УДК 531/534

РІВНЯННЯ ЛАНГРАНЖА ІІ РОДУ ДЛЯ РУХОМОЇ ТОЧКИ В ПОЛІ СИЛ ТЯЖІННЯ

студентка Заболотна Н.В., к.т.н., доц. Штефан Н.І

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Розглянемо запис рівняння Лангранжа , якщо матеріальна точка рухається в полі дії сил тяжіння. Для цього в якості узагальнених координат виберемо декартові координати $q_1 = x$, $q_2 = y$. Кінетична T і потенціальна Π енергії точки відповідно дорівнюють:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \qquad \Pi = \frac{-k}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Підставимо функцію Лангранжа $L = T - \Pi$ у рівняння Лангранжа ІІ роду, яке має вигляд:

$$E_i(L) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \ (i = 1, \dots, n),$$

і знайдемо диференціальні рівняння руху точки в декартових координатах:

$$m\ddot{x} = -\frac{kx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}; \qquad m\ddot{y} = -\frac{ky}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Якщо в якості узагальнених координат тепер вибрати полярні координати $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, то кінетична і потенціальна енергії точки будуть визначатися за відповідними виразами:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{r}^2\varphi^2); \qquad \Pi = -\frac{k}{r},$$

а диференціальні рівняння руху точки матимуть вигляд:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{k}{r^2}; \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0.$$

Той факт, що координата φ не входить у вираз для функції Лангранжа , дає можливість отримати з рівнянь руху перший інтеграл, що виражає закон збереження моменту кількості руху, у вигляді $mr^2\dot{\varphi} = C_1$.

Таким чином, вигляд рівнянь Лангранжа зберігається незалежно від вибору узагальнених координат, хоча їх вдалий вибір (полярні координати) значно спрощує структуру рівнянь руху, а отже і аналіз руху.