Донецький національний університет імені Василя Стуса
Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Петранова Марина Юріївна

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

Випадкові гауссові процеси зі стійкими кореляційними функціями

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

11 математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

М. Ю. Петранова

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор

Козаченко Юрій Васильович

Київ–2021

Анотація

Петранова М. Ю. Випадкові гауссові процеси зі стійкими кореляційними функціями. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – "Теорія ймовірностей і математична статистика" (112 – Статистика). – Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" Міністерства освіти і науки України, Київ, 2021.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню випадкових гауссових процесів зі стійкими кореляційними функціями та їх властивостей. Основною тематикою є знаходження властивостей та деяких оцінок для розподілів дійсних та комплексних випадкових процесів, побудова ймовірнісних моделей, які наближають гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ із заданою надійністю $1 - \alpha, 0 < \alpha < 1$ та точністю $\beta > 0$ в просторах неперервних функцій $C([0, T])$ та в просторах, інтегровних з показником p, функцій $L_p([0, T]), p \geq 1$, побудова довірчого інтервалу для параметра процесу Орнштейна-Уленбека, а також перевірка гіпотези про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійснозначного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією.

Оскільки, кореляційна функція є однією з важливих характеристик випадкових процесів, то постають питання оцінювання та вигляду цієї функції для випадкового процесу, побудова критеріїв для її ідентифікації. Також актуальною задачею є використання випадкових гауссових процесів зі стійкими кореляційними функціями для розв'язування широкого спектра задач, наприклад, пов'язанних з вузькосмуговими процесами, економетри-

кою, фінансовою та страховою математикою. Прикладом процесу зі стійкою кореляційною функцією є процес Орнштейна-Уленбека. Процес Орнштейна-Уленбека – це процес дифузії, який був введений як модель швидкості частинки, яка рухається згідно законів броунівського руху. Такий процес є стаціонарним, гауссовим та марківським. Це лише один із нетривіальних процесів, який задовольняє три умови, включаючи лінійні перетворення змінних простору та часу. У фізиці процес Орнштейна-Уленбека є прототипом шумового процесу релаксації. У галузі фінансів він добре відомий завдяки моделі процентних ставок Васічека. Процес Орнштейна-Уленбека широко застосовується для моделювання процесів реверсії. Процеси реверсії цікаві для моделювання цін на товари. Також процес Орнштейна-Уленбека використовується для стохастичного моделювання обмінних курсів. Останнім часом процес Орнштейна-Уленбека використовується у фінансах як модель мінливості цін на активи.

Результати дисертаціної роботи можна умовно поділити на три частини. У першій частині наведено властивості та знайдено оцінки розподілу дійсних і комплексних випадкових процесів зі стійкою кореляційною функцією. У другій частині побудовано моделі у просторах $C([0,T])$ та $L_p([0,T])$, $p \geq 1$, а також знайдено оцінку параметру гауссового стаціонарного процесу Орнштейна-Уленбека. Третя частина присвячена побудові критерію для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією.

В розділі 2 дисертаційної роботи вивчаються дійснозначні гауссові випадкові процеси зі стійкою кореляційною функцією. В цьому розділі знайдено оцінки зверху для розподілу супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою кореляційною функцією.

В розділі 2 також досліджено поведінку дійсного гауссового стаціонарного процесу $X_\alpha(t)$ зі стійкими кореляційними функціями при прямуванні t до нескінченності. Поведінку процесу описано у термінах оцінок для розподілу супремуму нормалізованого процесу (у якості нормалізації виступає невипадкова функція). Такий результат можна застосувати для доведення посиленого закону великих чисел для самого процесу.

Знайдено оцінки для розподілу норми в просторі $L_p([0,T])$, $p \geq 1$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою кореляційною функцією. Описано аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями.

У розділі 3 дисертаційної роботи подано аналіз властивостей власного комплексного випадкового процесу. Досліджено стаціонарні власні комплексні випадкові процеси зі стійкою кореляційною функцією. Наведено умови існування власних комплексних випадкових процесів, а також означення, пов'язані з комплексними випадковими процесами. Також у цьому розділі отримано оцінки розподілу деяких функціоналів з модуля стаціонарних гауссових власних комплексних випадкових процесів та проаналізовано поведінку модуля стаціонарних власних комплексних випадкових процесів на нескінченності.

У розділі 4 розглянуто способи зображення та основні властивості процесу зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$, який задається як гауссовий процес з відповідною кореляційною функцією. Побудовано моделі, які наближають стаціонарний гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$, із заданою надійністю та точністю в просторах $C([0,T])$ та $L_p([0,T]), p \geq 1$, а також знайдено швидкості збіжності моделей, сформульовано відповідні теореми. У якості базису в просторі $L_2(\mathbb{T})$ використовуються функції Ерміта.

У розділі 5 запропоновано новий метод побудови довірчого інтервалу для параметра θ_0 процесу Орнштейна-Уленбека, як розв'язку стохастичного диференціального рівняння. Побудувано оцінку зверху для ймовірностей $P\left\{\nu(t) < \dfrac{\varepsilon}{T}\right\}$ (тут випадковий процес – це інтеграл від квадрату процесу Орнштейна-Уленбека) та для $P\left\{\int_0^1 \widetilde{W}^2(s)ds < \frac{\varepsilon}{T}\right\}$. Тут процес $\widetilde{W}(s)$ – це нормований вінерівський процес. Розглянуті вирази називаються ймовірностями малих відхилень, оскільки параметр вважається малим.

У розділі 6 розглянуто задачу перевірки гіпотези про параметер стійкої кореляційної функції. Оскільки кореляційна функція повністю визначає гауссовий випадковий процес, то виникає питання про вигляд цієї функції для випадкового процесу. Для того, щоб з'ясувати це, розглянуто центрований вимірний дійсний гауссовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією, розглянуто лему про прийняття гіпотези для процесу загального вигляду, доведено теорему про наближення кореляційної функції корелограмою, сформульовано і доведено лему про прийняття гіпотези $\mathbb{H}$ для процесу, у якого кореляційна функція стійка і має вигляд

$$\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\},$$

де $0 < \alpha \leq 2$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$.

Ключові слова: гауссовий випадковий процес, кореляційна функція, комплексний випадковий процес, дійсний випадковий процес, критерій згоди, процес Орнштейна–Уленбека, точність моделювання, надійність моделювання, модель випадкового процесу, перевірка гіпотез, побудова довірчого інтервалу.

Summary

Petranova M. Yu. Random Gaussian processes with stable correlation functi-

ons. – Manuscript.

Thesis for candidate degree in physical and mathematical sciences by specialty 01.01.05 – probability theory and mathematical statistics (112 – Statistics). – National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to the study of random Gaussian processes with stable correlation functions and their properties. The main topic is finding the properties and some distributions of real and complex random processes, construction of probabilistic models which approximate Gaussian process with a stable correlation function $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ with a given reliability $1-\alpha, 0 < \alpha < 1$ and accuracy $\beta > 0$ in the spaces $C([0,T])$ and $L_p([0,T]), p \geq 1$, construction of a confidence interval for the parameter of the Ornstein–Uhlenbeck process and testing the hypothesis about the form of the correlation function of a centered measurable real Gaussian stationary process with a stable correlation function.

Since the correlation function is one of the important characteristics of random processes, there are questions of evaluation and representation of this function for a random process, the construction of criteria for its identification. It is also relevant to use random Gaussian processes with stable correlation functions to solve a wide range of problems, like those for band-limited processes, as well as those in econometrics and financial mathematics. An example of a process with a stable correlation function is the Ornstein-Uhlenbeck process. The Ornstein-Uhlenbeck process is a diffusion process which was introduced as a model of the velocity of a particle which moves according to the laws of Brownian motion. The process is stationary, Gaussian and Markov. This is just one non-trivial process that satisfies these three conditions, up to linear transformations of space and time variables. In physics, the Ornstein-Uhlenbeck process is a prototype of the noise relaxation process. In the field of finance, it is well known for Vasicek Interest Rate Model. The Ornstein-Uhlenbeck process is widely used to model the mean reverting process. Mean reverting processes are naturally attractive for product price modeling. The Ornstein-Uhlenbeck process is also used for stochastic modeling of exchange rates. Recently the Ornstein-Uhlenbeck process has appeared in finance as a model of the volatility of the underlying asset price process.

The results of the thesis can be conditionally divided into three parts. The first part describes, presents the properties and estimates of the distribution of real and complex random processes with a stable correlation function. In the second part, models are constructed in the spaces $C([0,T])$ and $L_p([0,T]), p \geq 1$, and an estimate of the parameter of the Gaussian stationary Ornstein-Uhlenbeck process is also found. The third part is devoted to the criterion for testing the hypothesis about the form of the correlation function of a centered measurable real Gaussian stationary process with a stable correlation function.

Section 2 of the thesis studies real Gaussian random processes with a stable correlation function. In this section, we find upper bounds for the distribution of the supremum of a real Gaussian random process with a stable correlation function.

Section 2 also describes the behavior of a real Gaussian stationary process $X_\alpha(t)$ with a stable correlation function at the infinity. The behavior of the process is described in terms of estimates for the distribution of the supremum of the normalized process (as a normalization is a non-random function). This result can be used to prove the strong law of large numbers for the process itself.

Estimates are found for the distribution of the norm in the space $L_p([0,T])$, $p \geq 1$ for a real Gaussian random process with a stable correlation function. Analytical properties of Gaussian random processes with stable correlation functions are described.

Section 3 of the thesis presents an analysis of the properties of proper complex random process. Stationary complex proper random processes with stable correlation function are investigated. The conditions of existence of proper complex random processes are given. Necessary definitions connected with complex proper processes are provided. Estimates of the distribution of some functionals of the module of stationary Gaussian proper complex random processes are obtained, and the behavior of the module of stationary proper complex random processes at infinity is also analyzed.

Section 4 discusses the methods of representation and the main properties of Gaussian process with a stable correlation function $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$. Models that approximate the stationary Gaussian process with a stable correlation function $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ with a given reliability, accuracy in the spaces $C([0,T])$ and $L_p([0,T]), p \geq 1$ are constructed, and the rates of convergence of the models are found, and the corresponding theorems are stated. Hermitian functions are used as a basis in the space $L_2(\mathbb{T})$.

Section 5 proposes a new method for constructing a confidence interval for a parameter θ_0 of the Ornstein-Uhlenbeck process as a solution of a stochastic differential equation. An upper bound is constructed for probabilities $P\left\{\nu(t) < \dfrac{\varepsilon}{T}\right\}$ (here the random process is an integral of the square of the Ornstein-Uhlenbeck process) and for $P\left\{\int_0^1 \widetilde{W}^2(s)ds < \frac{\varepsilon}{T}\right\}$. Here the process $\widetilde{W}(s)$ is a normalized Wiener process. The considered expressions are called probabilities of small deviations because the parameter under consideration is small.

In Section 6 the problem of testing the hypothesis about the parameter of a stable correlation function is stated. Since the correlation function completely determines the Gaussian random process, the question arises about the form of this function for a random process. In order to clarify this, a centered measurable real Gaussian stationary process with a stable correlation function is considered, a lemma on the acceptance of a hypothesis for a process of general form is stated, a theorem on the approximation of a covariance function by a correlogram is proved. There is formulated and proved the lemma on the acceptance of the hypothesis $\mathbb{H}$ for a process which correlation function is stable and has the form

$$\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\},$$

where $0 < \alpha \le 2$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$.

Keywords: Gaussian random process, correlation function, complex random process, real random process, goodness-of-fit test, Ornstein–Uhlenbeck process, accuracy of model, reliability of model, model of random process, testing hypotheses, building a confidence interval.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Бондарев Б.В. Новый метод построения доверительного интервала для параметра процесса Орнштейна-Уленбека / Б.В. Бондарев, М.Ю. Петранова. // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. 2014. **1**. С. 58–63.

2. Козаченко Ю. В. Дійсні стаціонарні гауссові процеси зі стійкими кореляційними функціями / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Наук. вісник Ужгород ун-ту. 2017. **2 (31)**. С.90–100.

3. Петранова М.Ю. Перевірка гіпотези про вигляд кореляційної функції / М.Ю. Петранова. // Наук. вісник Ужгород ун-ту. 2020. **2 (37)**. С. 114–121.

4. Kozachenko Y. Proper complex random processes / Y. Kozachenko, M. Petranova. //Stat., Optim. Inf. Comput. 2017. **5**. P. 137–146.

5. Kozachenko Yu. Simulation of Gaussian stationary Ornstein–Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in space C([0, T]) / Y. Kozachenko, M. Petranova. // Monte Carlo Methods Appl. 2017. **4 (23)**. P. 277—286.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

6. Petranova M. Simulation of Gaussian stationary quasi Ornstein–Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in spaces $C([0,T])$ and $L_p([0,T])$ / M. Petranova. // Journal of Applied Mathematics and Statistics Columbia International Publishing. 2016. **1 (3)**. P. 44–58.

7. Козаченко Ю.В. Власні комплексні випадкові процеси / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. м.Ворохта, 22–25 лютого 2017. С.10–11.

8. Козаченко Ю.В. Власні комплексні випадкові процеси / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Збірник наукових праць професорсько-викладацького складу ДонНУ імені Василя Стуса за 2015-2016 рр. 2017. С.17–19.

9. Козаченко Ю.В. Квазі процес Орнштейна–Уленбека та його моделювання / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Восьма міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів і молодих вчених «Суча-

сні задачі прикладної статистики, промислової, актуарної та фінансової математики». м.Вінниця, 20–22 квітня 2016. С.11-12.

10. Козаченко Ю.В. Моделювання квазі процесу Орнштейна–Уленбека в просторах $C([0,T])$ та $L_p([0,T])$ / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Праці VIII міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень». м.Ужгород, 26 вересня – 1 жовтня 2016. С.141.

11. Козаченко Ю.В. Оцінки розподілу супремума модуля стаціонарних гауссових власних комплексних випадкових процесів / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука. м.Київ, 7–10 жовтня 2016. С.59–60.

12. Петранова М. Ю. Моделювання гаусівського стаціонарного квазі процесу Орнштейна–Уленбека / М.Ю. Петранова. // Міжнародна наукова конференція «Методика викладання та методи дослідження в математиці». м. Берегове, 21–23 квітня 2016. С.38.

13. Козаченко Ю.В. Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. 10–11 квітня 2020. С.10.

14. Kozachenko Yu.V. Real stationary Gaussian processes with stable correlation functions / Yu.V. Kozachenko, M.Yu. Petranova. // International Conference "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes", Kyiv, Ukraine, September 17–22, 2018. P. 52–53.

15. Kozachenko Yu. Simulation of the Ornstein–Uhlenbeck process / Yu. Kozachenko, M. Petranova. // International Conference Differential

Equations, Mathematical Physics and Applications, Cherkasy, Ukraine, October 17–19, 2017. P. 151.

16. Kozachenko Yu.V. Stationary processes with stable correlation functions / Yu.V. Kozachenko, M.Yu. Petranova. // International Conference Modern Stochastics: Theory and Applications.IV, Kyiv, Ukraine, May 24–26, 2018. P. 35.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями, їх властивостям та моделюванню деяких таких процесів, наприклад, процесу Орнштейна-Уленбека. Вивчення різних класів випадкових процесів, дослідження їх властивостей, оцінки розподілу їх супремумів та моделювання цих процесів є актуальною задачею теорії випадкових процесів.

Побудова математичних моделей випадкових процесів, дослідження їх загальних властивостей є розділом теорії випадкових процесів, який стрімко розвивається. Активно розробляються різні методи моделювання випадкових процесів, зростає сфера застосування стохастичних моделей в різних областях соціальних та природничих наук, таких як фізика, соціологія, фінансова математика, теорія масового обслуговування тощо. В цій тематиці працювало багато науковців, серед них можна відзначити Г.О. Михайлова, С.М. Єрмакова, М.Й. Ядренка, Ю.В. Козаченка, А.О. Пашка, А.В. Войтишека, Ю.І. Палагіна, О.С. Шалигіна, І.В. Розору та інших. Г.О. Михайловим та його учнями було запроваджено багато нових напрямків в теорії моделювання випадкових процесів.

Велика кількість робіт присвяченна моделюванню випадкових процесів, але в небагатьох з них висвітлюються питання надійності та точності побудованних моделей. Вперше проблема надійності та точності моделювання випадкових процесів досліджувались у роботах Ю.В. Козаченка, Л.Ф. Козаченко, А.О. Пашка. В роботах Ю.В. Козаченка, Л.Ф. Козаченко [24, 25] було побудовано модель випадкового процесу, яка наближує процес із заданою надійністю та точністю у банаховому просторі $L_2([0, T])$. Книга [29] Ю.В. Козаченка та А.О. Пашка присвячена вивченню моделювання субгауссових випадкових процесів, також у ній побудовано моделі, що наближають процес із даною надійністю і точністю в різних банахових просторах. У даних авторів багато інших робіт у даній тематиці [30, 31, 32, 33]. Також досліджувались надійність та точність моделювання гауссового випадкового процесу з використанням методу Г.О. Михайлова у таких функціональних просторах як $L_p([0, T]), p \geq 1, C([0, T])$, та деяких просторах Орліча.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню випадкових гауссових процесів зі стійкими кореляційними функціями, дослідженню властивостей таких процесів та побудові моделей деяких видів таких випадкових процесів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано в рамках держбюджетної теми № 15-1вв/18 “Аналітичні методи дослідження стохастичних диференціальних рівнянь” (номер державної реєстрації 0115U000087) кафедри прикладної механіки і комп'ютерних технологій Донецького національного університету імені Василя Стуса та розробки “Розроблення електронної краудфандінгової платформи індексації, пошуку, класифікації та аналізу метричних книг та інших історичних документів” (номер державної реєстрації 0118U003139) кафедри прикладної механіки і комп'ютерних технологій Донецького національного університету імені Василя Стуса.

Мета та задачі дослідження.

Дисертаційну роботу присвячено вивченню випадкових гауссових процесів зі стійкими кореляційними функціями. Метою роботи є вивчення властивостей гауссових процесів зі стійкими кореляційними функціями, а також моделювання таких процесів. Для цього використовуються методи теорії випадкових процесів, розширюється коло теоретичних і практичних застосувань даних процесів.

Об'єктом дослідження є гауссові випадкові процеси зі стійкими кореляційними функціями.

Предметом дослідження є стохастичний і статистичний аналіз, що використовуються для моделювання і дослідження таких процесів.

Методика дослідження.

В роботі використовуються методи теорії ймовірностей, аналітичний апарат теорії випадкових процесів та математичної статистики тощо.

Наукова новизна одержаних результатів.

Наукова новизна результатів полягає у створенні наукових основ дослідження гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляйційними функціями, зокрема для дійсних і випадкових процесів, їх застосуванні до теорії моделювання випадкових процесів.

- Знайдено розподіл супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими кореляційними функціями.
- Описано поведінку дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкими кореляційними функціями $X_\alpha(t)$ при прямуванні t до нескінченності.
- Знайдено розподіл норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою кореляційною функцією.
- Описано аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями.

- Наведені означення, деякі властивості та їх аналіз для власного комплексного випадкового процесу.

- Отримано оцінки розподілу деяких функціоналів з модуля стаціонарних гауссових власних комплексних випадкових процесів.

- Побудовано моделі, які наближають гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ із заданою надійністю $1-\alpha, 0 < \alpha < 1$ та точністю $\beta > 0$ в просторах $C([0,T])$ і $L_p([0,T]), p \geq 1$.

- Знайдено новий метод побудови довірчого інтервалу для параметра θ_0 процесу Орнштейна–Уленбека.

- Сформульовано та перевірено гіпотезу про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу, яка дорівнює
$$\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\},$$
де $0 < \alpha \leq 2$, $d > 0$.

Практичне значення одержаних результатів.

Отримані в дисертаційній роботі результати мають теоретичне значення та практичне застосування в різних областях природничих наук, таких як фізика, фінансова математика, тощо.

Особистий внесок здобувача.

Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Визначення напрямку досліджень, постановка задач та загальне керівництво роботою належать науковому консультанту доктору фіз.–мат. наук, професору Ю. В. Козаченку. У сумісних роботах з Ю. В. Козаченком

[73, 74, 34] співавтору належить постановка задач та загальне керівництво роботою, основні результати отримані дисертантом особисто. У роботі у співавторстві з Б. В. Бондаревим [6] постановка задачі належить співавтору, в основну частину дисертації включені результати, що отримані здобувачем особисто.

Апробація результатів. Результати дисертації доповідались та обговорювались на наукових конференціях та засіданнях наукових семінарів провідних українських установ, а саме:

- Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція. м.Ворохта, 22–25 лютого 2017.
- Збірник наукових праць професорсько-викладацького складу ДонНУ імені Василя Стуса за 2015-2016 рр. 2017.
- Восьма міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів і молодих вчених «Сучасні задачі прикладної статистики, промислової, актуарної та фінансової математики». м.Вінниця, 20–22 квітня 2016.
- VIII міжнародна школа-семінар «Теорія прийняття рішень». м.Ужгород, 26 вересня – 1 жовтня 2016.
- Вісімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. м.Київ, 7–10 жовтня 2016.
- Міжнародна наукова конференція «Методика викладання та методи дослідження в математиці». м. Берегове, 21–23 квітня 2016.
- IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. 10–11 квітня 2020.
- International Conference "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes", Kyiv, Ukraine, September 17–22, 2018.

- International Conference "Differential Equations, Mathematical Physics and Applications", Cherkasy, Ukraine, October 17–19, 2017.
- International Conference "Modern Stochastics: Theory and Applications.IV", Kyiv, Ukraine, May 24–26, 2018. P. 35.

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 16 наукових праць, у тому числі 5 статей у наукових фахових виданнях України [6, 73, 74, 34, 42], з яких 2 статті у виданнях, що включені до міжнародної наукометричної бази Scopus [73, 74], 1 стаття в іншому виданні [96], 10 тез доповідей в збірниках матеріалів конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел (105 найменувань), та додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації. Повний обсяг дисертації становить 129 сторінок, основний текст займає 110 сторінок.

Зміст роботи. У **першому розділі** міститься короткий історичний огляд літератури за тематикою дисертації та описано сучасний стан вивчення проблем, схожих до тих, що розглядаються в дисертаційній роботі.

У **другому розділі** розглядаються дійсні стаціонарні процеси зі стійкою кореляційною функцією, зокрема розподіли деяких функціоналів від цих процесів та деякі їх властивості. У **підрозділі 2.1** знаходяться оцінки розподілу супремуму гауссових стаціонарних процесів зі стійкою кореляційною функцією.

Означення 2.1. Дійсний стаціонарний гауссовий процес $X_\alpha = \{X_\alpha(t),$

$t \in \mathbf{R}$, $0 < \alpha \leq 2$, такий що $EX_\alpha(t) = 0$,

$$\rho_\alpha(h) := EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 \exp\left\{-d|h|^\alpha\right\}, \alpha > 0, d > 0$$

називається дійсним гауссовим стаціонарним процесом зі стійкою кореляційною функцією.

Теорема 2.2. Нехай X_α – дійсний сепарабельний гауссовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді для будь-яких $-\infty < a < b < +\infty$, $0 < \theta < 1$, $\beta < \min\left(1, \dfrac{\alpha}{2}\right)$, $\epsilon > 0$ справджується нерівність:

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2}\right\} \cdot 2^{1/\beta - 1}\left(\frac{(b-a)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)^{1/\beta}} + 1\right)$$

У **підрозділі 2.2** вивчається поведінка гауссових стаціонарних процесів зі стійкою кореляційною функцією на нескінченності.

Теорема 2.3. Нехай $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$ – дійсний гауссовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією, $C = \{C(t), t \geq 0\}$ – монотонно зростаюча функція, така що $C(t) \geq 1, t \geq 0$ та $C(t) \to \infty$ при $t \to \infty$; $b_0, b_1, b_2, ..., b_k, ...$ – така послідовність, що $b_0 = 0, b_k < b_{k+1}$, та $b_k \to \infty$ при $k \to \infty$, $r_0, r_1, r_2, ..., r_k, ...$ – така послідовність, що $r_k > 1$ та $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} = 1$, $C_k = C(b_k), k = 0, 1, 2...$ і виконуються умови:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2} < \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1} - b_k)^\gamma < \infty,$$

де γ – деяке число, що $0 < \gamma < 1$. Тоді при будь-якому $0 < \theta < 1$, $\varepsilon > 0$ справджується нерівність:

$$P\left\{\sup_{t\geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2} \cdot \gamma^\gamma} \cdot (\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1} - b_k)^\gamma\right\}.$$

У **підрозділі 2.3** досліджуються деякі аналітичні властивості гауссових стаціонарних процесів зі стійкою кореляційною функцією.

Теорема 2.5. Нехай $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ – вимірний простір, $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ – вимірний гауссовий випадковий процес. Нехай також існує інтеграл Лебега

$$\int_{\mathbb{T}} \left(E|X(t)|^2\right)^{p/2} d\mu(t), p \geq 1.$$

Тоді з ймовірністю 1 існує $\int_{\mathbb{T}} E|X(t)|^p d\mu(t)$, та для всіх ε, таких що $\varepsilon > C \cdot p^{p/2}$, де $c = \int_{\mathbb{T}} \left(E|X(t)|^2\right)^{p/2} d\mu(t)$ має місце нерівність

$$P\left\{ \left(\int_{\mathbb{T}} |X(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2 (1-\theta)^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}} \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ \frac{1}{\theta^{\gamma/2} \cdot \gamma^{\gamma}} \cdot (\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} (b_{k+1} - b_k)^{\gamma} \right\}.$$

У **підрозділі 2.4** досліджується розподіл норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою кореляційною функцією.

Теорема 2.9. Нехай $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in [a,b]\}$ – сепарабельний центрований гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді при всіх $0 < \alpha < 2$ процес $X_\alpha(t)$, $t \in [a,b]$ – вибірково непервний з імовірністю одиниця та для довільних $\epsilon > 0$, $0 < p < 1$, $0 < \beta < \min(1, \alpha)$, $x > \hat{B}(p, \varepsilon)$, де

$$\hat{B}(p,\varepsilon) = \frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2} \cdot \frac{1}{2^{(1+\beta)/2}} (b-a)^{\beta/2} (\sqrt{2d})^{\beta/\alpha} \cdot B^{\beta/\alpha} \times$$
$$\times \frac{1}{(1-\beta/\alpha)} \left(\sqrt{2d} B \varepsilon^{\alpha/2} \right)^{1-\beta/\alpha},$$

виконується нерівність

$$P\left\{ \sup_{|t-s| \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > x \right\} \leq 2 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \hat{B}(p,\varepsilon)}{A(p,\varepsilon)} \right)^2 \right\},$$

де $A(p,\varepsilon) = \dfrac{(3-p)\sqrt{2d} B \varepsilon^{\alpha/2}}{(1-p)^2}$.

Третій розділ присвячено комплексним випадковим процесам, які є одним із найважливіших узагальнень поняття випадкового процесу.

У **підрозділі 3.1** наведено основні означення, пов'язані з комплексними випадковими процесами.

Означення 3.1. Випадковий процес вигляду

$$X(t) = X_c(t) + iX_s(t), t \in \mathbb{R},$$

де $X_c(t)$ та $X_s(t)$ є дійснозначними випадковими процесами (c – косинус, s – синус), називається комплексним випадковим процесом (див. книгу [56] та роботу [94]).

Означення 3.2. Функція

$$\begin{aligned} r(\tau, t) = {} & EX(t+\tau)\overline{X}(t) = \\ & = EX_c(t+\tau)X_c(t) + EX_s(t+\tau)X_s(t) + \\ & \quad + i\left(EX_s(t+\tau)X_c(t) - EX_c(t+\tau)X_s(t)\right) \end{aligned}$$

називається кореляційною функцією процесу $X(t)$.

Функція

$$\begin{aligned} \widehat{r}(\tau, t) = {} & EX(t+\tau)X(t) = \\ & = EX_c(t+\tau)X_c(t) - EX_s(t+\tau)X_s(t) + \\ & \quad + i\left(EX_c(t+\tau)X_s(t) + EX_s(t+\tau)X_c(t)\right) \end{aligned}$$

називається псевдокореляційною функцією процесу $X(t)$.

Означення 3.3. Комплексний випадковий процес $X(t)$ називається власним комплексним випадковим процесом, якщо псевдокореляційна функція цього процесу дорівнює нулю, $EX(t+\tau)X(t) = 0$, тобто коли умови

$$EX_c(t+\tau)X_c(t) = EX_s(t+\tau)X_s(t),$$

$$EX_c(t+\tau)X_s(t) = -EX_s(t+\tau)X_c(t).$$

виконуються.

Стаціонарні власні комплексні випадкові процеси розглянуто у **підрозділі 3.2**.

Означення 3.6. Кореляційна функція $r(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ стаціонарного власного комплексного випадкового процесу називається стійкою кореляційною функцією, якщо вона може бути представлена у формі

$$r(\tau) = \sigma^2 \exp\left\{-c|\tau|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{\tau}{|\tau|}\omega(\tau, \alpha)\right)\right\},$$

де $\sigma^2, c, \beta, \alpha$ – дійснозначні константи, такі що $\sigma^2 > 0, c > 0, |\beta| \le 1, 0 \le \alpha \le 2$,

$$\omega(\tau, \alpha) = \begin{cases} tg\frac{\pi\alpha}{2},\ 0 \le \alpha \le 2, \alpha \ne 1, \\ \frac{2}{\pi}\log|\tau|,\ \alpha = 1. \end{cases}$$

У **підрозділі 3.3** розглянуто властивості квадратично-гауссових випадкових величин та процесів.

Означення 3.9. Випадковий процес $\eta = \{\eta(t), t \in T\}$ називається квадратично-гауссовим процесом, якщо сім'я випадкових величин

$$\eta = \{\eta(t), t \in T\}$$

утворює простір квадратично-гауссових випадкових величин.

Наслідок 3.1. Нехай припущення теореми 3.2 виконуються. Тоді для

$$u \ge \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} + 1\right)p}\right) {C_p}^{1/p}$$

справедлива наступна нерівність

$$P\left\{\|X(t)\|_{L_p(a,b)} > u\right\} \le 2\sqrt{1 + \frac{u\sqrt{2}}{{C_p}^{1/p}}} \cdot \exp\left\{-\frac{u}{\sqrt{2}{C_p}^{1/p}}\right\}.$$

Оцінки розподілу деяких функцій з модуля стаціонарного власного комплексного випадкового гауссового процесу отримано у **підрозділі 3.4**.

Теорема 3.3. Нехай $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ – гауссовий стаціонарний власний комплексний випадковий процес та

$$|X(t)| = \left(X_c^2(t) + X_s^2(t)\right)^{1/2}.$$

Тоді для

$$u \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} + 1 \right) p} \right) \sigma^2 (b-a)^{1/p}$$

виконується наступна нерівність

$$P\left\{ \left\| X(t)^2 - \sigma^2 \right\|_{L_p([a,b])} > u \right\} \leq P(u),$$

де

$$P(u) = 2\sqrt{1 + \frac{u\sqrt{2}}{(b-a)^{1/p}\sigma^2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{u}{\sqrt{2}(b-a)^{1/p}\sigma^2} \right\}.$$

Теорема 3.4. Нехай $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$ – гауссовий стаціонарний власний комплексний випадковий процес та

$$|X(t)| = \left(X_c^2(t) + X_s^2(t) \right)^{1/2}.$$

Якщо $X(t)$ – сепарабельний процес, то для всіх цілих чисел $M > 1$ та для всіх

$$u > \frac{2\sqrt{2}\sigma^2 M}{\alpha} \left(\max \left(1, \left(\frac{b-a}{2} \right)^{\alpha/2} 2\sqrt{c} \right)^{\frac{1}{M-1}} \right),$$

отримаємо

$$P\left\{ \sup_{a \leq t \leq b} \left| (X(t))^2 - \sigma^2 \right| > x \right\} \leq 4e^{\frac{2(M+1)}{\alpha}} \cdot N(x),$$

де

$$N(x) = \exp\left\{ -\frac{x}{\sqrt{2}\sigma^2} \right\} \left(\frac{\alpha x}{2\sqrt{2}\sigma^2 M} \right)^{\frac{2M}{\alpha}} \left(1 + \frac{\sqrt{2}x}{\sigma^2} \right)^{1/2}.$$

В **підрозділі 3.5** вивчається поведінка модуля стаціонарного власного комплексного випадкового процесу на нескінченності.

Теорема 3.5. Нехай $X = \{X(t), t \in (-\infty, \infty)\}$ – вимірний гауссовий стаціонарний власний комплексний випадковий процес, нехай

$$|X(t)| = \left(X_c^2(t) + X_s^2(t) \right)^{1/2}$$

та $Y(t) = |X(t)|^2 - E(X(t))^2 = |X(t)|^2 - \sigma^2$. Нехай $c(t), t \in R$ – функція

така, що
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |c(t)|^{-p}\, dt < \infty,\ p \geq 1.$$
Тоді для
$$u \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)p}\right) \cdot \sigma^2 \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |c(t)|^{-p} dt\right)^{1/p}$$
виконується
$$P\left\{\left\|\frac{(X(t))^2 - \sigma^2}{c(t)}\right\|_{L_p(-\infty,\infty)} > u\right\} \leq$$
$$\leq 2\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}u}{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |c(t)|^{-p} dt\right)^{1/p} \sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{u}{\sqrt{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |c(t)|^{-p} dt\right)^{1/p} \sigma^2}\right\}.$$

У **четвертому розділі** побудовано моделі, які наближають гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$, що є центрованим стаціонарним процесом, із заданою надійністю, точністю в просторах $C\left([0,T]\right)$ та $L_p\left([0,T]\right)$.

У **підрозділі 4.1** наведено означення гауссового процесу зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ та способи його представлення.

Означення 4.1.[103] Стаціонарний випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ називається процесом зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$, якщо $EX(t) = 0$ та
$$E(X(t+h)\overline{X(t)}) = \sigma^2 \cdot \exp\left\{-ah^2\right\},$$
де $\sigma^2 > 0$, $a > 0$ – деякі константи.

Теорема 4.2. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in [0,T]\}$ – процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$. Тоді цей процес можна записати у вигляді ряду, збіжного у середньоквадратичному

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}(t) \cdot \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k2}(t) \cdot \eta_k,$$

де $E\xi_k = E\eta_k = 0$, $E\xi_k\xi_l = \delta_{kl}$, $E\eta_k\eta_l = \delta_{kl}$, $E\xi_k\eta_l = 0$,

$$a_{k1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u)du,$$

$$a_{k2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \sin tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u)du.$$

У **підрозділі 4.2** побудовано модель стаціонарного гауссового процесу зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ із заданою надійністю та точністю в просторі $C[0, T]$.

Означення 4.3. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in [0, T]\}$ – гауссовий випадковий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$, зображений у вигляді сум рядів, збіжних у середньому квадратичному. Процес

$$X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} a_{k1}(t) \cdot \xi_k + \sum_{k=1}^{N} a_{k2}(t) \cdot \eta_k$$

називається моделлю процесу $X(t)$.

Означення 4.4. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданою надійністю $1 - \alpha, \alpha > 0$ та точністю $\beta > 0$ в просторі $C(T)$, де $T = [0, T]$, якщо виконується нерівність

$$P\left\{\sup_{0 \le t \le T} |X(t) - X_N(t)| > \beta\right\} \le \alpha.$$

Лема 4.1. Нехай $X(t)$ – гауссовий випадковий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$. Якщо $X_N(t)$ – модель цього процесу, тоді має місце така оцінка

$$\left(\sup_{t \in [0,T]} E(X(t) - X_N(t))^2\right)^{1/2} \le B_N,$$

де

$$B_N = \frac{\sigma K}{(\pi a)^{1/4}\sqrt{N+2}} \left(\frac{2\sqrt{2\pi a}}{a} T^2 + 4(2a+1)T + \frac{2\pi a}{a}(2a^2+3a+1) \right).$$

Лема 4.2. Нехай $X(t)$ – гауссовий випадковий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$, $X_N(t)$ – модель цього процесу, де $n \in \mathbb{N}, N > 1, t \in [0,T]$ та нехай

$$Y_N(t) = X(t) - X_N(t).$$

Тоді виконується нерівність

$$\left(\underset{|t-s|\le h}{sup} E\big(Y_N(t) - Y_N(s)\big)^2 \right)^{1/2} \le h \cdot C_N,$$

де

$$C_N = \frac{\sqrt{2}K\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N+2}} \times$$
$$\times \Big(8aT^2 + 2\sqrt{2\pi a}(4a+3)T + 2(1+2a)(5+4a)\Big).$$

Теорема 4.4. Модель $X_N(t)$ наближає сепарабельний гауссовий процес $X(t)$ зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ із надійністю $1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$, та точністю $\beta > 0$ в просторі $C(T)$, де $T = [0,T], T > 0$, якщо $N \in \mathbb{N}$ таке що

$$Z_N(\beta) = 2e \cdot \frac{\beta^{2/\beta}}{B_N^{2/\beta}} \cdot \exp\left\{ -\frac{\beta^2}{2B_N^2} \right\} \times$$
$$\times \left(\left(\frac{TC_N}{2}\right)^{\gamma} \frac{\beta^{1-\gamma}}{1-\gamma} + B_N \right)^{1/\gamma} \le \alpha,$$

$$B_N < \frac{\beta}{\sqrt{2}},$$

де B_N визначено в лемі 4.1, та $0 < \gamma \le 1$.

У **підрозділі 4.3** побудовано модель гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$, що наближає його із заданою надійністю та точністю в просторі $L_p([0,T])$.

Означення 4.5. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1-\alpha, \alpha > 0$ та точністю $\beta > 0$ у просторі $L_p([0,T]), p \geq 1, t \in [0,T]$, якщо

$$P\left\{ \|X(t) - X_N(t)\|_p > \beta \right\} = P\left\{ \Big(\int_0^T |X(t) - X_N(t)|^p dt \Big)^{1/p} > \beta \right\} \leq \alpha.$$

Теорема 4.5. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in [0,T]\}$ – вимірний гауссовий випадковий процес. Тоді для $\varepsilon > C_p^{1/2}$, де $C = \int_0^T \Big(E(X(t))^2 \Big)^{p/2} dt < \infty$, виконується нерівність

$$P\Big\{ \|X(t)\|_p > \varepsilon \Big\} \leq 2 \exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2C^{2/p}} \right\}.$$

Лема 4.3. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in [0,T]\}$ – вимірний гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\Big\{-d|h|^2\Big\}$, $d > 0$. Якщо $X_N(t)$ – модель цього процессу, тоді справедлива наступна оцінка

$$\int_0^T \Big(E\big(X(t) - X_N(t)\big)^2 \Big)^{p/2} dt \leq L_N^{p/2},$$

де

$$L_N = \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)} \Bigg(\frac{8\pi T^{\frac{2(2p+1)}{p}}}{a(2p+1)^{2/p}} + \frac{16\sqrt{2\pi a}(2a+1)}{a} \cdot \frac{T^{\frac{3p+2}{p}}}{\Big(\frac{3p}{2}+1\Big)^{2/p}} +$$
$$+ \Bigg(16(2a+1)^2 + \frac{8\pi}{a}(2a^2+3a+1) \Bigg) \frac{T^{\frac{2(p+1)}{p}}}{(p+1)^{2/p}} +$$
$$+ 8(2a+1)\frac{\sqrt{2\pi a}}{a}(2a^2+3a+1) \frac{T^{\frac{p+2}{p}}}{\Big(\frac{p}{2}+1\Big)^{2/p}} + \frac{2\pi}{a}(2a^2+3a+1)^2 T^{2/p} \Bigg).$$

Теорема 4.6. Нехай $X(t) = \{X_N(t), t \in [0,T]\}$ – вимірний гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\Big\{-d|h|^2\Big\}$, $d > 0$. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ у просторі $L_p([0,T])$ з точністю β і надійністю $1-\alpha, 0 < \alpha < 1$, якщо $N > 0$ таке, що

$$L_N \leq \frac{\beta^2}{p}$$

та

$$L_N \le \frac{\beta^2}{\left(2\left(-\ln\frac{1}{2}\right)\right)},$$

де L_N визначається формулою

$$L_N = \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)}\left(\frac{8\pi T^{\frac{2(2p+1)}{p}}}{a(2p+1)^{2/p}} + \frac{16\sqrt{2\pi a}(2a+1)}{a}\cdot\frac{T^{\frac{3p+2}{p}}}{\left(\frac{3p}{2}+1\right)^{2/p}} + \right.$$
$$+\left(16(2a+1)^2 + \frac{8\pi}{a}(2a^2+3a+1)\right)\frac{T^{\frac{2(p+1)}{p}}}{(p+1)^{2/p}} +$$
$$\left. + 8(2a+1)\frac{\sqrt{2\pi a}}{a}(2a^2+3a+1)\frac{T^{\frac{p+2}{p}}}{\left(\frac{p}{2}+1\right)^{2/p}} + \frac{2\pi}{a}(2a^2+3a+1)^2 T^{2/p}\right).$$

У **п'ятому розділі** запропоновано новий метод побудови довірчого інтервалу для параметра процесу Орнштейна–Уленбека.

У **підрозділі 5.1** побудовано оцінку зверху для ймовірності $P\left\{\frac{1}{T}\nu(t) < \varepsilon\right\}$, а у **підрозділі 5.2** – оцінку зверху для

$$P\left\{\int_0^1 \widetilde{W}^2(s)ds < \frac{\varepsilon}{T}\right\}.$$

Теорема 5.1. Нехай $\xi(t)$ – процес Орнштейна-Уленбека з нульовим середнім, що виходить з нуля: $d\xi(t) = -\theta_0\xi(t)dt + \sigma dW(t), \xi(0) = 0$. Якщо $0 < \theta_0 \le L < +\infty$, то справедлива оцінка

$$P\{|\theta_T - \theta_0|\} > 2\exp\left\{-\frac{\sqrt{T}}{2\sigma^2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}}\right\} + 4\left(\frac{\sigma^2}{\pi^2 T^2(L^2+2\sigma^2)}\right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-T\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}}\right)\right\}(1+o(1)),$$

де $o(1)$ виписується в явному вигляді, $0 < T < +\infty$ – час спостереження за процесом $\xi(t)$.

Шостий розділ присвячений критерію для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією.

Лема 6.1. Нехай $\mathbb{H}$ гіпотеза, яка полягає у тому що кореляційна функція центрованого вимірного стаціонарного гауссового випадкового процесу $X = \{X(t), t \in \mathbb{T} = [0, T + A], 0 < T < \infty, 0 < A < \infty\}$, $t \in \mathbb{R}, EX(t) = 0$ дорівнює $\rho(\tau) = B^2 \exp\{-d|\tau|^\alpha\}$, де $0 < \alpha < 2$, $d > 0$. Нехай корелограма $\hat{\rho}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t+\tau)X(t)dt, 0 \leq \tau \leq A$ є оцінкою кореляційної функції $\rho(\tau)$. Тоді гіпотеза $\mathbb{H}$ приймається для усіх $\varepsilon \geq \left(\dfrac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{(\dfrac{p}{2}+1)p}\right)^p C_p$, якщо

$$P\left\{\int_0^A (\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau))^p d\tau > \varepsilon\right\} \leq g(\varepsilon),$$

де $g(\varepsilon) = 2\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}\sqrt{2}}{C_p^{\frac{1}{p}}}} \exp\left\{\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{\sqrt{2}C_p^{\frac{1}{p}}}\right\}$ та відхиляється у протилежному випадку.

Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику доктору фізико – математичних наук, професору Юрію Васильовичу Козаченку за постійну увагу, підтримку та цінні поради.

Також автор висловлює щиру подяку доктору фізико – математичних наук, професору Олегу Івановичу Клесову за підтримку і допомогу.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наведемо короткий історичний огляд робіт за тематикою дисертаційної роботи.

Спочатку подано результати, що пов'язані з теорією випадкових процесів та дослідженням їх аналітичних властивостей. Наступна частина цього розділу містить огляд публікацій, які присвячені дослідженню процесу Орнштейна-Уленбека, дослідженню властивостей данного процесу та сфері його застосувань. Наостанок, зроблено огляд робіт, які стосуються моделювання випадкових процесів.

Дослідження локальних властивостей випадкових процесів бере свій початок з теореми Колмогорова про вибіркову неперервність з ймовірністю одиниця випадкових процесів, яка була опублікована в [100]. На базі цієї теореми було створено цілий напрям у теорії випадкових процесів. Також в цьому напрямі отримав результати про загальні достатні умови вибіркової неперервності М. Й. Ядренко [49]. В роботах Ю. В. Козаченка та М. Й. Ядренка були отримані умови для різних класів випадкових полів [35, 36].

Велика кількість науковців вивчали властивості розподілів супремумів випадкових процесів, вивчали проблеми існування моментів та експоненціальних моментів супремумів процесів, особливу увагу звернено на оцінки ймовірності великих відхилень $\mathbf{P}\{\sup\limits_{t\in T}|X(t)|>\varepsilon\}$ і т.д. Цим питанням присвячені роботи Х. Крамера і М. Лідбеттера [58, 37], М. Маркуса і Ж. Пізьє [93], М. Лідбеттера, Г. Ліндгрена і Х. Рутсена [88], Р. Адлера [50], М. Леду і М. Талаграна [90], В. В. Булдигіна та Ю. В. Козаченка [55], А. Дембо та

О. Цейтоні [60].

У 60-ті роки XX ст. розпочалось дослідження локальних властивостей гауссових процесів. Зокрема, Ю. К. Бєляєв отримав умови вибіркової неперервності гауссових стаціонарних процесів та відому "альтернативу Бєляєва" (1960, 1961) [5, 53]. Умови неперервності гауссових процесів різними методами та підходами отримали Р. Дадлі [62] та Дж. Дельпорт [59]. Фундаментальні результати щодо властивостей гауссових випадкових процесів отримали Р. Дадлі [63], М. Талагран [102], Р. Адлер [50], М. Леду [89], В. Пітербарг [97].

Оцінкам експоненціальних моментів та оцінкам розподілів супремумів гауссових процесів були присвячені роботи А. В. Скорохода [45], Х. Ферніка [65], М. Ваханія, В. І. Тариєладзе, С. А. Чобаняна [13], М. Леду та М. Талаграна [90], М. Ліфшиця [39], В. Юрінського [105], Х. Ландау [87].

Виникнення нових задач в фінансовій математиці та в дослідженні мереж передачі данних спонукало теоретичне вивчення процесів дробового броунівського руху. Процес дробового броунівського руху вперше розглянуто А. Н. Колмогоровим [67]. Саму назву "дробовий броунівський рух" ввели Б. Мандельброт та Дж. Ван Несс [92] і визначили такий процес, як стохастичний інтеграл відносно стандартного броунівського руху. Дуже часто стохастичні процеси використовуються для вхідних сигналів різних систем. Зокрема, у фінансовій математиці випадкові процеси використовуються для моделювання еволюцій активів, моделювання фінансових ринків цінних паперів, а аналіз телекомунікаційних мереж використовує моделі вхідних потоків, що є випадковими процесами. Важливе значення мають роботи, які були присвячені оцінкам різних параметрів випадкових процесів, зокрема, процесів дробового броунівського руху, наприклад, оцінюванню параметра Хюрста. Цим питанням були присвячені роботи О. О. Курченка [38, 71].

Велике значення в теорії випадкових процесів також має процес Орнштейна-Уленбека, який вперше вводиться у роботі Г. Є. Уленбека та Л. С. Орнштейна [103], як єдиний гауссовий стаціонарний розв'язок стохастичного диференціального рівняння Фоккера-Планка (більш детально, наприклад, у книзі К. В. Гардінера [15]). Процес Орнштейна-Уленбека на відміну від дробового броунівського руху має властивість короткострокової залежності і також широко використовується у фінансовій математиці, зокрема при моделюванні фінансових ринків цінних паперів зі стохастичною волатильністю, наприклад, у роботах Ґ. Бакші, К. Као та З. Чена [51], Ґ. Бакші та З. Чена [52], а також в теорії масового обслуговування, де у роботах Д. Д. Ботвіча і Н. Ґ. Даффілда [54], К. Рена і Г. Кобаяші [98] та ін. отримані асимптотичні оцінки ймовірності переповнення буферу для черг, утворених процесом Орнштейна-Уленбека.

Частина дисертації присвячена моделюванню випадкових процесів. Розробкою теорії моделювання випадкових процесів та полів займалось багато вчених і цій тематиці присвячено велику кількість робіт, серед них роботи С. С. Артем'єва [3], С. М. Єрмакова та Г. О. Михайлова [18], А. С. Шалигіна [48], К. К. Сабельфельда [86], С. М. Пригаріна [43], С. Р. Анварова, С. М. Пригаріна [1], М. П. Бусенко [10], Б. Ріплі [99] та ін.

Широко досліджені методи моделювання гауссових випадкових процесів та полів. В роботі М. Й. Ядренка та Г. Рахімова [44] описується моделювання ізотропних та однорідних випадкових полів на площині. В роботах М. Й. Ядренка та З. О. Вижви [14, 104] вивчалось статистичне моделювання ізотропних випадкових полів на сфері. Традиційними методами моделювання для гауссових випадкових процесів та полів є методи лінійного перетворення, авторегресії та ковзаючого середнього, рандомізації спектру, ковзаючого підсумовування, канонічних представлень та ін. Вони розглянуті в роботах

В. В. Бикова [11], С. М. Єрмакова та Г. О. Михайлова [18], А. С. Шалигіна та Ю. І. Палагіна [48], В. Огороднікова [95], Т. Сана, М. Чайки [101]. Але слід зауважити, що в більшості з цих методів не визначається точність та надійність моделювання.

В роботах І. М. Зелепугіної, Ю. В. Козаченка [19, 20], Ю. В. Козаченка та Л. Ф. Козаченко [24, 25, 26] вивчались методи моделювання, які дозволяють будувати моделі, що наближають гауссовий випадковий процес із наперед заданою точністю та надійністю в певних функціональних просторах. В роботах Ю. В. Козаченка, А. М. Тегзи та Р. Джуліано Антоніні [2] та Ю. В. Козаченка, А. М. Тегзи, Н. В. Трошкі [77] досліджується модель гассового випадкового процесу, що була введена в роботах Г. О. Михайлова [40], і досліджено точність та надійність даної моделі гауссового процесу в деяких функціональних просторах. Методам моделювання субгауссових випадкових процесів та полів із наперед заданою точністю присвячена низка робіт А. О. Пашка [29, 30, 31, 32, 33, 41]. В сумісних роботах Ю. В. Козаченка, О. І. Василик та Т. Соттінена [82, 83] запропоновано алгоритм моделювання φ-субгауссового узальненого дробового броунівського руху $Z^H(t)$. Побудовано модель, що наближає процес $Z^H(t)$ із заданою точністю та надійністю в $C([0, T])$.

Г. О. Михайловим та його учнями розроблено ряд нових напрямків у галузі моделювання випадкових процесів та полів: спектральні моделі гауссових полів, моделі випадкових полів по точкових потоках, теорія збіжності числових моделей випадкових функцій, метод подвійної рандомізації тощо. Для певних методів моделювання випадкових гауссових процесів точність та надійність моделей досліджувалась у роботах Ю. В. Козаченка, Л. Ф. Козаченко, А. О. Пашка та інших авторів.

Оскільки кореляційна функція є однією з найбільш важливих характеристик випадкових процесів, постає питання оцінювання і вигляду цієї функції для випадкового процесу, побудова критеріїв для її ідентинтифікації. Деякі результати щодо властивостей стійкої кореляційної функції представлені в роботі [91].

У другому розділі даної роботи вивчаються дійсні стаціонарні процеси зі стійкою корреляційною функцією, зокрема розподіли деяких функціоналів від цих процесів та деякі їх властивості. Для інших процесів подібні задачі розглядались в роботах [84],[68], [21], [76], [27]. Моделі деяких гауссових стаціонарних процесів зі стійкими кореляційними функціями було побудовано в роботах [73], [96], [74].

Третій розділ присвячено комплексним випадковим процесам, які є одним із найважливіших узагальнень поняття випадкового процесу (див. [56, 94]). Умови існування власних комплексних випадкових процесів описані у [94, 56]. Деякі результати щодо стійкої кореляційної функції та її властивостей представлені в роботі [91].

В четвертому розділі застосовано зображення випадкових процесів у вигляді випадкових рядів з некоррельованими членами, отримане в роботі Ю. В. Козаченко, І. В. Розори, Є. В. Турчина [79] для побудови моделей стохастичних процесів, що наближає процеси із заданою надійністю та точністю в просторах $C([0,T])$ та $L_p([0,T])$. Подібні конструкції були досліджені у книзі Ю. В. Козаченка та ін. [28] у загальному випадку.

У п'ятому розділі використано принцип побудови для параметра процесу Орнштейна-Уленбека довірчого інтервалу з [7, 8], також використано доведення теореми, наведене у роботі Г. Н. Ситої [46]. У цьому розділі отримано більш точну оцінку для параметра Θ_0 процесу Орнштейна-Уленбека, ніж у роботі [47].

У шостому розділі розглядається критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією. Моделі деяких гауссових стаціонарних процесів зі стійкими кореляційними функціями було побудовано в роботах [73], [96]. У роботі [69] було знайдено нові результати, щодо верхніх та нижніх меж для розподілу квадратичних форм гауссових випадкових величин, а також границь таких форм, на основі цих оцінок пропонується критерій для перевірки гіпотези про функцію коваріації $\rho(\tau)$ гауссового випадкового процесу. А у роботі [80] доведено нерівності для розподілів квадратичних форм із квадратично-гауссових випадкових величин та розподілів супремума квадратичних форм із квадратично-гауссових випадкових процесів. Ці нерівності дозволяють дослідити сумісні розподіли оцінок кореляційних функцій гауссових процесів.

Розділ 2

ДІЙСНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ ЗІ СТІЙКОЮ КОРЕЛЯЦІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ

Цей розділ продовжує дослідження з роботи [73], де вивчались комплексні гауссові процеси зі стійкою кореляційною функцією. В цій роботі вивчаються дійсні стаціонарні процеси зі стійкою корреляційною функцією, зокрема розподіли деяких функціоналів від цих процесів та деякі їх властивості. Для інших процесів подібні задачі розглядались в роботах [84],[68], [21], [76], [27]

Моделі деяких гауссових стаціонарних процесів зі стійкою кореляційною функцією було побудовано в роботах [73], [96], [74].

Розділ складається з трьох підрозділів. У першому підрозділі знайдено оцінки розподілу супремуму гауссових стаціонарних процесів зі стійкою кореляційною функцією. У другому підрозділі вивчається поведінка цих процесів на нескінченності. У третьому – досліджуються деякі аналітичні властивості таких процесів. Четвертий підрозділ містить оцінки для розподілу норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою кореляційною функцією.

2.1 Оцінки для розподілу супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими кореляційними функціями

Теорема 2.1. Нехай $T = [a, b]$, $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$, $-\infty < a < b < \infty$ – центрований сепарабельний гауссовий процес та $M = \sup\limits_{t\in T} \left(E|X(t)|^2\right)^{1/2}$. Нехай існує неперервна строго зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h \leq 0\}$ така, що $\sigma(h) > 0$, $h > 0$, $\sigma(0) = 0$ та

$$\sup_{t,s\in[a,b]} \left(E|X(t) - X(s)|^2\right)^{1/2} < \sigma(h),$$

також існує невід'ємна неспадна функція $r(u), u \geq 1$, така що функція $r(e^y), y \geq 0$ - опукла та виконується умова: для деякого $v > 0$ (а тому і для будь-якого $0 < v < \infty$)

$$I_r(v) = \int_0^v r\big(\frac{b-a}{2\cdot\sigma^{(-1)}(v)} + 1\big)dv < \infty,$$

де $\sigma^{(-1)}$- обернена до $\sigma(v)$ функція. Тоді для будь-яких $\theta \in (0,1)$ та $\lambda > 0$ має місце нерівність:

$$E\exp(\lambda \sup_{t,s\in[a,b]} |X(t)|) \leq 2D(\lambda,\theta), \tag{2.1}$$

де

$$D(\lambda,\theta) = \exp\left\{\frac{\lambda^2 M^2}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot r^{(-1)}\left\{\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right\},$$

$r^{(-1)}(v)$ – обернена до $r(v)$ функція.

Доведення. Ця теорема випливає з теореми 3.4.4 книги [55], див. також роботу [72] та доведення в роботі [61]. □

Наслідок 2.1. За умов теореми 2.1 при будь-якому $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2M^2}\right\} \cdot r^{(-1)}\left\{\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right\} \tag{2.2}$$

Доведення. З нерівності Чебишева та (2.1) випливає, що при $\lambda > 0$:

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \frac{E\left\{\lambda \sup X(t)\right\}}{\exp\left\{\lambda\varepsilon\right\}} \leq$$

$$\leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 M^2}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\lambda\varepsilon\right\} \cdot r^{(-1)}\left\{\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right\} \tag{2.3}$$

Нерівність (2.2) випливає з нерівності (2.3), якщо покласти

$$\lambda = \frac{\varepsilon(1-\theta)^2}{M^2}$$

(точка в якій права частина в (2.3) набуває мінімуму по λ). □

Означення 2.1. Дійсний стаціонарний гауссовий процес $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$, $0 < \alpha \leq 2$, такий що $EX_\alpha(t) = 0$, $\rho_\alpha(h) := EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 \exp\{-d|h|^\alpha\}$, $\alpha > 0, d > 0$ називається дійсним гауссовим стаціонарним процесом зі стійкою кореляційною функцією.

Теорема 2.2. Нехай X_α – дійсний сепарабельний гауссовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді для будь-яких $-\infty < a < b < +\infty$, $0 < \theta < 1$, $\beta < \min\big(1, \dfrac{\alpha}{2}\big)$, $\epsilon > 0$ має місце нерівність:

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2}\right\} \cdot 2^{1/\beta-1}\left(\frac{(b-a)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)^{1/\beta}}+1\right)$$

Доведення. Теорема випливає з наслідку 2.1. Оцінимо за умов теореми $r^{(-1)}\left\{\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right\}$. В нашому випадку

$$E|X_\alpha(t+h) - X_\alpha(t)|^2 = 2\big(\rho_\alpha(0) - \rho_\alpha(h)\big) = 2B^2\big(1 - \exp\{-d|h|^\alpha\}\big).$$

Тобто $\sigma(h) = \sqrt{2}B\big(1 - \exp\{-d|h|^\alpha\}\big)^{1/2}$. Зауважимо, що $\sigma(h) < \sqrt{2}B$. Отже, $\sigma(h)^{(-1)}(h)$ визначена при $0 \leq h < \sqrt{2}B$. Оскільки $\sigma(h) \leq \sqrt{2}B\big(dh^\alpha\big)^{1/2}$, тоді при $0 < s < B\sqrt{2}$:

$$\sigma^{(-1)}(s) \geq \hat{\sigma}^{(-1)}(s) = \Big(\frac{s}{B\sqrt{2d}}\Big)^{2/\alpha}.$$

Отже,

$$I_r(v) \leq \int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} r\Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}+1\Big)ds.$$

Покладемо $r(u) = u^\beta - 1$ при $u \geq 1$, де $0 < \beta < \min(\alpha/2, 1)$. Тоді

$$I_r(v) \leq \int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} \left(\Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}+1\Big)^\beta - 1\right)ds \leq$$

$$\leq \int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} \Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^\beta ds =$$

$$= \Big((b-a)\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^\beta \cdot \Big(\min(v, B\sqrt{2})\Big)^{\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)}.$$

Тому

$$I_r(\theta B) \leq \Big((b-a)\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^{\beta} \frac{1}{\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)} \big(\theta B\big)^{1-\frac{2\beta}{\alpha}}.$$

Оскільки $r^{(-1)}(u) = (u+1)^{1/\beta}$, тоді

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_r(\theta B)}{\theta B}\Big) \leq \Big((b-a)^{\beta}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2\beta/\alpha} \frac{1}{\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)} (\theta B)^{-\frac{2\beta}{\alpha}} + 1\Big)^{1/\beta}. \tag{2.4}$$

Оскільки при $z \geq 1$ виконується нерівність $(b+a)^z \geq 2^{z-1}\big(a^z + b^z\big)$, тоді

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_r(\theta B)}{\theta B}\Big) \leq 2^{1/\beta - 1}\left(\frac{(b-a)\big(\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}}\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)^{-1/\beta} + 1\right) \tag{2.5}$$

Тепер твердження теореми випливає з нерівностей (2.2) та (2.3). □

Наслідок 2.2. Нехай виконуються умови теореми 2.2, тоді при $\varepsilon > \sqrt{2}B$ виконується нерівність

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X_\alpha(t)| > \varepsilon\right\} \leq$$

$$\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2}\right\} \cdot e \cdot 2^{1/\beta-1}\left(\frac{(b-a)\big(\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}}{\Big(1-\big(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)^{-1/\beta} + 1\right).$$

Доведення. Нерівність (2.5) випливає з нерівності (2.4), якщо покласти

$$\big(1-\theta\big)^2 = \Big(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\Big)$$

при $\varepsilon > \sqrt{2}B$, тобто при $\theta = 1 - \Big(1-\frac{2\beta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{1/2}$. □

Наслідок 2.3. Нехай виконуються умови теореми 2.2, тоді при $\varepsilon > \sqrt{2}B$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X_\alpha(t)| > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2}\right\} \times$$

$$\times 2^{4/\alpha-1}\Big(\frac{(b-a)\cdot d^{1/\alpha}\cdot 2^{5/\alpha}\cdot \varepsilon^{4/\alpha}}{B^{4/\alpha}} + 1\Big) \tag{2.6}$$

Доведення. При $0 \le x \le 1$ має місце нерівність

$$1-(1-x)^{1/2} = \frac{1-(1-x)}{1+(1-x)^{1/2}} \ge \frac{x}{2}.$$

Отже, $\left(1-\left(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}\right)^{2/\alpha} \ge \left(\frac{B}{\varepsilon}\right)^{4/\alpha}$. Тепер нерівність (2.6) випливає з нерівності (2.5), якщо покласти $\beta = \frac{\alpha}{4}$. □

2.2 Поведінка дійсного гауссового стаціонарного процесу $X_\alpha(t)$ зі стійкими кореляційними функціями при прямуванні t до нескінченності

Теорема 2.3. Нехай $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$ – дійсний гауссовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією, $C = \{C(t), t \ge 0\}$ – монотонно зростаюча функція, така що $C(t) \ge 1, t \ge 0$ та $C(t) \to \infty$ при $t \to \infty$; $b_0, b_1, b_2, ..., b_k, ...,$ – така послідовність, що $b_0 = 0, b_k < b_{k+1}$, та $b_k \to \infty$ при $k \to \infty$, $r_0, r_1, r_2, ..., r_k, ...$ – така послідовність, що $r_k > 1$ та $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} = 1$, $C_k = C(b_k), k = 0, 1, 2...$ і виконуються умови:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2} < \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma < \infty,$$

де γ – деяке число, що $0 < \gamma < 1$. Тоді при будь-якому $0 < \theta < 1$, $\varepsilon > 0$ має місце нерівність:

$$P\left\{\sup_{t\ge 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \le 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2} \cdot \gamma^\gamma} \cdot (\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma\right\}. \qquad (2.7)$$

Доведення. Нехай $\lambda > 0$, $S(\lambda) := E \exp\left\{\lambda \sup_{t\ge 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\right\}$, тоді з нерівності Гельдера отримаємо, що

$$S(\lambda) \leq E\exp\left\{\lambda \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\right\} \leq$$
$$\leq \prod_{k=0}^{\infty}\left(E\exp\left\{\lambda r_k \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\Big)\right\}\right)^{1/r_k} \leq$$
$$\leq \prod_{k=0}^{\infty}\left(E\exp\left\{\frac{\lambda r_k}{C_k} \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} |X_\alpha(t)|\right\}\right)^{1/r_k}.$$

З нерівності (2.1) випливає, що

$$E\exp\left\{\frac{\lambda r_k}{C_k} \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} |X_\alpha(t)|\right\} \leq 2D(\lambda,\theta) \leq$$
$$\leq \exp\left\{\Big(\frac{\lambda r_k}{C_k}\Big)^2 \frac{B^2}{2(1-\theta)^2}\right\} r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r_k}(\theta B)}{\theta B}\Big),$$

де

$$I_{r_k}(v) = \int_0^v r\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)}{2\sigma^{(-1)}(v)}+1\Big)dv,$$

θ – будь-яке число, що $0 < \theta < 1$, $r(u), u \geq 1$ – монотонно зростаюча функція, така що при $u > 0$ функція $r(e^u)$ - опукла. Зауважимо, що $\dfrac{\alpha}{2} \leq 1$. Покладемо $r(u) = u^{\frac{\alpha}{4}-1}$ при $u \geq 1$. Тоді з (2.5) випливає, що

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r_k}(\theta B}{\theta B}\Big) \leq 2^{4/\alpha-1}\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)\sqrt{2d}^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}} \cdot 2^{4/\alpha}+1\Big).$$

З нерівності (2.1) отримаємо, що

$$S(\lambda) \leq \prod_{k=0}^{\infty}\left(\exp\left\{\Big(\frac{\lambda\cdot r_k}{C_k}\Big)^2 \cdot \frac{B^2}{2(1-\theta)^2}\right\}\cdot 2^{\frac{4}{\alpha}-1}\times\right.$$
$$\left.\times\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)\sqrt{d^{2/\alpha}}}{\theta^{2/\alpha}}2^{4/\alpha}+1\Big)\right)^{1/r_k} = \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\ln\Big(2^{4/\alpha-1}\Big((b_{k+1}-b_k)\cdot\frac{\sqrt{2d^{2/\alpha}}\cdot 2^{4/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}}+1\Big)\Big)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} \ln(2^{4/\alpha - 1})\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} \ln\Big(1 + \frac{\sqrt{2d^{2/\alpha}}}{\theta^{2/\alpha}}(b_{k+1} - b_k) \cdot 2^{4/\alpha}\Big)\right\}. \tag{2.8}$$

Оскільки, при $0 < \gamma < 1$, $x > 0$ виконується нерівність

$$\ln(1+x) \le \frac{1}{\gamma}\ln(1+x)^{\gamma} \le \frac{1}{\gamma}\ln(1+x^{\gamma}) \le \frac{x^{\gamma}}{\gamma}$$

то з (2.8) випливає, що

$$S(\lambda) \le 2^{4/\alpha - 1} \cdot \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4/\alpha}}{r_k \gamma} \left(\frac{(\sqrt{2d})^{2/\alpha}(b_{k+1} - b_k)}{\theta^{2/\alpha}}\right)^{\gamma}\right\}.$$

Отже,

$$S(\lambda) \le 2^{4/\alpha - 1} \cdot \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2}{2(1-\theta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{w(\gamma)}{\theta^{\gamma/2}}\right\},$$

де

$$w(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k \gamma} \Big((b_{k+1} - b_k)(\sqrt{2d})^{\alpha/2} \cdot 2^{4/\alpha}\Big)^{\gamma}.$$

Тоді з нерівності Чебишева випливає, що при $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$

$$P\left\{\sup_{t \ge 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \le$$
$$\le 2^{4/\alpha - 1} \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\{-\lambda\varepsilon\} \cdot \exp\left\{\frac{w(\gamma)}{\theta^{\gamma/2}}\right\}. \tag{2.9}$$

Якщо в нерівність (2.9) підставити

$$\lambda = \frac{\varepsilon(1-\theta)^2}{B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}},$$

то отримаємо твердження теореми.

Наслідок 2.4. Нехай виконуються умови теореми 2.3, тоді при

$$\varepsilon \ \ge \ \sqrt{2} B \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\Big)^{1/2}$$

має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t\geq 0}\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}>\varepsilon\right\}\leq$$
$$\leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\}\cdot 2^{4/\alpha-1}e\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{d^{\gamma/2}\cdot 2^{6\gamma/\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^{\gamma}}{\left(1-\left(1-2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\right)^{1/2}\right)^{\gamma/2}}\right\}. \tag{2.10}$$

Доведення. Нерівність (2.10) випливає з нерівності (2.7), якщо покласти

$$\Big(1-\theta\Big)^2=\Big(1-\frac{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}\Big),$$

тобто $\theta=1-\Big(1-\frac{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}\Big)^{1/2}$. □

Наслідок 2.5. Нехай виконуються умови теореми 2.3, тоді при

$$\varepsilon\ >\ \sqrt{2}B\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\Big)^{1/2}$$

має місце така нерівність

$$P\left\{\sup_{t\geq 0}\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}>\varepsilon\right\}\ \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\}\cdot 2^{4/\alpha-1}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{d^{\gamma/2}\cdot 2^{3\gamma/\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k}\big(b_{k+1}-b_k\big)^{\gamma}\varepsilon^{2/\alpha}}{\Big(B\big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\right\} \tag{2.11}$$

Нерівність (2.11) випливає з нерівності (2.10), оскільки, як і в наслідку 2.3

$$\left(1-\frac{2B^2}{\epsilon^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\right)\geq\frac{B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}.$$

□

Теорема 2.4. Нехай виконуються умови теореми 2.3, тоді з ймовірностю одиниця для всіх $t>0$ виконується умова

$$|X_\alpha(t)|<\xi_\alpha\cdot C(t),$$

де ξ_α – така випадкова величина, що при будь-якому $0 < \theta < 1$

$$P\left\{\xi_\alpha > \varepsilon\right\} \le 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2}\cdot\gamma^\gamma}\cdot(\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}}\cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma\right\},$$

або при $\varepsilon \ge \sqrt{2}B\Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\Big)^{1/2}$ має місце нерівність

$$P\left\{\xi_\alpha > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\}\cdot 2^{4/\alpha-1}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{d^{\gamma/2}\cdot 2^{3\gamma/\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k}\big(b_{k+1}-b_k\big)^\gamma\varepsilon^{2/\alpha}}{\Big(B\big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\right\}.$$

Доведення. Теорема випливає з теореми 2.3 та нерівностей (2.7) і (2.3), оскільки при всіх $t > 0$ з імовірністю одиниця

$$\frac{X_\alpha(t)}{C(t)} \le \sup_{t\ge 0}\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} < \infty.$$

□

Приклад 2.1. Якщо в умовах теореми 2.3 покласти $b_k = e^k$, $k = 1, 2, ...$ та $\frac{1}{r_k} = e^{-k}\cdot\frac{e}{(e-1)}$, то умови теореми виконуються, коли збігається ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{c(e^k)^2}$, а цей ряд збігається, коли $C(t) = t^{1/2+\beta}, \beta > 0$, або $C(t) = t^{1/2}(\ln t)^{1/2+\delta}$ при $\delta > 0$.

При заданих b_k та e^k ряд збігається при будь-яких $\gamma < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\frac{e}{(e-1)}(e^{k+1}-e^k)^\gamma =$$

$$= (e-1)^{\gamma-1}\cdot e\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\cdot e^{\gamma k} < \infty.$$

2.3 Оцінки для розподілу норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою кореляційною функцією

Теорема 2.5. Нехай $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ – вимірний простір, $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ – вимірний гауссів випадковий процес. Нехай також існує інтеграл Лебега

$$\int_{\mathbb{T}} \left(E|X(t)|^2\right)^{p/2} d\mu(t), p \geq 1.$$

Тоді з ймовірністю 1 існує $\int_{\mathbb{T}} E|X(t)|^p d\mu(t)$ та для всіх ε, таких що $\varepsilon > C \cdot p^{p/2}$, де $c = \int_{\mathbb{T}} \left(E|X(t)|^2\right)^{p/2} d\mu(t)$ має місце нерівність

$$P\left\{\left(\int_{\mathbb{T}} |X(t)|^p d\mu(t)\right)^{1/p} > \varepsilon\right\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 (1-\theta)^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2} \cdot \gamma^\gamma} \cdot (\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} (b_{k+1} - b_k)^\gamma\right\}.$$

Доведення. Ця теорема є наслідком Теореми 2.1 з роботи [70]. □

Теорема 2.6. Нехай $X_\alpha(t)$, $t \in [a, b]$ – вимірний дійсний гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді для $\varepsilon > \hat{c}^{1/p}\sqrt{p}$,
де $\hat{c} = B^p(b-a)$ має місце нерівність

$$P\left\{\left(\int_a^b |X_\alpha(t)|^p\right)^{1/p} dt > \varepsilon\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\hat{c}^{2/p}}\right\}.$$

Доведення. Ця теорема випливає з попередньої теореми. Тут простір $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ – це інтервал $[a, b]$ з борелівською σ-алгеброю та мірою Лебега
$E|X(t)|^2 = B^2$. □

Теорема 2.7. Нехай $X_\alpha(t)$, $t \in \mathbf{R}$ – вимірний дійсний гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією, $C(t) > 1$ деяка функція, така що

$$\int_0^\infty \frac{1}{(C(t))^p} dt < \infty.$$

Тоді для $\varepsilon > \hat{c}^{1/p} \cdot \sqrt{p}$, де $\hat{c} = B^p \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{C(t)} dt$ виконується нерівність:

$$P\left\{ \left(\int_0^\infty |X_\alpha|(t)^p \right)^{1/p} > \varepsilon \right\}.$$

Доведення. Ця теорема також випливає з теореми 2.5. Тут простір $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ – це $[0,\infty)$ з борелівською σ-алгеброю, процес $X(t)$ – це $\dfrac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}$:

$$\int_0^\infty \Big(E|X(t)|^2 \Big)^{p/2} dt = B \int_0^\infty \frac{1}{\Big(C(t)\Big)^p} dt.$$

□

Прикладом $C(t)$ може бути функція така, що при $t > 1$ $C(t) = t^{1/p+\varepsilon}$, де $\varepsilon > 0$.

2.4 Аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями

Наступна теорема є наслідком теореми 2.2.9 з книги [[84], с.79].

Теорема 2.8. Нехай $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$ – сепарабельний гауссовий процес, такий, що існує монотонно зростаюча неперервна функція $\sigma(h), h \geq 0$, така що $\sigma(0) = 0$, для якої виконується

$$\sup_{|t-s| \leq h} \Big(E\big(X(t) - X(s)\big)^2 \Big)^{1/2} \leq \sigma(h)$$

та збігається інтеграл

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \ln \big(\frac{b-a}{2\sigma^{-(1)}(u)} \big)^{1/2} du \leq \infty.$$

Тоді випадковий процес $X(t)$, $t \in [a,b]$ є вибірково непервний з імовірністю одиниця та для довільних $\varepsilon > 0$, $0 < p < 1$, $x > B(p,\varepsilon)$, де

$$B(p,\varepsilon) = \frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \Big(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)+1} \Big) \right)^{1/2} du$$

має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{|t-s|\le\varepsilon}|X(t)-X(s)|>x\right\}\le 2exp\left\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-B(p,\varepsilon)}{A(p,\varepsilon)}\Big)^2\right\},$$

де $A(p,\varepsilon)=\dfrac{\sigma(\varepsilon)(3-p)}{(1-p)^2}$.

З теореми 2.8 випливає наступна теорема

Теорема 2.9. Нехай $X_\alpha=\{X_\alpha(t),t\in[a,b]\}$ – сепарабельний центрований гауссовий випадковий процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді при всіх $0<\alpha<2$ процес $X_\alpha(t)$, $t\in[a,b]$ – вибірково непервний з імовірністю одиниця та для довільних $\varepsilon>0$, $0<p<1$, $0<\beta<\min(1,\alpha)$, $x>\hat{B}(p,\varepsilon)$, де

$$\hat{B}(p,\varepsilon)=\frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2}\cdot\frac{1}{2^{(1+\beta)/2}}(b-a)^{\beta/2}(\sqrt{2d})^{\beta/\alpha}\cdot B^{\beta/\alpha}\times$$
$$\times\frac{1}{(1-\beta/\alpha)}\Big(\sqrt{2d}B\varepsilon^{\alpha/2}\Big)^{1-\beta/\alpha},$$

має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{|t-s|\le\varepsilon}|X(t)-X(s)|>x\right\}\le 2\exp\left\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\hat{B}(p,\varepsilon)}{A(p,\varepsilon)}\Big)^2\right\} \tag{2.12}$$

де $A(p,\varepsilon)=\dfrac{(3-p)\sqrt{2d}B\varepsilon^{\alpha/2}}{(1-p)^2}$.

Доведення. Покладемо $\sigma(h)=\sqrt{2d}B|h|^{\alpha/2}$, тоді $\sigma^{(-1)}(u)=\Big(\dfrac{u}{\sqrt{2d}B}\Big)^{2/\alpha}$ та

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\Big(\frac{(b-a)\Big(\sqrt{2d}B\Big)^{2/\alpha}}{2u^{2/\alpha}}+1\Big)\right)^{1/2}du\le$$
$$\le\frac{1}{\sqrt{2}\beta^{1/2}}(b-a)^{\beta/2}(\sqrt{2d})^{\beta/\alpha}B^{\beta/\alpha}\frac{1}{2^{\beta/\alpha}}\int_0^{\sigma(\varepsilon)}\frac{1}{u^{\beta/\alpha}}du=$$
$$=\frac{1}{2^{(1+\beta/2)}}(b-a)^{\beta/2}(\sqrt{2}d)^{\beta/\alpha}B^{\beta/\alpha}\frac{1}{(1-\frac{\beta}{\alpha})}\Big(\sqrt{2d}B\varepsilon^{\alpha/2}\Big)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

□

Зауваження 2.1. Щоб знайти більш точну оцінку, треба знайти мінімум за β правої частини в нерівності (2.12).

Означення 2.2. Випадковий процес $X(t)$, $t \in [a, b]$ називають диференційованим в середньоквадратичному, якщо існує границя (в середньоквадратичному)

$$l.i.m._{h\to 0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h} = X'(t).$$

Якщо існує $X'(t)$, то її називають середньоквадратичною похідною процесу $X(t)$.

Теорема 2.10. [17][с. 300] Для того, щоб у процесу $X(t)$, $EX(t) = 0$ існувала середньоквадратична похідна $X'(t)$ необхідно та достатньо, щоб існувала границя

$$\lim_{t'\to t, t''\to t}\frac{1}{(t'-t)(t''-t)}\Big(B(t',t'')-B(t',t)-B(t'',t)+B(t,t)\Big),$$

де $B(t,s) = EX(t)X(s)$. При цьому, якщо існує похідна $\dfrac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t\partial s}$, тоді $EX'(t)X'(s) = \dfrac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t\partial s}$.

З цієї теореми випливає наступна теорема:

Теорема 2.11. Нехай $X_\alpha(t)$, $t \in [a, b]$ – стаціонарний процес зі стійкою корреляційною функцією (не обов'язково гауссовою). Тоді при $0 < \alpha < 2$ середньоквадратичні похідні не існують, а при $\alpha = 2$ похідна існує та

$$EX_2'(t)X_2'(s) = B^2\exp\{-d(t-s)\}\cdot\Big(4d^2\cdot(t-s)^2+2d\Big),$$

тобто $X_2'(t)$ стаціонарний процес з кореляційною функцією

$$EX_2'(t+\tau)X_2'(t) = B^2\exp\Big\{-d|\tau|^2\Big\}\cdot\Big(4d^2\cdot\tau^2+2d\Big). \qquad (2.13)$$

Доведення. В нашому випадку

$$\frac{1}{(t'-t)(t''-t)}\Big(B(t',t'')-B(t',t)-B(t'',t)+B(t,t)\Big)=$$
$$=\frac{\Big(4d^2\cdot(t''-t')^2+2d\Big)}{(t'-t)(t''-t)}\Big(B^2\exp\big\{-d|t'-t''|^{\alpha}\big\}-B^2\exp\big\{-d|t'-t|^{\alpha}\big\}-$$
$$-B^2\exp\big\{-d|t''-t|^{\alpha}\big\}+B^2\Big). \tag{2.14}$$

Зробивши заміни $s_1=d^{1/\alpha}(t'-t)$ та $s_2=d^{1/\alpha}(t''-t)$, бачимо, що необхідно дослідити при $s_1,s_2\to 0$ поведінку виразу

$$P=\frac{e^{-|s_1-s_2|^{\alpha}}-e^{-|s_1|^{\alpha}}-e^{-|s_2|^{\alpha}}+1}{s_1s_2}.$$

У випадку $\alpha=2$ позначимо

$$Q=\frac{(1-e^{-s_1^2})(1-e^{-s_2^2})}{s_1s_2}.$$

Бачимо, що

$$P-Q=\frac{e^{-(s_1-s_2)^2}-e^{-s_1^2-s_2^2}}{s_1s_2}.$$

Тому

$$P-Q=\frac{e^{-s_1^2-s_2^2}\cdot(e^{2s_1s_2}-1)}{s_1s_2}$$

має границю при $s_1,s_2\to 0$ за правилом Лопіталя. Очевидно, що Q має границю за правилом Лопіталя, тому й P має границю, що і треба було довести у випадку $\alpha=2$.

Якщо ж $0<\alpha<2$, то за формулою Тейлора з залишковим членом у формі Пеано при $s_1=s_2=s$

$$P=\frac{2(1-e^{-|s|^{\alpha}})}{s^2}=2\cdot\frac{|s|^{\alpha}+o(|s|^{\alpha})}{s^2}\to\infty,\qquad s\to 0.$$

Це і доводить твердження у випадку $0<\alpha<2$. □

Зауваження 2.2. Коли $X_\alpha(t)$ – гауссовий процес, тоді $X'_\alpha(t)$ також гауссовий процес.

Тепер покажемо, що середньоквадратична похідна від $X_\alpha(t)$ є звичайною неперервною похідною з імовірністю одиниця, якщо $X_\alpha(t)$ – гауссовий та сепарабельний.

Теорема 2.12. [57] Нехай $X(t), t \in [a, b]$ – неперервний з імовірністю одиниця випадковий процес з $EX(t) = 0$, $EX(t)X(s) = B(t, s)$ та нехай існує неперервна з імовірністю одиниця середньоквадратична похідна процесу $X(t)$, така що $EX'(t)X'(s) = \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s}$, тоді з імовірністю одиниця $X'(t)$ є звичайною похідною процесу $X(t)$.

Наслідок 2.6. Для процесу $X_2(t)$ існує вибірково неперервна похідна $X_2'(t)$ з кореляційною функцією (2.13) та $X_2'(t)$ – гауссовий процес.

Доведення. Щоб довести твердження наслідку досить довести, що процес $X_2'(t)$ вибірково неперервний з імовірністю одиниця. Легко побачити, що

$$E\Big(X_2'(t) - X_2'(s)\Big)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= 4B^2 d - 4B^2 \exp\{-d|\tau|^\alpha\}(2d\tau^2 + d) = \\
&= 4B^2 d\Big(1 - \exp\{-d|\tau|^\alpha\}\Big)(2d\tau^2 + d) = \\
&= 4B^2 d\Big(1 - 2d\tau^2 \cdot exp\{-d|\tau|^\alpha\}\Big) + \Big(1 - \exp\{-d|\tau|^\alpha\}\Big) \geq \\
&\geq 4B^2 d\Big(2d^2\tau^4 + d\tau^2\Big) = 4B^2 d\Big(2d^2\tau^2 + d\Big) \cdot \tau^2 \geq Z\tau^2,
\end{aligned}$$

де $Z = 4B^2 d\Big(2d^2\tau^2 + d\Big)$ така константа, що $|\tau| < s$. Тобто $\sigma(\tau) = \sqrt{Z}\tau$, далі доведення теореми аналогічне доведенню теореми 2.9. □

2.5 Висновки до другого розділу

У розділі 2 було знайдено оцінки для розподілу супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими кореляційними функціями. Описано поведінку дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкими кореляційними функціями $X_\alpha(t)$ при прямуванні t до нескінченності. Також знайдено оцінки для розподілу оцінки в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою кореляційною функцією та описано аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями.

Розділ 3

ВЛАСНІ КОМПЛЕКСНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

У цьому розділі йдеться про комплексні випадкові процеси, які є одним із найважливіших узагальнень поняття випадкового процесу (див. [56, 94]). Комплексні випадкові процеси особливо актуальні, коли досліджуються вузькосмугові процеси. Ці процеси використовуються як моделі складних амплітуд квазігармонічних коливань або хвиль у радіофізиці та оптиці [4]. У цьому розділі представлено результати дослідження властивостей комплекних випадкових процесів, які корисні при розв'язанні задач у наведених вище галузях. Умови існування власних комплексних випадкових процесів отримані у [94, 56]. У цьому розділі досліджено стаціонарні власні комплексні випадкові процеси, стаціонарні власні комплексні випадкові процеси зі стійкою кореляційною функцією. Деякі результати щодо властивостей стійкої кореляційної функції містяться в роботі [91]. У цьому розділі також одержано деякі властивості квадратично гауссових випадкових величин та процесів (додаткові результати можна знайти, наприклад, в роботах [55, 76, 80]). Також отримано оцінки розподілу функціоналів від модуля стаціонарних власних комплексних випадкових гауссівських процесів (для ознайомлення з додатковими результатами дивіться, наприклад, [78, 85, 96]). Доведено теореми, які описують поведінку модуля стаціонарного власного комплексного випадкового процесу на нескінченності.

У підрозділі 3.2 наведено основні визначення, пов'язані з комплексними випадковими процесами. Стаціонарні власні комплексні випадкові процеси досліджено у підрозділі 3.3. У підрозділі 3.4 розглянуто властивості квадратичних гауссових випадкових величин та процесів. Підрозділ 3.5 містить оцінки розподілу деяких функцій від модуля стаціонарного власного комплексного випадкового гауссового процесу. У підрозділі 3.6 досліджується поведінка модуля стаціонарного власного комплексного випадкового процесу на нескінченності.

3.1 Власні комплексні випадкові процеси

Означення 3.1. Випадковий процес вигляду

$$X(t) = X_c(t) + iX_s(t), t \in \mathbb{R},$$

де $X_c(t)$ та $X_s(t)$ є дійснозначними випадковими процесами (c – косинус, s – синус), називається комплексним випадковим процесом (див. книгу [56] та роботу [94]).

Зауваження 3.1. У цьому розділі розглядаються центровані випадкові процеси, тобто

$$EX(t) = EX_c(t) = EX_s(t) = 0.$$

Означення 3.2. Функція

$$\begin{aligned} r(\tau, t) &= EX(t+\tau)\overline{X}(t) = \\ &= EX_c(t+\tau)X_c(t) + EX_s(t+\tau)X_s(t) + \\ &\quad + i\left(EX_s(t+\tau)X_c(t) - EX_c(t+\tau)X_s(t)\right) \end{aligned}$$

називається кореляційною функцією процесу $X(t)$.

Функція

$$\begin{aligned} \widehat{r}(\tau, t) &= EX(t+\tau)X(t) = \\ &= EX_c(t+\tau)X_c(t) - EX_s(t+\tau)X_s(t) + \\ &\quad + i\left(EX_c(t+\tau)X_s(t) + EX_s(t+\tau)X_c(t)\right) \end{aligned}$$

називається псевдокореляційною функцією процесу $X(t)$.

Означення 3.3. Комплексний випадковий процес $X(t)$ називається власним комплексним випадковим процесом, якщо псевдокореляційна функція цього процесу дорівнює нулю, $EX(t+\tau)X(t) = 0$, тобто коли умови

$$EX_c(t+\tau)X_c(t) = EX_s(t+\tau)X_s(t), \tag{3.1}$$

$$EX_c(t+\tau)X_s(t) = -EX_s(t+\tau)X_c(t). \tag{3.2}$$

виконуються.

Зауваження 3.2. Умови, за яких існують власні комплексні випадкові процеси, отримані в книзі [56] та роботі [94].

Означення 3.4. [94] Власний комплексний випадковий процес називається стаціонарним (у широкому сенсі), якщо для всіх $\tau, t \in \mathbb{R}$ виконується наступне співвідношення

$$r(\tau, t) = EX(t+\tau)\overline{X}(t) = r(\tau).$$

Зауваження 3.3. У випадку, коли власний комплексний випадковий процес $X(t)$ є стаціонарним, можна отримати

$$EX_c(t+\tau)X_c(t) = EX_s(t+\tau)X_s(t) = \frac{1}{2}\operatorname{Re} r(\tau), \tag{3.3}$$

$$EX_c(t+\tau)X_s(t) = \frac{1}{2}\operatorname{Im} r(\tau). \tag{3.4}$$

Означення 3.5. Комплексний випадковий процес

$$X(t) = X_c(t) + iX_s(t)$$

називається гауссовим, якщо дійснозначні випадкові процеси $X_c(t)$ та $X_s(t)$ є також гауссовими процесами.

3.2 Стаціонарні власні комплексні випадкові процеси зі стійкими кореляційними функціями

Означення 3.6. Кореляційна функція $r(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ стаціонарного власного комплексного випадкового процесу називається стійкою кореляційною функцією, якщо вона може бути представлена у формі

$$r(\tau) = \sigma^2 \exp\left\{-c|\tau|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{\tau}{|\tau|}\omega\left(\tau, \alpha\right)\right)\right\}, \tag{3.5}$$

де $\sigma^2, c, \beta, \alpha$ дійснозначні константи, такі що $\sigma^2 > 0, c > 0, |\beta| \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 2$,

$$\omega\left(\tau, \alpha\right) = \begin{cases} tg\frac{\pi\alpha}{2},\ 0 \leq \alpha \leq 2, \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\log|\tau|\,,\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Зауваження 3.4. Функція $r(\tau)$ невід'ємно визначена, тому що $r(\tau)$ є характеристичною функцією стійкої випадкової величини $\xi, E\xi = 0$, у випадку, коли $\sigma^2 = 1$ ([91, p.169]).

Означення 3.7. Стаціонарний власний комплексний випадковий процес називається власним стаціонарним випадковим комплексним процесом зі стійкою кореляційною функцією, якщо

$$EX(t+\tau)\overline{X}(t) = r(\tau),$$

де функція $r(\tau)$ задається формулою (3.5).

Зауваження 3.5. Для стаціонарного власного комплексного випадкового процесу $X(t) = X_c(t) + iX_s(t)$, $EX(t) = 0$, зі стійкою кореляційною функцією виконуються наступні умови

$$\begin{aligned} EX_c(t+\tau)X_c(t) &= \frac{1}{2}\operatorname{Re} r(\tau) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\exp\left\{-c|\tau|^\alpha\right\}\cos\left(c|\tau|^\alpha \beta \frac{\tau}{|\tau|}\omega\left(\tau, \alpha\right)\right) = \\ &= EX_s(t+\tau)X_s(t), \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$EX_c(t+\tau)X_s(t) = \frac{1}{2}\operatorname{Im} r(\tau) =$$
$$= -\frac{\sigma^2}{2}\exp\left\{-c|\tau|^\alpha\right\}\sin\left(c|\tau|^\alpha\beta\frac{\tau}{|\tau|}\omega\left(\tau,\alpha\right)\right), \tag{3.7}$$
$$\operatorname{Re} r(-\tau) = \operatorname{Re} r(\tau). \tag{3.8}$$

3.3 Квадратично гауссові випадкові величини та процеси

У цьому підрозділі наведено означення та деякі властивості квадратично гауссових випадкових величин та процесів.

Означення 3.8. [55, 76] Нехай (T,ρ) є метричний простір та

$$\Theta = \left\{\xi(t), t\in T\right\}, E\xi(t) = 0,$$

– сім'я гауссових випадкових величин (наприклад $\xi = \{\xi(t), t\in T\}$ – гауссовий випадковий процес). Простір квадратично гауссових випадкових величин ($SG_\Theta(\Omega)$) – це такий простір, що будь-який елемент $\eta \in SG_\Theta(\Omega)$ може бути зображений у формі

$$\eta = \vec{\xi}^\top A\,\vec{\xi} - E(\vec{\xi}^\top A\,\vec{\xi}), \tag{3.9}$$

де $\vec{\xi}^\top = \left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right), \xi_k \in \Theta, k = 1, 2, ..., n$ та A дійснозначна матриця, або $\eta \in SG_\Theta(\Omega)$ є середньоквадратичною границею послідовності випадкових змінних вигляду (3.9), тобто

$$\eta = l.i.m.\left(\vec{\xi_n}^\top A_n\,\vec{\xi_n} - E(\vec{\xi_n}^\top A\,\vec{\xi_n})\right).$$

Означення 3.9. Випадковий процес $\eta = \{\eta(t), t\in T\}$ називається квадратичним гауссовим процесом, якщо сім'я випадкових величин

$$\eta = \{\eta(t), t\in T\}$$

утворює простір квадратично-гауссових випадкових величин.

Наступна теорема є модифікацією теореми 3.2 з книги [76].

Теорема 3.1. Нехай $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$ – сепарабельний квадратично-гауссовий випадковий процес та нехай для $\beta \in (0,1], C > 0$ виконується умова

$$\sup_{|t-s|\leq h} \left(Var\left(X(t)-X(s)\right)\right)^{1/2} \leq Ch^{\beta} \tag{3.10}$$

Тоді для всіх цілих чисел $M > 1$ та для всіх

$$x > \frac{\sqrt{2}\gamma_0 M}{\beta} \max\left(1, \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\beta} \frac{C}{\gamma_0}\right)^{\frac{1}{M-1}},$$

де $\gamma_0 = \sup\limits_{a\leq t\leq b} \left(VarX(t)\right)^{1/2}$, хвіст розподілу процесу $|X(t)|$ можна оцінити наступним чином

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > x\right\} \leq 4e^{\frac{M+1}{\beta}} \cdot Q(x), \tag{3.11}$$

де

$$Q(x) = \exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{2}\gamma_0}\right\} \left(\frac{\beta \cdot x}{\sqrt{2}\gamma_0 M}\right)^{\frac{M}{\beta}} \left(1 + \frac{\sqrt{2}x}{\gamma_0}\right)^{1/2}.$$

Теорема 3.2. [81] Нехай $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$, де $-\infty \leq a < b \leq \infty$ – вимірний квадратично-гауссовий випадковий процес. Нехай інтеграл Лебега

$$\int_a^b \left(E(X(t))^2\right)^{p/2} dt$$

є визначеним для $p \geq 1$. Тоді інтеграл

$$\int_a^b |X(t)|^p dt$$

існує з ймовірністю 1 і для всіх

$$\varepsilon \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)p}\right)^p C_p,$$

де

$$C_p = \int_a^b \left(E(X(t))^2\right)^{p/2} dt,$$

виконується наступна нерівність

$$P\left\{\int\limits_a^b |X(t)|^p dt > \varepsilon\right\} \leq 2\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^{1/p}\sqrt{2}}{{C_p}^{1/p}}} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^{1/p}}{\sqrt{2}{C_p}^{1/p}}\right\}. \tag{3.12}$$

Наслідок 3.1. Нехай припущення теореми 3.2 виконуються. Тоді для

$$u \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)p}\right){C_p}^{1/p}$$

виконується наступна нерівність

$$P\left\{\|X(t)\|_{L_p(a,b)} > u\right\} \leq 2\sqrt{1 + \frac{u\sqrt{2}}{{C_p}^{1/p}}} \cdot \exp\left\{-\frac{u}{\sqrt{2}{C_p}^{1/p}}\right\}. \tag{3.13}$$

3.4 Оцінка розподілу деяких функціоналів від модуля стаціонарних гауссових власних комплексних випадкових процесів

Теорема 3.3. Нехай $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$ – гауссовий стаціонарний власний комплексний випадковий процес та нехай

$$|X(t)| = \left(X_c^2(t) + X_s^2(t)\right)^{1/2}.$$

Тоді для

$$u \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)p}\right)\sigma^2(b-a)^{1/p}$$

виконується наступна нерівність

$$P\left\{\left\||X(t)|^2 - \sigma^2\right\|_{L_p([a,b])} > u\right\} \leq P(u), \tag{3.14}$$

де

$$P(u) = 2\sqrt{1 + \frac{u\sqrt{2}}{(b-a)^{1/p}\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{u}{\sqrt{2}(b-a)^{1/p}\sigma^2}\right\}.$$

Доведення. Доведення цієї теореми випливає з нерівності (3.13). Дійсно, з (3.6) маємо, що

$$EX_c^2(t) = E(X_s(t))^2 = \frac{1}{2}R(r(0)) = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Тому $E|X(t)|^2 = \sigma^2$ та

$$E\Big(|X(t)|^2-\sigma^2\Big)^2 = E\Big(|X(t)|^2 - E|X(t)|^2\Big)^2 = \tag{3.15}$$
$$= E|X(t)|^4 - \Big(E|X(t)|^2\Big)^2 = E|X(t)|^4-\sigma^4.$$

Припустимо, що (X_1, X_2, X_3, X_4) є нульовим гауссовим вектором. Тоді ми маємо:

$$E(X_1X_2X_3X_4) = E(X_1X_2)E(X_3X_4)+E(X_1X_3)E(X_2X_4)+E(X_1X_4)E(X_2X_3).$$

Ця рівність називається формулою Іссерліса (див., наприклад, [55, с. 228]). Використовуючи цю формулу та співвідношення (3.3), (3.4) можна записати

$$E|X(t)|^4 = E\Big(|X_c(t)|^2+|X_s(t)|^2\Big)^2 =$$
$$= E|X_c(t)|^4 + E|X_s(t)|^4 + 2E|X_c(t)|^2|X_s(t)|^2,$$

$$E|X_c(t)|^4 = 3\Big(E|X_c(t)|^2\Big)^2 = 3\frac{\sigma^4}{4} = E|X_s(t)|^4,$$
$$E(|X_c(t)|^2|X_s(t)|^2) = E|X_c(t)|^2E|X_s(t)|^2 + 2(EX_c(t)X_s(t))^2.$$

З того, що

$$E(X_c(t)X_s(t)) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(r(0)) = 0,$$

маємо

$$E|X(t)|^4 = 2\sigma^4.$$

З (3.15) випливає, що

$$E\Big((X(t))^2-\sigma^2\Big)^2 = \sigma^4$$

та

$$\int_a^b E\Big(|X(t)|^2-\sigma^2\Big)^{\frac{p}{2}}dt = \sigma^{2p}(b-a).$$

Отже, нерівність (3.14) випливає з нерівності (3.13). $\square$

Теорема 3.4. Нехай $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$ – гауссовий стаціонарний власний комплексний випадковий процес та

$$|X(t)| = \left(X_c^2(t) + X_s^2(t)\right)^{1/2}.$$

Якщо $X(t)$ – сепарабельний процес, то для всіх цілих чисел $M > 1$ та для всіх

$$u > \frac{2\sqrt{2}\sigma^2 M}{\alpha}\left(\max\left(1, \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha/2} 2\sqrt{c}\right)^{\frac{1}{M-1}}\right)$$

виконується нерівність

$$P\left\{\sup_{a\le t\le b}\left|(X(t))^2 - \sigma^2\right| > x\right\} \le 4e^{\frac{2(M+1)}{\alpha}} \cdot N(x), \tag{3.16}$$

де

$$N(x) = \exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\}\left(\frac{\alpha x}{2\sqrt{2}\sigma^2 M}\right)^{\frac{2M}{\alpha}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}x}{\sigma^2}\right)^{1/2}.$$

Доведення. Твердження цієї теореми випливає з теореми 3.1. В нашому випадку $\gamma_0 = \sigma^2$. □

Для того, щоб застосувати теорему 3.1 до процесу

$$|X(t)|^2 = \left(X_c^2(t) + X_s^2(t)\right)^2,$$

отримати оцінку для

$E(Y(t) - Y(s))^2$, де $Y(t) = |X(t)|^2 - \sigma^2$.

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} E(Y(t) - Y(s))^2 &= E\big(X_c^2(t) + X_s^2(t) - X_c^2(s) - X_s^2(s)\big)^2 = \\ &= E\big(X_c^2(t) - X_c^2(s) + X_s^2(t) - X_s^2(s)\big)^2 = \\ &= E\big(X_c^2(t) - X_c^2(s)\big)^2 + E\big(X_s^2(t) - X_s^2(s)\big)^2 + \\ &\quad + 2E\left(X_c^2(t) - X_c^2(s)\right) E\left(X_s^2(t) - X_s^2(s)\right) = \\ &= w_1 + w_2 + w_3, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$w_1 = E(X_c(t))^4 + E(X_c(s))^4 - 2E(X_c^2(t)X_c^2(s)),$$
$$E(X_c(t))^4 = E(X_c(s))^4 = \frac{3}{4}\sigma^4,$$

$$E(X_c^2(t)X_c^2(s)) = E(X_c(t))^2 E(X_c(s))^2 +$$
$$+ 2(EX_c(t)X_c(s))^2 = \frac{\sigma^4}{4} + 2\bigg(\frac{1}{2}\operatorname{Re}(r(t-s)\bigg)^2.$$

Тому

$$w_1 = \sigma^4 - (\operatorname{Re}(r(t-s)))^2.$$

Отже, маємо

$$w_1 = w_2,$$
$$w_1 + w_2 = 2\left(\sigma^4 - (\operatorname{Re}(r(t-s)))^2\right),$$
$$\frac{w_3}{2} = E(X_c^2(t)X_s^2(t)) + E(X_c^2(s)X_s^2(s)) - E(X_c^2(s)X_s^2(t)) - E(X_c^2(t)X_s^2(s)).$$

З того, що $\operatorname{Im}(r(0)) = 0$ випливає

$$E(X_c^2(t)X_s^2(t)) = EX_c^2(t)EX_s^2(t) + 2(EX_c(t)X_s(t))^2 =$$
$$= \frac{\sigma^4}{4} + 2\bigg(\frac{1}{2}\operatorname{Im}(r(0))\bigg)^2 = \frac{\sigma^4}{4}.$$

Аналогічно можна отримати, що

$$E(X_c^2(s)X_s^2(s)) = \frac{\sigma^4}{4},$$
$$E(X_c^2(t)X_s^2(s)) = \frac{\sigma^4}{4} + \frac{1}{2}(\operatorname{Im}(r(t-s)))^2.$$

Отже,

$$w_3 = -\left((\operatorname{Im}(r(s-t)))^2 + (\operatorname{Im}(r(t-s)))^2\right).$$

З того, що

$$(\operatorname{Im}(r(s-t)))^2 = (\operatorname{Im}(r(t-s)))^2,$$

маємо

$$w_3 = -2(\mathrm{Im}\,(r(t-s)))^2$$

та

$$E(Y(t)-Y(s))^2 = 2\left(\sigma^4 - \left((\mathrm{Re}\,(r(t-s)))^2 + (\mathrm{Im}\,(r(t-s)))^2\right)\right).$$

Оскільки,

$$\Big(Re(r(t-s))\Big)^2 + \Big(Im(r(t-s))\Big)^2 = |r(t-s)|^2 = \sigma^4 \exp\big\{-2c(t-s)\big\} =$$

$$= \Big|\cos\big(-c|\tau^\alpha|i\beta\frac{(t-s)}{|t-s|}w(t,a)\big) + i\sin\big(-c|\tau^\alpha|i\beta\frac{(t-s)}{|t-s|}w(t,a)\big)\Big|^2 =$$

$$= \sigma^2 \exp\{-|t-s|^\alpha c\},$$

тоді отримуємо наступну оцінку

$$E(Y(t)-Y(s))^2 = 2\sigma^4\left(1-\exp\{-2c|t|^\alpha\}\right) \le 4\sigma^4 c|t|^\alpha.$$

Отже $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$ and $C = 2\sigma^2\sqrt{c}$. Тому нерівність (3.16) випливає з нерівності (3.11).

3.5 Поведінка модуля стаціонарного власного комплексного випадкового процесу на нескінченності

Теорема 3.5. Нехай $X = \{X(t), t \in (-\infty,\infty)\}$ – вимірний гауссовий стаціонарний власний комплексний випадковий процес, нехай

$$|X(t)| = \left(X_c^2(t) + X_s^2(t)\right)^{1/2}$$

та $Y(t) = |X(t)|^2 - E(X(t))^2 = |X(t)|^2 - \sigma^2$. Нехай $c(t), t \in R$ – функція така, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c(t)|^{-p}\, dt < \infty,\ p \ge 1.$$

Тоді для

$$u \ge \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)p}\right)\cdot\sigma^2\left(\int_{-\infty}^{\infty}|c(t)|^{-p}dt\right)^{1/p}$$

має місце наступна нерівність

$$P\left\{\left\|\frac{(X(t))^2-\sigma^2}{c(t)}\right\|_{L_p(-\infty,\infty)} > u\right\} \leq$$

$$\leq 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}u}{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|c(t)|^{-p}dt\right)^{1/p}\sigma^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{u}{\sqrt{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|c(t)|^{-p}dt\right)^{1/p}\sigma^2}\right\}.$$

Доведення. Твердження цієї теореми випливає з теореми 3.2 (див. наслідок 3.1), якщо покласти

$$C_p = 2^{-\frac{p}{2}}\sigma^{2p}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}|c(t)|^{-p}dt.$$

□

Наслідок 3.2. Нехай $c(t) > 0$ – монотонно зростаюча функція, для якої виконуються умови теореми 3.5. Тоді для всіх $t \geq 0$ з імовірністю 1 має місце нерівність:

$$\left(\int\limits_{-t}^{t}\left|(X(u))^2-\sigma^2\right|^p du\right)^{1/p} \leq c(t)\cdot\xi,$$

де $\xi > 0$ – випадкова величина, така що

$$P\left\{\xi > u\right\} \leq$$

$$\leq 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}u}{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|c(t)|^{-p}dt\right)^{1/p}\cdot\sigma^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{u}{\left(\sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|c(t)|^{-p}dt\right)^{1/p}\cdot\sigma^2}\right\},$$

для

$$u \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)p}\right)\cdot\sigma^2\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|c(t)|^{-p}dt\right)^{1/p}.$$

Доведення. Твердження наслідку 3.2 при $t \geq 0$ випливає з нерівності

$$\left(\int\limits_{-t}^{t} \left|(X(u))^2 - \sigma^2\right|^p du\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq c(t) \cdot \left(\int\limits_{-t}^{t} \frac{\left|(X(u))^2 - \sigma^2\right|^p}{c(u)^p} du\right)^{1/p} \leq c(t) \cdot \left\| \frac{\left|(X(t))^2 - \sigma^2\right|}{c(t)} \right\|_{L_p(-\infty,\infty)}. \tag{3.18}$$

□

Зауваження 3.6. Твердження наслідку 3.2 виконується, наприклад, для функції $c(t) = (1 + |t|^\gamma), \gamma > p$.

Теорема 3.6. Нехай $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ – сепарабельний гауссовий стаціонарний власний комплексний випадковий процес. Нехай існує послідовність $a_k, k = 0, 1, 2, ...$ така, що $a_k < a_{k+1}, a_k \to \infty$, при $k \to \infty$, $a_0 = 0$ та функція $c(t), t \in [0, \infty)$ така, що $c(t) \geq 1$, $c(t)$ – монотонно зростаюча неперервна та $c(t) \to \infty$, якщо $t \to \infty$, $Y(t) = |X(t)|^2 - E(X(t))^2 = |X(t)|^2 - \sigma^2$. Нехай виконуються умови

$$\varepsilon^* = \frac{2\sqrt{2}\sigma^2 M}{\alpha} \sup_{0 \leq k \leq \infty} \frac{1}{c(a_k)} \max\left(1, \left(\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2}\right)^{\alpha/2} 2\sqrt{c}\right)^{1/M-1}\right) \leq \infty.$$

Якщо для деяких $\widehat{\varepsilon}$, $\widehat{\varepsilon} \geq \varepsilon^*$, наступні ряди збігаються

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(c(a_k) - c(a_0))\,\widehat{\varepsilon}}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\} \left(1 + \frac{\sqrt{2}c(a_k)\,\widehat{\varepsilon}}{\sigma^2}\right)^{1/2} < \infty, \tag{3.19}$$

тоді для всіх $\varepsilon > \widehat{\varepsilon}$

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \infty} \frac{\left||X(t)|^2 - \sigma^2\right|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}c(a_0)\,\varepsilon}{\sigma^2}\right\} \cdot \widehat{z} = Z(\varepsilon), \tag{3.20}$$

де

$$\widehat{z} = 4e^{\frac{M+1}{\alpha}} \cdot \left(\frac{2}{M}\right)^{\frac{2M}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(c(a_k) - c(a_0))\,\widehat{\varepsilon}}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\} \left(1 + \frac{\sqrt{2}c(a_k)\,\widehat{\varepsilon}}{\sigma^2}\right)^{1/2}.$$

Доведення. Для $Y(t) = |X(t)|^2 - \sigma^2$ маємо, що $Var\,(Y(t) - Y(s)) \leq 2\sigma^2 |t-s|^{\frac{\alpha}{2}}$. З теореми 3.4 випливає, що для $M > 1$ та

$$u > \frac{2\sqrt{2}\sigma^2 M}{\alpha}\left(\max\left(1, \left(\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} 2\sqrt{c}\right)^{\frac{1}{M-1}}\right)\right). \tag{3.21}$$

Отримаємо

$$P\left\{\sup_{a_k \leq t \leq a_{k+1}} |Y(t)| > u\right\} \leq 4e^{\frac{M+1}{\alpha}} \cdot A(u), \tag{3.22}$$

де

$$A(u) = \exp\left\{-\frac{u}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\}\left(\frac{\alpha u}{2\sqrt{2}\sigma^2 M}\right)^{\frac{2M}{\alpha}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}u}{\sigma^2}\right)^{1/2}.$$

Наступна нерівність очевидна:

$$P\left\{\sup_{t\in[0,\infty)} \frac{|Y(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\sup_{a_k \leq t \leq a_{k+1}} |Y(t)| > c(a_k)\cdot\varepsilon\right\}. \tag{3.23}$$

З нерівностей (3.21) та (3.22) для

$$\varepsilon > \frac{2\sigma M}{\alpha c(a_k)} \cdot \left(\max\left(1, \left(\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} 2\sqrt{c}\right)^{\frac{1}{M-1}}\right)\right), \tag{3.24}$$

отримаємо оцінку

$$P\left\{\sup_{a_k \leq t \leq a_{k+1}} |Y(t)| > c\,(a_k)\,\varepsilon\right\} \leq 4e^{\frac{M+1}{\alpha}} \cdot B(c\,(a_k)\,\varepsilon), \tag{3.25}$$

де

$$B(c\,(a_k)\,\varepsilon) = \exp\left\{-\frac{c\,(a_k)\,\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\}\left(\frac{\alpha c\,(a_k)\,\varepsilon}{2\sqrt{2}\sigma^2 M}\right)^{\frac{2M}{\alpha}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}c\,(a_k)\,\varepsilon}{\sigma^2}\right)^{1/2}.$$

З нерівності (3.25) та нерівністі (3.23) маємо, що за умови (3.24) отримаємо таку оцінку

$$P\left\{\sup_{a_k \leq t \leq a_{k+1}} \frac{|Y(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq 4e^{\frac{M+1}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{c\,(a_k)\,\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\}\left(\frac{\alpha c\,(a_k)\,\varepsilon}{2\sqrt{2}\sigma^2 M}\right)^{\frac{2M}{\alpha}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}c\,(a_k)\,\varepsilon}{\sigma^2}\right)^{1/2} =$$

$$= 4e^{\frac{M+1}{\alpha}} \cdot C(\varepsilon), \tag{3.26}$$

де

$$C(\varepsilon) = \exp\left\{-\frac{c\left(a_0\right)\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\left(c\left(a_k\right) - c\left(a_0\right)\right)\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\} \left(\frac{\alpha c\left(a_k\right)\varepsilon}{2\sqrt{2}\sigma^2 M}\right)^{\frac{2M}{\alpha}} \left(1 + \frac{\sqrt{2}c\left(a_k\right)\varepsilon}{\sigma^2}\right)^{1/2}.$$

З нерівності (3.24) маємо, що $\varepsilon > \dfrac{2\sigma M}{\alpha c\left(a_k\right)}$ та $\dfrac{\alpha c\left(a_k\right)}{2\sigma}\varepsilon > M \geq 2$.
З нерівності (3.26) за умовою (3.24) маємо

$$P\left\{\sup_{t\in[0,\infty)} \frac{|Y(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \leq 4e^{\frac{M+1}{\alpha}} \left(\frac{2}{M}\right)^{\frac{2M}{\alpha}} \exp\left\{-\frac{c\left(a_0\right)\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\left(c\left(a_k\right) - c\left(a_0\right)\right)\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\} \left(1 + \frac{\sqrt{2}c\left(a_k\right)\varepsilon}{\sigma^2}\right)^{1/2}. \qquad (3.27)$$

Функція $f(\varepsilon) = \exp\left\{-\dfrac{\left(c\left(a_k\right) - c\left(a_0\right)\right)\varepsilon}{\sigma}\right\} \left(1 + \dfrac{c\left(a_k\right)\varepsilon}{\sigma}\right)^{1/2}$ – монотонно спадає для $\varepsilon > 0$. Тоді з умови

$$\hat{\varepsilon} \geq \varepsilon^* \qquad (3.28)$$

маємо, що $\forall \varepsilon > \widehat{\varepsilon}$

$$P\left\{\sup_{t\in[0,\infty)} \frac{|Y(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \leq 4e^{\frac{M+1}{\alpha}} \left(\frac{2}{M}\right)^{\frac{2M}{\alpha}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{c\left(a_0\right)\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\left(c\left(a_k\right) - c\left(a_0\right)\right)\hat{\varepsilon}}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\} \left(1 + \frac{\sqrt{2}c\left(a_k\right)\hat{\varepsilon}}{\sigma^2}\right)^{1/2}. \qquad (3.29)$$

$\square$

Наслідок 3.3. Нехай функція $c(t)$ задовільняє умовам теореми 3.6. Тоді з ймовірністю одиниця для всіх $t \in \mathbb{R}$ виконується наступна нерівність

$$|Y(t)| \leq \eta \cdot c(t),$$

де $\eta > 0$ є випадковою величиною, такою що при $\varepsilon > \widehat{\varepsilon}$ нерівність

$$P\left\{\eta > \varepsilon\right\} \leq Z\left(\varepsilon\right)$$

виконується. Для визначення функції $Z(\varepsilon)$ див. (3.20).

Зауваження 3.7. Умова (3.19) виконується, якщо ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{c(a_k)\,\hat{\varepsilon}}{\sqrt{2}\sigma^2}\right\}(c(a_k))^{\frac{2M}{\alpha}+\frac{1}{2}}$$

збігається. Цей ряд збігається, наприклад, у випадку, коли

$$c(a_k) = \ln\left(k^d\right), k > 1,$$

де $\dfrac{d\widehat{\varepsilon}}{\sqrt{2}\sigma^2} > 1$. Особливий випадок $a_k = k$, а саме $c(t) = d\ln(t)\,, d > \dfrac{\sqrt{2}\sigma^2}{\widehat{\varepsilon}}$ та $t > e$.

3.6 Висновки до третього розділу

У цьому розділі подано аналіз властивостей власного комплексного випадкового процесу. Дано визначення та деякі властивості стаціонарного власного комплексного випадкового процесу зі стійкою кореляційною функцією. Отримано оцінки розподілу деяких функціоналів від модуля стаціонарних гауссових власних комплексних випадкових процесів. Проаналізовано поведінку модуля стаціонарних власних комплексних випадкових процесів на нескінченності.

Розділ 4

МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВОГО СТАЦІОНАРНОГО ПРОЦЕСУ ЗІ СТІЙКОЮ КОРЕЛЯЦІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ З ПАРАМЕТРОМ $\alpha = 2$ ІЗ ЗАДАНОЮ НАДІЙНІСТЮ ТА ТОЧНІСТЮ У ПРОСТОРАХ $C([0,T])$ ТА $L_p([0,T])$

У цьому розділі для побудови моделей стохастичних процесів, що наближають ці процеси із заданою надійністю та точністю в просторах $C([0,T])$ та $L_p([0,T])$, використано зображення випадкових процесів у вигляді випадкових рядів з некорельованими членами, отримані в роботі Ю. В. Козаченко, І. В. Розора, Є. В. Турчина (2007) [79]. Подібні конструкції були досліджені у книзі Ю. В. Козаченка та ін. [28] у загальному випадку. Однак виникають додаткові труднощі при побудові моделей конкретного процесу, такі як, наприклад, вибір відповідного базису в $L_2(\mathbb{R})$. У цьому розділі побудовані моделі, які наближають гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_\alpha(h) := EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 \exp\{-d|h|^\alpha\}$, $\alpha > 0, d > 0$ з параметром $\alpha = 2$, що є центрованим стаціонарним процесом із заданою надійністю та точністю в просторах $C([0,T])$ та $L_p([0,T])$.

4.1 Гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$

Означення 4.1. [103] Стаціонарний випадковий процес $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ називається гауссовим процесом зі стійкою кореляційною функцією з параметром $\alpha = 2$, якщо $EX(t) = 0$ та

$$E(X(t+h)\overline{X(t)}) = \sigma^2 \cdot \exp\left\{-ah^2\right\},$$

де $\sigma^2 > 0$, $a > 0$ - деякі константи.

Щоб отримати зображення процесу у вигляді ряду некорельованих членів, потрібна наступна теорема.

Теорема 4.1 ([79])**.** Нехай $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$, $EX(t) = 0$ є випадковим процесом другого порядку з кореляційною функцією $R(t,s) = E(X(t)\overline{X(s)})$. Нехай $(\Lambda, \beta_\Lambda, \mu)$ – вимірний простір з σ-скінченною мірою μ, функція $f_i(t,\lambda)$, $t \in T, i = 1,...,n$ належать до $L_2(\Lambda,\mu)$, та $\{g_k(\lambda), k \in \mathbb{R}\}$ – ортонормований базис в $L_2(\Lambda,\mu)$. Нехай кореляційна функція $R(t,s)$ може бути представлена у формі

$$R(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Lambda f_i(t,\lambda) f_i(\bar{t},\lambda) d\mu(\lambda).$$

Тоді процес $Z(t)$ може бути зображенний у вигляді ряду, збіжного у середньоквадратичному

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{ik}(t)\xi_{ik},$$

де

$$a_{ik}(t) = \int_\Lambda f_i(t,\lambda) g_k\bar{(}\lambda) d\mu(\lambda),$$

$$E\xi_{ik} = 0, E\xi_{ik}\bar{\xi_{jl}} = \delta_{ij}\delta_{kl}.$$

$\delta_{kl} = \begin{cases} 0, k \neq l, \\ 1, k = l \end{cases}$ – дельта-функція Кронекера.

Означення 4.2. [66] Функції

$$g_k(u) = \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{4}\right\} \tag{4.1}$$

називаються функціями Ерміта, де

$$H_k(u) = (-1)^k e^{u^2/2} \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2/2} \tag{4.2}$$

поліноми Ерміта.

Зауваження 4.1. [66] Система функцій

$$g_k(u) = \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{4}\right\}$$

– це повна ортонормальна система, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_k(u) g_m(u) = \begin{cases} 0, k \neq m, \\ 1, k = m. \end{cases}$$

Теорема 4.2. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in [0, T]\}$ – гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$. Тоді процес $X(t)$ може бути зображенний у вигляді ряду, збіжного у середньоквадратичному

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}(t) \cdot \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k2}(t) \cdot \eta_k, \tag{4.3}$$

де $E\xi_k = E\eta_k = 0$, $E\xi_k\xi_l = \delta_{kl}$, $E\eta_k\eta_l = \delta_{kl}$, $E\xi_k\eta_l = 0$,

$$a_{k1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du, \tag{4.4}$$

$$a_{k2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \sin tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du. \tag{4.5}$$

Доведення. Доведення цієї теореми випливає з теореми 4.1. В нашому випадку маємо:

$$
\begin{aligned}
R(s,t) &= \sigma^2 \cdot \exp\left\{-a(t-s)^2\right\} = \\
&= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos((t-s)x) \cdot \exp\left\{-\frac{u^2}{4a}\right\} dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{u^2}{8a}\right\} \cos tx \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{u^2}{8a}\right\} \cos sx \right) dx + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{u^2}{8a}\right\} \sin tx \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{u^2}{8a}\right\} \sin sx \right) dx.
\end{aligned}
$$

Тобто, в позначеннях теореми 4.2 $n = 2$, a_{k1} і a_{k2} визначені в теоремі. □

Зауваження 4.2. Далі припускаємо, що $X(t)$ – гауссовий процес. У цьому випадку всі випадкові величини ξ_k та η_k є незалежними.

4.2 Модель стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ в просторі $C[0,T]$

Означення 4.3. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in [0,T]\}$ – гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$, зображенний у вигляді суми рядів, що збіжні в середньоквадратичному (4.3). Процес

$$
X_N(t) = \sum_{k=1}^{N} a_{k1}(t) \cdot \xi_k + \sum_{k=1}^{N} a_{k2}(t) \cdot \eta_k \tag{4.6}
$$

називається моделлю процесу $X(t)$.

Означення 4.4. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ із заданою надійністю $1-\alpha, \alpha > 0$ та точністю $\beta > 0$ в просторі $C(T)$, де $T = [0,T]$, якщо виконується наступна нерівність

$$
P\left\{\sup_{0 \le t \le T} |X(t) - X_N(t)| > \beta\right\} \le \alpha.
$$

Лема 4.1. Нехай $X(t)$ – гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$. Якщо $X_N(t)$ – модель цього процесу, тоді має місце така оцінка

$$\left(\sup_{t\in[0,T]} E(X(t) - X_N(t))^2\right)^{1/2} \le B_N, \tag{4.7}$$

де

$$B_N = \frac{\sigma K}{(\pi a)^{1/4}\sqrt{N+2}} \left(\frac{2\sqrt{2\pi a}}{a} T^2 + 4(2a+1)T + \frac{2\pi a}{a}(2a^2+3a+1)\right). \tag{4.8}$$

Доведення. З теореми 4.2 та означення 4.2 випливає, що

$$E\left(X(t) - X_N(t)\right)^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(a_{k1}^2(t) + a_{k2}^2(t)\right), \tag{4.9}$$

де

$$a_{k1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u)du,$$
$$a_{k2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \sin tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u)du,$$

$g_k(u) = \dfrac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{u^2}{4}\right\}$ (див. означення 4.1). Потрібно оцінити $|a_{k1}|$ та $|a_{k2}|$:

$$|a_{k1}(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u)du\right|.$$

Використовуючи інтегрування частинами, властивості поліномів Ерміта, аналогічно до міркувань, проведених в книзі Ю. В. Козаченко та ін. ([28]), отримуємо для $|a_{k1}(t)|$ наступні співвідношення

$$|a_{k1(t)}| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u)du\right| =$$
$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \cdot e^{-\frac{u^2}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} du\right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{e^{-\frac{u^2}{4}}}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} \cdot \frac{\partial H_{k+1}(u)}{\partial u} \cdot du \right| =$$

З нерівності Крамера [64] випливає, що для будь-якого u маємо $|g_k(u) \leq K|$, де $K = 1,086435$. Таким чином,

$$\left| \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \frac{H_k(u)}{\sqrt{(k+1)!}} \exp\left\{ -\frac{u^2}{4} \right\} \right| \leq const.$$

Тому $e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \frac{H_k(u)}{\sqrt{(k+1)!}} \exp\left\{ -\frac{u^2}{4} \right\} \to 0$, коли $u \to \pm\infty$. Звідси

$$|a_{k1}(t)| = \left| -\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4} \right)}{\partial u} \cdot \frac{H_{k+1}(u)}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} \right|.$$

За допомогою повторного інтегрування частинами, отримуємо

$$|a_{k1}(t)| = \left| -\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4} \right)}{\partial u} \cdot \frac{H_{k+1}(u)}{\sqrt{k+1}\sqrt{(k+1)!}} \right| =$$

$$= \left| -\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4} \right)}{\partial u} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} \cdot \frac{\partial H_{k+2}(u)}{\partial u} \right| =$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4} \right)}{\partial u} \times \right.$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} \cdot H_{k+1}(u) \Big|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \cos tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{u^2}{4} \right)}{\partial u^2} \times$$

$$\times\frac{H_{k+2}(u)}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}}du\cdot H_{k+1}(u)\Bigg| =$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\cdot\cos tu\cdot e^{-\frac{u^2}{8a}}\cdot\frac{u^2}{4}\right)}{\partial u^2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{H_{k+2}(u)}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}}du\cdot H_{k+1}(u)\right|.$$

З нерівності Крамера [64] ми отримуємо:

$$|a_{k1}(t)| \leq \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}Z_1(t,u)du\right|, \tag{4.10}$$

де

$$Z_1(t,u) = \frac{\partial^2\left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\cdot\cos tu\cdot e^{-\frac{u^2}{8a}}\right)}{\partial u^2} - u\frac{\partial\left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\cdot\cos tu\cdot e^{-\frac{u^2}{8a}}\right)}{\partial u}$$
$$+\frac{u^2-2}{4}\left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\cdot\cos tu\cdot e^{-\frac{u^2}{8a}}\right).$$

Отже

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}Z_1(t,u)du\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}\left(\frac{1}{16a^2}\cos tu\cdot(u^2(2a+1)^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-(16a^2t^2+8a^2+4a))tu\times\sin tu\left(\frac{1}{2a}+1\right)\right)du\right|.$$

Оцінимо вираз під знаком інтеграла

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}Z_1(t,u)du\right| = \left|\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}\left(\frac{1}{16a^2}\cos tu\cdot\big(u^2(2a+1)^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-(16a^2t^2+8a^2+4a)\big)+tu\cdot\sin tu\left(\frac{1}{2a}+1\right)\right)du\right| \leq$$
$$\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\cdot e^{-\frac{u^2}{8a}}\left(\frac{1}{16a^2}\cos tu\cdot\big(u^2(2a+1)^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-(16a^2t^2+8a^2+4a)\big)+tu\cdot\sin tu\left(\frac{1}{2a}+1\right)\right)\right|du\leq$$
$$\leq\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}}\cdot e^{-\frac{u^2}{8a}}\left(\left|\frac{1}{16a^2}\right||\cos tu|\cdot\Big(\big|u^2(2a+1)\big|+\right.$$

$$+ \Big| -(16a^2t^2+8a^2+4a\big|)\bigg) + |tu|\cdot|\sin tu|\bigg|\frac{1}{2a}+1\bigg|\bigg)du \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \Bigg(\frac{1}{16a^2} \cdot \Big(u^2(2a+1)^2 +$$

$$+ \big(16a^2t^2+8a^2+4a\big)\Big) + t|u|\Big(\frac{1}{2a}+1\Big)\Bigg)du =$$

$$= \frac{(2a+1)^2}{16a^2} \cdot \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot u^2 du + \big(16a^2t^2+8a^2+4a\big) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} du +$$
$$+ t\Big(\frac{1}{2a}+1\Big) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot |u| du.$$

Тепер знайдемо значення наступних інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}\cdot\frac{1}{4a}} du \sqrt{2\pi}\sqrt{4a} = 2\sqrt{2\pi a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} u^2 du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} u^2 du \sqrt{2\pi}\sqrt{4a} = 4a\sqrt{2\pi}\sqrt{4a} = 8a\sqrt{2\pi a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} |u| du = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} u du = 2\int_{-\infty}^{\infty} d\left(e^{-\frac{u^2}{8a}}\right) \cdot 4a = 8a.$$

Замінюємо ці значення на початкову нерівність

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t,u) du \right| \le \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \Bigg(\frac{(2a+1)^2}{16a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot u^2 du +$$

$$+ \frac{(16a^2t^2+8a^2+4a)}{16a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} du + t\Big(\frac{1}{2a}+1\Big) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} |u| du \Bigg) =$$

$$= \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \Bigg(\frac{(2a+1)^2}{16a^2} \cdot 8a\sqrt{2\pi a} + \frac{\big(16a^2t^2+8a^2+4a\big)}{16a^2} \times$$

$$\times 2\sqrt{2\pi a} + t\Big(\frac{1}{2a}+1\Big) 8a \Bigg) = \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \Bigg(\frac{\sqrt{2\pi a}}{2a} \big((2a+1)^2 +$$

$$+ (4at^2+2a+1)\big) + 4t(2a+1) \Bigg) =$$

$$= \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \Bigg(\frac{\sqrt{2\pi a}}{2a} \big(2at^2+2a^2+3a+1\big) + 4t(2a+1) \Bigg),$$

тоді

$$|a_{k1}(t)| \le \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(t,u)du \right| \le$$

$$\le \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \cdot \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a} \big(2at^2 + 2a^2 + 3a + 1\big) + 4t(2a+1) \right). \quad (4.11)$$

І з того, що $t \in [0, T]$, маємо

$$\sup_{t\in[0,T]]} |a_{k1}(t)| \le \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \cdot \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a} \big(2aT^2 + 2a^2 + 3a + 1\big) + 4T(2a+1) \right). \quad (4.12)$$

Аналогічно, до міркувань проведених вище, для функції

$$a_{k2}(t) \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \sin tu \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u)du$$

отримаємо таку оцінку:

$$\sup_{t\in[0,T]]} |a_{k2}(t)| \le \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \cdot \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a} \big(2aT^2 + 2a^2 + 3a + 1\big) + 4T(2a+1) \right). \quad (4.13)$$

І нарешті, отримуємо оцінку для $\sup\limits_{t\in[0,T]} E\big(X(t) - X_N(t)\big)^2$:

$$\sup_{t\in[0,T]} E\big(X(t) - X_N(t)\big)^2 \le \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \right)^2 \times$$

$$\times 2 \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{a} \big(2aT^2 + 2a^2 + 3a + 1\big) + 4T(2a+1) \right) \right)^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)} \left(\frac{2\sqrt{2\pi a}}{a} T^2 + 4(2a+1)T + \frac{\sqrt{2\pi a}}{a} \big(2a^2 + 3a + 1\big) \right)^2. \quad (4.14)$$

Беремо квадратний корінь з обох сторін нерівності і отримуємо оцінку цієї леми. □

Лема 4.2. Нехай $X(t)$ – випадковий гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$, $X_N(t)$ – модель цього процесу, де $n \in \mathbb{N}, N > 1, t \in [0,T]$ та нехай

$$Y_N(t) = X(t) - X_N(t).$$

Тоді справедлива наступна нерівність

$$\left(\sup_{|t-s|\le h} E\big(Y_N(t) - Y_N(s)\big)^2\right)^{1/2} \le h \cdot C_N,$$

де

$$C_N = \frac{\sqrt{2}K\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N+2}} \times \\ \times \left(8aT^2 + 2\sqrt{2\pi a}(4a+3)T + 2(1+2a)(5+4a)\right). \qquad (4.15)$$

Доведення. Для $Y_N(t) = X(t) - X_N(t)$ ми отримуємо

$$E\big(Y_N(t) - Y_N(s)\big)^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \big(a_{k1}(t) - a_{k1}(s)\big)^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \big(a_{k2}(t) - a_{k2}(s)\big)^2.$$

Тепер оцінимо різниці $|a_{k1}(t) - a_{k1}(s)|, |a_{k2}(t) - a_{k2}(s)|$ аналогічно, як оціненні $|a_{k1}(t)|$ та $|a_{k2}(t)|$:

$$|a_{k1}(t) - a_{k1}(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot (\cos tu - \cos su) \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot g_k(u) du \right| = \\ = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot (\cos tu - \cos su) \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot \frac{H_k(u)}{\sqrt{k!}} \times \right. \\ \left. \times e^{-\frac{u^2}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} du \right|.$$

Використовуючи двічі інтегрування частинами, отримаємо

$$|a_{k1}(t) - a_{k1}(s)| = \left| \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \left(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot (\cos tu - \cos su) \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \cdot e^{-\frac{u^2}{4}} \right)}{\partial u^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{H_{k+2}(u)}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\sqrt{(k+2)!}} du \right|.$$

З нерівності Крамера [64] випливає, що для всіх u, маємо $|g_k(u) \le K|$, де $K = 1,086435$. І використовуючи результати леми 4.1, одержимо:

$$|a_{k1}(t) - a_{k1}(s)| \le \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \int_{-\infty}^{\infty} |Z_3(t,u)| du,$$

де

$$|Z_3(t,u)| = \frac{\partial^2 \Big(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot (\cos tu - \cos su) \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \Big)}{\partial u^2} -$$
$$- u \frac{\partial \Big(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot (\cos tu - \cos su) \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \Big)}{\partial u} +$$
$$+ \frac{u^2 - 2}{4} \Big(\frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \cdot (\cos tu - \cos su) \cdot e^{-\frac{u^2}{8a}} \Big).$$

Нарешті, отримаємо

$$|Z_3(t,u)| \le \frac{\sigma}{(4\pi a)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} \Bigg(|\cos tu - \cos su| \Big(\Big| \frac{u^2}{16a^2} (1+2a)^2 \Big| +$$
$$+ \Big| \frac{1}{4a} (-1 - 2a) \Big| \Big) + |t \cdot \sin tu - s \cdot \sin su| \frac{|u|}{2a} | - 1 - 2a| +$$
$$+ | - t^2 \cos tu + s^2 \cos su| du \Bigg).$$

Оцінимо доданки під знаком інтеграла наступним чином:

$$|\cos tu - \cos su| = \left| - 2 \sin \frac{(t-s)u}{2} \cdot \sin \frac{(t+s)u}{2} \right| \le$$
$$\le 2 \left| \sin \frac{(t-s)u}{2} \right| \le \frac{2|t-s||u|}{2} = |t-s||u|$$

і

$$|t \cdot \cos tu - s \cdot \cos su| \le |(t-s) \sin tu + (\sin tu - \sin su)t| \le$$
$$\le |t-s||\sin tu| + |\sin tu - \sin su| t \le$$
$$\le |t-s||\sin tu| + \left| 2 \sin \frac{(t-s)u}{2} \cos \frac{(t-s)u}{2} \right| t \le$$
$$\le |t-s||\sin tu| + \left| 2 \sin \frac{(t-s)u}{2} \right| t \le$$
$$\le |t-s| + 2 \frac{|t-s||u|}{2} t = |t-s|(1 + |u| t),$$

$$|-t^2\cdot\cos tu+s^2\cdot\cos su|=|(s^2-t^2)\cos tu+(\cos su-\cos tu)s^2|\le$$
$$\le|s^2-t^2||\cos tu|+|\cos su-\cos tu|s^2\le$$
$$\le|s-t||s+t|+|t-s||u|s^2.$$

Далі,

$$\sup_{|t-s|\le h,\ t,s\in[0,T]}|\cos tu-\cos su|\le h|u|,$$

$$\sup_{|t-s|\le h,\ t,s\in[0,T]}|t\cdot\sin tu-s\cdot\sin su|\le|t-s|(1+|u|t)\le h(1+|u|T),$$

$$\sup_{|t-s|\le h,\ t,s\in[0,T]}|-t^2\cdot\cos tu+s^2\cdot\cos su|\le|s-t||s+t|+|t-s||u|s^2\le$$
$$\le h\cdot T+h\cdot|u|s^2=h(T+|u|T^2).$$

Оцінимо вираз під знаком інтегралу

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}Z_3(t,u)du\right|\le\frac{\sigma h}{(4\pi a)^{1/4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}\Bigg(|u|\Big(\frac{u^2}{16a^2}(1+2a)^2+\frac{1}{4a}(1+2a)\Big)+$$
$$+(1+|u|T)\frac{|u|}{2a}(1+2a)+(T+|u|T^2)du\Bigg)=$$
$$=\frac{\sigma h}{(4\pi a)^{1/4}}\cdot\Bigg(\frac{(1+2a)^2}{16a^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}u^2|u|du+\frac{(1+2a)}{4a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}|u|du+$$
$$+(1+2a)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}(1+|u|T)\frac{|u|}{2a}du+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}(T+|u|T^2)du\Bigg)=$$
$$=\frac{\sigma h}{(4\pi a)^{1/4}}\cdot\Bigg(\frac{(1+2a)^2}{16a^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}u^2|u|du+\frac{(1+2a)}{4a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}|u|du+$$
$$+\frac{1}{2a}(1+2a)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}|u|du+\frac{(1+2a)T}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}u^2du+$$
$$+T\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}du+T^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}|u|du\Bigg).$$

Для оцінки останнього виразу слід обчислити наступні інтеграли:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}u^2|y|du,\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}|u|du,\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}u^2du,\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{8a}}du.$$

Використовуємо оцінку, отриману в лемі 4.1 для останніх трьох інтегралів, маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} u^2 |u| du = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}} u^3 du = 2(-4a)\int_{0}^{\infty} u^2 d\Big(e^{-\frac{u^2}{8a}}\Big) =$$
$$= 2(-4a)\left(u^2 e^{-\frac{u^2}{8a}}\Bigg|_0^{\infty} - 2\int_0^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{8a}} du\right) = 16a\int_0^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{8a}} du = 16a\cdot 4a = 64a^2.$$

Тоді

$$|a_{k1}(t)-a_{k1}(s)| \le \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} Z_3(t,u)du\right| \le \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\times$$
$$\times\frac{\sigma h}{(4\pi a)^{1/4}}\cdot\left(\frac{(1+2a)^2}{16a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}}u^2|u|du + \frac{(1+2a)}{4a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}}|u|du+\right.$$
$$+\frac{1}{2a}(1+2a)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}}|u|du + \frac{(1+2a)t}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}}u^2du + t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}}du+$$
$$\left.+t^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{8a}}|u|du\right) = \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\cdot\frac{\sigma h}{(4\pi a)^{1/4}}\cdot\left(\frac{(1+2a)^2}{16a^2}64a^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(1+2a)}{4a}8a + \frac{1}{2a}(1+2a)8a + \frac{(1+2a)t}{2a}8a\sqrt{2\pi a} + 8t^2a\right) =$$
$$= \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\cdot\frac{\sigma h}{(4\pi a)^{1/4}}\Big(4(1+2a)^2 + 2(1+2a) + 4(1+2a)+$$
$$+4t(1+2a)\sqrt{2\pi a} + 2t\sqrt{2\pi a} + 8t^2a\Big) = \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\cdot\frac{\sigma h}{(4\pi a)^{1/4}}\times$$
$$\times\Big(8at^2 + 2\sqrt{2\pi a}(4a+3)t + 2(1+2a)(5a+4)\Big), \tag{4.16}$$

Аналогічно до наведеного вище, для функції

$$a_{k2}(t)-a_{k2}(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma h}{(}4\pi a)^{1/4}\cdot(\sin tu - \sin su)\cdot e^{-\frac{u^2}{8a}}\cdot g_k(u)du$$

отримаємо таку ж оцінку як для $|a_{k1}(t)-a_{k1}(s)|$:

$$|a_{k2}(t)-a_{k2}(s)| \le \frac{K}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\cdot\frac{\sigma h}{(4\pi a)^{1/4}}\times$$
$$\times\Big(8at^2 + 2\sqrt{2\pi a}(4a+3)t + 2(1+2a)(5+4a)\Big). \tag{4.17}$$

І нарешті, отримаємо оцінку для $\sup\limits_{|t-s|\le h,\ t,s\in[0,T]} E\big(Y_N(t)-Y_N(s)\big)^2$:

$$\sup_{|t-s|\le h,\ t,s\in[0,T]} E\big(Y_N(t)-Y_N(s)\big)^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty}\big(a_{k1}(t)-a_{k1}(s)\big)^2 +$$
$$+\sum_{k=N+1}^{\infty}\big(a_{k2}(t)-a_{k2}(s)\big)^2 \le 2\sum_{k=N+1}^{\infty}\Big(\frac{K\sigma}{\sqrt{(k+1)(k+2)}(4\pi a)^{1/4}}\Big)^2\times$$
$$\times h^2\times\big(8aT^2+2\sqrt{2\pi a}(4a+3)T+2(1+2a)(5+4a)\big)^2 =$$

$$=\frac{2K^2\sigma^2}{(4\pi a)^{1/2}}h^2\times\big(8aT^2+2\sqrt{2\pi a}(4a+3)T+2(1+2a)(5+4a)\big)^2\times$$
$$\times\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2K^2\sigma^2}{(4\pi a)^{1/2}}h^2\cdot\frac{1}{N+2}\times$$
$$\times\big(8aT^2+2\sqrt{2\pi a}(4a+3)T+2(1+2a)(5+4a)\big)^2. \quad (4.18)$$

Беремо квадратний корінь з обох сторін нерівності і отримаємо оцінку, сформульовану в цій лемі. □

Для доведення наступної теореми використаємо наступну теорему з книги [55].

Теорема 4.3. Нехай $X(t)=\{X(t), t\in[0,T]\}$ – гауссовий сепарабельний випадковий процес з $EX(t)=0$ такий, що

$$\sup_{|t-s|\le h}\Big(E|X(t)-X_N(t)|^2\Big)^{1/2}\le\sigma(h),$$

де $\sigma(h)>0$ - монотонно зростаюча неперервна функція, $\sigma(0)=0$, та нехай $\varepsilon_0=\sup_{t\in[0,T]}\big(E|X(t)|^2\big)^{1/2}$. Якщо для деяких $0<\gamma\le 1$ виконується наступна умова

$$\int_0^{\varepsilon_0}\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)^{\gamma}du<\infty,$$

тоді для $x>\sqrt{2}$ справедлива нерівність:

$$P\Big\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|>\varepsilon_0 x\Big\}\le 2e\left(\int_0^{\varepsilon_0}\Big(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\Big)^{\gamma}du\right)^{2/\gamma}\cdot x^{2/\gamma}\cdot\exp\Big\{-\frac{x^2}{2}\Big\}.$$

Теорема 4.4. Модель $X_N(t)$ наближає сепарабельний гауссовий процес $X(t)$ зі стійкою кореляційною функцією з параметром $\alpha = 2$ із надійністю $1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$, та точністю $\beta > 0$ в просторі $C(T)$, де $T = [0,T], T > 0$, якщо $N > 0, N \in \mathbb{N}$ такі що

$$Z_N(\beta) = 2e \cdot \frac{\beta^{2/\beta}}{B_N^{2/\beta}} \cdot \exp\left\{ -\frac{\beta^2}{2B_N^2} \right\} \times \\ \times \left(\left(\frac{TC_N}{2} \right)^{\gamma} \frac{\beta^{1-\gamma}}{1-\gamma} + B_N \right)^{1/\gamma} \leq \alpha, \tag{4.19}$$

$$B_N < \frac{\beta}{\sqrt{2}}, \tag{4.20}$$

де B_N визначено співвідношенням (4.8), та $0 < \gamma \leq 1$.

Доведення. У нашому випадку $\sigma(h) = C_N(h)$, де C_N визначено в (4.15), та $\varepsilon_0 = B_N$, де B_N визначено у (4.8). Якщо підставити $B_N = \varepsilon$ в (4.19), то для $\varepsilon > B_N\sqrt{2}$ $\left(B_N < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$ отримаємо таку нерівність

$$P\left\{ \sup_{t\in[0,T]} |X(t) - X_N(t)| > \varepsilon \right\} \leq 2e \frac{\varepsilon^{2/\gamma}}{B_N^{2/\gamma}} \cdot \exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2B_N^2} \right\} \times \\ \times \left(\int_0^{B_N} \left(\frac{TC_N}{2\varepsilon} + 1 \right)^{\gamma} d\varepsilon + B_N \right)^{2/\gamma} \leq \\ \leq 2e \frac{\varepsilon^{2/\gamma}}{B_N^{2/\gamma}} \cdot \exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2B_N^2} \right\} \cdot \left(\left(\frac{TC_N}{2} \right)^{\gamma} \frac{B_N^{1-\gamma}}{1-\gamma} + B_N \right)^{2/\gamma} = \\ = 2e \frac{\varepsilon^{2/\gamma}}{B_N^{2/\gamma}} \cdot \exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2B_N^2} \right\} \cdot \left(\left(\frac{TC_N}{2} \right)^{\gamma} \frac{B_N^{1-\gamma}}{1-\gamma} + B_N \right)^{2/\gamma}.$$

Якщо в правій частині попередньої нерівності замість ε покласти β, то з означення 4.4 отримаємо твердження теореми. $\square$

4.3 Модель гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ в просторі $L_p([0,T])$

Означення 4.5. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1-\alpha, \alpha > 0$ та точністю $\beta > 0$ у просторі $L_p([0,T]), p \geq 1, t \in [0,T]$, якщо

$$P\left\{ \left\|X(t) - X_N(t)\right\|_p > \beta \right\} = P\left\{ \Big(\int_0^T |X(t) - X_N(t)|^p dt \Big)^{1/p} > \beta \right\} \leq \alpha. \tag{4.21}$$

Теорема 4.5. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in [0,T]\}$ – гауссовий вимірний випадковий процес. Тоді для $\varepsilon > C_p^{1/2}$, де $C = \displaystyle\int_0^T \Big(E(X(t))^2\Big)^{p/2} dt < \infty$, має місце нерівність

$$P\left\{ \left\|X(t)\right\|_p > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2C^{2/p}} \right\}. \tag{4.22}$$

Доведення. Нерівність (4.22) випливає з наслідку 2.1 з роботи [70]. □

Лема 4.3. Нехай $X(t) = \{X(t), t \in [0,T]\}$ – вимірний гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$. Якщо $X_N(t)$ – модель цього процессу, тоді справедлива наступна оцінка

$$\int_0^T \Big(E\big(X(t) - X_N(t)\big)^2 \Big)^{p/2} dt \leq L_N^{p/2}, \tag{4.23}$$

де

$$L_N = \frac{\sigma^2 K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)} \left(\frac{8\pi T^{\frac{2(2p+1)}{p}}}{a(2p+1)^{2/p}} + \frac{16\sqrt{2\pi a}(2a+1)}{a} \cdot \frac{T^{\frac{3p+2}{p}}}{\left(\frac{3p}{2}+1\right)^{2/p}} + \right.$$
$$+ \left(16(2a+1)^2 + \frac{8\pi}{a}(2a^2+3a+1)\right) \frac{T^{\frac{2(p+1)}{p}}}{(p+1)^{2/p}} +$$
$$\left. + 8(2a+1)\frac{\sqrt{2\pi a}}{a}(2a^2+3a+1) \frac{T^{\frac{p+2}{p}}}{\left(\frac{p}{2}+1\right)^{2/p}} + \frac{2\pi}{a}(2a^2+3a+1)^2 T^{2/p} \right). \tag{4.24}$$

Доведення. Застосовуючи оцінки (4.9) та (4.14) з леми 4.1, отримаємо

$$E\big(X(t)-X_N(t)\big)^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}\big(a_{k1}^2(t)+a_{k2}^2(t)\big),$$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\big(a_{k1}^2(t)+a_{k2}^2(t)\big)\le\frac{\sigma^2K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)}\Bigg(\frac{2\sqrt{2\pi a}}{a}t^2+ \\ +4(2a+1)t+\frac{\sqrt{2\pi a}}{a}(2a^2+3a+1)\Bigg)^2.$$

Отже,

$$\left(\int_0^T\Big(E\big(X(t)-X_N(t)\big)^2\Big)^{p/2}dt\right)^{2/p}\le \\ \le\frac{\sigma^2K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)}\Bigg(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5\Bigg)= \\ =\frac{\sigma^2K^2}{(\pi a)^{1/2}(N+2)}\Bigg(\frac{8\pi T^{\frac{2(2p+1)}{p}}}{a(2p+1)^{2/p}}+\frac{16\sqrt{2\pi a}(2a+1)}{a}\cdot\frac{T^{\frac{3p+2}{p}}}{\left(\frac{3p}{2}+1\right)^{2/p}}+ \\ +\left(16(2a+1)^2+\frac{8\pi}{a}(2a^2+3a+1)\right)\cdot\frac{T^{\frac{2(p+1)}{p}}}{(p+1)^{2/p}}+ \\ +8(2a+1)\frac{\sqrt{2\pi a}\cdot T^{\frac{p+2}{p}}}{a\left(\frac{p}{2}+1\right)^{2/p}}(2a^2+3a+1)+\frac{2\pi}{a}(2a^2+3a+1)^2T^{2/p}\Bigg).$$

де

$$I_1=\left(\int_0^T\left(\frac{8\pi}{a}t^4\right)^{p/2}dt\right)^{2/p},$$

$$I_2=\left(\int_0^T\left(\frac{16\sqrt{2\pi a}(2a+1)}{a}t^3\right)^{p/2}dt\right)^{2/p},$$

$$I_3=\left(\int_0^T\left((16(2a+1)^2+\frac{8\pi}{a}(2a^2+3a+1))t^2\right)^{p/2}dt\right)^{2/p},$$

$$I_4=\left(\int_0^T\left(8(2a+1)\frac{\sqrt{2\pi a}}{a}(2a^2+3a+1)t\right)^{p/2}dt\right)^{2/p},$$

$$I_5=\left(\int_0^T\left(\frac{2\pi}{a}(2a^2+3a+1)^2\right)^{p/2}dt\right)^{2/p}\Bigg)$$

.

$\square$

Теорема 4.6. Нехай $X(t) = \{X_N(t), t \in [0,T]\}$ – вимірний гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$. Модель $X_N(t)$ наближає процес $X(t)$ у просторі $L_p([0,T])$ з точністю β і надійністю $1-\alpha, 0 < \alpha < 1$, якщо $N > 0$ таке, що

$$L_N \leq \frac{\beta^2}{p} \tag{4.25}$$

та

$$L_N \leq \frac{\beta^2}{\Big(2\big(\ln 2\big)\Big)}, \tag{4.26}$$

де L_N визначається формулою (4.24).

Доведення. З нерівності (4.22) і леми 4.3, якщо $\varepsilon > L_N^{1/p} p^{1/2}$ отримаємо

$$P\left\{ \|X(t) - X_N(t)\|_p > \varepsilon \right\} \leq 2\exp\left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2L_N} \right\}. \tag{4.27}$$

Якщо в (4.27) замість ε покласти β, тоді умови теореми виконуються, якщо

$$\beta \geq L_N^{p/2} p^{1/2},$$

$$2\exp\left\{ -\frac{\beta^2}{2L_N} \right\} \leq \alpha,$$

тобто, якщо виконуються умови (4.25) і (4.6), тоді має місце теорема. $\square$

4.4 Висновки до четвертого розділу

У даному розділі побудовано моделі, які наближають гауссовий процес зі стійкою кореляційною функцією $\rho_2(h) = B^2 \exp\left\{-d|h|^2\right\}$, $d > 0$ із заданою надійністю $1-\alpha, 0 < \alpha < 1$ та точністю $\beta > 0$ в просторах $C([0,T])$ і $L_p([0,T]), p \geq 1$.

Розділ 5

НОВИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ДОВІРЧОГО ІНТЕРВАЛУ ДЛЯ ПАРАМЕТРА ПРОЦЕСУ ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА

Нехай $\xi(t)$ – процес Орнштейна-Уленбека з нульовим середнім, що виходить з нуля: $d\xi(t) = -\theta_0\xi(t)dt + \sigma dW(t), \xi(0) = 0$. За спостереженнями за траєкторією процесу $\xi^T = \{\xi_t : 0 \leq t \leq T\}$ на проміжку часу довжиною T знайдено оцінку невідомого параметра θ_0 і побудовано для нього довірчий інтервал [7]. Оцінка для параметра σ не знаходиться, оскільки, відомо, що він відновлюється з будь-якої частини спостереженої траєкторії процесу $\xi(t) = \sigma W(t)$. Цей факт випливає з того, що із властивостей бакстерівських сум з якою завгодно наперед заданою точністю, величину $\sum\limits_{k=1}^{n}(W(t_k) - W(t_{k-1}))^2$, де $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{k-1} < t_k = t$ можна замінити на t, звідки випливає, що як завгодно точною оцінкою параметра σ^2 буде величина $\frac{1}{t}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}))^2$, тобто параметр σ можна вважати відомим.

5.1 Основні результати

Нехай маємо процес Орнштейна-Уленбека $d\xi(t) = -\theta_0\xi(t)dt + \sigma dW(t)$. Оцінимо параметр $0 < \theta_0 \leq L < +\infty$ цього процесу. У якості оцінки використаємо величину

$$\theta_T = -\int_0^T \xi(t)d\xi(t) \times \left(\int_0^T \xi^2(t)dt\right)^{-1}.$$

Тоді, підставивши цю оцінку замість $d\xi(t) = -\theta_0\xi(t)dt + \sigma dW(t)$, отримаємо

$$\theta_T - \theta_0 = -\sigma\int_0^T \xi(t)dW(t) \times \left(\int_0^T \xi^2(t)dt\right)^{-1}.$$

Довірчий інтервал для θ_0 можна побудувати, наприклад, за допомогою нерівності $P\{\sqrt{T}|\theta_T-\theta_0|\le R\}\ge 1-\delta$.

Звідки випливає, що з імовірністю, не меншою, ніж $1-\delta$ маємо

$$-\frac{R}{\sqrt{T}}\le\theta_0-\theta_T\le\frac{R}{\sqrt{T}},$$

$$-\frac{R}{\sqrt{T}}+\theta_T\le\theta_0\le\theta_T+\frac{R}{\sqrt{T}}.$$

Нерівність $P\{\sqrt{T}|\theta_T-\theta_0|\le R\}\ge 1-\delta$ випливає з нерівності $P\{\sqrt{T}|\theta_T-\theta_0|>R\}\le\delta$, яка у свою чергу, випливає з оцінки

$$P\{\sqrt{T}|\theta_T-\theta_0|>R\}\le P\{\sqrt{T}(\theta_T-\theta_0)>R\}+P\{-\sqrt{T}(\theta_T-\theta_0)>R\}.$$

Позначимо $\displaystyle\int_0^T\xi(t)dW(t)=\eta(t)$ та $\int_0^T\xi^2(t)dt=\nu(t)$. Нехай $z>0$ – деяке фіксоване число, тоді для першого доданку в правій частині останньої нерівності маємо,

$$\begin{aligned}
&P\{\sqrt{T}(\theta_T-\theta_0)>R\}=\\
&\quad=\Bigg\{-\sigma\eta(t)\times\Bigg(\nu(t)\Bigg)^{-1}>R\Bigg\}=P\Bigg\{-\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\eta(t)>zR\frac{1}{T}\nu(t)\Bigg\}=\\
&\quad=P\Bigg\{-\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\eta(t)-\frac{1}{2}\Big(\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\Big)^2\nu(t)>\Big(zR-\frac{1}{2}(z\sigma)^2\Big)\cdot\frac{1}{T}\nu(t)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Нехай $\varepsilon>0$ – довільне. Розглянемо події

$$A_\varepsilon=\Bigg\{\omega:\frac{1}{T}\int_0^T\xi^2(t)dt<\varepsilon\Bigg\},\overline{A_\varepsilon}=\Bigg\{\omega:\frac{1}{T}\int_0^T\xi^2(t)dt\ge\varepsilon\Bigg\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&P\Bigg\{-\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\eta(t)-\frac{1}{2}\Big(\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\Big)^2\nu(t)>\Big(zR-\frac{1}{2}(z\sigma)^2\Big)\cdot\frac{1}{T}\nu(t)\Bigg\}=\\
&\quad=P\Bigg\{-\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\eta(t)-\frac{1}{2}\Big(\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\Big)^2\nu(t)>\Big(zR-\frac{1}{2}(z\sigma)^2\Big)\cdot\frac{1}{T}\nu(t),A_\varepsilon\Bigg\}+
\end{aligned}$$

$$+P\Bigg\{-\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\eta(t)-\frac{1}{2}\bigg(\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\bigg)^2\nu(t)>\bigg(zR-\frac{1}{2}(z\sigma)^2\bigg)\cdot\frac{1}{T}\nu(t),\overline{A_\varepsilon}\Bigg\}\leq$$

$$\leq P\Bigg\{-\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\eta(t)-\frac{1}{2}\bigg(\frac{z^2\sigma^2}{T}\bigg)\nu(t)>\bigg(zR-\frac{1}{2}(z\sigma)^2\bigg)\cdot\varepsilon\Bigg\}+$$

$$+P\Bigg\{\frac{1}{T}\nu(t)<\varepsilon\Bigg\}=P\Bigg\{\exp\bigg\{-\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\eta(t)-\frac{1}{2}\bigg(\frac{z^2\sigma^2}{T}\bigg)\nu(t)\bigg\}>$$

$$>\exp\bigg\{-\bigg(zR-\frac{1}{2}(z\sigma)^2\bigg)\cdot\varepsilon\bigg\}\Bigg\}+\Bigg\{\frac{1}{T}\nu(t)<\varepsilon\Bigg\}.$$

Нехай $z>0, \varepsilon>0$ – довільні величини, тоді для

$$P\{-\sqrt{T}(\theta_T-\theta_0)>R\}=P\Bigg\{\sigma\eta(t)\times(\nu(t))^{-1}>R\Bigg\}=$$

$$=P\Bigg\{\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\eta(t)>zR\frac{1}{T}\nu(t)\Bigg\}=P\Bigg\{\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\eta(t)-\frac{1}{2}\bigg(\frac{z\sigma}{\sqrt{T}}\bigg)^2\nu(t)>$$

$$>\bigg(zR-\frac{1}{2}(z\sigma)^2\bigg)\cdot\frac{1}{T}\nu(t)\Bigg\}.$$

Звідки випливає

$$P\{-\sqrt{T}(\theta_T-\theta_0)>R\}\leq\exp\Bigg\{-\bigg(zR-\frac{1}{2}(zR)^2\bigg)\cdot\varepsilon\Bigg\}+P\Bigg\{\frac{1}{T}\nu(t)<\varepsilon\Bigg\}.$$

Тоді маємо

$$P\{\sqrt{T}|\theta_T-\theta_0|>R\}\leq 2\exp\Bigg\{-\bigg(zR-\frac{1}{2}(zR)^2\bigg)\cdot\varepsilon\Bigg\}+2P\Bigg\{\frac{1}{T}\nu(t)<\varepsilon\Bigg\}. \tag{5.1}$$

Мінімізувавши праву частину останньої нерівності по $0<z<+\infty$, отримуємо

$$P\{\sqrt{T}|\theta_T-\theta_0|>R\}\leq 2\exp\Bigg\{-\frac{2R}{\sigma^2}\cdot\varepsilon\Bigg\}+2P\Bigg\{\frac{1}{T}\nu(t)<\varepsilon\Bigg\}.$$

Побудуємо оцінку зверху для ймовірності $P\Bigg\{\frac{1}{T}\nu(t)<\varepsilon\Bigg\}$. Нехай $\chi(A)$ -

індикатор події A, тоді

$$P\left\{\frac{1}{T}\nu(t) < \varepsilon\right\} = E\chi\left\{\frac{1}{T}\nu(t) < \varepsilon\right\} = E\chi\left\{\frac{1}{T}\int_0^T W^2(t)dt < \varepsilon\right\} \cdot \rho(W(\cdot)), \tag{5.2}$$

де

$$\rho(W(\cdot)) = \frac{d\mu^\xi}{d\mu^W}\exp\left\{-\frac{\theta_0}{\sigma}\int_0^T W(t)dW(t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta_0^2}{\sigma^2}\int_0^T W^2(t)dt\right\}$$

є формулою щільності дифузійної міри $\mu^\xi(A)$, породженої на просторі $C[0,T]$ процесом

$$\xi(t), 0 \le t \le T, d\xi(t) = -\theta_0\xi(t)dt + \sigma dW(t), \xi(0) = 0$$

відносно опорної міри $\mu^W(A)$, породженої на $C[0,T]$ процесом $\sigma W(t)$, $0 \le t \le T$ [16],[8]. Зробимо заміну

$$\kappa(t) = \int_0^T W(t)dW(t)$$

та $\zeta(t) = \displaystyle\int_0^T W^2(t)dt$, тоді

$$\begin{aligned}
&E\chi\left\{\frac{1}{T}\zeta(t) < \varepsilon\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\theta_0}{\sigma}\kappa(t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta_0^2}{\sigma^2}\zeta(t)\right\} = \\
&\quad = E\chi\left\{\zeta(t) < \varepsilon T\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\theta_0}{\sigma}\kappa(t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta_0^2}{\sigma^2}\zeta(t)\right\} = \\
&\quad = e^{\varepsilon T} E\chi\left\{-\zeta(t) > -\varepsilon T\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\theta_0}{\sigma}\kappa(t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta_0^2}{\sigma^2}\zeta(t) - \varepsilon T\right\} \le \\
&\quad \le e^{\varepsilon T} E\chi\left\{\zeta(t) < \varepsilon T\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\theta_0^2}{\sigma^2}\kappa(t) - \left(\frac{\theta_0^2}{2\sigma^2} + 1\right)\zeta(t)\right\}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Використовуючи нерівність Гельдера, з (5.3) маємо при

$$p = 1 + \frac{\theta_0^2}{2\sigma^2}, q = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{2\sigma^2}{\theta_0^2},$$

в силу того, що

$$E\exp\left\{q\Big(-\frac{\theta_0}{\sigma}\kappa(t)-\Big(\frac{\theta_0^2}{\sigma^2}+1\Big)\zeta(t)\Big)\right\}=$$

$$=E\exp\left\{\Big(1+\frac{2\sigma^2}{\theta_0^2}\Big)\Big(-\frac{\theta_0}{\sigma}\kappa(t)-\Big(\frac{\theta_0^2}{\sigma^2}+1\Big)\zeta(t)\Big)\right\}=1,$$

а також $\left(1+\frac{2\sigma^2}{\theta_0^2}\right)^2\left(\frac{\theta_0}{\sigma}\right)=\left[\frac{\theta_0}{\sigma}+\frac{2\sigma}{\theta_0}\right]^2$, та

$$\Big(1+\frac{2\sigma^2}{\theta_0^2}\Big)\Big(\frac{\theta_0^2}{2\sigma^2}+1\Big)=\frac{\theta_0^2}{2\sigma^2}+2+\frac{2\sigma^2}{\theta_0^2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\theta_0^2}{2\sigma}+4+\frac{4\sigma^2}{\theta_0^2}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\theta_0}{\sigma}+\frac{2\sigma}{\theta_0}\Big)^2,$$

маємо

$$e^{\varepsilon T}E\chi\Big\{\zeta(t)<\varepsilon T\Big\}\cdot\exp\left\{-\frac{\theta_0}{\sigma}\kappa(t)-\Big(\frac{\theta_0^2}{2\sigma^2}+1\Big)\zeta(t)\right\}\le$$

$$\le e^{\varepsilon T}\left[E\chi^p\Big\{\zeta(t)<\varepsilon T\Big\}\right]^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\left[E\exp\left\{q\Big(-\frac{\theta_0}{\sigma}\kappa(t)-\Big(\frac{\theta_0^2}{2\sigma^2}+1\Big)\zeta(t)\Big)\right\}\right]^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le e^{\varepsilon T}\left(P\Big\{\zeta(t)<\varepsilon T\Big\}\right)^{\frac{2\sigma^2}{\theta_0^2+2\sigma^2}}\le e^{\varepsilon T}\left(P\Big\{T\int_0^1W^2(sT)ds<\varepsilon T\Big\}\right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}}. \tag{5.4}$$

Застосовуємо властивість самоподібності вінерівського процесу

$$\frac{W(sT)}{\sqrt{T}}=\widetilde{W}(s),$$

з (5.4) при $\theta_0^2\le L^2<+\infty$ отримуємо

$$P\Big\{\frac{1}{T}\nu(t)dt<\varepsilon\Big\}\le$$

$$\le e^{\varepsilon T}\left(P\Big\{\int_0^1W^2(st)ds<\varepsilon\Big\}\right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}}=$$

$$= e^{\varepsilon T}\left(P\left\{\int_0^1 \left(\frac{W(sT)}{\sqrt{T}}\right)^2 ds < \frac{\varepsilon}{T}\right\}\right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}} =$$

$$= e^{\varepsilon T}\left(P\left\{\int_0^1 \widetilde{W}(s)ds < \frac{\varepsilon}{T}\right\}\right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}}.$$

Оскільки, $0 \leq \theta_0 \leq L < +\infty$ отримаємо $\dfrac{1}{p} = \dfrac{2\sigma^2}{\theta_0^2 + 2\sigma^2} \geq \dfrac{2\sigma^2}{L^2 + 2\sigma^2}$. Таким чином

$$P\left\{\frac{1}{T}\nu(t) < \varepsilon\right\} \leq e^{\varepsilon T}\left(P\left\{\int_0^1 \widetilde{W}^2(s)ds < \frac{\varepsilon}{T}\right\}\right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}}. \qquad (5.5)$$

5.2 Побудова оцінки зверху для $P\left\{\int_0^1 \widetilde{W}^2(s)ds < \frac{\varepsilon}{T}\right\}$.

Використаємо доведення теореми, наведене у роботі Г. Н. Ситої [46]. Застосуємо формулу оберненого перетворення Лапласа:

$$P\left\{\int_0^1 W^2(t)dt \leq \varepsilon\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\psi(s)},$$

де інтеграл розуміється в сенсі головного значення $s = \gamma + i\sigma$ та

$$\psi(s) = -\ln s + \varepsilon s - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + 2\lambda_k s),$$

де $\lambda_k = \dfrac{1}{\pi^2\left(k - \frac{1}{2}\right)^2}$, $k = 1, 2, ...$ Невідоме ε визначається з рівняння

$$\varepsilon - \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + 2\lambda_k s)\right) = 0.$$

Знайдемо значення $\gamma = \gamma(\varepsilon)$:

$$\varepsilon - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi^2\left(k - \frac{1}{2}\right)^2} + 2\gamma\right) = 0,$$

звідки

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{-\gamma}}\operatorname{tg}\sqrt{-2\gamma}.$$

Оскільки $\gamma \to +\infty$, то використаємо формулу тригонометричної функції від комплексного аргументу через експоненту

$$\operatorname{tg}\sqrt{-u} = \operatorname{tg}(i\sqrt{u}) = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}},$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{4i\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{e^{-\sqrt{2\gamma}} - e^{\sqrt{2\gamma}}}{i \cdot (e^{+\sqrt{2\gamma}} - e^{\sqrt{2\gamma}})}.$$

При $\gamma \to +\infty$ вираз $\dfrac{e^{-\sqrt{2\gamma}} - e^{\sqrt{2\gamma}}}{e^{+\sqrt{2\gamma}} - e^{\sqrt{2\gamma}}} \to -1$. Звідки отримуємо:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\gamma}},$$

$$\gamma = \frac{1}{8\varepsilon^2}.$$

Вважаючи надалі $\gamma = \dfrac{1}{8\varepsilon^2}$, отримаємо:

$$Re\psi(s) = A(\gamma) + B(\gamma, \sigma),$$

$$A(\gamma) = -\frac{1}{2}\ln\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^2\right] - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\lambda_k\sigma}{1 + 2\lambda_k\gamma}\right)^2\Bigg], \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} Im\psi(s) &= \varepsilon\sigma - \operatorname{arctg}\frac{\sigma}{\gamma} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2\lambda_k\sigma}{1 + 2\lambda_k\gamma} = \\ &= \left[\frac{\sigma}{\gamma} - \operatorname{arctg}\frac{\sigma}{\gamma}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\lambda_k\sigma}{1 + 2\lambda_k\gamma} - \operatorname{arctg}\frac{2\lambda_k\sigma}{1 + 2\lambda_k\gamma}\right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Зобразимо $P\left\{\int_0^T W^2(t)dt \leq \varepsilon\right\}$ у вигляді суми:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\psi(s)} = I_1(\psi) + I_2(\psi) + I_3(\psi),$$

де

$$I_1(\psi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma| > \gamma\tau} e^{\psi(s)}ds,$$

$$I_2(\psi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma| < \gamma\tau} e^{Re\psi(s)}[e^{iIm\psi(s)} - 1]ds,$$

$$I_2(\psi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|<\gamma\tau} e^{Re\psi(s)}ds.$$

Оцінимо кожен з доданків:

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma|>\gamma\tau} e^{\psi(s)}ds = e^{A(\gamma)}\frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma|>\gamma\tau} e^{B(\gamma,\sigma)}d\sigma.$$

Оскільки $\dfrac{1}{\pi^2\Bigl(k-\frac{1}{2}\Bigr)^2} > 0$, то при $k \to \infty$ маємо $\dfrac{\gamma_0}{\pi^2\bigl(k-\frac{1}{2}\bigr)^2+2\gamma_0} \to 0$ та

$$\int_{|\sigma|>\gamma\tau} e^{B(\gamma_0,\sigma)}d\sigma <$$

$$< \int_{|\sigma|>\gamma\tau}\left(\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt[4]{1+\left(\frac{2\sigma}{\pi^2\bigl(k-\frac{1}{2}\bigr)^2+2\gamma_0}\right)^2}\right)^{-1}d\sigma <$$

$$< \prod_{k=5}^{\infty}\left(\sqrt[4]{1+\left[\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\frac{\gamma_0}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}\Bigr)^2\right]^{-\frac{4}{5}}\cdot\Bigl(\frac{2\gamma_0}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}\Bigr)^2}\right)^{-1}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\Bigl(\frac{2\sigma}{\pi^2(4-\frac{1}{2})^2}+2\gamma_0\Bigr)^2\right)^{-1}d\sigma = \frac{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}{2}\pi\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left[1+\left[\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\frac{\gamma_0}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}\Bigr)^2\right]^{-\frac{4}{5}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\Bigl(\frac{2\gamma_0}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}\Bigr)^2\right]\right\} < \frac{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}{2}\pi\times$$

$$\times\exp\left\{\left[\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\frac{\gamma_0}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}\Bigr)^2\right]^{-\frac{4}{5}}+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\frac{\gamma_0}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}\Bigr)^2\right]^{-\frac{3}{5}}-\left[\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\frac{\gamma_0}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}\Bigr)^2\right]^{-\frac{1}{5}}\right\}.$$

Введемо позначення $\tau = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_0}{\pi^2\bigl(k-\frac{1}{2}\bigr)^2}+2\gamma_0\right)^2$. Тоді

$$|I_1| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma|>\gamma\tau} e^{\psi(s)}ds = e^{A(\gamma)}\frac{1}{2\pi}\Bigl(\frac{49}{8}\pi^2+\gamma\Bigr)\pi\cdot\exp\Bigl\{\tau^{-\frac{4}{5}}+\tau^{-\frac{3}{5}}+\tau^{-\frac{1}{5}}\Bigr\} =$$

$$= e^{A(\gamma)}\Bigl(\frac{49}{16}\pi^2+\frac{\gamma}{2}\Bigr)\exp\Bigl\{\tau^{-\frac{4}{5}}+\tau^{-\frac{3}{5}}+\tau^{-\frac{1}{5}}\Bigr\}\Bigr). \tag{5.8}$$

Оцінимо другий доданок. Спочатку оцінимо $|e^{iIm\psi(s)}-1|$. Застосовуючи формулу Тейлора до $\operatorname{arctg}\dfrac{\sigma}{\gamma}$ та $\operatorname{arctg}\dfrac{2\lambda_{l(k,n)}}{1+2\lambda_k\gamma}$, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&|e^{iIm\psi(s)}-1| \le \\
&\quad \le |Im\psi(s)| \le \frac{1}{3}\left|\frac{\sigma}{\gamma_0}\right|^3 + \frac{1}{6}\left|\frac{\sigma}{\gamma_0}\right|^3 \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\gamma_0}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}\right) \le \\
&\quad \le \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_0}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2}\right)^2 + 2\gamma_0\right]^{-\frac{6}{5}} + \frac{2}{3}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_0}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}\right)^2\right]^{-\frac{6}{5}} \times \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_0}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma_0}\right)^2,
\end{aligned}
$$

або

$$
|e^{i\min\psi(s)}-1| \le \frac{1}{3}\tau^{-\frac{6}{5}} + \frac{2}{3}\tau^{-\frac{1}{5}}.
$$

Отже, для

$$
I_2(\psi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|<\gamma\tau} e^{Re\psi(s)}[e^{iIm\psi(s)}-1]ds
$$

отримуємо

$$
|I_2| \le \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{3}\tau^{-\frac{6}{5}} + \frac{1}{3}\tau^{-\frac{1}{5}}\right)\int_{|\sigma|>\gamma\tau} e^{\mathrm{Re}\ \psi(s)}ds. \tag{5.9}
$$

Вираз для $\displaystyle\int_{|\sigma|>\gamma\tau} e^{Re\psi(s)}ds$ буде знайдено в оцінці частини $I_3(\psi)$. Оцінимо $I_3(\psi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{|\sigma|<\tau\gamma} e^{e^{Re\psi(s)}}ds$:

$$
|I_3| \le \frac{1}{2\pi}e^{A(\gamma)} \cdot \int_{|\sigma|>\gamma\tau} e^{B(\gamma,\sigma)}d\sigma.
$$

Позначимо

$$
\alpha(\gamma) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\gamma}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma}\right)^2.
$$

З формули (5.6) отримуємо

$$
\begin{aligned}
B(\gamma,\sigma) &= -\frac{1}{2}\ln\left[1+\Big(\frac{\sigma}{\gamma}\Big)^2\right] - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left[1+\Big(\frac{2\lambda_k\sigma}{1+2\lambda_k\gamma}\Big)^2\right] \le \\
&\le -\frac{1}{2}\Big(\frac{\sigma}{\gamma}\Big)^2\left(1-\Big(\frac{\sigma}{\gamma}\Big)^2\right)\alpha(\gamma).
\end{aligned}
$$

Звідки

$$\int_{|\sigma|>\gamma,\tau} e^{B(\gamma,\sigma)}d\sigma \le \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha(\gamma)}}\int_{|u|>\tau\sqrt{\alpha(\gamma)}} e^{-\frac{u^2}{2}}du \times e^{-\frac{1}{2}\tau^{-8/5}\alpha(\gamma)}.$$

Оскільки

$$\int_{|u|>\tau\sqrt{\alpha(\gamma)}} e^{-\frac{u^2}{2}}du \le \sqrt{2\pi},$$

маємо

$$|I_3| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}e^{A(\gamma)} \times \exp\left\{\frac{1}{2}\tau^{-\frac{8}{5}}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2+2\gamma}\right)^2\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{A(\gamma)}\cdot\frac{\gamma}{\sqrt{1+2\tau}} \times \exp\left\{\frac{1}{2}\tau^{-\frac{8}{5}}+\tau^{-\frac{3}{5}}\right\} \le \frac{e^{A(\gamma)\gamma}}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{\frac{1}{2}\tau^{-\frac{8}{5}}+\tau^{-\frac{3}{5}}\right\} \tag{5.10}$$

Отже, з нерівностей (5.8), (5.9), (5.10) випливає:

$$P\left\{\int_0^1 W^2(t)dt < \varepsilon\right\} \le$$

$$\le e^{A(\gamma)}\cdot\left[\left(\frac{49}{16}\pi^2+\frac{\gamma}{2}\right)\exp\left\{\tau^{-\frac{4}{5}}+\tau^{-\frac{3}{5}}+\tau^{\frac{1}{5}}\right\}+\left(\frac{1}{3}\tau^{-\frac{6}{5}}+\frac{2}{3}\tau^{-\frac{1}{5}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\gamma}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{\frac{1}{2}\tau^{-\frac{8}{5}}+\tau^{-\frac{3}{5}}\right\}+\frac{\gamma}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{\frac{1}{2}\tau^{-\frac{8}{5}}+\tau^{-\frac{3}{5}}\right\}\right]. \tag{5.11}$$

Оскільки $\gamma = \dfrac{1}{8\varepsilon^2}$, при $\varepsilon\to\infty$, то $\tau\to\infty$. Звідси (5.11) можна представити у вигляді:

$$P\left\{\int_0^1 W^2(t)dt\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{-\varepsilon\gamma-\ln\gamma-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2\gamma}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2}\right)\right\}\times$$

$$\times\frac{\gamma}{2\sqrt{\pi\tau}}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\tau^{-\frac{8}{5}}+\tau^{-\frac{3}{5}}\right\}(1+o(1)),$$

А тому при $\gamma \to \infty$, маємо $\exp\left\{\frac{1}{2}\tau^{-\frac{8}{5}} + \tau^{-\frac{3}{5}}\right\} \to 1$. Звідси

$$\begin{aligned}
&P\left\{\int_0^1 W^2(t)dt\right\} \le \\
&\quad \le \exp\left\{-\varepsilon\gamma - \ln\gamma - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1 + \frac{2\gamma}{\pi^2(k-\frac{1}{2})^2}\right)\right\}\times \\
&\quad \times\frac{\gamma}{2\sqrt{\pi\tau}}\cdot(1+o(1)),
\end{aligned} \tag{5.12}$$

де

$$o(1) = \frac{\left(\frac{49}{16}\pi^2 + \frac{\gamma}{2}\right)\exp\left\{\tau^{-\frac{4}{5}} + \tau^{-\frac{3}{5}} + \tau^{\frac{1}{5}}\right\}}{\frac{\gamma}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{\frac{1}{2}\tau^{-\frac{8}{5}} + \tau^{-\frac{3}{5}}\right\}} + \left(\frac{1}{3}\tau^{-\frac{6}{5}} + \tau^{-\frac{1}{5}}\right). \tag{5.13}$$

Оцінка (5.12) була отримана в роботах [46] і [47]. Підставивши замість $\gamma = \dfrac{1}{8\varepsilon^2}$ і за допомогою деяких перетворень і пакета Maple 13 отримаємо

$$P\left\{\int_0^1 W^2(s)ds < \varepsilon\right\} = \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{8\varepsilon}\right\}(1+o(1)), \tag{5.14}$$

де

$$\begin{aligned}
o(1) = {}& \frac{\sqrt{\pi}\varepsilon^{3/2}}{8}\left(49\pi^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\exp\left\{\tau^{-\frac{4}{5}} + \tau^{-\frac{3}{5}} + \tau^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{2}\tau^{-\frac{8}{5}}\right\}+ \\
&+\left(\frac{1}{3}\tau^{-\frac{6}{5}} + \frac{2}{3}\tau^{-\frac{1}{5}}\right),
\end{aligned} \tag{5.15}$$

при

$$\tau = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8\varepsilon^2\pi^2(k-\frac{1}{2})^2 + 2}\right)^2.$$

Оцінка (5.14) була отримана в роботі [47]. Ми отримали конкретний вигляд $o(1)$. На основі отриманого вище сформулюємо теорему:

Теорема 5.1. Нехай $\xi(t)$ – процес Орнштейна-Уленбека з нульовим середнім, що виходить з нуля: $d\xi(t) = -\theta_0\xi(t)dt + \sigma dW(t), \xi(0) = 0$. Якщо

$0 < \theta_0 \leq L < +\infty$, то справедлива оцінка

$$P\{|\theta_T - \theta_0|\} > 2\exp\left\{ -\frac{\sqrt{T}}{2\sigma^2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{L^2 + 2\sigma^2}} \right\} + 4\left(\frac{\sigma^2}{\pi^2 T^2 (L^2 + 2\sigma^2)} \right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}} \times$$
$$\times \exp\left\{ -T\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\sigma^2}{L^2 + 2\sigma^2}} \right) \right\}(1 + o(1)), \tag{5.16}$$

де $o(1)$ записана в явному вигляді, $0 < T < +\infty$ - час спостереження за процесом $\xi(t)$.

Доведення. Оскільки,

$$P\{\sqrt{T}|\theta_T - \theta_0| > R\} \leq$$
$$\leq 2\exp\left\{ -\frac{2R^2}{\sigma^2} \cdot \varepsilon \right\} + 2e^{\varepsilon T}\left(P\left\{ \int_0^1 W^2(s)ds < \frac{\varepsilon}{T} \right\} \right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}},$$

то, використовуючи оцінку (5.14) отримаємо

$$P\left\{ \int_0^1 W^2(s)ds < \frac{\varepsilon}{T} \right\} = \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi T}} \exp\left\{ -\frac{T}{8\varepsilon} \right\}(1 + o(1)). \tag{5.17}$$

Звідси маємо

$$\left(P\left\{ \int_0^1 \tilde{W}^2(s)ds = \frac{\varepsilon}{T} \right\} \right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}} =$$
$$= \left(\frac{4\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi T}} \exp\left\{ -\frac{T}{8\varepsilon} \right\}(1 + o(1)) \right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}} =$$
$$= \left(\frac{4\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi T}} \right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{T}{8\varepsilon} \cdot \frac{2\sigma^2}{L^2 + 2\sigma^2} \right\}(1 + o(1)).$$

Тоді одержимо наступне

$$2e^{\varepsilon T}\left(P\left\{ \int_0^1 \tilde{W}^2(s)ds < \frac{\varepsilon}{T} \right\} \right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}} =$$
$$= 2e^{\varepsilon T}\left(\frac{4\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi T}} \exp\left\{ -\frac{T}{8\varepsilon} \right\}(1 + o(1)) \right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}} =$$

$$= 2\left(\frac{4\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi T}}\right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}} \cdot \exp\left\{\varepsilon T - \frac{T}{8\varepsilon} \cdot \frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}\right\}(1+o(1)) =$$

$$= 2\left(\frac{4\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\pi T}}\right)^{\frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{T}{\varepsilon}\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2\sigma^2}{L^2+2\sigma^2} - \varepsilon^2\right)\right\}(1+o(1)).$$

Фіксуємо таке $\varepsilon > 0$, щоб

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma^2}{L^2+2\sigma^2} - \varepsilon^2 > 0,$$

тобто

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}},$$

наприклад

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}}.$$

Нехай

$$R = R(T) \to +\infty, \frac{R(T)}{\sqrt{T}} \to 0, T \to +\infty,$$

наприклад $R = \sqrt[4]{T}$. Тоді права частина останньої нерівності набуває вигляду

$$P\{\sqrt{T}|\theta_T - \theta_0| > R\} \leq$$

$$\leq 2\exp\left\{ -\frac{\sqrt{T}}{2\sigma^2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}}\right\} + 4\left(\frac{\sigma^2}{\pi^2 T^2 (L^2+2\sigma^2)}\right)^{\frac{2\sigma^2}{4(L^2+2\sigma^2)}} \times$$

$$\times \exp\left\{ -T\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\sigma^2}{L^2+2\sigma^2}}\right)\right\}(1+o(1)).$$

Теорему 5.1 доведено. □

5.3 Висновки до п'ятого розділу

У цьому розділі наведено новий метод побудови довірчого інтервалу для параметра θ_0 процесу Орнштейна-Уленбека.

Розділ 6

ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ

У розділі 2 було знайдено оцінки розподілу супремуму гауссових стаціонарних процесів зі стійкою кореляційною функцією, досліджена поведінка на нескінченності та знайдені деякі аналітичні властивості цих процесів. Також комплексні гауссові процеси зі стійкою кореляційною функцією були досліджені у роботі [73]. Моделі деяких гауссових стаціонарних процесів зі стійкими кореляційними функціями будувались в роботах [73], [96]. У роботі [69] було знайдено нові верхні та нижні границі для розподілу квадратичних форм гауссових випадкових величин, а також границь квадратичних форм, на основі цих оцінок пропонується критерій для перевірки гіпотези про функцію кореляції $\rho(\tau)$ гауссового стохастичного процесу. А у роботі [80] доведено нерівності для розподілів квадратичних форм із квадратично-гауссових випадкових величин та розподілів супремума квадратичних форм із квадратично-гауссових випадкових процесів. Ці нерівності дозволяють дослідити сумісні розподіли оцінок кореляційних функцій гауссових процесів.

Розділ 6 присвячено критерію для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією. Доведено лему про прийняття гіпотези $\mathbb{H}$ для процесу загального виду, розглянуто теорему про наближення кореляційної функції корелограмою. Сформульовано і доведено лему про прийняття гіпотези $\mathbb{H}$ для процесу, у якого кореляційна функція стійка і має вигляд

$$\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\},$$

де $0 < \alpha \leq 2$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$.

Основним результатом є перевірка гіпотези, яка полягає у тому, що кореляційна функція центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією має вигляд

$$\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\},$$

де $0 < \alpha \leq 2$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$.

6.1 Критерій для перевірки гіпотези

Оскільки кореляційна функція є однією з найважливіших характеристик випадкових процесів, то постає питання оцінювання і вигляду цієї функції для випадкового процесу, побудова критеріїв для її ідентифікації. У цьому підрозділі побудовано критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією $\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}$, де $0 < \alpha \leq 2$, $d > 0$.

Наведемо означення дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією.

Означення 6.1. [34] Дійсний стаціонарний гауссовий процес

$$X_\alpha = \left\{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\right\}, 0 < \alpha \leq 2,$$

такий що

$$EX_\alpha(t) = 0,$$

$$\rho_\alpha(\tau) := EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}, \alpha > 0, d > 0$$

називається дійсним гауссовим стаціонарним процесом зі стійкою кореляційною функцією.

Для перевірки основної гіпотези, використаємо результат, наведений у роботі [81].

Нехай S_δ – розв'язок рівняння $g(\varepsilon) = \delta, 0 < \delta < 1$, де

$$g(\varepsilon) = 2\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}\sqrt{2}}{C_p{}^{\frac{1}{p}}}\exp\left\{\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{\sqrt{2}C_p{}^{\frac{1}{p}}}\right\}},$$

та

$$C_p = \int_0^A \left(\frac{2}{T^2}\int_0^T (T-u)\left(\rho^2(u) + \rho(u+\tau)\rho(u-\tau)\right)du\right).$$

Нехай $S_\delta = max\left\{\varepsilon_\delta, Z_p\right\}$. Очевидно, що $g(S_\delta) = \delta$ та

$$P\left\{\int_0^A (\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau))^p d\tau > S_\delta\right\} \leq \delta.$$

Критерій 6.1. [81] Нехай $\{\mathbb{T}, \mathfrak{A}, \mu\}$ – вимірний простір, де $\mathbb{T}$ - параметрична множина, $p \geq 1$, $0 < A < \infty$. Для заданого рівня надійності δ гіпотеза $\mathbb{H}$ приймається, якщо

$$\int_0^A (\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau))^p d\mu(\tau) < S_\delta;$$

в іншому випадку гіпотеза відхиляється.

Гіпотезу перевіряємо за спостереженнями $X_\alpha(t), t \in [0, T+A]$. У якості оцінки кореляційної функції використаємо корелограму (див. [81]) і наступну теорему (доведення у статті [81]).

Теорема 6.1. [81] Нехай вимірний стаціонарний гауссовий випадковий процес X, визначений для всіх $t \in \mathbb{R}$. І нехай

$$X = \{X(t), t \in \mathbb{T} = [0, T+A], 0 < T < \infty, 0 < A < \infty\}$$

та $EX(t) = 0$. Нехай кореляційна функція $\rho(\tau) = EX(t+\tau)X(t)$ цього процесу визначена для будь-яких $\tau \in \mathbb{R}$ і є парною функцією та неперервна на $\mathbb{T}$.

Нехай корелограма

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t+\tau)X(t)dt,\ 0 \leq \tau \leq A$$

є оцінкою кореляційної функції $\rho(\tau)$. Тоді виконується наступна нерівність для усіх $\varepsilon \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{(\frac{p}{2}+1)p}\right)^p C_p$:

$$P\left\{\int_0^A (\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau))^p d\tau > \varepsilon\right\} \leq g(\varepsilon). \tag{6.1}$$

На основі попередньої теореми, сформулюємо наступну лему.

Лема 6.1. Нехай $\mathbb{H}$ гіпотеза, яка полягає у тому що кореляційна функція центрованого вимірного стаціонарного гауссового випадкового процесу $X = \{X(t), t \in \mathbb{T} = [0, T+A], 0 < T < \infty, 0 < A < \infty\}$, $t \in \mathbb{R}, EX(t) = 0$ дорівнює $\rho(\tau) = B^2 \exp\{-d|\tau|^\alpha\}$, де $0 < \alpha < 2$, $d > 0$. Нехай корелограма $\hat{\rho}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t+\tau)X(t)dt, 0 \leq \tau \leq A$ є оцінкою кореляційної функції $\rho(\tau)$. Тоді гіпотеза $\mathbb{H}$ приймається для усіх $\varepsilon \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{(\frac{p}{2}+1)p}\right)^p C_p$, якщо

$$P\left\{\int_0^A (\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau))^p d\tau > \varepsilon\right\} \leq g(\varepsilon),$$

де $g(\varepsilon) = 2\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}\sqrt{2}}{C_p^{\frac{1}{p}}}} \exp\left\{\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{\sqrt{2}C_p^{\frac{1}{p}}}\right\}$, та відхиляється у протилежному випадку.

Доведення. Будемо оцінювати C_p для доведення леми. Почнемо з наступного:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T (T-u)\left(e^{-2du^\alpha} + e^{-d|u+\tau|^\alpha} e^{-d|u-\tau|^\alpha}\right) du = \\ &= T\int_0^T e^{-2du^\alpha} du + T\int_0^T e^{-d|u+\tau|^\alpha} e^{-d|u-\tau|^\alpha} du - \\ &\quad - \int_0^T u e^{-2du^\alpha} du - \int_0^T u e^{-d|u+\tau|^\alpha} e^{-d|u-\tau|^\alpha} du = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Тепер обчислимо доданки цього виразу:

$$I_1 = T\int_0^T e^{-2du^\alpha} du \leq T\int_0^\infty e^{-2du^\alpha} du. \tag{6.2}$$

Зробимо заміну у інтегралі (6.2) $2du^{\alpha} = z$, звідки для інтегралу (6.2) отримуємо:

$$T\int_0^{\infty} e^{-2du^{\alpha}}du = T\int_0^{\infty} e^{-z}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot 2d^{-\frac{1}{\alpha}}\cdot z^{\frac{1}{\alpha}-1} =$$
$$= \frac{T}{\alpha}\cdot 2d^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^{\infty} e^{-z}\cdot z^{\frac{1}{\alpha}-1}dz = \frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

де $\alpha \in (0;2]$. Другий доданок:

$$I_2 = T\int_0^{T} e^{-d|u+\tau|^{\alpha}}e^{-d|u-\tau|^{\alpha}}du =$$
$$= T\left(\int_0^{\tau} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}}e^{-d(\tau-u)^{\alpha}}du + \int_{\tau}^{T} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}}e^{-d(u-\tau)^{\alpha}}du\right).$$

Оцінимо кожний з доданків другого доданку:

$$1)\int_0^{\tau} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}}e^{-d(\tau-u)^{\alpha}}du = \int_0^{\tau} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}(1+(\frac{\tau-u}{u+\tau})^{\alpha})}du \leq$$
$$\leq \int_0^{\tau} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}}d(u+\tau). \tag{6.3}$$

Зробимо заміну $u+\tau = z$ в (6.3):

$$\int_{\tau}^{2\tau} e^{-dz^{\alpha}}dz \leq \int_{\tau}^{\infty} e^{-dz^{\alpha}}dz \leq \int_0^{\infty} e^{-dz^{\alpha}}dz. \tag{6.4}$$

Тепер зробимо заміну в (6.4) $t = dz^{\alpha}$:

$$\int_0^{\infty} e^{-dz^{\alpha}}dz = \frac{1}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt = \frac{1}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

$$2)\int_{\tau}^{T} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}}e^{-d(u-\tau)^{\alpha}}du = \int_{\tau}^{T} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}(1+(\frac{u-\tau}{u+\tau})^{\alpha})}du \leq$$
$$\leq \int_{\tau}^{T} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}}d(u+\tau). \tag{6.5}$$

Зробимо заміну $u+\tau = z$ в (6.5), а потім заміну $t = dz^{\alpha}$:

$$\int_0^{\infty} e^{-dz^{\alpha}}dz = \frac{1}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt = \frac{1}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

звідси, отримаємо для другого доданку оцінку

$$I_2 \leq \frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Третій доданок:

$$I_3 = \int_0^T u e^{-2du^\alpha} du \le \int_0^\infty u e^{-2du^\alpha} du. \tag{6.6}$$

Зробимо заміну у інтегралі (6.6) $2du^\alpha = z$, звідки отримуємо:

$$\int_0^\infty u e^{-2du^\alpha} du = \int_0^\infty 2d^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot z^{\frac{1}{\alpha}} e^{-z} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot 2d^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot z^{\frac{1}{\alpha}-1} =$$
$$= \frac{4}{\alpha} d^{-\frac{2}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{\frac{2}{\alpha}-1} dz = \frac{4}{\alpha d^{\frac{2}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

Четвертий доданок:

$$I_4 = \int_0^T u e^{-d|u+\tau|^\alpha} e^{-d|u-\tau|^\alpha} du \le T \int_0^\tau e^{-d(u+\tau)^\alpha} e^{d(u-\tau)^\alpha} du +$$
$$+ T \int_\tau^T e^{-d(u+\tau)^\alpha} e^{-d(u-\tau)^\alpha} du =$$
$$= T \cdot \left(\int_0^\tau e^{-d(u+\tau)^\alpha} e^{d(u-\tau)^\alpha} du + \int_\tau^T e^{-d(u+\tau)^\alpha} e^{-d(u-\tau)^\alpha} du \right) = I_2,$$

звідки отримуємо:

$$I_4 \le \frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Зауваження 6.1. Більш точну оцінку для I_4 можна отримати наступним чином:

$$I_4 = \int_0^T u e^{-d|u+\tau|^\alpha} e^{-d|u-\tau|^\alpha} du \tag{6.7}$$
$$\le \int_0^\tau u e^{-d(u+\tau)^\alpha} e^{d(u-\tau)^\alpha} du + \int_\tau^T u e^{-d(u+\tau)^\alpha} e^{-d(u-\tau)^\alpha} du.$$

Оцінимо кожен з доданків у правій частині (6.7):

$$\int_0^\tau u e^{-d(u+\tau)^\alpha} e^{d(u-\tau)^\alpha} du = \int_0^\tau u e^{-d(u+\tau)^\alpha (1 - \left(\frac{u-\tau}{u+\tau}\right)^\alpha)} du \le$$
$$\le \int_0^\tau u e^{-d(u+\tau)^\alpha} du \le \int_0^\infty u e^{-d(u+\tau)^\alpha} du. \tag{6.8}$$

В інтегралі у правій частині нерівності (6.8) зробимо заміну $u + \tau = z$:

$$\int_0^\infty (z-\tau) e^{-dz^\alpha} dz = \int_0^\infty z e^{-dz^\alpha} dz - \int_0^\infty \tau e^{-dz^\alpha} dz \le \int_0^\infty z e^{-dz^\alpha} dz \tag{6.9}$$

Розглянемо праву частину виразу (6.9). У $\int_0^\infty ze^{-dz^\alpha}dz$ зробимо заміну $dz^\alpha = t$ звідки отримуємо:

$$\int_0^\infty (z-\tau)e^{-dz^\alpha}dz \leq \frac{1}{\alpha d^{\frac{2}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

Розглянемо другий доданок (6.7):

$$\int_\tau^T e^{-d(u+\tau)^\alpha}e^{-d(u-\tau)^\alpha}du = \int_\tau^T ue^{-d(u+\tau)^\alpha(1+\left(\frac{u-\tau}{u+\tau}\right)^\alpha)}du \leq \int_\tau^T ue^{-d(u+\tau)^\alpha}du$$
$$\leq \int_0^\infty ue^{-d(u+\tau)^\alpha}du \leq \frac{1}{\alpha d^{\frac{2}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

Звідки отримуємо для I_4 більш точну оцінку:

$$I_4 \leq \frac{2T}{\alpha d^{\frac{2}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

Звідси отримуємо оцінку для I:

$$I \leq \frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{4T}{\alpha d^{\frac{2}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) + \frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) =$$
$$= \frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\left(3\sqrt{\pi} + \frac{2}{d^{\frac{1}{\alpha}}}\right).$$

Таким чином, отримаємо

$$C_p \leq \left(\frac{2B^2}{T^2}\right)^{\frac{p}{2}} \int_0^A \left(\frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\left(3\sqrt{\pi} + \frac{2}{d^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right)^{\frac{p}{2}} d\tau =$$
$$= \left(2B^2\right)^{\frac{p}{2}} \frac{T^{\frac{p}{2}}}{T^p} \cdot A\left(\frac{2}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\left(3\sqrt{\pi} + \frac{2}{d^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right) =$$
$$= \frac{\left(2B^2\right)^{\frac{p}{2}}}{T^p} \cdot A\left(\frac{2}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\left(3\sqrt{\pi} + \frac{2}{d^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right).$$

З того, що C_p обмежена деяким дійсним виразом, маємо, що $g(\varepsilon)$ також обмежена, з чого робимо висновок, що гіпотеза $\mathbb{H}$ приймається. □

Зауваження 6.2. Випадок, коли $\alpha = 1$ розглянутий у статті [81] у прикладі 1 та $\alpha = 2$ у прикладі 2 цієї же роботи. У даному розділі розглядаються всі інші випадки $0 < \alpha < 2$.

Висновки до шостого розділу

Відомо, що кореляційна функція є дуже важливою характеристикою випадкового процесу. Тому задачі оцінювання кореляційної функції, знаходження вигляду цієї функції для випадкового процесу, побудова критеріїв для її ідентифікації є дуже актуальними. У розділі 6 було побудувано критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією $\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}$, де $0 < \alpha \leq 2$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено вивченню гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями та їх властивостей.

У дисертаційній роботі вивчаються як дійсні, так і комплексні випадкові процеси зі стійкими кореляційними функціями. Для дійсних процесів знайдено оцінки розподілу супремуму гауссових стаціонарних процесів зі стійкою кореляційною функцією. Досліджено поведінку на нескінченності та деякі аналітичні властивості цих процесів. Також знайдено оцінки для розподілу норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою кореляційною функцією.

Вивчаються також власні комплексні випадкові процеси. В дисертаційній роботі введено основні означення, пов'язані з комплексними випадковими процесами, зі стаціонарними власними комплексними випадковими процесами. Розглянуто властивості квадратично гауссових випадкових величин та процесів. Також, знайдено оцінки розподілу деяких функцій від модуля гауссового стаціонарного власного комплексного випадкового процесу. Вивчається поведінка модуля стаціонарного власного комплексного випадкового процесу на нескінченності.

Наведено означення гауссового процесу зі стійкою кореляційною функцією з параметром $\alpha = 2$. Побудовано моделі, які наближають цей процес із заданою надійністю та точністю в просторах $C\left([0,T]\right)$ та $L_p\left([0,T]\right)$. Отримано теорему про наближення випадкового гауссового процесу зі стійкою кореляційною функцією з параметром $\alpha = 2$ моделлю з заданою точністю та надійністю в просторах $C\left([0,T]\right)$ та $L_p\left([0,T]\right)$.

Знайдено новий метод побудови довірчого інтервалу для параметра процесу Орнштейна–Уленбека. Побудовано оцінку зверху для

$$P\left\{\int_0^1 \widetilde{W}^2(s)ds < \frac{\varepsilon}{T}\right\}.$$

Також, знайдено критерій та описано процедуру для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Анваров С.Р. Численное моделирование пространственно-временной структуры поверхности морского волнения для решения оптических задач / С.Р. Анваров, С.М. Пригарин. // Вычислительная математика и статистическое моделирование, Новосибирск. 1994. С.17–29.

[2] Джуліано Антоніні Р. Точність моделювання в L_p гауссових випадкових процесів / Р. Джуліано Антоніні, Ю.В. Козаченко, А.М. Тегза. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізко-математичні науки. 2002. **5**. С. 7–14.

[3] Артемьев С.С. Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений / С.С. Артемьев. Новосибирск: Изд. ВЦ СО РАН, 1992.

[4] Ахманов С.А. Введение в статистическую радиофизику и оптику / С.А. Ахманов, Ю.Е. Дьяков, А.С. Чиркин. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат литературы, 1981. 640 с.

[5] Беляев Ю. К. Локальные свойства выборочных функций стационарных случайных процессов / Ю.К. Беляев. // Теория вероятн. и ее применен. 1960. **5 (1)**. С. 128–131.

[6] Бондарев Б.В. Новый метод построения доверительного интервала для параметра процесса Орнштейна-Уленбека / Б.В. Бондарев, М.Ю. Петранова. // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. 2014. **1**. С. 58–63.

[7] Бондарев Б.В. Гарантированное оценивание параметров в обобщенной модели П. Самуэльсона / Б.В. Бондарев, А.В. Золотая, А.Ю. Стадник.

// Прикладна статистика. Актуарна та финансова математика. 2012. **2**. С. 104–117.

[8] Бондарев Б.В. Стохастическое исчисление в задачах финансовой и актуарной математики. Оценка рисков в страховании / Б.В. Бондарев, О.Е. Сосницкий. Донецк: ДонНУ. 2013. 227 с.

[9] Булдыгин В.В. О локальных свойствах реализации некоторых случайных процессов и полей / В.В. Булдыгин, Ю.В. Козаченко. // Теория вероятн. и матем. статистика. 1974. **10**. С. 39–47.

[10] Бусенко Н.П. Моделирование сложных систем. / Н.П. Бусенко. Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1978. 400 с.

[11] Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В.В. Быков. М.: Сов.радио, 1971. 328 с.

[12] Ватник П. А. Статистические методы оперативного управления производством / П.А. Ватник. М.: Статистика, 1978. 240 с.

[13] Вахания Н.Н. Распределения в банаховых пространствах / Н.Н. Вахания, В.И. Тариеладзе, С.А. Чобанян. М.: Наука, 1985. 370 с.

[14] Вижва З.О. Статистичне моделювання ізотропних випадкових полів на сфері / З.О. Вижва, М.Й. Ядренко. // Вісник Київського університету. Серія: Математика. Механіка. 2000. **5**. С.5–11.

[15] Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках: пер. с англ. / К.В. Гардинер. М.: Мир. 1986. 528 с.

[16] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения / И.И. Гихман, А.В. Скороход. К.: Наукова думка. 1968. 554 с.

[17] Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М. И. Ядренко. К.: Головное издательство издателького объединения “Вища школа”. 1988. 440 с.

[18] Ермаков С.М. Статистическое моделирование. Учебное пособие / С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов. М.: Наука, 1982. 296 с.

[19] Зелепугина И.Н., Козаченко Ю.В. К вопросу о моделировании гауссовских случайных процессов // Некоторые вопросы теории случайных процессов. Киев. 1982. С. 47–56.

[20] Зелепугина И.Н. Об оценках точности моделирования случайных полей в пространствах L_p / И.Н. Зелепугина, Ю.В. Козаченко. // Исследование операций и АСУ. 1988. **32**. С. 10–14.

[21] Каменщикова О. Є. Апроксимація $Sub_\phi(\Omega)$ випадкових процесів у просторі $L_p([0,T])$ / О.Є. Каменщикова, Ю.В. Козаченко // Теорія ймовірн. та математична статистика. 2008. № 79. С. 73–78.

[22] Козаченко Ю.В. Случайные процессы в пространствах Орлича. I. / Ю.В. Козаченко. // Теория вероятн. и матем. статистика. 1984. **30**, С. 92—107.

[23] Козаченко Ю.В. Случайные процессы в пространствах Орлича. II. / Ю.В. Козаченко. // Теория вероятн. и матем. статистика. 1984. **31**, С. 44–50.

[24] Козаченко Ю.В. О точности моделирования в $L_2(0,T)$ гауссовских случайных процессов / Л.Ф. Козаченко, Ю.В. Козаченко. // Вычислительная и прикладная математика. 1991. **75**. С.108 –115.

[25] Козаченко Ю.В. О точности моделирования в $L_2(0,T)$ гауссовских слу-

чайных процессов / Л.Ф. Козаченко, Ю.В. Козаченко. // Вычислительная и прикладная математика. 1992. **74**. С.88–93.

[26] Козаченко Ю.В. Про моделювання гауссових стаціонарних процесів з абсолютно неперервним спектром / Л.Ф. Козаченко, Ю.В. Козаченко. // Теорія ймовірностей та математична статистика. 1992. **47**. С.47-–54.

[27] Козаченко Ю.В. Випадкові процеси в задачах математичної фізики / Ю.В. Козаченко, К. Й. Кучінка, Г. І. Сливка–Тилищак. Ужгород: ТОВ“РІК–У”. 2017. 256 с.

[28] Козаченко Ю.В. Квазібанахові простори випадкових величин / Ю.В. Козаченко, Ю.Ю. Млавець, О.М. Моклячук. Ужгород: Карпати. 2015. 212 с.

[29] Козаченко Ю.В. Моделювання випадкових процесів / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко. Київ: “Київський університет”, 1999. 223 с.

[30] Козаченко Ю.В. Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орліча I / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко. // Теорія ймовірностей та математична статистика. 1998. **58**. С. 45–60.

[31] Козаченко Ю.В., Пашко А.О. Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орліча II / Ю. В. Козаченко, А.О. Пашко. //Теорія ймовірностей та математична статистика. 1999. **59**. С. 77–92.

[32] Козаченко Ю.В. Про моделювання випадкових полів I. / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко. //Теорія ймовірностей та математична статистика. 1999. **61**. С. 61–74.

[33] Козаченко Ю.В. Про моделювання випадкових полів II / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко. // Теорія ймовірностей та математична статистика. 2000. **62**. С. 48–60.

[34] Козаченко Ю. В. Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Наук. вісник Ужгород ун-ту. 2017. **2 (31)**. С.90-–100.

[35] Козаченко Ю.В. Локальные свойства выборочных функций случайных полей I. / Ю.В. Козаченко, М.И. Ядренко. // Теория вероятн. и матем. статист. 1976. **14**. С.53–66.

[36] Козаченко Ю.В. Локальные свойства выборочных функций случайных полей II. / Ю.В. Козаченко, М.И. Ядренко. // Теория вероятн. и матем. статист. 1976. **15**. С.82–98.

[37] Крамер Г. Стационарные случайные процессы / Г. Крамер, М. Лидбеттер. М.: Мир, 1969. 398 с.

[38] Курченко О.О. Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху / О.О. Курченко. // Теорія ймовірн. та матем. статист. 1991. **67**. С. 88–96

[39] Лифшиц М.А. Гауссовские случайные функции. / М.А. Лифшиц. К.: ТВиМС, 1995. 246 с.

[40] Михайлов Г.А. Весовые методы Монте-Карло. / Г.А. Михайлов. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. Рос. АН, 2000. 248 с.

[41] Пашко А.О. Оцінка точності моделювання в рівномірній метриці гауссових ізотропних випадкових полів на сфері / А. О. Пашко. // Теорія ймовірностей та матем. статист. 2000. **60**. С. 149–157.

[42] Петранова М.Ю. Перевірка гіпотези про вигляд кореляційної функції / М.Ю. Петранова. // Наук. вісник Ужгород ун-ту. 2020. **2 (37)**. С. 114–121.

[43] Пригарин С.М. Некоторые задачи численного моделирования случайных процессов и полей / С. М. Пригарин. Новосибирск: Изд. Вычислительного центра СО РАН, 1994. 163 с.

[44] Рахімов Г. Статистичне моделювання однорідного та ізотропного поля на площині / Г. Рахімов, М.Й. Ядренко. // Теор. ймовір. та матем. статист. 1993. **49**. С. 245–251.

[45] Скороход А.В. Замечание о гауссовских мерах в банаховых пространствах / А.В. Скороход. // Теория вероятн. и ее применен. 1970. **3 (15)**. С. 519–520.

[46] Сытая Г.Н. О некоторых асимптотических представлениях для гауссовской меры в гильбертовом пространстве / Г.Н. Сытая. // Теория случайных процессов. 1974. **2**. С. 93–104.

[47] Фаталов В.Р. Константы в асимптотиках вероятностей малых уклонений для гауссовских процессов и полей / В.Р. Фаталов. // Успехи математических наук. 2003. **4 (352)**, С. 101–108.

[48] Шалыгин А.С. Прикладные методы статистического моделирования / А. С. Шалыгин, Ю. И. Палагин. Л.: Машиностроение, 1986. 320 с.

[49] Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей / М.И. Ядренко. К.: Вища школа, 1980. 270с.

[50] Adler R.J. An introduction to continuity, extrema and related topics for general Gaussian processes. Lecture Notes-Monograph Series / R.J. Adler. Hayward: Institute of Mathematical Statistics, 1990. Vol. 12. 160 p.

[51] Bakshi G., Cao C., Chen Z. Empirical Perfomance of Alternative Option Pricing Models / G. Bakshi, C. Cao, Z. Chen. // The Journal of Finance. 1997. **5 (52)**. p. 2003–2049.

[52] Bakshi G., Chen Z. Stock valuation in dynamic economies / G. Bakshi, Z. Chen. // Yale ICF Working Paper 2001.

[53] Belyaev Yu.K. Continuity and Holder's conditions for sample functions of stationary Gaussian processes / Yu.K. Belyaev // Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. and Probability. 1961. **2**. P. 23–33.

[54] Botvich D.D. Large deviations, the shape of the loss curve, and economies of scale in large multiplexers / D.D. Botvich, N.G. Duffield. // Queuing Systems. **20**. 1995. P. 293–32.

[55] Buldygin V.V. Metric characterization of random variables and random processes. Translations of Mathematical Monographs. 188. Providence / V. V. Buldygin, Y. V. Kozachenko. RI: AMS, American Mathematical Society, 2000. 257 p.

[56] Doob J.L. Stochastic Processes / J. L. Doob. John Wiley & Sons, 1953. 664 p.

[57] Gladkaya O. N. On condition of differentiability in direction of sample function of random fields / O.N. Gladkaya // Theory Probab. Math Statistics. 1978. **17**, P. 33–41.

[58] Cramer H. Stationary and related stochastic processes. Sample function properties and their applications / H. Cramer, M.R. Leadbetter. New York–London–Sydney: John Wiley, 1967. 368 p.

[59] Delport J. Fonctions aleatoires presque surement continues sur un intervalle ferme / J. Delport. Paris: Theres presentees a la faculte des sciences d l'universite de Lill, 1967. 215 p.

[60] Dembo A., Zeitouni O. Large deviations techniques and applications / A. Dembo, O. Zeitouni. Springer Science and Business Media, 2009. 412 p.

[61] Dozzi M., Kozachenko Y., Mishura Y., Ralchenko K. Asymptotic growth of trajectories of multifractional Brownian motion with statistical applications to drift parameter estimation / M. Dozzi, Y. Kozachenko, Y. Mishura, K. Ralchenko. // Statistical Inference for Stochastic processes. 2018. **21**. P. 21–52.

[62] Dudley R. Gaussian processes on several parameters / R. Dudley. // Ann. Math. Statist. 1965. **3 (36)**. P. 771–788.

[63] Dudley R. Sample functions of the Gaussian processes / R. Dudley. // Annals of Probability. 1973. **1**, P. 3–68.

[64] Erdelyi A. Higher Transcendental Functions / A. Erdelyi New-York: McGraw-Hill, 1953. Vol. II. 414 p.

[65] Fernique X. Intégrabilité des vecteurs gaussiens / X. Fernique. // C. R. Acad. Sci. A 270. 1970. **7**. P.1698–1699.

[66] Kampe de Feriet J. Fonctions de la Physique Mathematique / J. Kampe de Feriet. Paris: Paris Editions du CNRS, 1957. 99 p.

[67] Kolmogorov A.N. Local structure of turbulence in fluid for very large Reynolds numbers / A.N. Kolmogorov. // Transl. in Turbulence. S.K. Friedlander and L.Topper (eds.), Interscience Publishers, New York, 1961. **434 (1890)** P. 9–13.

[68] Kozachenko Yu. V. Random processes in Orlicz spaces I / Yu.V. Kozachenko. // Theory Probab. Math. Stat. 1985. **30**. P. 103–117.

[69] Kozachenko Yu. V. A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a Gaussian stationary process / Yu. V. Kozachenko, T. V. Fedoryanych. // Theor. Probability and Math. Statist. 2004. **69**, P. 85–94.

[70] Kozachenko Y. On an expansion of random processes in the space $L_p(T)$ / Y. Kozachenko, O. Kamenschikova. // Theory Probab. And Math. Statist. 2009. **79**. P. 83–88.

[71] Kozachenko Yu.V. An estimate for the multiparameter fractional Brownian motion / Yu.V. Kozachenko, O.O. Kurchenko. // Theory of Stochastic Processes. 1999. **5(21)**. P. 113–119.

[72] Kozachenko Yu. V. Aliasing-Truncation errors in sampling approximations on Sub-Gaussian signals / Yu.V. Kozachenko, A. Olenko. // IEEE Transactions on Information Theory. 2016. **10 (62)**. P. 5831–5838.

[73] Kozachenko Y. Proper complex random processes / Y. Kozachenko, M. Petranova. //Stat., Optim. Inf. Comput. 2017. **5**. P. 137–146.

[74] Kozachenko Yu. Simulation of Gaussian stationary Ornstein–Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in space C([0, T]) / Yu. Kozachenko, M. Petranova. // Monte Carlo Methods Appl. 2017. **4 (23)**. P. 277—286.

[75] Kozachenko Yu.V. On uniform convergence of wavelet expansions of ϕ-sub-Gaussian random processes / Yu.V. Kozachenko, M.M. Perestyuk, O.I. Vasylyk // Random Oper. And Stoch. Equations. 2006. **3 (14)**. P. 209–232.

[76] Kozachenko Yu. Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability / Yu. Kozachenko, O. Pogorilyak, I. Rozora, A. Tegza. ISTE Press – Elsevier. 2016. 346 p.

[77] Kozachenko Yu., Tegza A., Troshki N. The accuracy of modeling of Gaussian stochastic process in some Orlicz spaces / Yu. Kozachenko, A. Tegza, N. Troshki. // Statistics, Optimization and Information Computing. 2020. **8(1)**. P. 127–135.

[78] Kozachenko Yu., Rozora I. Simulation of Gaussian stochastic processes / Yu. Kozachenko, I. Rozora. // Random Oper. And Stoch. Equations, 2003. **3 (11)**. P. 275–296.

[79] Kozachenko Yu.V. On expansion of random process in series / Yu.V. Kozachenko, I.V. Rozora, Ye.V. Turchyn. // Random Operators and Stohastic Equations. 2007. **15(1)**. P. 15–35.

[80] Kozachenko Yu. V. Square-Gaussian Random Processes and Estimators of Covariance Functions / Yu. V. Kozachenko, O. V. Stus. // Math. Communications 1998. **1 (3)**. P. 83–94.

[81] Kozachenko Yu. A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic proses / Yu. Kozachenko, V. Troshki. // Modern Stochastics Theory and Application. 2014. **1 (2)**. P. 139–149.

[82] Kozachenko Yu. Path space large deviations of a large buffer with Gaussian input traffic / Yu. Kozachenko, T. Sottinen, O. Vasylyk. // University of Helsinki, Preprint 294. August 2001. 12 p.

[83] Kozachenko Yu. Weakly self-similar stationary increment processes from the space $\mathbf{SSub}_{\varphi}(\Omega)$ / Yu. Kozachenko, T. Sottinen, O. Vasylyk. // University of Helsinki, Preprint 317. March 2002. 14 p.

[84] Kozachenko Yu.V. On the distribution of suprema of $Sub\varphi(\Omega)$ random processes approximations on Sub-Gaussian signals / Yu.V. Kozachenko, O.I. Vasilik. // Theory Stoch. Process. 1998. **4(20)**. P.147–160.

[85] Kozachenko Yu. Upper estimate of overrunning by $Sub_{\varphi}(\Omega)$ random process the level specified by continuous function / Yu. Kozachenko, O. Vasylyk, R.

Yamnenko. // Random Oper. And Stoch. Equations. 2005. **2 (13)**. P. 111–128.

[86] Kurbanmuradov O. Lagrangian Stochastic Models for Turbulent Dispersion in the Atmospheric Boundary Layer / O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld. // Boundary-Layer Meteorology. 2000. **97**, P. 191–218.

[87] Landau H. On the supremum of Gaussian processes / H. Landau, L. Shepp. // Sankhya, Ser. A. 1970. **4 (32)** P. 369–378.

[88] Leadbetter M. Extremes and related properties of random sequences and processes / M. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzen. Berlin: Springer, 1983. 336 p.

[89] Ledoux M. Isoperimetry and Gaussian Analysis: Lectures on Probability Theory and Statistics / M. Ledoux. // Lecture Notes in Mathematics. Berlin/Heidelberg: Springer, 1996. **1648** P. 165–294.

[90] Ledoux M. Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes / M. Ledoux, M. Talagrand. Springer Science and Business Media, 1991. 480 p.

[91] Lukacs E. Characteristic Functions / E. Lukacs. New York: Hafner Pub. Co., 1970. 216 p.

[92] Mandelbrot B. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications / B. Mandelbrot, J. Van Ness. // SIAM review. **10** P. 422–437.

[93] Marcus M. Random Fourier series with applications to harmonic analysis. Series: Annals of Mathematics Studies, 101 / M. Marcus, G. Pisier. Prinston: Prinston University Press, 1981. 152 p.

[94] Neeser F. D. Proper complex random processes with applications to information theory / F.D. Neeser, J.L. Massey. // IEEE Transactions on Information Theory. 1993. **4 (39)**. P. 1293–1302.

[95] Ogorodnikov V. Numerical Modeling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications / V. Ogorodnikov, S. Prigarin. Utrecht: VSP, 1996. 240 p.

[96] Petranova M. Simulation of Gaussian stationary quasi Ornstein–Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in spaces $C([0,T])$ and $L_p([0,T])$, Journal of Applied Mathematics and Statistics / M. Petranova. // Columbia International Publishing. 2016. **1 (3)**. P. 44–58.

[97] Piterbarg V. Asyptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields. Translations of Mathematical Monographs. 148. / V. Piterbarg. AMS, Providence. 1996. 206 p.

[98] Ren Q., Kobayashi H. Diffusion Approximation Modeling for Markov Modulated Bursty Traffic and Its Applications to Bandwidth Allocation in ATM Networks / Q. Ren, H. Kobayashi. // IEEE Journal on selected areas in communications. 1998. **5 (16)**. P. 679–691.

[99] Ripley B. Stochastic Simulation / B. Ripley. New York: Wiley, 1987. 237 p.

[100] Slutsky E. Alcuno propozitioni sulla teoria delle funzioni aleatorie / E. Slutsky. // Giorn. Inst. Italiano degli Attuari. 1937. **8**. P. 193–199.

[101] Sun T. On simulation of a Gaussian Stationary Process / T. Sun, M. Chaika. // Journal of Time Series Analysis, 1997. **1 (18)**. P. 79–93.

[102] Talagrand M. Regularity of Gaussian processes / M. Talagrand. // Acta Math, 1987. **159**. P. 99–149.

[103] Uhlenbeck G.E. On the theory of Brownian motion / G.E. Uhlenbeck, L.S. Ornstein. // Phys. Rev. 1930. **36** P. 832–841.

[104] Vyzhva Z. About approximation of 3-D random fields and statistical si-

mulation / Z. Vyzhva. // Random Operators and Stochastic Equations. 2003. **3 (11)**. P. 255–266.

[105] Yurinsky V. Sums and Gaussian vectors / V. Yurinsky. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1617. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1995. 312 p.

Додаток А

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Бондарев Б.В. Новый метод построения доверительного интервала для параметра процесса Орнштейна-Уленбека / Б.В. Бондарев, М.Ю. Петранова. // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. 2014. **1**. С. 58–63.

2. Козаченко Ю. В. Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Наук. вісник Ужгород ун-ту. 2017. **2 (31)**. С.90-–100.

3. Петранова М.Ю. Перевірка гіпотези про вигляд кореляційної функції / М.Ю. Петранова. // Наук. вісник Ужгород ун-ту. 2020. **2 (37)**. С. 114–121.

4. Kozachenko Y. Proper complex random processes / Y. Kozachenko, M. Petranova. //Stat., Optim. Inf. Comput. 2017. **5**. P. 137–146.

5. Kozachenko Yu. Simulation of Gaussian stationary Ornstein–Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in space C([0, T]) / Y. Kozachenko, M. Petranova. // Monte Carlo Methods Appl. 2017. **4 (23)**. P. 277—286.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

6. Petranova M. Simulation of Gaussian stationary quasi Ornstein–Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in spaces $C([0, T])$ and $L_p([0, T])$ / M. Petranova. // Journal of Applied Mathematics and Statistics Columbia International Publishing. 2016. **1 (3)**. P. 44–58.

7. Козаченко Ю.В. Власні комплексні випадкові процеси / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція, тези доповідей. м.Ворохта, 22–25 лютого 2017. С.10–11.

8. Козаченко Ю.В. Власні комплексні випадкові процеси / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Збірник наукових праць професорсько-викладацького складу ДонНУ імені Василя Стуса за 2015-2016 рр. 2017. С.17–19.

9. Козаченко Ю.В. Квазі процес Орнштейна–Уленбека та його моделювання / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Восьма міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів і молодих вчених «Сучасні задачі прикладної статистики, промислової, актуарної та фінансової математики». м.Вінниця, 20–22 квітня 2016. С.11-12.

10. Козаченко Ю.В. Моделювання квазі процесу Орнштейна–Уленбека в просторах $C([0,T])$ та $L_p([0,T])$ / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Праці VIII міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень». м.Ужгород, 26 вересня – 1 жовтня 2016. С.141.

11. Козаченко Ю.В. Оцінки розподілу супремума модуля стаціонарних гауссових власних комплексних випадкових процесів / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука. м.Київ, 7–10 жовтня 2016. С.59–60.

12. Петранова М. Ю. Моделювання гаусівського стаціонарного квазі процесу Орнштейна–Уленбека / М.Ю. Петранова. // Міжнародна наукова конференція «Методика викладання та методи дослідження в математиці». м. Берегове, 21–23 квітня 2016. С.38.

13. Козаченко Ю.В. Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями / Ю.В. Козаченко, М.Ю. Петранова. // IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. 10–11 квітня 2020. С.10.

14. Kozachenko Yu.V. Real stationary Gaussian processes with stable correlation functions / Yu.V. Kozachenko, M.Yu. Petranova. // International Conference "Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes", Kyiv, Ukraine, September 17–22, 2018. P. 52–53.

15. Kozachenko Yu. Simulation of the Ornstein–Uhlenbeck process / Yu. Kozachenko, M. Petranova. // International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Aplications, Cherkasy, Ukraine, October 17–19, 2017. P. 151.

16. Kozachenko Yu.V. Stationary processes with stable correlation functions / Yu.V. Kozachenko, M.Yu. Petranova. // International Conference "Modern Stochastics: Theory and Applications."IV, Kyiv, Ukraine, May 24–26, 2018. P. 35.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Наукові конференції

- Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу: Всеукраїнська наукова конференція. м.Ворохта, 22–25 лютого 2017.
- Збірник наукових праць професорсько-викладацького складу ДонНУ імені Василя Стуса за 2015-2016 рр. 2017.

- Восьма міжнародна науково–практична конференція студентів, аспірантів і молодих вчених «Сучасні задачі прикладної статистики, промислової, актуарної та фінансової математики». м.Вінниця, 20–22 квітня 2016.
- VIII міжнародна школа-семінар «Теорія прийняття рішень». м.Ужгород, 26 вересня – 1 жовтня 2016.
- Вісімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. м.Київ, 7–10 жовтня 2016.
- Міжнародна наукова конференція «Методика викладання та методи дослідження в математиці». м. Берегове, 21–23 квітня 2016.
- IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики. 10–11 квітня 2020.
- International Conference"Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stohastic Processes", Kyiv, Ukraine, September 17–22, 2018.
- International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Aplications, Cherkasy, Ukraine, October 17–19, 2017.
- International Conference "Modern Stochastics: Theory and Applications."IV, Kyiv, Ukraine, May 24–26, 2018. P. 35.

Наукові семінари

- Науковий семінар "Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів" Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна, 10 грудня 2020 р.
- Міжкафедрафедральний семінар кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу Ужгородського національного університету, м. Ужгород, Україна, 16 грудня 2020 р.

- Семінар з фрактального аналізу Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, м. Київ, Україна, 24 грудня 2020 р.