів в об'єкті, що досліджується (кусково-нелінійні залежності між його змінними, логіка переключення від однієї частинної моделі до іншої, нестаціонарність та стохастичність контрольованих і неконтрольованих параметрів і сигналів та інше), з іншого боку – можливостями сучасних електронно-обчислювальних машин (ЕОМ).

Але заміна теоретичних досліджень чисельними на ЕОМ призводить до втрати загальності рішення тієї чи іншої задачі. Множина вирішень задачі чисельним моделюванням завжди обмежена. Тому існує ймовірність не змодельованої ситуації на об'єкті, яка може бути небажаною. Це, наприклад, стосується кусково-аналітичних моделей, заміни диференціальних залежностей різницевиими (особливо для нестійких об'єктів), об'єктів із запізненням, апроксимації багатовимірних нелінійних залежностей на кінцевій множині експериментальних даних поліномами високого степеню та ін.. Тому доцільно максимально використувати аналітичні рішення, користуючись чисельними методами і ЕОМ лише, як допоміжними засобами. Розглянемо одну із таких задач: як отримати єдину аналітичну залежність для моделі ЕТО, яку подано кусково-аналітичними частковими моделями з логікою переключення від однієї до іншої залежно від координат об'єкту [94,123,124].

4.4.2. Інтеграція кусково-аналітичних залежностей в єдину аналітичну

Якщо нелінійність $y(x)$ та її похідні неперервні, можливий її аналітичний опис $y(x)$ (наприклад, за теоремою Вєєрштраса, степеневим поліномом). Більшість нелінійних елементів реальних ЕТО мають кусково-аналітичну залежність $y(x)$. Під час аналізу і синтезу систем із такими елементами виникають незручності, пов'язані із врахуванням межових умов переходу від однієї області змінних x, y до сусідньої. При зміні структури моделі нелінійності у досліджуваній системі, можуть виникати розриви $y(x)$ та її похідних $dy/dx, d^2y/dx^2, \dots$, у той час, як у реальному ЕТО ці явища відсутні. Ці та інші причини вимагають мати аналітичну модель $y(x)$ в усій області зміни x, y , щоб виключити складну логіку зміни структури $y(x)$ та некоректності диференціювання $dy/dx, d^2y/dx^2, \dots$ у точках стиковки. Складна кусково-аналітична нелінійність може бути представлена множиною аналітичних залежностей, справедливих за умови, що змінні x, y містяться в i -й області їх існування, $i = \overline{1, n}$. При переході з i -ї в $(i + 1)$ -у чи $(i - 1)$ -у область $y_i(x_i)$ має змінюватись на $y_{i+1}(x_{i+1})$ чи $y_{i-1}(x_{i-1})$. Таку умову зазвичай забезпечують, якщо $y(x)$ подати зваженою

сигнум-функціями ваги $\eta(x)$ сумою $y_i(x_i)$:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) y_i(x) \quad (4.33)$$

де $\eta_i(x)$ – розривні сигнум-функції:

$$\eta_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ належить } i\text{-й області,} \\ 0, & \text{якщо не належить.} \end{cases}$$

Для забезпечення гладкості переходу у сусідню область функції ваги $\eta_i(x)$ мають бути також гладкими, а не релейними, як за кусково-аналітичної апроксимації (4.33). Аналогом таких функцій можуть бути частотні характеристики фільтрів верхніх, середніх, нижніх частот.

Якщо покласти замість частоти ω змінну x , без суттєвих змінювань будемо мати можливість використати розвинену теорію частотних фільтрів для побудови функцій ваги η_i . На відміну від фізично реалізуємих фільтрів, де суттєвою є вимога нескладності, математично реалізовані – позбавлені цього обмеження. Наприклад, тут немає необхідності використовувати близькі до ідеальних фільтри Баттерворта. Досить представити близькі до ідеального фільтри як каскад із m найпростіших фільтрів першого порядку. Так, для виділення області x від 0 до $x = a$, візьмемо m “фільтрів нижніх частот”:

$$\eta_i(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2/a^2}} \right)^m, \quad x \in [0, a], \quad (4.34)$$

де m береться за умови близькості із точністю до ε моделі $\hat{y}(x)$ до реальної залежності $y(x)$. Тобто m збільшується від одиниці до значення m^* , за якого міра близькості $\hat{y}(x)$ до $y(x)$ буде близька до бажаної ε . Для виділення області x від $x = a$ до $x \rightarrow \infty$ візьмемо m “фільтрів верхніх частот”:

$$\eta_i(x) = \left(\frac{|x/a|}{\sqrt{1 + x^2/a^2}} \right)^m, \quad x \in [0, \infty), \quad x \in [-a, \infty)$$

де m підбирається аналогічно.

Для виділення області x від $x = a$ до $x = b$, $b > 0$, візьмемо m “смугових фільтрів”, побудованих із двох “фільтрів (4.34) нижніх частот a і b ”:

$$\eta_i(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2/b^2}} \right)^m - \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2/a^2}} \right)^m, \quad x \in [a, b]. \quad (4.35)$$

Наведемо (для наочності) приклад аналітичного опису основної кривої намагнічування феромагнітного осердя котушки індуктивності. Згідно рис. 4.12

маємо три області аналітичного опису $y(x)$:

$$y = \begin{cases} -y_{\max}, & -\infty < x \leq a_2, \\ \beta_1 x + \beta_2 x^3, & -a_2 < x \leq a_1, \\ y_{\max}, & a_1 \leq x < \infty. \end{cases} \quad (4.36)$$

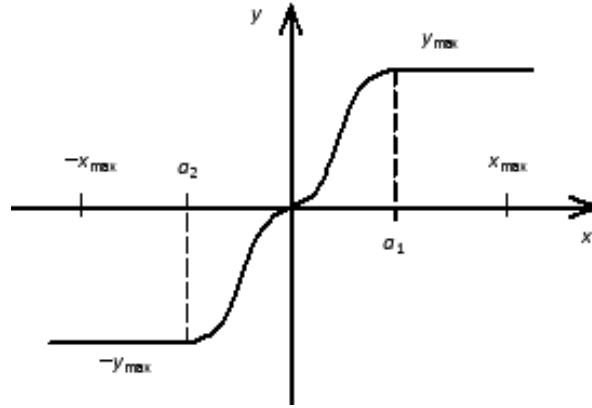


Рис. 4.12. Кусково-аналітична залежність
У необмеженій області змінних x (фізично це може бути напруженість H магнітного поля, магніторухійна сила I_w чи магнітна напруга H_l) залежність $y(x)$ (магнітної індукції B чи магнітного потоку Φ) може бути представлена сумою трьох моделей (4.36) із ваговими функціями (4.39). Для цього слід запровадити нову незалежну змінну z , яка б знакозмінну функцію x в області $(x_{\max}, x_{\max})$ перетворювала у змінну одного знаку “плюс”:

$$z = x_{\max} - x. \quad (4.37)$$

Тоді аналітична у всьому діапазоні x залежність $y(x)$ набуває вигляду

$$y(x) = -y_{\max}\eta_1(z) + y_{\max}\eta_2(z) + (\beta_1 x + \beta_2 x^3)\eta_3(z), \quad (4.38)$$

де

$$\eta_1(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a_2)^{-2} z^2}} \right)^m; \quad \eta_2(z) = \left(\frac{|z/(x_{\max} + a_2)|}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a_2)^{-2} z^2}} \right)^m; \\ \eta_3(z) = \eta_1(z, a_1) - \eta_1(z, a_2). \quad (4.39)$$

Якщо залежність $y(x)$ (рис. 4.12) симетрична, тобто $a_1 = -a_2 = a$, тоді

$$y(x) = y_{\max} \left[\left(\frac{|z/(x_{\max} + a)|}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a)^{-2} z^2}} \right)^m - \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a)^{-2} z^2}} \right)^m \right] +$$

$$+(\beta_1 x + \beta_2 x^3) \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a)^{-2} z^2}} \right)^m - \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} - a)^{-2} z^2}} \right)^m \right]. \quad (4.40)$$

Аналітичність і гладкість моделі (4.40) дозволяє за необхідності, якщо x відома функція часу $x(t)$, обчислити похідні

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dx} \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots$$

Для кінцевого значення числа m ці похідні будуть гладкими функціями часу, які можна аналітично обчислити вручну або за відповідних програм (Mathcad, MATLAB) на ЕОМ. За першою теоремою Веєрштраса залежність $y(x)$ (рис. 4.12) може бути представлена в області $\pm a$ степеневим поліномом. Але для достатньо широкої області ($\pm x_{\max}$), за однакової середньоквадратичної похибки апроксимації ϵ модель (4.40) буде значно простішою за степеневий поліном. Крім того, якщо вимірювання x, y виконано із кроком Δx , за високих степенів поліному з'являються пульсації $\hat{y}(x)$ в інтервалах Δx між вимірюваннями (рис. 4.13).

4.4.3. Побудова залежності ЕРС машини постійного струму (МПС) від струму збудження магнітного потоку

Нехай із експерименту отримано 12 точок залежності електрорушійної сили E від струму збудження I_3 магнітного потоку індуктору (рис. 4.13). На ділянці від $I_3 = 0$ до $I_3 = 0,7$ А залежність апроксимуємо кубічною параболою, а на ділянці, де $I_3 > 0,7$ – прямою:

$$\hat{E}(I_3) = \begin{cases} \beta_1 I_3^2 + \beta_2 I_3^3 & I_3 < 0,7 \text{ А}, \\ \beta_3 + \beta_4 I_3, & I_3 \geq 0,7 \text{ А}. \end{cases} \quad (4.41)$$

За методом найменших квадратів (МНК) визначимо оцінки $\hat{\beta}_i$ коефіцієнтів β_i , $i = \overline{1,4}$: $\hat{\beta}_1 = 1209$, $\hat{\beta}_2 = -1363$, $\hat{\beta}_3 = 111,2$, $\hat{\beta}_4 = 54,1$. Якщо усі 12 точок залежності $E(I_3)$ описати за МНК степеневим поліномом із відносною середньоквадратичною похибкою (СКП) не більше за 1 %, отримаємо поліном дев'ятого степеню. Для нього СКП у точках експерименту складає 0,53 %, але у проміжку між експериментальними точками має місце значна пульсація (рис. 4.13, крива 2).

Якщо зменшити степінь поліному до чотирьох (рис. 4.13, крива 3), суттєво зростає похибка апроксимації (СКП=8,1%). Тобто, бажану високу точність апроксимації можна забезпечити лише кусково-поліноміальною логіко-аналітичною моделлю (4.41).

Щоб удосконалити спосіб кусково-поліноміальної апроксимації незручними логіко-аналітичними моделями (4.41), замінимо їх на аналітичні моделі, що являють собою суму часткових аналітичних моделей, помножених на аналітичні

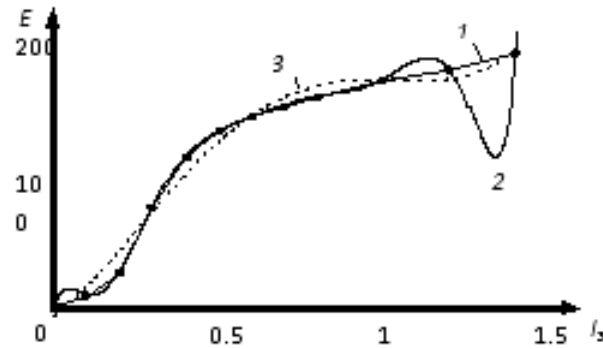


Рис. 4.13. Залежність $E(I_3)$ та її апроксимація поліномами: 1 – кусково-аналітичним; 2 – дев'ятим степенем; 3 – четвертим степенем

в усьому інтервалі змінних вагові функції – “фільтри” $\eta(I_3)$:

$$\hat{E}(I_3) = (\beta_1 I_3 + \beta_2 I_3^3) \eta_1(I_3) + (\beta_3 + \beta_4 I_3) \eta_2(I_3),$$

де, підставивши $\eta_1(I_3) = 1/[1 + (I_3/0,7)^n]$, $\eta_2(I_3) = 1/[1 + (0,7/I_3)^n]$, отримаємо просту і досить точну залежність:

$$\hat{E} = \frac{\beta_1 I_3 + \beta_2 I_3^3}{1 + (I_3/0,7)^n} + \frac{\beta_3 + \beta_4 I_3}{1 + (0,7/I_3)^n} \quad (4.42)$$

Залежність відносної СКП від степеню n в моделі (4.33) подано в таблиці 4.2.

Табл. 4.2. Залежність відносної СКП

n	2	4	8	10	20	40	80	100
СКП %	80	38	11	8	4	3	1,9	2,1

Подання моделі (4.42) дозволяє, наприклад, аналітично визначити у будь-якій точці величину чутливості E до I_3 , пропорційну магнітній проникності μ середовища ДПС і використати її для побудови розімкненої системи автоматичного регулювання напруги ГПС або швидкості обертання ДПС, діагностувати стан магнітного кола індуктора МПС тощо. У даному прикладі $\eta_1(I_3)$ дорівнює n послідовно увімкненим низькочастотних фільтрів частоти ω ; $\eta_2(I_3)$ – високо-частотних, $\omega = I_3$.

4.4.4. Аналітична модель залежності температури θ у камері горіння на ТЕЦ від витрат повітря $G_{\text{пов}}$ і палива $G_{\text{пал}}$

Задача оптимізації режиму горіння актуальна для теплових електростанцій. Температура у камері згоряння за умови фіксованих витрат палива (рис. 4.14) кусково-аналітично залежить (4.43) від витрат повітря:

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \frac{624,6G_{\text{пов}}}{0,1 + 0,23G_{\text{пов}}}, & 0 \leq G_{\text{пов}} \leq 7,5 \text{ кг/с}, \\ \frac{4650 + 4,6G_{\text{пов}}}{0,1 + 0,23G_{\text{пов}}}, & G_{\text{пов}} > 7,5 \text{ кг/с}. \end{cases} \quad (4.43)$$

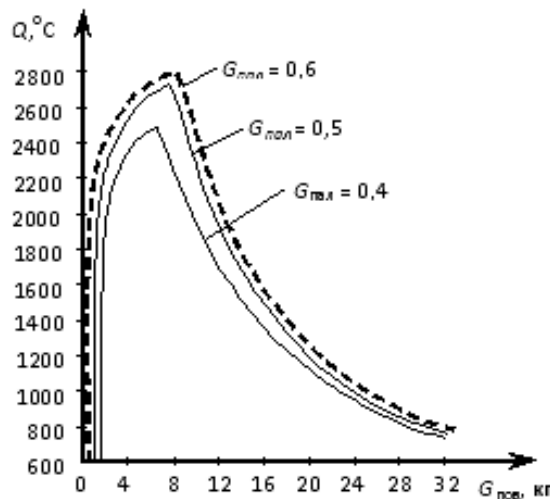


Рис. 4.14. Множина залежностей $\theta(G_{\text{пов}}, G_{\text{пав}})$

Логіко-аналітичний опис (4.43) можна, згідно до запропонованого методу, замінити аналітичним для всього діапазону зміни $G_{\text{пов}}$:

$$\hat{\theta}(G_{\text{пов}}) = \frac{624,6G_{\text{пов}}\eta_1(G_{\text{пов}})}{0,1 + 0,23G_{\text{пов}}} + \frac{(4650 + 4,6G_{\text{пов}})\eta_2(G_{\text{пов}})}{0,1 + 0,23G_{\text{пов}}}. \quad (4.44)$$

У табл. 4.3 наведено відносну СКП апроксимації кусково-аналітичної моделі (4.43) аналітичною (4.44) залежно від числа m у вагових функціях η_1 , η_2 , які подібні використаним у моделі (4.42).

Доцільно величину n обмежити за умови, щоб СКП моделі була близькою до СКП вимірів θ , а для точних вимірів – до значень $\theta^\circ C$ у зоні стикування.

Табл. 4.3. Залежність відносної СКП від n

п	2	4	8	10	20	40	80	100
СКП %	17	5,6	1,9	1,4	0,7	0,2	0,02	0,004

4.4.5. Аналітична модель нелінійності характеристики заслінки газопроводу ТЕЦ

Якщо треба виділити більше двох суміжних областей, додатково скористаємося “смуговими фільтрами” - ваговими функціями. Відома структура математичної моделі залежності моменту M затвору безопорної поворотної заслінки трубопроводу від кута обертання α :

$$M = a(\alpha)\Delta PD^3, \quad (4.45)$$

де ΔP – перепад тиску на диску; D - діаметр диска, який обертаючись на кут α , змінює момент M .

Невідому залежність коефіцієнта $a(\alpha)$ (рис. 4.15) доцільно представити кусково-аналітичною моделлю, а саме – двома параболою та прямою

$$\hat{a}(\alpha) = \begin{cases} \beta_1 \alpha^2, & \alpha \in [0, 60^\circ], \\ \beta_2 + \beta_3(\alpha - 70^\circ)^2, & \alpha \in [60^\circ, 80^\circ], \\ \beta_4 + \beta_5(\alpha - 80^\circ), & \alpha \in [80^\circ, 90^\circ], \end{cases} \quad (4.46)$$

яка приводиться до однієї аналітичної залежності:

$$\hat{a}(\alpha) = \beta_1 \alpha^2 \eta_1(\alpha) + [\beta_2 + \beta_3(\alpha - 70^\circ)^2] \eta_2(\alpha) + [\beta_4 + \beta_5(\alpha - 80^\circ)] \eta_3(\alpha), \quad (4.47)$$

де вагові функції $\eta_i(\alpha)$ мають (подібно до частотних фільтрів) такий вигляд:

$$\eta_1(\alpha) = \frac{1}{1 + (\alpha/60)^n}, \quad \eta_2(\alpha) = \frac{-1}{(1 + (\alpha/80)^n)(1 + (60/\alpha)^n)}; \quad \eta_3(\alpha) = \frac{1}{1 + (80/\alpha)^n},$$

де n – досить велике число (20–80) послідовно ввімкнених “фільтрів”, що вибрано за умови близькості СКП моделі (4.47) до СКП вимірів.

4.4.6. Аналітична модель вольт-амперних характеристик транзисторів

Недоліки відомих способів побудови статичної кусково-аналітичної нелінійної характеристики об'єкту ідентифікації єдиною аналітичною моделлю є те, що така залежність за заданої точності апроксимації може бути надто складною, у той час як на окремих ділянках локальні моделі можуть бути досить простими. Як правило, шукану залежність на всьому діапазоні подають у вигляді суми

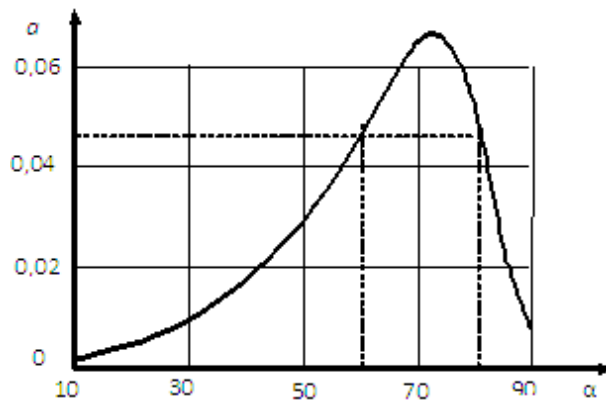
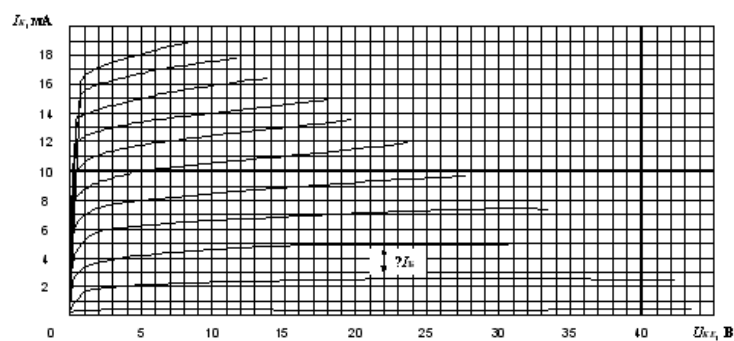


Рис. 4.15. Характеристика заслінки газопроводу

відомих (базисних) функцій, коефіцієнти яких підбирають за умови найкращої (за відповідним показником) апроксимації експериментально знятої залежності відповідною моделлю. Така модель може призвести до пульсації у проміжках між експериментально знятими точками, як було показано на рис. 4.13.

У випадку, якщо нелінійність багатовимірна $y(x_1, \dots, x_n)$ кусково- поліноміальна, її об'єднання в єдину аналітичну досягається аналогічно одновимірній, тільки функції ваги будуть багатовимірними $\eta_i(x_1, \dots, x_n)$, де x_k – незалежні змінні. Досить просто можна їх подати у вигляді добутків часткових одновимірних функцій $\eta_{ij} = \eta_i(x_j)$, тобто

$$\eta_i(x_1, \dots, x_n) = \eta_{i1}(x_1)\eta_{i2}(x_2) \dots \eta_{in}(x_n).$$


Рис. 4.16. ВAX транзистора МП25, МП26, $\Delta I_B = 0,1$ mA

Для прикладу розглянемо вольт-амперну характеристику (ВAX) біполярного транзистора (рис. 4.16). Такі та їм подібні одно- і багатовимірні залежності

можна описати кусково-аналітичними функціями. Але такий опис не буде суто аналітичним, бо вони доповнюються логічними не аналітичними функціями. Кусково-лінійна залежність $I_k(U_{KE})$ (рис. 4.17) для фіксованого значення струму I_B транзисторів МП25, МП26 дорівнює:

$$\hat{I}_K(U_{KE}, I_{B_i}) = \begin{cases} \beta_{1i} U_{KE}, & U_{KE} < 0,8V, \\ \beta_{2i} + \beta_{3i} U_{KE}, & U_{KE} \geq 0,8V, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.48)$$

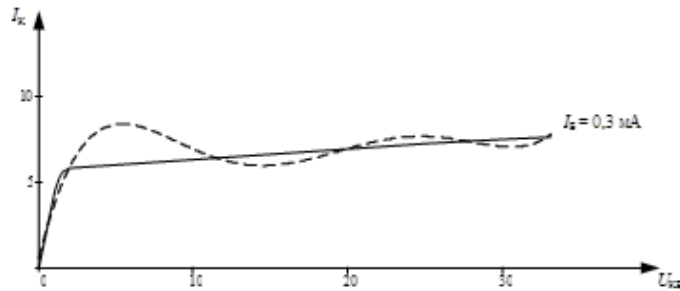


Рис. 4.17. Апроксимація ВАХ транзистора поліномом п'ятого степеню

Для того, щоб позбутися логічних складових опису, замінимо логічні складові аналітичними для всього діапазону зміни відповідних аргументів. Тобто, запровадимо функції ваги η_1, η_2 які, подібно до частотних фільтрів, виділяють із бажаною точністю Δ окремі підобласті всього діапазону. Тоді замість кусково-аналітичної моделі (4.48) отримаємо аналітичну на всьому інтервалі U_{KE} модель:

$$\hat{I}_K = \beta_{1i} U_{KE} \eta_1 + (\beta_{2i} + \beta_{3i} U_{KE}) \eta_2, \quad (4.49)$$

де

$$\eta_1(U_{KE}) = 1/[1 + (U_{KE}/0,8)^n], \quad \eta_2(U_{KE}) = 1/[1 + (0,8/U_{KE})^n], \quad n \geq 1.$$

При описі цієї залежності єдиним у всьому діапазоні степеневим поліномом матимемо наближену апроксимацію із пульсацією між вимірами (рис. 4.17, пунктир). Так, опис поліномом п'ятого степеню має незначну, для заданих точок, відносну середньоквадратичну похибку (СКП) 0,79 %, але містить значні пульсації між ними. Для порівняння СКП моделі (4.49) СКП дорівнює 2,2 %. Враховуючи, що ВАХ транзистора двовимірною кусково-поліноміальна, її об'єднання в єдину аналітичну досягається аналогічно одновимірній, тільки функції ваги $\eta_i(x_1, x_2)$, де x_k - незалежні змінні U_{KE}, I_K задаються у вигляді добутків часткових функцій, тобто

$$\eta_i(x_1, x_2) = \eta_{i1}(x_1) \eta_{i2}(x_2).$$

За допомогою функції $\eta_3(I_K) = 1/[1+(I_B/1,1)^n]$ обмежимо модель (4.49) діапазоном I_K від 0 до 1,1 мА і апроксимуємо залежність коефіцієнтів β_i , ($i = 1, 2, 3$) від другої змінної I_B лінійною моделлю:

$$\hat{\beta}_i(I_B) = \gamma_{i0} + \gamma_{i1}I_B. \quad (4.50)$$

У результаті отримуємо єдину аналітичну модель

$$\hat{I}_K = \beta_1(\gamma)U_{KE}\eta_3\eta_1 + [(\beta_2(\gamma) + \beta_3(\gamma)U_{KE})\eta_3]\eta_2,$$

графік якої збігається із графіком, наданим у довіднику (рис. 4.18) з СКП 2,6%, а для робочої області вона складає менше 1 %.

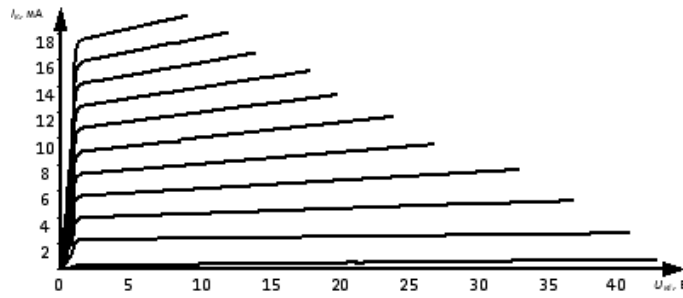


Рис. 4.18. Графік аналітичної моделі ВАХ транзистору

4.4.7. Аналітична модель асинхронного електроприводу відцентрового насосу

Експлуатуючи відцентровий насос у магістральній мережі водопостачання, важливо знати, яким чином він себе поведе, якщо режим роботи буде змінюватись. Практичний інтерес представляє можливість застосування насосу для забезпечення різних вимог технологічних споживачів, коли мають місце зміни трьох основних взаємозв'язаних параметрів: витрат (Q), напору (H) та числа обертів (n) робочого колеса, пов'язаного з валом потужного асинхронного електродвигуна [73].

На рис. 4.19 наведено сукупність ($Q - H$ -характеристик насосу Д6300-80-2 із числом обертів робочого колеса $n_1 = 730$ об/хв та $n_2 = 585$ об/хв, зовнішній діаметр робочого колеса $D_1 = 1020$ мм, $D_2 = 970$ мм та $D_3 = 915$ мм, де напір H вимірюється у метрах [м], витрата Q - у [м³/год]. Напірна характеристика має кілька зон. Початкова точка відповідає роботі насосу на закриті засувку на напірному патрубку. Оптимальна точка напірної характеристики відповідає максимальному значенню ККД. Якщо напірна характеристика подається кратним рядом Тейлора чи його степеневим аналогом

$$H(Q, D, H) = H_0 + \sum \alpha_i Q_i + \sum \beta_i D_i + \sum \gamma_i n_i +$$

$$+ \sum_i \sum_j \alpha_{ij} Q_i D_j + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1} \beta_{ij} Q_i n_i + \dots + \sum_j \gamma_{ij} n_i^2, \quad (4.51)$$

залишається проблема немонотонності моделі (4.50) через високий порядок поліномів, якщо цією залежністю подається весь діапазон витрати Q (від 0 до 8000 м³/год). Тому залежність $H(Q)$ має кусково-поліноміальний характер: у діапазоні витрати від 0 до 4000 м³/год вона слабо нелінійна, а у робочій зоні від 4000 до 8000 м³/год має місце зростаюча нелінійність. Точне подання такої залежності на всьому діапазоні зміни Q потребує застосування поліному високого степеню і досить складного та коштовного експерименту. При цьому, якщо кількість точок обмежена, між ними, як уже відмічалось, виникають коливання (рис. 4.20) через значний порядок моделі (4.50). Для вирішення цієї проблеми

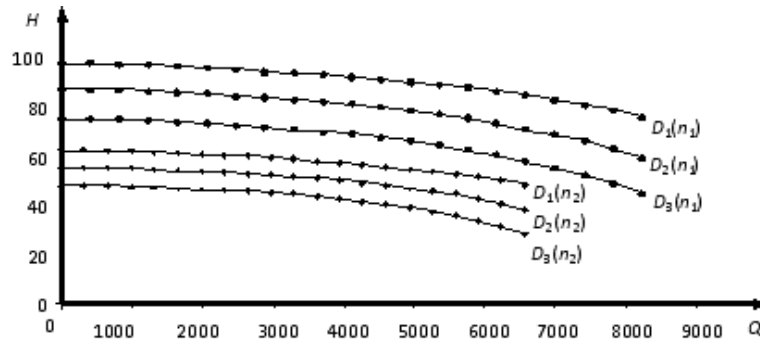


Рис. 4.19. Множина напірних характеристик насоса Д6300-80-2

залежність $H(Q, \alpha)$ подамо сумою двох простих локальних моделей, дія яких обмежується ваговими функціями $\eta(Q)$:

$$H(Q, \alpha) = H_1(Q, \alpha') \eta_1(Q) = H_2(Q, \alpha'') \eta_2(Q), \quad (4.52)$$

де

$$H_1(Q, \alpha) = \alpha'_0 + \alpha'_1 Q + \alpha'_2 Q^2; \quad H_2(Q, \alpha) = \alpha''_0 + \alpha''_1 Q + \alpha''_2 Q^2;$$

$$\eta_1(Q) = \frac{1}{1 + (\bar{Q}/K_1)^n}; \quad \eta_2(Q) = \frac{1}{1 + (K_1/\bar{Q})^n}; \quad \bar{Q} = Q/Q_{\max};$$

$$\alpha'_i = \beta'_0 + \beta'_1 D + \beta'_2 D^2; \quad \alpha''_i = \beta''_0 + \beta''_1 D + \beta''_2 D^2;$$

$$\beta'_{ij} = \gamma'_{0ij} + \gamma'_{1ij} n; \quad \beta''_{ij} = \gamma''_{0ij} + \gamma''_{1ij} n.$$

Через селективну спроможність вагових функцій $\eta_i(Q)$ матриця МНК буде блочно-діагональною. Тоді вектори α' та α'' моделі (4.52) визначаються взаємно незалежно, а їх розмірність незначна. Разом з тим зазначена модель спроможна з високою точністю подати залежність $H(Q, D, n)$. На рис. 4.21 наведено

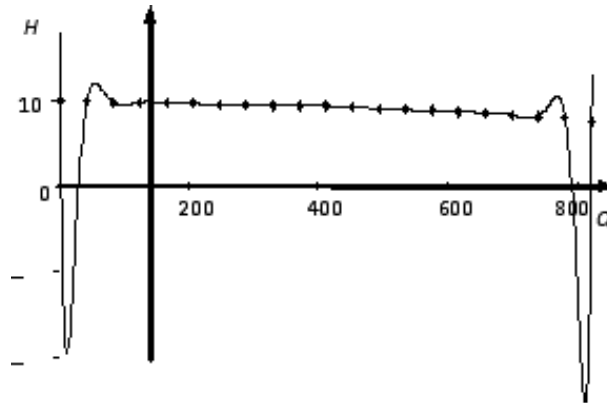


Рис. 4.20. Виникнення коливань між вимірами внаслідок високого порядку поліномау (4.50)

результат застосування моделі (4.52) для побудови сукупності напірних характеристик насоса Д6300-80-2 з електричним приводом. У результаті застосування запропонованого методу побудови та наступної композиції простих окремих моделей у загальну, а також процедури регуляризації, отримано достатньо точну (нормована середньоквадратична похибка складає 0,15 % від максимального значення H , тобто 0,154 м) порівняно просту модель (4.52) залежності $H(Q, D, n)$, яка може бути використана для оптимізації режиму роботи насосної станції в ЕТК (головна мета I в БАСІ), а саме, миттєве регулювання обертів n залежно від витрат Q за умови стабільності напору H .

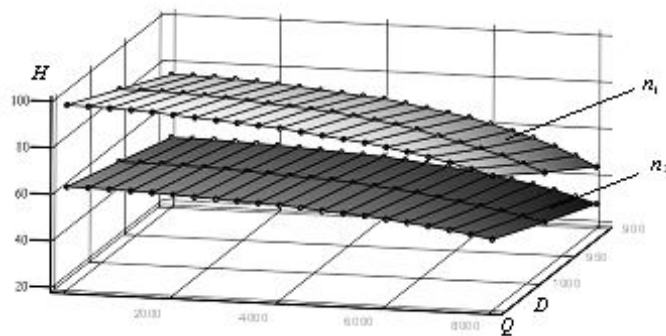


Рис. 4.21. Модель залежності напору H від витрати Q , зовнішнього діаметра робочого колеса D та кількості обертів n асинхронного електродвигуна

4.4.8. Побудова аналітичної моделі $\{\Sigma, \beta\}$ з метою забезпечення інваріантності напруги $U_{\text{я}}$ до струму $I_{\text{я}}$ якоря генератора постійного струму (ГПС)

Рівняння змінних $U_{\text{я}}$, $E_{\text{я}}$, $I_{\text{я}}$, $I_{\text{з}}$, $U_{\text{з}}$ стану ГПС:

$$\begin{aligned} U_{\text{я}} &= E_{\text{я}}(I_{\text{з}}) - I_{\text{з}} R_{\text{я}}; \\ L_{\text{з}} \frac{dI_{\text{з}}}{dt} + I_{\text{з}} R_{\text{я}} &= U_{\text{з}}(t), \end{aligned} \quad (4.53)$$

де параметрами є $R_{\text{я}}$ – електричний опір якоря ГПС; $L_{\text{з}}$, $R_{\text{з}}$, $I_{\text{з}}$ – індуктивність і опір кола збудження магнітного потоку струмом $I_{\text{з}}$, від якого нелінійно залежить електрорушійна сила $E_{\text{я}}$. Згідно до вище наведених методів непараметричної і кусково-аналітичної ідентифікації було отримано (рис. 4.22, а) нелінійну статичну залежність $E(I_{\text{я}})$:

$$E(I_{\text{я}}) \approx (\beta_0 + \beta_1 I_{\text{я}} + \beta_2 I_{\text{я}}^3) \eta_1(I_{\text{я}}) + \beta_3 + \beta_4 I_{\text{я}} \eta_2(I_{\text{я}}) \quad (4.54)$$

із ваговими функціями:

$$\eta_1(I_{\text{я}}) = 1/[1 + (1,43(I_{\text{я}})^{40})]; \quad \eta_2(I_{\text{я}}) = 1/[1 + (0,73(I_{\text{я}}^{-1})^{40})]. \quad (4.55)$$

Параметри $\beta_0 \div \beta_4$ отримано по МНК із непараметричної моделі (рис. 4.22), а непараметричну отримано за умови мінімуму показника Пухова–Хатіашвілі [4]. Для компенсації інерційності і лінеаризації каналу управління ГПС послідовно увімкнемо (рис. 4.24) інверсну до моделі (4.54), (4.55) нелінійну коригувальну ланку (КЛ). Інверсна до залежності (4.54) модель $\hat{I}_{\text{з}}(E_{\text{я}})$ (рис. 4.23, б) отримана як рішення рівняння (4.54):

$$\hat{I}_{\text{з}}(E_{\text{я}}) = \hat{I}_{\text{з1}}(E_{\text{я}}) \eta_1(E_{\text{я}}) + \hat{I}_{\text{з2}}(E_{\text{я}}) \eta_2(E_{\text{я}}), \quad (4.56)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{I}_{\text{з1}}(E_{\text{я}}) &= \sqrt[3]{\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{\beta_2} + \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{3\beta_2}\right)^3 + \left(\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{2\beta_2}\right)^2}} + \\ &+ \sqrt[3]{\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{\beta_2} - \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{3\beta_2}\right)^3 + \left(\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{2\beta_2}\right)^2}}, \\ \hat{I}_{\text{з1}}(E_{\text{я}}) &= \frac{E_{\text{я}}}{\beta_4} - \frac{\beta_3}{\beta_4}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\eta_1(E_{\text{я}}) = 1/[1 + (0,0067 E_{\text{я}})^n]; \quad \eta_2(E_{\text{я}}) = 1/[1 + (150/E_{\text{я}}^{-1})^n]. \quad (4.58)$$

Як витікає із рівняння (4.54), (4.55) ГПС і (4.56), (4.58) коректуючої ланки, якщо у результаті параметричної ідентифікації оцінки $\hat{L}_{\text{з}}$, $\hat{R}_{\text{з}}$, $\hat{R}_{\text{я}}$, $\hat{E}_{\text{я}}(I_{\text{з}})$

близькі до дійсних значень параметрів об'єкту, у системі (рис. 4.24) має місце лінеаризація каналу управління по I_3 , майже повна компенсація інерційності залежності I_3 від U_3 і залежності (4.53) U_3 від I_3 , як впливу, що збурює:

$$U_3 = U_3^* - (R_3 - \hat{R}_3)I_3 \quad (4.59)$$

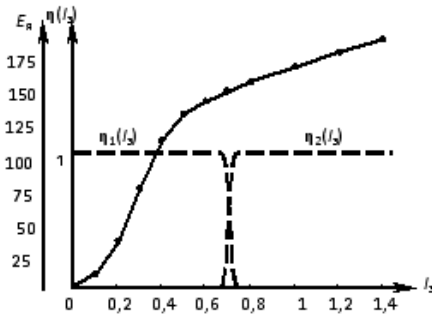


Рис. 4.22. Графіки $E_3(I_3)$ (...) та її апроксимація (-)

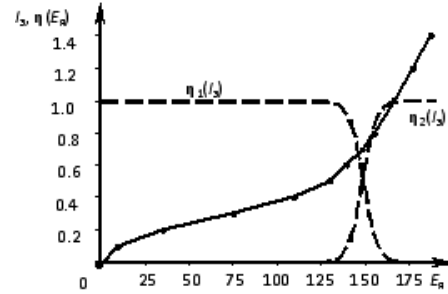


Рис. 4.23. Графіки $I_3(E_3)$ (...) та її апроксимація (-)

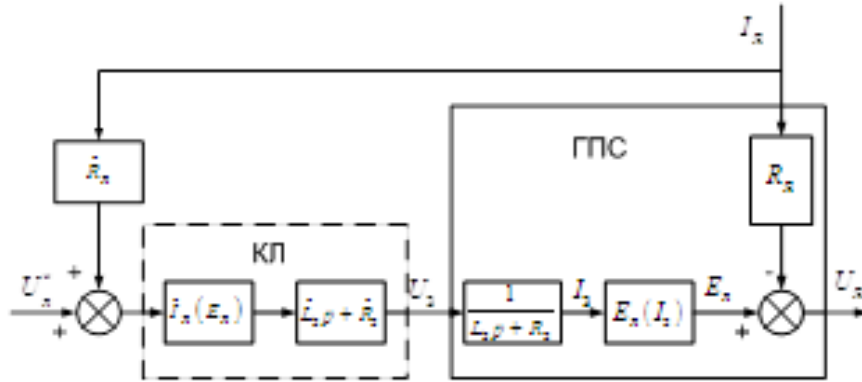


Рис. 4.24. Лінеаризована та інваріантна до збурення I_3 система розімкненого керування ГПС

Таким чином, завдяки досить точній ідентифікації параметрів R_3 , L_3 і R_3 і побудові моделі (4.56), розімкнена система буде мати точнісні характеристики не гірше, ніж замкнена, при цьому гарантовану стійкість і високу швидкодію [74].

4.4.9. Побудова аналітичної моделі $\{\Sigma, \beta\}$ сонячної батареї з метою максимізації її потужності

В автономній системі “сонячна батарея – навантаження”, оптимальне (в сенсі зняття максимальної потужності керування) полягає у регулюванні опору навантаження R_n залежно від електрорушійної сили E і струму I батареї, які, своєю чергою, залежать від освітлення, повільна зміна якого у часі носить випадковий характер. Статистично оптимальна система, що налаштована на найбільш імовірну освітленість, буде мало ефективною. Максимальна ефективність досягається, якщо періодично за дуже короткий час визначати з динаміки вольт-амперну характеристику (ВАХ) $U(t)$ батареї і відповідно до неї регулювати R_n . Для цього батарею за допомогою електронних ключів вимикають від навантаження і підключають до котушки індуктивності L із невеликим додатковим опором R_d , з якого знімається напруга, що пропорційна струму $i(t)$. Сигнали напруги і струму (рис. 4.25) фіксуються і обробляються швидкодіючим електронним пристроєм, який на основі вище розглянутих методів визначає ВАХ $U(I)$, максимум U^*I^* потужності UI і відповідно до нього оптимальний опір R_H^* :

$$R_H^* = U^*/I^*. \quad (4.60)$$

Виміри (рис. 4.25) $u(t)$ і $i(t)$ мають випадкову шумову складову, динамічну коливальну складову на початку процесу розряду батареї на $R_d L$ – навантаження (коливальність пов’язана із “паразитною” ємністю C_0), систематичну майже сталу похибку ΔU , пов’язану із впливом на $u(t)$ опору паралельної до батареї $R_d L$ гілки.

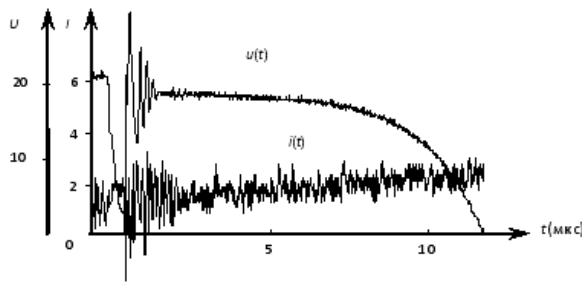
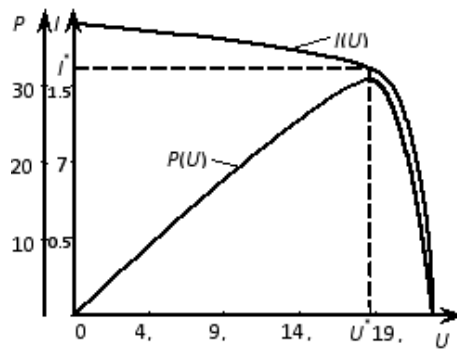
$$\Delta U = E - \frac{E/R_{\text{вн}} + L/R_d \cdot di/dt}{1/R_{\text{вн}} + 1/R_d}.$$

За досить великої сталої L/R_d початкова частина експоненти струму заряду котушки має майже лінійний характер, тому похідна di/dt майже стала. Статичну непараметричну модель $U(I)$ (рис. 4.26) і параметричну, що майже збігається із нею, отримано із даних нелінійної динаміки відповідно до методів, що розглянуто:

$$U(I) = \eta_1(I)(\alpha_1 + \alpha_2 I^2) + \eta_2(I)(\beta_1 + \beta_2 I + \beta_3 I^2), \quad (4.61)$$

де $\alpha_1 = 20$, $\alpha_2 = -1,06$, $\beta_1 = -315$, $\beta_2 = 412$, $\beta_3 = -149$.

Аналітичну модель залежності потужності P від напруги отримуємо як добуток $U(t)$ на струм I (рис. 4.26). Оптимальні значення I^* струму, визначені за умови максимальної потужності батареї, $I^* = \arg \max_U P = 1,56 \text{ А}$, оптимальне навантаження (4.60) $R^* \approx 12,3 \text{ Ом}$ та потужність $P_{\text{max}} = 29,9 \text{ Вт}$.

Рис. 4.25. Графіки вимірів $u(t)$, $i(t)$ Рис. 4.26. Непараметрична і параметрична (4.61), що майже збігається з нею, моделі ВАХ $I(U)$ та залежність $P(U)$

4.4.10. Виявлення аналітичних закономірностей $\{\Sigma, \beta\}$ у вібраціях електричних машин з метою діагностики та прогнозування їх стану

У будь-якій машині, яка рухається чи має рухомі деталі в ЕТК, обов'язково присутні вібрації, за якими можна однозначно ідентифікувати машину, здійснювати діагноз та прогнозування її працездатності. Це дає можливість для профілактики та попередження відмов (показник Λ в БАСІ), на перший погляд раптовий характер яких є найчастіше причиною серйозних аварій. На сьогоднішній день недостатньо опрацьованими залишаються питання встановлення граничних характеристик вібрацій, і як наслідок, визначення $A_{\text{доп}}$ залишкового ресурсу роботи. Це становить важливу задачу діагностики (показник Λ). Оцінювати стан того чи іншого елементу машини виявилось можливим не тільки за амплітудою вібрацій A , яка не повинна перевищувати допустимого значення $A_{\text{доп}}$, а й за швидкістю зміни амплітуди акустичного сигналу $a = dA/dt$.

Від початку роботи елементу системи до виходу його з ладу амплітуда A акустичного сигналу змінюється за характерною кривою (рис. 4.27, 4.28). На періоді припрацювання її амплітуда нижче номінальної $A_{\text{ном}}$. Далі поступово зростає в інтервалі, що відповідає нормальному режиму експлуатації елементу. Після цього настає період інтенсивного зносу і накопичення утомних напруг. Цей період характеризується інтенсивним зростанням амплітуди, досягненням граничного значення A_{max} , за якого відбувається руйнування елементу. У поточний момент часу T_i , за відомого граничного показника $A_{\text{гр}}$ і характеру зміни кривої, можна визначити залишковий ресурс елементу.

Обґрунтування граничних значень амплітуд і вивчення характеру залежності амплітудної кривої у передграничному періоді є завдання теоретичних і експериментальних досліджень [8]. Працюючу машину можна подати деяким пе-

ретворювачем G вектору β параметрів β_i (які визначають її технічний стан) у вектор діагностичних ознак U . Тоді задача діагностики машини полягатиме в установленні функціонального зв'язку між β і U :

$$\{U\} = G^{-1}\{\beta\} \quad (4.62)$$

або у скалярному вигляді

$$\beta_i = f_i(u_1, \dots, u_m). \quad (4.63)$$

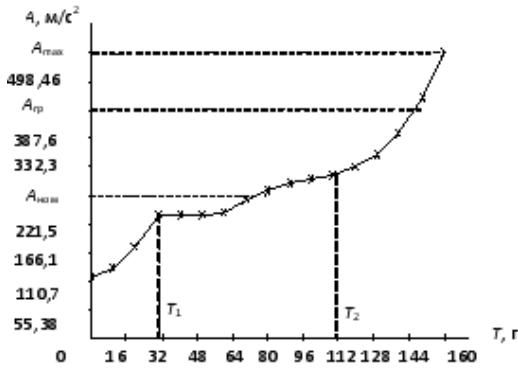


Рис. 4.27. Зміна з плином часу рівня вібрації підшипника гойдання (кочення)

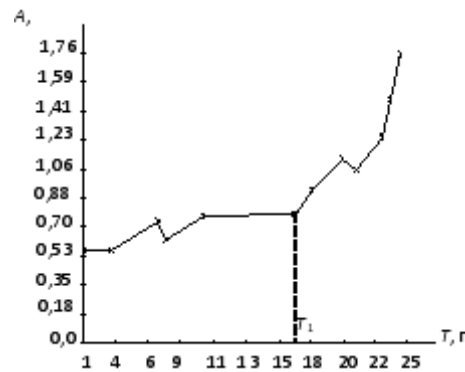


Рис. 4.28. Зміна з плином часу рівня вібрації підшипника гойдання (кочення)

В окремому випадку система (4.62) розпадається на n одновимірних залежностей [73]

$$t_i = f_i(u_j), \quad i = \overline{1, n} \quad (4.64)$$

Недоліком такого методу є неадекватність такої моделі більшості реальних залежностей $\beta(u)$ унаслідок їх кусково-аналітичності, що, наприклад, спостерігається у залежності від часу T рівня вібрації редуктора на валу електродвигуна внаслідок зношеності зубців шестерень (рис. 4.26), а також залежності вібрації підшипника кочення від часу (рис. 4.28).

Для виключення надскладних моделей (степеневих поліномів високого степеню), які за обмеженої кількості точок можуть призводити до пульсації модельної залежності між точками (рис. 4.29, точки між $T = 11$ і $T = 12$), доцільно скористатися методом кусково-аналітичного опису простими локальними залежностями з подальшим їх об'єднанням в єдину аналітичну залежність шляхом використання вагових функцій $\eta(U)$, які аналітичні у всьому діапазоні U , але близькі до одиниці у своєму і до нуля в чужих діапазонах. Так, для залежності $A(T)$ (рис. 4.27) маємо три області і три локальні моделі:

$$A_1(T) = \beta_{01} + \beta_{11}T, \quad A_2(T) = \beta_{02} + \beta_{12}(T - T_1), \quad A_3(T) = \beta_{03} + \beta_{13}(T - T_1)^2, \quad (4.65)$$

які об'єднано в єдину модель (рис. 4.30).

$$tA(T) = \eta_1(T)A_1(T) + \eta_2(T)A_2(T) + \eta_3(T)A_3(T), \quad (4.66)$$

із ваговими функціями

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 1/[1 + (T_1/T)^n]; \quad \eta_3 = 1/[1 + (T_2/T)^n]; \quad n \in [10 \div 30]; \\ \eta_2 &= 1/[1 + (T_1/T)^n] \cdot 1/[1 + (T/T_1)^n]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

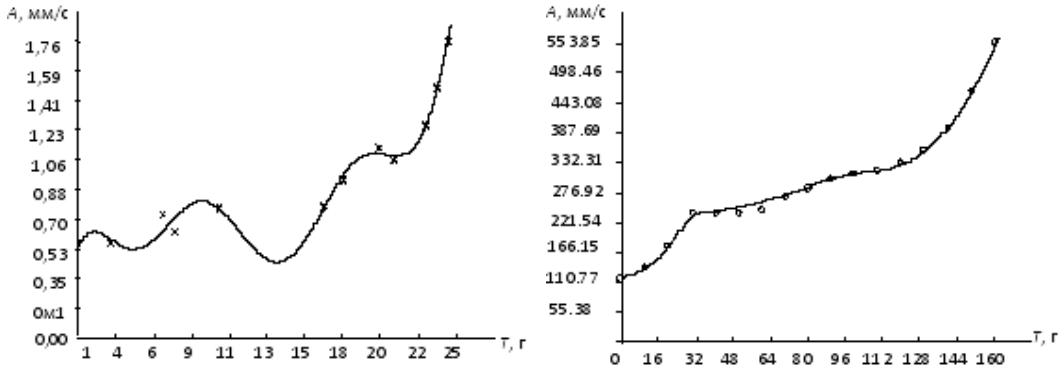


Рис. 4.29. Виникнення пульсацій при апроксимації поліномом 9-го степеню

Рис. 4.30. Модель зміни рівня вібрації редуктора

Аналогічно для $A(T)$ на рис. 4.28 отримано модель (рис. 4.31):

$$\begin{aligned} A(T) &= \eta_1 A_1(T) + \eta_2 A_2(T), \quad A_1(T) = \beta_{01} + \beta_{11}T; \quad A_2(T) = \beta_{02} + \beta_{12}(T - T_1)^3; \\ \eta_1 &= 1/[1 + (T/T_1)^n]; \quad \eta_2 = 1/[1 + (T_1/T)^n]; \quad n \in [10 \div 30]. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Аналітичність моделей (4.66), (4.68), тобто неперервність функції та її похідних, дає можливість розширити множину діагностичних ознак, наприклад, похідними від A по u_i (4.64):

$$\frac{dA_i}{du_j} = f_{ij}(u_j); \quad \frac{dA_i}{du_j^2} = f'_{ij}(u_j); \quad (4.69)$$

які вказують на темп зміни A_i від u_j в (4.64). Так, маючи гладку аналітичну залежність, за другою похідною можна виявити моменти переходу машини із зони нормальної експлуатації у передаварійну зону. На рис. 4.32 для моделі (4.66) подано її першу і другу похідні від A по T , які чітко (особливо друга похідна) вказують на перехід з першої зони у другу ($T = 30$), і з другої у третю ($T = 110$).

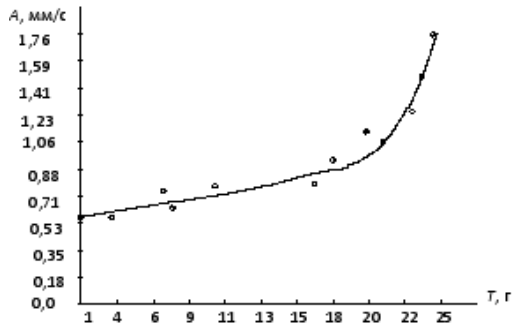
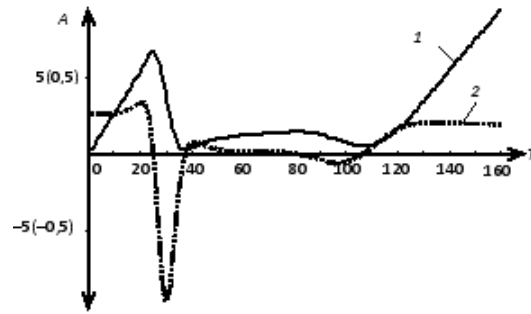


Рис. 4.31. Модель зміни рівня вібрації підшипника

Рис. 4.32. Перша (1) і друга (2) похідні від A по T моделі (4.66)

З лінійності першої похідної для передаварійної ділянки рис. 4.30 можна розрахувати і спрогнозувати час, за якого амплітуда A досягне аварійного значення $A_{\max}$ і своєчасно попередити аварію:

$$A_{\max} - A_i = \frac{dA}{dT}(T_a - T_i),$$

звідки

$$T_a = \frac{A_{\max} - A_i}{dA/dT} + T_i.$$

Здається доцільним також використовувати в якості ознаки не тільки амплітуду A вібрацій, а в цілому спектр вібрацій, розкладаючи сигнали віброметра у ряд Фур'є. Чим ширше спектр сигналу, тим більш прямокутні імпульси вібрацій, тобто крутіші їх фронти і, як наслідок, більші руйнуючі сили вібрацій, які пропорційні прискоренню маси у момент удару. Таким чином, використання метода кусково-аналітичного опису простими локальними моделями з подальшим об'єднанням їх в єдину аналітичну модель шляхом помноження кожної з них на аналітичну у всьому діапазоні вагову функцію і складання їх разом, дає можливість отримати просту та достатньо точну аналітичну модель виду (4.64).

Адаптивне керування ТП

5.1. Опис технології виробництва кабелю

5.1.1. Електричний кабель із полімерною ізоляцією на надвисокій напруги як продукт виробництва

Розвиток світової електротехніки зі створення кабельних ліній високої пропускнуєї спроможності стримувався труднощами досягнення необхідної електричної міцності ізоляції. Пошук ізоляційних матеріалів в 70-ті роки ХХ століття привів до технології виготовлення кабелів з твердою ізоляцією із “зшитого” поліетилену (міжнародне позначення XPLE) [153]. Завдяки високій електричній міцності та надійності з терміном служби не менше 30 років, простоті експлуатації, ремонту та екологічній чистоті високовольтні кабелі з ізоляцією XPLE стали найпоширенішими у діапазоні напруг до 500 кВ. Кабельні лінії на їх основі стають реальним засобом доставки електроенергії у найбільші центри електроспоживання (рис. 5.1). Промислове виробництво кабелів із ізоляцією XPLE на надвисоку напругу 330 кВ освоєно в Україні на заводі “Південкабель” у м. Харків. В табл. 5.1 приведено позначення марки кабелів з ізоляцією із зшитого поліетилену. Наприклад, позначення кабелю із однією алюмінієвою струмопровідною жилою перерізом 500 мм² на напругу 330 кВ: “Кабель АПвЭгаП-330 1х500 ТУ У 31.3-00214534-061: 2008”.

Властивості зшитого поліетилену: електрична міцність за температури 20°С – близько 50 кВ/мм; діелектрична проникність за температури 20°С – не більше 2,5; тангенс кута діелектричних втрат за температури 90°С – не більше 10⁻⁴; стійкість до теплової деформації (нагрів зразку до 200°С під навантаженням 20 Н/см² впродовж 15 хв: подовження під навантаженням за 200°С – не більше 175 %, залишкове подовження після зняття навантаження і охолодження – не більше 15 %; водопоглинання за температури 85°С і тривалості випробування 14 діб – не більше 1 мг/см². Недоліком перших кабелів високої напруги з ізоляцією із зшитого поліетилену було інтенсивне старіння полімерної ізоляції. Встановле-

Табл. 5.1. Марки кабелів з ізоляцією із зшитого поліетилену

Струмopрoвіднa жила	А	Алюмінієвa жила
	–	Міднa жила (без позначення)
Ізоляція	Пв	Ізоляція із зшитого поліетилену
Екран	Э	Мідний екран по ізольованій жилі
	г	Поздовжня герметизація екрану
		водоблокуючими стрічками
	га	Поздовжня і поперечна герметизація
		екрану водоблокуючими матеріалами
		і алюмополімерною стрічкою
Зовнішня оболонка	П	Зовнішня оболонка з поліетилену
		або сополімера поліетилену
	Пу	Посилена поліетиленова оболонка
	Внг	Зовнішня оболонка з ПВХ пластикату,
		що не поширює горіння при
		груповій прокладці кабелів
	Внгд	Зовнішня оболонка з ПВХ пластикату,
		що не поширює горіння і з низьким
		виділенням диму та корозієактивних газів
	Пнг	Зовнішня оболонка з полімерної
		композиції, що не поширює горіння
	Пнг-НФ	Зовнішня оболонка з полімерної композиції,
		що не поширює горіння і не містить галогенів
Кліматичне виконання	–	Виконання У (УХЛ) (без позначення)
	-Т	Виконання Т (тропічне)

но, що старіння поліетилену в умовах впливу електричного поля визначається наявністю неоднорідностей в ізоляції, що виникають як у процесі виробництва, так і в початковому стані ізоляційного матеріалу. За наявності у полімерній ізоляції кабелю неоднорідностей під дією вологи і електричного поля у процесі експлуатації починають розвиватися провідні канали – “дендрити” (деревовидні утворення) або “водні тріінги” (рис. 5.3). Тріінги розвиваються на ділянках, де існує неоднорідність структури ізоляції на межі із півпровідними екранами по жилі та ізоляції, а також із неоднорідних структур, що наявні у товщі ізоляції (забруднення, включення, мікропорожнечі). Наявність тріінгів призводить до місцевих концентрацій електричного поля. Область ізоляції з тріінгом згодом піддається окисленню, ізоляція швидко старіє, у результаті може наступити її пробій. Зовнішній вигляд конструкції кабелю марки ПвЭгаПу показано на рис. 5.2;



Рис. 5.1. Загальний вигляд трифазної кабельної лінії

де позначено: 1 - мідна струмопровідна жила; 2 - внутрішній екструдований півпровідний шар; 3 - екструдована ізоляція із зшитого поліетилену; 4 - зовнішній екструдований півпровідний шар; 5 - обмотка півпровідним водоблокуючим полотном; 6 - мідний екран, виконаний у вигляді повиву мідних дротів, скріплених спірально накладеною мідною стрічкою; 7 - обмотка водоблокуючим полотном; 8 - алюмополімерна стрічка, накладена поздовжньо і зварена із зовнішньою оболонкою; 9 - екструдована посилена зовнішня оболонка з поліетилену високої щільності.

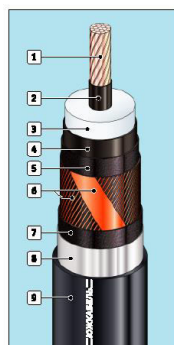


Рис. 5.2. Конструкція кабелю з ізоляцією із зшитого поліетилену заводу “Південкабель”



Рис. 5.3. Трїїнг, що зародився на чужорідному включенні в ізоляції

5.1.2. Технологічна лінія виробництва електричного кабелю

Процес виробництва кабелів з ізоляцією із зшитого поліетилену на заводі “Південкабель” реалізується на неперервній технологічній лінії нахилоного типу довжиною 250 м та висотою 30 м (рис. 5.4).

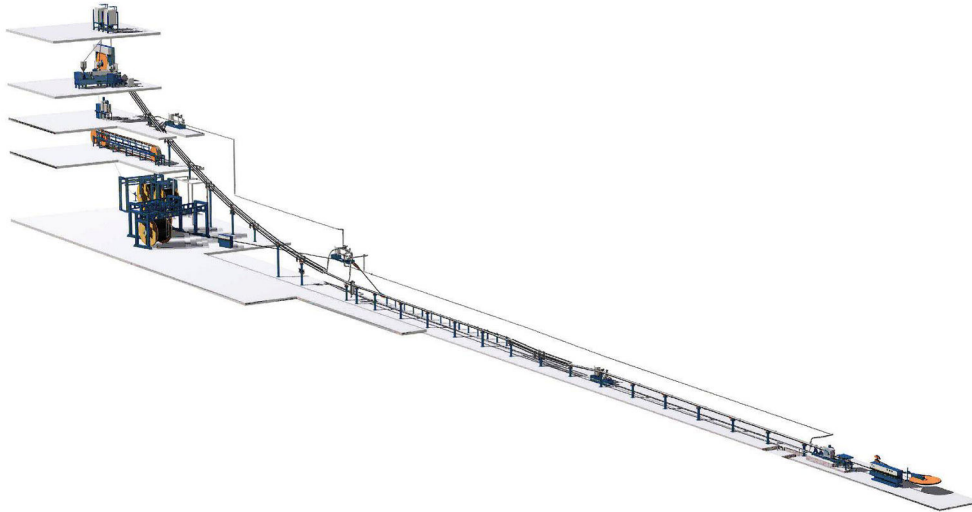


Рис. 5.4. Загальний вигляд лінії нахилоного типу з виробництва кабелю

Технологічне обладнання заводу відповідає останнім досягненням в області кабельної техніки. Застосовуються матеріали найвищої якості, що пройшли вхідний контроль. Це тріїнгостійкі надчисті ізоляційні і півпровідникові композиції для зшитого поліетилену та поліетилен високої щільності для оболонок кабелю виробництва фірми “Borealis”; ПВХ пластикати, в т.ч. зниженої горючості і зниженої пожежонебезпеки фірми “Промінвестпластик”; водоблокуючі матеріали фірм “Lantor” та “Geca Tapes”. Застосування вакуумної упаковки при транспортуванні ізоляційних матеріалів і закритого процесу їх завантаження і екструзії забезпечує максимальну чистоту ізоляції. Струмопровідні жили скручуються і ущільнюються на крутильній машині фірми “Cortinovis”. Застосування ущільнення по довжині жили дозволяє отримати високий коефіцієнт ущільнення жили та гладку поверхню. За потреби накладаються також водоблокуючі матеріали. Одночасне накладення ізоляції та півпровідникових екранів здійснюється на похилих лініях газової вулканізації фірм “Troester” та “Maillefer”. Вулканізація проходить у середовищі азоту для високих значень температури і тиску (“суха” вулканізація). Це дає можливість виключити потрапляння вологи в ізоляцію і отримати гладку та однорідну ізоляцію без пустот і сторонніх включень, із щільно прилеглими півпровідними екранами. Товщина і ексцентриситет шарів безперервно вимірюється приладами лазерного контролю. Накладення обмоток водоблокуючими стрічками, екранів із мідних дротів та стрічок проводиться

на універсальній крутильній машині Drum Twister фірми "Pourtier". Екструдуювання зовнішніх оболонок кабелів і накладення алюмополімерних стрічок (за необхідністю) відбувається на екструзійних лініях фірм "Troester" та "Maillefer", оснащених приладами вимірювання діаметру, контролю герметичності оболонки і пристроєм для маркування. Комплекс випробувального устаткування фірми "Hipotronics" дозволяє проводити випробування кабелів на наявність в ізоляції часткових розрядів, а також випробування готових кабелів підвищеною напругою.

Все обладнання має комп'ютеризоване управління технологічними процесами і випробуваннями на базі математичного, програмного та технічного забезпечення фірми "Siemens".

Підготовлена у процесі виробництва струмопровідна жила за допомогою колісного тягового пристрою зі швидкістю біля 50 м/хв подається в екструзійну головку блоку 1 трьох екструдерів, де на неї одночасно накладається три шари електроізоляції (рис. 5.5) товщина кожного шару ізоляції регулюється автоматизованими електроприводами екструдерів. Зовнішній діаметр кожного шару ізоляції вимірюється датчиками 2 із запізненням в 0,5 с.

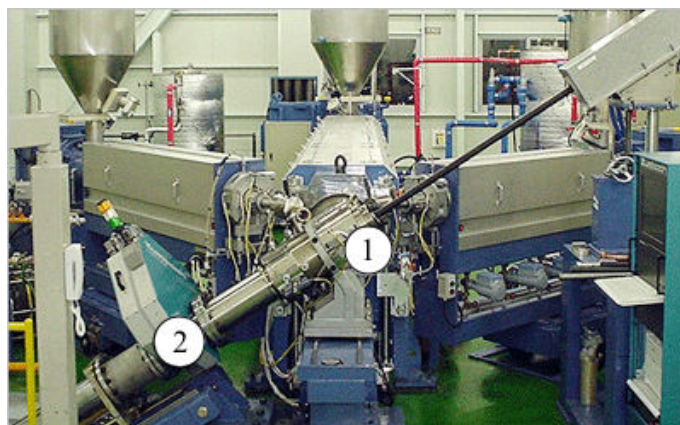


Рис. 5.5. Блок екструдерів (1) та датчики (2)

Для забезпечення максимальної чистоти ізоляції завантаження компонентів полімерної ізоляції в зону екструзії здійснюється з "чистої" кімнати (рис. 5.6). Потім ізольована жила надходить у трубу наноструктурного зміцнення (вулканізації), яка заповнена азотом під високим тиском (рис 5.7). У трубі ізоляція зшивається, набуваючи поліпшених термомеханічних характеристик, а далі охолоджується. Довжина камери вулканізації шарів ізоляції разом з камерою охолодження становить 172 м.

Для покращення якості ізоляції застосовується система попередньої температурної обробки на вході у камеру вулканізації. У першій секції труби вулканізації організовується циркуляція холодного азоту. На вході у секцію темпера-

тура азоту становить $20 - 25^{\circ}\text{C}$, на виході підвищується до $45 - 60^{\circ}\text{C}$ залежно від температурного режиму і ефективності системи вентиляції. Холодний азот зменшує температуру поверхні ізоляції (зовнішнього електропровідного екрану і частини ізоляції) від 135°C (температура після виходу з екструзійної головки) до $35-40^{\circ}\text{C}$ та до $110 - 120^{\circ}\text{C}$ у товщі ізоляції. Зовнішній шар ізоляції, охолоджуючись, рівномірно застигає, а внутрішній шар перебуває у розплавленому стані, що обумовлює прийняття ізоляцією круглої форми.



Рис. 5.6. Загальний вигляд “чистої” кімнати

У кабелях надвисокої напруги найчастіше використовуються мідні жили, які мають велику теплоємність, тому при накладанні на неї розплавленої полімерної маси внутрішній електропровідний шар та внутрішня частина ізоляції додатково охолоджуються жилою. У другій секції труби температура поверхні ізоляції підвищується у результаті нагрівання й її зовнішній шар плавиться та зшивається. Завдяки попередньому охолодженню більша частина ізоляції, що розташована ближче до жили, залишається застиглою. Діаметр цієї твердої циліндричної частини при проходженні вздовж труби вулканізації залишається відносно великим. Та частина ізоляції, що розплавлена, але незшита, залишається відносно малою і не дозволяє зовнішній частині ізоляції значно зміщуватися під власною вагою. При виході із труби вулканізації всі три шари електроізоляційної системи зшиваються повністю. Далі ізольована жила охолоджується і за допомогою накопичувача (рис. 5.9) надходить на приймальний пристрій (рис. 5.9).

Діаметр ізольованої жили 122 мм, погонна вага 270 Н/м. Металічна жила з алюмінію чи міді може бути перетином $1000 - 3000 \text{ мм}^2$ з виконанням по типу сегментованої конструкції “Мілікен”. Маса барабана подачі з струмопровідною металічною жилою становить до 20 т, а маса барабану з готовою кабельною продукцією – до 30 т.

Система управління обладнана сучасними промисловими комп'ютерами з інтерфейсом, що дозволяє створювати, зберігати та систематизувати технологічні показники та результати випробувань для прийняття управлінських рішень підсистемою верхнього рівня.



Рис. 5.7. Загальний вигляд камери вулканізації та охолодження



Рис. 5.8. Загальний вигляд приймального пристрою

Система управління виробництвом включає в себе такі функції:

- автоматичний розрахунок технологічних параметрів ліній, зокрема, пошарове співвідношення температури як функції часу на основі розрахунку теплопередачі між шарами та температурної залежності періоду піврозпаду пероксиду;

- забезпечення синхронізації всіх вузлів лінії залежно від параметрів технологічного процесу та їх змін;
- сигналізацію та моніторинг у разі досягнення одним або кількома технологічними параметрами критичних значень;
- відстеження стабільності параметрів технологічного процесу і забезпечення автоматичної реакції на їх поточні вимірювання.

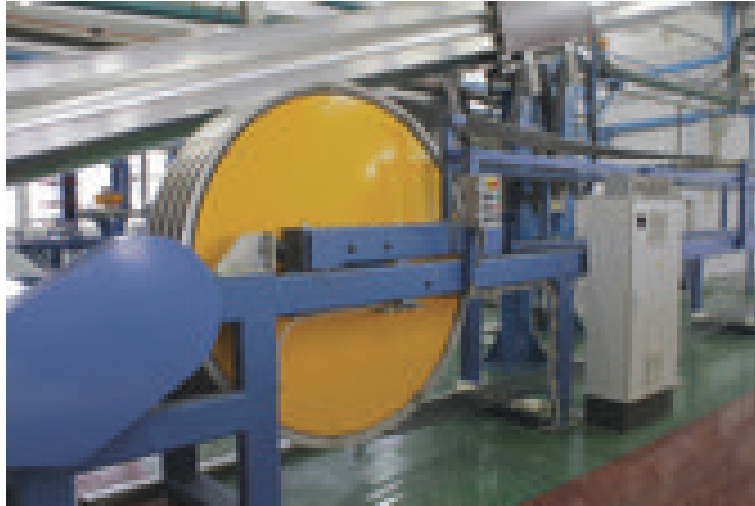


Рис. 5.9. Загальний вигляд накопичувача

Підприємство оснащене випробувальним обладнанням. Це надає можливість вести випробування і контроль всієї номенклатури кабельно-провідникової продукції. Центральна заводська лабораторія акредитована у системі сертифікації УкрСЕПРО на технічну компетентність. Кабелі піддаються приймально-здавальним, періодичним та типовим випробуванням. У процесі приймально-здавальних випробувань кабелі піддаються таким видам випробувань:

- перевірка герметичності оболонки;
- випробування змінною напругою величиною $2,5U_0$;
- вимірювання рівня часткових розрядів протягом 30 хв.;
- вимірювання електричного опору струмопровідної жили;
- перевірка маркування та упаковки.

Автоматизовану систему управління виробництва (АСУ) кабелю можна подати (рис. 5.10) як багаторівневу, де на верхньому рівні шляхом еволюційного планування факторного експерименту у просторі X^* уставок X_i^* , $i = \overline{1, n}$ локальних систем стабілізації технологічних параметрів відшукується вектор $\mathbf{x}^*$ їх оптимальних (за показником Λ якості продукції) значень. Автоматизовані електропроводи (АЕП) на основі інформації із підсистеми ідентифікації сигналів $\hat{\mathbf{x}}$ і параметрів $\hat{\beta}$ локальних об'єктів, вирішують задачу оптимальної стабіліза-

ції змінних $\hat{x}$ відносно оптимальних уставок x^* . Відповідно на нижньому рівні системи (рис. 5.10) реалізується задача вимірювання значень x .

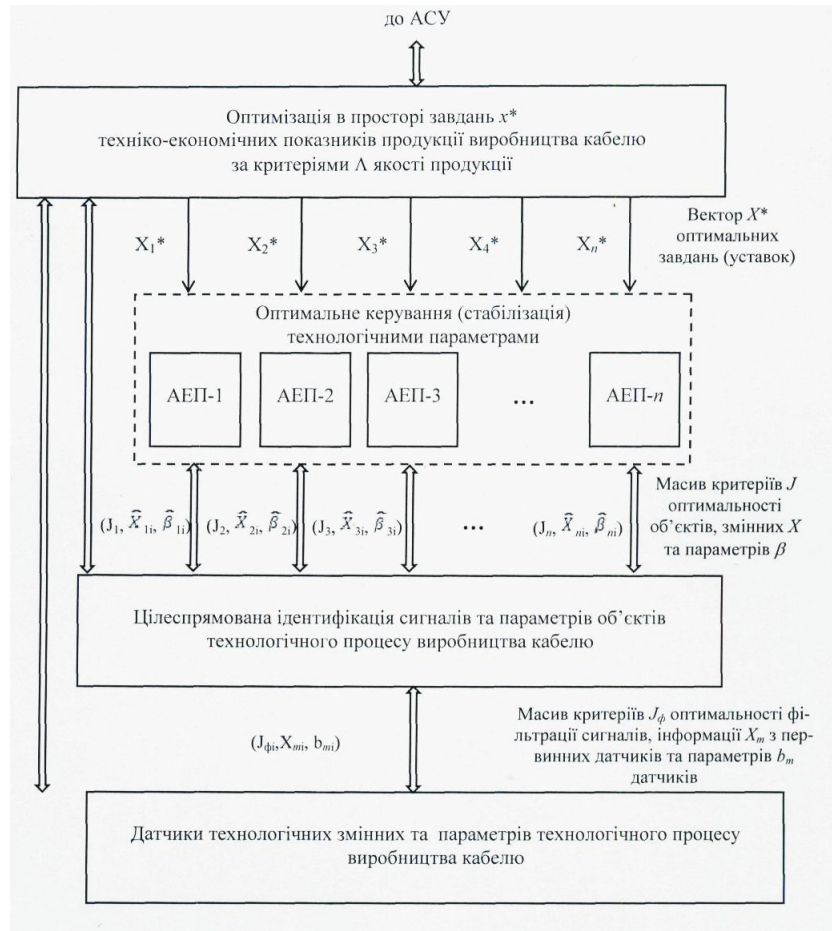


Рис. 5.10. Багаторівнева система виробництва кабелю

Склад основних систем електротехнічного комплексу технологічної лінії для нанесення на струмопровідну металічну жилу тришарової поліетиленової ізоляції та її вулканізації у виробництві кабелю на надвисокі напруги до 330 кВ наведено на рис. 5.10. Комплекс складається: з системи електроживлення; кількох десятків автоматизованих електроприводів (АЕП); установок електрозварювання металевої жили, індукційного нагрівання жили, зонної електротермії, подачі азоту під тиском та охолодження першої зони ізоляції та ізольованої жили у цілому; локальних систем керування пристроями, установками та механізмами, зокрема систем керування швидкістю та натягом жили, дозування компонент ізоляції, температурних режимів, дегазації та сушки; автоматизованої системи управління технологічним процесом для забезпечення заданих

показників якості кабельної продукції та техніко-економічних показників, оперативного надання та зберігання інформації про хід процесу, створення звітів.

Система електроживлення забезпечує комплекс потужністю близько 1320 кВА. Основними споживачами електроенергії є: автоматизовані електроприводи, зокрема електроприводи трьох екструдерів мають потужність близько 450 кВА; установка зонної електротермії – 350 кВА, електрозварювання – 300 кВА, індукційного нагрівання – 120 кВА.

Враховуючи багаторівневність і складність комплексу, для математичного аналізу, адаптації і оптимізації його підсистем і всього комплексу, як системи, слід застосовувати методологічні основи системного (модельного) аналізу.

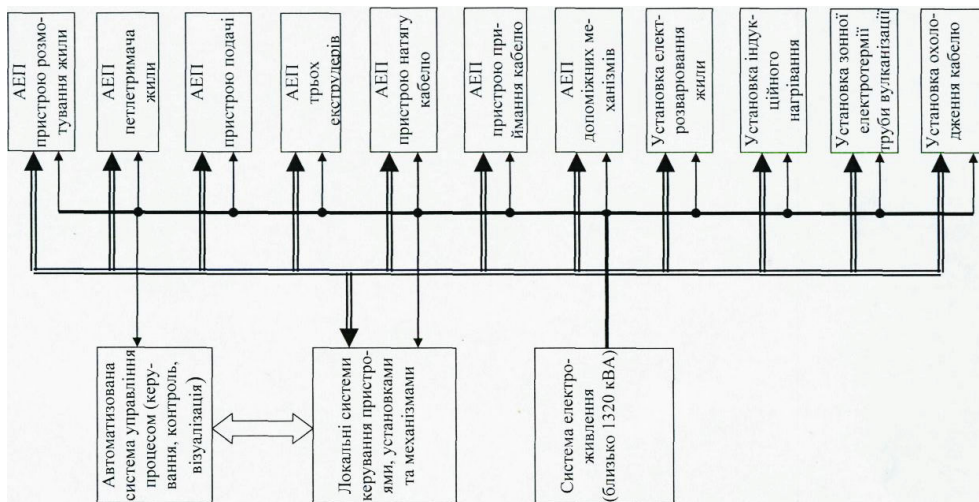


Рис. 5.11. Структура електротехнічного комплексу технологічної лінії виробництва кабелю

5.2. Особливості нанесення на жилу ізоляції

Відомо, що реальна СПЕ-ізоляція відрізняється від ідеальної однорідної наномодифікованої полімерної ізоляції наявністю в її об'ємі різних нано- і мікродефектів (мікропорожнин, мікровиступів і впадин тощо), що виникають під час її виготовлення [,]. Причому найбільша питома густина мікродефектів в ізоляції виникає біля поверхні розділу “електрод - діелектричне середовище”, де електродом є струмопровідна жила або мідний екран кабелю, а діелектричним середовищем – власне СПЕ-ізоляція. Більшість поверхневих ефектів в ізоляції виникають у процесі виготовлення кабелів.

У низці публікацій показано, що поверхневі мікродефекти збурюють ЕП в ізоляції сильніше за об'ємні мікродефекти аналогічних розмірів і конфігурацій. Тому при створенні електротехнічних систем (ЕТС) для виготовлення

зшитой поліетиленової ізоляції у конструкціях надвисоковольтних кабелів особливу увагу треба приділяти розробці технологічних методів, які спрямовано на запобігання причин, що викликають появу нерівностей на поверхнях металічних струмопровідних жил та півпровідних екранів кабелів, змінювання товщини і характеристик таких екранів, а також погіршення характеристик шару СПЕ-ізоляції.

Наявність внутрішніх нано- і мікроструктурних ефектів у твердій полімерній ізоляції сприяло накопиченню у них об'ємних електричних зарядів, збуренню електричного поля із суттєвим його підсиленням у локальних мікрооб'ємах ізоляції. Цей ефект підсилювався за недостатнього ущільнення многодротових жил великого перетину та при виготовленні таких жил із ізольованими многодротовими сегментами по типу конструкції "Міллікен". Наявність гострих мікровиступів на поверхні металічної жили суттєво збільшувало напруженість ЕП у локальних об'ємах ізоляції, що призводило до інтенсифікації інжекції електронів із поверхні жили в ізоляцію.

Поява тунельного ефекту у конструкціях силових високовольтних кабелів із твердою полімерною ізоляцією складало велику проблему для подальшого підвищення напруги на їхній жилі при підвищенні товщини такої ізоляції. Поверхню металічних жил силових кабельно-провідних виробів намагалися полірувати, покривати металічними стрічками із гладкою поверхнею, але такі технічні рішення не забезпечували розробку технологій, перспективних для промислового виробництва кабелів із твердою ізоляцією на надвисокі напруги.

Для запобігання повітряних порожнин між поверхнями металічної жили і твердою полімерною ізоляцією було розроблено технологію її екструзійного нанесення, яка передбачає розігрів ізоляції до рідинного стану, із подальшим нанесенням її на жилу та охолодженням до затвердіння [1, 2].

У конструкціях силових кабелів на середні, високі та надвисокі напруги обов'язковим є застосування шару, що екранує, який зазвичай виготовляється із мідних дротів та стрічок, які також можуть мати мікровиступи у тверду полімерну ізоляцію та створювати у ній додаткові локальні збурення ЕП. Тому розроблено технології екструзійного нанесення і другого півпровідного полімерного шару між твердою полімерною ізоляцією і мідним екраном кабелю.

Для запобігання наявності газових порожнин між ізоляцією і півпровідними шарами розроблено технологію одночасного екструзійного нанесення на жилу трьох полімерних шарів – двох півпровідних та одного (між ними), що ізолює. Застосування у якості базового матеріалу одного й того самого поліетилену, що здатний до зшивання, забезпечило реалізацію міцного зчеплення їх між собою і зшивання усіх шарів у загальному обладнанні, що вулканізує.

У наш час такий метод нанесення тришарової полімерної ізоляції на жилу є обов'язковий при виготовленні кабелів на всі напруги від 6 до 330 кВ і більше. Але для його використання необхідно враховувати взаємну залежність напруги експлуатації кабелю та характеристик його сегментів: СПЕ-ізоляції, струмопро-

відних жили та екрану, півпровідних шарів між жилою та ізоляцією, а також між ізоляцією та екраном. Зокрема, треба враховувати, що напруженість ЕП в однорідній ізоляції дорівнює []

$$E_{\Delta} = \frac{U}{(R_1 + \Delta) \ln(R_2/R_1)},$$

де E_{Δ} – напруженість ЕП на відстані Δ від поверхні півпровідного шару із радіусом R_1 між жилою та ізоляцією; U – напруга між жилою та екраном; R_2 – радіус півпровідного шару між екраном та ізоляцією. Причому $R_1 = R_{\text{ж}} + \Delta_1$, $R_2 = R_{\text{е}} - \Delta_2$, $R_{\text{ж}}$ і $R_{\text{е}}$ – радіуси жили та екрану, а Δ_1 , Δ_2 – товщини півпровідних шарів, що нанесені на жилу та ізоляцію.

Додаткове локальне збурення ЕП одиничними поверхневими та об'ємними мікродефектами ізоляції, а також зменшення локальних збурень із-за шортко-стей поверхні струмопровідної жили та екрану можна визначити із застосуван-ням математичної моделі та концепції аналізу збуреного ЕП. Згідно з цією кон-цепцією треба враховувати максимальні локальні напруженості ЕП та величину локальних напружених об'ємів у такій ізоляції []. Величина його напруженого об'єму $V_{\text{н}}$ визначається як

$$V_{\text{н}} = \int_V f(E) dV = 2\pi \int_S f(E) r(S) dS,$$

де V – розрахунковий об'єм ізоляції; S – площа змінного перетину напруженого об'єму уздовж ЕП; r – змінний радіус перетину цього об'єму ортогонально полю; $f(E) = 1$ при $E_1 \leq E \leq E_{\text{max}}$ і $f(E) = 0$ при $E > E_1$.

Відомо, що із підвищенням напруги на ізоляції кабелів треба підвищувати якість поверхні струмопровідних жил, яка значною мірою визначає збурення електричного поля в об'ємах півпровідного шару та полімерної ізоляції. Тому величина напруги, що прикладається до ізоляції кабелів та якість поверхні їхніх струмопровідних жил нормують основні вимоги до параметрів і властивостей ізоляції та півпровідних полімерних шарів, що застосовуються у кабелях. При цьому характеристики і властивості елементів ізолюваної жили залежать як від середньої напруженості ЕП ізоляції, так й від напруженості поля в її локальних мікрооб'ємах.

Для екструзійного нанесення трьохшарової полімерної ізоляції, що спро-можна до зшивання, на металічну жилу високовольтних і надвисоковольтних кабелів та подальшого наноструктурного зшивання усіх шарів ізоляції засто-совують електротехнологічні системи (ЕТС) двох типів [,]: вертикального та нахилоного.

На ЕТС вертикального типу простіше забезпечити високу якість ізоляції, але складніше отримати високу швидкість її нанесення, що пропорційна довжи-ні камери вулканізації. Технічно та економічно складніше здійснювати побудову та обслуговування таких систем, особливо за необхідності здійснювати виробни-цтво кабелів на різні напруги та струми. За змінювання перетинів і конструкцій

струмопровідних жил кабелів та товщини шарів полімерної ізоляції необхідно здійснювати змінювання пускових, усталених і перехідних режимів усіх електромеханічних та електротехнологічних пристроїв і блоків ЕТС. На системі вертикального типу швидку і точну переналадку режимів здійснювати складно.

Системи нахилоного типу є продуктивніші і дешевші, вони простіше в обслуговуванні й їх легше перенастроювати при змінюванні продуктивності, характеристик струмопровідної жили та полімерної ізоляції. Але за збільшення товщини усіх шарів ізоляції у системах нахилоного типу ускладнюється задача оптимізації режимів блоків, що зменшують зміщення шарів ізоляції, що не затверділи, відносно центру металічної жили.

5.2.1. Основні блоки і характеристики системи

Розрахунок електротехнологічних режимів усіх пристроїв і блоків ЕТС нанесення многошарової полімерної ізоляції на жилу надвисоковольтних кабелів і подальшого зшивання такої ізоляції у вулканізаційній камері нахилоного типу свідчить, що від електромережі, що живить, необхідно передбачати вживання електричної потужності до 3 МВА.

У розрахунках, експериментальних дослідженнях у промисловому виробництві враховувалося, що сумарна довжина камери наноструктурного зміцнення (вулканізації) усіх шарів полімерної ізоляції і камери їх охолодження складає біля 172 м.

Зовнішній діаметр ізольованої жили складає до 120 мм, а її погонна вага – до 270 Н/м. Діаметр приймального барабану може бути до 3,6 м, вага барабану, що приймає, із металічною жилою – до 20 т, а вага, що приймає, із ізольованою металічною жилою – до 30 т.

Регулювання і стабілізація швидкості пересування жили із трьома полімерними шарами ізоляції у нахилений частині вулканізаційної камери здійснюється типовим частотно-регульованим електроприводом, що здатний створити на своєму валу зусилля до $4.5 \cdot 10^7$ Н. Такий електропривід забезпечує переміщення ізольованої жили у вказаних камерах із лінійною швидкістю до 50 м/хв.

У склад ЕТС нанесення полімерної ізоляції на жилу та вулканізації ізоляції входили []:

- система силового електроприводу, що описана вище;
- система дозування компонентів, яка забезпечує пневматичну подачу до екструзійної групи усіх необхідних для технологічного процесу компонентів (подача таких компонентів здійснюється у режимі “чистої кімнати”, яка забезпечує запобігання попадання у вихідні полімерні матеріали небажаних сторонніх твердих, рідинних та газоподібних мікровключень;
- система контактного електропідігріву азоту в усіх вулканізаційних камерах діаметром до 0,2 м;
- система електроживлення та охолодження азотом, яка забезпечує непе-

первну подачу у вулканізаційну трубу промислового азоту (чистотою до 99,5% продуктивністю до 12 м³/г при тиску 1 атм і температурі 20° С) – для первинного охолодження усіх шарів полімерної ізоляції до отвердіння одразу після її нанесення на жилу (що забезпечувало зменшення зсувів ізоляції відносно металічної жили), а також для вторинного охолодження усіх шарів полімерної ізоляції після завершення її наноструктурного зміцнення (тобто зшивки);

- система охолодження водою і повітрям, яка разом із системою підігріву і системою подачі та охолодження азотом забезпечує оптимальний режим вулканізації та охолодження шарів на струмопровідній жилі до температури цеху;

- система дегазації ізоляції, що нанесено на жилу, тобто видалення із ізоляції побічних газових компонентів у спеціальні закриті ємності;

- система неперервного контролю та оброблення електричних і технологічних параметрів, яка контролює їх та одночасно формує вихідні сигнали для системи управління технологічними режимами і прийняття рішень операторами.

Основними показниками, що контролюються і використовуються як параметри регулювання, є:

- температура струмопровідної жили на вході у блок із трьома екструдерами, що суміщені;

- за відхиленням такої температури від заданого значення регулюється потужність індукційного підігріву рухомої металічної жили.

Досвід застосування інтегральних методів теорії електричних ланцюгів засвідчив, що за збільшення частоти струмів, що індукуються в ізольованих струмопровідних сегментах жили, вплив скін-ефекту та ефекту близькості підсилюється. Збільшення частоти струмів і наявність вказаних ефектів може викликати таке підвищення локальних температур на поверхні металічних сегментів, яке недопустиме для ізоляційного матеріалу між ними.

Для вирішення цієї задачі розроблено математичну модель і методику, що надають можливість здійснити числовий розрахунок розподілу електромагнітного поля та змінного струму в алюмінієвій і мідній жилах великого перетину (1000–3000 мм²), що виконано по типу конструкцій “Міллікен”.

5.3. Ідентифікація системи векторного керування лінійним асинхронним двигуном

5.3.1. Система векторного керування електродинамічним зусиллям безконтактного виконавчого пристрою прокатного стану

Векторне керування електричними машинами із розімкнутим магнітопроводом [75 – 101] застосовують для стабілізації електродинамічних зусиль у штабі безконтактного виконавчого пристрою (БВП). Керування зусиллями БВП є завданням системи розподілу механічних напружень по ширині штаби. Це обумовлено необхідністю забезпечення заданого значення зусилля у штабі в умо-

вах стохастичних збурень внаслідок зміни сортаменту прокату і технологічних умов прокатки та негативного впливу розімкнутості магнітопроводу БВП. Серед варіантів вибору опорного вектору [80 – 101] системи керування зусиллям перевагу має система із вектором головного потокозчеплення. Його можна виміряти, у той час як потокозчеплення ротору чи статора перераховуються з головного потокозчеплення на основі параметрів БВП, які змінюються. Якість керування забезпечує пряме векторне керування з вимірюванням складових магнітного потоку датчиками Холла [102], встановлення яких не представляє труднощів внаслідок розімкнутої конструкції магнітопроводу. Датчики мають стабілізатор напруги, підсилювач сигналу, АЦП, ЦАП, мікропроцесор, енергонезалежну пам'ять. Це надає можливість програмувати чутливість, компенсувати зміщення, забезпечувати температурну компенсацію, здійснювати фільтрацію завад та механічних збурень. Рівняння БВП, яке не враховує крайові ефекти, з опорним вектором головного потокозчеплення [75,103] у системі координат, що обертається із довільною швидкістю ω_k :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dt} &= -\frac{\sigma_s R_r}{L'_r} \psi_0 + \frac{1}{\sigma} (k_r \sigma_s R_r - k_s \sigma_r R_s) \mathbf{I}_s - i \omega_k \psi_0 + \frac{\sigma_s \pi V}{\sigma \tau} \psi_0 - i \frac{\sigma_s \sigma_r}{\sigma} L_m \frac{\pi V}{\tau} \mathbf{I}_s + \frac{k_s \sigma_r}{\sigma} \mathbf{U}_s; \\ \frac{d\mathbf{I}_s}{dt} &= -\frac{R_s + k_r R_r}{L_s} \mathbf{I}_s + \frac{k_r R_r}{L'_s L_m} \psi_0 - i \frac{1}{L'_s} \frac{\pi V}{\tau} \psi_0 - i \frac{\sigma_s}{\sigma} \omega_k \mathbf{I}_s - i \frac{k_s \sigma_r}{\sigma} \left(m - \frac{\pi V}{\tau} \right) \mathbf{I}_s + \frac{1}{L'_s} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{F} &= \frac{3\pi z}{4\tau} \psi_0 \times \mathbf{I}_s. \end{aligned} \quad (5.1)$$

де Ψ_0 – головне потокозчеплення; $\mathbf{U}_s$; $\mathbf{F}$, τ , z – зусилля, полюсний крок та число полюсів БВП; R_s , L_s – електричний опір та індуктивність обмотки; R_r , L_r – електричний опір та індуктивність металу штаби; L_m – взаємна індуктивність обмотки та штаби; V – швидкість штаби;

$$L'_s = \sigma L_s; L'_r = \sigma L_r; \sigma = 1 - k_s k_r; \sigma_s = 1 - k_s; \sigma_r = 1 - k_r; k_s = \frac{L_m}{L_s}; k_r = \frac{L_m}{L_r}; i = \sqrt{-1}.$$

На основі (5.1) для $\omega_k = 0$ отримується розрахункова система рівнянь у нерухомих відносно індуктора БВП координатах (α, β) :

$$\left\{ \begin{aligned} T_\Psi \frac{d\Psi_{0\alpha}}{dt} + \Psi_{0\alpha} &= k_\Psi \left(U_{s\alpha} + a_{I\Psi} I_{s\alpha} - \frac{b_{I\Psi}}{b_{II}} \frac{\pi V}{\tau} \Psi_{0\beta} + b_{I\Psi} \frac{\pi V}{\tau} I_{s\beta} \right); \\ T_\Psi \frac{d\Psi_{0\beta}}{dt} + \Psi_{0\beta} &= k_\Psi \left(U_{s\beta} + a_{I\Psi} I_{s\beta} + \frac{b_{I\Psi}}{b_{II}} \frac{\pi V}{\tau} \Psi_{0\alpha} - b_{I\Psi} \frac{\pi V}{\tau} I_{s\alpha} \right); \\ T_I \frac{dI_{s\alpha}}{dt} + I_{s\alpha} &= k_I \left(U_{s\alpha} + a_{\Psi I} \Psi_{0\alpha} + \frac{\pi V}{\tau} \Psi_{0\beta} - b_{II} \frac{\pi V}{\tau} I_{s\beta} \right); \\ T_I \frac{dI_{s\beta}}{dt} + I_{s\beta} &= k_I \left(U_{s\beta} + a_{\Psi I} \Psi_{0\beta} - \frac{\pi V}{\tau} \Psi_{0\alpha} + b_{II} \frac{\pi V}{\tau} I_{s\alpha} \right); \\ F &= \frac{3\pi z}{4\tau} (\Psi_{0\alpha} I_{s\beta} - \Psi_{0\beta} I_{s\alpha}). \end{aligned} \right. \quad (5.2)$$

де $T_\Psi = L'_r / \sigma_s R_r$ - стала часу кола головного потокозчеплення; $T_I = L'_s / (R_s + k_r R_r)$ - стала часу кола струму обмотки; $k_\Psi = k_s \sigma_r L'_r / \sigma_s R_r \sigma$ - коефіцієнт підсилення кола головного потокозчеплення; $k_I = I(R_s + k_r R_r)$ - коефіцієнт підсилення кола струму обмотки; $a_{I\Psi} = k_r R_r / L_m$ - коефіцієнт перехресного зв'язку; $a_{\Psi I} = (k_r \sigma_s R_r - k_s \sigma_r R_s)$ - коефіцієнт перехресного зв'язку; $b_{I\Psi} = \sigma_s L_m k_s$, $b_{II} = k_s \sigma_r L'_s / \sigma$.

Електричні координати моделі мають форму змінного струму, а складова струму $I_{s\alpha}$ збігається із реальним струмом фази A обмотки БВП. Для $\omega_k = \omega_0$ отримаємо систему рівнянь у синхронній системі координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_\Psi \frac{d\Psi_{01}}{dt} + \Psi_{01} = k_\Psi \left(U_{s1} + a_{I\Psi} I_{s1} - \frac{b_{I\Psi}}{b_{II}} \frac{\pi V}{\tau} \Psi_{02} + b_{I\Psi} \frac{\pi V}{\tau} I_{s2} \right); \\ T_\Psi \frac{d\Psi_{02}}{dt} + \Psi_{02} = k_\Psi \left(U_{s2} + a_{I\Psi} I_{s2} + \frac{b_{I\Psi}}{b_{II}} \frac{\pi V}{\tau} \Psi_{01} - b_{I\Psi} \frac{\pi V}{\tau} I_{s1} \right); \\ T_I \frac{dI_{s1}}{dt} + I_{s1} = k_I \left(U_{s1} + a_{\Psi I} \Psi_{01} + \frac{\pi V}{\tau} \Psi_{02} - b_{II} \frac{\pi V}{\tau} I_{s2} \right); \\ T_I \frac{dI_{s2}}{dt} + I_{s2} = k_I \left(U_{s2} + a_{\Psi I} \Psi_{02} - \frac{\pi V}{\tau} \Psi_{01} + b_{II} \frac{\pi V}{\tau} I_{s1} \right); \\ F = \frac{3\pi z}{4\tau} (\Psi_{01} I_{s2} - \Psi_{02} I_{s1}). \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Тут електричні координати моделі є сигнали постійного струму, зручні для реалізації векторного керування, де координатна вісь 1 спрямовується по вектору головного потокозчеплення Ψ :

$$\Psi_0 = |\Psi_0|; \quad \text{Im} \Psi_0 = 0. \quad (5.4)$$

Тоді розрахункова система рівнянь (5.3) набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_\Psi \frac{d|\Psi_0|}{dt} + |\Psi_0| = k_\Psi \left(U_{s1} + a_{I\Psi} I_{s1} + b_{I\Psi} \frac{\pi V}{\tau} I_{s2} \right); \\ T_I \frac{dI_{s1}}{dt} + I_{s1} = k_I \left[U_{s1} + a_{\Psi I} |\Psi_0| + b_{I\Psi} \omega_0 I_{s2} + b_{II} \left(-\omega_0 - \frac{\pi V}{\tau} I_{s2} \right) \right]; \\ T_I \frac{dI_{s2}}{dt} + I_{s2} = k_I \left[U_{s2} + \frac{\pi V}{\tau} |\Psi_0| - b_{I\Psi} \omega_0 I_{s1} - b_{II} \left(-\omega_0 - \frac{\pi V}{\tau} I_{s1} \right) \right]; \\ F = \frac{3\pi z}{4\tau} |\Psi_0| I_{s2} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Зусилля БВП визначається добутком модулю головного потокозчеплення на складову струму індуктора I_{s2} (останнє рівняння в (5.5)). Тому система векторного керування зусиллям є двоканальна. Канал керування модулем головного потокозчеплення одноконтурний, без контуру керування складовою струму I_{s1} . Канал керування складовою I_{s2} струму і відповідно зусиллям БВП також одноконтурний.

Модель (5.5) нелінійна внаслідок операцій перемноження змінних та взаємозв'язана у результаті дії перехресних зв'язків. Негативний вплив крайових ефектів внаслідок розімкнутості магнітопроводу БВП проявляється у зміні параметрів моделі (5.5). Для врахування кінцевих ефектів може бути застосована модель Дункана [82,83], яка передбачає зміну індуктивності намагнічування та втрати від вихрових струмів

$$L_m = L_{m0}(1 - f(Q)); \quad R_s = R_{s0} + R_e f(Q),$$

де L_{m0} , R_{m0} – значення взаємної індуктивності та електричного опору обмотки; функція $f(Q)$ визначається залежністю

$$f(Q) = (1 - e^{-Q})/Q,$$

де $Q = R_r L / (L_r V)$ – залежить від швидкості штаби V та довжини L БВП.

Згідно (5.5) крайові ефекти викликають параметричні та координатні збурення. Це обумовлює застосування законів керування на основі концепції зворотних задач динаміки у поєднанні із мінімізацією локальних функціоналів. Але більш функціонально надійною і досконалою буде адаптивна система з ідентифікатором. Функціональну схему системи векторного керування електродинамічним зусиллям БВП з опорним вектором головного потокозчеплення показано на рис. 5.1. Силова частина системи складається із перетворювача частоти, який живить БВП змінною трифазною напругою заданої частоти та амплітуди.

За допомогою датчика струму ДС вимірюються три змінні струми i_a, i_b, i_c у фазах обмотки БВП, які у перетворювачі фаз ПФ2 перераховуються в еквівалентні двофазні струми нерухомої (відносно індуктора БВП) системи координат (α, β) [75, 76]:

$$I_{s\alpha} = i_a; \quad I_{s\beta} = (i_a + 2i_b)/\sqrt{3}. \quad (5.6)$$

Вимірювач головного потокозчеплення ДП складається із двох датчиків Холла, один на активній поверхні БВП на магнітній осі фази А, другий зміщується на відстань $z = z_1 \tau / 2$.

У вектор-фільтрі ВФ сигнали Ψ_{0a}, Ψ_{0b} трифазної системи перераховують в еквівалентні сигнали двофазної нерухомої системи координат (α, β) [106]:

$$\Psi_{0\alpha} = \sqrt{3/2} \Psi_{0a}; \quad \Psi_{0\beta} = \sqrt{2} (\Psi_{0a}/2 + \Psi_{0b}),$$

за якого обчислюють модуль головного потокозчеплення

$$|\Psi_0| = \sqrt{\Psi_{0\alpha}^2 + \Psi_{0\beta}^2}$$

і тригонометричні функції

$$\cos \theta = \Psi_{0\alpha} / |\Psi_0|; \quad \sin \theta = \Psi_{0\beta} / |\Psi_0|, \quad (5.7)$$

де θ – кут між магнітною віссю фази A та вектором головного потокозчеплення.

Сигнал модуля головного потокозчеплення використовується для від'ємного зворотного зв'язку у контурі керування з регулятором потокозчеплення РП. Входом регулятора є похибка між заданим потокозчепленням $|\Psi_0|^*$ та його поточним значенням $|\Psi_0|$. Виходом є сигнал складової напруги живлення БВП U_{s1} , пропорційної Ψ_0 . Тригонометричні функції (5.7) необхідні для переходу із нерухомої системи координат (α, β) до рухомої (5.2) і навпаки. У перетворювачі координат ПК2 здійснюється переведення струмів до рухомої системи:

$$I_{s1} = I_{s\alpha} \cos \theta + I_{s\beta} \sin \theta; \quad I_{s2} = -I_{s\alpha} \sin \theta + I_{s\beta} \cos \theta. \quad (5.8)$$

У результаті струми мають зручну для реалізації системи керування форму сигналів постійного струму.

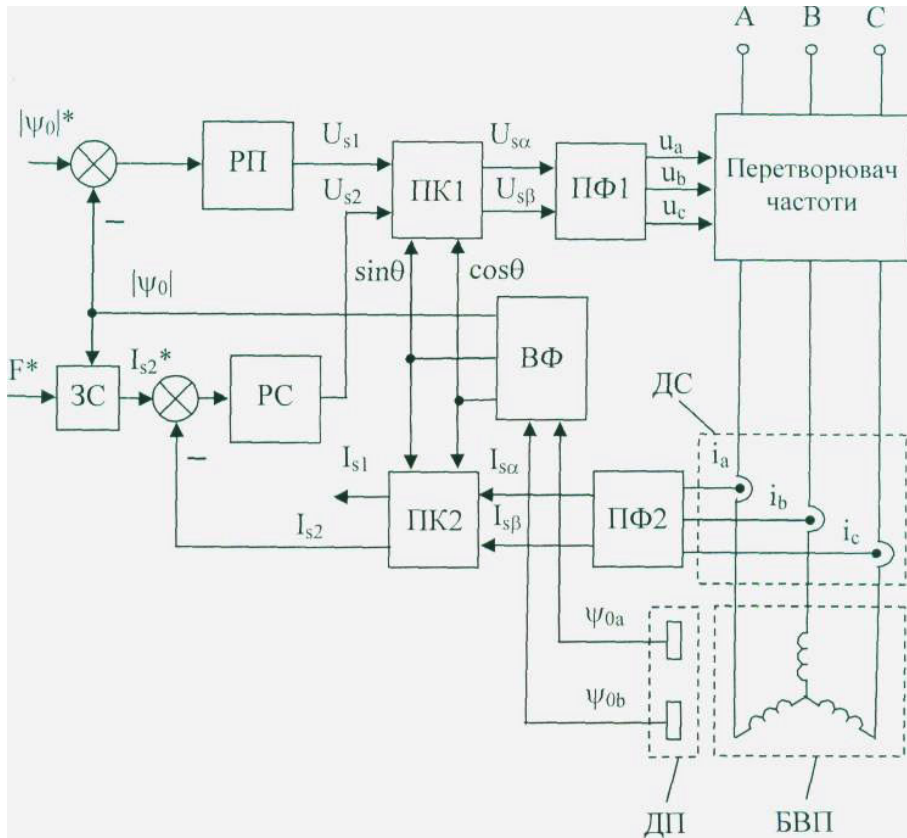


Рис. 5.12. Система векторного керування електродинамічним зусиллям БВП

Складова струму I_{s2} визначає величину зусилля БВП за умови стабілізації головного потокозчеплення $|\Psi_0| = \text{const}$. Задане значення струму обчислюється у задатчику струму ЗС на основі заданого зусилля F^* та поточного значення

потокосцеплення:

$$I_{s2}^* = \frac{4\tau F^*}{3\pi z |\Psi_0|} \quad (5.9)$$

Виходом регулятора струму РС є сигнал складової напруги живлення БВП U_{s2} , пропорційної зусиллю у штабі. У перетворювачі координат ПК1 здійснюється переведення керуючих напруг із рухомої системи координат (5.2) у нерухому (α, β) :

$$U_{s\alpha}U_{s1} \cos \theta - U_{s2} \sin \theta; \quad U_{s\beta} = U_{s1} \sin \theta + U_{s2} \cos \theta.$$

Ці напруги у формі сигналів змінного струму за допомогою перетворювача фаз ПФ1 перераховуються в еквівалентні трифазні напруги керування силовим перетворювачем частоти:

$$u_a = U_{s\alpha}; \quad u_b = (\sqrt{3}U_{s\beta} - U_{s\alpha})/2; \quad u_c = -(\sqrt{3}U_{s\beta} + U_{s\alpha})/2. \quad (5.10)$$

Система (рис. 5.12) містить блок ЗС, в якому відповідно до (5.9) виконується операція ділення на величину головного потокосцеплення. Для запуску системи спочатку включається контур керування потокосцепленням.

Розробка законів керування модулем головного потокосцеплення $|\Psi_0|$ та складовою струму I_{s2} , яка пропорційна зусиллю БВП, здійснено на основі концепції зворотних задач динаміки у поєднанні з мінімізацією локальних функціоналів [105]. Вона дозволяє проводити синтез законів керування нелінійних та взаємозв'язаних систем на основі лінійних моделей локальних контурів керування [105–108].

Відповідно до першого рівняння (5.10) модуль головного потокосцеплення зв'язано зі складовою напруги керування U_{s1} ланкою 2-го порядку. Аналіз показує [75,103], що стала часу $T_\Psi \gg T_I$, тому порядок рівняння кола може бути знижено до першого. На якість керування $|\Psi_0|$ та I_{s1} впливають координатні збурення у вигляді складових струму I_{s2} , компенсація яких здійснюється за рахунок декомпозиційних властивостей закону керування. Бажане рівняння замкнутого контуру керування потокосцепленням для забезпечення астатизму першого порядку та помірного коефіцієнту підсилення регулятора:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dz}{dt} + \alpha_0 z = \alpha_0 |\Psi_0|^*.$$

Ступінь наближення процесу керування до бажаного оцінюється функціоналом

$$G(u) = \frac{1}{2} \int_0^t [\ddot{z}(\theta) - |\ddot{\Psi}_0|(\theta, U_{s1})]^2 d\theta,$$

що характеризує нормовану за індуктивністю другу похідну електромагнітної енергії $W_{EM} = \Psi^2/(2L)$. Закон керування головним потокосцепленням:

$$U_{s1}(t) = k[z - |\Psi_0|]; \quad z = \int f_0 dt; \quad f_0 = \alpha_0 \int (|\Psi_0|^* - |\Psi_0|) dt - \alpha_1 |\Psi_0|. \quad (5.11)$$

На рис. 5.13 представлено структурну схему регулятора потокозчеплення, побудовану на основі рівняння (5.11).

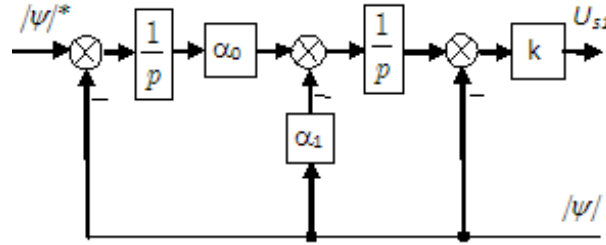


Рис. 5.13. Структурна схема регулятора головного потокозчеплення Ψ

Відповідно до третього рівняння (5.11) струм I_{s2} зв'язаний із напругою U_{s2} аперіодичною ланкою першого порядку. В контурі присутні збурення, обумовлені дією струму I_{s1} та потокозчеплення. Бажане рівняння замкнутого контуру керування складової струму:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dz}{dt} + \alpha_0 z = \alpha_0 |I_{s2}|^*.$$

Ступінь наближення процесу керування до бажаного також оцінюється функціоналом

$$G(u) = \frac{1}{2} \int_0^t [\ddot{z}(\theta) - |\ddot{I}_{s2}(\theta, U_{s2})|^2] d\theta, \quad (5.12)$$

що характеризує нормовану за індуктивністю другу похідну електромагнітної енергії $W_{EM} = LI^2/2$. В результаті оптимізації (5.12) отримано закон керування складовою I_{s2} струму:

$$U_{s2}(t) = k[z - I_{s2}]; \quad z = \int f_0 dt; \quad f_0 = \alpha_0 \int (I_{s2}^* - I_{s2}) dt - \alpha_1 I_{s2}, \quad (5.13)$$

На рис. 5.14 представлено структурну схему робастного регулятора струму, побудовану на основі рівняння (5.13), але визначення параметрів α_0 , α_1 , k об'єкта може суттєво покращити результат.

Проведено моделювання стану 2000 гарячої прокатки алюмінієвих сплавів у ході включення системи під час руху штаби на прокатному стані із швидкістю 10 м/с. Напружений стан штаби обумовлює завдання перехідних процесів без перерегулювання, тому параметри регулятора потокозчеплення задано відповідно до стандартних біноміальних форм $\alpha_0 = 2500$, $\alpha_1 = 100$, $k = 2000$, які забезпечують монотонну перехідну функцію і час регулювання 0,1 с. На рис. 5.14 показано перехідний процес головного потокозчеплення для лінійно наростаючого сигналу завдання, усталене значення якого визначається залежністю:

$$|\Psi_0|^* = \frac{\sqrt{2} U_{snf}}{2\pi f_n}, \quad (5.14)$$

де U_{snf} – номінальна фазна напруга живлення; f_n – номінальна частота напруги живлення.

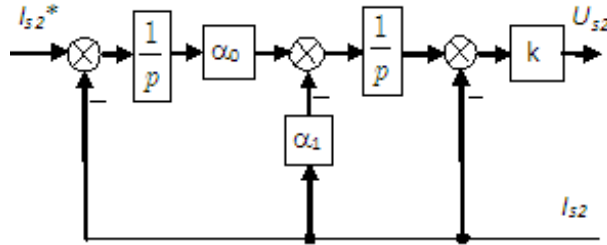


Рис. 5.14. Аналогічна до регулятора структурна схема регулятора складовою I_{s2}

Завдяки параметрам регулятора струму перехідна функція струму має монотонний характер із часом близько 0,015 с.

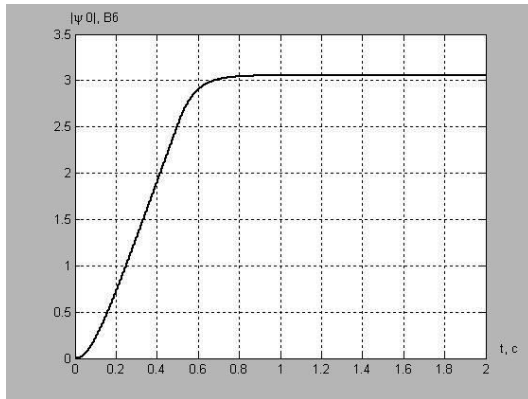


Рис. 5.15. Графік перехідного процесу головного потокозчеплення

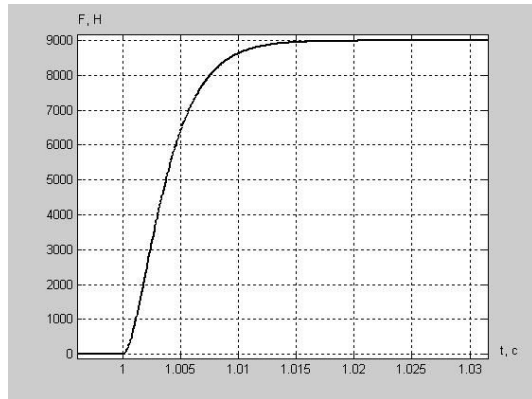


Рис. 5.16. Графік перехідного процесу електродинамічного зусилля у штабі

На рис. 5.15 показано перехідний процес зусилля у штабі із виходом на усталене значення 9000 Н. Система векторного керування забезпечує монотонний перехідний процес зусилля БВП на відміну від розімкнутого частотного керування [109].

На рис. 5.16 та 5.17 наведено перехідні процеси складових струмів БВП у координатах індуктора. Під час плавного запуску контуру головного потокозчеплення впродовж 0,5 с струми зростають внаслідок руху штаби зі швидкістю 10 м/с, а потім зменшуються після виходу потокозчеплення на усталене значення. При завданні сходінки на першій секунді процесу струми стрімко збільшуються.

На рис. 5.18 та 5.19 показано графіки перехідних процесів складових напруг живлення БВП у координатах індуктора. Під час плавного запуску контуру

головного потокозчеплення впродовж 0,5 с напруги плавно зростають.

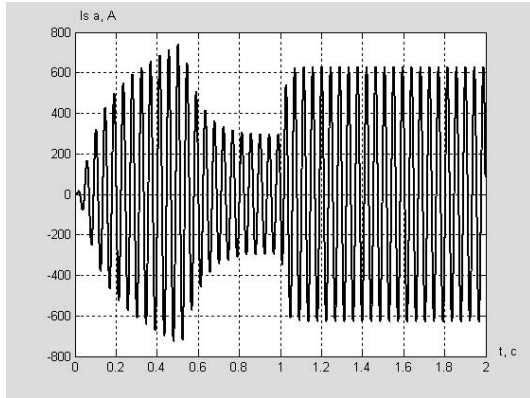


Рис. 5.17. Графік переходного процесу струму I_{sa}

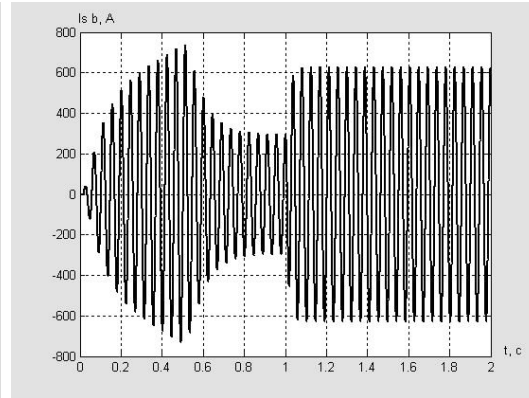


Рис. 5.18. Графік переходного процесу струму I_{sv}

При завданні стрибку на першій секунді процесу електродинамічного зусилля напруги швидко збільшуються.

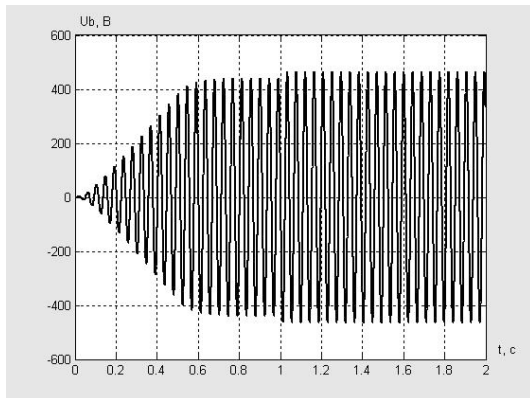


Рис. 5.19. Графік переходного процесу напруги U_{sa}

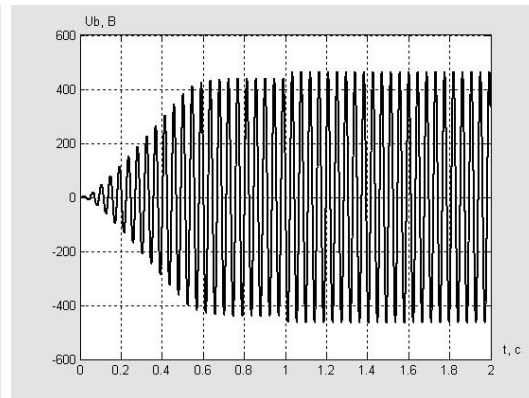


Рис. 5.20. Графік переходного процесу напруги U_{sb}

На рис. 5.20 представлено похибки керування електродинамічним зусиллям у штабі при виході зусилля на усталене значення 9000 Н під час дії параметричного збурення у вигляді зменшення та збільшення у десятикратного розрахункового значення електричного опору металу штаби $R_2 = [0,0022; 0,022; 0,22]$ Ом. Система забезпечує астатичне керування зусиллям з відносною максимальною динамічною похибкою у межах $0,08 \div 0,09\%$. Отже, система векторного керування електродинамічним зусиллям у штабі із законами керування головним потокозчепленням та струмом більш-менш забезпечує якість керування.

Подальше її покращення можливе на основі ідентифікації невідомих параметрів системи (5.5) і адаптації до них параметрів регулятора.

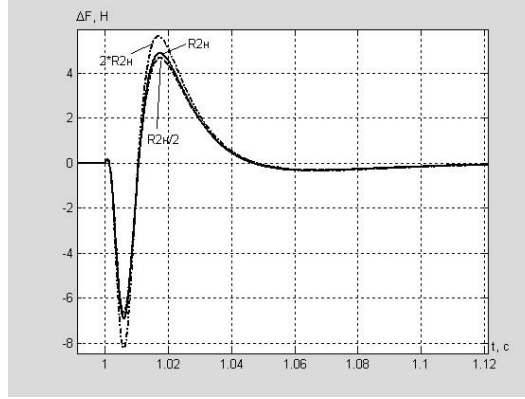


Рис. 5.21. Похибки керування зусиллям у штабі

5.3.2. Цілеспрямована на побудову адаптивної системи векторного керування підсистема ідентифікації

В системі (5.5) безпосередньо вимірюються сигнали $|\Psi_0|$, U_{s1} , I_{s1} , I_{s2} . Невідомими є сталі часу T_Ψ , T_I та коефіцієнти при вимірюваних сигналах. Уточнення параметрів моделі (5.5) дозволить реалізувати розв'язку каналів і, як наслідок, покращити якість процесу керування зусиллями у штабі (зменшити викиди $\Delta F(t)$ на рис. 5.21. Для сталих значень коефіцієнтів, а також ω_0 і V , система (5.5) може бути подана у загальному вигляді:

$$\begin{cases} (T_1 p + 1)x_1 = 0 \cdot x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \gamma_{11}U_1, \\ (T_2 p + 1)x_2 = \beta_{21}x_1 + 0 \cdot x_2 + \beta_{23}x_3 + \gamma_{21}U_1, \\ (T_2 p + 1)x_3 = \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + 0 \cdot x_3 + \gamma_{32}U_2, \end{cases} \quad (5.15)$$

де

$$x_1 = |\Psi_0|; \quad x_2 = I_{s1}; \quad x_3 = I_{s2}; \quad U_1 = U_{s1}; \quad U_2 = U_{s2}; \quad T_1 = T_\Psi; \quad T_2 = T_i;$$

$$p = d/dt; \quad \beta_{12} = k_\Psi a_{1\Psi}; \quad \beta_{13} = k_\Psi b_{1\Psi} \pi V / \tau; \quad \gamma_{11} = k_\Psi; \quad \beta_{21} = k_i a_{\Psi i};$$

$$\beta_{23} = k_i \left[b_{1\Psi} \omega_0 + b_{ii} \left(\omega_0 - \frac{\pi V}{\tau} \right) \right]; \quad \beta_{31} = -k_i \frac{\pi V}{\tau};$$

$$\beta_{32} = k_i \left[-b_{1\Psi} \omega_0 - b_{ii} \left(\omega_0 - \frac{\pi V}{\tau} \right) \right]; \quad \gamma_{32} = \gamma_{21} = k_i.$$

За визначеними з експерименту коефіцієнтами β_{ij} , γ_{ij} рівняння (5.15) (за необхідності) можна розрахувати фізичні складові рівняння (5.5)

$$k_\Psi = \gamma_{11}; \quad k_i = \frac{\gamma_{21} + \gamma_{32}}{2}; \quad a_{1\Psi} = \frac{\beta_{11}}{\gamma_{11}}; \quad b_{1\Psi} = \frac{\beta_{13}}{\gamma_{11}} \frac{\tau}{\pi V}; \quad b_{ii} = \frac{\beta_{23}/k_i - b_{1\Psi}\omega_0}{\omega_0 - \pi V/\tau}.$$

Для коректного визначення коефіцієнтів рівняння (5.15) слід до змінних стану x_i , $i = 1, 2, 3$, і керуючих сигналів U_1, U_2 , які у нормальному режимі роботи близькі до сталих величин, додати взаємно некорельовані тестуючі сигнали з генератора нуль-последовності максимальної довжини, тобто псевдо-білі шуми. Тобто, в (5.15) під x_i, U_j будемо розуміти суми “чистих” сигналів x_i^*, U_j^* і взаємно некорельованих тест-сигналів $\delta x_i, \delta U_j$. Як варіант, замість “білого шуму” можна подавати взаємно ортогональні синусоїдні сигнали:

$$\begin{aligned} \delta x_1(t) &= \delta x_{1m} \sin \omega t; \quad \delta x_2(t) = \delta x_{2m} \cos \omega t; \quad \delta x_3(t) = \delta x_{3m} \sin \omega t; \\ \delta U_1(t) &= \delta U_{1m} \cos 3\omega t; \quad \delta U_2(t) = \delta U_{2m} \sin 3\omega t; \end{aligned} \quad (5.16)$$

Амплітуди x_m, U_m беремо порядку $0,1x_i, 0,1U_j$. Частота $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(2c) = \pi$ рад/с. Тобто період R слід вибрати таким, щоб тестові сигнали (5.16) не згладжувались інерційністю системи, яка має сталі часу T_1, T_2 , наприклад, $\omega = 2\pi/T_1$ або $\omega = 2\pi/T_2$.

Кожне із рівнянь системи (5.15), наприклад, перше, подамо у такому вигляді:

$$x_1(t) = \frac{1}{T_1 p + 1} [\beta_{12} x_2(t) + \beta_{13} x_3(t) + \gamma_{11} U_1(t)]. \quad (5.17)$$

Запровадимо дискретний час $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots$, Δt – крок зчитування сигналів. У виразі

$$x_1(k\Delta t) = \frac{1}{T_1 p + 1} [\beta_{12} x_2(k\Delta t) + \beta_{13} x_3(k\Delta t) + \gamma_{11} U_1(k\Delta t)] \quad (5.18)$$

інерційну ланку першого порядку замінимо дискретним аналогом:

$$\hat{x}(k) = \alpha_1 x(k) + (1 - \alpha_1) \hat{x}(k-1) \quad (5.19)$$

де $\alpha_1 = \Delta t/T_1$, $\Delta t \ll T_1$.

Далі, оскільки T_1 невідоме, щоб не збільшувати розмірність вектора невідомих коефіцієнтів, будемо визначати коефіцієнти $\beta_{11}, \beta_{12}, \gamma_{11}$ за методом допоміжної змінної [66] для різних значень T_1 . Найкраща оцінка T_1^* сталої часу T_1 буде та, за якої середньо-квадратична різниця $\bar{\varepsilon}^2$ між $x_1(k\Delta t)$ і правою частиною рівняння (5.18) зі згладженими змінними (5.18) буде мінімальною:

$$x_1(k) = \beta_{12} \hat{x}_2(k) + \beta_{13} \hat{x}_3(k) + \gamma_{11} \hat{U}_1(k) + \varepsilon(k), \quad (5.20)$$

$$T_1^* = \arg \min_{T_1} \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N [x_1(k) - \beta_{12}\hat{x}_2(k, T_1) - \beta_{13}\hat{x}_3(k, T_1) - \gamma_{11}\hat{U}_1(k, T_1)]. \quad (5.21)$$

Підлягають визначенню коефіцієнти β_{11} , β_{12} , γ_{11} за умов активного експерименту, де до майже сталих значень змінних стану $x_1^*(t)$ і $x_2^*(t)$ керуючого впливу $U_1^*(t)$ додано відповідні (5.16) тест-сигнали. Тоді

$$\begin{cases} \hat{x}_2(k) = \alpha_1[x_2^*(k) + \delta x_2(k)] + (1 - \alpha_1)[\hat{x}_2(k-1) + \delta x_2(k-1)]; \\ \hat{x}_3(k) = \alpha_1[x_3^*(k) + \delta x_3(k)] + (1 - \alpha_1)[\hat{x}_3(k-1) + \delta x_3(k-1)]; \\ \hat{U}_1(k) = \alpha_1[U_1^*(k) + \delta U_1(k)] + (1 - \alpha_1)[\hat{U}_1(k-1) + \delta U_1(k-1)]; \end{cases} \quad (5.22)$$

де, згідно (5.16) ,

$$\delta x_2(k) = \delta x_{2m} \cos \pi k; \quad \delta x_3(k) = \delta x_{3m} \sin 2\pi k; \quad \delta U_1(k) = \delta U_{1m} \cos 2\pi k;$$

$$k = \overline{1, N}; \quad \delta x_{2m} = 0, 1x_{2m}, \quad \delta x_{3m} = 0, 1x_{3m}, \quad \delta U_{1m} = 0, 1U_{1m}.$$

Далі, для кожного значення T_1 і, відповідно, $\alpha_1 = 1/T_1$, розраховують складові рівняння (5.20), (5.22) і за методом допоміжної змінної, формується система рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N x_1(k) \delta \hat{x}_2(k) &= \beta_{12} \sum_{k=1}^N \hat{x}_2(k) \delta \hat{x}_2(k) + \beta_{13} \sum_{k=1}^N \hat{x}_3(k) \delta \hat{x}_2(k) + \gamma_{11} \sum_{k=1}^N \hat{U}_1(k) \delta \hat{x}_2(k); \\ \sum_{k=1}^N x_1(k) \delta \hat{x}_3(k) &= \beta_{12} \sum_{k=1}^N \hat{x}_2(k) \delta \hat{x}_3(k) + \beta_{13} \sum_{k=1}^N \hat{x}_3(k) \delta \hat{x}_3(k) + \gamma_{11} \sum_{k=1}^N \hat{U}_1(k) \delta \hat{x}_3(k); \\ \sum_{k=1}^N x_1(k) \delta \hat{U}_1(k) &= \beta_{12} \sum_{k=1}^N \hat{x}_2(k) \delta \hat{U}_1(k) + \beta_{13} \sum_{k=1}^N \hat{x}_3(k) \delta \hat{U}_1(k) + \gamma_{11} \sum_{k=1}^N \hat{U}_1(k) \delta \hat{U}_1(k). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Якщо у системі (5.23) складові лівого стовпчика позначити як b_{1i} , а скалярні добутки справа як a_{ij} , систему (5.23) можна подати у стандартній алгебраїчній скалярній

$$b_{11} = \beta_{12}a_{11} + \beta_{13}a_{12} + \gamma_{11}a_{13};$$

$$b_{12} = \beta_{12}a_{21} + \beta_{13}a_{22} + \gamma_{11}a_{23};$$

$$b_{13} = \beta_{12}a_{31} + \beta_{13}a_{32} + \gamma_{11}a_{33},$$

або матричній формі:

$$\mathbf{b}_1 = A\boldsymbol{\beta}, \quad (5.24)$$

На відміну від МНК у методі допоміжної змінної (МДЗ) матриця A є квазісиметрична. Але, завдяки взаємо-ортогональності тест-сигналів, вона буде близькою до діагональної. Це знімає звичайну для задачі ідентифікації, як

зворотної задачі математики, проблему некоректності. Точна оцінка $\hat{\beta}$ вектору β за методом МДЗ:

$$\hat{\beta} = A^{-1}b_1. \quad (5.25)$$

Наближене значення $\hat{\beta}$ за умови квазидіагоналізації:

$$\hat{\beta}_{12} = b_{11}/a_{11}; \quad \hat{\beta}_{13} = b_{12}/a_{22}; \quad \hat{\gamma}_{11} = b_{13}/a_{33}, \quad (5.26)$$

де відповідно до (5.23),

$$b_{11} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_1(k) \delta \hat{x}_2(k); \quad b_{12} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_1(k) \delta \hat{x}_3(k); \quad b_{13} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_1(k) \delta \hat{U}_1(k);$$

$$a_{11} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_2(k) \delta \hat{x}_2(k); \quad a_{22} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_3(k) \delta \hat{x}_3(k); \quad a_{33} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N U_1(k) \delta \hat{U}_1(k);$$

Завдяки використанню взаємо-ортогональних, не корельованих з випадковими похибками і збуреннями тест-сигналів оцінки коефіцієнтів β_{12} , β_{13} , γ_{11} будуть не зміщені. Ефективність і статистичну значущість оцінок можна, подібно до МНК, оцінити за t -критерієм Стьюдента: відношення модуля оцінки до її середньоквадратичного розкиду для числа N , трьох параметрів і заданого рівня достовірності, не повинно бути меншим за критичне. Аналогічно, для розрахунків коефіцієнтів першого рівняння системи (5.15) розраховуються коефіцієнти другого і третього рівняння. При цьому слід пам'ятати, що на систему (рис. 5.10) одночасно подаються усі п'ять тест-сигналів (5.16), що суттєво зменшує час експерименту.

5.3.3. Електромеханічний перехідний процес в системі регульованого руху надвисоковольтного кабелю в похилій екструзійній лінії

Проведення аналізу електромеханічних перехідних процесів у системі із трьох частотно регульованих електроприводів на базі асинхронних двигунів, які керують рухом струмопровідної жили, а також дослідження впливу таких процесів на режими нанесення на жилу тришарової полімерної ізоляції, є важлива задача досліджень. Сучасний етап розвитку електромеханічних систем характеризується переходом до регульованих електроприводів змінного струму на основі асинхронних двигунів із частотним керуванням, які мають високі динамічні і енергетичні показники. У той же час при використанні в одній системі двох і більше регульованих приводів істотно ускладнюється вирішення проблеми узгодження сукупності їхніх електричних і механічних параметрів.

При виборі оптимальної структури блоку керування всією системою виникає необхідність моделювання складних електродинамічних процесів, що в даний час найбільш доцільно здійснювати з використанням пакета Matlab/Simulink/

SimPower Systems. Такий підхід дозволяє досліджувати закони частотного регулювання та визначати найбільш доцільні режими системи відносно її стійкості, швидкодії та інших показників [125].

При експлуатації системи приводів виникає також задача дослідження стабільності їхньої роботи при зміні параметрів мережі живлення, що є особливо актуальне при виникненні максимальних механічних навантажень приводів та їхньому живленні від системи електропостачання із обмеженою встановленою потужністю обслуговуючої підстанції. Застосування методів комп'ютерного моделювання для вирішення задач такого типу дозволяє значно скорочувати матеріальні витрати і терміни проектування таких систем.

У даній роботі шляхом моделювання проводиться оцінювання стабільності роботи електромеханічної системи із векторним керуванням частотно регульованими приводами при виникненні короткочасних змін напруги у мережі живлення.

Відомо, що перевагами векторного керування є висока точність відпрацювання заданої швидкісної діаграми, збереження необхідної величини моменту за малих частот обертання, плавність роботи двигуна і швидка реакція на стрибки навантаження внаслідок високої динаміки регулювання. У той же час, питання кількісного аналізу стабільності роботи і точності відпрацювання заданих параметрів – швидкості руху і моменту на валу двигуна, в даний час досліджені недостатньо.

На основі сучасних методів комп'ютерного моделювання з використанням пакета програм Matlab/Simulink/SimPowerSystems досліджується електромеханічний перехідний процес у системі, що складається із трьох частотно регульованих електроприводів на базі асинхронних двигунів, які керують рухом надвисоковольтного кабелю у похилій екструзійній лінії, та розглянути такі позаштатні режими, як поява короткочасних провалів напруги трифазної мережі, що живить, і короткочасного підвищення цієї напруги. Дослідження проводиться для узгодження електромеханічних параметрів двох приводів системи і виконання оцінки допустимого рівня провалу напруги живильної мережі при граничній масі рухомого кабелю.

Матеріал засновано на результатах комп'ютерного моделювання електричної системи, що містить два асинхронних двигуна із векторним керуванням, та використанні наукових положень, представлених в [110 – 112].

При синтезі віртуальної моделі використано інструментальні засоби пакета програм комп'ютерного моделювання Matlab/Simulink, який містить спеціальні блоки і демонстраційні приклади, що стосуються безпосередньо елементів і систем автоматизованого електроприводу. Принципи побудови і дослідження окремих блоків віртуальних моделей викладені в [113 – 115], а систем керування електроприводами – в монографії [124].

5.3.4. Опис похилої лінії

Похила екструзійна лінія (рис. 5.21, а) виконується у вигляді металевої вулканізаційної труби, всередині якої відбувається екструзійне нанесення і вулканізація (зшивання) шару поліетиленової ізоляції і двох полімерних напівпровідних шарів на струмопровідну жилу кабелів високої і надвисокої напруг.

На такій лінії виготовляють ізоляцію алюмінієвих і мідних жил силових кабелів перетином 35 – 2000 мм² на напругу 10 – 330 кВ. Жила складається з багатьох скручених і ущільнених провідників, які можуть бути розділені на 5 – 7 окремо ущільнених і ізольованих секторів. На жилу наноситься полімерний напівпровідний шар товщиною 0,4–3 мм, а на нього – ізоляційний шар з високоякісного поліетилену товщиною до 28 мм і ще один шар з півпровідного поліетилену товщиною 0,4 – 3,5 мм. Усі три шари наносяться одночасно методом екструзії за допомогою потрійної екструзійної головки і вулканізуються у вулканізаційній трубі безперервної вулканізації при температурі 450°С у середовищі стисненого до 16 атмосфер азоту у газоподібному стані.



Рис. 5.22.

Струмопровідна жила кабелю з нанесеними на неї поліетиленовою ізоляцією і півпровідними екрануючими шарами повинна переміщуватися зі швидкістю 0,3–50 м/хв всередині вулканізаційної труби довжиною 172 м. Рух здійснюється у результаті створення зусиль до 4,510⁴ Н електроприводом № 1 (рис. 5.23).

Принцип роботи лінії, схема якої представлена на рис. 5.21, полягає у такому. Струмопровідна жила, намотана на барабані пристрою подачі, за допомогою електроприводу № 1 пропускається через потрійну екструзійну головку, в яку подаються одночасно розплави поліетиленової ізоляції і півпровідного полімеру. Головка має три екструдери різної продуктивності: один (максимальної продуктивності) – для нанесення шару поліетиленової ізоляції, і два – для формування півпровідних полімерних шарів.

Для того щоб рідкий шар розплавленого поліетилену менше зміщувався

відносно осі жили, додатково застосовується пристрій її підкручування. Він підкручує жилу у напрямку скручування її проволочок приблизно із кроком, що дорівнює одному оберту жили навколо її осі на 30 погонних метрів її довжини. Це дає можливість отримувати циліндричний виріб із кіркою затверділого поліетилену на його поверхні і уникати зсуву полімерних півпровідних і ізоляційного шарів відносно осі струмопровідної жили, тобто уникати ексцентриситету полімерних шарів. Можливість реалізації такої технології забезпечується спеціальною конфігурацією похилої вулканізаційної труби.

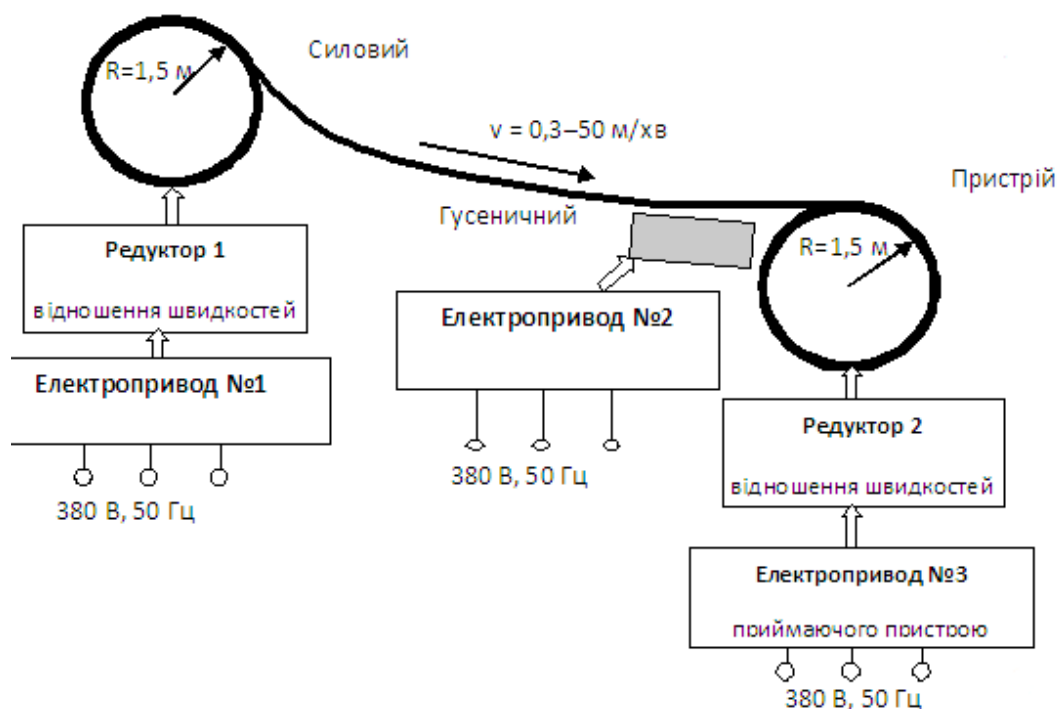


Рис. 5.23. Похила екструзійна шина

Початкова частина труби, в якій полімерні шари на жилі ще досить рідкі, є практично вертикальна. Потім труба згинається і в кінцевій своїй частині, в якій полімерні шари на жилі вже достатньо затверділи, стає майже горизонтальною. Вигин і переріз труби вибирається з умов неприпустимості торкання її внутрішньої поверхні з полімерними шарами струмопровідної жили при всіх змінах її перетину, маси, товщини полімерних шарів і швидкості лінійного переміщення.

Струмопровідну жилу із нанесеними на неї полімерними шарами, яка повинна переміщуватися у центральній частині вулканізаційної труби, можна розглядати як важку матеріальну нитку. Кут α між віссю абсцис і лінією, що з'єднує початок координат і точку із координатами (x, y) , як відомо з механіки,

можна визначити із виразу

$$\operatorname{tg} \alpha = gx/H,$$

де g – вага важкої матеріальної нитки на одиницю довжини і H – натяг у найнижчій точці.

Оскільки при виготовленні ізольованих жил кабелю різних перерізів і на різні напруги величина g змінюється, буде змінюватися і профіль провисання нитки: $y = x^2/c$, $c = H/g$ – стала провисання.

З наведених рівнянь видно, що зберегти профіль провисання нитки можна, якщо постійна провисання c буде незмінною. Таке збереження профілю можливо реалізувати за рахунок регулювання сили натягу H і відповідно регулювання моменту на валу двигуна приводу № 2, який приводить у рух гусеничний тяговий пристрій при постійній технологічній швидкості V руху жили у вулканізаційної трубі. Незмінність швидкості руху жили забезпечується регулюванням моменту тягового електродвигуна. Зазначені співвідношення покладені в основу системи керування рухом струмопровідної жили всередині вулканізаційної труби, вигин якої визначається з рівнянь провисання жили як матеріальної важкої нитки.

5.3.5. Розробка Simulink-моделі електромеханічної системи

Досліджується електромеханічна система, що схематично показана на рис. 5.21, б й яка містить три електроприводи, виконані на основі асинхронних двигунів з векторним керуванням.

Приводи № 1 і № 3 приводять в рух барабани пристроїв подавання й приймання і забезпечують рух кабелю з постійною швидкістю, що задається технологічними умовами. Привід №2 приводить в рух гусеничний тяговий пристрій і забезпечує необхідний натяг кабелю H при його русі всередині вулканізаційної труби. Всі приводи побудовані за принципом прямого керування моментом і магнітним потоком асинхронного двигуна (метод DTC), описаним в роботах [1, 116, 117].

У даній роботі для дослідження електромагнітних процесів в електромеханічній системі, наведений на рис. 5.21, була розроблена математична модель з використанням пакета прикладних програм Matlab/Simulink. Цю Simulink-модель системи із двома електроприводами з векторним керуванням показано на рис. 5.23.

У даній моделі дію двох приводів № 1 й № 3, що забезпечують задану швидкість переміщення кабелю, замінено еквівалентною дією одного приводу, тому при моделюванні розглядається система, що складається із двох приводів. У моделі є привід пристрою приймання, що забезпечує задану швидкість обертання валу асинхронного двигуна, а, отже, задану швидкість протягання кабелю. Також міститься привід гусеничного пристрою № 2, що створює заданий момент на валу двигуна, а, отже, і задану силу натягу кабелю. Обидва приводи підключені до трифазного джерела живлення. Для моделювання режиму короткочасного

провалу напруги мережі, до цього джерела короткочасно за допомогою ключа підключається додаткове активне трифазне навантаження. Для візуалізації результатів розрахунку використовуються блоки віртуальних осцилографів Display пакета Simulink, входи яких підключаються до відповідних ліній зв'язку.

Кожен із двох блоків приводу моделює роботу електричного приводу на основі асинхронного двигуна із векторним керуванням. Simulink-модель електричного приводу пристрою приймання показана на рис. 5.24.

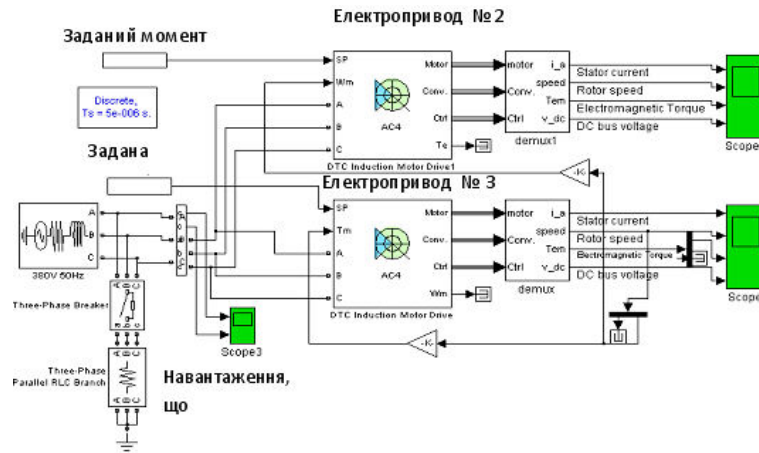


Рис. 5.24. Модель системи із двома електроприводами

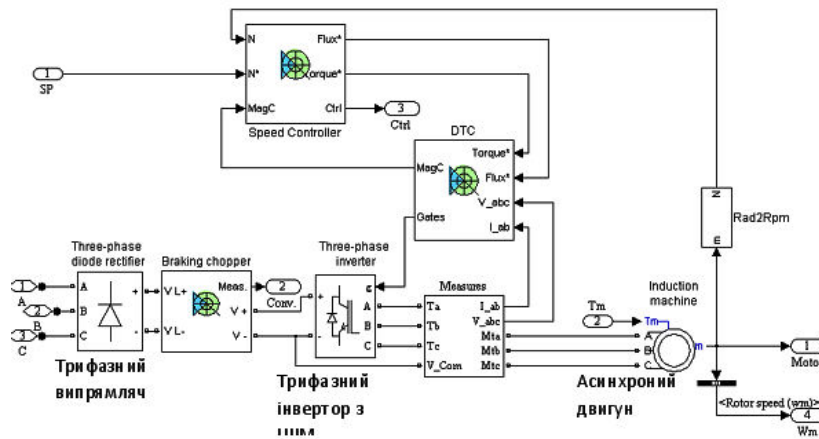


Рис. 5.25. Модель приводу пристрою приймання

Ця модель містить некерований трифазний випрямляч, трифазний інвертор з широтно-імпульсною модуляцією струму (ШІМ), асинхронний двигун, контролер швидкості та блок управління інвертором. Для уникнення перенапруги на

виході випрямляча при роботі двигуна у режимі генерації електричної енергії між випрямлячем й інвертором розташований спеціальний блок – “чопер”, який забезпечує підключення резистора, що шунтує накопичувальну ємність при перевищенні на ній заданого значення напруги. Блок-схему приводу, реалізованого за методом DTC, наведено в [118, 119].

Використовувана в роботі математична модель асинхронної машини складалася з електричної частини, яка представлена моделлю у просторі станів четвертого порядку, і моделі механічної частини у вигляді системи другого порядку. Всі електричні змінні і параметри машини приводилися до статора. Вихідні рівняння електричної частини машини записані для двофазної системи координат (осі $d - q$) і мають вигляд:

$$\begin{cases} V_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d\varphi_{qs}}{dt} - \omega \varphi_{ds}; \\ V_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d\varphi_{ds}}{dt} - \omega \varphi_{qs}; \\ V'_{qs} = R'_s i'_{qs} + \frac{d\varphi'_{qr}}{dt} - (\omega - \omega_r) \varphi'_{dr}; \\ V'_{ds} = R'_s i'_{ds} + \frac{d\varphi'_{dr}}{dt} - (\omega - \omega_r) \varphi'_{qr}; \\ T_e = 1.5(\varphi_{ds} i_{ds} - \varphi_{qs} i_{qs}), \end{cases} \quad (5.27)$$

де:

$$\begin{aligned} \varphi_{qs} &= L_s i_{qs} + L_m i'_{qr}; \quad \varphi_{ds} = L_s i_{ds} + L_m i'_{dr}; \quad \varphi'_{qs} = L'_r i_{qs} + L_m i_{qs}; \\ \varphi'_{dr} &= L'_r i_{dr} + L_m i_{ds}; \quad L_{1s} + L_m; \quad L'_r = L'_{1r} + L_m. \end{aligned}$$

Механічна частина машини описувалася двома рівняннями

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}(T_e - F\omega - T_m), \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega. \quad (5.28)$$

У рівняннях використані такі позначення: $R_s, L_{1s}, R'_r, L_{1r}$ – опори й індуктивності розсіювання статора і ротора; L_m – індуктивність кола намагнічування; L_s, L'_r – повні індуктивності статора й ротора; V_{qs}, i_{qs} , та V'_{qr}, i'_{qr} – проекції напруг і струмів статора й ротора на вісь q ; V_{ds}, i_{ds} та V'_{dr}, i'_{dr} – проекції напруг і струмів статора і ротора на вісь d ; $\varphi_{ds}, \varphi_{qs}, \varphi_{dr}, \varphi_{qr}$ – проекції потокозчеплення статора й ротора на осі d і q ; ω – кутова швидкість ротора; θ – кутове положення ротора; J – момент інерції ротора; T_e – електромагнітний момент двигуна; T_m – статичний момент навантаження; F – коефіцієнт тертя.

Ця математична модель покладена в основу розробленої у пакеті Simulink і використаної у даній роботі віртуальної моделі асинхронної машини. У вікно завдання параметрів цієї віртуальної моделі заносилася низка параметрів, які обчислювалися за паспортними даними машини на основі методики, описаної в роботі [120]. При цьому у приводі пристрою приймання використовувався асинхронний двигун RA160MA4 (11 кВт, 1460 об/хв), а у приводі гусеничного шасі –

RA132S2 (5,5 кВт, 1455 об/хв). Керуючий інформаційний канал електроприводу також реалізовано за допомогою блоків пакету Simulink.

5.3.6. Аналіз результатів моделювання

На рис. 5.27 і 5.26 представлені часові діаграми основних характеристик двох приводів за досліджуваний проміжок часу – 2 с, що відповідає режиму пуску. На цих рисунках приведені струм обмотки статора двигуна, частота обертання ротора, електромагнітний момент на валу двигуна і опорна напруга на вході інвертору, що залежать від часу, для випадку стабільних параметрів мережі живлення або мережі із нескінченно великою потужністю.

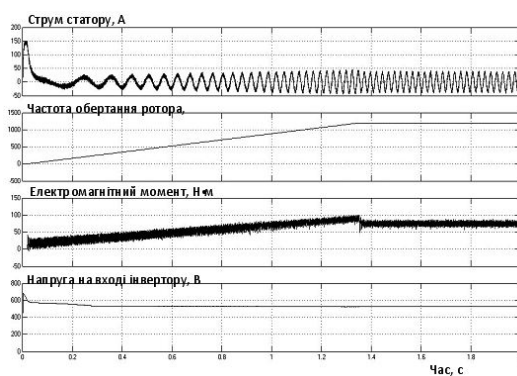


Рис. 5.26. Часові діаграми

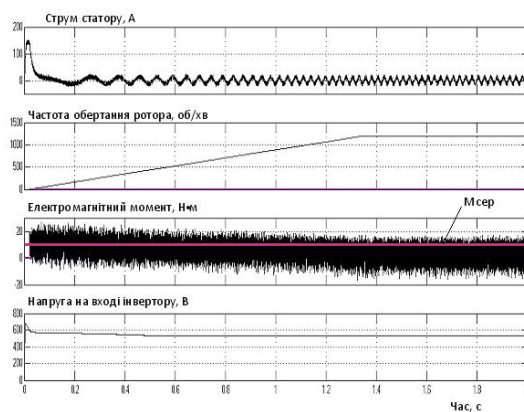


Рис. 5.27. Часові діаграми

З рис. 5.27 і 5.26 видно таке.

- Струм у статорі обох двигунів у процесі пуску змінюється по амплітуді і частоті, причому на початковій ділянці частота є низька і поступово зростає із розгоном двигуна. Саме такий режим пуску характеризується малими витратами енергії.

- Двигун приводу приймання монотонно розганяється до заданої частоти обертання - 1200 об/хв упродовж 1,35 с, і потім з високою точністю відпрацьовує цю задану частоту обертання на подальшому часовому інтервалі (рис. 5.25).

- Привід гусеничного пристрою на всьому часовому інтервалі з високою точністю відпрацьовує задану величину електромагнітного моменту (10 Н/м) (рис. 5.26). Таке регулювання електромагнітного моменту приводу гусеничного пристрою забезпечує необхідний натяг кабелю у вулканізаційній трубі.

На наступному етапі виконувалося моделювання динамічних процесів у приводах при короткочасному (0,2 с) провалі напруги мережі від амплітудного значення u_0 до значення $u_0 - \Delta u$, причому $\Delta u/u = 0,54$. Такий режим моделювався за допомогою підключення до джерела живлення обмеженої потужності додаткового трифазного навантаження. Результати розрахунку цих процесів

для приводу пристрою приймання наведені на рис. 5.27.

З рис. 5.27 видно, що на ділянці провалу напруги (проміжок часу 1,4–1,6 с) зменшується напруга на вході інвертора та струм в обмотці статора двигуна, але при цьому система векторного керування забезпечує збільшення електромагнітного моменту для того, щоб відпрацювати задану частоту обертання. Видно, що при такому провалі напруги електромеханічна система, незважаючи на підвищення моменту, не в змозі відпрацювати задану частоту обертання ротора, яка зменшується наприкінці цього проміжку часу на величину Δn 430 об/хв.

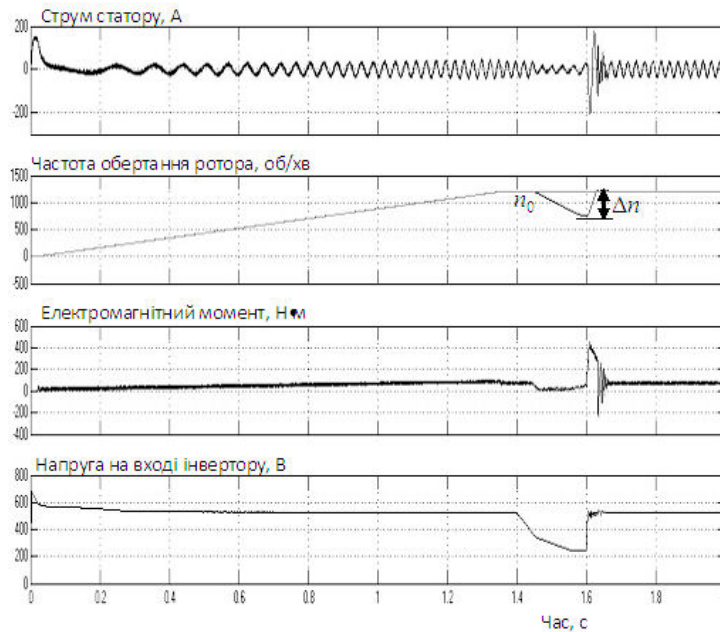


Рис. 5.28. Часові діаграми

Для отримання кількісної залежності відносного зменшення швидкості ротора $\Delta n/n_0$ від відносного зменшення напруги мережі $\Delta u/u_0$ у роботі виконувався розрахунок при різних значеннях навантаження, що додатково підключається до мережі (див. блок знизу схеми на рис. 5.23). Результати розрахунків такої залежності наведені на рис. 5.29. Як видно з цього рисунка, існує порогове значення величини провалу напруги $\Delta u/u_0 = 100\% = 27\%$, нижче якого привід забезпечує стабілізацію заданої швидкості із високою точністю. При перевищенні цієї величини спостерігається зростання відносної швидкості ротора $\Delta n/n_0$, тобто привід не забезпечує стабілізацію заданої швидкості. Отримані дані по пороговому значенню провалу напруги дозволяють сформулювати вимоги до параметрів систем електропостачання із урахуванням можливого підключення до них додаткових силових навантажень.

На наступному етапі виконувалося моделювання динамічних процесів у

приводах при короткочасному підвищенні упродовж 0,2 с напруги мережі від амплітудного значення 380 В до різних величин, менших 500 В. Такий режим моделювався за допомогою підключення приводу до додаткового джерела напруги підвищеної амплітуди у момент часу 1,4 с (після виходу на усталений режим).

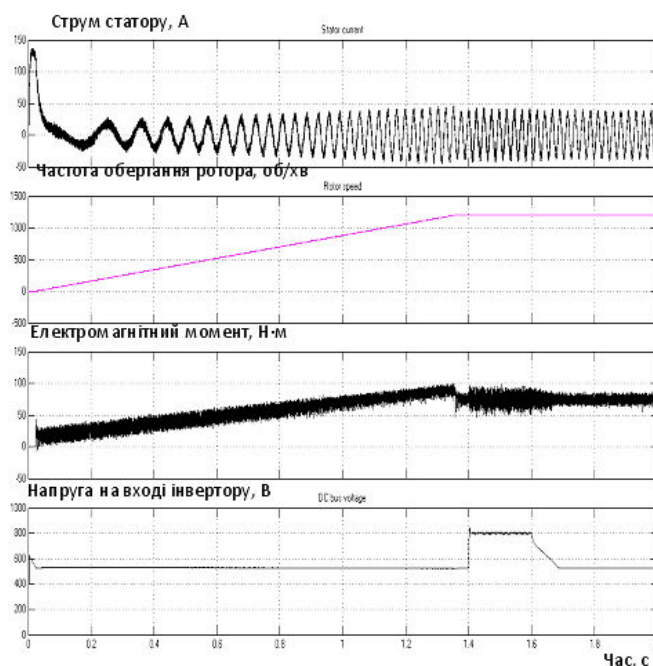


Рис. 5.29. Залежність зменшення швидкості від зменшення напруги

З результатів розрахунку випливає, що хоча напруга на вході інвертора підвищується від 580 В до 800 В, величина швидкості ротора при цьому не змінюється. Тобто система з двох приводів, що досліджується, є стійка до короткочасного підвищення вхідної напруги у широкому діапазоні аж до 500 В.

5.4. Висновок

1. Розроблено Simulink-модель для дослідження динамічних процесів в електромеханічній системі, що використовується в технологічній лінії для екструзійного нанесення поліетиленової ізоляції та півпровідних полімерних шарів на струмопровідну жилу надвисоковольтних кабелів. Досліджувана система складається з електричних приводів на основі частотно керованих асинхронних двигунів та їх навантаження – струмопровідну жилу, що переміщується із необхідною швидкістю і натягом, похиле провисання якої може розглядатися як похиле провисання важкої матеріальної нитки. Комп'ютерне моделювання виконано з використанням пакету прикладних програм Matlab/Simulink/SimPowerSystems.

2. Було проведено узгодження електричних і механічних параметрів системи і виконано аналіз динамічних процесів, що виникають у ній. Показано, що змінювання конфігурації та швидкості руху провисаючої струмопровідної жили із нанесеними на неї полімерними шарами залежить від питомої маси жили на одиницю довжини, її натягу у найнижчій точці і моменту тягового електродвигуна. Було визначено, що при критичній масі струмопровідної жили електромеханічна система дозволяє стабілізувати швидкість переміщення жили з необхідною точністю при короткочасних провалах напруги живлення не більше 27% від його амплітудного значення. Це є одна із основних вимог до параметрів систем електропостачання із урахуванням можливого підключення до них додаткових силових навантажень. Також показано, що дана система є стійка до короткочасного збільшення напруги від 380 до 500 В упродовж 0,2 с.

РОЗДІЛ 6

Моделювання процесу ізоляційного покриття кабелів

У сучасному кабельному виробництві основним способом накладання пластмасової ізоляції є екструзія. Чисельні дослідження у даній галузі спрямовані перш за все на модернізацію обладнання і удосконалення технологічних режимів. Натурні випробовування завдяки великій продуктивності шнекових апаратів і високій коштовності полімерних матеріалів перетворюються у кошовну і тривалу роботу. Крім того, за допомогою експерименту важко виявити деякі приховані особливості процесу, що вивчається. Наприклад, визначити ділянки локальних перегрівів, що важливо під час розгляду процесів перероблення сучасних полімерних матеріалів, забезпечення високих експлуатаційних характеристик яких можна досягти тільки за строгого виконання заданих температурних режимів.

Це спонукає необхідність розвитку теоретичних основ процесів, що досліджуються. Одним із основних інструментів, що сприяють отриманню потрібного результату, є математичне моделювання.

Математичне моделювання (замість кошовних натурних експериментів) надає можливість скоротити матеріально-сировинні і часові витрати, що виникають при заміні сировини або при переході на випуск продукції іншого типу-розміру.

Найпростіші математичні моделі, що описують процес вулканізації кабельних виробів, формуються у вигляді системи нестационарних рівнянь теплопровідності для внутрішнього циліндру (метал) та зовнішнього (ізоляція), наприклад, [86].

$$c_1 \rho_1 V_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} \right) + Q_p w_p, \quad (6.1)$$

$$c_2 \rho_2 V_0 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} \right) + Q_p w_p, \quad (6.2)$$

$$w_p = \rho_2 \frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = (1 - \varphi)k_0 e^{-E/(RT)} \quad (6.3)$$

Початкові умови:

$$T_1(r, 0) = T_2(r, 0) = T_0, \quad \varphi_0 = 0.$$

Межові умови:

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left[\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right] \bigg|_{r=r_1}, \quad T_1 = T_2;$$

$$\left[\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = \alpha(T_b - T_2) + \sigma \varepsilon_{pr}(T_b^4 - T_2^4) \right] \bigg|_{r=r_2},$$

$$T_2 = T_b = 30^\circ C; \quad T_b = 227^\circ C.$$

Тут E – енергія активації хімічної реакції, $E = 66$ кДж/моль; R – універсальна газова стала, $R = 8,31$ Дж/(моль К); α – коефіцієнт теплообміну із навколишнім середовищем, $\alpha = 1$ Вт/(м²К); $\varepsilon_{pr} = 0,5$ – приведений ступінь чорноти; $c_{iz} = c_2 = 1380$ Дж/кг[°]С – теплоємність ізоляції; w_b – ступінь полімеризації; $\lambda_{iz} = \lambda_2 = 0,16$ Вт/м[°]С – теплопровідність ізоляції; $c_p = c_1 = 385$ Дж/кг[°]С – теплоємність жири; $\rho_p = \rho_1 = 8700$ Кг/м³ – густина жири; $\lambda_p = \lambda_1 = 400$ Вт/м[°]С; $V_0 = 0,08$ м/с – швидкість руху жири та ізоляції.

Така модель описує одновимірне температурне поле у металічній жири і полімерній ізоляції. При цьому розглядається температурне поле одношарової полімерної маси із урахуванням фазового переходу жири-ізоляція, але зовсім не розглядаються нелінійні процеси у полімерній масі. Вочевидь, така модель може бути корисною під час проектування конструкцій шнеків, але є некорисна для дослідження нелінійних процесів (в'язкопластичності) полімерної маси.

6.1. Термодинаміка шнекового формування

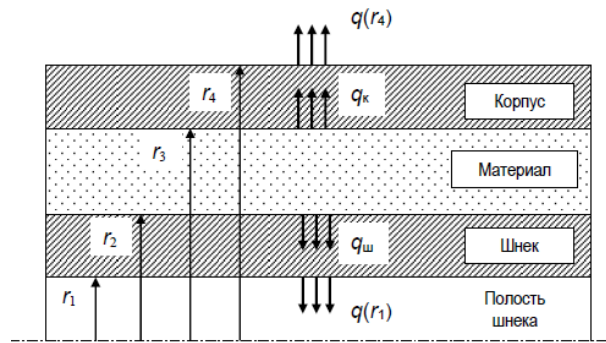


Рис. 6.1. Схема теплових потоків при шнековому формуванні

6.1.1. Розрахунок температурного поля корпусу

Розрахункова схема наведена на рис. 6.1.

Корпус пресу має форму труби із зовнішнім радіусом r_4 та внутрішнім радіусом r_3 , шнек має форму полого циліндру із зовнішнім радіусом r_2 і внутрішнім радіусом r_1 .

Аналіз виконується за таких припущень [109]:

1. Вплив гвинтового каналу шнеку на теплові потоки відсутній; рухливість контакту гребеню гвинтової нарізки із корпусом надає можливість запровадити відповідний коректуючий коефіцієнт, що отримують шляхом розрахунків.

2. Зовнішня поверхня корпусу і внутрішня поверхня шнеку перебувають у стані конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем або мають сталу температуру (інтенсивне примусове охолодження).

3. Теплові потоки рівномірно розподілені по відповідним поверхням.

4. Уся теплота, що виділяється, відводиться через корпус і шнек; теплота, що виноситься із пресу матеріалом, є мала.

5. Теплофізичні характеристики усіх матеріалів вважаються незалежними від температури.

6. Вирішується осесиметрична задача; кінцеві ефекти (відхилення теплових потоків на кінцях шнеку) не враховуються.

Задачу відшукування температурного поля можна вирішувати для будь-якого елемента преса, що контактує із навколишнім середовищем або примусово охолоджується. Оскільки у порожнині шнеку конвективний теплообмін ускладнений, слушно спочатку визначити температурне поле у корпусі пресу.

Для відшукування температурного поля корпусу T_k необхідно розв'язати рівняння теплопровідності, яке у циліндричній системі координат має вигляд

$$\frac{\partial T_k}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_k}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2},$$

де $\tau = \frac{\lambda_k}{\rho_k c_k} t$; λ_k, c_k, ρ_k – коефіцієнт теплопровідності, питома теплоємність і густина матеріалу корпусу відповідно.

Межові умови:

$$\begin{aligned} T_k|_{r=0} &= T_{0k}; \quad \left. \frac{\partial T_k}{\partial r} \right|_{r=r_3} = -\frac{q_k}{h_1}; \quad \left[\frac{\partial T_k}{\partial r} + h_1(T_k - T_{0k}) \right] \Big|_{r=r_4} = 0, \\ \left[\frac{\partial T_k}{\partial z} - h_1 T_k \right] \Big|_{z=0} &= T_0, \quad \left[\frac{\partial T_k}{\partial z} + h_1 T_k \right] \Big|_{z=L} = 0. \end{aligned}$$

де $h_1 = \alpha_k / \lambda_k$; α_k – коефіцієнт тепловіддачі корпусу у навколишнє середовище.

Заміна $T = T_k - T_{0k}$ зводить задачу до рівняння

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (6.4)$$

із межовими умовами

$$T|_{r=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_3} = -\frac{q_k}{\lambda_k}; \quad \left[\frac{\partial T}{\partial r} + h_1 T \right] \Big|_{r=r_4} = 0, \quad (6.5)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial z} - h_1 T \right] \Big|_{z=0} = (1 - h_1) T_{0k}, \quad \left[\frac{\partial T}{\partial z} + h_1 T \right] \Big|_{z=L} = h_1 T_{0k}. \quad (6.6)$$

Застосуємо до рівняння (6.4) інтегральне перетворення за змінною z .

$$\frac{d^2 Z(\delta_k)}{dz^2} + \delta_k^2 Z(\delta_k) = 0.$$

Власні функції перетворення:

$$Z(\delta_k z) = \frac{1}{\|Z_k\|^2} \left[\sin \delta_k z - \frac{\delta_k}{h_1} \cos \delta_k z \right]. \quad (6.7)$$

Інтеграл від добутку власних функцій дорівнює:

$$\int_{k=1}^M \int_{j=1}^M Z_k Z_j dz = \sum_{\pm} \frac{\delta_j}{2p_{kj}} \left[\left(\frac{\delta_k \delta_j}{h_1^2} \mp 1 \right) (1 - \cos p_{kj} L) + \frac{p_{kj}}{h_1} \sin p_{kj} L \right], \quad p_{kj} = \delta_k \pm \delta_j;$$

$$\int_{k=1}^M \int_{j=1}^M Z_k(\delta_k z) \frac{dZ_j(\delta_j z)}{dz} dz = \sum_{\pm} \frac{\delta_j}{2p_{kj}} \left[\left(1 \mp \frac{\delta_k \delta_j}{h_1^2} \right) (1 - \cos p_{kj} L) - \frac{p_{kj}}{h_1} \sin p_{kj} L \right];$$

Зокрема, квадрат норми обчислюється за формулою

$$\|Z\|^2 = \int_0^L Z^2(\delta_k z) dz = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\delta_k^2}{h_1^2} + 1 \right) L + \left(\frac{\delta_k^2}{h_1^2} - 1 \right) \frac{1}{2\delta_k} \sin 2\delta_k L + \frac{1}{h_1} (1 - \cos 2\delta_k L) \right].$$

Для визначення власних значень цієї функції маємо рівняння (задовольняємо другу межу умову (6.6) :

$$f(\delta) = 2\delta \cos \delta L + (\delta^2/h_1 - h_1) \sin \delta L = \frac{2}{L} \sigma \cos \sigma + \left(\frac{\sigma^2}{h_1 \cdot L^2} - h_1 \right) \sin \sigma = 0, \quad \sigma = \delta L. \quad (6.8)$$

Власні значення відшукуються за рівнянням

$$\delta^i = \delta^{i-1} - \frac{f(\delta)}{df(\delta)/d\delta}.$$

$$\frac{df(\delta)}{d\delta} = g(y) = \left(\frac{2}{L} - h_1 + \frac{y^2}{h_1 \cdot L^2} \right) \cos y + \frac{2y}{L} \left(\frac{1}{h_1 \cdot L} - 1 \right) \sin y, \quad y = \delta L.$$

Застосування інтегрального перетворення за змінною z до рівняння (6.4) дає:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) + Q z_k(\delta_k). \quad (6.9)$$

$$Q z_k = \left[h_1 \left(\sin \delta_k L - \frac{\delta_k}{h_1} \cos \delta_k L \right) + (1 - h_1) \frac{\delta_k}{h_1} \right] T_{0k}.$$

Межові умови (6.5) набувають вигляду

$$\bar{T}|_{r=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right|_{r=r_3} = -z_1 \frac{q_k}{\lambda_k} = \bar{q}_k; \quad \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + h_1 \bar{T} \right] \Big|_{r=r_4} = 0, \quad z_1 = \int_0^L Z_k(\delta_k z) dz. \quad (6.10)$$

$$\bar{T}(r, t, \delta_k) = \int_0^L Z(\delta_k z) T(r, t, z) dz.$$

Застосування до (6.9) інтегрального перетворення за змінною r призводить до відшукування розв'язку рівняння Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R_n(r)}{\partial r} \right) + \delta_k^2 R_n(r) = 0$$

із однорідними межовими умовами

$$\left. \frac{dR}{dr} \right|_{r=r_3} = 0; \quad \left[\frac{dR}{dr} + h_1 R \right] \Big|_{r=r_4} = 0.$$

Функцію $R(r)$ можна записати у такому вигляді:

$$R(r) = A J_0(\beta r) + B I_0(\beta r), \quad (6.11)$$

де A, B – коефіцієнти, що визначаються із межових умов.

Із першої межової умови (6.10) отримуємо:

$$\frac{dR}{dr} = -\beta [A J_1(\beta r) + B I_1(\beta r)] \Big|_{r=r_3} = 0. \quad (6.12)$$

Звідси

$$A = -B I_1(\beta r_3) / J_1(\beta r_3) = -B \cdot D_n(\beta r_3).$$

Власні функції набувають вигляд:

$$R_n(\beta r) = \frac{1}{\|R_n(\beta_n r)\|^2} [I_0(\beta r) - D_n(\beta r_3) J_0(\beta r)]. \quad (6.13)$$

Підстановка (6.11) і (6.12) при $r = r_4$ у другу межу умову (6.10) із урахуванням виразу для A призводить до характеристичного рівняння для відшукування власних значень β_n .

$$h_1[J_1(\beta r_3)I_0(\beta r_4) - I_1(\beta r_3)J_0(\beta r_4)] - \beta[J_1(\beta r_3)I_1(\beta r_4) - I_1(\beta r_3)J_1(\beta r_4)] = 0, \quad (6.14)$$

Позначимо $\gamma = \beta r_4$, $c = r_3/r_4$ і

$$P_m^l(\gamma) = J_m(\gamma c)I_l(\gamma) - I_m(\gamma c)J_l(\gamma); \quad l, m = 1, 2.$$

Тоді для обчислення власних значень β_n будемо мати такі функції:

$$q(\gamma) = \frac{\gamma}{r_4} P_1^1(\gamma) - h_1 P_1^0(\gamma) = 0, \quad (6.15)$$

$$w(\gamma) = \frac{c}{b} \gamma P_0^1(\gamma) - \left(\frac{1}{r_4} + h_1\right) P_1^1(\gamma) - \left(\frac{1}{r_4} \gamma + \frac{h_1}{\gamma}\right) P_1^0(\gamma) + h_1 c P_0^0(\gamma). \quad (6.16)$$

Для визначення початкового значення в ітераційній процедурі обчислення власних значень побудуємо графіки функції $q(\gamma)$ для різних значень h_1 та r_3 , r_4 .

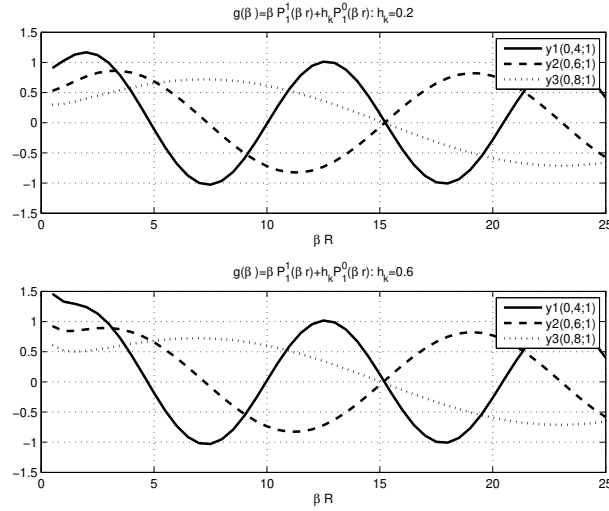


Рис. 6.2. Графіки функції $q(\gamma)$

Із рис. 6.2 видно, що власні значення не залежать від параметра h_1 та абсолютних значень r_3, r_4 , а залежать від різниці $r_4 - r_3$.

Обчислення власних значень β_n здійснюємо за ітераційною схемою []:

$$\gamma_n^{(j)} = \gamma_n^{(j-1)} - \frac{f(\gamma)}{g(\gamma)}, \quad \gamma_1^0 = 1, \quad n = \overline{1, N}, \quad \varepsilon = 0.0001.$$

$$\beta_n = \gamma_n / r_4.$$

Для прикладу наведемо кілька власних значень γ ($r_4 = 1$, $r_3 = 0.4$).

$$\gamma = [].$$

Коефіцієнт B визначається як норма власних функцій $R(\beta_n r)$, $D_n = \frac{I_1(\beta_n r_3)}{J_1(\beta_n r_3)}$:

$$R_n(\beta_n r) = \frac{1}{\|R_n(\beta_n r)\|^2} [I_0(\beta_n r) - D_n J_0(\beta_n r)], \quad (6.17)$$

$$B = \|R_n(\beta_n r)\|^2 = \int_{r_3}^{r_4} r R_n^2(\beta_n r) dr = \int_{r_3}^{r_4} [I_0(\beta_n r) - D_n J_0(\beta_n r)]^2 r dr. \quad (6.18)$$

Застосуємо інтегральне перетворення за змінною r до рівняння (6.4) та межових умов (6.5). Отримуємо:

$$\frac{\partial \bar{\bar{T}}}{\partial \tau} + \beta_n^2 \bar{\bar{T}} = -R(\beta_n r) \bar{q}_k = \frac{1}{B} [I_0(\beta_n r_3) - D_n J_0(\beta_n r_3)] \bar{q}_k = G_{nk}. \quad (6.19)$$

Тепер, застосувавши інтегральне перетворення за змінною t , отримуємо

$$\bar{\bar{\bar{T}}} = \frac{G_{nk}}{p(p + (\gamma_{nk}^2))}.$$

У просторі оригіналів за змінною t маємо

$$\bar{\bar{T}} = \frac{G_{nk}}{\gamma_{nk}^2} \left(1 - e^{-\gamma_{nk}^2 \tau}\right), \quad \gamma_{nk}^2 = \beta_n^2 + \delta_k^2.$$

Отже, розв'язок рівняння (6.4) із межовими умовами (6.5) отримано у такому вигляді:

$$T(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M \frac{1}{\|R_n(\beta_n r)\|^2} [I_0(\beta_n r) - D_n J_0(\beta_n r)] Z_k(\delta_k z) \frac{G_{nk}}{(\eta_{nk}^2)} \left(1 - e^{-\eta_{nk}^2 t}\right). \quad (6.20)$$

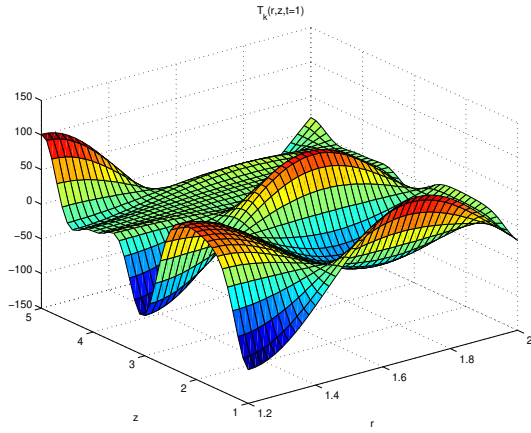
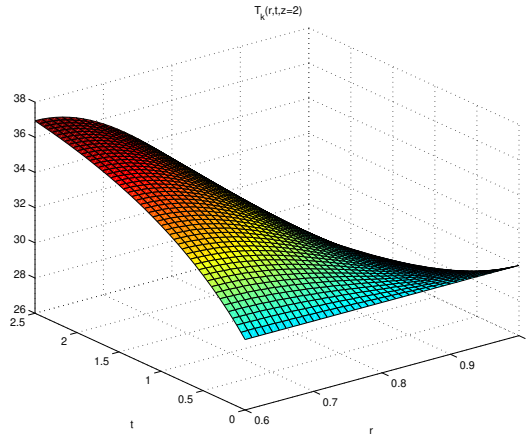
де $\eta_{nk} = c_v \rho / \lambda_T (\beta_n^2 + \delta_k^2)$.

На рис. 6.3, 6.4 наведено результати моделювання температурного поля корпусу шнека.

Густина теплових потоків на поверхнях контакту матеріалу із елементами пресу задається співвідношеннями

$$q_k = f_k p_k v_{kn} c_k; \quad q_{\text{шн}} = f_{\text{шн}} p_{\text{шн}} v_{\text{шн}} c_{\text{шн}},$$

де f_k , $f_{\text{шн}}$ – коефіцієнти тертя матеріалу об корпус та шнек відповідно; p_k , $p_{\text{шн}}$ – тиск матеріалу на поверхні корпусу та шнека; c_k , $c_{\text{шн}}$ – коефіцієнти, що

Рис. 6.3. Температурне поле корпусу шнека за фіксованого t Рис. 6.4. Температурне поле корпусу шнека за фіксованого r

враховують вплив гвинтового каналу на теплові потоки; v_{kn} , v_{shn} – швидкості ковзання порошкового матеріалу відносно поверхонь корпусу і шнека.

$$c_k = \frac{S_{kn}}{S_k} = 1 - \frac{\delta}{2\pi r_3 \sin \varphi} < 1, \quad c_{\text{шн}} = \frac{S_{shn}}{S_{\text{шн}}} = 1 + \frac{r_3 - r_2 - \delta}{2\pi r_2 \sin \varphi},$$

де S_{kn} – площа контакту внутрішньої поверхні корпусу із матеріалом; S_k – площа внутрішньої поверхні корпусу; δ , φ – товщина гребня і кут гвинтової нарізки відповідно; S_{shn} – площа контакту шнека із матеріалом; $S_{\text{шн}}$ – площа бічної поверхні циліндру радіусу r_2 .

Швидкості ковзання матеріалу відносно корпусу і шнека задаються співвідношеннями

$$V_{kn} = \frac{1}{2}(r_2 + r_3)\sqrt{\omega_n^2 + (\omega - \omega_n)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad V_{shn} = \frac{1}{2\cos \varphi}(\omega - \omega_n)(r_2 + r_3),$$

де ω , ω_n – кутові швидкості шнека і матеріалу відповідно; $(r_2 + r_3)/2$ – середній радіус нарізки шнека.

Отже, густини теплових потоків на внутрішній поверхні корпусу і зовнішній поверхні шнека дорівнюють

$$q_k = \frac{1}{2}f_k p_k (r_2 + r_3) \sqrt{\omega_n^2 + (\omega - \omega_n)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \left(1 - \frac{\delta}{2\pi r_2 \sin \varphi}\right),$$

$$q_{\text{шн}} = \frac{f_{\text{шн}} p_{\text{шн}}}{2\cos \varphi} (r_2 + r_3) (\omega - \omega_n) \left(1 + \frac{r_3 - r_2 - \delta}{2\pi r_2 \sin \varphi}\right).$$

6.2. Дослідження процесів у гвинтовому каналі шнека

Дослідимо процеси руху та температурне поле у гвинтовому каналі шнека. Добре відомо [59], що ці процеси описуються повною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних Нав'є–Стокса. Система рівнянь складається із рівняння нерозривності, рівнянь руху полімерної маси (рівняння відносно компонент швидкості потоку) та рівняння енергії (температурного поля розплаву полімеру):

рівняння нестискаємості:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho v_r)}{\partial r} = 0, \quad (6.21)$$

рівняння руху:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \rho g_r; \quad (6.22)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \rho g_\theta; \quad (6.23)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g_z; \quad (6.24)$$

рівняння енергії:

$$c_V \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + A q_T; \quad (6.25)$$

$k = \lambda_T / (\rho c_V)$ – коефіцієнт теплопровідності.

$$q_T = -T \frac{\partial p}{\partial T} \bigg|_\rho \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} +$$

$$+ \tau_{r\theta} \left(r \frac{\partial(v_\theta/r)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \tau_{rz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \tau_{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right).$$

реологічні рівняння стану.

Компоненти тензору напруження зсуву:

$$\tau_{ij} = \mu \Delta_{ij} + (\aleph - 2/3\mu) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij}; \quad \Delta_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

У циліндричній системі координат маємо:

$$\tau_{rr} = \mu_e \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] + \aleph (\nabla \cdot \mathbf{v}); \quad (6.26)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu_e \left[2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] + \aleph (\nabla \cdot \mathbf{v}); \quad (6.27)$$

$$\tau_{zz} = \mu_e \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] + \aleph (\nabla \cdot \mathbf{v}); \quad (6.28)$$

$$\tau_{rz} = \mu_e \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right); \quad \tau_{r\theta} = \mu_e \left(r \frac{\partial (v_\theta/r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right); \quad \tau_{z\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right), \quad (6.29)$$

μ_e – ефективна в'язкість при зсувній течії.

$$\mu_e = \mu_0 (I_2/2)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\beta(T-T_0)}, \quad n = 2 \rightarrow \mu_e = \mu_0 \sqrt{I_2/2} e^{-\beta(T-T_0)}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

де $\aleph$ – коефіцієнт об'ємної в'язкості; μ_0 – початкова в'язкість; I_2 – другий інваріант тензору швидкостей деформації; n – показник аномалії в'язкості; v_r, v_θ, v_z – компоненти вектору швидкості; τ_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) – компоненти тензору напружень; T – температура, β – температурний коефіцієнт; T_0 – початкова температура.

Після заміщення виразів для компонент тензору напружень зсуву у рівняння (6.22)–(6.25) отримуємо таку систему рівнянь для компонент швидкості руху і температури:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_e \left[\Delta v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{2}{r} v_\theta \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right] + \rho g_r; \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu_e \left[\Delta v_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - v_\theta + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta; \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_e \left[\Delta v_z + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \right] + \rho g_z; \end{aligned} \quad (6.32)$$

рівняння енергії:

$$c_V \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + A q_T; \quad (6.33)$$

$$q_T = -T \frac{\partial p}{\partial T} \bigg|_\rho \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + 2\mu_e \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right)^2 + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 \Big]. \quad (6.34)$$

A – термічний еквівалент роботи; c_v – питома теплоємність рідини за сталого об'єму. Вираз $(\partial p / \partial T)|_\rho$ визначається із рівняння стану. У разі $p = \rho RT$ він дорівнює $R\rho$.

Межові умови:

- на вході – температура полімеру на вході (T_b) і нульовий відносний тиск;
- на поверхні шнеку – окружна швидкість, що відповідає числу обертів шнека (N_s), температура поверхні шнеку (T_p);
- межові умови корпусу шнека – температура корпусу (T_k);
- межові умови на виході – температура полімеру на виході (T_{out}) і нульовий відносний тиск.

6.2.1. Моделювання процесів руху та температурного поля у гвинтовому каналі шнека

Будемо розглядати осесиметричний рух полімерної маси у гвинтовому каналі шнека. Тоді систему рівнянь (6.30)–(6.33) можна подати у такому вигляді

$$\rho \frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_e \Delta v_r^{(0)} + N_r(v_r, v_z); \quad (6.35)$$

$$\rho \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_e \Delta v_z^{(0)} + N_z(v_r, v_z); \quad (6.36)$$

$$c_v \rho \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} = \lambda_T \Delta T^{(0)} + N_T(v_r, v_z). \quad (6.37)$$

У цій системі рівнянь відокремлено нелінійні частини від лінійних, які позначені символами N_r , N_z , N_T .

$$N_r(v_r, v_z) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r - \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \quad (6.38)$$

$$N_z(v_r, v_z) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z - \rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \quad (6.39)$$

$$N_T(v_r, v_z) = -\rho \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + A q_T. \quad (6.40)$$

Наявність складової q_T , що задається виразом (6.34) у рівнянні (6.40) враховує можливість турбулентного руху у каналі шнека.

Межові та початкові умови за структурою для наведеної системи рівнянь такі самі, як і для рівняння (6.4), але відрізняються значеннями температури на межових поверхнях шнеку.

Розв'язки лінійної частини наведеної системи рівнянь можна записати у такому вигляді.

$$v_r^{(0)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M [I_0(\beta_n r) - D_n J_0(\beta_n r)] Z_k(\delta_k z) \frac{V r_{nk}}{\alpha_{nk}} (1 - e^{-\alpha_{nk} t}). \quad (6.41)$$

$$v_z^{(0)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M [I_0(\beta_n r) - D_n J_0(\beta_n r)] Z_k(\delta_k z) \frac{V z_{nk}}{\alpha_{nk}} (1 - e^{-\alpha_{nk} t}). \quad (6.42)$$

$$T^{(0)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M [I_0(\beta_n r) - D_n J_0(\beta_n r)] Z_k(\delta_k z) \frac{G_{nk}}{\eta_{nk}} (1 - e^{-\eta_{nk} t}). \quad (6.43)$$

Згідно із викладеною методикою розв'язання лінійних рівнянь у просторі зображень матимемо, наприклад, для рівняння відносно температурного поля

$$\frac{d\overline{\overline{T^{(m)}(\eta_{nk}, t)}}}{dt} + \eta_{nk} \overline{\overline{T^{(m)}(\eta_{nk}, t)}} = \frac{G_{nk}}{\eta_{nk}} - N_T [\overline{\overline{v_r^{(m-1)}}}, \overline{\overline{v_z^{(m-1)}}}, \overline{\overline{T^{(m-1)}}}], \quad \gamma_{nk}^2 = \beta_n^2 + \delta_k^2. \quad (6.44)$$

$$T^{(0)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M [I_0(\beta_n r) - D_n J_0(\beta_n r)] Z_k(\delta_k z) T g_{nk} (1 - e^{-\eta_{nk} t}). \quad (6.45)$$

$$\eta_{nk} = \frac{c_V \rho}{\lambda_T} \gamma_{nk}^2, \quad T g_{nk} = G_{nk} / \eta_{nk}; \quad \alpha_{nk} = \gamma_{nk}^2 \mu_e / \rho$$

Позначимо $Y_n(\beta_n r) = I_0(\beta_n r) - D_n J_0(\beta_n r)$.

Щоб отримати розв'язок кожного із рівнянь (6.35)–(6.37) у першому наближенні, необхідно обчислити вираз

$$\overline{\overline{N_T [v_r^{(m-1)}, v_z^{(m-1)}, T^{(m-1)}]}}$$

тобто виконати інтегральні перетворення відносно змінних z та r . Випишемо конвективну складову рівняння, наприклад, (6.37). Ми починаємо із цього рівняння, оскільки рівняння відносно компонент швидкості руху полімерної маси містять складову P , яка визначається через температуру (рівняння Клапейрона). Отже, маємо

$$\begin{aligned} & v_r^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} + v_z^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} \\ &= \sum_{l_1=1}^M \sum_{j_1=1}^M \sum_{l_2=1}^M \sum_{j_2=1}^M \left[Y_{l_1} Z_{j_1} V r_{l_1 j_1} \frac{\partial Y_{l_2}}{\partial r} Z_{j_2} T g_{l_2 j_2} \right. \\ & \quad \left. + Y_{l_1} Z_{j_1} V z_{l_1 j_1} Y_{l_2} \frac{\partial Z_{j_2}}{\partial z} T g_{l_2 j_2} \right] (1 - e^{-\alpha_{l_1 j_1} t}) (1 - e^{-\eta_{l_2 j_2} t}). \end{aligned}$$

Інтегральне перетворення за змінною r призводить до необхідності обчислення інтегралу

$$\int_{r_1}^{r_2} Y_n(r) Y_{l_1}(r) Y_{l_2}(r) r dr.$$

Оскільки такі інтеграли не беруться у квадратурах, необхідно розробляти алгоритм, що надає можливість виконати це інтегрування. Для цього функцію $Y_k = I_k(\beta_k r) - D_k(\beta_k r_1) J_k(\beta_k r)$ апроксимуємо дробово-раціональними функціями.

$$Y_m(\beta_m r) \approx \sum_{k=1}^3 \left[\frac{b_{6k+3}^{(m)} + b_{6k+4}^{(m)} r^2}{b_{6k}^{(m)} + b_{6k+1}^{(m)} r^2 + b_{6k+2}^{(m)} r^4} + \frac{b_{6k+21}^{(m)} + b_{6k+22}^{(m)} r}{b_{6k+18}^{(m)} + b_{6k+19}^{(m)} r + b_{6k+20}^{(m)} r^2} \right]. \quad (6.46)$$

Тепер, після виконання операцій добутку та подання цих добутків у вигляді суми ланцюгів другого порядку, інтегрування зводиться до обчислення табличних інтегралів. Позначимо ці інтеграли як:

$$Ri1_{l_1 l_2}^n = \int_{r_1}^{r_2} Y_m(\beta_n r) Y_m(\beta_{l_1} r) Y_m(\beta_{l_2} r) r dr.$$

$$Zi1_{j_1 j_2}^k = \int_0^L Z_k(z) Z_{j_1}(z) Z_{j_2}(z) dz.$$

$$Ri2_{l_1 l_2}^n = \int_{r_1}^{r_2} Y_m(\beta_n r) Y_m(\beta_{l_1} r) \frac{\partial Y_m(\beta_{l_2} r)}{\partial r} r dr.$$

$$Zi2_{j_1 j_2}^k = \int_0^L Z_k(z) Z_{j_1}(z) \frac{\partial Z_{j_2}(z)}{\partial z} dz.$$

Позначимо також, для скорочення запису:

$$F_{l_1 j_1 l_2 j_2}^{nk} = [Ri2_{l_1 l_2}^n Zi1_{j_1 j_2}^k Vr_{l_1 j_1} + Ri1_{l_1 l_2}^n Zi2_{j_1 j_2}^k Vz_{l_1 j_1}] Tg_{l_2 j_2}.$$

Отже, інтегральні перетворення конвективної складової N_T дають такий вираз:

$$\overline{\overline{N_T[v_r^{(m-1)}, v_z^{(m-1)}, T^{(m-1)}]}} = \sum_{l_1=1}^M \sum_{j_1=1}^M \sum_{l_2=1}^M \sum_{j_2=1}^M F_{l_1 j_1 l_2 j_2}^{nk} (1 - e^{-\alpha_{l_1 j_1} t}) (1 - e^{-\eta_{l_2 j_2} t}).$$

$$F_{l_1 j_1 l_2 j_2}^{nk} (1 - e^{-\alpha_{l_1 j_1} t}) (1 - e^{-\eta_{l_2 j_2} t}) = 1 - e^{-\eta_{l_2 j_2} t} - e^{-\alpha_{l_1 j_1} t} + e^{(\alpha_{l_1 j_1} + \eta_{l_2 j_2}) t}.$$

Застосуємо до цього виразу інтегральне перетворення Лапласа за змінною t . Це призведе до M^4 складових вигляду (для наочності ми опускаємо індекси).

$$\left[\frac{c_7}{p} - \frac{c_4 + c_5 p + p^2}{c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + p^3} \right];$$

$$c_0 = \zeta \cdot \alpha \cdot \eta, \quad c_1 = \zeta^2 + \alpha \cdot \eta, \quad c_2 = c_5 = 2\zeta, \quad c_4 = \zeta^2 - \alpha \cdot \eta, \quad \zeta = \alpha + \eta.$$

Вочевидь, навіть для відносно малого $M = 6$ використання таких виразів після підсумовування практично неможливе. Тому скористаємося алгоритмом еквівалентного спрощення [] і отримаємо вирази вигляду

$$\frac{d_6^{nk}}{p} + \frac{d_3^{nk} + d_4^{nk} p}{d_0^{nk} + d_1^{nk} p + p^2}.$$

Похибки, що викикають за такого спрощення дробово-раціональних виразів, компенсуються за рахунок додаткових ітерацій в ітераційній процедурі розв'язання системи рівнянь.

Отже,

$$\overline{\overline{\overline{T^{(1)}(\eta_{nk}, p)}}} = \frac{G1_{nk}}{p(p + \eta_{nk})} - \mathcal{L}\{\overline{\overline{N_T}}\} = \frac{a_6^{nk}}{p} + \frac{a_3^{nk} + a_4^{nk} p}{a_0^{nk} + a_1^{nk} p + p^2}.$$

У просторі оригіналів маємо

$$T^{(1)}(r, z, t) = \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^M Y_n(\beta_n r) Z_k(\delta_k z) T^{(1)}(t),$$

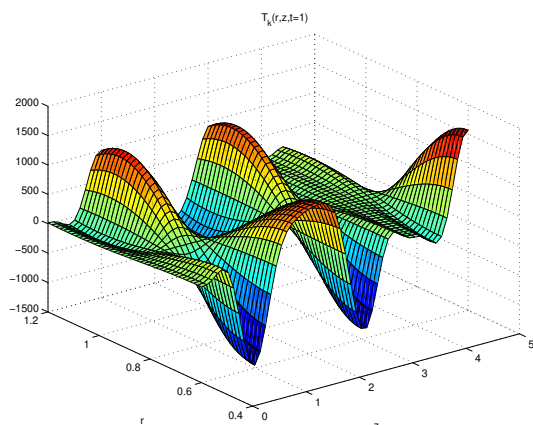
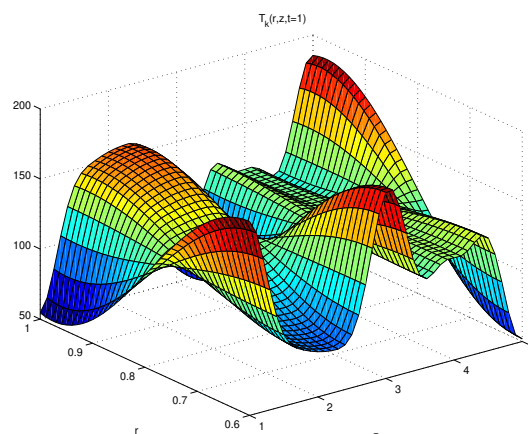
$$TT^{(1)}(t) = \left[d_0^{nk} + e^{-\sigma_{nk} t} (d_1^{nk} \cos \omega_{nk} t + d_2^{nk} \sin \omega_{nk} t) \right], \quad \sigma_{nk} = a_1^{nk}/2, \quad \omega_{nk} = \sigma_{nk}^2 - a_0^{nk}.$$

На рис. 6.5, 6.6 наведено результати моделювання температурного поля полімерної маси.

Наступні ітерації виконуються за аналогічною схемою.

Оцінка похибки на m -й ітерації виконується за формулою

$$\varepsilon_m = \int_{t_0}^{t_n} \left[TT^{(m)}(t) - TT^{(m-1)}(t) \right]^2 dt, \quad m = 1, 2, \dots$$

Рис. 6.5. Температурне поле полімерної маси за фіксованого t Рис. 6.6. Температурне поле полімерної маси за фіксованого r

6.3. Реологія полімерів

Цей розділ наведено для обговорення!

6.3.1. Неньютонівська рідина

Неньютонівська рідина – це рідина, крива течії якої нелінійна, тобто в'язкість неньютонівської рідини не є стала за заданих температури і тиску, а залежить від інших факторів, таких як швидкість зсуву.

Реальні рідини із нелінійною кривою течії можна поділити на три групи:

- 1) системи, для яких швидкість зсуву у кожній точці являє собою деяку функцію тільки від напруження зсуву у цій точці;
- 2) складніші системи, в яких зв'язок між напруженням і швидкістю зсуву залежить від часу дії напруження або передісторії рідини;
- 3) системи, які мають властивості як твердого тіла, так і рідини, і частково проявляється пружне відновлення форми після зняття напруженості (так звані *в'язкопружні рідини*).

Системи першого типу, властивості яких не залежать від часу, можна описати реологічним рівнянням

$$\dot{\gamma} = f(\tau),$$

із якого випливає, що швидкість зсуву у кожній точці є функція напруження зсуву у цій самій точці. Такі речі можна назвати *в'язкими неньютонівськими рідинами*. Залежно від вигляду функції $f(\tau)$ їх підрозділяють на три групи:

1. бінгамовські пластичні рідини (бінгамовські пластини);
2. псевдопластичні рідини (псевдопластики);
3. ділатантні рідини.

Псевдопластики.

Псевдопластичні рідини не виявляють границі текучості, й їхня крива течії показує, що відношення напруження зсуву до швидкості зсуву, тобто уявна в'язкість η_a

$$\eta_a = \tau / \dot{\gamma}, \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial v_z}{\partial r},$$

поступово знижується зі зростанням швидкості зсуву. Крива течії стає лінійною тільки за дуже великих швидкостях зсуву. Граничний нахил, що отримав назву в'язкості за нескінченно великого зсуву, позначають як η_∞ .

Для опису рідин такого типу застосовують функціональну емпіричну залежність у вигляді степеневого закону:

$$\tau = m \dot{\gamma}^n,$$

де m – міра консистенції рідини (чим вища в'язкість рідини, тим більше m); n – характеризує ступінь неньютонівської поведінки матеріалу (чим більше n відрізняється від одиниці, тим чіткіше проявляються його неньютонівські властивості).

Найзагальніше реологічне рівняння для рідини, що не стискається, має вигляд (Рейнер):

$$\tau = \eta \cdot \nabla + \frac{1}{2} \eta_c (\Delta : \Delta),$$

де η_c – коефіцієнт поперечної в'язкості, що є скалярна функція інваріантів I_1, I_2 .

Степеневий закон у загальному вигляді можна записати як:

$$\eta = \eta_0 [I_2/2]^{-\frac{n-1}{2}},$$

де η_0 – в'язкість при $\dot{\gamma} = 1$ (1/c).

Скалярна величина $(\Delta : \Delta)$ у циліндричних координатах:

$$I_2 = 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 \right] + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \\ + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2.$$

6.3.2. Залежність в'язкості від температури

Зазвичай в'язкість рідини зі збільшенням температури зменшується, а в'язкість газів збільшується.

Поведінка неньютонівських рідин під час течії залежить від однієї характеристики – в'язкості, що є функція тільки температури. Найчастіше використовують вираз для залежності в'язкості від температури у вигляді рівняння Арреніуса

$$\mu = A e^{E/RT},$$

де R – газова стала; E – енергія активації течії; A – коефіцієнт, що залежить від природи рідини.

Іноді для уточнення даних залежності в'язкості від температури застосовують інше рівняння:

$$\mu = ae^{-bT},$$

де a, b – емпіричні коефіцієнти.

Значення енергії активації течії $E_{\dot{\gamma}}$ і E_{τ} для поліетилену у температурному інтервалі 108–230 °C визначені у [1];

Табл. 6.1. Енергія активації течії для поліетилену у температурному інтервалі 108–230 °C

$\dot{\gamma}, 1/\text{с}$	$E_{\dot{\gamma}}, \text{кДж/моль}$	$\tau, \text{Н/м}^2$	E_{τ}
0	53,6	0	53,6
10^{-1}	47,7	10^3	62,8
10^0	43,12	10^4	72,5
10^1	35,6	10^5	79,55
10^2	30,14	-	-
10^3	25,54	-	-

6.3.3. В'язкопружні рідини

В'язкопружними називають рідини, що проявляють як пружні (пружне відновлення форми), так і в'язкі властивості (в'язка течія).

Модель Кельвіна–Фойгта

Тіло можна подати таким, що складається із пружного та в'язкого елементів, що з'єднані паралельно. Під впливом сталого напруження тіло почне деформуватися, тобто спочатку пружина розтягнута незначно, її реакція відносно мала і більша частина напруження припадає на в'язкий елемент. Для отримання реологічного рівняння тіла Кельвіна–Фойгта розглянемо геометричний, кінематичний і фізичний аспекти задачі. Із геометричного розгляду задачі маємо

$$\tau_{\Sigma} = \tau_N + \tau_H;$$

кінематичного:

$$\gamma_{\Sigma} = \gamma_h = \gamma_N;$$

фізичного:

$$\tau_H = \gamma_H G = \gamma_{\Sigma} G; \quad \tau_N = \mu \dot{\gamma}_N = \mu d\gamma_{\Sigma}/dt.$$

Тоді

$$\tau_{\Sigma} = \gamma_H G + \mu \dot{\gamma}_N = \gamma_H G + \mu \frac{d\gamma_{\Sigma}}{dt}, \quad \frac{\tau}{G} = \gamma_{\Sigma} + \frac{\mu}{G} \dot{\gamma}.$$

Цей вираз є реологічне рівняння простої моделі Кельвіна–Фойгта.

Для дослідження поведінки простої моделі Кельвіна–Фойгта за довільних режимів навантаження необхідно розв'язати останнє диференціальне рівняння. Для цього розглянемо режим деформування за сталого напруження (повзучість), тобто $\tau = \tau_0 = \text{const}$. Тоді

$$\frac{d\gamma_\Sigma}{dt} = \frac{\tau_0}{\mu} - \frac{\lambda_\Sigma}{\mu} G = -\frac{G}{\mu} \left(\gamma_\Sigma - \frac{\tau_0}{G} \right),$$

або

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_\Sigma - \tau_0/G} d(\gamma_\Sigma - \tau_0/G) &= -\frac{G}{\mu} dt \rightarrow \\ \ln \frac{\gamma_\Sigma - \tau_0/G}{\gamma_0 - \tau_0/G} &= -\frac{G}{\mu} t \ln e, \rightarrow \gamma_\Sigma = \gamma_0 e^{-G/\mu \cdot t} + \frac{\tau_0}{G} \left(1 - e^{-G/\mu \cdot t} \right). \end{aligned}$$

Це рівняння характеризує змінювання величини деформації у часі за сталого напруження. Із цього рівняння випливає, що за $t = 0$, $\gamma = \gamma_0$, а за $t = \infty$ $\gamma_\Sigma = \tau_0/G$, тобто модель К-Ф веде себе як модель Гука. Величина $t_z = \mu/G$, що має розмірність часу, називається часом запізнення.

n -й елемент характеризується модулем зсуву G_n і в'язкістю μ_n . Тоді час запізнення цього елемента $\lambda_{zp} = \mu_n/G_n$. Із урахуванням того, що $\gamma_0 = \tau_0/G_n$, отримаємо:

$$\gamma_n(t) = \frac{\tau_0}{G_n} \left(1 - e^{-t/\lambda_{zp}} \right).$$

Повний зсув системи γ буде сумою деформацій окремих елементів:

$$\gamma(t) = \tau_0 \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{G_n} \left(1 - e^{-t/\lambda_{zp}} \right) \right].$$

Зазвичай прийнято позначати $I_n = 1/G_n$ – податливість зсуву.

$$\gamma(t) = \tau_0 \sum_{n=1}^N \left[I_n \left(1 - e^{-t/\lambda_{zp}} \right) \right].$$

При $n \rightarrow \infty$ приходимо до нескінченного ланцюга елементів, для яких час запізнення змінюється неперервно від нуля до ∞ . Скінченне число сталих для елементів I_n , λ_{zp} замінюється функцією розподілу $I(\lambda_{zp})$, яка являє собою пружну податливість, що зв'язана із часом запізнення як неперервним параметром. Зазвичай цю функцію називають *розподілом часу запізнення*. При переході до границі $N \rightarrow \infty$ маємо

$$\gamma(t) = \tau_0 \int_0^\infty I(\lambda_{zp}) \left(1 - e^{-t/\lambda_{zp}} \right) d\lambda_{zp}.$$

Для узагальнення моделі запроваджують поняття *функції повзучості* в'язкопружного матеріалу, яка визначається як відношення деформації, що виражена у вигляді функції від t , до напруження за умови, що до матеріалу після релаксації раптово прикладене стале за величиною напруження.

$$\varphi(t) = \gamma(t)/\tau_0.$$

Тоді

$$\varphi(t) = \int_0^\infty I(\lambda_{zp}) \left(1 - e^{-t/\lambda_{zp}}\right) d\lambda_{zp}.$$

Тепер розподіл часу запізнення $I(\lambda_{zp})$ можна визначити на основі повзучості $\varphi(t)$, отриманої експериментальним шляхом.

6.4. Дослідження впливу охолодження шнека на процес екструзії

Вирішення задачі по визначенню впливу охолодження шнека на процес екструзії може бути здійснено на ґрунті математичної моделі, що описує процеси тепломасоперенесення розплавів полімеру ті охолоджуючого агенту із різними реологічними і теплофізичними властивостями у каналах шнеку.

Об'єктом моделювання є екструдер із каналом охолодження (рис. 6.7), в якому течуть різномірні матеріали, що не є стичні.

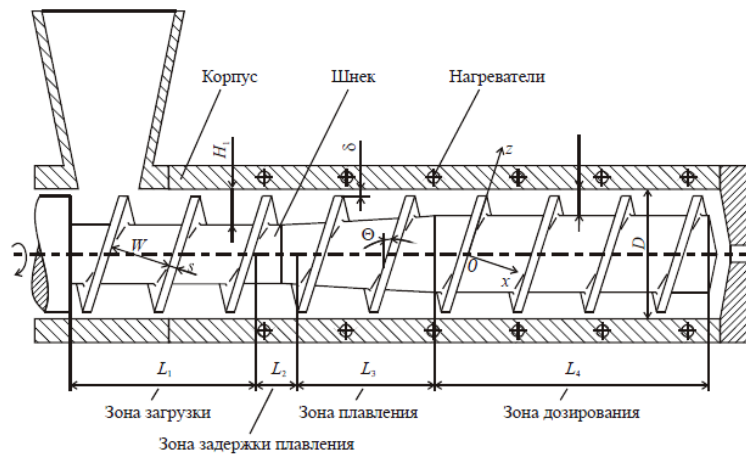


Рис. 6.7.

Математичний опис процесів течії і теплообміну розплаву полімеру та рідини, що охолоджує, ґрунтується на законах збереження. Рівняння енергії, руху, нерозривності отримано за таких припущень:

- середовище не стискається, без пружних властивостей;
- полімер надходить у канал із торця шнеку у рідинному стані;
- течія осесиметрична;
- теплофізичні характеристики є сталі;
- полімер рухається вздовж шнека;
- поверхня шнека без гребенів.

Система диференціальних рівнянь для кожного із потоків набуває вигляду:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r^i}{\partial r} + \frac{\partial v_z^i}{\partial z} = 0; \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r^i}{\partial t} + \rho \left(v_r^i \frac{\partial v_r^i}{\partial r} + v_z^i \frac{\partial v_r^i}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left(2\mu_e^i \frac{\partial v_r^i}{\partial r} \right) + \frac{2\mu_e^i}{r} \frac{\partial v_r^i}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \mu_e^i v_r^i + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_e^i \left(\frac{\partial v_z^i}{\partial r} + \frac{\partial v_r^i}{\partial z} \right) \right]; \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z^i}{\partial t} + \rho \left(v_r^i \frac{\partial v_z^i}{\partial r} + v_z^i \frac{\partial v_z^i}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_e^i \left(\frac{\partial v_z^i}{\partial r} + d d v_r^i z \right) \right] + \frac{\mu_e^i}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z^i}{\partial r} + \frac{\partial v_r^i}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_e^i \frac{\partial v_z^i}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\rho^i C^i \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda^i \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda^i \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi; \quad (6.50)$$

де індекс i визначає матеріал; r, z – радіальна і поздовжня циліндричні координати; v_r, v_z – компоненти вектору швидкості; ρ – густина; C – теплоємність; μ_e – ефективна в'язкість; λ – теплопровідність, що є функція швидкості зсуву і температури:

$$\mu_e = \mu_0 e^{-\beta((T-T_0)(I_2/2)^{(n-1)/2})}, \quad (6.51)$$

де μ_0 – початкова в'язкість за T_0 , β – температурний коефіцієнт в'язкості; I_2 – другий інваріант тензору швидкостей деформації.

Система рівнянь (6.47)–(6.50) замикається такими межовими умовами:

- на нерухомих стінках компоненти швидкості дорівнюють нулю;
- на вході у канали задаються епюри швидкостей, що відповідають заданим витратам матеріалу;
- на виході – межові умови другого роду за швидкістю і температурою;
- температура стінки циліндру зростає за градієнтом від $90^\circ C$ до $200^\circ C$;
- температура полімерів на вході в екструдер стала – $20^\circ C$;
- на поверхнях контакту задаються межові умови 4-го роду і рівність температур.

Полімер:

$$v_z|_{z=0} = f_1(r), \quad v_r|_{z=0} = 0, \quad (6.52)$$

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|_{z=L_{\text{шн}}} = 0, \quad v_z|_{r=R_{\text{шн}}} v_r|_{r=R_{\text{шн}}} = 0, \quad (6.53)$$

$$v_r|_{r=R_c} = 0, \quad v_z|_{r=R_c} = 0, \quad (6.54)$$

$$\lambda_p \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_{\text{шн}}} = \lambda_m \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_{\text{шн}}}, \quad (6.55)$$

$$T^+|_{r=R_{\text{шн}}} = T^-|_{r=R_{\text{шн}}}, \quad (6.56)$$

$$T|_{z=0} = T_{\text{вх}}, \quad T|_{r=R_c} = f(z), \quad (6.57)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L_{\text{шн}}} = 0, \quad (6.58)$$

Шнек (метал):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L_{\text{шн}}} = 0. \quad (6.59)$$

Канал охолодження:

$$v_z|_{z=0} = f_2(r), \quad \left. \frac{\partial v_r}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (6.60)$$

Межові умови на твердих поверхнях для компонент швидкості агенту, що охолоджує, відповідають умовам прилипання і непроникнення.

У центрі каналу охолодження виконуються умови (6.60):

$$\lambda_{\text{ок}} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_k} = \lambda_m \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_k}, \quad (6.61)$$

$$T^+|_{r=R_k} = T^-|_{r=R_k}, \quad (6.62)$$

$$T|_{z=0} = T_{\text{вх}2}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L_{\text{шн}}} = 0. \quad (6.63)$$

У якості агенту охолодження використовується вода із $T = 10^\circ\text{C}$. Тиск агенту $P = 1000$ Па. Вода подається по центру. На рис. 2,3,4 наведено залежність температур у полімері за різної глибини введення агенту, що охолоджує. У результаті введення агенту на глибину від 50 до 90% вдається знизити перегрів полімеру (температура знижується на 20°C) і вирівняти температуру у каналі при збереженні заданих технологічних параметрів.

6.5. Розв'язання задачі

Математичне моделювання виконується ітераційним числово-аналітичним методом із застосуванням інтегральних перетворень за просторовими і часовими змінними, [1].

Запишемо систему рівнянь (6.22)–(6.25) при $\rho = \text{const}$, у “стандартизованому” вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \Phi \right) + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\Gamma_\Phi}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] + S_\Phi = \frac{\Gamma_\Phi}{\rho} \Delta \Phi + S_\Phi; \end{aligned} \quad (6.64)$$

де $\Phi = [v_r, v_\theta, v_z, T]$, $\Gamma = [\mu_{ef}, \mu_{ef}, \lambda_t/c_V]$.

Позначимо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Delta \Phi - N_\Phi. \quad (6.65)$$

Тоді

$$N_\Phi = v_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \Phi \right) + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} - S_\Phi. \quad (6.66)$$

Із урахуванням виразів для напружень (6.27)–(6.28) нелінійні частини S_Φ відображають вплив на потік турбулентних складових. Ми не будемо враховувати впливу турбулентності (в'язкопластичних властивостей полімерної маси), тому не будемо наводити явні вирази для S_Φ , а обмежимося урахуванням конвективних складових потоку.

У рівняння (6.22)–(6.24) входять вирази для тиску p . Оскільки тиск можна визначити за відомим розподілом температури, у відповідності із рівнянням стану $p = \rho RT$, перш за все знайдемо розв'язок рівняння (6.25), що описує розподіл температури у потоці.

Розглядаються межові умови для полого (у даній роботі температурне поле у циліндрі радіусу R_1 (металевий стрижень – жила) не розглядається. Розглядається полий циліндр радіусу $R_1 \leq r \leq R_2$.

Знайдемо інтегральні перетворення від Лапласіану для осесиметричного випадку.

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (6.67)$$

Межові умови за змінною z приймаємо змішаними, тобто

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \beta_\Phi \Phi \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \beta_\Phi \Phi \right] \Big|_{z=L} = 0.$$

Задача про розподіл температури полімерної маси у циліндричному каналі $R_0 \leq r \leq R_1$ описується рівнянням

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (6.68)$$

Задача про розподіл температури полімерної маси у циліндричному каналі $R_0 \leq r \leq R_1$ описується рівнянням

$$c_V \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + A q_r. \quad (6.69)$$

Початкова умова для T :

$$T(r, \theta, t)|_{t=0} = f(r, \theta) = \cos k\theta. \quad (6.70)$$

Межові умови:

$$T(r, \theta, t)|_{r=R_0} = q_k/\lambda_k, \quad \left[\alpha_0 \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_1 T \right] \Big|_{r=R_1} = 0. \quad (6.71)$$

Друга межа умова означає наявність теплового потоку із вільної поверхні.

Застосуємо до рівняння (6.69) інтегральне перетворення за змінною θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$. За умови періодичності взаємно ортогональними лінійно-незалежними нормованими розв'язками задачі

$$\frac{d^2 \bar{K}}{d\theta^2} + \mu^2 \bar{K} = 0$$

є функції

$$\bar{K}_{2m-1}(\theta) = \frac{1}{\pi} \sin m\theta, \quad \bar{K}_{2m}(\theta) = \frac{1}{\pi} \cos m\theta. \quad (6.72)$$

Перетворення початкової умови (6.70) за змінною θ дає

$$\bar{T}(r, \mu, 0) = \bar{f}_{2m-1}(r, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \sin(m\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} [1 - \cos(2\pi(m \pm k))]; \quad (6.73)$$

$$\bar{T}(r, \mu, 0) = \bar{f}_{2m}(r, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \cos(m\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} [\sin(2\pi(m \pm k))]; \quad (6.74)$$

Тоді

$$\bar{T}(r, \mu, t) = \int_0^{2\pi} T(r, \theta, t) \bar{K}_\gamma(\theta) d\theta, \quad \gamma = 2m - 1, \quad \gamma = 2m. \quad (6.75)$$

Рівняння (6.69) у лінійному наближенні (без урахування конвективних складових) набуває вигляду:

$$c_V \rho \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \lambda_T \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \bar{T} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right) + A \bar{q}_\mu. \quad (6.76)$$

Інтегральне перетворення цього рівняння відносно змінної r дає ядро перетворення $H(\beta r)$, що має задовольняти рівнянню Бесселя із межовими умовами

$$\bar{T}(r, \mu, t)|_{r=R_0} 0, \quad \left[\alpha_0 \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \alpha_1 T \right] \Big|_{r=R_1} = 0. \quad (6.77)$$

$$Y(\beta r) = J_m(\beta R_1) I_m(\beta r) - I_m(\beta R_1) J_m(\beta r). \quad (6.78)$$

Власні значення $\beta_{m,k}$ визначаються як розв'язок характеристичного рівняння

$$g(\beta) = \alpha_0 \beta [J_m(\beta R_0) \frac{d}{dr} I_m(\beta R_1) - I_m(\beta R_0) \frac{d}{dr} J_m(\beta R_1)] + \alpha_1 J_m(\beta R_0) I_m(\beta R_1) - I_m(\beta R_0) J_m(\beta R_1) = 0. \quad (6.79)$$

$I_m(\beta r)$ – функції Бесселя другого роду (модифіковані функції Бесселя).

Позначимо

$$B(m, n) = J_m(\beta a) I_n(\beta b) - I_m(\beta a) J_n(\beta b); \quad a = R_0, \quad b = R_1.$$

Тоді

$$g(\beta) = \left(\frac{m}{R_1} \alpha_0 + \alpha_1 \right) B(m, m) - \alpha_0 \beta B(m, m+1) = 0. \quad (6.80)$$

Згідно із загальним алгоритмом обчислення коренів рівняння (6.79) або (6.80) маємо:

$$\frac{dg(\beta)}{d\beta} = \frac{m}{\beta} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) B(m, m) - B(m+1, m) - \alpha_0 \left[m \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} \right) B(m, m+1) - \beta (B(m+1, m+1) + B(m, m+2)) \right]. \quad (6.81)$$

Розв'язання цього рівняння дає власні значення $\beta_{m,k}$.

Застосування інтегрального перетворення за змінною z до рівняння

$$c_V \rho \frac{\partial \bar{\bar{T}}(\beta_{m,k}, z, t)}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 \bar{\bar{T}}(\beta_{m,k}, z, t)}{\partial z^2} + \bar{\bar{q}}_w$$

із межовими умовами призводить до звичайного диференціального рівняння відносно t . Власні функції за змінною z мають вигляд

$$Z_j(z, \delta) = \frac{1}{\|Z(z, \delta_j)\|^2} \left(\cos(\delta_j z) + \frac{\delta_j}{\beta_T} \sin \delta_j z \right).$$

$$\frac{d\bar{\bar{T}}}{dt} = \lambda_T \bar{\bar{T}} + \bar{\bar{q}}_w + R_T.$$

$$\bar{\bar{T}} = \int_0^L \int_{R_0}^{R_1} \bar{T}(r, z, \mu, t) Z_j(z, \delta_j) Y_m(\beta_{m,k} r) dr dz.$$

Як наслідок застосування інтегральних перетворень за просторовими змінними r, z замість рівняння (6.25) отримуємо звичайне диференціальне рівняння відносно $\bar{\bar{T}}^{(0)}(t, \beta, \delta)$, де α, β – власні значення, що відповідають власним функціям $Y_0(r, \beta), Z_j(z, \delta)$, [6].

$$\frac{d\bar{\bar{T}}^{(0)}(t, \beta_{km}, \delta_j)}{dt} = -\gamma_{km}^T \bar{\bar{T}}(t, \beta_{mk}, \delta_j) + \bar{R}_T. \quad (6.82)$$

$$\bar{\bar{T}}^{(0)}(t, \beta, \delta) = \int_{R_1}^{R_2} Y_0(\beta_{mk} r) r dr \int_0^L Z_j(\delta_j z) T^{(0)}(r, z, \theta, t) dz. \quad (6.83)$$

$$\gamma_{k,m,j} = \lambda_T / (\rho c_v) (\beta_{km}^2 + \delta_j^2).$$

Функція R_T визначається інтегральним перетворенням межових умов.

Власні функції отримано у такому вигляді.

$$Z_j(z, \delta) = \frac{1}{\|Z(z, \delta_j)\|^2} \left(\cos(\delta_j z) + \frac{\delta_j}{\beta_T} \sin(\delta_j z) \right). \quad (6.84)$$

Власні значення δ_j визначаються розв'язанням характеристичного рівняння

$$Z(\delta L) = \cos(\delta L) + \frac{\delta}{\beta_T} \sin(\delta L) = 0.$$

Розв'язок рівняння відносно температурного поля у нульовому наближенні набуває вигляду:

$$T^{(0)}(r, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N [Y_0(\alpha_{km} r) Z_k(\delta_k z) \left[e^{-\gamma_{km}^T t} + \bar{R}_T (1 - e^{-\gamma_{km}^T t}) \right]]. \quad (6.85)$$

Тепер отримаємо вирази для похідних від тиску.

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} = \rho R \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{dY_0(\beta_{ij} r)}{dr} Z_j(\delta_j z) e^{-\gamma_{ij} t}. \quad (6.86)$$

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z} = \rho R \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N Y_0(\beta_{ij} r) \frac{dZ_j(\delta_j z)}{dz} e^{-\gamma_{ij} t}. \quad (6.87)$$

Застосування інтегральних перетворень за просторовими змінними до (6.86), (6.87) дає:

$$\frac{\partial \overline{p^{(0)}}}{\partial r} = \rho R \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N y r_m z r_k e^{-\gamma_{km} t}; \quad (6.88)$$

$$\frac{\partial \overline{p^{(0)}}}{\partial r} = \rho R \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N y z_m z z_k e^{-\gamma_{km} t}; \quad (6.89)$$

$$y r_{m,i} = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_{R_1}^{R_2} Y_m(\alpha r) \frac{d}{dr} (Y_i \alpha r) r dr; \quad (6.90)$$

$$y z_{m,i} = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_{R_1}^{R_2} Y_m(\alpha r) Y_i(\alpha r) r dr; \quad (6.91)$$

$$z r_{k,j} = \frac{1}{\|Z_k\|^2} \int_0^L Z_k(\delta z) Z_j(\delta z) dz = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\delta_k \delta_j}{h_1^2} \mp 1 \right) \frac{1}{\delta_k \pm \delta_j} \sin(\delta_k \pm \delta_j) L \pm 1 (\cos(\delta_k \pm \delta_j) L - 1) \right]; \quad (6.92)$$

$$z z_{k,j} = \frac{1}{\|Z_k\|^2} \int_0^L Z_k(\delta z) \frac{d}{dz} Z_j(\delta z) dz = \frac{\delta_j}{2} \left[\left(1 \mp \frac{\delta_k \delta_j}{h_1^2} \mp 1 \right) \frac{1}{\delta_k \pm \delta_j} (1 - \cos(\delta_k \pm \delta_j) L) - \frac{1}{h_1} \sin(\delta_k \pm \delta_j) L \right]. \quad (6.93)$$

Алгоритм обчислення інтегралів типу (6.90), (6.91) приведено в [].

Тепер, за наявними виразами для похідних від тиску у рівняннях відносно компонент швидкості полімерної маси можна отримати розв'язок у лінійному наближенні для v_r і v_z . Оскільки область розв'язання задачі та межові умови відносно компонент швидкості збігаються із межовими умовами відносно T , інтегральні перетворення за просторовими змінними, що застосовуються до рівняння (6.64) при $\Phi = v_r$ і аналогічно при $\Phi = v_z$, призводять до рівняння

$$\frac{dV_r^{(0)}(t, \alpha, \delta)}{dt} = -\gamma_{m,k}^{v_r} V_r(t, \alpha, \delta) + R_{v_r} + \frac{\partial \overline{p^{(0)}}}{\partial r}.$$

$$\text{де } \gamma_{m,k}^{v_r} = \frac{\mu_{ef}}{\rho} (\alpha_m^2 + \delta_k^2).$$

$$V_r^{(0)}(t, \alpha, \delta) = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \frac{1}{\|Z_k\|^2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^L Y_m(\alpha r) Z_k(\delta z) v_r(r, z, t) r dr dz.$$

У просторі оригіналів маємо такий вираз:

$$v_r^{(0)}(r, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N Y_0(\alpha_{km}r) Z_k(\delta_k z) \left[R_{mk}^{u0} e^{-\gamma_{km}^{v_r} t} + \left(\bar{v}_r + \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial r} \right) + R_{mk}^u (1 - e^{-\gamma_{km}^{u_r} t}) \right]. \quad (6.94)$$

За аналогічним алгоритмом отримуємо розв'язок у лінійному наближенні для $v_z^{(0)}(r, z, t)$:

$$v_z^{(0)}(r, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N Y_0(\alpha_{km}r) Z_k(\delta_k z) \left[R_{mk}^{v0} e^{-\gamma_{km}^{v_z} t} + \left(\bar{v}_z + \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial z} \right) + R_{mk}^v (1 - e^{-\gamma_{km}^{v_z} t}) \right]. \quad (6.95)$$

На другому етапі відшукуємо розв'язок у першому та наступних наближеннях із урахуванням конвективних членів у рівняннях (6.30)–(6.33) відносно температурного поля і компонент швидкості потоку.

Розглянемо конвективні члени у рівняннях (6.30)–(6.33). Із урахуванням отриманих виразів для компонент швидкості та температури у лінійному наближенні маємо:

$$\begin{aligned} & u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} + v^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z} \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^M Y_m(\alpha_{mk}r) Z_k(\delta_k z) R_{v_r}^{km} (1 - e^{-\gamma_{km}^{u_r} t}) \sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{dY_n(\alpha_{nj}r)}{dr} Z_j(\delta_j z) R_{v_r}^{nj} (1 - e^{-\gamma_{nj}^{u_r} t}). \end{aligned} \quad (6.96)$$

Тепер до цього виразу можна застосувати інтегральні перетворення за просторовими змінними r і z .

Інтегральне перетворення за змінною r , що застосовується до (6.96), призводить до необхідності обчислення інтегралів вигляду

$$\int_{r_2}^{r_1} Y_m(\alpha_{mk}r) Y_{l_1}(\alpha_{l_1 j_1}r) dY_{l_2}(\alpha_{l_2 j_2}r) r dr.$$

Оскільки для добутку функцій Бесселя (крім обчислення норми, тобто від квадратів функцій Бесселя) не існує виразів, що є інтеграли від добутку двох функцій Бесселя різного порядку та різних власних значень, тим паче від добутку трьох і більше функцій Бесселя), необхідно розробити алгоритми наближеного обчислення таких інтегралів. Класичний підхід, що ґрунтується на прямій підстановці функцій Бесселя у вигляді степеневих рядів відносно, наприклад, $\beta_{mk}r$ не призводить до результату внаслідок того, що спроба обмежити кількість членів у розкладанні у степеневий ряд для того, щоб відповідний алгоритм можна було б реалізувати, призводить до суттєвих похибок у результаті. Тому пропонується подати функції Бесселя у вигляді дробово-раціональних функцій,

інтегрування яких зводиться до обчислення табличних інтегралів вигляду

$$q_1 = \frac{b_2 y + b_1}{y^2 + a_1 y + a_0}, \quad y = (\beta_{mk} r)^2, \quad y_2 = (\beta_{mk} r_2)^2, \quad y_1 = (\beta_{mk} r_1)^2.$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{b_2 y + b_1}{y^2 + a_1 y + a_0} dy = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4a_0 - a_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{2y_2 + a_1}{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}, & 4a_0 > a_1^2, \\ \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}} \ln \left| \frac{2y_2 + a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2y_2 + a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}} \right|, & 4a_0 < a_1^2, \end{cases}$$

$$- \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4a_0 - a_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{2y_1 + a_1}{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}, & 4a_0 > a_1^2, \\ \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}} \ln \left| \frac{2y_1 + a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2y_1 + a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}} \right|, & 4a_0 < a_1^2, \end{cases}$$

Докладний алгоритм перетворення добутку функцій $Y_n(\alpha_{nk} r) Y_m(\alpha_{mk} r) dY_l(\alpha_{lj} r)$ у суму дробово-раціональних виразів другого степеню викладено в [47].

Інтегральні перетворення відносно змінної z зводяться до обчислення інтегралів від добутку власних функцій

$$Z = (\cos \delta_k z + \frac{\delta_k}{\beta_\Phi} \sin(\delta_k z)) (\cos \delta_{j_1} z + \frac{\delta_{j_1}}{\beta_\Phi} \sin(\delta_{j_1} z)) (\cos \delta_{j_2} z + \frac{\delta_{j_2}}{\beta_\Phi} \sin(\delta_{j_2} z)).$$

Інтеграли у межах $[0, L_z]$ від таких функцій не складають жодних проблем. Алгоритм обчислення такого роду інтегралів також викладено в [47]. Отже, інтегральні перетворення за просторовими змінними від конвективних складових у рівняннях руху (відносно компонент швидкості та температури)

$$\bar{Y}_{l_1 l_2}^m(\beta_m) \bar{Z}_{j_1 j_2}^k = \overline{v_r^{(0)} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} + v_z^{(0)} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial z}}.$$

На рис. 6.8–6.11 наведені результати моделювання отриманого розв'язку.

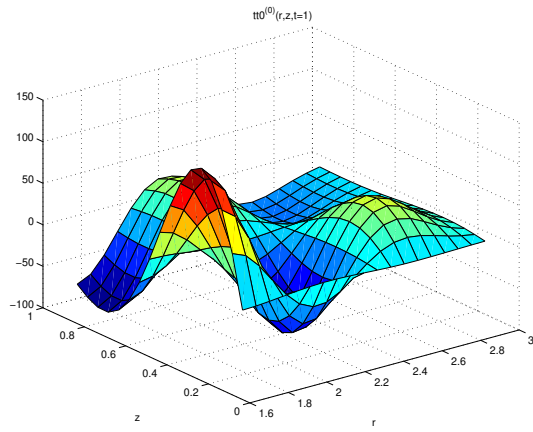


Рис. 6.8.

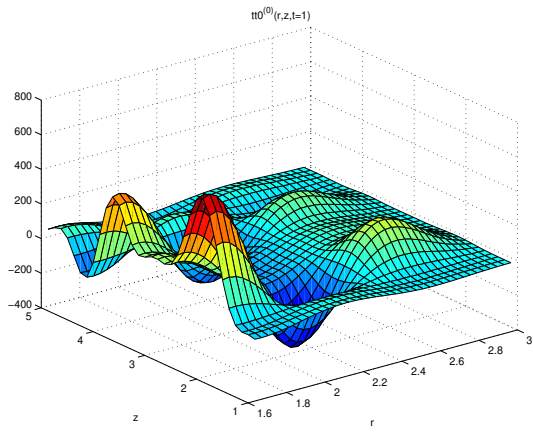


Рис. 6.9.

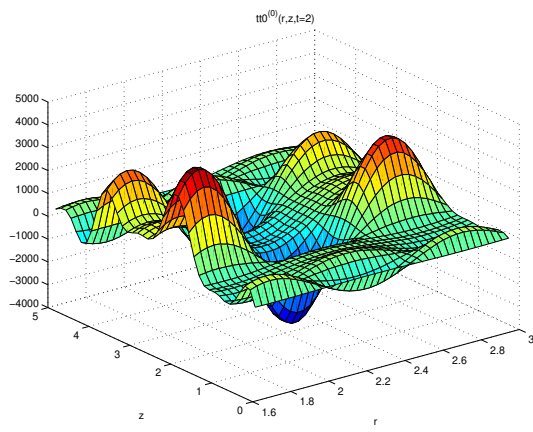


Рис. 6.10.

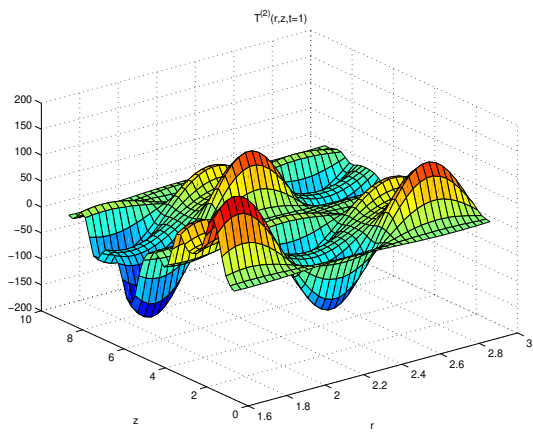


Рис. 6.11.

Плівка

7.1. Цілеспрямована на оптимізацію процесу намотування ідентифікація пружного стану плівки

7.1.1. Інформація відносно конструкції намотувальних пристроїв

Пристрої призначені для намотування полімерних плівок в рулони з необхідною щільністю намотування, відсутністю місцевих ущільнень по ширині рулону, рівними торцями рулону [127]. Приймальні пристрої намотують матеріал на барабан. Вони можуть бути з передачею обертання від приводного електродвигуна через жорстку або прослизну механічну передачу [128]. Призначення приймальних пристроїв полягає у тому, щоб здійснювати намотування матеріалу з постійним або регульованим натягом. Пристрої діляться на центральні і периферійні [129]. Плівка [126] намотується на вісь, що обертається від самостійного приводу з постійним або зростаючим моментом. У першому випадку натяг плівки знижується за збільшення діаметра рулону, у другому залишається постійним.

Пристрій (рис. 7.1) складається із станини 1, пневмосистеми 11, двохпозиційної каруселі 4, приводу 2, шпуль 3 і 6 безштангового кріплення, заправного відрізного пристрою 10, притискного валка 7, компенсуючого ролика 12 (танцролика), відхиляючих роликів 5, шпулярника 13, механізму 15 подачі шпуль, приймача 14 шпуль. З приймальних приладів або додаткових тягнучих валків плівкове полотно надходить через відхиляючий ролик на танцролик 12, який підтримує постійний натяг полотна за допомогою сальника управління приводом намотування. Величина натягу задається противагами, встановленими на танцролику 12. З танцролика через відхиляючі ролики і притискний валок 7 плівка потрапляє на шпулю 6, де намотується в рулон заданого діаметра, готовий рулон переходить в стан знімання 3. Пневмоциліндр переміщує заправочно-відрізний пристрій 10, що відрізає плівкове полотно і заправляє його вільний кінець в зазор між шпулею, що обертається 6, і притискним валком

7. Заправочно-відрізний пристрій складається з важелів, на яких встановлено пилкоподібний ніж 8 і заправна щітка 9. Обертання рулону в положенні знімання 3 припиняється, затискачі кріплення шпулі з рулоном роз'єднуються з допомогою пневмоциліндрів і рулон скочується в приймач.

На рис. 7.1 показано автоматичний намотувальний пристрій центрального типу [130].

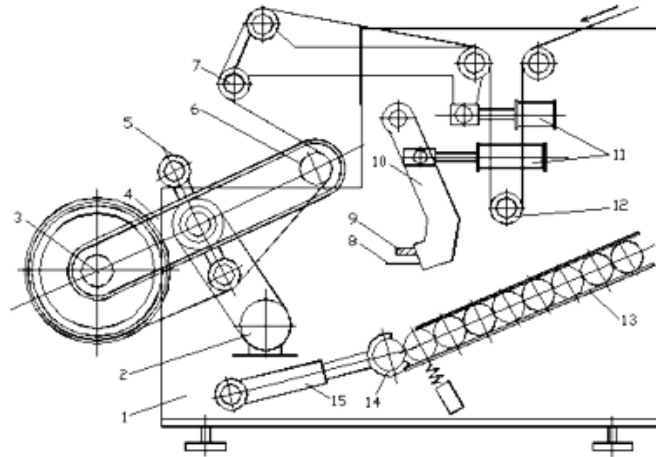


Рис. 7.1. Автоматичний пристрій центрального типу

В пристроях (рис. 7.2) периферійного типу [131] шпуля, а потім рулон приводяться в обертання за рахунок сил тертя від барабана, який обертається з постійною частотою, тобто обертальний момент передається безпосередньо на поверхню рулону за рахунок сил тертя барабана. Недолік – некерованість натягом полотна по діаметру рулону. Конструкція намотчика периферійного типу забезпечує одночасне намотування двох полотен плівки на рис. 7.2, де: 1 – станина, 2 – відхиляючі ролики, 3 – ніж поздовжнього різання, 8 – тягнучі валки з електроприводом 9, 4 – барабан з електроприводом, 7 – напрямні важелі для кріплення рулонів 5. Плоский рукав надходить через відхиляючий ролик на ніж 3, який обрізає кромки рукава. Рукав поділяється на два полотна, які через відхиляючі ролики 2 потрапляють у зазор між барабаном 4 і рулоном 5 та закручуються за останній. При збільшенні діаметра рулону штанга 6 переміщується від рулону. Досягнувши заданого розміру, рулон опускається важелями 7. однак, для управління намоткою необхідна інформація про керований процес [132, 133], тобто, його ідентифікація. В [134] (рис. 7.3) для вимірювання радіусу намотуваного матеріалу є електродвигун 1, на осі якого встановлено ролик 4 для намотування матеріалу 3. Він охоплює мірний обвідний ролик 2 датчика лінійної швидкості матеріалу 5. На валу електродвигуна 1 встановлено датчик кутової швидкості 6. Радіус намотування визначається за формулою $R = V/\omega$,

де V, ω – лінійна і кутова швидкості довговимірного матеріалу.

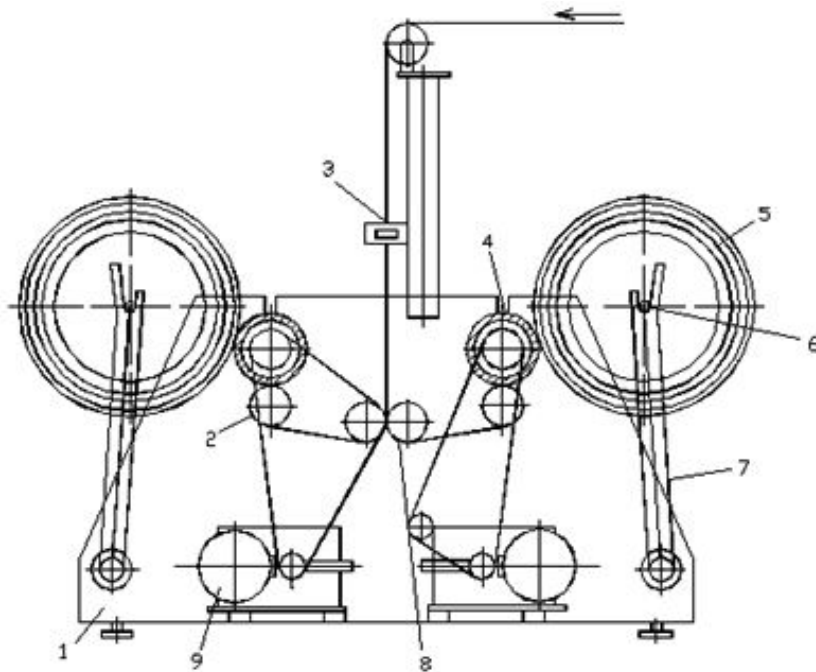


Рис. 7.2. Пристрій периферійного типу

7.1.2. Системи управління намотувальними пристроями

Найбільшу швидкодію [135] має структура з аналоговими регуляторами, проміжними датчиками та цифровим датчиком зовнішнього контуру регулювання. Підвищення швидкодії САУ можна домогтися введенням коригуючих ланок [136 – 138]. Але підвищення швидкодії САУ призводить до збільшення перерегулювання, яке в намотувальних пристроях неприпустимо. Зменшення перерегулювання в трьохконтурній САУ (рис. 7.4) при підвищенні швидкодії можливо при використанні ПД-регулятора швидкості [139]. Перспективними є САУ з комбінованим керуванням [140 – 144] по відхиленню і по збуренню (рис. 7.5). В [145] приділено увагу синтезу оптимальних за швидкодією комбінованих систем. Нелінійності систем та підвищена чутливість до параметричних збурень виключають можливість досягнення повної інваріантності та зменшують точність регулювання [141, 142, 146]. Для підвищення якості процесу керування необхідна поточна ідентифікація процесу.

Якщо не всі змінні доступні безпосередньому виміру, можливе введення спостережного пристрою [147, 148]. За допомогою синтезованого в [149] спостерігача реалізується пристрій керування електроприводом, що враховує наяв-

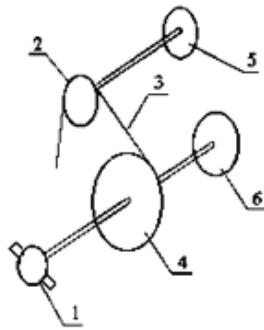


Рис. 7.3. Схема визначення радіусу намотування

ність пружних ланок.

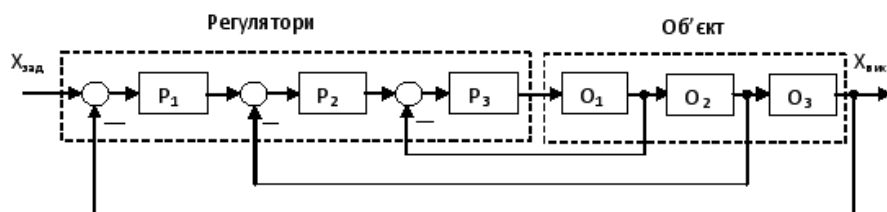


Рис. 7.4. Схема трьохконтурної САУ

При синтезі високоякісних систем управління намотувальними пристроями необхідно враховувати мінливість властивостей об'єкту управління і умов його функціонування. Це призводить до необхідності побудови адаптивних регуляторів. Відомі адаптивні регулятори, засновані на включенні у структуру еталонних моделей, які задають бажані закони управління рухом системи [150 – 152]. Головною вимогою до електроприводу намотувального пристрою є створення і підтримання заданого закону зміни натягу [153], для регулювання якого застосовують системи прямого і непрямого вимірювання натягу [154]. У системах прямого регулювання, вимір натягу проводиться за допомогою датчика [155]. Системи прямої дії мають перевагу перед системами непрямої по точності підтримки натягу і простоті схеми. У промисловості також знайшли застосування системи керування електроприводом намотувальних пристроїв, в яких стабілізація натягу матеріалу здійснюється за непрямыми параметрами [156], наприклад, за потужністю, струмом, моментом, ЕРС двигуна, значення яких пропорційні натягу. Потужність двигуна P пов'язана з натягом F співвідношенням:

$$P = \frac{FV}{\eta},$$

де F – натяг матеріалу; V – швидкість матеріалу; η – ККД електроприводу.

В процесі розгону і гальмування намотувального пристрою з рулоном, що перебуває на ньому, частина потужності витрачається на подолання моменту інерції, тому необхідно змінювати сигнал завдання регулятора відповідно до значення динамічної складової струму:

$$I_{\text{дин}} \frac{M_{\text{дин}}}{c\Phi} = \frac{J}{c\Phi} \frac{d\omega}{dt},$$

де $I_{\text{дин}}$, $M_{\text{дин}}$ – динамічні складові струму і моменту ДПС; J – сумарний момент інерції електроприводу; $d\omega/dt$ – кутова швидкість електродвигуна.

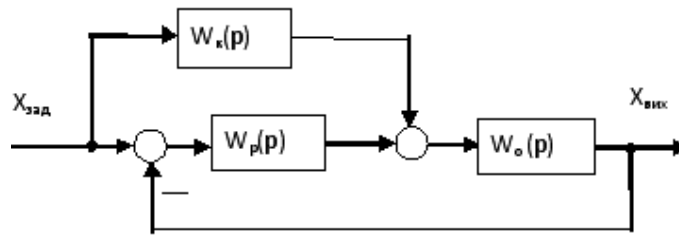


Рис. 7.5. Електропривод з комбінованим керуванням

Потужність втрат є джерелом значної похибки регуляторів побічної дії.

7.1.3. Математичні моделі виробів, що рулонуються, як об'єктів ідентифікації

На рис. 7.6 зображено розрахункову схему [157] рулону матеріалу, який намотується з питомим натягом $N(r)$ на товарний ролик з радіусом r_0 при поточному радіусі рулону r_n . Елементарний об'єм матеріалу знаходиться в умовах плоского напруженого стану під дією розтягуючих окружних (тангенціальних) напружень σ_θ , які виникають під впливом питомого натягу $N(r)$ і радіальних напружень σ_r , що виникають як результат взаємодії елементарного об'єму з оточуючими шарами. Для такого випадку маємо [158, 159] узагальнений закон Гука у полярних координатах r і θ :

$$\sigma_r = \frac{E_r}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}(\varepsilon_r + \nu_{r\theta}\varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}(\varepsilon_r\nu_{r\theta} + \varepsilon_\theta), \quad (7.1)$$

де $\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta r}$ – коефіцієнти Пуассона для поздовжньої осі та в напрямку, перпендикулярному до площини матеріалу; ε_θ , ε_r – деформації шару; E_r , E_θ – модулі пружності у радіальному і тангенціальному напрямках.

Між коефіцієнтом Пуассона і модулем пружності існує взаємозв'язок:

$$\nu_{\theta,r} = \nu_{r,\theta} E_\theta / E_r.$$

Умова рівноваги елементарного шару в переміщеннях u при вирішенні задачі про розподіл напружень по радіусу рулону:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - m^2 \frac{u}{r} = 0, \quad (7.2)$$

де $m = \sqrt{E_\theta/E_r}$ – параметр анізотропії.

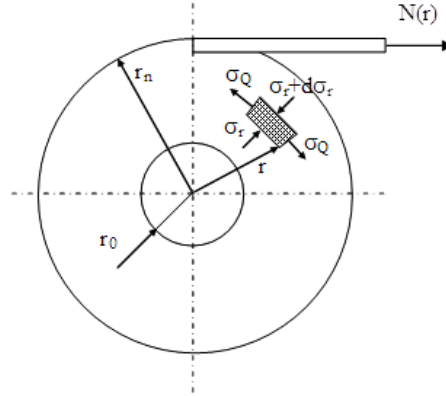


Рис. 7.6. Розрахункова схема рулону

Враховуючи, що $\varepsilon_\theta = u/r$ і $\varepsilon_r = du/dr$, окружну ε_θ і радіальну ε_r деформації після рішення рівняння (7.2) знаходять за виразами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{du}{dr} &= m \frac{1 - \nu_{\theta r} \nu_{r\theta}}{E_r(m + \nu_{r\theta})} \frac{r^{2m} + a^{2m}}{r^{m+1}} \int_r^{r_n} \frac{N(\rho) \rho^m}{\rho^{2m} + a^{2m}} d\rho; \\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} &= \frac{1 - \nu_{\theta r} \nu_{r\theta}}{E_r(m + \nu_{r\theta})} \frac{r^{2m} - a^{2m}}{r^{m+1}} \int_r^{r_n} \frac{N(\rho) \rho^m}{\rho^{2m} + a^{2m}} d\rho, \end{aligned} \quad (7.3)$$

де $a^{2m} = r_0^{2m}(m - \nu_\theta)/(m + \nu_\theta)$; $N(r)$ – натяг матеріалу. Підстановкою (7.3) у рівняння (7.1) отримаємо вираз для радіальної і окружної напружки:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{r^{2m} + a^{2m}}{r^{m+1}} \int_r^{r_n} \frac{N(\rho) \rho^m}{\rho^{2m} + a^{2m}} d\rho; \\ \sigma_\theta = N(r) &= m^2 \frac{1 + m\nu_{\theta r}}{m + \nu_{r\theta}} \frac{r^{2m} - a^{2m}}{r^{m+1}} \int_r^{r_n} \frac{N(\rho) \rho^m}{\rho^{2m} + a^{2m}} d\rho. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Вирази (7.3), (7.4) представляють математичну модель напружено-деформованого стану матеріалу у рулоні. Вони дозволяють визначити стан конкретного витка, якщо відомий закон зміни питомого натягу $N(r)$, параметри матеріалу

і намотувального пристрою. Основними параметрами намотувальних пристроїв є: закон управління натягом N , радіус товарного ролика r_0 , кінцевий радіус рулону r_n , фізико-механічні властивості матеріалу, модулі пружності E_r , E_θ і коефіцієнти Пуассона $\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta r}$, параметр анізотропії m . У роботі [158] розглянуто процес намотування матеріалу із постійним натягом, постійним моментом і визначено закон зміни натягу, за якого забезпечується постійне окружне напруження $\sigma_\theta = \sigma_r = \text{const}$ витків рулону:

$$N(r) = \sigma_0 \left[1 + k = \frac{m^2(1 + m\nu_{r\theta})}{m + \nu_{\theta r}} \frac{r^{2m} - a^{2m}}{r^{2m} + a^{2m}} \frac{r_n - r}{r} \right]. \quad (7.5)$$

Експеримент показав [160], що значення параметра m змінюється у межах $m = 1,85\text{--}2,85$. Важливим є визначення законів рулонування конкретних видів матеріалів із дробовим значенням параметра m . Отже, доцільно використовувати математичну модель напружено-деформованого стану, але необхідно уточнювати її для дробових значень параметру анізотропії m з активного експерименту чи пасивних спостережень.

7.1.4. Використання методу селективних вагових функцій для ідентифікації просторового розподілу механічних напруг матеріалу

Загальні положення. Під дією зусилля натягу матеріалу кожний наступний виток деформує нижні шари і викликає зміну початкового напруженого стану та міцності і деформаційних властивостей матеріалу. Модель [161] системи розроблені для кінематичної схеми пристрою намотування у рулони (рис. 7.7).

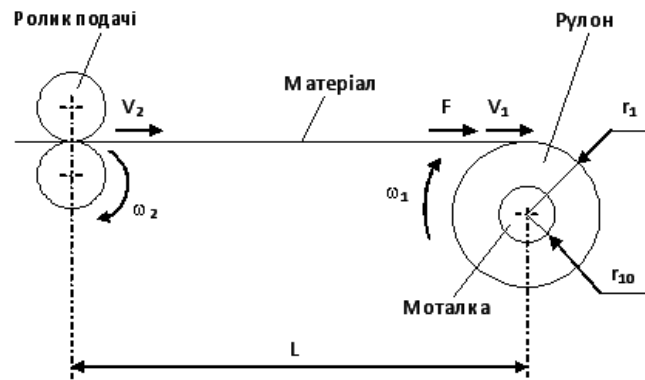


Рис. 7.7. Кінематична схема пристрою намотування у рулон

Пристрій складається з ролика і моталки, на валу якої знаходиться бобіна з намотувальним матеріалом. Моталка і ролик мають індивідуальні електропри-

води. Завданням електроприводу ролика подачі – підтримка заданої кутової швидкості роликів ω_2 і відповідно лінійної швидкості матеріалу V_2 . Безредукторний електропривод моталки створює необхідний натяг F матеріалу. Відстань між роликами подачі і валом моталки дорівнює L . Матеріал змотується на бобіну, яка має початковий радіус r_{10} . Матеріал представляє собою в'язкопружне середовище з модулем пружності E , коефіцієнтом Пуассона ν , шириною b і товщиною h . Складемо розрахункову схему його механічної частини (рис. 7.8).

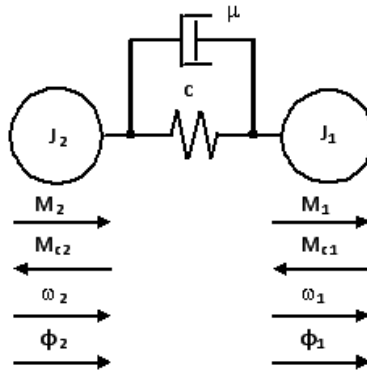


Рис. 7.8. Розрахункова схема механічної частини системи

Ланка з моментом інерції J_1 представляє частини електроприводу моталки і рулону, які рухаються під дією моменту M_1 електродвигуна з кутовою швидкістю ω_1 , проходячи кутовий шлях φ_1 . Руху протидіє момент опору M_{c1} , що обумовлений натягом матеріалу, силами тертя, аеродинамічним опором матеріалу та ін. Друга ланка схеми характеризує момент інерції електроприводу ролика J_2 , двигун якого створює момент M_2 , забезпечуючи рух із кутовою швидкістю ω_2 на шляху φ_2 за дії моменту опору M_{c2} . Обидві ланки пов'язані між собою матеріалом, який має подовжню жорсткість c [159, 160]:

$$c = \frac{E(t)bh}{L}$$

і коефіцієнт в'язкого тертя μ . Енергетичною моделлю руху системи (рис. 5.30) є рівняння Лагранжа 2-го роду [162]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W_K}{\partial q_i} = Q'_i - \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial q_i} - \frac{\partial W_D}{\partial \dot{q}_i},$$

де W_K – кінетична, W_{Π} – потенційна енергії системи; W_D – енергія дисипації (розсіювання) системи; Q'_i – узагальнена сила; q_i – узагальнена координата; $\dot{q}_i = dq_i/dt$ – узагальнена швидкість; $i = \overline{1, n}$, де n – кількість рівнянь системи.

Теоретичні моделі [163, 164] радіальних σ_r і окружних σ_θ напруг та відповідних їм деформацій ε_r і ε_θ залежать від значення неточного або взагалі невідомого параметра m анізотропії плівки. Тому доцільно їх визначити експериментальним шляхом з використанням принципу «чорної скриньки» та кусково-аналітичної апроксимації окремих частин експериментальних залежностей звичайними степеневими поліномами з подальшим їх об'єднанням на основі використання селективних аналітичних вагових функцій, існуючих в усьому діапазоні зміни аргументу. Питомі напруги вимірювались для дискретного ряду радіусів: $r_0=0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.12, 0.15, 0.17, 0.21$. Якщо ці залежності апроксимувалися одним поліномом 8–9 степеню

$$y(x) = \sum_{i=0}^{8 \div 9} \beta_i x^i, \quad (7.6)$$

за якого теоретична модель і експериментальні дані практично співпали б в точках експерименту, то між деякими точками, внаслідок високої степені полінома, виникали б суттєві пульсації, які не відповідають фізичній сутності залежності. Пульсації значно погіршують точність апроксимації залежності напруги від радіуса і особливо суттєво похідну цієї залежності від часу

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt},$$

яка вказує на ступінь не стаціонарності процесу. В запропонованому методі інтервал зміни радіусу поділявся на два підінтервали; на кожному підінтервалі досить точно залежність напруги від радіусу рулону апроксимувалося степеневим поліномом першого – другого порядку; загальну (для всього діапазону) модель отримували шляхом складання часткових моделей с ваговими селективними псевдо-сигнум функціями, аналітичними в усьому діапазоні зміни радіусу. Тоді замість залежності (7.6) використовувалась набагато простіша і коректніша

$$y(x) = (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2) \eta_1(x) + (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2) \eta_2(x), \quad (7.7)$$

де вагові функції задавались таким чином:

$$\eta_1(x) = \frac{1}{1 + (x/x_1)^N}, \quad \eta_2(x) = \frac{1}{1 + (x_1/x)^N}, \quad N \gg 1. \quad (7.8)$$

y – напруженість σ , x – радіус r , x_1 – значення r_1 на границі між двома інтервалами $[0.05, r_1]$, $[r_1, 0.2]$. Границя r_1 і степінь N можуть автоматично підбиратися за умови, щоб середньо-квадратична або максимальна похибка апроксимації в точці x_1 не перевищувала допустиму.

Моделі процесу намотування матеріалів з постійним натягом. На рис. 7.9, а показано апроксимацію поліномом (7.6) експериментальних точок

розподілу по радіусу рулону відносних окружних напруг σ_θ/N_0 для плівки (суцільна лінія) і швидкості його зміни від радіусу (пунктир). Матеріали намотуються на товарний ролик діаметром $d_0=100$ мм до кінцевого радіусу $r_n=200$ мм. Як видно з моделі, мінімальні напруги мають витки, які розташовані від товарного ролика на відстані близько $1/5-1/4$ товщини рулону. На вершині рулону окружне напруження останнього витка дорівнює питомому натягу матеріалу $\sigma_\theta/N_0 = 1$, який створюється намотувальним пристроєм. Однак, на ділянці $r = 0,15, r = 0,2$ наявна значна похибка апроксимації як самої залежності, так і її похідної по радіусу r .

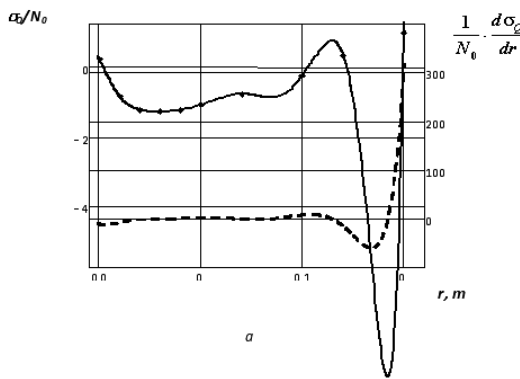


Рис. 7.9. Апроксимація моделлю (7.6) розподілу відносних окружних напружень по радіусу рулону плівки

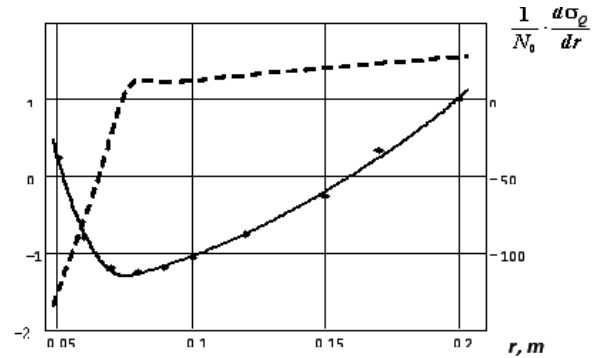


Рис. 7.10. Апроксимація моделлю (7.7), (7.8)

На відміну від МНК – апроксимації поліномом (7.6), на рис. 7.10, маємо практично ідеальну апроксимацію моделлю (7.7), (7.8) як самої функції, так і її похідної по r :

$$\frac{\sigma_\theta}{N_0} = \frac{-1,378r + 73,85r^2 - 1,645}{10^{-18}r^{-16} + 1} + \frac{-374r + 2500r^2 + 12,68}{10^{17}r^{16} + 1},$$

$$\frac{1}{N_0} \frac{d\sigma_\theta}{dr} = \frac{-1,378 + 147,7r}{10^{-18}r^{-16} + 1} + \frac{-374 + 5000r}{10^{17}r^{16} + 1}.$$

Як видно з моделі, зі збільшенням радіусу рулону радіальні напруги σ_r/N_0 зменшуються до нульового значення на вершині рулону. Найбільшу напругу відчуває виток, що лежить на товарному ролику. Аналогічні залежності, отримані по моделям (7.6) і (7.7), (7.8), наведено на рис. (7.11) і (7.12):

$$\sigma(r) = \frac{-40r + 98,76r^2 + 4,07}{1,825 \cdot 10^{-12}r^{10} + 1} + \frac{-240r + 1500r^2 + 11,25}{3,54 \cdot 10^{10} + 1},$$

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma(r)}{dr} = \frac{-40 + 197,5r}{2,825 \cdot 10^{-12}r^{10} + 1} + \frac{-240 + 3000r}{3,54 \cdot 10^{11}r^{10} + 1}.$$

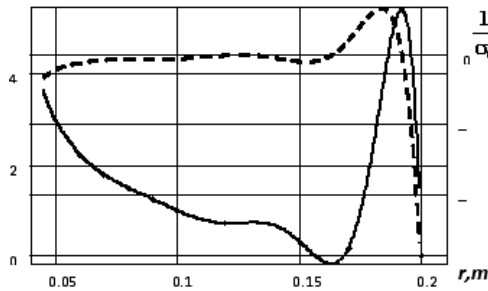


Рис. 7.11. Розподіл відносних радіальних напружень σ_r/σ_0 по радіусу рулону плівки r

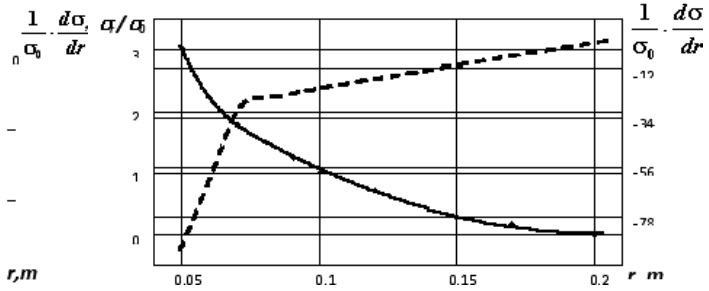


Рис. 7.12. під час намотування із $\sigma_0 = \text{const}$

Моделі процесу намотування матеріалу з постійним моментом.

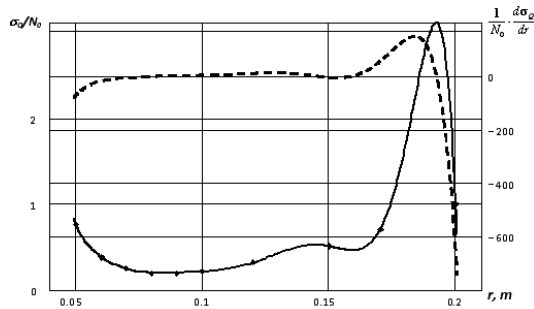
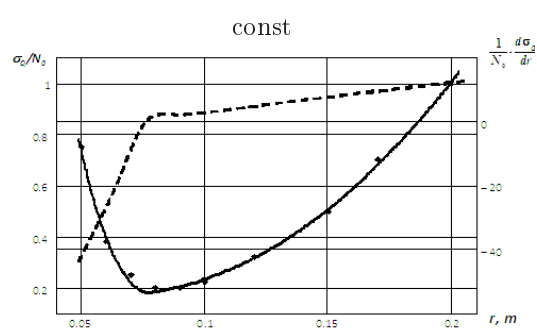
Режим постійності намотувального моменту M_n є найпростіший для реалізації [165,166]. Намотувальний момент, як добуток питомого натягу матеріалу N на поточний радіус рулону r постійний:

$$M_n = Nr = \text{const.}$$

У процесі намотування зі збільшенням радіуса рулону заданий натяг матеріалу падає. Величина радіальних σ_r і окружних σ_θ напруг у витку рулону залежить від заданого незмінного намотувального моменту M_n . На рис. 7.13 точками показано розподіл по радіусу рулону відносних окружних напруг σ_θ/N_0 та їх похідних під час намотування з постійним моментом для плівки, яка намотується на товарний ролик діаметром $d_0=100$ мм, до кінцевого радіуса $r_n=200$ мм. На рис. 7.13 і 7.15 подібно до попередніх в частині 7.13, 7.15 подано неякісну апроксимацію моделлю (7.6), а в частині 7.14 і 7.16 апроксимацію за моделями (7.7), (7.8)б.

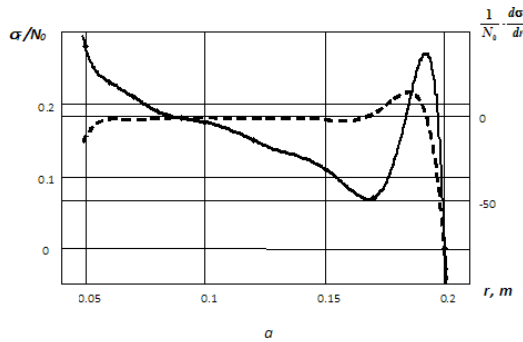
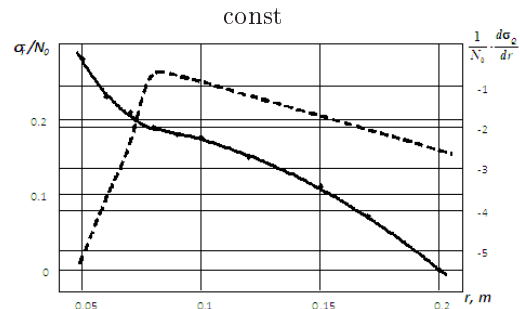
Мінімальні напруги мають витки, розташовані від товарного ролика на відстані близько $1/5$ товщини рулону. На вершині рулону окружне напруження останнього витка дорівнює питомому натягу матеріалу $\sigma_\theta/N_0 = 1$, яке створюється намотувальним пристроєм. На рис. 7.13 точками показано розподіл по радіусу рулону відносних радіальних напруг σ_r/N_0 для плівки. Зі збільшенням радіуса рулону радіальні напруги σ_r/N_0 зменшуються до нульового значення на вершині рулону. Найбільшу напругу відчуває виток, що лежить на товарному ролику.

Застосування режиму намотування з постійним намотувальним моментом дозволяє зменшити нерівномірність розподілу окружних напруг σ_θ матеріалу по радіусу рулону. Радіальні напруги σ_r мають знижений рівень, що обмежує максимальну довжину намотуваного матеріалу.


 Рис. 7.13. Розподіл σ_r/σ_0 по радіусу рулону плівки r під час намотування із $M_H =$

 Рис. 7.14. Розподіл σ_r/σ_0

$$\frac{\sigma_\theta}{N_0} = \frac{-5,767r + 45,03r^2 + 0,36}{1,78 \cdot 10^{-16}r^{14} + 1} + \frac{-121,8r + 800r^2 + 4,83}{5,61 \cdot 10^{15}r^{14} + 1},$$

$$\frac{1}{N_0} \frac{d\sigma_\theta}{dr} = \frac{-5,767 + 90r}{1,78 \cdot 10^{-16}r^{14} + 1} + \frac{-121,8 + 1600r}{5,61 \cdot 10^{15}r^{14} + 1},$$


 Рис. 7.15. Розподіл σ_Q/N_0 по радіусу рулону плівки r під час намотування із $M_H =$

 Рис. 7.16. на товарний ролик $d = 100$ мм до кінцевого $d = 400$ мм

$$\frac{\sigma_r}{N_0} = \frac{0,76r - 8,31r^2 + 0,18}{2,38 \cdot 10^{-24}r^{-21} + 1} + \frac{-12,65r + 75r^2 + 0,72}{4,2 \cdot 10^{-23}r^{21} + 1},$$

$$\frac{1}{N_0} \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{0,76 - 16,6r}{2,38 \cdot 10^{-24}r^{-21} + 1} + \frac{-12,65 + 150r}{4,2 \cdot 10^{23}r^{21} + 1}.$$

Моделі раціонального напружено-деформованого стану матеріалу. У ході технологічного процесу бажано забезпечувати однакові умови для кожної елементарної ділянки намотуваного в рулон матеріалу. Кращі показники

в процесі подальшої експлуатації мають матеріали, всі ділянки яких перебували до цього в однакових умовах. Значною мірою небажані явища можна послабити завдяки створенню такого напружено-деформованого стану рулону, за якого всі ділянки матеріалу відчують постійні і рівні за величиною окружні напружки. Розроблено [158] закон (7.5) управління натягом матеріалу намотувального пристрою, за якого залишкові окружні напружки σ_θ в витках рулону є постійними: Закон раціональної зміни питомого натягу матеріалу $N(r)$ (7.5) дозволяє отримувати в рулоні напружено-деформований стан [158]. Вираз для радіальних напруг визначається залежністю [80]:

$$\sigma_r = \sigma_0(r_n - r)/r.$$

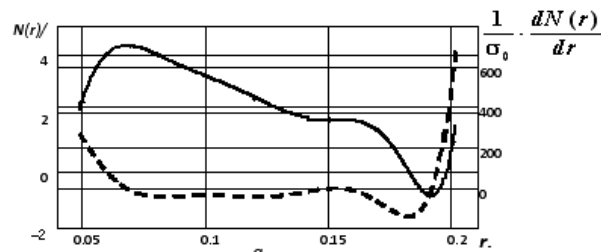


Рис. 7.17. Розподіл питомих натягів $N(r)/\sigma_0$ по радіусу r під час намотування із $\sigma_0 = \text{const}$

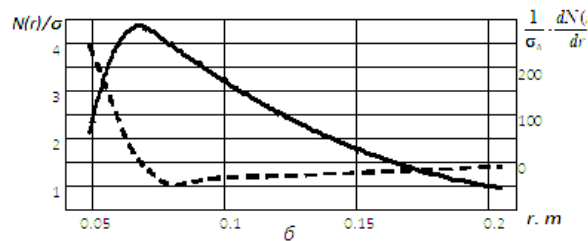


Рис. 7.18.

На рис. 7.17, 7.18, 7.19, 7.20 показано розподіл по радіусу рулону відносних намотувальних натягів $N(r)/\sigma_0$ для плівки та його апроксимацію (7.6) (а) та апроксимацію (7.7), (7.8), де дробовий параметр анізотропії $m = 2,37$, при реалізації раціонального закону ((7.5)). Матеріали намотуються на ролик діаметром $d_0=100$ мм до кінцевого радіусу $r_n=200$ мм. Із рисунків видно, що намотування до певного радіусу повинно проводитися зі зростаючим натягом $N(r)$, яке досягає максимального значення в середньому на відстані $1/6$ радіуса рулону від товарного ролика. Надалі натяг має монотонно зменшуватися, досягаючи на

останньому витку величини заданого залишкової окружної напруги $N(r) = \sigma_0$.

$$\frac{N(r)}{\sigma_0} = \frac{-60,8r + 129,3r^2 + 8}{8 \cdot 10^{-18}r^{-15} + 1} + \frac{907,5r - 6750r^2 - 26,15}{4,2 \cdot 10^{-23}r^{21} + 1},$$

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{dN(r)}{dr} = \frac{-60,8r + 258,6}{8 \cdot 10^{-18}r^{-15} + 1} + \frac{907,5 - 13500r}{4,2 \cdot 10^{23}r^{21} + 1}.$$

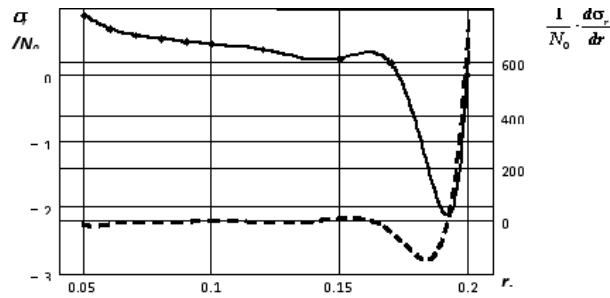


Рис. 7.19. Розподіл відносних радіальних напружень σ_r/σ_0 по радіусу рулону плівки r під час намотування із $N_0 = \text{const}$

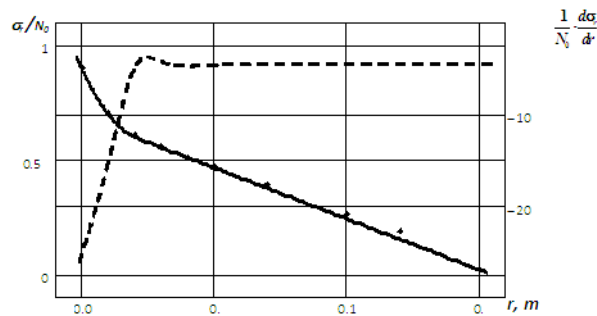


Рис. 7.20. Розподіл відносних радіальних напружень σ_r/σ_0 по радіусу рулону плівки r під час намотування із $N_0 = \text{const}$

$$\frac{\sigma_r}{N_0} = \frac{-4,45r + 0,909}{4,74 \cdot 10^{-13}r^{-15} + 1} + \frac{75r + 500r^2 + 3,4}{2,11 \cdot 10^{17}r^{15} + 1},$$

$$\frac{1}{N_0} \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{-4,45}{4,74 \cdot 10^{-18}r^{-15} + 1} + \frac{-75 + 1000r}{2,11 \cdot 10^{17}r^{15} + 1}.$$

Отримані з експерименту залежності надалі можуть бути використані для побудови законів керування електроприводами роликів подачі і намотки. Співставлення рисунків 7.11– 7.19 з рисунками 7.12– 7.20 показують недоцільність

апроксимації поліномом (7.6) і водночас ефективність апроксимації (7.7), (7.8) запропонованим методом.

7.1.5. Ідентифікація процесу рулонування з метою побудови адаптації САК

7.1.5.1. Математична модель процесу

Кінематичну схему [161] намотувального пристрою подано на рис. 7.9. Схеми пристрою відповідає розрахункова схема (рис. 7.10). Ланка із моментом інерції J_1 представляє обертові частини електроприводу моталки і рулону, які рухаються під дією моменту M_1 електродвигуна з кутовою швидкістю ω_1 , проходячи кутовий шлях φ_1 . Цьому руху протидіє момент опору M_{c1} , обумовлений натягом матеріалу, силами тертя та ін. Друга ланка схеми має момент інерції електропривода ролика J_2 , двигун якого створює момент M_2 , забезпечуючи рух з кутовою швидкістю ω_2 на шляху φ_2 при дії моменту опору M_{c2} . Обидві ланки пов'язані матеріалом з поздовжньою жорсткістю c і коефіцієнтом в'язкого тертя μ . Рух механічної системи відповідає рівнянню Лагранжа 2-го роду (7.5), де W_K – кінетична енергія системи; W_Π – потенційна; W_D – енергія дисипації; Q'_i – узагальнена сила; q_i – узагальнена координата; $\dot{q} = dq_i/dt$ – узагальнена швидкість; $i = \overline{1, n}$ – кількість рівнянь системи. Система має два ступені свободи. Як координати системи виступають кутові переміщення ролика, що тягне, і валу моталки $q_i = \varphi_i$, а узагальнених швидкостей – кутові швидкості $\dot{q}_i = \omega_i$.

Кінетична енергія системи [162]:

$$W_K = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2}.$$

Потенційна енергія:

$$W_\Pi = \frac{c(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}.$$

Енергія дисипації:

$$W_D = \frac{\mu(\omega_1 - \omega_2)^2}{2}.$$

Узагальнена сила першої маси:

$$Q'_2 = M_1 - M_{c1}.$$

Узагальнена сила другої маси:

$$Q'_2 = M_2 - M_{c2}.$$

Відстань L є стала величина. Схема, в якій пружним елементом є матеріал, який транспортується, являє пружність 2-го роду, що характеризується

розтягуванням $\Delta L = F/c$ і відносним подовженням матеріалу $\varepsilon = \Delta L/L$, пов'язаними рівнянням [167]:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{V_1}{K} - (1 - \varepsilon)\frac{V_2}{L}.$$

де $V_1 = \omega_1 r_1$ – швидкість плівки на поверхні рулону; $V_2 = \omega_2 r_2$ – швидкість матеріалу у ролику подачі; r_2 – радіус ролика, що подає. Натяг плівки пов'язано із розтягуванням [167]:

$$F = c\Delta L = cL\varepsilon.$$

Питомий натяг плівки:

$$N = F/(bh).$$

Система рівнянь системи в операторній формі ($d/dt \rightarrow p$):

$$\begin{cases} J_1 p \omega_1 = M_1 - F r_1 - M_{c1}, \\ J_2 p \omega_2 = M_2 - F r_2 - M_{c2}, \\ F = (c/p + \mu)[V_1 - V_2(1 + \varepsilon)], \\ \varepsilon = F/(cL), \\ V_1 = \omega_1 r_1, \\ V_2 = \omega_2 r_2, \end{cases}$$

Керування ДПС здійснюється напругою якоря U при незмінному потоці збудження Φ_n . модель ДПС моталки [165]:

$$\begin{cases} T_{я1} p I_1 = (U_1 - E_1)/R_{я1} p - I_1, \\ E_1 = c_e \Phi_{n1} \omega_1, \\ M_1 = c_e \Phi_{n1} I_1 \end{cases}$$

Аналогічно модель ДПС роликів, що подають:

$$\begin{cases} T_{я2} p I_2 = (U_2 - E_2)/R_{я2} p - I_2, \\ E_2 = c_e \Phi_{n2} \omega_2, \\ M_2 = c_e \Phi_{n2} I_2 \end{cases}$$

де I_1, I_2 – струми якорів ДПС; $c_e \Phi_{n1}, c_e \Phi_{n2}$ – коефіцієнти ЕРС ДПС; $T_{я1}, T_{я2}$ – сталі часу; $R_{я1}, R_{я2}$ – опір обмоток якорів; E_1, E_2 – ЕРС ДПС; U_1, U_2 – напруги живлення ДПС.

Структурну схему [161] взаємозалежної системи “ролик, що подає - матеріал - моталка” наведено на рис. 7.21, де: ПЗМ – пристрій завдання моменту моталки; U_N^* – заданий питомий натяг плівки; РШ₁, РШ₂ і РС₁, РС₂ – регулятори швидкості і струму; П₁, П₂ – силові перетворювачі, $\Phi(V_1)$ – блок визначення радіусу рулону; ДС₁, ДС₂ – датчики струмів; ДШ₁, ДШ₂ – датчики

кутових швидкостей; U_{I_1} , U_{I_2} – сигнали датчиків струмів; $U_{I_1}^*$, $U_{I_2}^*$ – сигнали завдання регуляторів струмів; U_{ω_1} , U_{ω_2} – сигнали датчиків швидкості двигунів. Електропривод металки має контур регулювання струму якоря. Натяг плівки F визначається сигналом завдання $U_{I_1}^*$, за допомогою якого регулюється струм якоря I_1 і момент двигуна $M_1 = c_e \Phi_n I_1$. Електропривод роликів, що подають, має двоконтурну систему підконтрольного регулювання швидкості з внутрішнім контуром регулювання струму I_2 двигуна. Задана швидкість роликів ω_2 і лінійна швидкість V_2 встановлюється сигналом завдання $U_{I_2}^*$.

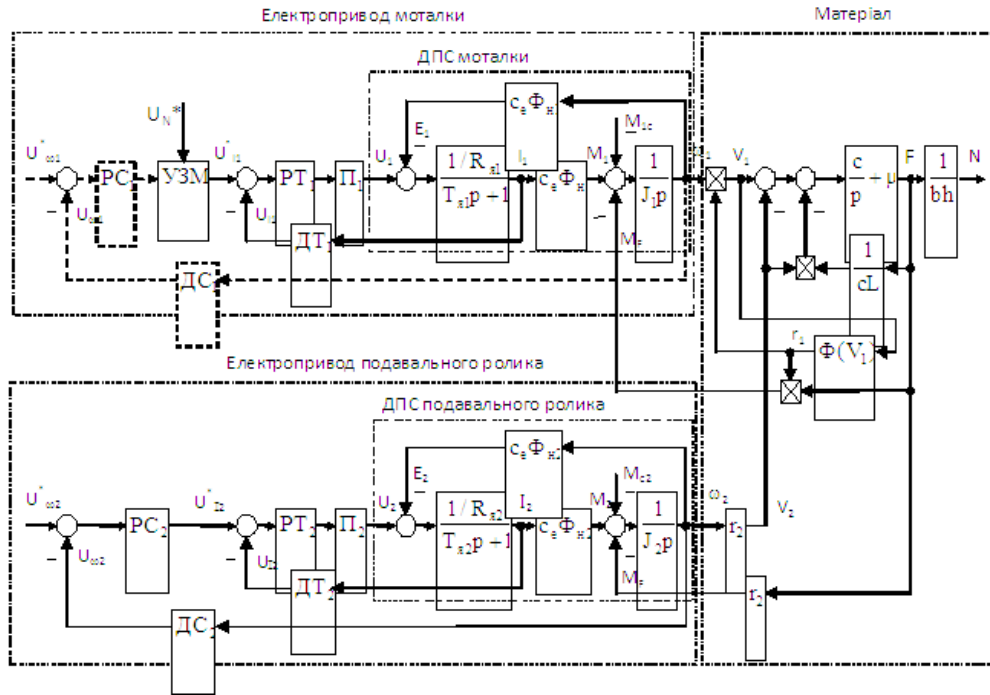


Рис. 7.21. Структурна схема пристрою намотування

Функція $W(p)$, що передає, [165] електроприводу роликів, що передають:

$$W(p) = \frac{V_2(p)}{U_{\omega_2}^*(p)} = \frac{r_2/k_{\omega_2}}{(2T_{n2})^2 p^2 + 2T_{n2}p + 1},$$

де k_{ω_2} – коефіцієнт зворотного зв'язку по швидкості; T_{n2} – стала часу силового перетворювача Π_2 . Функція $W_{\Pi_1}(p)$, що передає, перетворювача Π_1 металки – аперіодична ланка [165]:

$$W_{\Pi_1}(p) = \frac{U_1(p)}{U_{PT_1}(p)} = \frac{k_n}{T_n p + 1}.$$

Коефіцієнт передачі силового перетворювача Π_1 :

$$k_n = E_{\text{пн}}/U_{\text{ун}},$$

де $E_{\text{пн}}$ – номінальна ЕРС перетворювача; $U_{\text{ун}}$ – номінальна напруга управління перетворювачем.

Пропорційно-інтегральний регулятор струму якоря PC_1 [165]:

$$W_{PC_1}(p) = \frac{U_{PC_1}(p)}{\Delta U_{I-1}(p)} = \frac{K_{PC}p + 1}{T_{PC}p}.$$

Коефіцієнт передачі регулятора струму:

$$K_{PC} = \frac{T_{я1}R_{я1}}{2T_{\mu}k_nk_{i1}},$$

де k_{i1} – коефіцієнт зворотного зв'язку по струму якоря, $T_{PC} = T_{я1}$.

7.1.6. Використання еталонної моделі в програмній системі управління намотуванням плівки

Раніше пропонувалося [165, 168] підвищити точність управління без застосування датчика натягнення шляхом використання моделі об'єкту регулювання як спостерігача. Завдяки цьому реалізується замкнутий контур регулювання натягнення із регулятором, який забезпечує задану якість управління у статичному і динамічному режимі. Вхідними сигналами моделі є кутова швидкість моталки ω_1 і лінійна – плівки V_2 , а вихідним – змодельоване значення натягу F^+ , яке через нормуючу ланку НЛ надходить на регулятор (рис. 7.22). Система регулювання натягу є трьохконтурна. Внутрішні контури стандартні.

З метою зменшення коливань пружного зусилля у плівці контур швидкості налаштовується на модульний оптимум, для чого використовується пропорційний регулятор [165, 167]

$$W_{PC_1}(p) = K_{PC},$$

де $K_{PC} = \frac{T_{M1}k_{i1}c_e\Phi_{н1}}{4T_{\mu}R_{я1}k_{\omega_1}}$, $T_{M1} = \frac{J_1R_{я1}}{c_e\Phi_{н1}^2}$ – стала часу ДПС моталки, с; $k_{\omega_1} = U_{\omega_1}/\omega_{н}$ – коефіцієнт зворотного зв'язку за швидкістю ДПС моталки, В/(рад/с); U_{ω_1} – максимальна напруга зворотного зв'язку за швидкістю, В.

Контур натягнення складається з регулятора натягнення РН, замкнутого контуру швидкості ЗКШ, об'єкту управління і нормуючої ланки НЛ (рис. 7.22).

Функція, що передає, об'єкту управління [87]:

$$W_o(p) = \frac{cT_o}{T_0p + 1},$$

де $T_0 = L/V_2$ – стала часу об'єкту, яка дорівнює часу транспортування матеріалу від ролика, що тягне, до рулону.

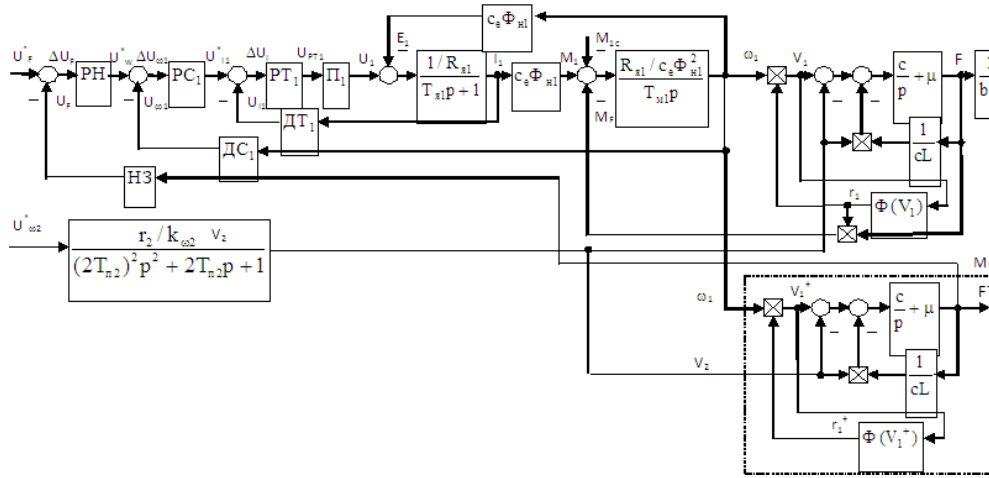


Рис. 7.22. Трьохконтурна система автоматичного керування натягненням з моделлю об'єкту

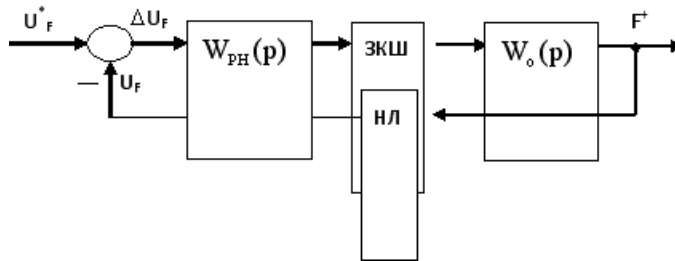


Рис. 7.23. Схема контуру натягу

Для роботи контуру натягу потрібний ПІ-регулятор [165]:

$$W_{PH}(p) = K_{PH} \frac{T_{RHP} + 1}{T_{RHP} p},$$

де $K_{PH} = \frac{k_{\omega 1}}{8T_{\mu}ck_{H3}}$ – коефіцієнт передачі регулятора; $k_{H3} = U_F/F_{\max}$ – коефіцієнт передачі нормуючої ланки; U_F – напруга нормуючої ланки; $T_{RH} = T_o = L/V_{\max}$ – стала часу регулятора натягнення.

Підвищення точності натягнення здійснюється за допомогою трьохконтурної системи підпорядкованого регулювання параметрів з внутрішнім контуром струму якоря і швидкості ДПС моталки. Головний зворотний зв'язок реалізується без використання датчика натягнення за допомогою математичної моделі процесу намотування, неточність якої по відношенню до об'єкту безпосередньо впливатиме на точність забезпечення F і N (рис. 7.23).

7.1.7. Ідентифікація моделі плівки з метою адаптації та оптимізації процесу рулонування

Розглянуті системи не прямого керування (рис. 5.38), взагалі розімкнені по основному показнику – питомому зусиллю N . Єдиною перевагою їх від замкнених по N САК є відсутність датчика зусилля N . Похибка таких систем визначається невідповідністю моделі плівки дійсним параметрам c, μ, L об'єкта. Крім того, відсутність датчиків для вимірювання ширини b і товщини h плівки не гарантує необхідного значення питомого зусилля N . Установка датчиків b і h дозволить від розімкненої САУ перейти до замкненої по N з усіма її перевагами у статичному режимі. Однак, для забезпечення бажаної точності у динаміці і, взагалі, стійкості замкненої САУ, необхідно модель (рис. 7.6) плівки $F(\omega_1, V_2, c, \mu, L)$ зробити адаптивною до об'єкту. Стратегія адаптації досягається шляхом ідентифікації нелінійної моделі $F(\omega_1, V_2, c, \mu, L)$ методом квазілінеаризації.

Сучасні засоби вимірювальної техніки, як контактні, так і безконтактні, дозволяють забезпечити з необхідною точністю вимірювання ширини b та товщини h плівки. Аналогічно вимір радіусів r_1, r_2 може здійснюватися як контактним, так і безконтактним способом. Кутова швидкість Ω_1 вимірюється тахогенератором на валу двигуна, лінійна V_2 – через кутову швидкість $\omega - 2$ і радіус r_2 . Питоме зусилля N обчислюється через зусилля $F = cL\varepsilon$, а останнє, враховуючи, що $M_1 \gg M_{1c}$, через момент M_1 , що дорівнює $I_1/c_e\Phi_{i1}$, через струм I_1 якоря двигуна. Тоді оцінка $\hat{F}_1$ зусилля F_1 , враховуючи, що $M_1 \cong M_F$, дорівнює відношенню M_1 до r_1 . Як показали експериментальні дослідження $M_1 \in [0,8; 1,4]$ Нм; динамічний момент збурення – $[-0,085; -0,055]$ Нм; аеродинамічний $[0,0012; 0,0026]$ Нм; збурення від деформації $[2,5 \cdot 10^{-8}; 5 \cdot 10^{-8}]$ Нм. Тільки момент від тертя сягає 10% від M_1 . Його можна апіорі врахувати із точністю до 10%, тоді у $M_1 \cong M_F$ похибка складе всього кілька відсотків.

Алгоритм ідентифікації параметрів моделі плівки. За вимірами вхідних ($\Delta V(t), V_2(t)$) і вихідних ($F(t), N(t)$) змінних плівки, як об'єкту ідентифікації, слід визначити параметри C і μ її математичної моделі (рис. 7.24).

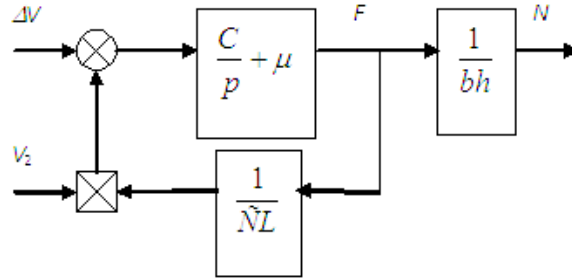
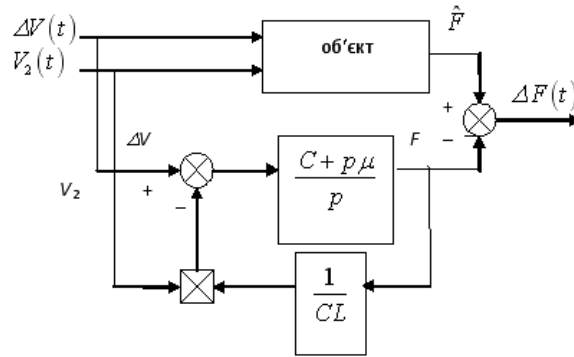
Алгоритм покрокової ідентифікації параметрів C і μ (L – відоме) полягає в наступному. На кожному k -му кроці обчислюється різниця між вимірами на об'єкті і виходом F моделі (рис. 5.41):

$$\Delta F(k) = \hat{F}(k) - F(c_{k-1}, \mu_{k-1}t),$$

де $k = \overline{1, C_0}$, μ_0 – задані апіорі значення C і μ .

Далі, відповідно до принципу квазілінеаризації, різницю розкладемо в ряд Тейлора і обмежимося першими членами розкладання:

$$\Delta F(t) = \left. \frac{\partial \Delta F(t)}{\partial C} \right|_{c_{k-1} \mu_{k-1}} (c - c_k) + \left. \frac{\partial \Delta F(t)}{\partial \mu} \right|_{c_{k-1} \mu_{k-1}} (\mu - \mu_{k-1})$$

Рис. 7.24. Структура моделі плівки, $1/p$ – оператор інтегруванняРис. 7.25. Схема визначення $\Delta F(t)$

де

$$\left. \frac{\partial \Delta F}{\partial C} \right|_{c_{k-1}\mu_{k-1}} = \left. \frac{\partial F(t)}{\partial C} \right|_{c_{k-1}\mu_{k-1}}; \quad \left. \frac{\partial \Delta F}{\partial \mu} \right|_{c_{k-1}\mu_{k-1}} = \left. \frac{\partial F(t)}{\partial \mu} \right|_{c_{k-1}\mu_{k-1}};$$

$$F(p) = \frac{C + \mu p}{p} \left[\Delta V(p) - \frac{V_2}{CL} F(p) \right];$$

$$F(p) \left[p + (C + \mu p) \frac{V_2}{CL} \right] = \frac{C + \mu p}{L} \Delta V(p);$$

$$F(p) = \frac{C + \mu p}{\left(1 + \frac{\mu V_2}{CL} \right) p + \frac{V_2}{L}} \Delta V(p);$$

$$\frac{\partial F(t)}{\partial C} = \frac{\left(1 + \frac{\mu V_2}{CL} \right) p + \frac{V_2}{L} - (C + \mu p) \left(-\frac{\mu V_2 L}{C^2 L^2} \right)}{\left[\left(1 + \frac{\mu V_2}{CL} \right) p + \frac{V_2}{L} \right]^2} \Delta V(p) =$$

$$= \frac{\Delta V(p)}{\left(1 + \frac{\mu V_2}{CL}\right)p + \frac{V_2}{L}} + \frac{(C + \mu p)\mu V_2}{C^2 L \left(1 + \frac{\mu V_2}{CL}\right)p + \frac{V_2}{L}}. \quad (7.9)$$

Виразу (7.9) відповідає структурна схема на рис. 7.26.

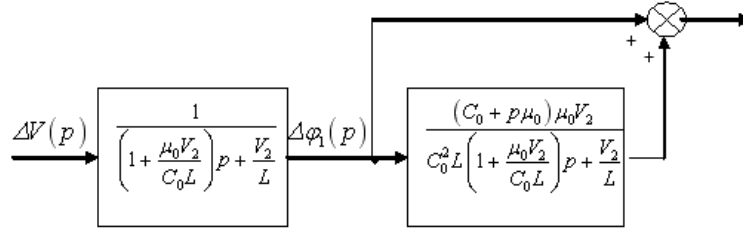


Рис. 7.26. Структурна схема визначення функції чутливості зусилля F від жорсткості C

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t)}{\partial \mu} &= \frac{p \left[\left(1 + \frac{\mu V_2}{CL}\right)p + \frac{V_2}{L} \right] - [(C + \mu p)\frac{V_2}{CL}p]}{\left[\left(1 + \frac{\mu V_2}{CL}\right)p + \frac{V_2}{L} \right]^2} \Delta V(p) = \\ &= \frac{p}{\left(1 + \frac{\mu V_2}{CL}\right)p + \frac{V_2}{L}} \Delta V(p) - \frac{C + \mu p}{\left(1 + \frac{\mu V_2}{CL}\right)p + \frac{V_2}{L}} \frac{V_2}{CL} \Delta \varphi_2, \end{aligned} \quad (7.10)$$

де $\Delta \varphi_2 = \frac{p}{\left(1 + \frac{\mu V_2}{CL}\right)p + \frac{V_2}{L}} \Delta V(p)$. Виразу (7.10) відповідає структурна схема на рис. 7.27.

Для оперативного і гарантованого визначення ΔC і $\Delta \mu$, а по ним

$$C = C_{k-1} + \Delta C_k, \quad \mu = \mu_{k-1} + \Delta \mu,$$

достатньо у межах технологічних обмежень додати до ΔV синусоїдний тест-сигнал, який гарантовано забезпечить лінійну незалежність змінних у рівнянні (5.72)(?) і, як наслідок, коректне визначення коефіцієнтів $(C - C_{k-1})$ і $(\mu - \mu_{k-1})$ інтегрованим МНК (Розділ 3). Знання про C і μ покращить якість роботи САУ, а вимірювання b і h – забезпечить від'ємний зворотний зв'язок по N , що гарантує безаварійність системи (стрічка не порветься).

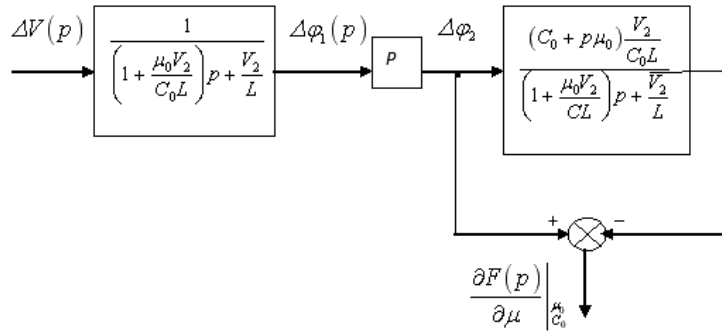
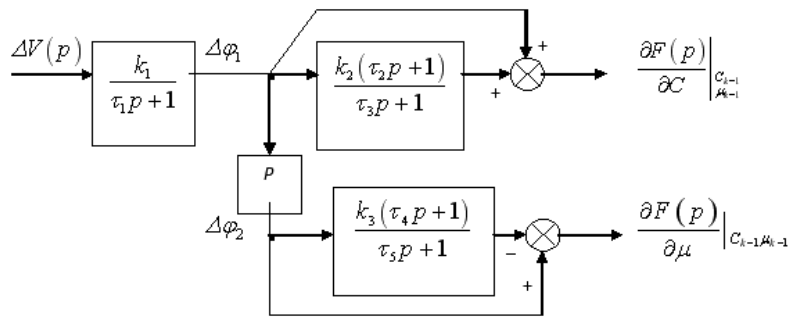
Рис. 7.27. Структурна схема визначення функції чутливості зусилля F від в'язкості μ 

Рис. 7.28. Загальна схема визначення функцій чутливості

7.2. Застосування фільтру Брауна у системах керування ЕТО із запізненням

Виробництво електричних кабелів здійснюється на електротехнічних комплексах в умовах дії багатьох невизначених збурюючих факторів і похибок вимірювання. Нанесення ізоляції на струмопровідну жилу, яка рухається зі швидкістю 50 м/хв здійснюється за допомогою трьох екструдерів 1 (рис. 1.5). Зовнішній діаметр кожного шару ізоляції вимірюється із випадковими похибками блоком рентген-датчиків 2 на відстані 0,5 м від виходу екструдерів (рис. 1.5). Це створює в контурах регулювання товщини ізоляції часове запізнення t_3 приблизно 0,5 с. Наявність t_3 негативно впливає на точність керування товщиною шарів та може призвести до втрати стійкості системи. Товщина кожного шару

ізоляції регулюється автоматизованими електроприводами екструдерів шляхом зміни швидкості ω обертання черв'яків. Вимірювання $\omega(t)$ та діаметрів $X(t)$ шарів ізоляції проходить в умовах зашумленості корисних сигналів, що обумовлює зменшення точності та швидкодії регулювання.

Схему системи регулювання товщини (зовнішнього діаметру) шарів ізоляції представлено на рис. 7.29, де: X_3 , $X(t)$, $X(t - t_3)$, $\hat{X}(t)$ – вектор-функції заданих, дійсних, вимірюваних та прогнозованих діаметрів; $\Delta X(t)$, $U(t)$, $\omega(t)$ – вектор-функції похибок регулювання діаметрів, керуючих впливів та швидкостей обертання черв'яків трьох екструдерів; $N_1(t)$, $N_2(t)$ – вектор-функції шумів вимірювання швидкостей екструдерів та діаметрів шарів ізоляції; $\beta(t)$ – вектор-функція параметрів математичної моделі зв'язку $\omega(t)$ і $X(t)$.

З метою підвищення точності процесу багатошарового нанесення ізоляційної плівки і, як наслідок, якості продукції необхідно розробити більш якісний, ніж фільтр Брауна, блок компенсації запізнення t_3 .

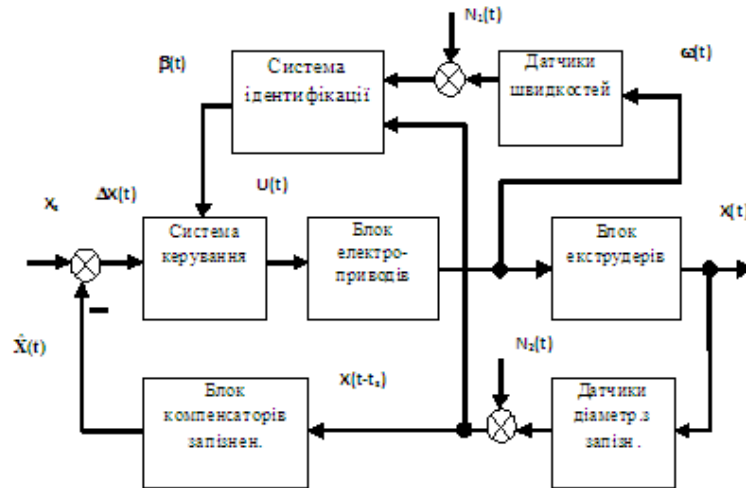


Рис. 7.29. Функціональна схема системи стабілізації товщини ізоляції

Сигнали $X(t - t_3)$ (рис. 7.29) з давачів вимірюваних діаметрів спотворено гетероскедастичною завадою (випадковим процесом з нестационарною дисперсією). Спектри корисної складової сигналу і випадкових збурень дещо рознесені. Тому для фільтрації випадкових збурень у фільтрі-екстраполяторі Р. Брауна [169] використано три послідовно увімкнених інерційних ланки першого порядку:

$$W(p) = \frac{1}{\tau + 1}, \quad (7.11)$$

де p – оператор Лапласа; τ – стала часу.

Інерційні ланки (7.11) з відповідними до схеми (рис. 7.30) з'єднаннями і

пропорційними ланками та елементами, що підсумовують, утворюють структуру фільтра-екстраполятора Р. Брауна. За умови квадратичної апроксимації

$$\hat{x}(t + t_G) = \hat{x}(t) + t_G \frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{t_G^2}{2} \frac{d^2\hat{x}}{dt^2} \quad (7.12)$$

прогнозного значення тричі згладженого фільтрами (7.11) сигналу $\hat{x}(t)$, коефіцієнти $k_1 = -\alpha$, $k_2 = \alpha$, $k_3 + k_4 + k_5 = 0$; $2k_3 + k_5 = 0$; тоді $k_3 = k_4 = 1/\tau^2$; $k_5 = -1\tau^2$. Для дискретної форми реалізації інерційну ланку (7.11) замінено дискретною:

$$\hat{y}_1(k) = \alpha x(k) + (1 - \alpha)y_1(k - 1), \quad \alpha = \Delta t/\tau, \quad (7.13)$$

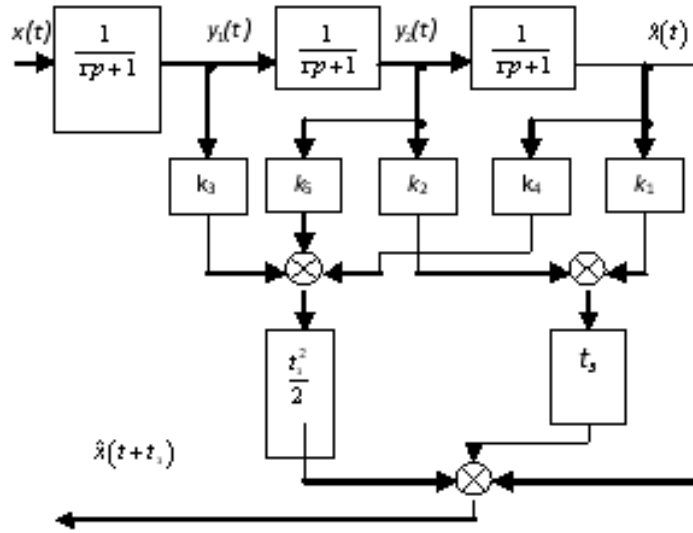


Рис. 7.30. Аналогова реалізація фільтра-екстраполятора Брауна

Тоді прогнозне на m дискретів Δt часу t значення $\hat{x}(k + m)$, аналогічно (7.12), дорівнюватиме [129]:

$$\hat{x}(k + m) = \hat{x}(k) + t_q \frac{d^2\hat{x}(k)}{dt^2}, \quad (7.14)$$

де [122], $\hat{x}(k) = 3\Phi'(k) - 3\Phi''(k) + \Phi'''(k)$.

$$\frac{d\hat{x}(k)}{dt} = \frac{\alpha}{2(1 - \alpha)^2} [(6 - 5\alpha)\Phi'(k) - (10 - 8\alpha)\Phi''(k) + (3 - 3\alpha)\Phi'''(k)],$$

$$\frac{d^2\hat{x}(k)}{dt^2} + \frac{\alpha^2}{2(1 - \alpha)^2} [\Phi'(k) - 2\Phi''(k) + \Phi'''(k)],$$

$$\Phi'(k) = \alpha x(k) + (1 - \alpha)\Phi'(k-1), \quad \Phi''(k) = \alpha\Phi'(k) + (1 - \alpha)\Phi''(k-1),$$

$$\Phi'''(k) = \alpha\Phi''(k) + (1 - \alpha)\Phi'''(k-1).$$

Для системи (рис. 7.29) достатньо лінійної апроксимації, бо за час t_3 сигнал $x(t)$ суттєво не зміниться. І, взагалі, похибка апроксимацій прогнозного значення $X(t + t_3)$ чи $X(k + m)$ виразами (7.12), (7.14) суттєво менше похибки слідування $\hat{x}(t)$ за $x(t)$, яка утворюється внаслідок потрібного згладжування сигналу $x(t)$ фільтрами (7.11). Так, для лінійно зростаючого сигналу (рис. 7.31), за теоремою Лапласа [170], усталена похибка $\varepsilon(\infty)$ дорівнює:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} W_\varepsilon(p)x(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(1 - \frac{1}{(\tau p + 1)^2} \right) \frac{a}{p^2} = 3a\tau.$$

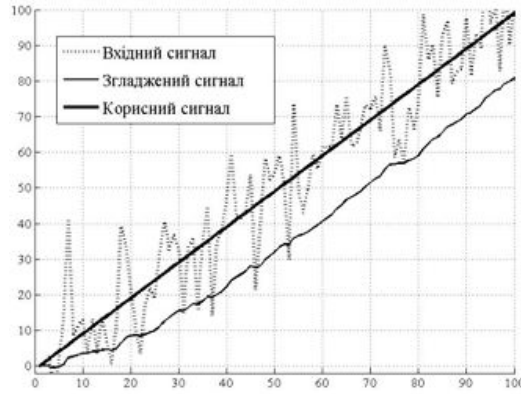


Рис. 7.31. Процес згладжування суми лінійного сигналу $x(k) = k$ і шуму $\varepsilon(\infty) \approx 20$

Для сигналу квадратичної форми похибка $\varepsilon(\infty)$ прямує до нескінченності.

Отже, фільтр Брауна не вирішує задачі компенсації запізнення у схемі (рис. 7.29).

Для ліквідації похибки слідування $\hat{x}(t)$ за $x(t)$ для сигналу, що лінійно змінюється (рис. 7.31), необхідно створити структуру фільтру із астатизмом першого порядку, для квадратичної зміни сигналу (рис. 7.32) — із астатизмом другого порядку. На рис. 7.33 подано структуру фільтра — лінійного екстраполятора із астатизмом другого порядку.

Астатизм забезпечується ноніусним включенням трьох фільтрів Р. Брауна. Перший видає згладжене $\hat{x}(t)$ і прогнозне $\hat{x}(k + m)$ значення сигналу $x(k)$. На вхід другого подається похибка $\varepsilon_1(k)$ слідування $\hat{x}(k)$ за $x(k)$ першого. На вхід третього фільтра подано похибку $\varepsilon_2(k)$ між $x(k)$ і $\hat{x}(k) + \varepsilon_1(k)$. У результаті додавання $\hat{x}(k)$, $\varepsilon_1(k)$ і $\varepsilon_2(k)$ отримаємо скориговане на похибки слідування значення $\hat{\hat{x}}(k)$. А при додаванні прогнозних значень $\hat{x}(k+m)$, $\varepsilon_1(k+m)$ і $\varepsilon_2(k+m)$ отримаємо скориговане на похибку слідування прогнозне значення $\hat{\hat{x}}(k+m)$. На



Рис. 7.32. Процес згладжування фільтром Р. Брауна суми квадратично зростаючого сигналу $x(k) = 0,25k^2$ і випадкового збурення

рис. 7.34 показано роботу фільтра (рис. 7.33) при прогнозі сигналу, що лінійно змінюється, на рис. 7.34 – квадратично.

Як видно з рис. 7.34, 7.35, ноніусне з'єднання фільтрів Р. Брауна зі сталим параметром α забезпечує достатньо якісну фільтрацію без похибки слідування і, відповідно, прогноз (за умов стаціонарності характеристик випадкових збурень у вимірах сигналу $x(k)$).

Однак, у випадку нестаціонарності (гетероскедастичності) випадкових збурень, для якісної фільтрації необхідно змінювати параметр α фільтра.

По ходу технологічного процесу намотування ізоляційної плівки на металеву жилу кабелю мають місце природні зміни характеристик випадкових похибок у вимірюванні діаметрів. Для якісного прогнозування сигналу $x(t)$ необхідна адаптація параметру α фільтра до змін характеристик сигналу і збурення [170, 171]. Для цього прогноз $x(t)$ виконується двома фільтрами (рис. 7.33). Один має параметр α , другий – $\alpha + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha = 0,1\alpha$). Прогнозні значення обох фільтрів затримуються на m кроків і зіставляються із поточними значеннями $x(k)$. Модулі різниць цих значень усереднюються і відбувається збільшення чи зменшення параметра α залежно від різниці усереднених модулів. На рис. 7.36 подано пунктиром графік зміни у часі стандартного відхилення σ випадкового збурення у вимірах $x(k)$, $k = [0 \div 20000]$ та процес адаптації параметру α до σ . Зі збільшенням σ шумів від 10 до 40 (рис. 7.36) α зменшився з 0,1 до 0,01 (інтервал часу від $k = 0$ до $k = 1200$). Далі, при зменшенні амплітуди шуму до 5, відбулося зростання α до 0,03 і невеликі коливання в зоні $\alpha = 0,03$ внаслідок дискретності алгоритму настройки α .

Як бачимо з рис. 7.36, за невідомих характеристик сигналу $x(t)$ і випадкових збурень (окрім інформації про рознесення їх спектрів) відбувається налагоджування параметра α фільтра до області його оптимальних значень (

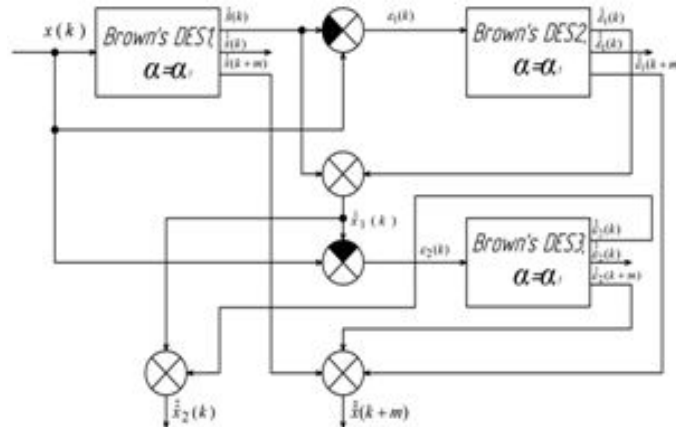


Рис. 7.33. Ноніусне ввімкнення фільтрів Р. Брауна

$\alpha^* = 0,01 \pm 0,003$ для $\sigma = 40$ і $\alpha^* = 0,03 \pm 0,005$ для $\sigma = 5$). Подальше покращення роботи запропонованого фільтра можливе шляхом завдання і адаптації різних значень параметра α фільтрів Брауна: для першого фільтра (рис. 7.33) співвідношення шум – сигнал менше, ніж для другого, для другого менше, ніж для третього. Відповідно, оптимальне значення α^* для першого більше, ніж для другого, для другого більше, ніж для третього. Для виключення ділянки часу з перехідним процесом при зміні параметра α на $\pm\Delta\alpha$ замість схеми з двома ноніусними фільтрами можна використати схему з трьома: $\alpha; \alpha + \Delta\alpha, \alpha - \Delta\alpha$. З трьох схем для прогнозу використовується та, в якій похибка прогнозу мінімальна. Дві інші змінюють свої α так, щоб їхні значення відрізнялись на $\pm\Delta\alpha$ від α оптимального каналу.

Нехай вхідний сигнал представлено лінійною функцією $y(x) = kx$, де $k = 1$, із накладеним на нього шумовим впливом. Параметри моделювання: $\sigma = 5$; $n = 10000$; $m = 3$; $t = 200$; початкові значення $\alpha = 0,1$; $\Delta\alpha = 0,1\alpha$ (рис. 7.37, 7.38).

У даному випадку спостерігається адаптація коефіцієнта фільтрації і подальше його коливання в межах від 0.0309 до 0.0495. Відфільтрований сигнал є прогнозованим через це графік даного сигналу зсунутий вліво.

Розділимо процес адаптації у даному випадку на два етапи. Перший етап: налаштування фільтруючого пристрою під конкретний рівень шуму, у даному випадку незмінний. Візьмемо точку процесу фільтрації, коли коефіцієнт фільтрації набув значення, що входить у межі від 0.0309 до 0.0495 (рис. 7.39), як початок другого етапу, у даній модуляції це $k = 1812$. Другий етап процесу адаптації характеризується коливанням коефіцієнта фільтрації у межах, зазначених вище. Це характеризується тим, що якщо після процесу оцінювання, наприклад, похибка прогнозу у контурі із більшим значенням α буде меншою, ніж у контурі із меншим значенням α , то за логікою даного алгоритму фільтрації,



Рис. 7.34. Процес прогнозу і компенсації похибки слідування

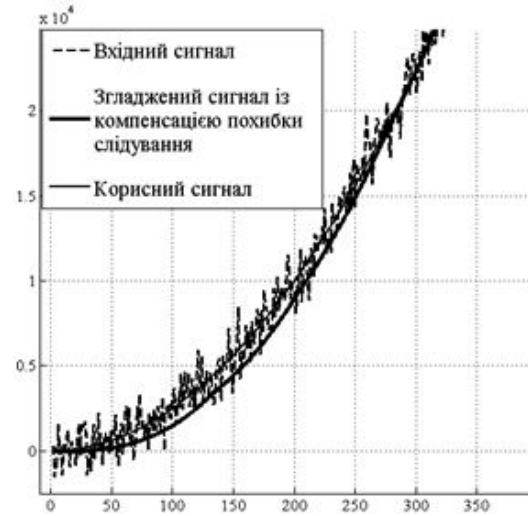


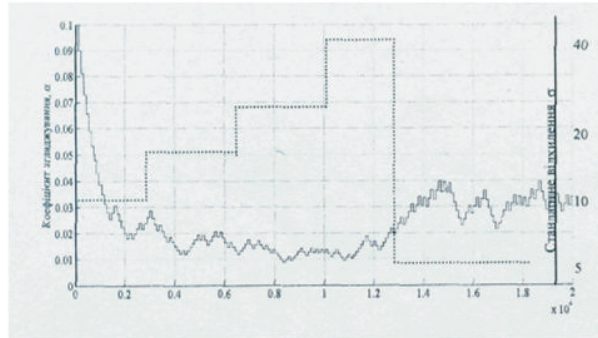
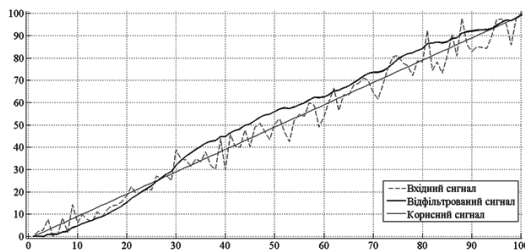
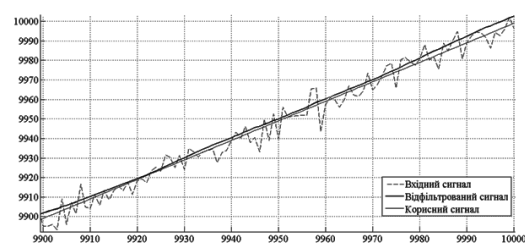
Рис. 7.35. Процес прогнозу і компенсації похибки слідування

α буде збільшена на 10% (величина збільшення та зменшення коефіцієнту згладжування також задається перед процесом моделювання), і навпаки. Саме тому коефіцієнт згладжування змінює своє значення кожні t вимірів (рис. 7.40, 7.41).

Порівнюючи ці два етапи, можна зробити висновок, що якість фільтрації значно зростає на другому етапі, хоч і прогнозований сигнал не завжди зміщений на необхідну кількість кроків, але він повторює форму корисного сигналу і дає уявлення про майбутнє значення у випадку сигналу лінійної форми.

Порівняємо процеси адаптації алгоритму фільтрації за умови, що вхідні сигнали представлені лінійними функціями $y(x) = kx$ із $k = 0.5$ та $k = 2$, із накладеним на нього шумовим впливом. Параметри моделювання: $\sigma = 5$; $n = 10000$; $m = 3$; $t=200$; початкове значення $\alpha = 0, 1$; $\Delta\alpha = 0, 1\alpha$.

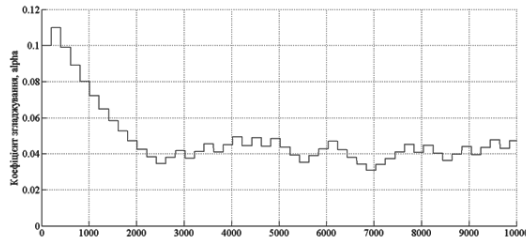
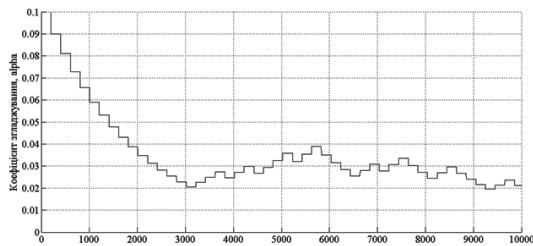
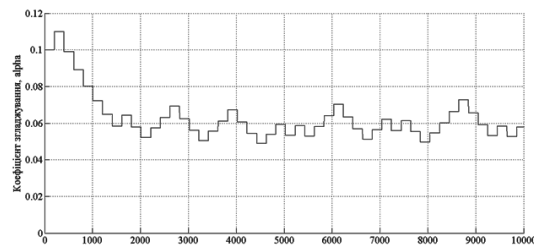
За отриманими графіками можна визначити, що перша стадія адаптація триває приблизно протягом перших 2000 вимірів сигналу, за умов, які вказані вище, а саме: даного рівня шуму, початкового значення коефіцієнта згладжування, а також обраної кількості вимірів, що визначають період, за який відбувається оцінка якості системи фільтрації. На основі отриманих вище даних можна зробити висновок, що за умови, коли система фільтрації намагається відстежити сигнал, що має лінійну складову і надходить на вхід системи із накладеним на нього шумом, алгоритму необхідний певний час, який не значно залежить від кривизни лінії, для адаптації коефіцієнта згладжування під певний рівень завад. Також варто відзначити, що кривизна сигналу лінійної форми впливає на коефіцієнт згладжування. Так зі збільшенням кривизни сигналу вплив завад

Рис. 7.36. Процес адаптації параметра α до змінної σ Рис. 7.37. Вхідний, корисний і відфільтрований сигнал множини вимірів $n = 0, 100$ Рис. 7.38. $n = [9900 \div 10000]$

на корисний сигнал зменшується і коефіцієнт згладжування зростає і навпаки.

Вхідний сигнал представлений квадратичною функцією $y(x) = kx^2$, $k = 0.25$, із накладеним на нього шумовим впливом. Параметри моделювання: $\sigma = 10000$; $n = 10000$; $m = 3$; $t=200$; початкове значення $\alpha = 0,1$; $\Delta\alpha = 0,1\alpha$. Параметр стандартного відхилення у функції генерації псевдовипадкових чисел розподілених по нормальному закону, що відіграє роль завад, σ був збільшений до значення 10000 у зв'язку із тим, що малі значення цього параметра мають дуже незначний спотворюючий вплив за умови, коли корисний сигнал описується квадратичною функцією.

У даному випадку можемо спостерігати, що розподілення на дві стадії адаптації, як у випадку із сигналом лінійної форми є не зовсім доцільним за рахунок того, що за рахунок квадратичного росту вплив шумів зменшується. Таким чином протягом, приблизно, перших 2000 вимірів алгоритм адаптується відповідно до даного рівня шуму після чого, подібно, до досліду із вхідним сигналом лінійної форми, відбуваються коливальні зміни коефіцієнта фільтрації, але значення α , у даному випадку, не залишається у визначених межах, а зростає. Ефект зменшення впливу шумів з часом можна наочно спостерігати порівню-

Рис. 7.39. Зміна α упродовж процесу адаптаціїРис. 7.40. Зміна α упродовж процесу адаптації при $k = 0,5$ Рис. 7.41. Зміна α упродовж процесу адаптації при $k = 2$

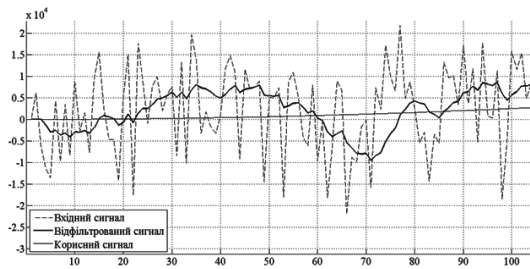
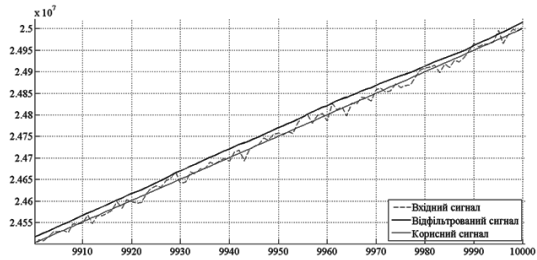
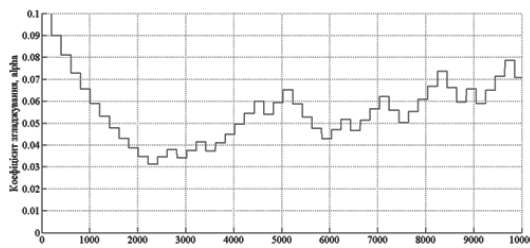
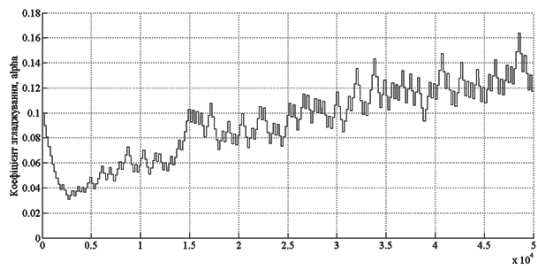
ючи рис. 7.43 і рис. 7.44.

Для перевірки вище приведенного твердження промодельюємо даний процес з аналогічними умовами, змінивши кількість вимірів із 10000 на 50000 (рис. 7.45).

Вхідний сигнал описується синусоїдальною функцією $y(x) = \sin x/k$, $k = 10$, із накладеним на нього шумовим впливом. Коефіцієнт k у даному випадку запроваджено для того, щоб зменшити частоту зміни сигналу. Параметри моделювання: $\sigma = 0,25$; $n = 10000$; $m = 3$; $t=100$; початкове значення $\alpha = 0,1$; $\Delta\alpha = 0,1\alpha$.

Графік із результатами роботи алгоритму фільтрації упродовж повного визначеного часу моделювання наведений на рис. 7.47. Дане зображення дає змогу спостерігати швидкодію роботи алгоритму та якість фільтрації. Варто зазначити, що при синусоїдальній природі сигналу на якість і швидкодію мають великий вплив також такі чинники як кількість кроків, на яку проводився прогнозування, а також відношення між частотою синусоїдального сигналу та кількість вимірів (кроків) сигналу, що використовуються для оцінювання якості роботи двох контурів фільтрації (рис. 7.48), 7.49).

Аналізуючи роботу даного алгоритму при відстеженні сигналу синусоїдальної форми можна визначити, що одним із недоліків роботи є часткова втрата корисної інформації у місцях зміни траєкторії сигналу. Повна компенсація втра-

Рис. 7.42. Вхідний, корисний і відфільтрований сигнал при $n \in [0; 100]$ Рис. 7.43. $n \in [9900; 10000]$ Рис. 7.44. Зміна α упродовж процесу адаптаціїРис. 7.45. Зміна α упродовж процесу адаптації

ти даної інформації не є можливою в даному алгоритмі, але за рахунок зміни параметрів фільтруючої системи є можливість мінімізація втрати інформації. Розглядаючи графік зміни коефіцієнта згладжування протягом процесу адаптації можна встановити його схожість із графіком адаптації при роботі алгоритму у випадку відстеження сигналу лінійної форми.

Таким чином, представлений ноніусний адаптивний фільтр дозволить в умовах статистичної невизначеності і нестационарності характеристик вимірів корисних сигналів забезпечити високоякісний прогноз корисної складової сигналу і, як наслідок, якість і стійкість систем автоматичного управління об'єктами, які мають транспортне запізнення у вимірах їх змінних стану, наприклад, компенсувати запізнення у каналі керування процесом нанесення ізоляції на струмопровідну жилу кабелю.

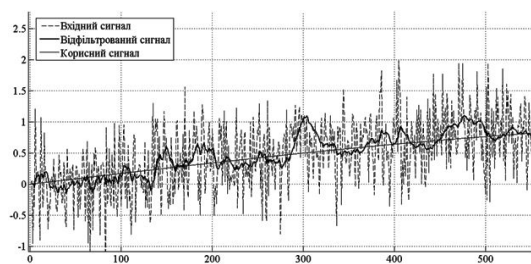


Рис. 7.46. Вхідний, корисний і відфільтрований сигнал множини вимірів $n = [0 \div 550]$

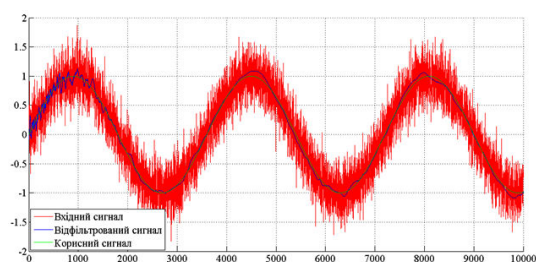


Рис. 7.47. Фільтрація і прогноз синусоїдного сигналу

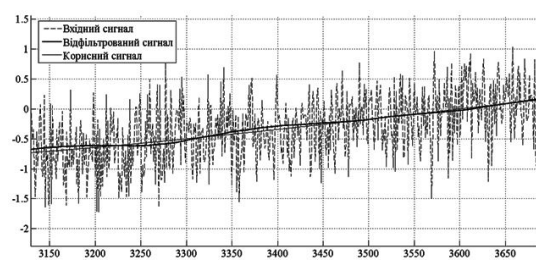


Рис. 7.48. Фрагмент вхідного, корисного і відфільтрованого сигналу множини вимірів $n \in [3150 \div 3650]$

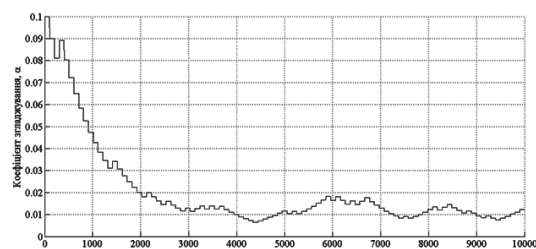


Рис. 7.49. Зміна α упродовж процесу адаптації

7.3. Система моделювання процесів екструзії полімерних матеріалів

7.3.1. Характеристика процесу отримання рукавних плівок як об'єкту управління

Аналіз процесу отримання рукавних полімерних плівок як об'єктів управління засвідчив, що він характеризується:

- випуском плівок різних типів, $F = \{T_{pol}, \delta_f^0, \Delta_{\delta}^{\max}, w_f^0, \Delta_w^{\max}, Q_f^0\}$, що визначаються типом плівкоутворюючого полімеру T_{pol} , заданою товщиною δ_f^0 і шириною w_f^0 полотна, граничними відхиленнями товщини і ширини від заданих значень, вимогами до основних характеристик (оптичним властивостям – мутності $M_f^{\max}$, глянцеvitості $L_f^{\max}$, кількості дефектів поверхні – включень нерозплавленого полімеру $n_{umelt}^{\max}$, чорних точок $n_{destr}^{\max}$ – на 10 м² полотна) плівки $Q_f^0 = \{M_f^{\max}, L_f^{\max}, n_{umelt}^{\max}, n_{destr}^{\max}\}$, що залежать від її призначення;

- різноманітністю типів екструдерів, які характеризуються геометричними параметрами $\Gamma_{extr} = \{\Gamma_{scr}, \Gamma_{die}\}$, що містять параметри модульних шнеків $\Gamma_{scr} = \{D, L^j, B^j, H_{in}^j, H_{out}^j, z_f^j, e^j, j = \overline{1, N_e}\}$, які вибирають із N_e елементів різних типів T_e (транспортних, пластикуючих, диспергуючих, змішувальних), і параметри кільцевих формуючих головок різної конфігурації $\Gamma_{die} = \{d, \delta_0, l\}$, де D – діаметр шнека екструдера, м; $L^j, B^j, H_{in}^j, H_{out}^j, e^j$ – довжина, крокі нарізки, глибина каналу на вході та виході, товщина витків нарізки j -го елемента шнека, м; z_f^j – число заходів нарізки; d, δ_0, l – зовнішній діаметр, товщина і довжина формуючої щелі головки, м;

- жорсткими вимогами до якості екструдату $Q_{ext}^0 = \{\gamma^{\min}, I_d^{\max}\}$, головними показниками якого є ступінь змішування (середньомасова деформація зсуву) γ , що визначає відсутність нерозплавлених включень, рівномірність покраски плівки, та індекс термічної деструкції I_d , яка призводить до пожовкнення, зменшення молекулярної маси, збільшення повзучості екструдату й, як наслідок, до появи на плівці деструктивних смуг та чорних точок.

Ключовими стадіями процесу отримання рукавних плівок є:

- екструзія ($i = 1$), у ході якої сипучий полімерний матеріал нагрівається, плавиться, перемішується у каналі шнека екструдера і видавлюється через кільцеву формуючу головку, яка залежно від методу відводу екструдату M_b може бути кутовою (при вертикальному прийманні) або прямоочною (при горизонтальному прийманні);

- формоутворення ($i = 2$), за якого трубчата заготовка, що виходить із головки, роздувається по діаметру (поперечне витягування) до необхідних розмірів стиснутим повітрям, що надходить через канал дорну головки, розтягується за довжиною (поздовжнє витягування) валками, що тягнуть, охолоджується зовні повітрям, що надходить із вихідної щілини кільця, і всередині стиснутим повітрям, що надає їй формостійкість.

Формалізований опис процесу отримання рукавних плівок як об'єктів управління представляється у вигляді сукупності векторів вхідних параметрів X_i , управляючих впливів U_i та вихідних параметрів Y_i (рис. 1).

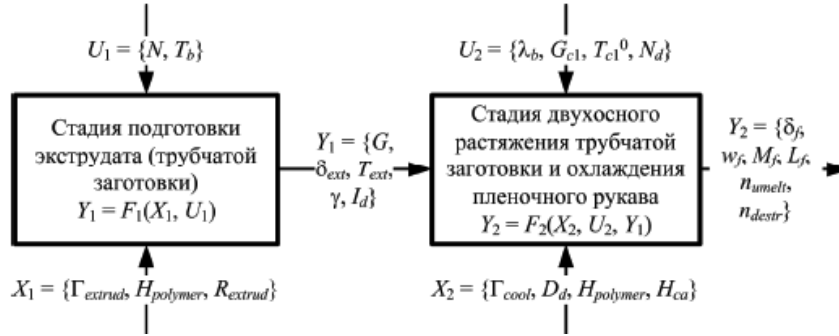


Рис. 7.50. Формалізований опис процесу отримання рукавних плівок

Вхідними параметрами стадії екструзії є геометричні параметри екструдера Γ_{extr} , характеристики полімерного матеріалу

$$H_{pol} = \{T_{melt}, \rho, c_p, \varepsilon, \mu_0, b, T_r, \lambda_s, T_d, \tau_d, E_d\},$$

значення яких залежать від типу плівкоутворюючого полімеру T_{pol} , і технологічні параметри процесу екструзії $R_{extr} = \{T_{scr}, \alpha_b, \alpha_{scr}\}$, де $T_{melt}, \rho, c_p, \varepsilon, \mu_0, b, T_r, n$ – температура плавлення, густина (кг/м^3), середня питома теплоємність [$\text{Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$], ступінь чорноти, коефіцієнт консистенції розплаву ($\text{Па} \cdot \text{с}^n$), температурний коефіцієнт в'язкості ($1/^\circ\text{C}$), температура приведення, індекс течії (псевдопластичності) полімеру; λ_s – ступінь розбухання екструдованого матеріалу за товщиною на виході із головки, %; T_d, τ_d – температура і час початку змінювання кольору матеріалу, що спонукається його деструкцією в ізотермічних умовах; E_d – енергія активації процесу деструкції, Дж.моль; T_{scr} – температура шнека екструдера; α_b, α_{scr} – коефіцієнти тепловіддачі від корпусу екструдера, що обігрівається, до розплаву полімеру та від розплаву до шнека (якщо шнек є термонеутральний, $\alpha_{scr} = 0$), $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$.

Управляючими впливами на стадії є частота обертання шнека екструдера N (об/с) і температура корпусу екструдера T_b . До вихідних параметрів належать продуктивність екструдера G (кг/с), що визначає продуктивність лінії, товщина δ_{ext} , температура T_{ext} і показники якості γ (од. зсуву), I_d (%) екструдату.

Вхідними параметрами на стадії формоутворення є геометричні параметри кільця, що охолоджує, $\Gamma_{cool} = \{R_{cr}, b_{cr}\}$, діаметр валків, що тягнуть плівку, D_d (м), характеристики полімерного матеріалу H_{pol} та хладагентів для рукава

$$H_{ca} = \{\rho_{cj}, \eta_{cj}, C_{pcj}, \lambda_{cj}, j = 1, 2\},$$

R_{cr}, b_{cr} – радіус і ширина вихідної щілини кільця, що охолоджує; $\rho_{cj}, \eta_{cj}, C_{pcj}, \lambda_{cj}$ – густина ($\text{кг}/\text{м}^3$), динамічна в'язкість ($\text{Па} \cdot \text{с}$), середня питома теплоємність ($\text{Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$), теплопровідність ($\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$) зовнішнього ($j = 1$) та внутрішнього ($j = 2$) хладагентів (внутрішнім хладагентом слугує повітря, що роздуває рукав).

Управляючими впливами на цій стадії є ступінь роздування рукава λ_b , розхід Q_{c1} ($\text{кг}/\text{с}$) і початкова температура T_{c1}^0 зовнішнього хладагента, а також частота обертання валків, що тягнуть, N_d ($\text{об}/\text{с}$). До вихідних параметрів належать товщина δ_f (м) і ширина w_f полотна, а також характеристики $M_f(\%)$, L_f (од.), n_{umelt} , n_{destr} плівки, що виготовляється.

Під час збільшення температури екструдату (за рахунок зменшення частоти обертання шнека, що призводить до збільшення часу перебування матеріалу в екструдері, або збільшення температури корпусу екструдера) зменшуються дефекти типу “риб’яче око”, “гелики”, нерозплавлені включення, що призводить до зниження мутності і підвищення глянцеvitості плівки. З іншого боку, зростає небезпека перегрівання і термічної деструкції полімерного матеріалу. Збільшення частоти обертання шнеку сприяє зростанню часу затвердіння, формуванню крупніших надмолекулярних утворень, які призводять до зростання структурної неоднорідності плівки і підвищення її мутності. Збільшення інтенсивності охолодження рукава призводить до покращення оптичних властивостей плівки, але при цьому збільшується усадка.

В результаті аналізу характеристик процесу отримання рукавних плівок сформульована задача переналагодження процесу на новий тип плівки у режимі виготовлення.

Для заданого типу рукавної полімерної плівки F , методу її виготовлення (методу відведення екструдату M_b) та продуктивності процесу G_0 :

– синтезувати роздуну екструзійну лінію шляхом вибору і компонування основного технологічного обладнання (модульного шнека і головки екструдера, кільця, що охолоджує) забезпечити виконання обмежень на коштовність, $C \leq C^{\max}$, продуктивність, $G \geq G_0$ та енерговживання, $E \leq E^{\max}$, лінії;

– сформулювати регламентні діапазони управляючих впливів на стадіях $[U_i^{\min}, U_i^{\max}]$, $i = 1, 2$, із використанням бази даних технологічних регламентів;

– визначити допустимі значення управляючих впливів на екструдер,

$$[(U_1^0)^{\min}, (U_1^0)^{\max}] \subset [U_1^{\min}, U_1^{\max}],$$

які забезпечують отримання екструдату заданої якості, $\gamma \geq \gamma^{\min}$, $I_d \leq I_d^{\max}$, що гарантує дотримання обмежень на число дефектів поверхні плівки, $n_{umelt} \leq n_{umelt}^{\max}$, $n_{destr} \leq n_{destr}^{\max}$, із заданою продуктивністю $G \geq G_0$.

Для екструзійної лінії із геометричними характеристиками

$$\Gamma_{line} = \{\Gamma_{extr}, \Gamma_{cool}, D_d\}$$

для виготовлення рукавної плівки типу F методом M_b визначити значення

управляючих впливів на стадіях екструзії, $U_1 \in [(U_1^0)^{\min}, (U_1^0)^{\max}]$ і формоутворення $U_2 \in [(U_2^0)^{\min}, (U_2^0)^{\max}]$, які забезпечують виконання вимог до геометричних та оптичних характеристик плівки:

$$(1 - \Delta_\delta^{\max}/100) \cdot \delta_f^0 \leq \delta_f \leq (1 + \Delta_\delta^{\max}/100) \cdot \delta_f^0, \quad (1 - \Delta_w^{\max}/100) \cdot w_f^0 \leq w_f \leq (1 + \Delta_w^{\max}/100) \cdot w_f^0,$$

$$M_f \leq M_f^{\max}, \quad L_f \geq L_f^{\min}.$$

7.3.2. Математична модель підготовки розплаву в екструдерах з модульними шнеками

При побудові моделі процесу одношнекової екструзії прийняті допущення: зворотний рух корпусу і шнека, малість кривизни каналу шнека, усталений за довжиною каналу та часом рух і тепломасообмін, теплофізичні властивості полімеру є сталі величини, розплав не стискається, малість інерційних і масових сил, переважність конвективного перенесення теплоти вздовж осі каналу і перенесення теплоти теплопровідністю у радіальному напрямку, Основною особливістю течії розплавлених полімерів є їхня здатність до одночасного розвитку обратимої (пружної і вискоеластичної) і необратимої (пластичної) деформацій. Але, оскільки середній час перебування в екструдері $\bar{\tau}$ (час деформаційного впливу на матеріал) суттєво перевищує середній час релаксації $\theta = 0,0001 \div 0,08$ с, тобто $\bar{\tau} \gg 2n\theta$, обратимою складовою роботи, що витрачається на деформацію матеріалу, можна знехтувати і вважати, що вся робота перетворюється на теплоту (дисипатує).

Система рівнянь, що описує течію і теплообмін розплавленого полімеру у каналі j -го елемента шнека у зоні транспортування розплаву, режим роботи якого визначає продуктивність екструдера

Рівняння матеріального балансу

$$\int_0^{H^j} v_x^j dy = 0, \quad \int_0^{H^j} v_z^j dy = Q^j;$$

Рівняння балансу сил тиску і в'язкого тертя у потоках ($0 < y < H^j$, $z^{j-1} < z \leq z^{j-1} + Z^j$)

$$\frac{\partial P^j}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}^j}{\partial y}, \quad \frac{\partial P^j}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zy}^j}{\partial y},$$

Реологічна модель розплаву

$$\tau_{xy}^j = \eta^j \frac{\partial v_x^j}{\partial y}, \quad \tau_{zy}^j = \eta^j \frac{\partial v_z^j}{\partial y},$$

$$\eta^j = \mu^j \left[\left(\frac{\partial v_x^j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z^j}{\partial y} \right)^2 \right]^{(n-1)/2}, \quad \mu^j = \mu_0 e^{-b(T_1^j - T_r)};$$

Рівняння теплового балансу ($0 < y < H^j$, $z^{j-1} < z \leq z^{j-1} + Z^j$)

$$\rho c_p v_z^j \frac{\partial T_1^j}{\partial z} = \lambda \frac{\partial^2 T_1^j}{\partial y^2} + \tau_{xy}^j \frac{\partial v_x^j}{\partial y} + \tau_{zy}^j \frac{\partial v_z^j}{\partial y};$$

Умови на вході у канал 1-го елемента

$$z = z^0 = 0; \quad P^{j,0} = P_0, \quad T_1^{j,0} = T_{melt}, \quad j = 1;$$

Кінематичні і температурні межові умови:

$$y = 0 : \quad v_x^{j,scr} = v_z^{j,scr} = 0;$$

$$y = H^j : \quad v_x^{j,b} = -U_x = -\pi DN \sin \varphi^j, \quad v_z^{j,b} = U_z = \pi DN \cos \varphi^j,$$

$$y = 0 : \quad -\lambda \left(\frac{\partial T_1^j}{\partial y} \right)^{scr} = \alpha_{scr} (T_1^{j,scr} - T_{scr}),$$

$$y = H : \quad -\lambda \left(\frac{\partial T_1^j}{\partial y} \right)^b = \alpha_b (T_b - T_1^{j,b}),$$

де $H^j = f_1(H_{in}^j, H_{out}^j, Z^j, z)$, $z^{j-1} < z \leq z^{j-1} + Z^j$ – глибина каналу елемента шнека, м; v_x^j, v_z^j – швидкості циркуляційного та поступального потоків розплаву; x, y, z – координати по ширині $W^j = f_2(B^j, e^j, z_f^j, \varphi^j)$, глибині H^j та довжині $Z^j = f_3(L^j, \varphi^j)$ каналу елемента; Q^j – розхід поступального потоку через канал елемента, м³/с; z^{j-1} – координата вхідного перетину каналу j -го елемента; P_0, P^j – тиск розплаву на вході у канал шнеку та у каналі елемента шнеку, Па; τ_{xy}^j, τ_{zy}^j – напруги тертя у циркуляційному та поступальному потоках, Па; η^j – ефективна (що відповідає даному стану зсуву) в'язкість розплаву, Па·с; μ^j – коефіцієнт консистенції, Пасⁿ; T_1^j – температура; λ – теплопровідність, Вт/(м·°C); $P^{j,0}, T_1^{j,0}$ – тиск і температура на вході у канал елемента; $v_x^{j,scr}, v_z^{j,scr}, v_x^{j,b}, v_z^{j,b}$ – швидкості потоків на дні каналу (поверхня шнеку) і на верхній рухомій кришці каналу (внутрішня поверхня корпусу); U_x, U_z – компоненти лінійної швидкості шнеку, що викликають циркуляційний та поступовий потоки; $\varphi^j = f_4(D, B^j)$ – кут нахилу витків нарізки елемента, рад; $T_1^{j,scr}, (\partial T_1^j / \partial y)^{scr}, T_1^{j,b}, (\partial T_1^j / \partial y)^b$ – температури і градієнти температур у шарах розплаву біля дна каналу.

Умови сполучення елементів, що надають можливість розрахувати характеристики течії і теплообміну розплаву полімеру у каналі модульного шнека екструдера, мають вигляд:

$$z = z^{j-1} : \quad P^{j,0} = P^{j-1,K}, \quad T^{j,0} = T^{j-1,K}, \quad j = \overline{2, N_e},$$

де $P^{j-1,K}, T^{j-1,K}$ – тиск та температура розплаву на виході $(j-1)$ -го елемента. Перехід до безрозмірних змінних

$$\xi_{0,x}^j = y_{0,x}^j / H^j, \quad \xi_{0,z}^j = y_{0,z}^j / H^j,$$

дає можливість отримати формули для розрахунку напруг внутрішнього тертя у потоках.

$$\frac{\partial v_x^j}{\partial \xi} = \frac{(H^j)^{1+1/n}}{(\mu^j)^{1/n}} \left(\frac{\partial P^j}{\partial z} \right)^{1/n} \frac{\xi - \xi_{0,x}^j}{v^j} \left[\left(\frac{\xi - \xi_{0,x}^j}{v^j} \right)^2 + (\xi - \xi_{0,z}^j)^2 \right]^{(1/n-1)/2}.$$

$$\frac{\partial v_z^j}{\partial \xi} = \frac{(H^j)^{1+1/n}}{(\mu^j)^{1/n}} \left(\frac{\partial P^j}{\partial z} \right)^{1/n} (\xi - \xi_{0,z}^j) \left[\left(\frac{\xi - \xi_{0,x}^j}{v^j} \right)^2 + (\xi - \xi_{0,z}^j)^2 \right]^{(1/n-1)/2},$$

де $\xi = y/H^j$, $0 \leq \xi \leq 1$ – безрозмірна координата у радіальному напрямку; $v^j = f_5(H^j, n, U_x, U_z, \xi_{0,x}^j, \xi_{0,z}^j)$ – відношення градієнту тиску у поступальному потоці до градієнту тиску у циркуляційному потоці.

Система рівнянь, що дає можливість розрахувати розподіли напружень тертя, тиску і температури розплаву за довжиною каналу кожного елементу шнека:

$$\tau_{xy}^j = H^j \frac{1}{v^j} \frac{\partial P^j}{\partial z} (\xi - \xi_{0,x}^j), \quad \tau_{zy}^j = H^j \frac{1}{v^j} \frac{\partial P^j}{\partial z} (\xi - \xi_{0,z}^j), \quad 0 \leq \xi \leq 1;$$

$$P^j = P^{j,0} + (z - z^{j-1}) \frac{\partial P^j}{\partial z}, \quad z^{j-1} \leq z \leq z^{j-1} + Z^j; \quad \xi_{0,x}^j = f_6(n);$$

$$\frac{\partial P^j}{\partial z} = B_z^j \frac{\partial P^j}{\partial z} \Big|_N \Pi^j, \quad \frac{\partial P^j}{\partial z} \Big|_N = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{U_z^n}{(H^j)^{1+n}}, \quad \Pi^j = \frac{F_d^j - Q^j/Q_d^j}{F_P^j(1 - Q^j/Q_d^j)};$$

$$\rho c_P \frac{d\bar{T}_1^j}{dz} = W^j [\alpha_b(T_b - \bar{T}_1^j) - \alpha_{scr}(\bar{T}_1^j - T_{scr})] + W^j (v_x^{j,b} \tau_x^{j,b} + v_z^{j,b} \tau_z^{j,b}) - Q^j \frac{\partial P^j}{\partial z}.$$

$\xi_{0,z}^j = f_7(H^j, W^j, n, U_z, Q^j)$ – безрозмірні координати перетинів нульових напружень тертя у потоках; $B_z^j = f_8(H^j, n, \xi_{0,x}^j, \xi_{0,z}^j, v^j)$ – безрозмірний градієнт тиску у поступальному потоці; $F_d^j = f_9(H^j, W^j)$, $F_P^j = f_{10}(H^j, W^j)$ – коефіцієнти впливу бічних стінок каналу на вимушений потік та потік під тиском; $Q_d^j = f_{11}(H^j, W^j, U_z)$ – розхід вимушеного потоку через канал елемента, м³/с; $\bar{T}_1^j$ – середня за глибиною каналу елемента температура розплаву; $\tau_x^{j,b} = \tau_{xy}^j|_{\xi=1}$, $\tau_z^{j,b} = \tau_{zy}^j|_{\xi=1}$ – напруги тертя у потоках біля кришки каналу (поверхні корпусу).

Пошук розходу поступального потоку через екструдер Q , що визначає продуктивність екструдера G , здійснюється за методом послідовних наближень за варіювання розходу у діапазоні

$$0 \leq Q \leq z_f^{\min} Q_d^{\min}, \quad Q_d^{\min} = \min_{j=1, N_e} Q_d^j, \quad z_d^{\min} = z_f^j|_{Q_d^j=Q_d^{\min}}.$$

Для кожного нового значення розходу розраховуються розподіли температури і тиску розплаву за довжиною каналу шнека. За поточного значення розходу

$Q^j = Q/z_f^j$ у кожному перетині каналу j -го елемента із координатою $\xi_{0x}^{j,i}, \xi_{0z}^{j,i}, v^{j,i}, B_z^{j,i}$ шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Необхідність обчислення кінематичних характеристик у кожному перетині каналу обумовлена мінливістю глибини каналу елемента за довжиною.

Значення характеристик $\xi_{0x}^{j,i}, \xi_{0z}^{j,i}, v^{j,i}, B_z^{j,i}$ використовуються для розрахунку середньої температури розплаву в i -му перетині:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^{j,i} = T_r + \frac{1}{b} \ln \left(\frac{W^j(\alpha_b + \alpha_{scr}) + bq_{\eta P}^{j,i}}{bq_{\alpha}^j} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{bq_{\alpha}^j(z^j - z^{j-1})}{\rho c_p Q^j} \right] \right\} + \right. \\ \left. + \exp \left\{ b \left[\bar{T}_1^{j+1} - T_r - \frac{bq_{\alpha}^j(z^j - z^{j-1})}{\rho c_p Q^j} \right] \right\} \right), \quad i = \overline{1, K}, \quad \bar{T}_1^{j,0} = \begin{cases} T_{melt}, & j = 1 \\ \bar{T}_1^{j-1, K}, & j = \overline{2, N_e} \end{cases} \end{aligned}$$

Цю формулу отримано шляхом підстановки формул (), записаних при $\xi = 1$, у рівняння (), розділення змінних $\bar{T}_1^j$ та z , та лінеаризації (розкладання члена $\exp[-b(T_1^j - T)r]$ у ряд Тейлора).

Умовою закінчення ітерацій по розходу Q слугує виконання нерівності

$$|1 - P_{die}/P_{scr}|100 \leq \varepsilon_P,$$

де $P_{scr} = P^{N_e, K}$ – тиск розплаву на виході із каналу шнека, ε_P – гранична похибка розрахунку робочої точки екструдера, яка визначається основною допустимою похибкою вимірювання тиску, %.

$$q_{\eta P}^j = \frac{\mu_0}{(H^j)^{1+n}} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n B_z^j \left\{ H^j W^j \left[U_x^{1+n} \frac{1 - \xi_{0,x}^j}{\nu_j} + U_z^{1+n} (1 - \xi_{0,z}^j) \right] - Q^j U_z^n \right\} \Pi^j;$$

$$q_{\alpha}^j = W^j \left[\frac{1}{b} (\alpha_b + \alpha_{scr}) - \alpha_b T_b - \alpha_{scr} T_{scr} + (\alpha_b + \alpha_{scr}) T_t \right].$$

7.3.3. Структура системы моделирования

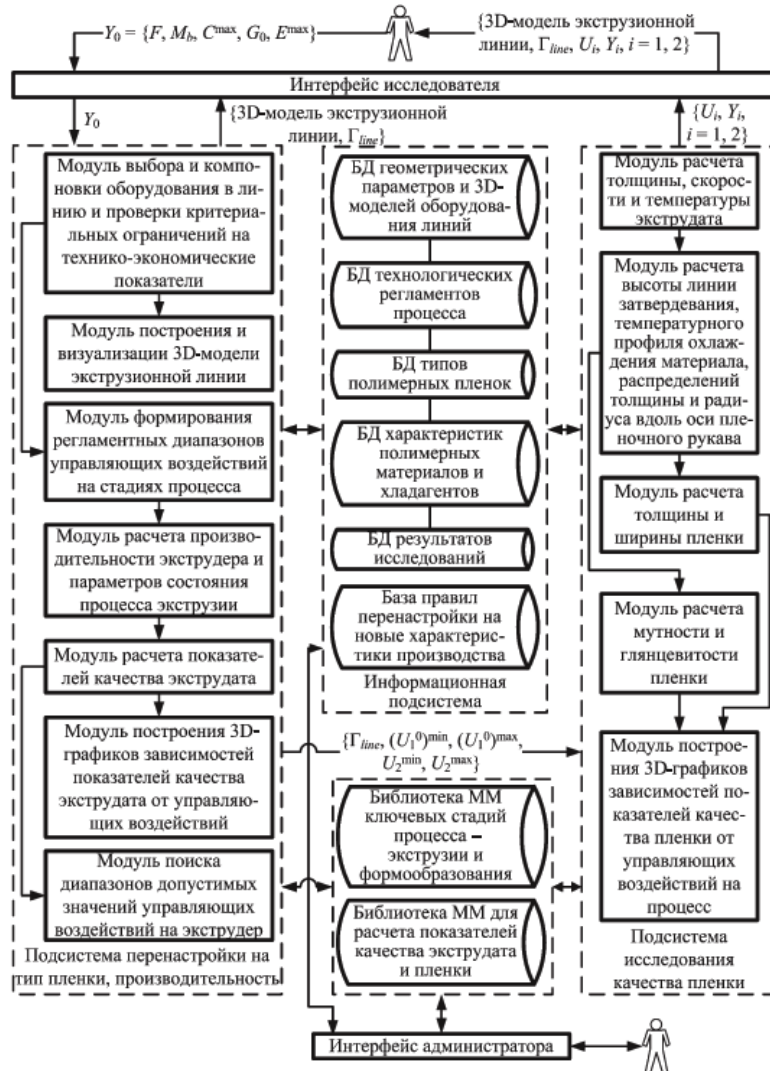


Рис. 7.51. Функціональна структура системи моделювання

7.4. Висновки

Наведені в монографії методологічні основи системного аналізу електротехнічних та інших об'єктів реального світу лягли в підґрунтя побудови математичних моделей та методів їх ідентифікації до реальних об'єктів з метою оптимального адаптивного до зміни зовнішніх і внутрішніх характеристик керування.

Подана в першому розділі класифікація систем ідентифікації за ступенем їх досконалості (і складності) дозволила коректно вирішувати задачі побудови за теоретичними і експериментальними даними математичних моделей і методів їх ідентифікації, за яких як найкраще вирішується головна мета системи.

Далі, від класичних методів, як основи для подальшого вдосконалення (розділ 2), подано нові методи конфлюентного аналізу, які дозволили отримувати незміщені і ефективні оцінки параметрів математичних модулів в реальних умовах зашумленості вимірів вихідних і вхідних сигналів об'єкту ідентифікації (розділ 3).

Нові прості методи структурно-параметричної ідентифікації (розділ 4) та їх ефективне використання проілюстровано на багатьох електротехнічних об'єктах. Адаптивне керування окремими технологічними процесами (розділи 5, 6, 7) з використанням підсистем цілеспрямованої ідентифікації математичних моделей зі зосередженими і розподіленими параметрами (ізоляція кабельної жили, листовий прокат, виробництво ізоляційної плівки та її рулонування, теплові процеси та ін.) – все це може бути цікавим і корисним для читача-дослідника реальних об'єктів керування.

7.5. Список використаних джерел

1. Абрамцева Н.Н. Макет автоматизированной системы диагностики в эксплуатации механического состояния обмоток и защиты силовых трансформаторов / Н.Н. Абрамцева, В.Ю. Горшунов // Электрические станции. – 1993. – №4. – С. 40– 43.
2. Автоматические ориентирующие системы регулирования для обработки рулонных материалов с покрытием. // Сб. научн. тр. – М.: ЦНИИТЭИлегпром, 1975. – 47 с.
3. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1989. – 263 с.
4. Алпатов М.Е. Определение параметров холостого хода и короткого замыкания силовых трансформаторов под нагрузкой / М.Е. Алпатов, П. А. Бутырин // Электричество. – 1994. – № 4. – С. 18– 24.
5. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / под ред. Н. Д. Егупова. – М.: Изд- во МГТУ им. Н. С. Баумана, 2000. – 748 с.
6. Аракелян В.Г. Цели, понятия и общие принципы диагностического контроля высоковольтного электротехнического оборудования/ В.Г. Аракелян// Электротехника . – 2002. – № 5. – С 23– 27.
7. Аркушин В.П. Автоматическое регулирование натяжения погонажных изделий из полимеров в процессе их производства на экструзионном оборудовании/В.П. Аркушин // Современные тенденции конструирования отечественного полимерного и бумагоделательного оборудования. – Тамбов: ВНИИРТмаш, 1990. – С. 74 – 81.
8. Аркушин В.П. Методы и технические средства стабилизации тока/В. П. Аркушин Ю. М. Осетский – К.: Наукова думка, 1980. – 60 с.
9. Артеменко Л.Ф. Совершенствование устройств для рулонирования изделий легкой промышленности: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.19.09 / К.: ГАЛПУ, 1996. – 27 с.
10. Артемьев С.С. Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений / С.С. Артемьев; Под ред. Г.А. Михайлова. – Новосибирск: Из- во ВЦ СО РАН, 1993. – 149 с.
11. Асинхронные двигатели серии 4А: Справ. / А.Э. Кравчик, М.М. Шлаф, В.И. Афонин, Е.А. Соболенская. – М.: Энергоиздат, 1982. – 504 с.
12. АСУ листопркатных станов / Под ред. В.И. Архангельского и И.Н. Богаенко. – М.: Металлургия, 1994. – 334 с.
13. Бахвалов Н.С. Численные методы: Учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М: Наука., 1987. – 600 с.
14. Бачурина М.В. Математическое моделирование процесса стратифицированного течения расплавов полимеров в осесимметричной постановке/М. В. Бачурина, А.В. Казаков, Н.М. Труфанова//Вестник ПНИПУ, 2014, № 2. С. 102–

124.

15. Башарин А.В. Управление электроприводами: Учебное пособие для вузов./А. В. Башарин, В. А. Новиков Г. Г. Соколовский – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. – 392 с.

16. Бельков Д.В. Моделирование течения расплава полимера в винтовом канале/Д.В. Бельков, А.В. Казаков//Вестник ПНИПУ, Электротехника, информационные технологии, системы управления, 2015.– №16.– с. 88– 95.

17. Беляев П.В. Численные методы расчета переходных процессов нелинейных объектов электроэнергетики/П.В. Беляев, В.З. Ковалев//Проблемы нелинейной электротехники: Тез. докл. – Киев, 1988. – Ч. I. – С. 212.

18. Беляковский М.А. Технология прокатного производства: Справочник. В 2-х книгах. Кн. 2. / М.А. Беляковский, К.Н. Богоявленский, А.И. Виткин и др. – М.: Металлургия, 1991. – 423 с.

19. Бершев Е.Н. Технология и оборудование для производства нетканых материалов/ Е.Н. Бершев, А.И. Курицина, А.И. Куриленко. – М.: Химия, 1982. – 358 с.

20. Беспалов В.Я. Асинхронные машины для динамических режимов работы: вопросы теории, математического моделирования и разработки: Дис. д-ра техн. наук. – М., 1992.– 350 с.

21. Бессонова М.П. Расчет течения степенной жидкости в одношнековом экструдере/М.П. Бессонова, М. А. Пономарева, В.А. Якутенко//Вестник Томского гос. ун-та, математика и механика, 2017.–№49. С.81–93.

22. Бідюк П. І. Методи прогнозування / П. І. Бідюк, О. С. Меньяйленко, О. В. Половцев. – Луганськ : «Альма-матер», 2008. – 305 с.

23. Блажкевич Б.И. Физические основы алгоритмов анализа электронных цепей/ Б.И. Блажкевич. – Киев: Наукова думка, 1979. – 210 с.

24. Бобков В.В. Избранные численные методы решения на ЭВМ инженерных и научных задач /В.В. Бобков, Л.Н. Городецкий. – Минск: Изд-во «Университетское», 1985. – 173 с.

25. Борцов Ю.В. Автоматизированный электропривод с упругими связями/Ю. В. Борцов, Г. Г. Соколовский – СПб.: Энергоатомиздат, 1992. – 288 с.

26. Боряк Б.Р. Дослідження алгоритму згладжування і налаштування адаптивного фільтра Брауна при зміні амплітуди шумів/ Б.Р. Боряк// Матеріали 69 наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів університету, квітень–травень, 2017р. – Полтава: ПолтНТУ імені Юрія Кондратюка. Том 1, С – 4– 6.

27. Бригиневич Б.В. Автоматическое управление электроприводами моталок в прокатных станках/Б.В. Бригиневич, А.И. Зевакин. – М.: Энергия, 1978 – 145 с.

28. Бутырин П.А. Аналитическое определение матриц индуктивностей уравнений состояния электрических машин / П.А. Бутырин, Чинь Хунт Лян //Электричество. – 1995.– №2. – С.63– 69.

29. Веников В.А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах / В.А. Веников. – М.: Высш. шк., 1985. – 536 с.
30. Волович Г. Интегральные датчики Холла / Г.Волович // Современная электроника. – декабрь 2004. – С. 26– 31.
31. Григораш О.В. К вопросу электромагнитной совместимости основных функциональных узлов систем автономного электроснабжения / О.В. Григораш, А.В. Дацко, С.В. Мелехов // Пром. энергетика. – 2001. – № 2. – С. 44–46.
32. Григорян Г.Г. Настройка, стабилизация и контроль процесса тонколистовой прокатки / Г.Г.Григорян, Ю.Д.Железнов, В.А.Черный и др. – М.: Металлургия, 1975. – 368 с.
33. Гришин В.Н. Модели, алгоритмы и устройства идентификации сложных систем / В.Н. Гришин, В.А. Дятлов, Л.Т. Милов. – Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1985. – 104 с.
34. Грумад В.А. Опыт определения места повреждения на линиях электропередачи фиксирующими измерительными приборами / В. А. Грумад, В. М. Машенков // Энергетик. – 2002. – № 3. – С. 21– 22.
35. Гуль А.И. Синтез трехкратноинтегрирующей системы управления положением с предельной полосой пропускания/А.И. Гуль // Электротехника. – 1985. – № 11. – С. 38–42.
36. Данилевич Я.Б. Параметры электрических машин / Я.Б. Данилевич, В.В., Домбровский, Е.Я. Казовский. – М. – Л.: Наука, 1965. – 339 с.
37. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления/Пер. с англ. Б. И. Копылова. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
38. Евдокимов В.В. Оборудование и механизация производства полимерных пленочных материалов и искусственных кож/В.В. Евдокимов. – М.: Наука, 1992. – 310 с.
39. Ершов С.В. Исследование влияния охлаждения шнека на процесс экструзии/С.В. Ершов, Н.М. Труфанова, Е.В. Субботин, 2012.
40. Есипов Д.Ю. Алгоритмы идентификации параметров линейных динамических систем / Д.Ю. Есипов // Изв. вузов. Электромеханика.– 2001. – № 1.– С. 88– 89.
41. Жлуктенко В. І. Економетрія / В. І. Жлуктенко, Н. К. Водзянова, С. С. Савіна, О. В. Колодінська (під ред. С. І. Наконечного). – К.: Видавництво Європейського університету, 2005. – 550 с.
42. Зайцев Г.Ф. Комбинированные следящие системы/Г. Ф. Зайцев, В. К. Стеклов – К.: Техника, 1978. – 264 с.
43. Зайцев Г.Ф. Квазиоптимальные следящие системы/Г. Ф. Зайцев, В. К. Стеклов. – Киев: Выща школа. Головное изд-во, 1981. – 176 с.
44. Зайцев Г.Ф. Компенсация естественных нелинейностей автоматических систем/Г. Ф. Зайцев, В. К. Стеклов. – М., Энергоиздат, 1982. – 96 с.
45. Зеленський К. Х. Комп'ютерні методи прикладної математики / К. Х.

Зеленський, В. М. Ігнатенко, О. П. Коц. – К. : Академперіодика, 2002. – 480 с.

46. Зеленський К.Х. Комп'ютерне моделювання повітряних сумішей у циклонних камерах./К.Х. Зеленський, В.М. Ігнатенко, К.С. Бовсуновська// Респ. міжв. сб. АСАУ, №1 (22), 2013, С. 120–134.

47. Зеленська Н.К. Апроксимація циліндричних функцій дробово– раціональними виразами/Н.К. Зеленська, К.Х. Зеленський//Вісник Університету «Україна», серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика, №1, 2016.–С.

48. Земляков В.Л. Разработка и исследование основных параметров намоточных устройств машин для намотки стеклопластиков: Автореф. дис. канд. тех. наук: 05.05.10/ Харьков. политех. ин– т. – Харьков, 1974. – 19 с.

49. Зимин Е.Н. Автоматическое управление электроприводами: Учеб.пособие для студентов вузов/Е.Н. Зимин, В.И. Яковлев . – М.: Высшая школа, 1979. – 318 с.

50. Іванюта І. Д. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики / І. Д. Іванюта, В. І. Рибалка, І. А. Рудоміно–Дусятська. – К. : Слово, 2006. – 272 с.

51. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины / А.В. Иванов – Смоленский.– М.: Энергия, 1980.– 927 с.

52. Ивахненко А. Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами / А. Г. Ивахненко. – К. : Техника, 1975. – 450 с.

53. Ивахненко А. Г. Электроавтоматика/А. Г. Ивахненко – Киев: Гостехиздат УССР, 1957. – 450с.

54. Испытание мощных трансформаторов и реакторов / Г.В. Алексеенко, А.К. Ашратов, Е.В. Веремей, Е.С. Фрид. – М. : Энергия, 1978. – 203 с.

55. Исследование и разработка оборудования для полимерного и бумагоделательного производства. // ВНИИрезинотехн. Машиностр. Под ред. Пастернака А.Г. – Тамбов: ВНИИРТмаш. – 1991. – 171 с.

56. Казовский Е.Я. Переходные процессы в электрических машинах переменного тока / Е.Я. Казовский. – М.– Л.: Изд– во АН СССР, 1962.– 625 с.

57. Калман Р. Очерки по математической теории систем/ Р. Калман, П. Фалби, М. Арбиб. – М. : Мир, 1971. – 400 с.

58. Карташев И.И. Определение виновника ухудшения качества электроэнергии при расчётах за электроэнергию/И.И. Карташев, И.С. Пономаренко, СЮ. Сыромятников // Энергоменеджер. – 2000. – № 19. – С. 10 – 12.

59. Ким В.С. Теория и практика экструзии полимеров/ В.С. Ким – К.: КОЛОСС, 2005. – 568 с.

60. Кириченко А.Н. Анализ R - L –С моделей идентификации электротехнических устройств / А.Н. Кириченко, Д.В. Иванов, А.Г. Щербаков // Динамика систем, механизмов и машин.– Омск, 2002. – С. 156– 158.

61. Кириченко Ю.О. Аналіз конструкцій намотувальних пристроїв // Тези доповідей наукової конференції молодих вчених та студентів, 15 – 17 квітня. – К.: ДАЛПУ, 1999. – С. 23– 24.

62. Ковалев В.З. Автоматизированный комплекс синтеза схем замещения электрических машин / В.З. Ковалев, В.В. Марголенко // Динамика электрических машин: Тез. докл. – Омск, 1984. – С. 130–133.
63. Ковалёв В.З. Моделирование электротехнических комплексов и систем как совокупности взаимодействующих подсистем различной физической природы: дис. докт. техн. наук / В.З. Ковалев. – Омск, 2000. – 312 с.
64. Коновалов Ю.В. Справочник прокатчика / Ю.В. Коновалов, Г.И. Налча, К.Н. Савранский. – М.: Металлургия, 1977. – 312 с.
65. Кострицкий В.В. Математична модель намотувального пристрою / В. В. Кострицкий, Ю. О. Кириченко // Вісник КНУХТ. – 2004. – № 2. – 185 с.
66. Кострицкий В.В. Математична модель напружено-деформованого стану рулонованого матеріалу / В. В. Кострицкий, Ю. О. Кириченко // Вісник КНУХТ. – 2004. – № 3. – 123 с.
67. Кострицкий В.В. Дослідження напружено-деформованого стану рулонованого матеріалу / В. В. Кострицкий, Ю. О. Кириченко, Л. Ф. Артеменко // Вісник КНУХТ. – 2004. – № 5. – 163 с.
68. Костюк В. И. Асимптотическая инвариантность многократно адаптивных систем / В. И. Костюк, А. Н. Сильвестров // Теория инвариантности и её применение. – К. : Наук. думка, 1979. – С. 155–167.
69. Костюк В. И. Принцип многократной адаптивности / В. И. Костюк, А. Н. Сильвестров // Достижения и перспективы развития технической кибернетики. – К. : Изд-во РДИТП, 1975. – Т. 1. – С. 65–69 (тр. III Всесоюзной междуниверситетской НТК).
70. Костюк В. И. Многократно адаптивная система идентификации МАСИ-1 и её применение / В.И. Костюк, А. Н. Сильвестров, Юдин А. Ю. // Вестник КПИ. Техническая кибернетика, 1980, № 4. – С. 41–48.
71. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Я. Глинер, М.М. Смирнов. – Учебное пособие. – М.: 1970. – 712 с.
72. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М. : Мир, 1975. – 648 с.
73. Кретов Д. И. Система оптимального управления процессом охлаждения кабельной изоляции. Автореферат дисс. канд. техн. наук. Самара, 2007. – 23 с.
74. Крупович В.И. Справочник по проектированию автоматизированного электропривода и систем управления технологическими процессами / В. И. Крупович, Ю.Г. Барыбина, М.Л. Самовер. – М.; Энергоиздат, 1982. – 416 с.
75. Крутько П.Д. Симметрия – методологическая основа формулирования обратных задач динамики и методов их решения / П.Д. Крутько // Изв. РАН. ТиСУ. – 2004. – № 1. – С. 5–26.
76. Крутько П.Д. Декомпозирующие алгоритмы управления движением нелинейных динамических систем / П.Д. Крутько, Ф.Л. Черноусько // Изв. РАН. ТиСУ. – 2001. – № 4. – С. 8–24.

77. Крутько П.Д. Робастно устойчивые структуры управляемых систем высокой динамической точности. Алгоритмы и динамика управления движением модельных объектов / П.Д.Крутько // Изв. РАН. ТиСУ. – 2005. – № 2. – С. 120–140.
78. Кулебакин В.С. Теория инвариантности автоматически регулируемых и управляемых систем // Теория непрерывных систем. Специальные математические проблемы. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – с. 247–258.
79. Кухтенко А.И. Проблема инвариантности в автоматике/А.И. Кухтенко – К.: Гостехиздат УССР, 1963. – 376 с.
80. Лебедев Е.Д. Управление вентильными электроприводами постоянного тока/Е.Д. Лебедев, В.Е. Неймарк, О.В. Слежановский. – М.: Энергия, 1970. – 200 с.
81. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела/ С.Г. Лехницкий– М.: ГИТТЛ, 1950.– 421 с.
82. Льюнг Л. Идентификация систем / Л. Льюинг. – М. : Наука, 1991. – 386 с.
83. Луцкив Н.А. Следящий электропривод с наблюдающим устройством/ Н.А. Луцкив, Я.С. Маруняк//Техническая электродинамика, 1985. – №6. – С. 60–65.
84. Любич Ю. И. Общая теория релаксационных процессов/Ю. И. Любич, Г. Д. Майстровський // Успехи математических наук, 1970. – № 1. – С. 57–112.
85. Малыгин Е.Н. Моделирование и расчет процессов индукционного нагрева пресового оборудования при производстве резинотехнических изделий/Е.Н. Малыгин, С.В. Карпушкин, С.В. Карпов//Наука и образование. Научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013.– №.3.–С. 85–102.
86. Мамбетова Е.А. Математическое моделирование температурных полей и степени вулканизации в процессе вулканизации типичных кабельных изделий/ Е.А. Мамбетова, Н.М. Труфанова. Пермь.
87. Маркова Е. В. Комбинированные планы в задачах многофакторного эксперимента / Е. В. Маркова, В. Н. Лысенков. – М. : Наука, 1979. – 348 с.
88. Математические основы теории автоматического управления / под ред. Б. К.Чемоданова. – М. : Высш. шк., 1977. – Т. 1. – 336 с.
89. Менский Б.М. Принцип инвариантности в автоматическом регулировании и управлении/Б.М. Менский. – М. Машиностроение, 1972. – 248 с.
90. Митрошин В.Н. Математическое моделирование процесса охлаждения изолированной кабельной жилы при ее изготовлении на экструзионной линии как объекта управления с распределенными параметрами/В.Н. Митрошин, 2005. С. 122–128.
91. Митрошин В.Н. Модель системы распределенного управления температурой расплава полимера с учетом его реологических особенностей при наложении кабельной изоляции методом экструзии/В.Н. Митрошин, А.С. Нечаев//Вести Самар. гос. техн. ун-та. Серия физико-математические науки, 2006,

№ 43. С. 104–110.

92. Митрошин В.Н. Описание одночервячного экструдера как объекта управления с распределенными параметрами/В.Н. Митрошин//Известия Вузов. Поволжский регион, 2007, № 1.–С. 162–173.

93. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики/Н.Н. Никитин – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.

94. Островерхов М.Я., Сільвестров А.М., Скринник О.М./Системи і методи ідентифікації електротехнічних об'єктів/ М.Я. Островерхов , А.М. Сільвестров , О.М Скринник– К.: Політехніка, 2016. – 333 с.

95. Островерхов М.Я. Універсальна система векторного керування швидкістю асинхронного двигуна на основі концепції зворотних задач динаміки при мінімізації локальних функціоналів миттєвих значень енергій руху / М.Я. Островерхов, О.Л. Сигаєв, М.П. Бурик // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – Кременчук: КДПУ, 2009. – Вип. 3/2009 (56) частина 2. – С. 31– 34.

96. Островерхов М. Я. Пряме векторне керування швидкістю лінійного асинхронного двигуна на основі концепції зворотних задач динаміки / М.Я. Островерхов, О.І. Яремов // Електромеханічні і енергозберігаючі системи. – Кременчук: КрНУ, 2011. – Вип. 3/2011 (15). – С. 26– 30.

97. Островерхов М.Я. Математична модель електромеханічної системи керування положенням штаби прокату / М.Я. Островерхов, А.А. Філоменко // Електромеханічні та енергетичні системи, методи моделювання та оптимізації. Збірник наукових праць VII Міжнародної науково– технічної конференції молодих учених і спеціалістів. – Кременчук: КНУ, 2009. – С. 177– 178.

98. Островерхов М.Я. Метод синтезу регуляторів електромеханічних систем на основі концепції зворотних задач динаміки в поєднанні з мінімізацією локальних функціоналів миттєвих значень енергій руху / М.Я. Островерхов // Вісник НТУ „Харківський політехнічний інститут”. Тем. випуск „Проблеми автоматизованого електропривода. Теорія і практика”. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2008. – Вип. 30. – С. 105– 110.

99. Парнес М.Г. Расчет и конструирование намоточных станков/М.Г. Парнес – М.: Машиностроение, 1965. – 205 с.

100. Патент на корисну модель №78541 України. МПК G01R 31/02. Спосіб вимірювання параметрів лінеаризованої моделі відносно базового режиму моделі нелінійної динаміки електротехнічних об'єктів/А.М. Сільвестров, О.М. Скринник, К. В. Уманська, М. М. Гонтар, заявник та власник патенту НТУУ «КПІ». – Заявл. 22.08.2012, опубл. 25.03.2013. Бюл. № 6/2013.

101. Пискунов В.Г. Обобщенная неклассическая модель напряженно– деформированного состояния в задачах статики, динамики и контакта слоистых плит и оболочек / В. Г. Пискунов, В. К. Присяжнюк, А. В. Сипетов// Механика композиционных материалов. – 2003. – Т. 39. – № 2. – С. 205 – 222.

102. Полосин А.Н. Система моделирования процессов экструзии и формо-

образования полимерных материалов для управления качеством руканых пленок/ А.Н. Полосин, Т. Б. Чистякова//Компьютерные исследования и моделирование, 2004, т.6.–№1.– С.117–158.

103. Пономаренко И. Сталеплавильный потенциал Украины в разрезе статистических показателей / И. Пономаренко // Металл. – 2004. – № 9. – С. 40–41.

104. Попович М.Г. Система векторного керування зусиллям у штабі прокату на основі безконтактного виконавчого пристрою / М.Г. Попович, М.Я. Островерхов // Вісник НТУ „Харківський політехнічний інститут”. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2008. – № 30. – С. 394–396.

105. Попович М.Г., Теорія автоматичного керування/М.Г. Попович, О.В. Ковальчук – К.: Либідь, 1977. – 544 с.

106. Попович М.Г. Математична модель безконтактних виконавчих пристроїв систем автоматичного керування параметрами штаби прокату / М.Г. Попович, М.Я. Островерхов // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – Кременчук: КДПУ, 2008. – Вип. 3/2008 (50) частина 2. – С. 124–128.

107. Предельное быстродействие и качество процессов электроприводов с цифровым управлением / А.Д. Поздеев, А.К. Мартыничев, Е.А. Игошин, и др. М.: Автоматизированный электропривод, 1990. – 406 с.

108. Пухов Г.Е. Модели технологических процессов/ Г. Е. Пухов, Ц. Хаташвили. – К. : Техніка, 1974. – 200 с.

109. Пятов В.В. Теоретические и технологические основы холодной экструзии порошковых материалов/В.В. Пятов. Витебск, 2002. 237 с.

110. Райбман Н. С. Основы управления технологическими процессами / Н. С. Райбман, В. М. Чадеев. – М. : Наука, 1980. – 440 с.

111. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их использование / С. Р. Рао. – М. : Наука, 1968. – 548 с.

112. Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление процессом охлаждения полимерной кабельной изоляции при ее наложении на экструзионной линии/Э.Я. Рапопорт, В.Н. Митрошин, Л.И. Кретов//Вести Самар. гос. техн. ун-та. Серия физико-математические науки, 2006, № 43.–С. 146–153.

113. Рудаков В.В. Асинхронные электроприводы с векторным управлением / В.В. Рудаков, И.М. Столяров, В.А. Дартау. – Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 136 с.

114. Себер Ж. Линейный регрессионный анализ / Ж. Себер. – М: Мир, 1980. – 456 с.

115. Семенов А.Д. Идентификация объектов управления/ А. Д. Семенов, Д. В. Артамонов, А. В. Брюхачев. – Изд- во пензенского госуниверситета, 2003. – 200 с.

116. Сидняев Н.И. Введение в теорію планирования эксперимента/Н.И. Сидняев, Н.Т. Вилисова. М.: МГТУ им. Баумана, 2011. – 446 с.

117. Сильвестров А. Н. Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. – М. : Энерго- атомиздат, 1987. – 200 с.
118. Сільвестров А. М. Нариси з теорії ідентифікації / А. М. Сільвестров, В. В. Самсонов // К. : НУХТ, 2012. – 222 с.
119. Сільвестров А. М. Ідентифікації в умовах невизначеності вхідних і вихідних даних / А. М. Сільвестров, Г.І. Кривобока // 68 наукова конференція професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів НТУУ «КПІ», 19 квітня 2016 р., с. 13 –15.
120. Сільвестров А. М. О некоторых методах идентификации нелинейных объектов / А. М. Сільвестров, В. В. Самсонов // An International journal “Mathematics and Computer Science”, Journal of Qafqaz University. – 2011. – № 32. – С. 12–23
121. Сильвестров А. Н. Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 200 с.
122. Сильвестров А. Н. Многократно адаптивные системы идентификации / А. Н. Сильвестров, О. М. Папченко. – М., 1983. –150 с.
123. Сільвестров А. М. Ідентифікація нелінійних статичних залежностей з динаміки електротехнічних систем / Д. К. Зіменков, А. М. Сільвестров, О. М. Скринник // «Системні дослідження та інформаційні технології». – 2016. – №1. – С. 99–106.
124. Сільвестров А. М. Застосування теорії фільтрів для аналітичного опису логіко– аналітичних залежностей / Г.І. Кривобока, А. М. Сільвестров, О. М. Скринник // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2013. – № 2. – С. 64–69.
125. Сільвестров А. М. Структурно– параметрична ідентифікація статичної нелінійності динамічного об'єкта / А. М. Сільвестров, О. М. Скринник, Л. Ю. Спінул // Адаптивні системи автома– тичного управління НТУУ «КПІ». – 2014. – № 1(24). – С. 105–112.
126. Сильвестров А. М. Применение метода аналитического описания кусочно– аналитических зависимостей / К. М. Божко, А. М. Сильвестров, О. М. Скринник // Bulgarian Journal for Engineering Design. – 2014. – issue 22. – Page 33–38.
127. Сільвестров А. М. Виявлення закономірності у вібраціях об'єкта для діагностики та прогнозування його стану / А. М. Сільвестров, О. М. Скринник, Л. Ю. Спінул, К. В. Уманська // «Компрессорное и энергетическое машиностроение». – 2014. – №1(35). – С. 16–20.
128. Сільвестров А. М. Забезпечення інваріантності напруги до струму якоря в генераторі постійного струму / А. М. Сільвестров, О. М. Скринник // тези 68– ї наукової конференції. – 2016. – Т. 1. – С. 19–21.
129. Сільвестров А.М. Згладжування та прогнозування сигналів за допомогою ноніусного включення експоненціальних фільтрів моделі Брауна / А.М. Сільвестров // Матеріали Всеукраїнської наук.–практ. конференції «Електронні та механотронні системи: теорія, інновації, практика», 5.11.2015 р., Полтава,

2015. – С. 65 – 68.

130. Снигерев Б. А. О форме выходящей струи при выдавливании вязкоупругой жидкости из плоского щелевого канала/Б. А. Снигерев, К.М. Алиев, Ф.Х. Тазюков//Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия, 2002. №6 (79). – С.130–138.

131. Соколов М.В. Проектирование экструзионных машин с учетом качества резинотехнических изделий/ М.В. Соколов, А.С. Клинков, П.С. Беляев, В.Г. Однолько. М: Машиностроение, 2007. – 292 с.

132. Соколовский Г.Г. Электроприводы переменного тока с частотным управлением / Г.Г. Соколовский. – М.: Академия, 2006. – 266 с.

133. Солодовников В. В. Расчёт оптимальных систем автоматического управления при наличии помех / В. В. Солодовников, П. С. Матвеев. – М. : Машиностроение, 1973. – 239 с.

134. Солодовников В.В. Основы автоматического регулирования/ В. В. Солодовников – М.: Машгиз, 1954. – 118 с.

135. Субботин Е.В. Пространственные неизотермические течения в рабочих и охлаждающих каналах пластицирующего экструдера/Е. В. Субботин. Автореф. дис. канд. техн. наук, 2013. 17 с.

136. Субботин Е.В. Численное исследование процессов течения полимеров в условиях фазового перехода в винтовых каналах экструдеров при производстве пластмассовой изоляции/Е. В. Субботин, А.Г. Щербинин, Н.М. Труфанова//Известия Томского политех. ун-та, 2002.–т. 320.–№4.–С.171177.

137. Теория автоматического управления. В 2-х ч. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления/ Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. – 367 с.

138. Терехов В.М. Системы управления электроприводов / В.М. Терехов, О.И. Осипов. – М.: Академия, 2005. – 300 с.

139. Тимошенко Е.В. Синтез систем управління параметрами штаби при холодному прокатуванні / Е.В. Тимошенко, О.О. Семецький. – К.: НВК “КІА”, 1999. – 264 с.

140. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач/А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин – М.: Наука, 1979. – 286 с.

141. Толбатов Ю. А. Економетрика / Ю. А. Толбатов. – Тернопіль: підручники і посібники, 2008. – 288 с.

142. Устройство для намотки рулонных материалов: А.с. 1687547 СССР, МКИ G 01 В 17/02./ В.Ф. Михайленко, В.В. Курчин, Э.Л. Тутов, В.И. Скороходов, А.В. Матяш – № 4709676112; Заявлено 23.06.89; Оpubл. 30.10.91, Бюл. № 40. – 3 с.

143. Устройство для регулирования натяжения при намотке длинномерного материала на паковку: А.с. 1299930 СССР, МКИ В65Н 77/00 / Кисляков М.А. – Заявл. 25.03.79; Оpubл. 30.08.80, Бюл. № 12. – 2 с.

144. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем

/ А. А. Фельдбаум. – М. : Физматгиз, 1963. – 552 с.

145. Фомин В.Н. Адаптивное управление динамическими объектами/ В. Н. Фомин, А. Л. Фрадков, В. А. Якубович. – М.: Энергоатомиздат, 1981. – 448 с.

146. Черняев В.В. Математическое моделирование влияния неометрических параметров шнека на процессы тепломассопереноса/В.В Черняев// Пермский исслед. политех.ун-т. С.85–92.

147. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1984. – 380 с.

148. Шевченко В.Г. Основы физики полимерных композиционных материалов/В.Г. Шевченко. Учебное пособие. М: 2010.– 99 с.

149. Шин В. И. Субоптимальный алгоритм оценки состояния и параметров многомерных непрерывных нелинейных систем/В. И. Шин // Автоматика и телемеханика, 1984. – № 1. – С. 101–106.

150. Шрагер Г.Р. Исследование режимов течения высоковязкой полимерной массы, ограниченной свободной поверхностью, в области резкого расширения канала./Г.Р. Шрагер, А.Н. Козлобородов //Прикладная механика и теоретическая физика, 2008, №1.– с. 81– 89.

151. Щерба А.А. Бесконтактный заряд емкостного накопителя с использованием трансформатора тесла/А.А. Щерба, Н.А. Ломко // Праці ІЕД НАН України. – 2016. – Вип. 44. – С. 104–110.

152. Щерба А.А. Особенности повышения скорости нарастания токов в нагрузке полупроводниковых электроразрядных установок/А.А. Щерба, Н.И. Супруновская, С.С. Розискулов, Ю.В. Перетятко // Праці ІЕД НАН України. – 2017. – Вип. 47. – С. 77–85.

153. Щерба А.А. Электрофизические процессы в диэлектрических и магнитных средах/А.А. Щерба, О.Л. Резинкин, М.М. Резинкина // Монография. К.: Наук. думка, 2016. – 191 с.

154. Щербинин А.Г. Процессы движения и теплообмена нелинейных полимерных сред в условиях фазового перехода в каналах экструзионного оборудования/А.Г. Щербинин. Автореферат дис. докт. техн. наук, 2006.– 34 с.

155. Щербинин А.Г. Исследование влияния геометрии шва на характеристики пластицирующего экструдера/А.Г. Щербинин, В.Г. Савченко// Интеллектуальные системы в производстве. 2010. № 1 (15), С. 198–206.

156. Boriak B.R. Filtering and forecasting signals algorithm based on exponential Brown's filter/B. R. Boriak, A. N. Silvestrov//Academic J. Control, Navigation and Communication Systems, Vol.4, No.44, Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University, Poltava, Ukraine, 2017. pp: 150– 152.

157. R.C.Creppe, J.A.C.Ulson, J.F.Rodrigues, Influence of Design Parameters on Linear Induction Motor End Effect, IEEE Trans. Ener.Conv .vol.23 No.2 pp. 358– 362, June. 2008.

158. J. Duncan, Linear induction motor – Equivalent circuit model// Proc. Inst. Elec. Eng., pt. B, vol. 130, No. 1, 1983.

159. J. Faiz, H. Jafari, Accurate Modeling of Single- Sided Linear Induction Motor Considers End Effect and Equivalent Thickness, // IEEE Trans. Magn. vol.36, No.5, pp:3785– 3790, Sep. 2000.
160. N.Fujii , T.Harada, A New Viewpoint of End Effect of Linear Induction Motor from Secondary Side in Ladder Type Model, IEEE Trans. Magn., vol. 35, No. 5, pp. 4040– 4042, Sep. 1993.
161. N. Fujii, T. Kayasuga, T. Hoshi, Simple End Effect Compensator for Linear Induction Motor // IEEE Trans. Magn., vol. 38, N. 5, pp. 3270– 3272, 2002.
162. Galan P., Shol Su Gil. Adaptive madenie servopohonov s rychlov odorvou. – AutomatIzace, 1986. – Vol. 29. – № 6. – P. 155 – 158.
163. A.Gastli, Improved field oriented control of an LIM having joints in its secondary conductors, IEEE Trans. Energy Convers., Vol. 17, No. 3, pp. 349– 355, Sep. 2002.
164. K. Idir, G.E. Dawson, A.R. Eastham, Modeling and Performance of Linear Induction Motor with Saturable Primary // IEEE Trans. Indus. vol.29, No.6, pp. 1123– 1128, Nov. 1993.
165. K.Y. Lian, H.C.S. Chiu, I.C. Fu, Robust adaptive control of linear induction motors with unknown end- effect and secondary resistance, IEEE Trans. Energy Convers., Vol. 23, No. 2, pp. 412– 422, Jun. 2008.
166. F.J.Lin, P.K.Huang, W.D.Chou, Recurrent- fuzzy- neuralnetwork- controlled linear induction motor servo drive using genetic algorithms, IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 54, No. 3, pp. 1449– 1461, Jun. 2007.
167. F.J.Lin, C.K.Chang, P.K.Huang, FPGA- based adaptive backstepping sliding- mode control for linear induction motor drive, IEEE Trans. Power Electron., Vol. 22, No. 4, pp. 1222– 1231, Jul. 2007.
168. P.Liu, C.Y.Hung, C.S.Chiu, K.Y.Lian, Sensorless linear induction motor control using fuzzy observers for speed tracking, in Proc. ICECE, pp. 5621– 5626, May 2010.
169. D.C. Meeker, M.J. Newman. Indirect vector control of a redundant linear induction motor for aircraft launch // Proceeding of the IEEE, Vol. 97, No. 11, pp. 1768– 1776, 2009.
170. Z.Mingy, M.Weaning, X.Jin, L.Web, Vector control for the linear induction motor based on the position closed- loop , in Proc. ICECE, pp. 2515– 2518, Jun. 2010.
171. L. Nadau, A. Sequera. Numerical simulation of shear dependent viscoelastic flows with a combined finite element – finite volume method // Computer and mathematics with applications, 2007, pp.547–568.
172. Revankar G.N. Compensation in PLL controlled DC motor drives / Revankar G.N., Paranjap S., J.Inst. Eng. (India) Elec. Eng. Div., 1981. – Vol. 62. – №3. – P. 89–93.
173. A.H. Selcuk , H. Kurum, Investigation of End Effects in Linear Induction Motors by Using the Finite-Element Method, // IEEE Trans. Magn., vol. 44, No. 7,

pp. 1791– 1795, July. 2008.

174. E.F. da Silva, E.B. dos Santos, P.C.M. Machado, M.A.A. de Oliver, Vector control for linear induction motor, in Proc. ICIT'03, pp. 518– 523, Dec. 2003

175. E.F. da Silva, C.C. dos Santos, J.W.L.Nerds, Field oriented control of linear induction motor taking into account end- effects, in Proc. AMC'04, pp. 689– 694, Mar. 2004.

176. A. Shcherba, N. Suprunovska Parametric Synthesis of Reservoir Capacitor Circuits in the Thyristor Generator of Discharge Pulses with the Controllable Voltage Feedback // Proc. IEEE Internat. Conference First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON– 2017), May 29 – June 2, 2017, Kyiv, Ukraine.

177. Shcherba M.A. Effect of water trees string of pearls configuration on electric field, current and stressed volume distribution in XLPE insulation // Computational Problems of Electrical Engineering – 2016. – Vol. 6, № 2 – P. 107–112.

178. Shcherba M.A. Modeling of Water Tree Growth Between Micro- Inclusions in XLPE Cable Isolation and its Effect on Electric Field Distribution // IEEE Electrical and Computer Engineering, 2017, pp. 417 – 420.

179. J.H. Sung, K. Nam, A New Approach to Vector Control for a Linear Induction Motor Considering End Effects// IEEE IAS annual meeting, pp. 2284– 2289, 1999.

180. J.H. Sung, K.Nam, New approach to vector control for a linear induction motor considering end effects, in Proc. IAS Annual Meeting, pp. 2284– 2289, Oct. 1999.

181. S. Vaez-Zadeh, M.R. Satvati, Vector control of linear induction motor with end- effect compensation, in Proc. ICEMS '05, pp. 635– 638, Sep. 2005.

182. W. Xu, G.Sun, Y.Li, Research on Performance Characteristics of Linear Induction Motor// IEEE Ind. electron. and applications conf. 2007 pp.86– 88.

183. W.Yuhua, G.Kang, Speed and rotator magnetic flux close loop vector control system for the linear induction motor based on neuron adaptive controller, in Proc. MASS'09, pp. 1– 5, Oct. 2009.

Показчик

- γ -квантиль, 91
- t -критерій Стьюдента, 204
- МНК
 - інтегрований, 122, 128
 - узагальнений, 118
- МНК-оцінювання, 61
- алгоритм
 - градієнтний
 - модифікований, 139
- МНК
 - рекурентний, 95
 - оцінювання параметрів
 - універсальний, 84
- аналіз
 - конфлюєнтний, 115
- декомпозиція, 29
- екструдер, 183
- екструзія, 215
- функція
 - автокореляційна, 46, 48
 - Уолша, 46
 - вагова
 - МНК, 128
- коефіцієнт детермінації, 65
- ковзне середнє, 48
- метод
 - багатократного ділення, 48
 - Марквардта, 87
 - багатократного корелювання, 48
 - Баєса, 87
 - допоміжних змінних, 96
 - рекурентний, 101
 - допоміжної змінної, 203
- Гауса–Ньютона, 87
- Гауса–Зейделя, 33
- максимальної правдоподібності, 98
- найменших квадратів, 46
 - рекурентний, 101
 - узагальнений, 48
- однократного ділення, 48
- одноразового ділення, 134
- прогнозу
 - кореляцій, 48
 - прогнозу кореляцій, 137
 - стохастичної апроксимації, 99
- моделі
 - непараметричні, 20
 - параметричні, 20
- модель
 - цілеорієнтована, 25
 - оптимальна, 25
 - ноніусна, 27
- модель
 - динамічна
 - резистивних елементів, 74
- принцип
 - узгодженості показників, 37
- проектор
 - алгоритм, 45
- рівняння
 - Лагранжа другого роду, 22
- розподіл
 - χ^2 , 66
 - Фішера, 67
 - Стьюдента, 67

система

 ідентифікації

 багаторазово адаптивна, 28

системи

 електротехнологічні , 18

теорема

 Веєрштрасса, 59

умови

 Гауса –Маркова, 62

функція

 Гамільтона, 22

 Лагранжа, 22

 Релея, 22

критерій

 незміщеності, 52

 “регулярності”, 52

матриця

 Адамара, 46

Наукове видання

Островерхов Микола Якович
Сільвестров Антон Миколайович
Зеленський Кирило Харитонович

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ ТА КОМПЛЕКСІВ

Монографія

В авторській редакції
Технічний редактор

Оригінал-макет виготовлено у видавничо-друкарському комплексі

Віддруковано з оригінал-макета у видавничо-друкарському комплексі

Підписано до друку . Формат 70 × 100/16.

*Папір офсетний. Ум. друк. арк. .
Обл.-вид. арк. 64.6. Наклад . Зам. № .*