

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. В. Третиник, В. О. Ліскін

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ПРАКТИКУМ ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю F1 «Прикладна математика»,
освітньої програми «Машинне навчання та математичне моделювання»*

Київ

Електронне мережне навчальне видання

Київ
«ПТФ Просвіта»
2025

УДК 512.64+514

Т-66

*Рекомендовано Методичною радою КПП ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 2 від 06.11.2025 р)
за поданням Вченої ради факультету прикладної математики
(протокол № 5 від 27. 10. 2025 р.)*

Відповідальний редактор: *Сирота С. В. канд. техн. наук, доц., доцент кафедри
прикладної математики ФПМ*

Рецензент: *Кулик А.Б., канд. фіз.-мат. наук, доц., завідувач кафедри
вищої математики ФМ, КНЕУ ім. Вадима Гетьмана*

Третиник Віолета

Т-66 Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум Частина 1 [Електронний ресурс]
: навч. посіб. для студ. спеціальності F1 «Прикладна математика», освітньої
програми «Машинне навчання та математичне моделювання» / В.В. Третиник, В.О.
Ліскін; КПП ім. Ігоря Сікорського – Мережеве електронне видання (1 файл: 2,7
Мбайт). Київ : ПТФ Просвіта, 2025. – 154 с.
ISBN 978-617-7010-36-3

Навчальний посібник розроблено для застосування студентами теоретичних
знань з дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» на практиці під час
розв'язування задач. Подано приклади розв'язання типових задач до кожної теми,
що розглядається. Також для закріплення знань студентам пропонуються задачі для
самостійного розв'язання. Навчальне видання призначене для студентів, які
навчаються за спеціальністю F1 Прикладна математика, освітня програма «Машинне
навчання та математичне моделювання» факультету прикладної математики КПП ім.
Ігоря Сікорського.

УДК 512.64+514

ISBN 978-617-7010-36-3

© В.В. Третиник, В.О. Ліскін, 2025
© КПП ім. Ігоря Сікорського, 2025

ЗМІСТ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1.....	5
МАТРИЦІ. ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ. МАТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ	5
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2.....	11
ВИЗНАЧНИКИ. МАТРИЦІ.....	11
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3.....	27
ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ.....	27
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4.....	33
ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ТА НЕЗАЛЕЖНІСТЬ СИСТЕМИ ВЕКТОРІВ. РАНГ МАТРИЦІ.....	33
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5.....	47
СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОД КРАМЕРА. ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ.....	47
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6.....	60
СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. НЕОДНОРІДНІ СИСТЕМИ. НЕОДНОРІДНІ СИСТЕМИ З ПАРАМЕТРОМ.....	60
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7.....	70
ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ. РОЗКЛАД ПО БАЗИСУ	70
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8.....	87
ДОБУТОК ВЕКТОРІВ: СКАЛЯРНИЙ, ВЕКТОРНИЙ, МІШАНИЙ	87
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 9.....	99
ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ.....	99
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 10.....	116
ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ	116
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11.....	124
ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ОБЧИСЛЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК	124
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 12.....	139

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ПРИВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ ЛІНІЇ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ЛІНІЙ	139
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 13.....	145
ТЕОРІЯ МНОГОЧЛЕНІВ. НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ДІЛЬНИК. РОЗКЛАД ЗА ОСНОВНОЮ ТЕОРЕМОЮ АЛГЕБРИ.....	145
ЛІТЕРАТУРА.....	153

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1

МАТРИЦІ. ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ. МАТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ

Теоретичні відомості

Матрицею називають прямокутну таблицю з чисел, яка містить деяку кількість m рядків і деяку кількість n стовпців – $M_{m \times n}$.

Слід зауважити, що перше число завжди позначає кількість рядків.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Дві матриці A та B вважають **рівними**, якщо ці матриці мають однакову розмірність та всі їх відповідні елементи співпадають.

Сумою двох матриць A та B однакової розмірності m та n називають матрицю C , елементи c_{ij} якої дорівнюють

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i = \overline{1..m}, j = \overline{1..n}$$

Додавати (віднімати) можна тільки матриці однакової розмірності.

Добутком матриці A розмірності $m \times n$ **на дійсне число** α називається матриця B розмірності $m \times n$, елементи b_{ij} якої дорівнюють

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

При цьому записують $B = \alpha A$

Дві останні операції називаються **лінійними**.

Протилежною матрицею до матриці $A_{m \times n}$ називають таку матрицю B , яку можна отримати з матриці A шляхом множення всіх її елементів на « -1 ».

$$B = -A = (-1) \cdot A$$

$$b_{ij} = (-1) \cdot a_{ij}$$

Різницею матриць A та B однакової розмірності $m \times n$ називають таку матрицю C , яку отримують шляхом додавання матриці A та матриці, що протилежна до матриці B .

$$C = A - B = A + (-1) \cdot B$$

Транспонуванням матриці називають таку операцію, коли міняють місцями рядки та стовпці матриці із збереженням порядку їх слідування. Матрицю, транспоновану відносно матриці A , позначають A^T (або A').

$$\text{Якщо } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриці $A_{m \times n}$ та $B_{p \times q}$ називаються **узгодженими**, якщо кількість стовпців n першої матриці дорівнює кількості рядків p другої матриці:

Слід зазначити, що лише **узгоджені** матриці можна множити.

Результатом **множення матриці** $A_{m \times n}$ на матрицю $B_{p \times q}$ є матриця C розмірності $m \times q$, елементи якої визначають таким чином:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Тобто, елементи рядка першої матриці множать на відповідні елементи стовпця другої матриці та обчислюється сума всіх цих добутків.

Іншими словами, елемент c_{ij} , що стоїть на перетині i -го рядка та j -го стовпця матриці $C = A \cdot B$, дорівнює сумі попарних добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A та j -го стовпця матриці B .

Поліномом (многочленом) степеня k квадратної матриці A називають вираз

$$P(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{k-1} A^{k-1} + \alpha_k A^k,$$

де $\alpha_i \in \mathbb{R} \ i = \overline{0..k}$

Приклади розв'язання задач

1. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$. Знайти $3A - 2B$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} 3A - 2B &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -16 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 15 - 6 & -6 - 2 \\ 12 - 4 & 3 - (-16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$.

Знайти $A \cdot B$ та $B \cdot A$.

Розв'язання:

Оскільки кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B , то матриці узгоджені і добуток $A \cdot B$ існує.

Аналогічно існує добуток $B \cdot A$. Знайдемо їх.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-7) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-9) \\ 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 + 6 \cdot (-7) & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 8 & 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 6 + 6 \cdot (-9) \\ 7 \cdot (-1) + 8 \cdot 4 + 9 \cdot (-7) & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 8 & 7 \cdot (-3) + 8 \cdot 6 + 9 \cdot (-9) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14 & 36 & -18 \\ -26 & 81 & -36 \\ -38 & 126 & -54 \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 7 & (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 8 & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 9 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 7 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 8 & 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 9 \\ (-7) \cdot 1 + 8 \cdot 4 + (-9) \cdot 7 & (-7) \cdot 2 + 8 \cdot 5 + (-9) \cdot 8 & (-7) \cdot 3 + 8 \cdot 6 + (-9) \cdot 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14 & -16 & -18 \\ 66 & 81 & 96 \\ -38 & -46 & -54 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Як бачимо $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Відмітимо, що в загальному випадку матриці не комутують між собою.

3. Дано матрицю рядок $A = (4 \quad 2 \quad -6)$ та матрицю-стовпчик $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Знайти $A \cdot B$ та $B \cdot A$.

Розв'язання:

Матриця A має розмірність (1×3) , матриця B має розмірність (3×1) . Помноживши A на B одержимо матрицю розмірності (1×1) , тобто матриця виродиться в число. Помноживши матрицю B на A одержимо матрицю розмірності (3×3) .

$$A \cdot B = (4 \quad 2 \quad -6) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-6) \cdot 5) = -16$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} (4 \quad 2 \quad -6) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-6) \\ 1 \cdot 4 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-6) \\ 5 \cdot 4 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -18 \\ 4 & 2 & -6 \\ 20 & 10 & -30 \end{pmatrix}$$

4. Знайти поліном $P(A) = 3 - 2A + 6A^2$ від матриці $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Розв'язання:

Для узгодженості виразу запишемо поліном так:

$P(A) = 3I - 2A + 6A^2$, де I – одинична матриця другого порядку. Тоді:

$$\begin{aligned} P(A) &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 61 & 18 \\ 24 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 355 & 102 \\ 136 & 83 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. За допомогою оператора суми записати:

- 1.1. суму елементів з номерами від 12 до 43 без 33.
- 1.2. суму елементів з непарними номерами.
- 1.3. суму елементів в рядку/стовпці матриці.
- 1.4. суму елементів головної діагоналі квадратної матриці.
- 1.5. суму елементів побічної діагоналі квадратної матриці
- 1.6. суму елементів діагоналі, що знаходиться над головною

2. [ЕД 3.75] Довести властивості операцій над матрицями.

- 2.1. $A + B = B + A$
- 2.2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- 2.3. $(AB)C = A(BC)$

3. Довести властивості транспонування матриць.

- 3.1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
- 3.2. $(AB)^T = B^T A^T$

4. Обчислити.

- 4.1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} =$
- 4.2. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

5. Обчислити AB та BA , якщо це можливо.

- 5.1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 6 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
- 5.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$
- 5.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6. Обчислити.

$$6.1. \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$6.2. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6.3. \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$6.4. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$6.5. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$6.6. \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$$

7. Знайти матрицю B .

$$7.1. B = 3A^2 - 4I, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$7.2. B = 3A^2 - 2A + 5I, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$7.3. B = A^3 - 7A^2 + 13A - 5I, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

ВИЗНАЧНИКИ МАТРИЦІ

Теоретичні відомості

Розглянемо довільну квадратну матрицю порядку n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Пов'яжемо з кожною квадратною матрицею чисельну характеристику, яка називається **визначником** (або **детермінантом**) матриці, при цьому будемо використовувати для нього наступні позначення:

$$1) \Delta \qquad 2) \det A \qquad 3) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Варто зауважити, що поняття визначника має сенс тільки для **квадратної** матриці.

Для знаходження визначника матриці A n -го порядку можна використовувати або **формулу розвинення визначника за i -м рядком**

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \forall i = \overline{1..n} \qquad (2.1)$$

або **формулу розвинення визначника за j -м стовпцем**

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \forall j = \overline{1..n} \qquad (2.2)$$

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} матриці A – це мінор M_{ij} , який відповідає даному елементу матриці, помножений на (-1) в степені, який дорівнює сумі індексів елемента a_{ij} :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (2.3)$$

Мінор M_{ij} , який відповідає елементу матриці a_{ij} , є визначником матриці, яку можна отримати з початкової матриці A шляхом викреслювання

з неї рядка та стовпця, відповідних елементу a_{ij} (тобто i -го рядка та j -го стовпця).

Розглянемо матрицю другого порядку та скористаємося формулою (2.1), отримаємо:

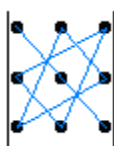
$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тобто при обчисленні визначників 2-го порядку необхідно з добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів побічної діагоналі.

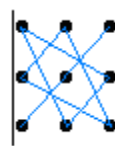
Тепер візьмемо матрицю третього порядку та застосуємо формулу (2.1):

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Формулу (2.5) часто називають «правилом зірочки». Досить легко можна запам'ятати знак доданків в цій формулі та які елементи утворюють доданки (Рис. 2.1а та 2.1б):



а



б

Рис. 1 а – добутки зі знаком плюс, б – добутки зі знаком мінус

Тобто, добуток елементів головної діагоналі та двох трикутників, основи яких паралельні до цієї діагоналі, враховують із знаком «плюс», а добуток елементів побічної діагоналі та двох інших трикутників, основи яких паралельні до цієї діагоналі, зі знаком «мінус».

Правило зірочки можна використовувати тільки для обчислення визначників **третього** порядку.

Формули (2.1) та (2.2) є універсальними, ними можна користуватись для обчислення визначників будь-якого порядку.

Для обчислення визначників порядок яких вище третього будемо використовувати метод елементарних перетворень, щоб привести матрицю до трикутного вигляду.

До елементарних перетворень над матрицями відносяться:

1. перестановки місцями двох рядків (стовпчиків) матриці;
2. множення рядка (стовпчика) матриці на ненульове число;
3. додавання до рядка (стовпчика) матриці іншого її рядка (стовпчика), помноженого на довільне число;
4. викреслення нульового рядка (стовпчика) матриці.

Також є матриці спеціального виду (так звані тридіагональні матриці) для яких використовують метод рекурентних співвідношень.

Поняття «рекурентність» означає, що об'єкт, який отримують на деякому n -ому кроці, залежить від того, що було отримано на деякій кількості попередніх кроків.

Стосовно визначників „рекурентність” означає, що деякий визначник n -го порядку може бути виражений через визначники, які мають такий самий вигляд, але менший порядок ($n - 1, n - 2, \dots$).

Приклади розв'язання задач

1. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Обчислимо визначник за допомогою розвинення за першим рядком:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 3(7 \cdot 8 - (-1) \cdot (-2)) - 4(8 \cdot 8 - 2 \cdot (-2)) - 5(8 \cdot (-1) - 2 \cdot 7) = 0 \end{aligned}$$

2. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Для обчислення визначника скористаємось правилом «зірочки»:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma - \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ &\quad - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) \end{aligned}$$

3. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \theta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \theta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \theta) \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \cos \theta + \sin \theta \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin \beta \cos \theta + \sin \theta \cos \beta \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin \gamma \cos \theta + \sin \theta \cos \gamma \end{vmatrix} = \\ &= \cos \theta \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin \gamma \end{vmatrix} + \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & \cos \beta \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

4. Довести тотожність:
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доведення:

Використаємо властивості визначників та одержимо з лівої частини тотожності:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -b_1x & c_1 \\ a_2 & -b_2x & c_2 \\ a_3 & -b_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1 & c_1 \\ b_2x & a_2 & c_2 \\ b_3x & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} b_1x & -b_1x & c_1 \\ b_2x & -b_2x & c_2 \\ b_3x & -b_3x & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Оскільки у першого визначника перший і другий стовпчики однакові, а у четвертого визначника перший і другий стовпчики кратні, то ці визначники дорівнюють нулю.

У другому визначнику винесемо за дужку спільний множник $-x$, а у третьому визначнику – спільний множник x .

Також у третьому визначнику переставимо місцями перший та другий стовпчики (цей визначник змінить знак на протилежний).

В результаті одержимо:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} &= \\ &= -x \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Тотожність доведена.

5. Довести тотожність:
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доведення:

Використаємо властивості визначників та одержимо з лівої частини тотожності:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Оскільки у першому та четвертому визначнику перший та другий стовпчики кратні, то вони дорівнюють нулю.

У третьому визначнику винесемо двічі за дужки спільний множник x та переставимо місцями перший і другий стовпчики (цей визначник змінить знак на протилежний).

В результаті одержимо:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Тотожність доведена.

6. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Розв'язання:

Зведемо визначник до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Для цього спочатку від другого, третього та четвертого рядків віднімемо перший. Потім від четвертого рядка віднімемо другий.

В результаті одержимо:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$

7. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Розв'язання:

Зведемо визначник до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Для цього спочатку переставимо перший та четвертий рядки (значення визначника змінить знак на протилежний):

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \sim - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Потім виконаємо такі перетворення: другий рядок помножимо на 3 і віднімемо від нього перший (занотуємо, що значення визначника збільшилось втричі).

Третій рядок помножимо на 3, перший рядок помножимо на 2 і від третього рядка віднімемо перший (занотуємо, що значення визначника збільшилось втричі):

$$\det A = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \sim - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \sim$$

Третій рядок помножимо на 2 і від нього віднімемо другий (занотуємо, що значення визначника збільшилось вдвічі).

Четвертий рядок помножимо на 2 і до нього додамо другий (занотуємо, що значення визначника збільшилось вдвічі):

$$\sim - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{vmatrix} \sim$$

До четвертого рядка додамо третій:

$$\sim - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = - \frac{3 \cdot (-2) \cdot (-6) \cdot 12}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = -12$$

1. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Розв'язання:

Виконаємо наступні елементарні перетворення:

- перший рядок помножимо на 2 і від другого віднімемо перший;
- третій рядок помножимо на 2, перший рядок помножимо на a і від третього рядка віднімемо перший (**занотуємо, що значення визначника збільшилось вдвічі**);
- четвертий рядок помножимо на 2, перший рядок помножимо на 3 і від четвертого рядка віднімемо перший (**занотуємо, що значення визначника збільшилось вдвічі**).

В результаті одержимо:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \sim \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 2b+3a & 2c-4a & 2d-a \\ 0 & 7 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

Розкриємо визначник за першим стовпчиком і застосуємо правило «зірочки»:

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 2b+3a & 2c-4a & 2d-a \\ 7 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (12(2c-4a) - 35(2d-a) + 15(2b+3a) + 16(2d-a)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(24c - 48a - 70d + 35a + 30b + 45a + 32d - 16a) = \\
&= 8a + 15b + 12c - 19d
\end{aligned}$$

2. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & n \end{pmatrix}$

Розв'язання:

Додамо до всіх рядків, починаючи з другого перший рядок і одержимо:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & n \end{vmatrix} \sim \\
&\sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!
\end{aligned}$$

3. Обчислити визначник n -го порядку для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Оскільки це так звана тридіагональна матриця, обчислимо її визначник методом рекурентних співвідношень. Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

Бачимо, що перший визначник за структурою подібний до вихідного, тільки на порядок менше. Другий визначник розкриємо за першим стовпчиком. В результаті одержимо:

$$\det A = 3\Delta_{n=1} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_{n=1} - 2\Delta_{n-2}$$

Останній визначник за структурою подібний до вихідного, тільки на два порядки менше.

4. Обчислити визначник n-го порядку для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & \dots & 3 \end{pmatrix}$

Розв'язання:

Розв'яжемо цю задачу методом узагальнення. Спочатку обчислимо для цієї матриці визначник першого порядку:

$$\Delta_1 = |3| = 3$$

Аналогічно знайдемо визначники другого, третього та четвертого порядків:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

Встановивши закономірність між порядком визначника і його значенням, знайдемо значення визначника n-го порядку: $\Delta_n = 2n + 1$.

5. Обчислити визначник (n + 1)-го порядку для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Розкриємо визначник за останнім рядком:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix} + a_n \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Бачимо, що другий визначник за структурою подібний до вихідного, тільки на порядок менше. Щодо першого визначника – розкриємо його за останнім стовпчиком. В результаті одержимо:

$$\begin{aligned} A &= (-1)^n (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} + a_n \Delta_{n-1} = \\ &= (-1)^{2n+1} a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_n \Delta_{n-1} = -a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_n \Delta_{n-1} \end{aligned}$$

6. Обчислити визначник n -го порядку для матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Розкриємо визначник за останнім рядком:

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \\
 &= -1 \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \alpha\beta \end{vmatrix} + (\alpha + \beta) \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Перший визначник розкриваємо за останнім стовпчиком і одержуємо визначник, який за структурою подібний до вихідного, тільки на два порядки менше. А другий визначник за структурою подібний до вихідного, тільки на порядок менше.

$$\text{Отже: } \det A = -\alpha\beta\Delta_{n-2} + (\alpha + \beta)\Delta_{n-1}$$

7. Обчислити визначник $(n + 1)$ -го порядку для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & x \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Розв'яжемо цю задачу методом узагальнення. Спочатку обчислимо для цієї матриці визначник четвертого порядку ($n = 3$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

Приведемо визначник до трикутного вигляду, виконуючи наступні елементарні перетворення:

- помножимо друге рівняння на a_0 і додамо до нього перше (**зауважимо, що значення визначника збільшилось у a_0 разів**)
- помножимо третє рівняння на $a_0 + a_1$ і додамо до нього друге (**зауважимо, що значення визначника збільшилось у $a_0 + a_1$ разів**)

- помножимо четверте рівняння на $a_0 + a_1 + a_2$ і додамо до нього третє (зауважимо, що значення визначника збільшилось у $a_0 + a_1 + a_2$ разів)

В результаті одержимо:

$$\Delta \sim \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & x(a_0 + a_1) & a_2 x & a_3 x \\ 0 & 0 & x(a_0 + a_1 + a_2) & a_3 x \\ 0 & 0 & 0 & x(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^3 a_0 (a_0 + a_1) (a_0 + a_1 + a_2) (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)}{a_0 (a_0 + a_1) (a_0 + a_1 + a_2)} =$$

$$= x^3 (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)$$

Узагальнюючи цю формулу, одержимо значення визначника $(n + 1)$ порядку:

$$\det A = x^n (a_0 + a_1 + a_2 + a_n)$$

8. Обчислити визначник n -го порядку для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & \dots & \dots & n \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Розв'яжемо цю задачу методом узагальнення. Спочатку обчислимо для цієї матриці визначник першого порядку:

$$\Delta_1 = |1| = 1$$

Аналогічно знайдемо визначники другого та третього порядків:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

Методом зведення до трикутного вигляду обчислимо для цієї матриці визначник четвертого порядку

$$(n = 4):$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Встановивши закономірність між порядком визначника і його значенням, знайдемо значення визначника n-го порядку:

$$\Delta_n = n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти визначник матриці.

$$1.1. \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$1.2. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.3. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$$

$$1.4. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.5. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

$$1.6. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$1.7. \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$1.8. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$1.9. \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$$

2. Знайти визначник, використовуючи розкриття за рядком чи стовпчиком:

$$2.1. \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Знайти визначник порядку n методом рекурентних співвідношень.

Вказівка: Довести, що вихідний визначник $\Delta_n(a)$ можна представити як $\Delta_n(a) = a\Delta_{n-1}(a)$.

$$3.1. \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = a^n + b^n$$

$$3.2. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n + 1$$

$$3.3. \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} = \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$$

$$3.4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-1}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Теоретичні відомості

Розглянемо квадратну матрицю n -го порядку $A = \{a_{ij}\}, i, j = \overline{1..n}$

Матрицю A будемо називати **невиродженою**, якщо її визначник відмінний від нуля ($\det A \neq 0$), та **виродженою** – якщо її визначник дорівнює нулю ($\det A = 0$).

Матриця B є **оберненою до квадратної матриці A** (або **оберненою матрицею**), якщо виконується наступне відношення:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Обернену матрицю позначатимемо як A^{-1} .

Таким чином, за визначенням

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \quad (4.1)$$

Матрицю A^* називають **приєднаною до матриці A** , якщо кожен її елемент a_{ij}^* є алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij}^T транспонованої матриці A^T , або інакше:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елементів початкової матриці.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}$$

де A_{ij}^T – алгебраїчне доповнення елементів транспонованої матриці.

Теорема (про елементарні перетворення матриці)

Якщо до одиничної матриці n -го порядку застосувати ті самі перетворення над рядками і в тому самому порядку, за допомогою яких невироджена матриця A n -го порядку зводиться до одиничної, то отримана при цьому матриця буде оберненою до A :

$$A \xrightarrow{\text{елем. перетвор.}} I \xrightarrow{\text{елем. перетвор.}} B \Rightarrow B = A^{-1}$$

Розглянемо різні можливі варіанти розв'язання матричних рівнянь:

1) $A \cdot X = B$

Щоб позбавитися від матриці A в лівій частині, помножимо обидві частини рівняння зліва на матрицю A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

З урахуванням визначення оберненої матриці

$$X = A^{-1} \cdot B$$

2) $X \cdot C = B$

Аналогічно до попереднього, але помноживши обидві частини рівняння справа на матрицю C^{-1} :

$$X = B \cdot C^{-1}$$

3) $A \cdot X \cdot C = B$

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

Варто зазначити, що в останніх виразах для розв'язків рівнянь матриці A та C – квадратні, X та B – довільні, які задовольняють умові узгодженості.

Приклади розв'язання задач

1. Знайти обернену матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Обчислимо визначник матриці $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -3$

Знайдемо приєднану матрицю та поділимо її на визначник:

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Оскільки потрібно позбавитися від матриці як в правій частині так і в лівій частині, помножимо обидві частини рівняння справа на обернену матрицю та зліва:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$X = \frac{1}{3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \frac{1}{5 \cdot 8 - 6 \cdot 7} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 14 + (-1) \cdot 9 & 2 \cdot 16 + (-1) \cdot 10 \\ 5 \cdot 14 + (-3) \cdot 9 & 5 \cdot 16 + (-3) \cdot 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \cdot (-4) + 22 \cdot \frac{7}{2} & 19 \cdot 3 + 22 \cdot \frac{-5}{2} \\ 43 \cdot (-4) + 50 \cdot \frac{7}{2} & 43 \cdot 3 + 50 \cdot \frac{-5}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Остаточно отримаємо:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Оскільки потрібно позбавитися від матриці в правій частині, помножимо обидві частини рівняння справа на обернену матрицю:

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -8 \cdot \frac{1}{19} + 3 \cdot \frac{9}{19} & -8 \cdot \frac{-1}{19} + 3 \cdot \frac{10}{19} & -8 \cdot \frac{-3}{19} + 3 \cdot \frac{11}{19} \\ -5 \cdot \frac{1}{19} + 9 \cdot \frac{9}{19} & -5 \cdot \frac{-1}{19} + 9 \cdot \frac{10}{19} & -5 \cdot \frac{-3}{19} + 9 \cdot \frac{11}{19} \\ -2 \cdot \frac{1}{19} + 15 \cdot \frac{9}{19} & -2 \cdot \frac{-1}{19} + 15 \cdot \frac{10}{19} & -2 \cdot \frac{-3}{19} + 15 \cdot \frac{11}{19} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Остаточно отримаємо:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти обернену матрицю.

$$1.1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1.2. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1.3. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1.4. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Розв'язати матричне рівняння.

$$2.1. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2.2. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2.3. \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$2.4. \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ТА НЕЗАЛЕЖНІСТЬ СИСТЕМИ ВЕКТОРІВ. РАНГ МАТРИЦІ

Теоретичні відомості

Розглянемо множину алгебраїчних векторів $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Лінійною комбінацією векторів $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають суму добутків цих векторів на дійсні числа:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad (4.1)$$

Тривіальною лінійною комбінацією називають лінійну комбінацію виду (4.1), де всі коефіцієнти дорівнюють нулеві:

$$\alpha_i = 0, i = \overline{1..n}$$

Очевидно, що тривіальна лінійна комбінація завжди дорівнює нулеві:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0,$$

де в правій частині – нуль-вектор.

Якщо в лінійній комбінації виду (4.1) хоча б один з коефіцієнтів відмінний від нуля, тобто $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \neq 0$, то це **нетривіальна лінійна комбінація**.

Система векторів $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається **лінійно залежною**, якщо існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, яка дорівнює нулеві:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \\ \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \neq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Лінійно незалежною називають таку систему векторів, для якої не існує нетривіальної нульової лінійної комбінації, тобто:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \\ \sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Іншими словами, система векторів буде лінійно незалежною, якщо лише їх тривіальна лінійна комбінація дорівнює нулю. Тобто, з того, що лінійна комбінація векторів дорівнює нулеві, випливає, що вона тривіальна:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Отже, для того, щоб перевірити чи вектори лінійно незалежні чи залежні потрібно:

- побудувати лінійну комбінацію з цих векторів;
- прирівняти лінійну комбінацію до нуля;
- зробити висновок щодо коефіцієнтів, які входять в рівняння: якщо всі коефіцієнти дорівнюють нулю, тобто виконується (4.3), то система векторів **лінійно незалежна**, якщо хоча б один з коефіцієнтів не дорівнює нулю, тобто виконується (4.2), то система векторів **лінійно залежна**.

Теорема (критерій лінійної залежності)

Для того, щоб вектори $x_1, x_2, \dots, x_n$ були лінійно залежні, необхідно і достатньо, щоб хоча б один з них лінійно виражався через інші вектори.

Нехай в системі векторів $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ перші k векторів лінійно незалежні, а вся система лінійно залежна. Вектори $x_1, x_2, \dots, x_k$ будемо називати базою системи векторів $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Тобто **база системи векторів** – це максимальна лінійно незалежна підсистема заданої системи векторів. Кількість векторів в базі називається **рангом системи**.

Розглянемо довільну прямокутну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Мінором k -го порядку матриці A називають визначник k -го порядку, складений з елементів, які розташовані на перетині будь-яких k рядків і будь-яких k стовпців матриці A . Зрозуміло, що k не перевищує мінімального з порядків m та n .

Припустимо, що хоча би один з елементів a_{ij} матриці A відмінний від нуля. Тоді знайдеться таке ціле додатне число r , що будуть виконуватись наступні дві умови:

- 1) в матриці A є міnor r -го порядку, який відмінний від нуля;
- 2) будь-який міnor $(r + 1)$ -го та вищого порядку (якщо такі існують) дорівнює нулеві.

Число r , що задовольняє цим вимогам, називають **рангом матриці A** та позначають $\text{rang} A$.

Зазначимо, що ранг нульової матриці дорівнює нулеві.

Міnor r -го порядку, який відмінний від нуля, називають **базисним мінором**. Рядки та стовпці, на перетині яких знаходиться базисний міnor, називають відповідно **базисними рядками і базисними стовпцями**.

Слід зазначити, що матриця A може мати декілька ненульових міnorів r -го порядку. Для ненульової матриці базисний міnor завжди існує.

Ранг матриці можна також визначити як максимальне число лінійно незалежних рядків. Можна стверджувати, що в будь-якій матриці максимальне число лінійно незалежних рядків збігається з максимальним числом лінійно незалежних стовпців.

Приклади розв'язання задач

1. Нехай $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ – лінійно незалежна система векторів. Чи будуть, лінійно незалежні наступні системи векторів:

1.1. $\bar{x}, \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$

Розв'язання:

Побудуємо лінійну комбінацію з цих векторів та прирівняємо її до нуля:

$$\alpha x + \beta(x + y) + \gamma(x + y + z) = 0$$

$$x(\alpha + \beta + \gamma) + y(\beta + \gamma) + z\gamma = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Отже, $\gamma = 0, \beta = -\gamma = 0, \alpha = -\beta - \gamma = 0$.

Таким чином система лінійно незалежна.

1.2. $\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, \bar{z} + \bar{x}$

Розв'язання:

Побудуємо лінійну комбінацію з цих векторів та прирівняємо її до нуля:

$$\alpha(x + y) + \beta(y + z) + \gamma(z + x) = 0$$

$$x(\alpha + \gamma) + y(\alpha + \beta) + z(\beta + \gamma) = 0$$

Оскільки задані вектори ненульові, можна стверджувати, що рівність справедлива, коли виконується:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \alpha = -\beta = \gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$

Отже $\alpha = -\gamma, \alpha = \gamma, \gamma = 0, \beta = -\gamma = 0$.

Таким чином система лінійно незалежна.

1.3. $\bar{x} - \bar{y}, \bar{y} - \bar{z}, \bar{z} - \bar{x}$

Розв'язання:

Побудуємо лінійну комбінацію з цих векторів та прирівняємо її до нуля:

$$\alpha(x - y) + \beta(y - z) + \gamma(z - x) = 0$$

$$x(\alpha - \gamma) + y(\beta - \alpha) + z(\gamma - \beta) = 0$$

Оскільки задані вектори ненульові, можна стверджувати, що рівність справедлива, коли виконується:

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \beta - \alpha = 0 \\ \gamma - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \alpha \\ \gamma = \beta \end{cases}$$

Оскільки α, β, γ можуть бути довільними числами, то система лінійно залежна.

2. Показати, що для будь-яких векторів $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ і будь-яких чисел α, β, γ система векторів $\alpha\bar{x} - \beta\bar{y}, \gamma\bar{y} - \alpha\bar{z}, \beta\bar{z} - \gamma\bar{x}$ лінійно залежна.

Розв'язання:

Побудуємо лінійну комбінацію з цих векторів та прирівняємо її до нуля:

$$k_1(\alpha\bar{x} - \beta\bar{y}) + k_2(\gamma\bar{y} - \alpha\bar{z}) + k_3(\beta\bar{z} - \gamma\bar{x}) = 0$$

Нехай x, y, z – лінійно незалежні.

Оскільки задані вектори ненульові, можна стверджувати, що рівність справедлива, коли виконується:

$$(k_1\alpha - k_3\gamma)\bar{x} + (k_2\gamma - k_1\beta)\bar{y} + (k_3\beta - k_2\alpha)\bar{z} = 0$$

$$\begin{cases} k_1\alpha - k_3\gamma = 0 \\ k_2\gamma - k_1\beta = 0 \\ k_3\beta - k_2\alpha = 0 \end{cases}$$

$$k_3 = \frac{\alpha}{\gamma}k_1 \qquad k_2 = \frac{\beta}{\gamma}k_1$$

$$\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma} - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right) k_1 = 0, k_1 \neq 0 \Rightarrow \text{вихідна система лінійно залежна.}$$

Нехай x, y, z – лінійно залежні.

$$\text{Тоді } \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma} - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right) k_1 = 0, 0 \cdot k_1 \neq 0 - \text{неможливо.}$$

$$\text{Тоді } k_1 \neq \frac{\gamma}{\alpha} k_3, k_2 \neq \frac{\beta}{\gamma} k_1, k_3 \neq \frac{\alpha}{\beta} k_2 \Rightarrow k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 \neq 0. \Rightarrow$$

вихідна система лінійно залежна.

3. Довести, що система в яку входить два однакових вектори лінійно залежна.

Розв'язання:

Нехай є система векторів $a, a, x, y, \dots, z$. Побудуємо лінійну комбінацію з цих векторів та прирівняємо її до нуля:

$$k_1 a + k_2 a + k_3 x + k_4 y + \dots + k_n z = 0 \quad (4.4)$$

або

$$(k_1 + k_2) a + k_3 x + k_4 y + \dots + k_n z = 0$$

Оскільки задані вектори ненульові, можна стверджувати, що рівність справедлива, коли виконується:

$$k_1 + k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 0, \dots, k_n = 0$$

Отже $k_1 = -k_2 \neq 0$. Таким чином, для (4.4) виконується умова (4.2) і вектори лінійно залежні.

4. Довести, що система векторів, у якій два вектори відрізняються скалярним множником, лінійно залежна.

Розв'язання:

Нехай є система векторів $a, ka, x, y, \dots, z$, k -скалярний множник. Побудуємо лінійну комбінацію з цих векторів та прирівняємо її до нуля:

$$k_1 a + k_2 ka + k_3 x + k_4 y + \dots + k_n z = 0 \quad (4.5)$$

або

$$(k_1 + k_2k)a + k_3x + k_4y + \dots + k_nz = 0$$

Оскільки задані вектори ненульові, можна стверджувати, що рівність справедлива, коли виконується:

$$k_1 + k_2k = 0, k_3 = 0, k_4 = 0, \dots, k_n = 0$$

Отже $k_1 = -kk_2 \rightarrow k_2 \neq 0, k_1 \neq 0$.

Таким чином, для (4.5) виконується умова (4.2) і вектори лінійно залежні.

5. Довести, що система векторів, яка містить нульовий вектор лінійно залежна.

Розв'язання:

Нехай є система векторів $\vec{0}, x, y, \dots, z$. Побудуємо лінійну комбінацію з цих векторів та прирівняємо її до нуля:

$$k_1\vec{0} + k_2x + k_3y + \dots + k_nz = 0$$

Оскільки можна знайти коефіцієнт k_1 , що не дорівнює нулю, то дана лінійна комбінація буде нетривіальна.

Отже, дана система векторів лінійно залежна.

6. Довести, що якщо вектори $a_1, a_2, \dots, a_r$ лінійно незалежні та лінійно виражаються через вектори $b_1, b_2, \dots, b_s$, то $r \leq s$.

Розв'язання:

Оскільки вектори $a_1, a_2, \dots, a_r$ лінійно незалежні, то для них справедливо:

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ra_r = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0 \quad (4.6)$$

Доведемо твердження від супротивного: нехай $r > s$.

Запишемо рівності, які показують, що вектори $a_1, a_2, \dots, a_r$ лінійно виражаються через вектори $b_1, b_2, \dots, b_s$:

[illegible]

Підставимо (4.7) у (4.6) та одержимо:

$$k_1(a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1s}b_s) + k_2(a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2s}b_s) + \cdots \\ + k_r(a_{r1}b_1 + a_{r2}b_2 + \cdots + a_{rs}b_s) = 0$$

Перегрупувавши доданки, одержимо:

$$b_1(a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \cdots + a_{r1}k_r) + b_2(a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{r2}k_r) + \cdots \\ + b_s(a_{1s}k_1 + a_{2s}k_2 + \cdots + a_{rs}k_r) = 0$$

Знайдемо умову, коли вірна остання рівність.

Оскільки $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$, то остання рівність вірна, коли

ВИКОНУЄТЬСЯ:

[illegible]

Ця однорідна система має тривіальний розв'язок

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0.$$

Отже, вона сумісна.

Оскільки ранг основної матриці щонайбільше дорівнює s ($s < r$), то система має нетривіальний розв'язок $k_1^* = k_2^* = \dots = k_r^* \neq 0$ (див. теоретичний матеріал з практичного заняття № 8).

Але згідно (4.6) це неможливо.

Отже, припущення, що $r > s$ невірне. Таким чином $r \leq s$.

7. Знайти всі бази системи векторів:

$$a_1 = (1, 2, 0, 0); a_2 = (1, 2, 3, 4); a_3 = (3, 6, 0, 0)$$

Розв'язання:

Складемо матрицю системи векторів (вектори записуємо по стовпчиках) та виконуємо елементарні перетворення :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Виділяємо базисні мінори в останній матриці (див. *теоретичний матеріал з практичного заняття № 6*).

Один з них знаходиться на перетині першого та другого стовпчиків і першого та третього рядків; інший – на перетині другого та третього стовпчиків і першого та третього рядків.

Отже є дві бази: $\{a_1, a_2\}$ та $\{a_2, a_3\}$.

8. Знайти всі бази системи векторів:

$$a_1 = (1, 2, 3, 4); a_2 = (2, 3, 4, 5); a_3 = (3, 4, 5, 6); a_4 = (4, 5, 6, 7)$$

Розв'язання:

Складемо матрицю системи векторів (вектори записуємо по стовпчиках) та виконуємо елементарні перетворення :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Бачимо, що ранг матриці дорівнює 2 (див. *теоретичний матеріал з практичного заняття №6*). Базисний мінор знаходиться на перетині будь-яких двох стовпців та першого і другого рядків.

Отже базою можуть бути будь-які два вектори системи.

9. Знайти ранг матриці методом обвідних мінорів

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Отже, ранг матриці A дорівнює 3.

10. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$

Розв'язання:

Зведемо вихідну матрицю до квазітрикутного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 3 & 9 & \lambda - 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 0 & 9 - 3\lambda & \lambda - 3 & 0 \end{pmatrix}$$

При $\lambda = 3$ ранг дорівнює 2.

При $\lambda \neq 3$ ранг дорівнює 3

11. Методом елементарних перетворень знайти ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Зведемо вихідну матрицю до квазітрикутного вигляду (перетворимо в нулі елементи a_{21}, a_{31}, a_{32} :

$$A \sim \begin{pmatrix} 17 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 0 & 3408 & -519 & -10224 & -2568 \\ 0 & -6204 & -543 & 18612 & -1596 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 17 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 0 & 3408 & -519 & -10224 & -2568 \\ 0 & 0 & -5070420 & 0 & -21371040 \end{pmatrix}$$

За базисний мінор можемо вибрати мінор, який знаходиться на перетині трьох рядків та перших трьох стовпців (виділений жирним).

Отже, ранг матриці A дорівнює 3.

12. Знайти ранг системи поліномів: $p_1 = 3x^2 + 8x - 4$,
 $p_2 = -x^2 + 2x - 1$, $p_3 = x^2 - 5$.

Розв'язання:

Перекодуємо спочатку поліноми у звичайні вектори:

$$p_1 = 3x^2 + 8x - 4 \rightarrow (3, 8, -4)$$

$$p_2 = -x^2 + 2x - 1 \rightarrow (-1, 2, -1)$$

$$p_3 = x^2 - 5 \rightarrow (1, 0, -5)$$

Складемо матрицю з даних векторів, записуючи кожен вектор по стовпчику:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Методом обвідних мінорів знайдемо ранг цієї матриці. $M_1 = 3 \neq 0$,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 14 \neq 0, M_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -70 \neq 0$$

Отже, ранг матриці дорівнює 3. Таким чином ранг системи поліномів дорівнює 3.

13. Знайти ранг системи матриць: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Перекодуємо спочатку матриці у звичайні вектори:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 2, 3, 4); \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (-1, 0, 5, 1);$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (2, -3, 1, -1); \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (0, 1, 3, 2).$$

Складемо матрицю з даних векторів, записуючи кожен вектор по

стовпчику: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Знайдемо ранг цієї матриці, використовуючи метод елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 23 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 23 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Бачимо, що ранг матриці дорівнює 3. Таким чином ранг системи матриць дорівнює 3.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Доведіть.

- 1.1. Довести, що якщо частина системи векторів лінійно залежна, то і уся система лінійно залежна.
- 1.2. Довести, що якщо три вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$, лінійно залежні і вектор $\bar{a}_3$ не виражається лінійно через вектори $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$, то вектори $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$ розрізняються між собою лише числовим множником.
- 1.3. Довести, що якщо вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ лінійно незалежні, а вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k, \bar{b}$ лінійно залежні, то вектор $\bar{b}$ лінійно виражається через вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$.
- 1.4. Довести, що впорядкована система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$, відмінних від нуля, тоді і тільки тоді лінійно незалежна, коли жоден з цих векторів лінійно не виражається через інші.
- 1.5. Довести, що якщо до впорядкованої лінійно незалежної системи векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$, приписати попереду ще один вектор $\bar{b}$, то не більше ніж один вектор отриманої системи лінійно виражатиметься через інші.

2. Знайти усі значення λ , при яких вектор $\bar{b}$ лінійно виражається через вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$:

2.1. $\bar{a}_1 = (2, 3, 5), \bar{a}_2 = (3, 7, 8), \bar{a}_3 = (1, -6, 1), \bar{b} = (7, -2, \lambda)$.

2.2. $\bar{a}_1 = (3, 2, 5), \bar{a}_2 = (2, 4, 7), \bar{a}_3 = (5, 6, \lambda), \bar{b} = (1, 3, 5)$.

3. Дано систему многочленів $f_1(t) = 1 - t^2, f_2(t) = 1 + t^3, f_3(t) = t - t^3, f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Знайти лінійні комбінації многочленів цієї системи: а) $5f_1 + f_2 - 4f_3$ б) $f_1 + 9f_2 - 4f_4$.

4. З'ясувати чи є система векторів арифметичних просторів лінійно залежною:

4.1. $x_1 = (-3, 1, 5), x_2 = (6, -2, 15)$

4.2. $x_1 = (1, 2, 3), x_2 = (2, 5, 7), x_3 = (3, 7, 10)$

5. Знайти ранг матриці методом обвідних мінорів:

5.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

5.2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

6. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

7. Знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень:

7.1. $A = \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$

7.2. $A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$

8. Знайти ранг і який-небудь базис заданої системи векторів:

$a_1 = (5, 2, -3, 1), \quad a_2 = (4, 1, -2, 3), \quad a_3 = (1, 1, -1, -2),$
 $a_4 = (3, 4, -1, 2).$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОД КРАМЕРА. ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ

Теоретичні відомості

Розглянемо квадратну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

з відмінним від нуля визначником основної матриці ($\Delta = \det A \neq 0$).

Дана система має розв'язок (причому єдиний), який визначається формулами Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1..n},$$

де Δ_j – визначник, який отримують з визначника Δ основної матриці A заміною його j -го стовпця стовпцем з вільних членів із збереженням без зміни решти стовпців визначника Δ .

Основне призначення формул Крамера – дати явне представлення для розв'язків квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь через її коефіцієнти та вільні члени.

Практичне їх використання пов'язане з досить громіздкими обчисленнями (для розв'язку системи n -го порядку необхідно обчислити $(n + 1)$ визначник n -го порядку).

Розглянемо однорідну систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

або в матричному вигляді

$$Ax = 0$$

Зазначимо те, що однорідна система завжди має тривіальний (нульовий) розв'язок $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ($x = 0$), тобто однорідна система завжди сумісна.

Постає питання про те, за яких умов однорідна система має, крім тривіального розв'язку, ще й інші розв'язки (тобто є «нетривіально сумісною»).

Теорема (про нетривіальні розв'язки однорідної системи)

Однорідна система (5.1) має нетривіальні розв'язки тоді і лише тоді, коли ранг її матриці менший за кількість її стовпців:

$$r = \text{rang} A < n$$

Наслідок

Квадратна однорідна система має нетривіальні розв'язки тоді і лише тоді, коли визначник її матриці дорівнює нулеві: $\det A = 0$.

Приклади розв'язання задач

1. Розв'язати методом Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Розв'язання:

Обчислимо визначник основної матриці Δ та визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 8 & 12 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2;$$

Знайдемо розв'язок за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1;$$

$$x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1.$$

2. Розв'язати методом Крамера систему рівнянь:
$$\begin{cases} 3x - 5y + z = -4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 4x - 7y + 2z = 5 \end{cases}$$

Розв'язання:

Обчислимо визначник основної матриці Δ та визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -5 & 1 \\ 9 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & 2 \end{vmatrix} = -119,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -49, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -4 \\ 2 & -1 & 9 \\ 4 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 84.$$

Знайдемо розв'язок за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -17, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -7, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 12.$$

3. Знайти яку-небудь базу системи векторів і всі вектори системи, що не входять в дану базу, виразити через вектори бази:

$$a_1 = (2, -1, 3, 5), a_2 = (4, -3, 1, 3), a_3 = (3, -2, 3, 4), \\ a_4 = (4, -1, 15, 17), a_5 = (7, -6, -7, 0)$$

Розв'язання:

Складемо з векторів матрицю і знайдемо її ранг методом елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 3 & 15 & -7 \\ 5 & 3 & 4 & 17 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & -10 & -3 & 18 & -35 \\ 0 & -14 & -7 & 14 & -35 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Бачимо, що ранг матриці дорівнює 3.

Виберемо за базисний мінор той, що знаходиться на перетині перших трьох рядків та перших трьох стовпців.

Тоді вектори a_1, a_2, a_3 утворюють базу.

Виразимо вектори a_4, a_5 через базу і одержимо:

$$a_4 = A_1 a_1 + B_1 a_2 + C_1 a_3; a_5 = A_2 a_1 + B_2 a_2 + C_2 a_3$$

Підставимо замість a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 явний вираз векторів і одержимо наступні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2A_1 + 4B_1 + 3C_1 = 4 \\ -A_1 - 3B_1 - 2C_1 = -1 \\ 3A_1 + B_1 + 3C_1 = 15 \\ 5A_1 + 3B_1 + 4C_1 = 17 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2A_2 + 4B_2 + 3C_2 = 7 \\ -A_2 - 3B_2 - 2C_2 = -6 \\ 3A_2 + B_2 + 3C_2 = -7 \\ 5A_2 + 3B_2 + 4C_2 = 0 \end{cases}$$

Відкинемо останні рівняння і розв'яжемо системи методом Крамера.

В результаті одержимо:

$$A_1 = 2, B_1 = -3, C_1 = 4$$

$$A_2 = 1, B_2 = 5, C_2 = -5$$

Отже, вектори a_4, a_5 наступним чином виражаються через вектори бази a_1, a_2, a_3 :

$$a_4 = 2a_1 - 3a_2 + 4a_3; \quad a_5 = a_1 + 5a_2 - 5a_3$$

4. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків для

$$\text{системи рівнянь} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Зведемо вихідну матрицю до трикутного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Виражаємо з другого рівняння $x_2 \Rightarrow x_2 = -6x_3 + 5x_4$.

Підставляємо вираз x_2 у перше рівняння та виражаємо $x_1 \Rightarrow$

$$x_1 = 8x_3 - 7x_4$$

Відповідно x_3 та x_4 – вільні змінні

$$X = \begin{pmatrix} 8x_3 - 7x_4 \\ -6x_3 - 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \text{загальний розв'язок}$$

$$\bar{X} = x_3 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{фундаментальна система розв'язків.}$$

5. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків для

$$\text{системи рівнянь} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Зведемо вихідну матрицю до трикутного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{14}{3} \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & \frac{17}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки ранг матриці дорівнює 3 і дорівнює також кількості стовпців, дана система не має нетривіальних розв'язків. Отже, розв'язок

системи – тривіальний (фундаментальної системи розв'язків немає).

Покажемо це:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = 0 \\ -35x_3 = 0 \end{cases}$$

З третього рівняння маємо $-35x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

З другого рівняння маємо $\frac{1}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x_2 = -\frac{7}{3}x_3$

підставляючи значення x_3 одержимо $x_2 = 0$

З першого рівняння маємо $3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow 3x_1 = -5x_2 - 2x_3$

підставляючи значення x_2 та x_3 одержимо $3x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Знайти значення параметра a , при яких система має нетривіальні розв'язки, і знайти їх.

$$\begin{cases} a^2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Однорідна система має нетривіальні розв'язки, коли визначник системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 3 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4a^2 + 2a + 24 + 16 - a^2 - 12a = 0$$

$$-5a^2 - 10a + 40 = 0$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$a = -4 \text{ або } a = 2$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 3 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ a & -1 & 1 \\ a^2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{-a-8}{8} & \frac{-a+2}{2} \\ a^2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{-a-8}{8} & \frac{-a+2}{2} \\ 0 & \frac{-a^2+24}{8} & \frac{-a^2+4}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{-a-8}{8} & \frac{-a+2}{2} \\ 0 & \frac{-a^2+24}{8} & \frac{-a^2+4}{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{-a-8}{8} & \frac{-a+2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-5a^2-10a+40}{a+8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{-a-8}{8} & \frac{-a+2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -\frac{a-8}{8}x_2 - \frac{a-2}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{-a-8}{8}x_2 - \frac{a-2}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-4a+8}{a+8}x_3$$

$$8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-5}{a+8}x_3$$

$$x_3 = x_3$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-5}{a+8}x_3 \\ -\frac{4a+8}{a+8}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{-5}{a+8} \\ \frac{-4a+8}{a+8} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ при } a^2 + 2a - 8 = 0$$

7. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків

$$\text{однорідної системи: } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Спростимо основну матрицю системи використовуючи елементарні перетворення:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Робимо висновок, що ранг матриці дорівнює 2.

Базисний мінор знаходиться на перетині першого та другого рядка і другого та третього стовпчика (виділено жирним).

Отже, базисні змінні – x_2, x_3 , а вільні змінні – x_1, x_4 .

Для останньої матриці запишемо відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ -7x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Перенесемо вільні змінні вправо і розв'яжемо систему відносно x_2, x_3 .

$$\begin{cases} -4x_2 + 5x_3 = -2x_1 - 3x_4 \\ -7x_3 = 5x_4 \end{cases}$$

З останнього рівняння знайдемо x_3 та підставимо у перше рівняння і знайдемо x_2 . Одержимо: $x_3 = -\frac{5}{7}x_4$, $x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{7}x_4$.

Таким чином, загальний розв'язок однорідної системи:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{7}x_4 \\ -\frac{5}{7}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Щоб знайти фундаментальну систему розв'язків покладемо $x_1 = 1, x_4 = 0$ або $x_1 = 0, x_4 = 1$.

В результаті одержимо два лінійно незалежних розв'язки, які утворюють фундаментальну систему розв'язків.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/7 \\ -5/7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків

$$\text{однорідної системи: } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Спростимо основну матрицю системи використовуючи елементарні перетворення:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Робимо висновок, що ранг матриці дорівнює 3.

Базисний мінор знаходиться на перетині першого, другого та третього рядка і першого, другого та третього стовпчика (виділено жирним).

Отже, базисні змінні – x_1, x_2, x_3 , а вільні змінні – x_4, x_5, x_6 .

Для останньої матриці запишемо відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Перенесемо вільні змінні вправо і розв'яжемо систему відносно x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -x_5, x_1 = x_4 - x_5 \\ x_2 = x_4 - x_6 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

Таким чином, загальний розв'язок однорідної системи:

$$X = \begin{pmatrix} x_4 - x_5 \\ x_4 - x_6 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Щоб знайти фундаментальну систему розв'язків покладемо $x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 0$ або $x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$ або $x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1$.

В результаті одержимо три лінійно незалежних розв'язки, які утворюють фундаментальну систему розв'язків.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Розв'язати методом Крамера

$$1.1. \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

$$1.7. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

$$1.8. \begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5 \\ 3x - 7y + 3z - t = -1 \\ 5x - 9y + 6z + 2t = 7 \\ 4x - 6y + 3z + t = 8 \end{cases}$$

2. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок однорідної СЛАР.

$$2.1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6
СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ.
НЕОДНОРІДНІ СИСТЕМИ. НЕОДНОРІДНІ СИСТЕМИ З
ПАРАМЕТРОМ.

Теоретичні відомості

Розглянемо метод пошуку розв'язку лінійної неоднорідної системи m рівнянь та n невідомих

$$Ax = b \quad (6.1)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (6.2)$$

Розширену матрицю системи $\tilde{A}$, отримують шляхом дописування до матриці A вектора правої частини b : $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) = (A|b)$

Якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля ($b \neq 0$), система називається **неоднорідною**.

Розв'язком системи (6.1) називається така сукупність n чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, яка при підстановці в систему на місце невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ перетворює всі рівняння цієї системи в тотожності.

Система (6.1), яка має хоча б один розв'язок називається **сумісною**. Сумісна лінійна система називається **визначеною**, якщо вона має єдиний розв'язок, і **невизначеною**, якщо існують принаймні два різні розв'язки.

Теорема Кронекера-Капеллі

Для того, щоб лінійна система була **сумісною**, необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці цієї системи дорівнював рангу її основної матриці: $\text{rang} A = \text{rang} \tilde{A}$.

Приклади розв'язання задач

1. Дослідити на сумісність, знайти загальний розв'язок і один частковий

$$\text{розв'язок системи рівнянь: } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18 \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & | & 5 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & | & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & | & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & | & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -17 & | & 8 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & | & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -17 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Бачимо, що ранг розширеної та основної матриці дорівнює 2. Отже, система сумісна. Знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 8x_3 - 17x_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{8 + 17x_4}{8} = 1 + \frac{17}{8}x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 3 + \frac{51}{8}x_4 - 7x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 + \frac{17}{8}x_4 \\ x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{16}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_3 - \text{Базисні} \\ x_2, x_4 - \text{Вільні} \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} \frac{5}{16} \\ 0 \\ \frac{17}{8} \\ 1 \end{bmatrix} x_4 - \text{загальний розв'язок системи.}$$

Для знаходження часткового розв'язку, покладемо $x_2 = 2, x_4 = 16$.

$$\text{В результаті одержимо: } X_{\text{част.}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 35 \\ 16 \end{bmatrix}$$

2. Дослідити скільки розв'язків має система в залежності від значення

$$\text{параметра } a: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + ax_4 = 2 \end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо розширену матрицю системи та спростимо її використовуючи елементарні перетворення:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & | & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & | & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & | & -11 \\ 4 & 1 & 4 & a & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & | & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & | & 9 \\ 0 & -15 & -24 & -48 & | & -27 \\ 0 & -5 & -8 & a-16 & | & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & | & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & | & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & a & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Якщо $a = 0$, то ранг основної матриці дорівнює 2, а розширеної – 3.

Отже система неsumісна.

Якщо $a \neq 0$, то ранги основної та розширеної матриці співпадають і дорівнюють 3.

В цьому випадку система сумісна і має безліч розв'язків.

3. Дослідити скільки розв'язків має система в залежності від значення

$$\text{параметра } a: \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо розширену матрицю системи та спростимо її використовуючи елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2 - 1 & a - 1 & a - 1 \\ 0 & 1 - a & a - 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2 - 1 & a - 1 & a - 1 \\ 0 & 0 & (a + 2)(a - 1) & a - 1 \end{array}\right)$$

Запишемо детермінант основної матриці:

$$\Delta = a(a^2 - 1)(a + 2)(a - 1) = a(a - 1)^2(a + 1)(a + 2)$$

Якщо $\Delta \neq 0$, тобто $a \neq -2, -1, 0, 1$, то ранг основної та розширеної матриці дорівнює 3.

Отже, система сумісна і її можна розв'язати методом Крамера, знайшовши єдиний розв'язок.

Розглянемо випадки, коли $\Delta = 0$.

Для $a = -2$ розширена матриця матиме вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Бачимо, що ранг основної матриці дорівнює 2, а розширеної – 3.

Отже, система несумісна, розв'язків нема.

Для $a = -1$ розширена матриця матиме вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Бачимо, що ранг основної та розширеної матриці дорівнює 2.

Отже, система сумісна, розв'язків безліч (ранг матриці менше кількості невідомих).

Для $a = 0$ розширена матриця матиме вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Бачимо, що ранг основної та розширеної матриці дорівнює 2.

Отже, система сумісна, але розв'язок єдиний, оскільки вільна змінна x_1 не входить в результуюче рівняння.

Для $a = 1$ розширена матриця матиме вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Бачимо, що ранг основної та розширеної матриці дорівнює 1.

Отже, система сумісна, розв'язків безліч (ранг матриці менше кількості невідомих).

4. Дослідити скільки розв'язків має система в залежності від значення

параметра d :
$$\begin{cases} dx + (2d - 1)y + (d + 2)z = 1 \\ (d + 1)y + (d - 3)z = 1 + d \\ dx + (3d - 2)y + (3d + 1)z = 2 - d \end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо розширену матрицю системи та спростимо її використовуючи елементарні перетворення:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} d & 2d - 1 & d + 2 & 1 \\ 0 & d + 1 & d - 3 & 1 + d \\ d & 3d - 2 & 3d + 1 & 2 - d \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} d & 2d - 1 & d + 2 & 1 \\ 0 & d + 1 & d - 3 & 1 + d \\ 0 & d - 1 & 2d - 1 & 1 - d \end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} d & 2d - 1 & d + 2 & 1 \\ 0 & d + 1 & d - 3 & 1 + d \\ 0 & 0 & d^2 + 5d - 4 & 2(1 - d^2) \end{array}\right) \end{aligned}$$

Запишемо детермінант основної матриці:

$$\Delta = d(d + 1)(d^2 + 5d - 4)$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то ранг основної та розширеної матриці дорівнює 3.

Отже, система сумісна і її можна розв'язати методом Крамера, знайшовши єдиний розв'язок.

Розглянемо випадки, коли $\Delta = 0$.

Для $d = 0$ розширена матриця матиме вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Бачимо, що ранг основної матриці дорівнює 2, а розширеної – 3.

Отже, система несумісна, розв'язків нема.

Для $d = -1$ розширена матриця матиме вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Бачимо, що ранг основної та розширеної матриці дорівнює 2.

Отже, система сумісна, розв'язків безліч (ранг матриці менше кількості невідомих).

Для $d^2 + 5d - 4 = 0$ розширена матриця матиме вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} d & 2d-1 & d+2 & 1 \\ 0 & d+1 & d-3 & 1+d \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-d^2) \end{array}\right)$$

Бачимо, що ранг основної матриці дорівнює 2, а розширеної – 3.

Отже, система несумісна, розв'язків нема.

5. Дослідити скільки розв'язків має система в залежності від значення

параметрів a та b :
$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = -3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо розширену матрицю системи та спростимо її використовуючи елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & -3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 0 & ab-1 & a-1 & -3a-4 \\ 1 & b & 0 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 0 & ab-1 & a-1 & -3a-4 \\ 0 & 0 & b(1-a) & 10ab+4b-7 \end{array} \right)$$

Запишемо детермінант основної матриці:

$$\Delta = ab(ab-1)(1-a)$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то ранг основної та розширеної матриці дорівнює 3.

Отже, система сумісна і її можна розв'язати методом Крамера, знайшовши єдиний розв'язок.

Розглянемо випадки, коли $\Delta = 0$.

Для $a = 0$ розширена матриця матиме вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & b & 4b-7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & b & 4b-7 \end{array} \right)$$

Бачимо, що задача звелась до задачі з одним параметром.

Якщо $b = 0$, то ранг основної матриці дорівнює 1, а ранг розширеної матриці дорівнює 2.

Отже, система несумісна, розв'язків нема.

Якщо $b \neq 0$, то ранг основної та розширеної матриці дорівнює 2.

Отже, система сумісна, розв'язків безліч (ранг матриці менше кількості невідомих).

Для $b = 0$ розширена матриця матиме вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & a-1 & -3a-4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right)$$

Бачимо, що задача звелась до задачі з одним параметром.

Якщо $a = 0$, то ранг основної матриці дорівнює 1, а ранг розширеної матриці дорівнює 2.

Отже, система несумісна, розв'язків нема.

Якщо $a \neq 0$, то ранг основної матриці дорівнює 2, а ранг розширеної матриці дорівнює 3.

Отже, система несумісна, розв'язків нема.

Для $a = 1$ розширена матриця матиме вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 14b-7 \end{array} \right)$$

Бачимо, що задача звелась до задачі з одним параметром.

Якщо $b = 1/2$, то то ранг основної та розширеної матриці дорівнює 2.

Отже, система сумісна, розв'язків безліч (ранг матриці менше кількості невідомих).

Якщо $b \neq 1/2$, то ранг основної матриці дорівнює 2, а ранг розширеної матриці дорівнює 3.

Отже, система несумісна, розв'язків нема.

Для $ab = 1$ розширена матриця матиме вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & a-1 & -3a-4 \\ 0 & 0 & \frac{1-a}{a} & 10 + \frac{4}{a} - 7 \end{array} \right)$$

Бачимо, що для будь якого значення параметра a ранг основної матриці дорівнює 2, а ранг розширеної матриці дорівнює 3.

Отже, система несумісна, розв'язків нема.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок систем:

$$1.1. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 24x_4 + 27x_5 = 5 \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8 \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9 \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4 \end{cases}$$

2. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи використовуючи фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$$

3. Дослідити на сумісність Методом Жордана-Гауса і знайти загальний розв'язок:

$$3.1. \begin{cases} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 = 84 \\ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 = 72 \\ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 = 59 \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 0x_2 + x_3 + 24x_4 = 1 \\ 0x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

4. Дослідити на сумісність, знайти загальний розв'язок і один частковий розв'язок системи рівнянь:

$$4.1. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18 \end{cases}$$

$$4.2. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

$$4.3. \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 0x_5 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$4.4. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

$$4.5. \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$$

5. Користуючись методом виключення невідомих, дослідити сумісність і знайти загальний розв'язок систем рівнянь (якщо початкова система має цілі коефіцієнти, то в процесі виключення невідомих можна уникнути дробу)

$$5.1. \begin{cases} 0x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 25x_4 = 29 \\ 27x_1 + 24x_2 - 32x_3 + 47x_4 = 55 \\ 50x_1 + 51x_2 - 68x_3 + 95x_4 = 115 \\ 31x_1 + 21x_2 - 28x_3 + 46x_4 = 50 \end{cases}$$

$$5.2. \begin{cases} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 = 28 \\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 = 43 \\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 = 58 \\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 = 69 \end{cases}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ. РОЗКЛАД ПО БАЗИСУ

Теоретичні відомості

Геометричним вектором (далі скорочено просто **вектором**) називають напрямлений відрізок, тобто відрізок, який має початок та кінець. Іншими словами – це **впорядкована пара точок** простору A та B (рис. 7.1).

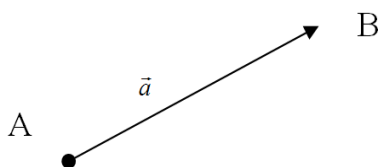


Рис. 7.1. Геометричний вектор

Точка A – початок вектора, точка B – кінець вектора. Початок вектора також називають ще точкою прикладання.

Позначають вектори або за допомогою його початкової та кінцевої точки $(\overrightarrow{AB})$, або за допомогою малих латинських літер $(\vec{a})$.

Довжина вектора – (**модуль вектора**) – це довжина відрізка AB . Довжина позначається як $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається **одиничним вектором**, або **ортом**. Вектор, початок та кінець якого співпадають, називають **нульовим вектором**. Нульовий вектор не має певного напрямку, проте має довжину, яка дорівнює нулеві.

Вектори називаються **колінеарними**, якщо вони лежать або на одній прямій, або на паралельних прямих, при цьому вони можуть бути однакового чи різного напрямку (рис. 7.2):

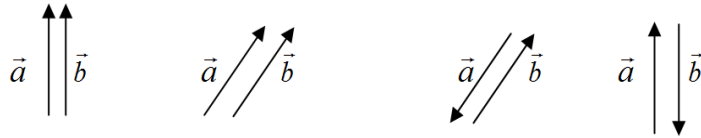


Рис. 7.2. Приклади колінеарних векторів

Нульовий вектор колінеарний до будь-якого вектора.

Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються **рівними**, якщо вони колінеарні, мають однакову довжину і однаковий напрям (рис. 7.3). Всі нульові вектори вважаються рівними.

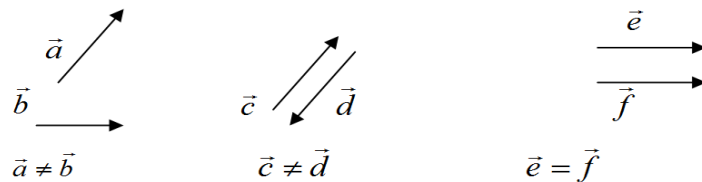


Рис. 7.3. Приклади рівних та нерівних векторів

Визначимо лінійні операції над векторами:

1) Операція додавання векторів

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який проведено від початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$ прикладений до кінця вектора $\vec{a}$. Це правило додавання векторів називається **правилом трикутника** (рис. 7.4).

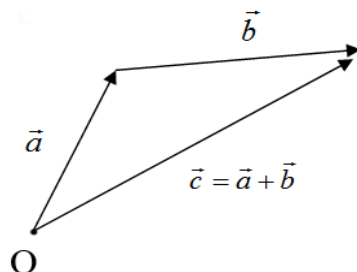


Рис. 7.4. Додавання векторів за правилом трикутника

Ще одне правило додавання векторів – **правило паралелограма**: якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ неколінеарні, прикладені до загального початку і на них побудовано паралелограм, то сума цих векторів є діагоналлю паралелограма, що виходить із загального початку векторів (рис.7.5).

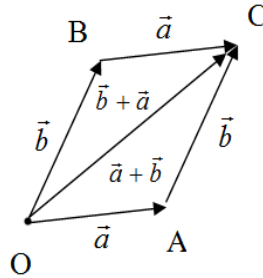


Рис. 7.5. Додавання векторів за правилом паралелограма

2) Множення вектора на число

Добутком $\alpha \vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число α називається вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, що має довжину, яка дорівнює $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$ та напрям, що співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$ при $\alpha > 0$ або протилежний у випадку $\alpha < 0$.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називають **компланарними**, якщо вони лежать в одній площині.

Теорема

Будь-які чотири вектори в просторі лінійно залежні.

Ця теорема дає можливість сформулювати ключове поняття базису.

Три лінійно незалежних вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють в просторі **базис**, якщо будь-який вектор $\vec{d}$ цього простору можна подати як їх лінійну комбінацію, тобто якщо знайдуться такі числа α, β, γ що буде справедлива рівність:

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad (7.1)$$

Твердження 1: Будь-яка трійка некопланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворює базис в просторі.

Твердження 2: Будь-яка пара неколінеарних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, що лежать у деякій площині, утворюють базис на цій площині.

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ довільна трійка некопланарних векторів, тобто базис в просторі. Рівність (7.1) в цьому випадку називається розкладенням вектора $\vec{d}$ за базисом із векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Коефіцієнти цієї комбінації α , β , γ називають **координатами вектора $\vec{d}$** в базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Координати кожного вектора $\vec{d}$ відносно базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ визначаються однозначно.

Твердження 3: Для векторів $\vec{d}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\vec{d}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, які задані своїми координатами в базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, мають місце співвідношення:

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2) \text{ та } \lambda \vec{d}_1 = (\lambda \alpha_1, \lambda \beta_1, \lambda \gamma_1)$$

Розглянемо в просторі вектор $\overrightarrow{AB}$ та деяку вісь $\vec{u}$. **Ортогональною проекцією** вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{u}$ (напрямок $\vec{u}$) називають число, яке дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{A'B'}$, яка береться зі знаком «+», якщо він напрямлений в той самий бік, що й вектор $\vec{u}$, або зі знаком «-» – в іншому випадку (рис. 7.6):

$$pr_{\vec{u}} \overrightarrow{AB} = \begin{cases} |\overrightarrow{A'B'}|, \overrightarrow{A'B'} \uparrow \vec{u} \\ -|\overrightarrow{A'B'}|, \overrightarrow{A'B'} \downarrow \vec{u} \end{cases} \quad (7.2)$$

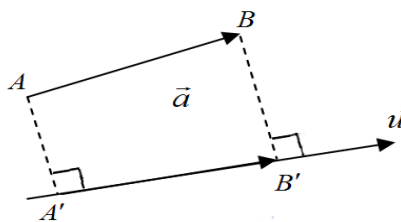


Рис. 7.6. Проекція вектора на вектор

Якщо визначити кут φ нахилу вектора $\vec{a}$ до осі $\vec{u}$ як кут між двома променями, які виходять з довільної точки M , причому напрям одного променя співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, а іншого співпадає з напрямом осі $\vec{u}$, то проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{u}$ буде дорівнювати довжині вектора $\overrightarrow{AB}$, помноженої на косинус кута φ нахилу вектора $\overrightarrow{AB}$ до осі $\vec{u}$:

$$pr_{\vec{u}}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi \quad (7.3)$$

Систем координат в просторі можна ввести багато. Найчастіше використовується **прямокутна декартова система координат (ПДСК)**.

Упорядковану трійку ненульових векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називають **правою трійкою**, якщо з вершини вектора $\vec{c}$ поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ виконується проти годинникової стрілки, і **лівою трійкою** – якщо за годинниковою. Іншими словами, трійка некопланарних векторів буде **правою**, якщо поворот від першого вектора до другого й від другого до третього виконується проти годинникової стрілки.

На рис. 7.7 вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – це права трійка, а вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}'$ – ліва трійка.

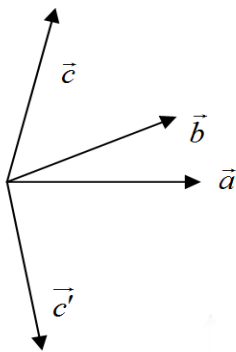


Рис. 7.7 Права та ліва трійки векторів

Прямокутна декартова система координат у просторі – це права трійка попарно ортогональних одиничних векторів, які позначаються $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис. 7.8).

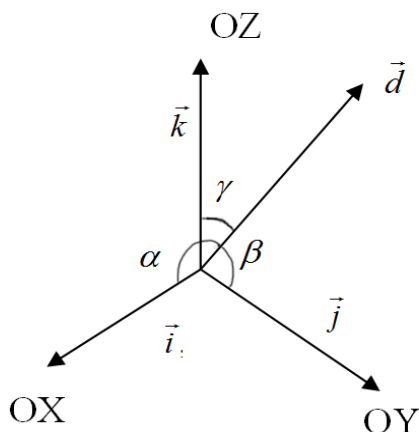


Рис. 7.8 Вектор в прямокутній декартовій системі координат

У представлені вектора $\vec{d}$: $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$
числа x, y, z називаються **декартовими координатами** вектора $\vec{d}$.

З геометричної точки зору декартові координати вектора – це проекції цього вектора на осі координат OX, OY, OZ відповідно.

Позначимо через α, β, γ кути нахилу вектора $\vec{d}$ до осі OX, OY, OZ відповідно. Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називаються **напрямними косинусами** вектора $\vec{d}$.

Виходячи з геометричного змісту декартових координат та формули (7.3), можна записати:

$$x = |\vec{d}| \cos \alpha, y = |\vec{d}| \cos \beta, z = |\vec{d}| \cos \gamma \quad (7.4)$$

Оскільки квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його сторін, то можна записати наступний вираз для визначення довжини вектора через його координати

$$|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (7.5)$$

З формул (10.4) та (10.5) випливає:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (7.6)$$

Підносячи ці вирази до квадрата та додаючи, отримаємо:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

тобто, сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці. Таким чином, довільний вектор $\vec{d}$ в просторі однозначно визначається заданням довжини та трьох напрямних косинусів.

Орт-вектором $\vec{d}_0$ вектора $\vec{d}$ називають вектор, який має той самий напрям, що й $\vec{d}$, та одиничну довжину.

$$\text{Очевидно, що} \quad \vec{d}_0 = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \quad (7.7)$$

З формул (7.5) та (7.6) випливає, що $\vec{d}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, тобто в ПДСК координатами орт-вектора $\vec{d}_0$ є напрямні косинуси вектора $\vec{d}$.

Знаходження довжини відрізка між двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в просторі задається формулою:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ділення відрізка у заданому відношенні λ задається формулами:

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \lambda \neq -1 \\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

Приклади розв'язання задач

1. $\overline{AK}$ і $\overline{BM}$ – медіани трикутника ABC . Виразити через $\bar{p} = \overline{AK}$ і $\bar{q} = \overline{BM}$ вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{CA}$.

Розв'язання:

Намалюємо малюнок (візьмемо до уваги, що точка **O** – це точка перетину медіан) (рис. 7.9).

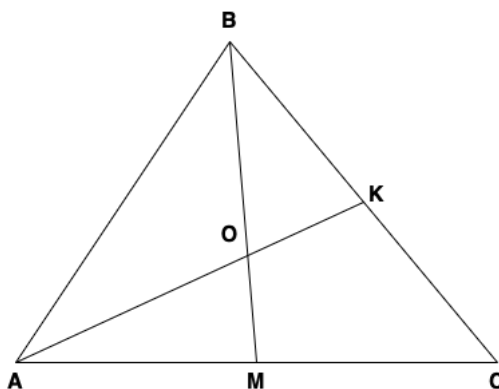


Рис. 7.9 Малюнок до задачі

$$\overline{AB} + \overline{BO} = \overline{AO}$$

$$\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = \frac{2}{3}\overline{AK} - \frac{2}{3}\overline{BM}$$

$$\overline{AB} = \frac{2}{3}(\bar{p} - \bar{q})$$

$$\overline{BC} = 2\overline{BK}$$

$$\overline{BK} = \overline{BO} + \overline{OK} = \frac{2}{3}\overline{BM} + \frac{1}{3}\overline{AK} = \frac{2}{3}\bar{q} + \frac{1}{3}\bar{p}$$

$$\overline{BC} = \frac{4}{3}\bar{q} + \frac{2}{3}\bar{p}$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \frac{2}{3}\bar{p} - \frac{2}{3}\bar{q} + \frac{4}{3}\bar{q} + \frac{2}{3}\bar{p}$$

$$\overline{AC} = \frac{4}{3}\bar{p} + \frac{2}{3}\bar{q}$$

2. $ABCDEF$ – правильний шестикутник, причому $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{q} = \overrightarrow{BC}$. Виразити через $\vec{p}$ і $\vec{q}$ вектори $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ та $\overrightarrow{AE}$.

Розв'язання:

Намалюємо малюнок (рис. 7.10).

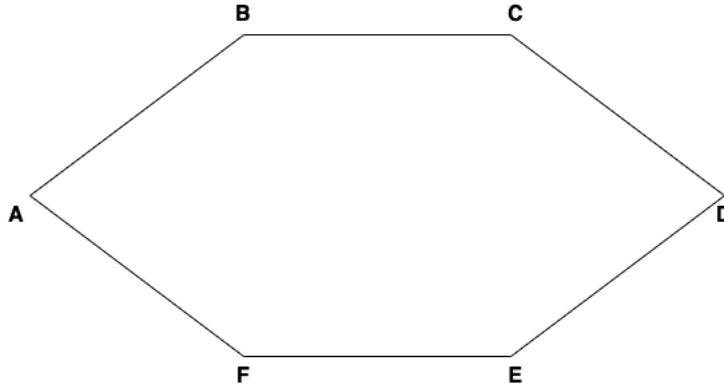


Рис. 7.10 Малюнок до задачі

$$-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -2\vec{q} + \vec{p} + \vec{q} = \vec{p} - \vec{q}$$

$$\overrightarrow{CD} = \vec{q} - \vec{p}$$

$$\overrightarrow{DE} = -\vec{p}$$

$$\overrightarrow{EF} = -\vec{q}$$

$$\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD} = \vec{p} - \vec{q}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{q} - \vec{p} = 2\vec{q}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \vec{q} - \vec{p} + \vec{q} = 2\vec{q} - \vec{p}$$

3. ^[ЕД 2.12] M – точка перетину медіан трикутника ABC , O – довільна точка простору. Довести рівність $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Доведення:

Намалюємо малюнок (візьмемо до уваги, що точка **M** – це точка перетину медіан) (рис. 7.11).

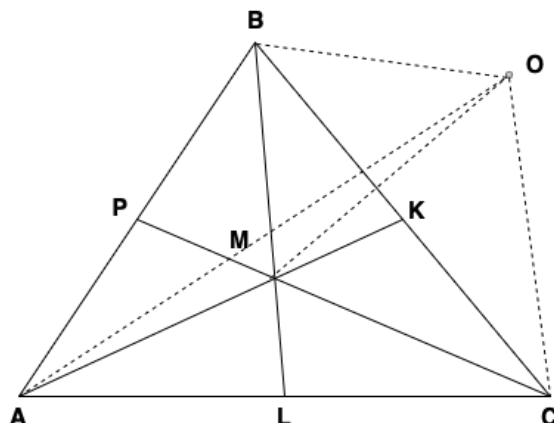


Рис. 7.11 Малюнок до задачі

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$$

$$3\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM})$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{3} * \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CP})$$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB})) = 0$$

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

4. В просторі задано трикутники ABC і $A'B'C'$: M і M' – точки перетину їх медіан. Виразити вектор $\overline{MM'}$ через вектори $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ і $\overline{CC'}$.

Розв'язання:

Намалюємо малюнок (візьмемо до уваги, що точка M і M' – це точка перетину медіан) (рис. 7.12).

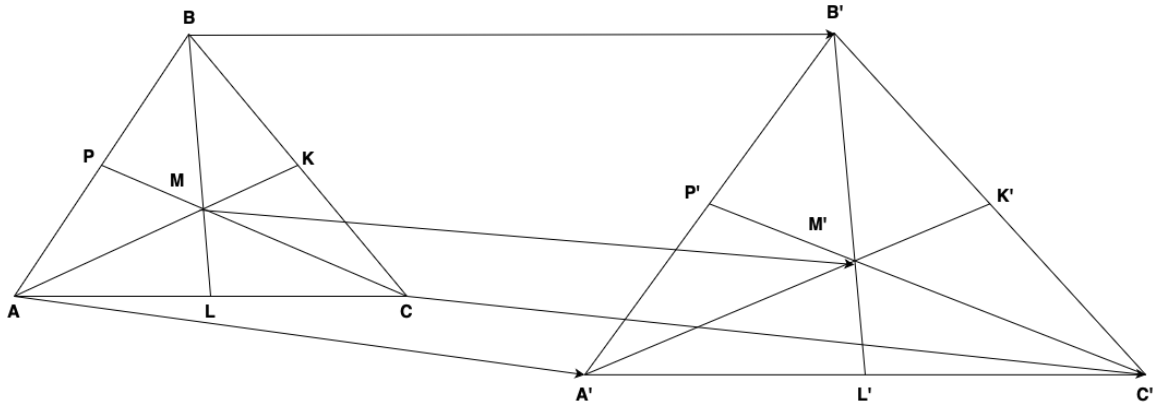


Рис. 7.12 Малюнок до задачі

$$\overline{MM'} = \frac{1}{3} (\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'})$$

$$\overline{M'M} = \frac{1}{3} (\overline{M'A} + \overline{M'B} + \overline{M'C})$$

$$\overline{M'A} + \overline{M'A'} + \overline{A'A}$$

$$\overline{M'B} + \overline{M'B'} + \overline{B'B}$$

$$\overline{M'C} + \overline{M'C'} + \overline{C'C}$$

$$\overline{M'M} = \frac{1}{3} (\overline{M'A'} + \overline{M'B'} + \overline{M'C'}) + \frac{1}{3} (\overline{A'A} + \overline{B'B} + \overline{C'C})$$

$$-\overline{MM'} = -\frac{1}{3} (\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'})$$

$$\overline{MM'} = \frac{1}{3} (\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'})$$

5. В трапеції $ABCD$ відношення довжини основи $[AD]$ до довжини основи $[BC]$ дорівнює λ . Припускаючи $\overline{AC} = \bar{a}$ і $\overline{BD} = \bar{b}$, виразити через a і b вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ і $\overline{DA}$.

Розв'язання:

Намалюємо малюнок (рис. 7.13).

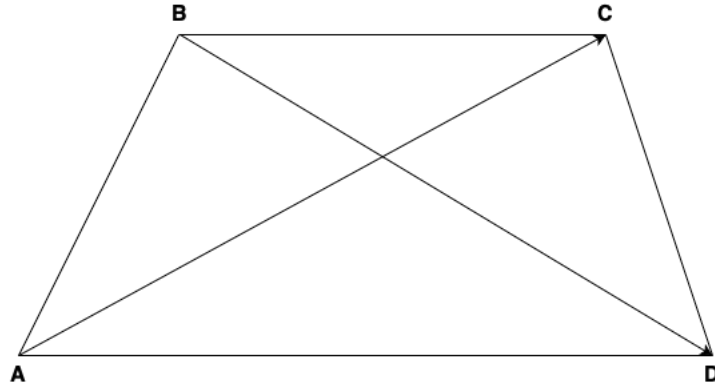


Рис. 7.13 Малюнок до задачі

$$\overline{AC} = \bar{a} = \overline{AO} + \overline{OC}$$

$$\overline{AO} = \lambda \overline{OC}$$

$$\overline{AC} = \bar{a} = (\lambda + 1) \overline{OC}$$

$$\overline{OC} = \frac{\bar{a}}{\lambda + 1}$$

$$\overline{AO} = \frac{\lambda \bar{a}}{\lambda + 1}$$

$$\overline{BD} = \bar{b} = \overline{BO} + \overline{OD}$$

$$\overline{OD} = \lambda \overline{BO}$$

$$\overline{BD} = \bar{b} = (\lambda + 1) \overline{BO}$$

$$\overline{BO} = \frac{\bar{b}}{\lambda + 1}$$

$$\overline{OD} = \frac{\lambda \bar{b}}{\lambda + 1}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{AO} + \overline{OB} = \frac{\lambda \bar{a}}{\lambda + 1} - \frac{\bar{b}}{\lambda + 1} \\ \overline{BC} &= \overline{BO} + \overline{OC} = \frac{\bar{b}}{\lambda + 1} + \frac{\bar{a}}{\lambda + 1} \\ \overline{CD} &= \overline{CO} + \overline{OD} = -\frac{\bar{a}}{\lambda + 1} + \frac{\lambda \bar{b}}{\lambda + 1} \\ \overline{DA} &= \overline{DO} + \overline{OA} = -\frac{\lambda \bar{b}}{\lambda + 1} - \frac{\lambda \bar{a}}{\lambda + 1}\end{aligned}$$

6. Довести, що для будь-яких заданих векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ вектори $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{b} + \bar{c}$ і $\bar{c} - \bar{a}$ компланарні.

Доведення:

Вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює 0.

$$\begin{aligned}(\bar{a} + \bar{b}, \bar{b} + \bar{c}, \bar{c} - \bar{a}) &= (\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}, \bar{c} - \bar{a}) + (\bar{b}, \bar{b} + \bar{c}, \bar{c} - \bar{a}) = \\ &= (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} - \bar{a}) + (\bar{a}, \bar{c}, \bar{c} - \bar{a}) + (\bar{b}, \bar{b}, \bar{c} - \bar{a}) + (\bar{b}, \bar{c}, \bar{c} - \bar{a}) = \\ &= (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) - (\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}) + (\bar{a}, \bar{c}, \bar{c}) - (\bar{a}, \bar{c}, \bar{a}) + (\bar{b}, \bar{b}, \bar{c}) - (\bar{b}, \bar{b}, \bar{a}) + \\ &+ (\bar{b}, \bar{c}, \bar{c}) - (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) - (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) - (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0\end{aligned}$$

7. Знайти вектор $\bar{x}$, колінеарний вектору $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$. Крім того, вектор $\bar{x}$ утворює з ортом $\bar{j}$ гострий кут і має довжину $|\bar{x}| = 15$.

Розв'язання:

$$\bar{x} \parallel \bar{a} \Rightarrow \bar{x} = \alpha \bar{a} = (\alpha, -2\alpha, -2\alpha)$$

$$\bar{j} = (0, 1, 0)$$

$$0 * x + 1 * y + 0 * z > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow -2\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 0$$

$$|\bar{x}| = 15 = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{9\alpha^2} = 3|\alpha|$$

$$|\alpha| = 5 \Rightarrow \alpha = -5$$

$$\text{Отже } \bar{x} = (-5, 10, 10)$$

8. Знайти вектор $\vec{x}$, який утворює з ортом $\vec{j}$ кут 60° , з ортом $\vec{k}$ – кут 120° , якщо $|\vec{x}| = 5\sqrt{2}$.

Розв'язання:

$$x = |\vec{x}| \cos \alpha$$

$$y = |\vec{x}| \cos 60^\circ = 5\sqrt{2} * \frac{1}{2} = 2,5\sqrt{2}$$

$$z = |\vec{x}| \cos 120^\circ = -5\sqrt{2} * \frac{1}{2} = -2,5\sqrt{2}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 60^\circ + \cos^2 120^\circ = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \pm 45^\circ \text{ або } \alpha = 135^\circ$$

$$x = |\vec{x}| \cos \alpha = 5\sqrt{2} * \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pm 5$$

Відповідь: $\vec{x} = (\pm 5; 2,5\sqrt{2}; -2,5\sqrt{2})$

9. Знайти вектор $\vec{x}$, напрямлений по бісектрисі кута між векторами

$$\vec{a} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} \text{ і } \vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \text{ якщо } |\vec{x}| = 5\sqrt{6}.$$

Розв'язання:

$$\vec{a}_0 = \left(\frac{7}{\sqrt{49 + 16 + 16}}, \frac{-4}{\sqrt{49 + 16 + 16}}, \frac{4}{\sqrt{49 + 16 + 16}} \right) = \left(\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{4}{9} \right)$$

$$\vec{b}_0 = \left(\frac{-2}{\sqrt{4 + 1 + 4}}, \frac{-1}{\sqrt{4 + 1 + 4}}, \frac{2}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \right) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\vec{r} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0 = \left(\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{4}{9} \right) + \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{1}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{10}{9} \right)$$

$$\bar{x} = \alpha \bar{r} = \left(\frac{\alpha}{9}, -\frac{7\alpha}{9}, \frac{10\alpha}{9} \right)$$

$$\alpha > 0$$

$$|x| = 5\sqrt{6} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{81} + \frac{49\alpha^2}{81} + \frac{100\alpha^2}{81}} = \frac{|\alpha|}{9} \sqrt{150}$$

$$|\alpha| = \frac{45\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$$

$$|\alpha| = 9, \alpha = 9$$

Відповідь: $\bar{x} = (1, -7, 10)$

10. На осі ординат знайти точку M , рівновіддалену від точок $A(1, -4, 7)$ і $B(5, 6, -5)$.

Розв'язання:

Оскільки точка M лежить на осі ординат, то її координати $M(0, y, 0)$.

$$|\overline{MA}| = |\overline{MB}|$$

$$\overline{MA} = (1, -4 - y, 7)$$

$$\overline{MB} = (5, 6 - y, -5)$$

$$\sqrt{1 + (4 + y)^2 + 49} = \sqrt{25 + (6 - y)^2 + 25}$$

$$\sqrt{50 + (4 + y)^2} = \sqrt{50 + (6 - y)^2}$$

$$(4 + y)^2 = (6 - y)^2$$

$$16 + 8y + y^2 = 36 - 12y + y^2$$

$$20y = 20$$

$$y = 1$$

Відповідь: $M = (0, 1, 0)$

11. Визначити координати кінців відрізка, який точками $C(2, 0, 2)$ і $D(5, -2, 0)$ розділено на три рівні частини.

Розв'язання:

Нехай кінці відрізка $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{AC} = (2 - x_1, -y_1, 2 - z_1)$$

$$\overline{CB} = (x_2 - 2, y_2, z_2 - 2) = (4 - 2x_1, -2y_1, (4 - z_1)) = 2\overline{AC}$$

C – середина AD , тоді

$$2 = \frac{5+x_1}{2} \quad x_1 = -1$$

$$0 = \frac{-2+y_1}{2} \quad y_1 = 2$$

$$2 = \frac{0+z_1}{2} \quad z_1 = 4$$

$$A(-1, 2, 4)$$

D – середина CB , тоді

$$5 = \frac{2+x_2}{2} \quad x_2 = 8$$

$$-2 = \frac{0+y_2}{2} \quad y_2 = -4$$

$$0 = \frac{2+z_2}{2} \quad z_2 = -2$$

$$B(8, -4, -2)$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. В трикутнику ABC $\overline{AM} = \alpha \overline{AB}$ і $\overline{AN} = \beta \overline{AC}$.
 - а) При якому співвідношенні між α і β вектори $\overline{MN}$ і $\overline{BC}$ колінеарні.
 - б) Нехай α і β такі, що вектори $\overline{MN}$ і $\overline{BC}$ неколінеарні. Припускаючи $\vec{p} = \overline{BC}$ і $\vec{q} = \overline{MN}$, виразити вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ через $\vec{p}$ і $\vec{q}$.
2. Дано три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Довести, що вектори $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $-\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарні.
3. Дано три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Обчислити значення λ , при яких вектори $\lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \lambda\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}$ компланарні.
4. Чи може вектор утворювати з координатними осями наступні кути:
 - а) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$;
 - б) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$;
 - в) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.
5. Вектор утворює з осями Ox і Oz кути $\alpha = 120^\circ$ і $\gamma = 45^\circ$. Який кут він утворює з віссю Oy ?
6. Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями Ox і Oy кути $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Обчислити його координати за умови, що $|\vec{a}| = 2$.
7. Перевірити, що чотири точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$ є вершинами трапеції.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8

ДОБУТОК ВЕКТОРІВ: СКАЛЯРНИЙ, ВЕКТОРНИЙ, МІШАНИЙ

Теоретичні відомості

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \quad (8.1)$$

де φ – кут між $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Добуток позначають $(\vec{a}, \vec{b})$ або $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ – комутативність;
- 2) $(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b})$ – асоціативність відносно числового множника
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$ – дистрибутивність;
- 4) $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0, (\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.

Теорема (про ортогональність векторів)

Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ортогональні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулеві

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

Теорема (про кут між векторами)

Два ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють гострий (тупий) кут тоді і лише тоді, коли їх скалярний добуток додатний (від'ємний).

Розглянемо далі подання скалярного добутку через координати векторів в ПДСК.

У просторі визначено базис з трьох взаємоперпендикулярних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, які утворюють праву трійку. Розкладання векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ за цим базисом має вигляд:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\end{aligned}$$

Тоді

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (8.2)$$

Кут між векторами визначається формулою:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (8.3)$$

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$ (позначають $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ або $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), який задовольняє наступні три умови:

1. Довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ на синус кута між ними

$$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi \quad (8.4)$$

2. Вектор $\vec{c}$ ортогональний до кожного з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$
3. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку (рис.8.1).

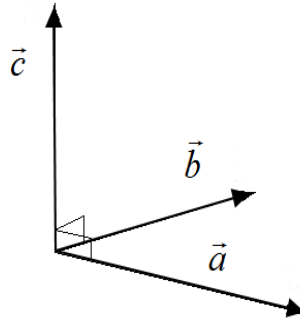


Рис. 8.1 Векторний добуток векторів

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

- 1) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ – антикомутативність;
- 2) $[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}]$ – асоціативність відносно числового множника;
- 3) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$ – дистрибутивність відносно суми;
- 4) $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.

Геометричні властивості векторного добутку полягають в наступному:

1) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні тоді і лише тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нулеві $\vec{a} \parallel \vec{b} \leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = 0$.

2) модуль векторного добутку вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на приведених до загального початку векторах.

Розглянемо векторний добуток векторів в просторі із заданою ПДСК.

Нехай вектори задані своїми координатами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Векторний добуток цих векторів має наступний вигляд:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (8.5)$$

Нехай тепер задано три довільні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Якщо вектор $\vec{b}$ векторно множать на вектор $\vec{c}$, а вектор $\vec{a}$ так само векторно множать на векторний добуток $[\vec{b}, \vec{c}]$, то отримуваний вектор $\vec{d} = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ називають **подвійним векторним добутком**.

Для обчислення подвійного векторного добутку можна також скористатися формулою

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b} \cdot (\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a}, \vec{b}) \quad (8.6)$$

Для запам'ятовування цієї формули можна скористатися мнемонічним правилом: права частина читається як “бац-мінус-цаб”.

Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ називають число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{c}$ на векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) \quad (8.7)$$

Геометричний зміст мішаного добутку виражає наступна теорема.

Теорема (про геометричний зміст мішаного добутку)

Мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на приведених до загального початку векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, взятому із знаком «+», якщо вони утворюють праву трійку, та зі знаком «-», якщо ліву. У випадку компланарності векторів їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Наслідок

Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку.

Алгебраїчні властивості:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a} = -\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b};$
- 2) $(\alpha \vec{a}) \vec{b} \cdot \vec{c} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c});$
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{d}.$

В ПДСК мішаний добуток має наступний вигляд:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (8.8)$$

З (8.6) випливає, що критерієм компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, які задані своїми координатами в ПДСК, є рівність нулеві визначника, рядками якого є координати цих векторів:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Приклади розв'язання задач

1. Дано $|\vec{a}_1| = 3, |\vec{a}_2| = 5$. Знайти для якого значення α вектори $\vec{a}_1 + \alpha \vec{a}_2$ та $\vec{a}_1 - \alpha \vec{a}_2$ будуть ортогональні.

Розв'язання:

Оскільки умовою ортогональності векторів є рівність нулю їх скалярного добутку, то:

$$(\vec{a}_1 + \alpha \vec{a}_2, \vec{a}_1 - \alpha \vec{a}_2) = 0$$

Використовуючи алгебраїчні властивості скалярного добутку та його означення, знайдемо:

$$\begin{aligned} (\vec{a}_1 + \alpha \vec{a}_2, \vec{a}_1 - \alpha \vec{a}_2) &= (\vec{a}_1, \vec{a}_1) + \alpha (\vec{a}_1, \vec{a}_2) - \alpha^2 (\vec{a}_2, \vec{a}_2) - \alpha (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \\ &= |\vec{a}_1|^2 - \alpha^2 |\vec{a}_2|^2 = 9 - 25 \alpha^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \alpha = \pm \frac{3}{5}.$$

2. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 4$ та $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ знайти $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

Розв'язання:

Помножимо скалярно рівність $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ послідовно на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і додамо утворені рівності. В результаті одержимо:

$$(\vec{a}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}) + (\vec{b}\vec{a} + \vec{b}\vec{b} + \vec{b}\vec{c}) + (\vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b} + \vec{c}\vec{c}) = 0$$

Використаємо означення скалярного добутку та зведемо подібні а також підставимо числові значення:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}) = 9 + 1 + 16 + 2(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}) = 0$$

Виразимо звідси шуканий вираз та одержимо:

$$\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = -13$$

3. Знайти довжини сторін та кути трикутника з вершинами $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$.

Розв'язання:

Знайдемо спочатку координати векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$, для цього від координат кінця віднімемо координати початку:

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 0, -4), \quad \overrightarrow{BC} = (7, 0, 1), \quad \overrightarrow{CA} = (4, 0, -3)$$

Знайдемо модуль(довжину) даних векторів:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-4)^2} = 5,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(7)^2 + 0^2 + (1)^2} = \sqrt{50},$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(4)^2 + 0^2 + (-3)^2} = 5,$$

Робимо висновок, що трикутник рівнобедренний. Знайдемо кути трикутника, враховуючи, що кути В та С рівні (як кути при основі ВС рівнобедреного трикутника ABC). Кут А -це кут між векторами АВ та АС=-СА, кут В=С -це кут між векторами ВА=-АВ та ВС. Отже:

$$\cos A = \frac{(-3) \cdot (-4) + (-4) \cdot 3}{5 \cdot 5} = 0$$

$$\cos B = \cos C = \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 1}{5 \cdot \sqrt{50}} = \frac{25}{25 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Отже, кут А дорівнює 90° , а кут В=С дорівнює 45° .

4. Встановити, чи утворюють вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ базис у множині всіх векторів, якщо:

$$\overrightarrow{a_1} = (2, 3, -1), \overrightarrow{a_2} = (1, -1, 3), \overrightarrow{a_3} = (1, 9, -11)$$

Розв'язання:

Якщо дані вектори утворюють базис, то визначник матриці, що побудована з цих векторів, має бути відмінним від нуля. Перевіримо це:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot (-11) + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 9 \cdot (-1) - \\ -1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot (-11) - 2 \cdot 3 \cdot 9 = 0$$

Отже, дані вектори не утворюють базис.

5. Знайти координати четвертої вершини D тетраедра, якщо відомо, що вона лежить на осі OY, а об'єм тетраедра дорівнює 2. Задані координати вершин A, B, C: A=(0,1,1), B=(4,3,-3), C=(2,-1,1).

Розв'язання:

Згідно умови координати вершини D мають вигляд (0,y,0). Знайдемо об'єм V тетраедра за формулою: $V = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (4, 2, -4), \overrightarrow{AC} = (2, -2, 0), \overrightarrow{AD} = (0, y - 1, -1)$$

Підставимо у формулу для об'єму, в результаті одержимо:

$$2 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & y - 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (4 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) \cdot (y - 1) - \\ -2 \cdot 2 \cdot (-1)) = \frac{1}{6} (20 - 8y)$$

Зауважимо, що вектори можуть утворювати як ліву так і праву трійку векторів, тому треба розглянути два випадки:

$$2 = \frac{1}{6} (20 - 8y) \text{ або } -2 = \frac{1}{6} (20 - 8y)$$

Розв'язавши ці рівняння одержимо:

$$y = 1 \text{ або } y = 4.$$

6. Знайти координати вектора $[a, a + b] + [a, [a, b]]$, якщо $\vec{a} = (2, 1, -3)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$.

Розв'язання:

Використовуючи алгебраїчні властивості векторного та подвійного векторного добутку, одержимо:

$$\begin{aligned}[a, a + b] + [a, [a, b]] &= [a, a] + [a, b] + a(a, b) - b(a, a) = \\ &= [a, b] + a(a, b) - b(a, a)\end{aligned}$$

Обчислимо відповідні векторні та скалярні добутки:

$$[a, b] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k},$$

$$(a, b) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 = -2,$$

$$(a, a) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) = 14.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}[a, a + b] + [a, [a, b]] &= (-2, -5, -3) - 2(2, 1, -3) - 14(1, -1, 1) = \\ &= (-20, 7, -11).\end{aligned}$$

7. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}_1 = (2, 3, -1)$ та $\vec{a}_2 = (1, -2, 3)$ і задовольняє умові $\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$. Знайти координати вектора $\vec{x}$.

Розв'язання:

Нехай вектор $\vec{x}$ має координати (x, y, z) . Тоді:

$$\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 2x - y + z = -6. \quad (*)$$

Оскільки вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$, то він буде колінеарний до вектора $\vec{r} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$, тобто $\vec{x} = \alpha \vec{r}$. Знайдемо координати вектора $\vec{r}$.

$$\vec{r} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k}.$$

Отже, $\vec{x} = \alpha \vec{r} = (7\alpha, -7\alpha, -7\alpha)$. Використаємо умову (*), щоб знайти α : $2 \cdot 7\alpha + 7 \cdot \alpha - 7 \cdot \alpha = -6, \alpha = -\frac{3}{7}$.

Таким чином, координати вектора $\vec{x} = (-3, 3, 3)$.

8. Дано: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5, \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{4}$. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Розв'язання:

Використовуючи геометричні властивості векторного добутку, запишемо формулу для обчислення площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2} |[\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} + 2\vec{b}]|$$

Використовуючи алгебраїчні властивості векторного добутку, знайдемо:

$$[\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} + 2\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{a}] - 6[\vec{b}, \vec{a}] + 2[\vec{a}, \vec{b}] - 4[\vec{b}, \vec{b}] = 8[\vec{a}, \vec{b}].$$

Отже,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 |[\vec{a}, \vec{b}]| = 4 |[\vec{a}, \vec{b}]| = 4 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}.$$

9. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють ліву трійку, $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 30^\circ$. Крім того, вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Знайти мішаний добуток $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Розв'язання:

Нехай, $\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Тоді, за означенням вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ утворюють праву трійку, а вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють ліву трійку за умовою. Таким чином, кут між векторами $\vec{c}$ та $\vec{d}$ дорівнює 180° .

Знайдемо шуканий мішаний добуток:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ |\vec{c}| \cos 180^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-1) = -3.$$

10. Задано вектори $\vec{e}_1 = (1, -2, 0)$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 1)$, $\vec{a} = (-2, 0, 1)$. Знайти ортогональну складову $\overrightarrow{a_{e_1, e_2}}$ вектора $\vec{a}$ в площині векторів $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$.

Розв'язання:

Ортогональною складовою вектора $\vec{a}$ в площині векторів $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ називається вектор $\overrightarrow{a_{e_1, e_2}}$ компланарний цій площині, причому різниця $\vec{a} - \overrightarrow{a_{e_1, e_2}}$ перпендикулярна цій площині.

Оскільки вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ неколеніарні, вони утворюють базис у площині.

Розкладемо вектор $\overrightarrow{a_{e_1, e_2}}$ за цим базисом:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{e_1, e_2}} &= \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = (\alpha_1, -2\alpha_1, 0) + (\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

Знайдемо α_1 та α_2 з умови, що вектор $\vec{a} - \overrightarrow{a_{e_1, e_2}} = (-2 - \alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2, 1 - \alpha_2)$ перпендикулярний до векторів $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$. Отже, відповідні скалярні добутки дорівнюють нулю:

$$(-2 - \alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2, 1 - \alpha_2) \cdot (1, -2, 0) = 0$$

$$(-2 - \alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2, 1 - \alpha_2) \cdot (1, 1, 1) = 0$$

або:

$$\begin{cases} -2 - \alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_1 - \alpha_2 + 1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Зведемо подібні та одержимо:

$$\begin{cases} -5\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему рівнянь, одержимо: $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{2}$.

Отже, $\overrightarrow{a_{e_1, e_2}} = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_1, \alpha_2) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Задані вершини трикутника $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -1, 2)$ та $C(-5, 6, -4)$; $[BD]$ – його висота, проведена з вершини B . Знайти координати точки D .
2. $|\bar{a}_1| = 1$, $|\bar{a}_2| = 2$, $(\widehat{\bar{a}_1, \bar{a}_2}) = \frac{2\pi}{3}$. Обчислити:
 - б) $|[2\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2]|$
 - в) $|\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2, 3\bar{a}_1 - \bar{a}_2|$
3. $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 5$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{4}$. Обчислити площу трикутника, збудованого на векторах $\bar{a} - 2\bar{b}$ і $3\bar{a} + 2\bar{b}$.
4. В трикутнику з вершинами $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ та $C(1, 3, -1)$ Знайти висоту $h = |\overline{BD}|$.
5. В тетраедрі з вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 2)$, $C(2, 2, 2)$ та $D(3, 4, -3)$ обчислити висоту $h = |\overline{DE}|$.
6. Дані вершини трикутника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ і $C(1; -2; 1)$. Визначити його зовнішній кут при вершині A .
7. Дани три вектори: $\bar{a} = 3\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}$ і $\bar{c} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k}$. Обчислити $\text{Pr}_c(\bar{a} + \bar{b})$.
8. Дани дві точки $M(-5; 7; -6)$ та $N(7; -9; 9)$. Обчислити проекцію вектора $\bar{a} = (1; -3; 1)$ на вісь вектора $\overline{MN}$.
9. Вектор $\bar{m}$, перпендикулярний до осі Oz і до вектора $\bar{a} = (8; -15; 3)$, утворює гострий кут з віссю Ox . Знаючи, що $|\bar{m}| = 51$, Знайти його координати.
- 10.^[К 878] Об'єм тетраедра $v = 5$, три його вершини знаходяться в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Знайти координати четвертої вершини D , якщо відомо, що вона лежить на осі Oy .

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 9

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Теоретичні відомості

Пряма лінія на площині із заданою ПДСК – це алгебраїчна лінія першого порядку. Вкажемо різні рівняння прямої на площині.

Задамо на площині ПДСК. Нехай пряма L проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 9.1):

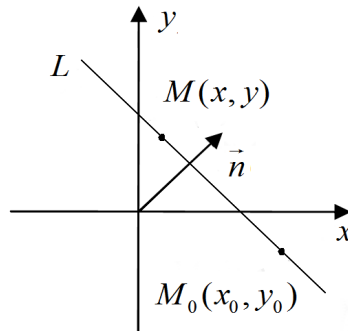


Рис. 9.1 Побудова рівняння прямої на площині

Нехай ненульовий вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярний до проведеної прямої. Такий вектор називають **нормаллю** (або нормальним вектором) прямої L . Тоді рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору (або скорочено – **рівняння прямої через нормаль і точку**) має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (9.1)$$

Розкривши в останньому виразі дужки, звівши подібні члени й позначивши $C \equiv -Ax_0 - By_0$, можна отримати **загальне рівняння прямої**

$$Ax + By + C = 0 \quad (9.2)$$

яке дійсно є алгебраїчним рівнянням першого порядку.

Називатимемо **напрямним вектором** прямої L будь-який ненульовий вектор, який паралельний цій прямій.

Розглянемо в ПДСК пряму L , яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, та напрямний вектор $\vec{s} = (p; q) \neq 0$, паралельний цій прямій (рис. 9.2)

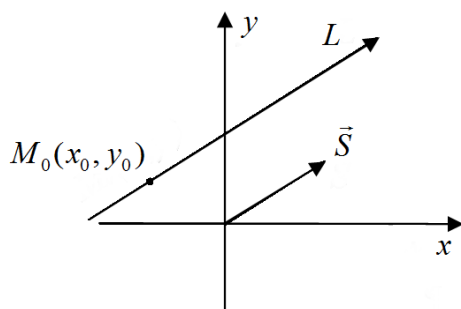


Рис. 9.2 Побудова канонічного рівняння прямої

Запишемо **канонічне рівняння прямої** (або **рівняння прямої через точку та напрямний вектор**).

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} \quad (9.3)$$

У канонічному рівнянні (9.3) один із знаменників (p або q) може бути рівним нулеві (обидва не можуть, оскільки вектор $\vec{s}$ ненульовий). Але, через означення пропорції, буде нульовим і відповідний чисельник.

Окремим випадком рівняння (9.3) є **рівняння прямої, що проходить через дві точки** $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 9.3):

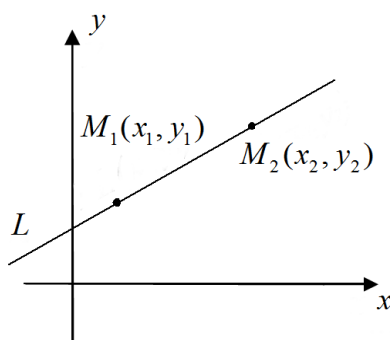


Рис. 9.3 Побудова рівняння прямої через дві точки

Очевидно, в цьому випадку як напрямний вектор $\vec{s}$ можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Тепер рівняння (9.3) можна записати у вигляді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (9.4)$$

Канонічне рівняння (9.3) – це рівність двох відношень. Можна вважати, що кожне з цих відношень дорівнює деякому параметру t . Тоді (9.3) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \end{cases} \quad (9.5)$$

де параметр t набуває всіх дійсних значень. Рівняння (9.5) визначають **параметричне рівняння прямої L** .

Наступне рівняння це **рівняння прямої L у відрізках**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (9.6)$$

Слід зазначити, що в цьому рівнянні числа a та b мають простий геометричний зміст – вони дорівнюють величині відрізків, що відсікаються прямою L на координатних осях (рис. 9.4).

При цьому знак чисел a та b вказує на те, на якому напрямі осі відсікається відповідний відрізок.

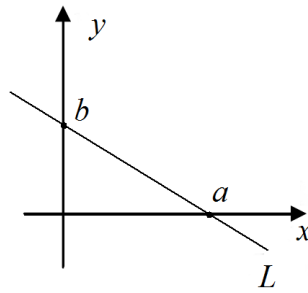


Рис. 9.4 Побудова рівняння прямої у відрізках

Ще одне рівняння прямої це **рівняння прямої через кутовий коефіцієнт**

$$y = kx + b \quad (9.7)$$

Тангенс кута нахилу прямої до осі OX називатимемо **кутовим коефіцієнтом прямої** $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Визначимо рівняння прямої в нормальному вигляді:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (9.8)$$

де довжина вектора нормалі прямої дорівнює p , а кут між ним та віссю OX дорівнює α .

Для зведення загального рівняння прямої (9.2) до нормального вигляду (9.8) потрібно загальне рівняння помножити на нормуючий множник μ , який визначається формулою

$$\mu = \frac{-\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (9.9)$$

Відстанню від точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямої L називатимемо довжину перпендикуляра, який опущений з точки M на пряму L .

Теорема (про відстань від точки до прямої)

Нехай пряма L задана в ПДСК своїм рівнянням в нормальному вигляді (9.8). Тоді відстань $\rho(M_1, L)$ від довільної точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямої L дорівнює числу

$$\rho(M_1, L) = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p| \quad (9.10)$$

Відхиленням точки $M_1(x_1, y_1)$ від прямої L , заданої рівнянням в нормальному вигляді (9.8), назвемо число, яке дорівнює відстані від точки до прямої, якщо точка M_1 і початок координат лежать по різні боки відносно прямої, та взятій зі знаком "-" відстані, якщо вони лежать по один бік:

$$\rho(M_1, L) = \pm \rho(M_1, L)$$

або

$$\rho(M_1, L) = \pm(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p)$$

Приклади розв'язання задач

1. Точка $M(-4, 5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x - y + 8 = 0$. Скласти рівняння сторін і другої діагоналі цього квадрата.

Розв'язання:

Намалюємо малюнок (візьмемо до уваги, що точка $M(-4, 5)$ не лежить на діагоналі $7x - y + 8 = 0$) (рис. 9.5).

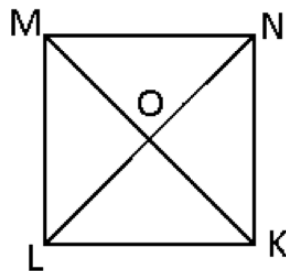


Рис. 9.5 Малюнок до задачі

Потрібно знайти рівняння сторін MN, NK, KL, LM та рівняння діагоналі MK . Оскільки діагоналі квадрата перпендикулярні, то вектор нормалі $\vec{N} = (7, -1)$ відомої діагоналі LN є напрямним вектором шуканої діагоналі MK . Запишемо канонічне рівняння для діагоналі MK :

$$\frac{x + 4}{7} = \frac{y - 5}{-1}$$

або

$$x + 7y - 31 = 0$$

Отже, кутовий коефіцієнт діагоналі MK дорівнює $k_1 = -\frac{1}{7}$. Запишемо кут між прямими MN та MK або ML та MK :

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \left| \frac{k_1 - k_x}{1 + k_1 k_x} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{7} - k_x}{1 - \frac{1}{7} k_x} \right|,$$

де k_x – кутовий коефіцієнт прямих MN та ML . Розв’язавши рівняння одержимо:

$$k_x = -\frac{4}{3} \text{ або } k_x = \frac{3}{4}$$

Отже, рівняння сторін MN та ML мають вигляд:

$$ML: y = -\frac{4}{3}x + b_1; \quad MN: y = \frac{3}{4}x + b_2$$

Знайдемо параметри b_1 та b_2 , підставивши в рівняння координати точки M :

$$b_1 = -\frac{1}{3}, b_2 = 8$$

Отже рівняння двох сторін квадрата:

$$ML: y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, \quad MN: y = \frac{3}{4}x + 8$$

Знайдемо рівняння двох інших сторін квадрата (NK та KL). Оскільки KL паралельно MN , то їхні кутові коефіцієнти співпадають і рівняння KL має вигляд:

$$KL: y = \frac{3}{4}x + b_3$$

Знайдемо координати точки L як перетин діагоналі LN та сторони ML :

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ \frac{4}{3}x + y + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

Розв’язавши систему, одержимо: $x = -1, y = 1$.

Для знаходження параметра b_3 підставимо координати точки L в рівняння сторони KL :

$$1 = \frac{3}{4} \cdot (-1) + b_3, \rightarrow b_3 = \frac{7}{4}$$

Отже, рівняння сторони KL має вигляд:

$$KL: y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

Оскільки ML паралельно NK , то їхні кутові коефіцієнти співпадають і рівняння NK має вигляд:

$$NK: y = -\frac{4}{3}x + b_4$$

Знайдемо координати точки N як перетин діагоналі LN та сторони MN :

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ \frac{3}{4}x - y + 8 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо: $x = 0, y = 8$.

Для знаходження параметра b_4 підставимо координати точки N в рівняння сторони NK :

$$8 = -\frac{4}{3} \cdot 0 + b_4, \rightarrow b_4 = 8$$

Отже, рівняння сторони NK має вигляд:

$$NK: y = -\frac{4}{3}x + 8$$

2. Точка $O(1, -1)$ є центром квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій $x - 2y + 12 = 0$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать інші сторони цього квадрата.

Розв'язання:

Нехай задано рівняння сторони CB (рис. 9.6).

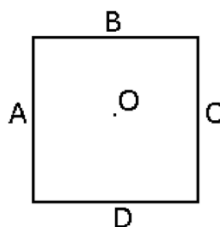


Рис. 9.6 Малюнок до задачі

Запишемо це рівняння як рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$y = \frac{1}{2}x + 6$$

Тоді, рівняння прямої, що проходить через точку **O** паралельно прямій **C** матиме вигляд:

$$y = \frac{1}{2}x + b_1$$

Знайдемо параметр **b₁**, підставивши у це рівняння координати точки **O**.

$$-1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + b_1, \quad b_1 = -\frac{3}{2}$$

Отже, рівняння прямої, що проходить через точку **O** паралельно стороні **C** має вигляд:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Рівняння сторони **A** має вигляд (сторона **A** паралельна стороні **C**):

$$y = \frac{1}{2}x + b_2$$

Знайдемо параметр **b₂** з умови:

$$\frac{b_2 + 6}{2} = -\frac{3}{2}$$

Отже, **b₂ = -9**. Таким чином, рівняння сторони **A** має вигляд:

$$y = \frac{1}{2}x - 9$$

Знайдемо відстань від точки **O** до сторони **C**. Для цього зведемо рівняння сторони **C** до нормального виду і підставимо замість **x** та **y** координати точки **O**:

$$\frac{|1 - 2 \cdot (-1) + 12|}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

Оскільки сторони ***B*** та ***D*** перпендикулярні до сторін ***A*** та ***C***, то їхні рівняння матимуть вигляд:

$$y = -2x + b_3$$

або

$$2x + y - b_3 = 0$$

Знайдемо відстань від центру до сторони ***B*** або ***D***:

$$\frac{|2 \cdot 1 + (-1) - b_3|}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

Розв'язавши рівняння, одержимо:

$$b_3 = 16 \text{ або } b_3 = -14$$

Отже, рівняння сторін ***B*** та ***D*** мають вигляд:

$$y = -2x + 16, \quad y = -2x - 14$$

3. Знайти рівняння прямої, що проходить на відстані $\sqrt{10}$ від точки ***A***(5, 4), перпендикулярно до прямої $2x + 6y - 3 = 0$.

Розв'язання:

Запишемо канонічне рівняння прямої ***l*₂** (як напрямний вектор використаємо вектор нормалі прямої ***l*₁**) (рис.9.7):

$$\frac{x - 5}{2} = \frac{y - 4}{6}$$

або

$$3x - y - 11 = 0$$

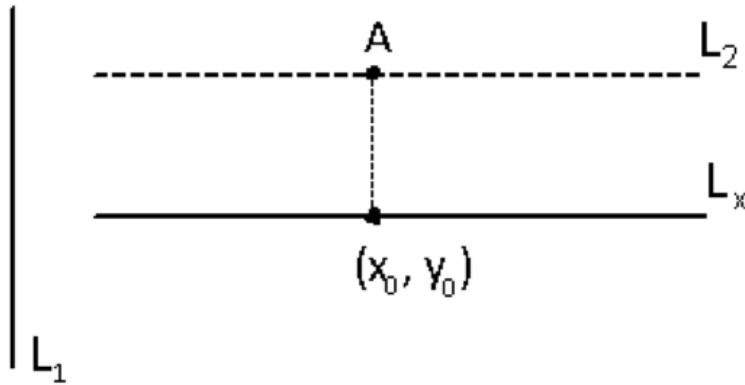


Рис. 9.7 Малюнок до задачі

Аналогічно запишемо канонічне рівняння шуканої прямої l_x :

$$\frac{x - x_0}{2} = \frac{y - y_0}{6}$$

або

$$6x - 6x_0 = 2y - 2y_0$$

Запишемо відстань від точки до прямої l_2 :

$$\frac{|3x_0 - y_0 - 11|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

або

$$|3x_0 - y_0 - 11| = 10$$

Розкривши модуль та виразивши y_0 , одержимо:

$$y_0 = 3x_0 - 21, \quad y_0 = 3x_0 - 1$$

Підставимо ці значення у рівняння прямої l_x і одержимо рівняння шуканої прямої:

$$6x - 2y - 6x_0 + 6x_0 - 42 = 0, \quad 6x - 2y - 6x_0 + 6x_0 - 2 = 0$$

або

$$6x - 2y - 42 = 0, \quad 6x - 2y - 2 = 0$$

4. Задано дві протилежні вершини квадрата: $A(-1, 3)$, $C(6, 2)$ (рис. 9.8)
Знайти рівняння сторін квадрата.

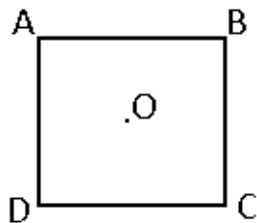


Рис. 9.8 Малюнок до задачі

Розв'язання:

Спочатку знайдемо рівняння діагоналі, що проходить через точки A та C :

$$\frac{x + 1}{6 + 1} = \frac{y - 3}{2 - 3}$$

або

$$x + 7y - 20 = 0, k_1 = -\frac{1}{7}$$

Знайдемо координати точки O як середини відрізка AC :

$$x_0 = \frac{-1 + 6}{2} = \frac{5}{2}, \quad y_0 = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2}$$

Знайдемо рівняння діагоналі BD (за напрямний вектор виберемо вектор нормалі діагоналі AC):

$$\frac{x - \frac{5}{2}}{1} = \frac{y - \frac{5}{2}}{7}$$

або

$$7x - y - 15 = 0, k_2 = 7$$

Для прямих, що проходять через точку A справедливо:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \frac{|k_1 - k_x|}{1 + k_1 k_x} = \frac{\left| -\frac{1}{7} - k_x \right|}{1 - \frac{1}{7} k_x}$$

Розв'язуючи останнє рівняння, знайдемо:

$$k_x = -\frac{4}{3} \text{ або } k_x = \frac{3}{4}$$

Тоді рівняння прямих **AD** та **AB** матиме вигляд:

$$y = -\frac{4}{3}x + b_1, \quad y = \frac{3}{4}x + b_2$$

Параметри **b₁** та **b₂** знайдемо, підставивши координати точки **A** у рівняння

прямих **AD** та **AB**:

$$b_1 = \frac{5}{3}, \quad b_2 = \frac{15}{4}$$

Отже, рівняння прямих **AD** та **AB** матиме вигляд:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}, \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

Для прямих, що проходять через точку **C** справедливо:

$$\operatorname{tg}45^\circ = 1 = \frac{|k_2 - k_x|}{1 + k_2 k_x} = \frac{|7 - k_x|}{1 + 7k_x}$$

Розв'язуючи останнє рівняння, знайдемо:

$$k_x = -\frac{4}{3} \text{ або } k_x = \frac{3}{4}$$

Тоді рівняння прямих **BC** та **DC** матиме вигляд:

$$y = -\frac{4}{3}x + b_3, \quad y = \frac{3}{4}x + b_4$$

Параметри **b₃** та **b₄** знайдемо, підставивши координати точки **C** у рівняння

прямих **BC** та **DC** :

$$b_3 = 10, \quad b_4 = -\frac{5}{2}$$

Отже, рівняння прямих **BC** та **DC** матиме вигляд:

$$y = -\frac{4}{3}x + 10, \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$$

5. Знайти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $A(3, -1)$, а також рівняння бісектриси $BE: x - 4y + 10 = 0$ та медіани $CD: 6x + 10y - 59 = 0$ (рис.9.9).

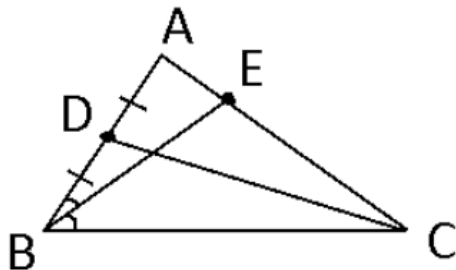


Рис. 9.9 Малюнок до задачі

Розв'язання:

Позначимо координати точки $B(x_1, y_1)$. Спочатку знайдемо координати точки D як середини відрізка AB :

$$x_0 = \frac{3 + x_1}{2}, \quad y_0 = \frac{-1 + y_1}{2}$$

Оскільки точка D належить медіані, то можна записати рівняння:

$$6 \cdot \frac{3 + x_1}{2} + 10 \cdot \frac{-1 + y_1}{2} - 59 = 0$$

або

$$3x_1 + 5y_1 - 55 = 0$$

З іншого боку точка $B(x_1, y_1)$ належить бісектрисі. Тому можна записати рівняння:

$$x_1 - 4y_1 + 10 = 0$$

Знайдемо координати точки $B(x_1, y_1)$, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5y_1 - 55 = 0 \\ x_1 - 4y_1 + 10 = 0 \end{cases}$$

Отже, $x_1 = 10, y_1 = 5$.

Запишемо рівняння прямої AB , що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x-3}{10-3} = \frac{y+1}{5+1}$$

або

$$6x - 7y - 25 = 0$$

Запишемо рівняння бісектриси та рівняння прямої **AB**, як рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$BE: y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}, k = \frac{1}{4}; AB: y = \frac{6}{7}x - \frac{25}{7}, k_1 = \frac{6}{7}$$

Позначимо кутовий коефіцієнт шуканої сторони **BC** як k_x . Тоді можна записати:

$$\left| \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k} \right| = \left| \frac{k - k_x}{1 + k_x k} \right|$$

Підставимо значення кутових коефіцієнтів, розкриємо модуль та одержимо:

$$\frac{\frac{6}{7} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{6}{28}} = \frac{\frac{1}{4} - k_x}{1 + \frac{1}{4}k_x} \text{ або } \frac{\frac{6}{7} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{6}{28}} = \frac{k_x - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}k_x}$$

Спростивши вирази, знайдемо k_x : $k_x = -\frac{2}{9}$ або $k_x = \frac{6}{7}$

Кутовий коефіцієнт $k_x = \frac{6}{7}$ згенерує рівняння для сторони **AB**, яке ми раніше знайшли. Тому запишемо рівняння для сторони **BC**:

$$y = -\frac{2}{9}x + b$$

Підставимо у це рівняння координати точки **B** та знайдемо параметр **b**:

$$5 = -\frac{2}{9} \cdot 10 + b, b = \frac{65}{9}$$

Отже, рівняння сторони **BC** матиме вигляд:

$$2x + 9y - 65 = 0$$

Знайдемо координати точки **C** як перетин прямої **BC** з медіаною **CD**:

$$\begin{cases} 2x + 9y - 65 = 0 \\ 6x + 10y - 59 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши систему одержимо $x = -\frac{7}{2}, y = 8$.

Отже, координати точки **C**: $(-\frac{7}{2}, 8)$

Запишемо рівняння прямої **AC**, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x - 3}{-\frac{7}{2} - 3} = \frac{y + 1}{8 + 1}$$

або

$$18x + 13y - 41 = 0.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Трикутник ABC задано координатами своїх вершин $A(1, 2)$, $B(2, -2)$, $C(6, 1)$.
 - 1) записати рівняння сторони (AB) .
 - 2) записати рівняння висоти (CD) і обчислити її довжину $h = |CD|$.
 - 3) знайти кут φ між висотою (CD) і медіаною (BM) .
 - 4) записати рівняння бісектрис L_1 і L_2 внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині A .
2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(8, 6)$ і відсікає від координатного кута трикутник з площею 12.
3. Відомі рівняння однієї з сторін квадрата $x + 3y - 3 = 0$ і точка перетину діагоналей $N(-2, 0)$. Записати рівняння решти його сторін.
4. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-2, 3)$ на однакових відстанях від точок $M_1(5, -1)$ і $M_2(3, 7)$.
5. Записати рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2, 6)$, а також рівняння висоти $x - 7y + 15 = 0$ і бісектриси $7x + y + 5 = 0$, що проведені з однієї вершини.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 10

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Теоретичні відомості

Розглянемо взаємне розташування двох прямих на площині.

Нехай вони задані своїми загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ відповідно.

Кут φ між прямими визначають як кут між їх векторами нормалей.

Тоді з визначення скалярного добутку і його представлення в ПДСК можна отримати:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (10.1)$$

Умова паралельності прямих еквівалентна умові колінеарності векторів нормалей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (10.2)$$

Якщо при цьому ще й виконується рівність $\frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямі L_1 та L_2 співпадають.

Прямі L_1 та L_2 перпендикулярні, якщо $\cos \varphi = 0$. Тому умову перпендикулярності запишемо в наступному вигляді:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad (10.3)$$

Якщо ж прямі L_1 та L_2 задані канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1}$ та $\frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2}$, то формули (10.1), (10.2), (10.3) можна переписати у вигляді:

$$\cos \varphi = \frac{p_1p_2 + q_1q_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2}} \quad (10.4)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} \quad (10.5)$$

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0 \quad (10.6)$$

У випадку задання прямих рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$ отримаємо наступні вирази.

Якщо α_1 та α_2 – кути нахилу прямих L_1 та L_2 до осі OX , то кут між цими прямими φ можна отримати як

$$\varphi = |\alpha_2 - \alpha_1|$$

тобто,

$$\operatorname{tg} \varphi = |\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)| = \frac{|\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1|}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}$$

Тоді формула обчислення кута φ матиме вигляд:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1 k_2} \quad (10.7)$$

Тому прямі паралельні в тому випадку, коли тангенс кута між ними дорівнює нулю, тобто $k_1 = k_2$.

Перпендикулярними прямі будуть в тому випадку, коли $\operatorname{tg} \varphi$ не існує, тобто $1 + k_1 k_2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Сукупність прямих, що проходять через деяку точку M , називають жмутком прямих з центром в M .

Теорема (про жмуток прямих)

Якщо $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ та $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ – рівняння двох різних прямих, які перетинаються в точці $M_0(x_0, y_0)$, а α та β – довільні дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулеві, то рівняння

$$\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0 \quad (10.8)$$

визначає пряму, що проходить через точку M_0 .

Приклади розв'язання задач

1. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(3, 5)$ та рівновіддалена від точок $A(-7, 3)$, $B(11, -15)$.

Розв'язання:

Розглянемо два випадки: перший, коли точки A та B розташовані по різні боки від шуканої прямої, другий, коли точки A та B розташовані по один бік від шуканої прямої (рис. 10.1).

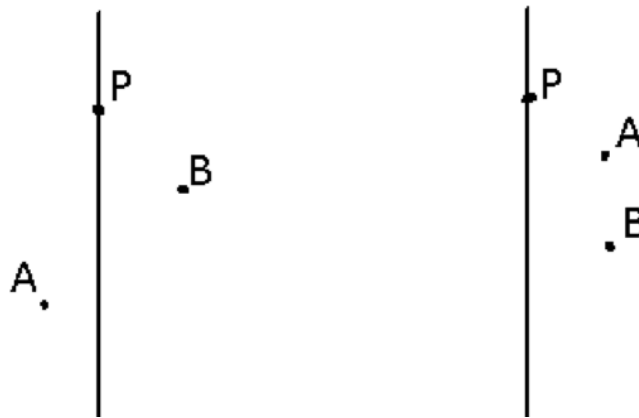


Рис. 10.1 Малюнок до задачі

Розв'яжемо спочатку задачу для першого випадку. З'єднаємо точки A та B відрізком. Нехай точка O – точка перетину відрізка та шуканої прямої. Тоді $AO = OB$ за побудовою. Знайдемо координати точки O як середини відрізка AB :

$$x_0 = \frac{-7 + 11}{2} = 2, y_0 = \frac{3 - 15}{2} = -6.$$

Запишемо шукане рівняння прямої, що проходить через дві шукані точки:

$$\frac{x - 3}{2 - 3} = \frac{y - 5}{-6 - 5}$$

або

$$11x - y - 28 = 0$$

Розглянемо другий випадок. З'єднаємо точки A та B відрізком. За побудовою він паралельний шуканій прямій. Отже, можна побудувати вектор $\overrightarrow{AB}$, який вибрати як напрямний вектор шуканої прямої:

$$\overrightarrow{AB} = (11 - (-7), -15 - 3) = (18, -18)$$

Тепер можна записати канонічне рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x - 3}{18} = \frac{y - 5}{-18}$$

або

$$x + y - 8 = 0.$$

2. Знайти точку M_1 симетричну точці $M_2(8, -9)$, відносно прямої, що проходить через точки $A(3, -4)$ та $B(-1, -2)$.

Розв'язання:

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки A та B :

$$\frac{x - 3}{-1 - 3} = \frac{y + 4}{-2 + 4}$$

або

$$x + 2y + 5 = 0, \vec{N} = (1, 2)$$

Вектор нормалі цієї прямої є напрямним вектором прямої M_1M_2 (рис. 10.2)

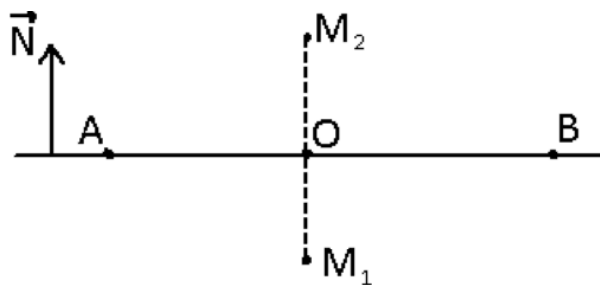


Рис. 10.2 Малюнок до задачі

Запишемо канонічне рівняння прямої M_1M_2 :

$$\frac{x-8}{1} = \frac{y+9}{2}$$

або

$$2x - y - 25 = 0$$

Знайдемо координати точки перетину прямих AB та M_1M_2 (точка O).

Для цього розв'яжемо відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ 2x - y - 25 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок $x = 9, y = -7$. Отже, $O(9, -7)$. Оскільки точка O є серединою відрізка M_1M_2 , то можна знайти координати точки M_1 :

$$9 = \frac{8+x}{2}, -7 = \frac{-9+y}{2}$$

Знаходимо $x = 10, y = -5$.

Отже, $M_1(10, -5)$.

3. Встановити чи лежить точка $M(1, -2)$ та початок координат в одному куті, суміжних чи вертикальних кутах, які утворені прямими, що перетинаються:

$$L_1: 2x - y - 5 = 0, \quad L_2: 3x + y + 10 = 0$$

Розв'язання:

Якщо точка $M(1, -2)$ лежить в одному куті з початком координат (точка 1) (рис.10.3), то відхилення цієї точки від прямих L_1 та L_2 є величина від'ємна.

Якщо точка $M(1, -2)$ лежить в суміжних кутах з початком координат (точка 2) (рис.10.3), то добуток відхилень цієї точки від прямих L_1 та L_2 є величина від'ємна.

Якщо точка $M(1, -2)$ лежить в вертикальних кутах з початком координат (точка 3) (рис.10.3), то відхилення цієї точки від прямих L_1 та L_2 є величина додатня.

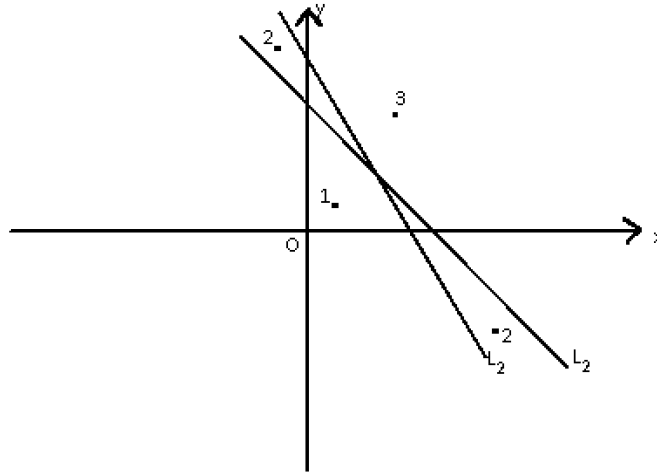


Рис. 10.3 Малюнок до задачі

Зведемо рівняння прямих L_1 та L_2 до нормального виду і знайдемо відхилення точки $M(1, -2)$ від цих прямих:

$$\delta_1 = \frac{2 \cdot 1 - (-2) - 5}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0$$

$$\delta_2 = \frac{3 \cdot 1 + (-2) + 10}{-\sqrt{10}} = -\frac{11}{\sqrt{10}} < 0$$

Отже, точка $M(1, -2)$ лежить в одному куті з початком координат.

4. Встановити, який з кутів, гострий чи тупий, що утворені прямими $L_1: 3x - 5y - 4 = 0, L_2: x + 2y + 3 = 0$ містить точку $M(2, -5)$.

Розв'язання:

Спочатку визначимо, який кут, гострий чи тупий, між векторами нормалі нормальних прямих. Для цього зведемо рівняння прямих до нормального виду:

$$L_1: \frac{3x - 5y - 4}{\sqrt{34}} = 0, \quad L_2: \frac{x + 2y + 3}{-\sqrt{5}} = 0$$

Отже, $\vec{N}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, -\frac{5}{\sqrt{34}}\right), \vec{N}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Знайдемо скалярний добуток векторів нормалі:

$$(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2) = \frac{-3 \cdot 1 + 5 \cdot 2}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{170}} > 0$$

Отже, кут між векторами нормалі гострий і розглядаємо випадок розташування прямих як на рис. 10.4 зліва.

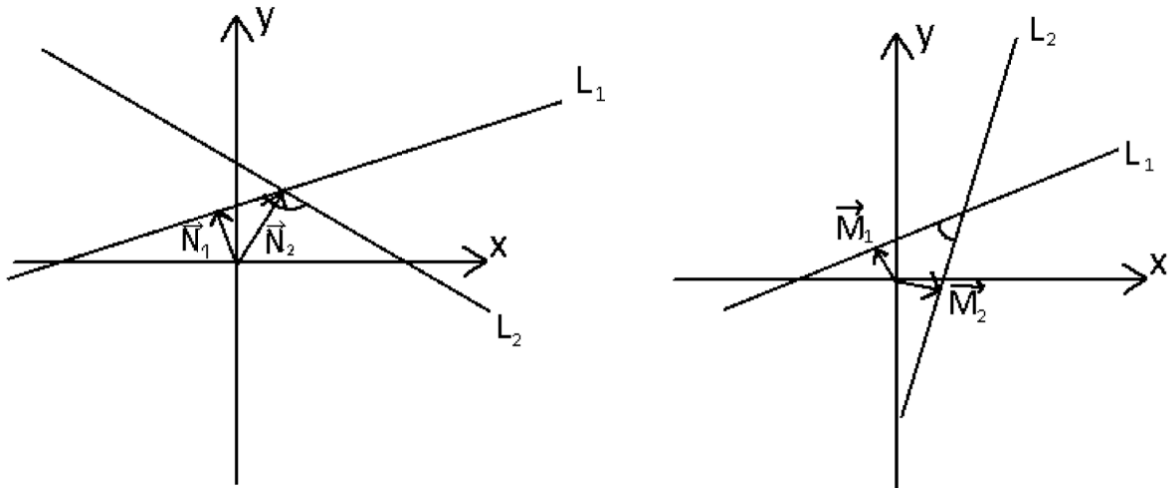


Рис. 10.4 Малюнок до задачі

Якщо точка $M(2, -5)$ лежить в тупому куті, то значення відхилень цієї точки від прямих або додатні, або від'ємні.

Якщо точка $M(2, -5)$ лежить в гострому куті, то добуток відхилень цієї точки від прямих від'ємний. Знайдемо відхилення точки $M(2, -5)$ від прямих:

$$\delta_1 = \frac{3 \cdot 2 - 5 \cdot (-5) - 4}{\sqrt{34}} = \frac{27}{\sqrt{34}} > 0$$

$$\delta_2 = \frac{2 + 2 \cdot (-5) + 3}{-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} > 0$$

Отже, точка $M(2, -5)$ лежить в тупому куті.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Задані пряма L і точка M , $L: -2x + y - 1 = 0$, $M(-1, 2)$.
 - 1) обчислити відстань $\rho(M, L)$ від точки M до прямої L .
 - 2) записати рівняння прямої L' , що проходить через точку M перпендикулярно заданій прямій L .
 - 3) записати рівняння прямої L'' , що проходить через точку M паралельно заданій прямій L .
2. Дослідити взаємне розташування заданих прямих L_1 і L_2 . При цьому у випадку їх паралельності знайти відстань $\rho(L_1, L_2)$ між прямими, а у випадку перетину знайти косинус кута $(\widehat{L_1, L_2})$ і точку M_0 перетину прямих. $L_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1}$ і $L_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{0}$
3. Встановити, чи знаходяться точка $M_0(1, -2)$ і початок координат в одному, суміжних чи у вертикальних кутах, що утворені прямими L_1 і L_2 , якщо: $L_1: x - 2y - 1 = 0$ і $L_2: 3x - y - 2 = 0$.
4. На прямій $3x - y - 1 = 0$ знайти таку точку P , різниця відстаней якої до точок $A(4; 1)$ і $B(0; 4)$ була б найбільшою.
5. Дани рівняння двох сторін квадрата $5x + 12y - 10 = 0$, $5x + 12y + 29 = 0$. Скласти рівняння двох інших його сторін за умови, що точка $M_1(-3; 5)$ лежить на стороні цього квадрата.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ОБЧИСЛЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК

Теоретичні відомості

Загальний вигляд рівняння алгебраїчної лінії другого порядку визначається рівнянням:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (11.1)$$

у якому хоча б один із коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля (інакше (11.1) перетворюється на рівняння лінії 1-го порядку).

Рівняння (11.1) визначає вироджену криву, якщо вона є лінією першого або нульового порядку, і невироджену в іншому випадку.

Невиродженими лініями другого порядку є еліпс, гіпербола та парабола.

Еліпсом називають геометричне місце точок площини, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок F_1 та F_2 цієї площини є величина стала. Точки F_1 та F_2 при цьому називають **фокусами** еліпса, а пряму, що проходить через них – **фокальною віссю**. Фокуси еліпса можуть збігтися, і тоді отримують коло.

Канонічне рівняння **еліпса** має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b \quad (11.2)$$

Величини a та b називають великою та малою півосьми еліпса. Очевидно, що в випадку $a = b$ еліпс перетворюється на коло.

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для яких абсолютна величина різниці відстаней до двох фіксованих точок F_1 та F_2 цієї площини є величина стала. Ці фіксовані точки називають **фокусами**

гіперболи, а пряму, що проходить через них – **фокальною віссю**. Фокуси гіперболи завжди різні.

Канонічне рівняння **гіперболи** має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (11.3)$$

Тобто, будь-яка точка гіперболи задовольняє рівняння (11.3). Величини a та b , що входять до рівняння, називають відповідно **дійсною** та **уявною півосями** гіперболи.

Разом з гіперболою (11.3) часто розглядають так звану спряжену до неї гіперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (11.4)$$

Парабола – це геометричне місце точок площини, для яких відстань до деякої фіксованої точки F цієї площини дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, також розташованої в цій площині. Точку F називають **фокусом параболі**, а пряму – **директрисою параболі**.

Канонічне рівняння параболі має вигляд:

$$y^2 = 2px, x \geq 0 \quad (11.5)$$

Тобто будь-яка точка параболі задовольняє рівняння (11.5).

Величину p називають параметром параболі. Парабола має вісь симетрії (вісь параболі). Точку перетину параболі з віссю називають **вершиною параболі**. Рівняння директриси параболі має вигляд:

$$x = -\frac{p}{2}$$

Якщо уважно проаналізувати визначення еліпса, гіперболи та параболі, можна помітити, що способи визначення кривих різняться. Якщо перші дві криві визначались через відстань до двох фіксованих точок, то парабола – через відстань від точки до прямої. Більше того, визначення параболі можна переформулювати наступним чином.

Парабола – геометричне місце точок площини, для яких відношення відстані до фокуса та відстані до відповідної цьому фокусу директриси є величина стала, і вона дорівнює одиниці.

Виявляється, що аналогічним чином можна переформулювати визначення гіперболи й еліпса, відмінного від кола.

Ексцентриситетом еліпса (гіперболи) називають величину ε , яка дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (11.6)$$

де a – більша піввісь.

Введемо параметр ε для еліпса $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$ та для гіперболи $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$.

Ексцентриситет кола дорівнює нулю.

Розглянемо еліпс, заданий рівнянням (11.2). **Директрисою** D_i D_i , що відповідає фокусу F_i , називають пряму, перпендикулярну великій осі еліпса, що проходить на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від його центра.

Рівняння директрис мають вигляд

$$D_1: x = -\frac{a}{\varepsilon}, D_2: x = \frac{a}{\varepsilon} \quad (11.7)$$

Директриси гіперболи визначають аналогічно, і вони задаються такими самими рівняннями.

Очевидно, що директриси еліпса розташовані поза еліпсом, а директриси гіперболи розташовані в області G , яка не містить точок гіперболи.

Точки еліпса і його центр розташовані по один бік від кожної з його директрис.

Точки лівої (правої) гілки гіперболи та її центр розташовані по різні боки директриси $D_1(D_2)$, а точки правої (лівої) гілки гіперболи та її центр O розташовані по один бік від директриси $D_1(D_2)$.

Геометричне місце точок площини, для яких відношення ε відстані r (до фокуса F) та відстані d від цієї точки до прямої D , є величина стала та є або еліпсом (при $0 < \varepsilon < 1$), або параболою (при $\varepsilon = 1$), або гіперболою (при $\varepsilon > 1$). Точку F при цьому називають **фокусом**, пряму D – **директрисою**, а ε – **ексцентриситетом** геометричного місця точок.

Приклади розв'язання задач

1. Обчислити площу чотирикутника дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $x^2 + 5y^2 = 20$, а дві інші вершини співпадають з кінцями малої осі еліпса.

Розв'язання:

Запишемо рівняння еліпса в канонічному виді:

$$\frac{x^2}{(\sqrt{20})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

де $a = \sqrt{20}$, $b = 2$ – велика та мала піввісь еліпса, відповідно.

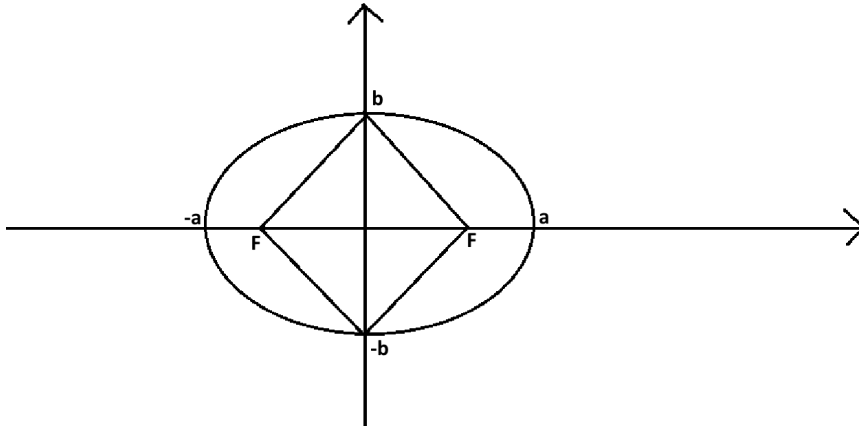


Рис. 11.1 Малюнок до задачі

Як видно з малюнка (рис. 11.1), площа чотирикутника обчислюється за формулою:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot c,$$

де параметр c визначається так:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 20 - 4 = 16, c = \pm 4$$

Отже, площа чотирикутника дорівнює:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 16$$

2. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокальний радіус точки M еліпса дорівнює 10. Обчислити відстань від точки M до односторонньої з цим фокусом директриси.

Розв'язання:

За умовою $FM = 10$ (рис. 11.2). Для еліпса справедливо:

$$\varepsilon = \frac{r}{d},$$

де r – фокальний радіус, d - відстань від точки M до односторонньої з цим фокусом директриси.

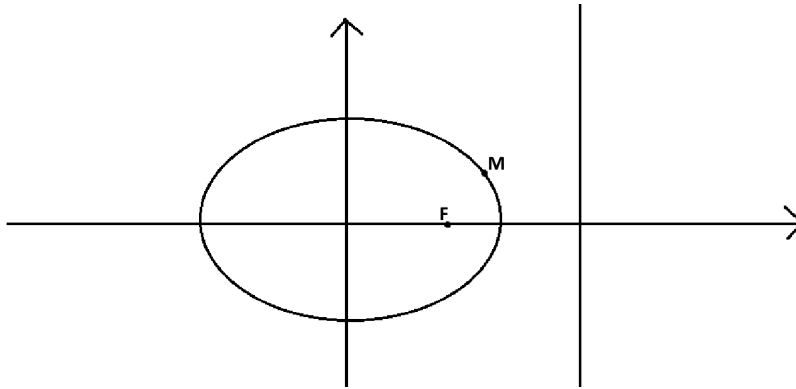


Рис. 11.2 Малюнок до задачі

Підставивши у останнє рівняння числові значення, знайдемо шукану відстань:

$$d = \frac{r}{\varepsilon} = \frac{10}{2/3} = 15$$

3. Задано точку $M(2, -\frac{5}{3})$ на еліпсі $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M (рис.11.3)

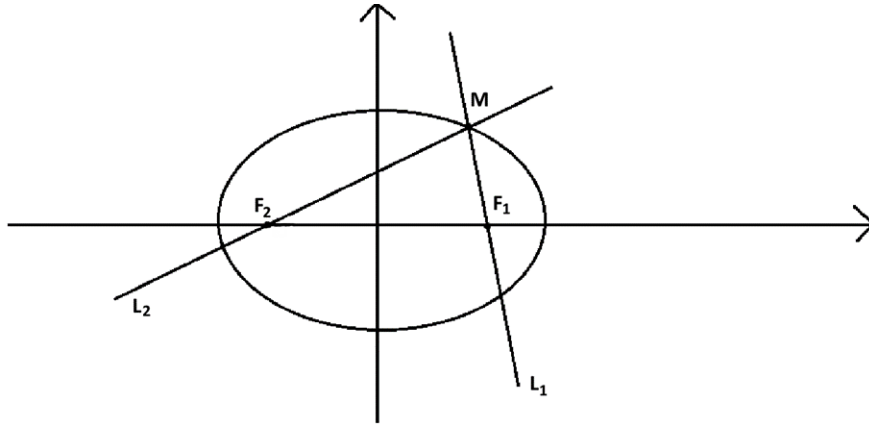


Рис. 11.3 Малюнок до задачі

Розв'язання:

З рівняння еліпса знайдемо: $a = 3, b = \sqrt{5}$. Визначимо координати фокусів F_1 та F_2 :

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4, c = \pm 2$$

Отже, $F_1(2, 0), F_2(-2, 0)$. Складемо рівняння прямих L_1 та L_2 , що проходять через дві задані точки:

$$L_1: \frac{x-2}{2-2} = \frac{y+\frac{5}{3}}{0+\frac{5}{3}} \text{ та } L_2: \frac{x-2}{-2-2} = \frac{y+\frac{5}{3}}{0+\frac{5}{3}}$$

або

$$L_1: x = 2 \text{ та } L_2: 5x + 12y + 10 = 0$$

4. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{3}{2}$, її центр лежить в початку координат, одна з директрис задана рівнянням $x = -8$. Знайти відстань від точки M гіперболи з абсцисою, що дорівнює 10, до фокуса, що відповідає заданій директрисі.

Розв'язання:

За умовою, відстань від точки M гіперболи до заданої директриси дорівнює (рис. 11.4):

$$d = 8 + 10 = 18$$

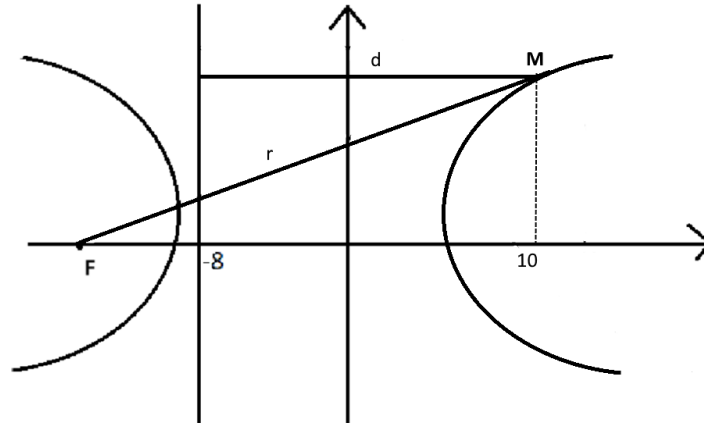


Рис. 11.4 Малюнок до задачі

Для гіперболи справедливо:

$$\varepsilon = \frac{r}{d},$$

де r – фокальний радіус, d – відстань від точки M до односторонньої з цим фокусом директриси.

$$\text{Тому, } r = d \cdot \varepsilon = 18 \cdot \frac{3}{2} = 27$$

5. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать у вершинах еліпса

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \text{ а директриси проходять через фокуси цього еліпса.}$$

Розв'язання:

Позначимо F_1 та F_2 – фокуси гіперболи, а F_3 та F_4 – фокуси еліпса (рис. 11.5).

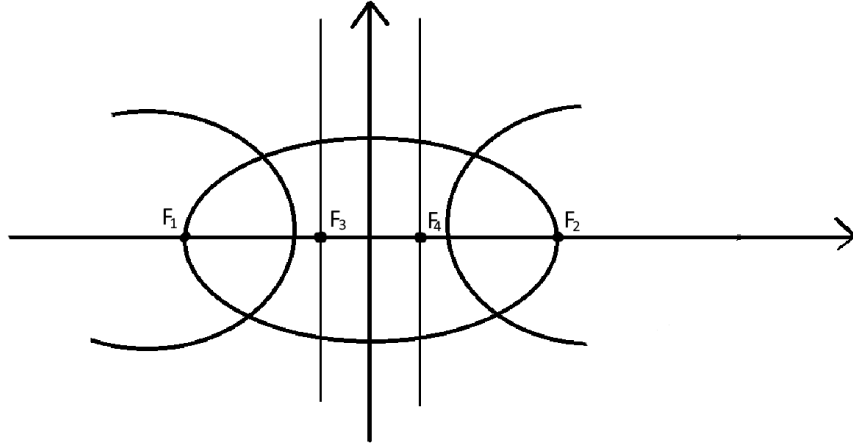


Рис. 11.5 Малюнок до задачі

Знайдемо параметри еліпса $a = 10, b = 8, c_{\text{ел.}} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ Отже, $c_{\text{гіп.}} = \pm 10$. Рівняння директрис гіперболи визначається формулою:

$$\frac{a_{\text{гіп.}}}{\varepsilon} = \frac{a_{\text{гіп.}}^2}{c_{\text{гіп.}}} = \pm 6 \rightarrow a_{\text{гіп.}} = \pm \sqrt{60}$$

Знайдемо другий параметр гіперболи:

$$b_{\text{гіп.}} = \sqrt{c_{\text{гіп.}}^2 - a_{\text{гіп.}}^2} = \sqrt{100 - 60} = \sqrt{40}$$

Отже, рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{40} = 1$$

6. Вивести умову, при якій пряма $y = kx + t$ дотикається до гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Розв'язання:

Умова при якій пряма $y = kx + t$ дотикається до гіперболи

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ еквівалентна існуванню єдиного розв'язку системи:

$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Підставимо перше рівняння у друге і розв'яжемо його відносно x :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx + m)^2}{b^2} = 1$$

або

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2kma^2x - (a^2m^2 + a^2b^2) = 0, b^2 - a^2k^2 \neq 0$$

Це квадратне рівняння має єдиний розв'язок, якщо його дискримінант дорівнює нулю:

$$D = 4k^2m^2a^4 + 4(b^2 - a^2k^2)(a^2m^2 + a^2b^2) = 0$$

Розкривши дужки та звівши подібні, знайдемо шукану умову:

$$m^2 = a^2k^2 - b^2$$

7. Знайти фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 12x$, якщо ордината точки M дорівнює 6.

Розв'язання:

Спочатку знайдемо параметр параболи $p = 6$ (оскільки канонічне рівняння параболи має вигляд: $y^2 = 2px$). Для параболи справедливо: $r = d$, де r – фокальний радіус, d - відстань від точки M до директриси (рис. 11.6).

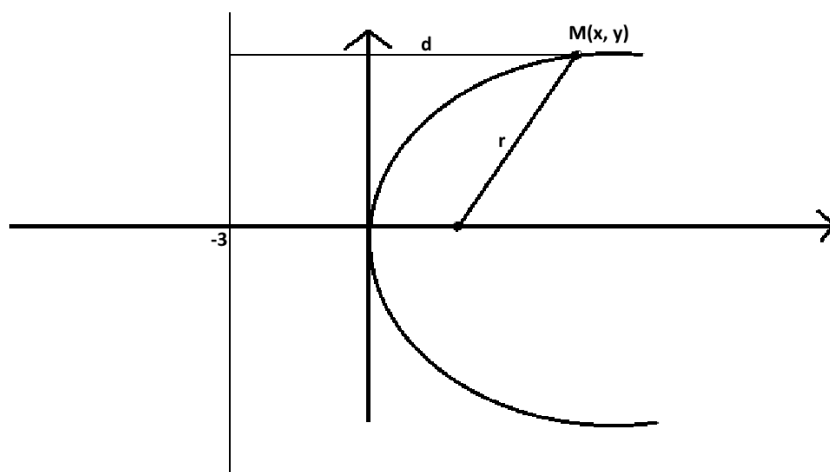


Рис. 11.6 Малюнок до задачі

З іншого боку:

$$r = x + \frac{p}{2} = x + \frac{6}{2} = x + 3$$

Знайдемо абсцису точки M :

$$6^2 = 12x, 36 = 12x, x = 3$$

Отже, фокальний радіус дорівнює: $r = x + 3 = 3 + 3 = 6$

- 8.** Скласти рівняння параболи, якщо задані її фокус $F(4, 3)$ та директриса $y + 1 = 0$.

Розв'язання:

Для параболи справедливо: $r = d$, де r – фокальний радіус, d – відстань від точки M до директриси (рис. 11.7).

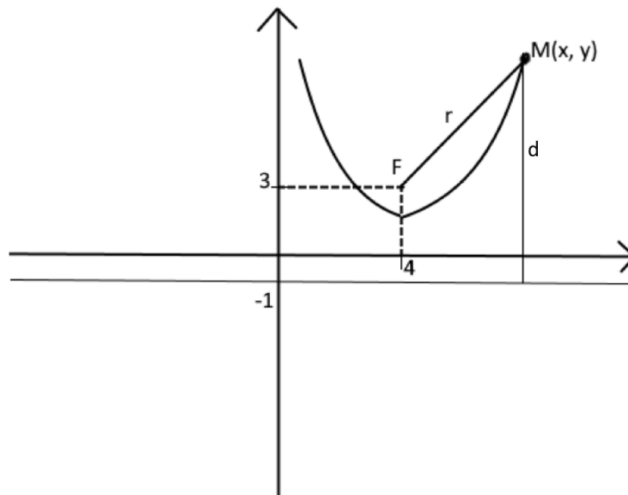


Рис. 11.7 Малюнок до задачі

Крім того:

$$d = y + 1, r = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 3)^2}$$

Тоді:

$$\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 3)^2} = y + 1$$

або

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = (y + 1)^2$$

Розкривши дужки та звівши подібні, одержимо рівняння параболи:

$$y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$$

- 9.** Скласти рівняння параболи, якщо задані її фокус $F(2, -1)$ та директриса $x - y - 1 = 0$.

Розв'язання:

Для параболи справедливо: $r = d$, де r – фокальний радіус, d – відстань від точки M до директриси (рис. 11.8).

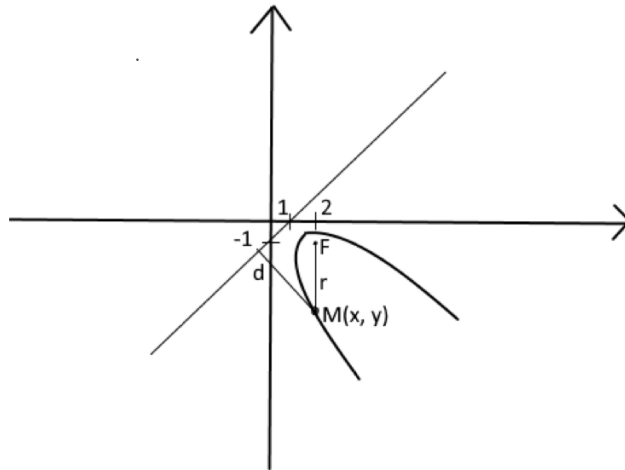


Рис. 11.8 Малюнок до задачі

Щоб знайти відстань d від точки M до директриси, зведемо рівняння директриси до нормального виду:

$$\frac{|x - y - 1|}{\sqrt{2}} = 0$$

Тоді:

$$d = \frac{|x - y - 1|}{\sqrt{2}}$$

де x та y - координати точки M .

Крім того:

$$r = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}$$

Таким чином:

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = \frac{|x - y - 1|}{\sqrt{2}}$$

або

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{(x - y - 1)^2}{2}$$

Розкривши дужки та звівши подібні, одержимо рівняння параболи:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 2y + 9 = 0$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Побудувати еліпс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Знайти:
 - а) півосі;
 - б) координати фокусів;
 - в) ексцентриситет;
 - г) рівняння директрис.
2. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо:
 - а) $a = 3, b = 2$;
 - б) $a = 5, c = 4$;
 - в) $c = 3, \varepsilon = \frac{3}{5}$;
 - г) $b = 5, \varepsilon = \frac{12}{13}$;
 - д) $c = 2$ і відстань між директрисами дорівнює 5;
 - е) $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і відстань між директрисами дорівнює $\frac{3}{2}$.
3. Побудувати гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти:
 - а) півосі;
 - б) координати фокусів;
 - в) ексцентриситет;
 - г) рівняння асимптот;
 - д) рівняння директрис.
4. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо:
 - а) $a = 2, b = 3$;
 - б) $b = 4, c = 5$;
 - в) $c = 3, \varepsilon = \frac{3}{2}$;
 - г) $a = 8, \varepsilon = \frac{5}{4}$;
 - д) $c = 10$ і рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$;

е) $\varepsilon = \frac{3}{2}$ і відстань між директрисами дорівнює 83.

5. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що :

а) його півосі дорівнюють 5 і 2;

б) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;

в) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;

г) відстань між його фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

д) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

е) його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

є) відстань між його директрисами дорівнює 5 і відстань між фокусами $2c = 4$;

ж) його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 16;

з) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами дорівнює 13;

і) відстань між його директрисами дорівнює 32 і $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат, симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що

а) її півосі $a = 6$, $b = 18$;

б) відстань між фокусам $2c = 10$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

в) рівняння асимптот $y = \pm \frac{12}{5}x$ і відстань між вершинами дорівнює 48;

г) відстань між директрисами дорівнює $7\frac{1}{7}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{5}$;

д) рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ і відстань між директрисами дорівнює $6\frac{2}{5}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 12

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ПРИВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ ЛІНІЇ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ЛІНІЙ

Теоретичні відомості

Розглянемо перетворення прямокутних декартових координат на площині. Нехай на площині задано дві праві довільні ПДСК: перша визначається початком O й базисними ортами $\bar{i}$ та $\bar{j}$, друга визначається початком O' і базисними векторами $\bar{i}'$ та $\bar{j}'$, при цьому кути між ортами $\bar{i}$ і $\bar{i}'$ та $\bar{j}$ і $\bar{j}'$ однакові.

Потрібно встановити зв'язок між координатами довільної точки M площини в системі (x, y) і в системі (x', y') .

Позначивши через φ кут між векторами $\bar{i}$ і $\bar{i}'$, запишемо формули для перетворення координат:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = y_0 + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases} \quad (12.1)$$

Таким чином, які б не були дві праві ДСК OXY та $O'X'Y'$, першу з них можна поєднати з другою за допомогою паралельного переносу вздовж вектора $\overrightarrow{OO'}$ і подальшого повороту навколо початку координат на деякий кут φ . Загальне перетворення координат (12.1) можна розбити на суму двох перетворень, перше з яких відповідає лише паралельному переносу системи, а інше – лише повороту системи на кут φ .

Дійсно, вважаючи в (12.1) кут повороту φ нульовим, отримаємо формули перетворення координат при паралельному переносі системи з точки $O(0,0)$ в точку $O'(x_0, y_0)$:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad (12.2)$$

Поклавши $x_0 = y_0 = 0$, отримаємо формули перетворення координат при обертанні системи навколо початку координат на кут φ :

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases} \quad (12.3)$$

Зазначимо, що поворот здійснюється проти годинникової стрілки.

Раніше було зазначено, що лініями другого порядку є:

еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	парабола $y^2 = 2px$
---	---	----------------------

Крім цього, рівняння лінії другого порядку також може визначати:

точку $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (вироджений еліпс)	уявний еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
прямі, що перетинаються $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	паралельні прямі $x^2 = a^2$
одну пряму $x^2 = 0$	пару уявних прямих $x^2 = -a^2$

Щоб звести лінію другого порядку $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (вважаючи, що $B \neq 0$) до канонічного виду, треба спочатку повернути систему координат на кут, який визначається наступним співвідношенням:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A-C} \quad (12.4)$$

Тоді одержимо рівняння вигляду:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \quad (12.5)$$

Для зведення до канонічного вигляду тепер необхідно виділити повні квадрати за змінними x' та y' і здійснити паралельний перенос.

Геометричний поворот системи координат на кут φ означає зміщення напрямку осей лінії 2-го порядку та осей координат, а паралельне перенесення означає «суміщення» центрів системи координат і ліній.

Приклади розв'язання задач

1. Звести до канонічного виду наступне рівняння лінії другого порядку
 $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$. Вказати тип кривої.

Розв'язання:

Спочатку повернемо систему координат на кут, який визначається наступним співвідношенням:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{10}{3-3} = \frac{10}{0} = \infty, 2\varphi = 90^\circ, \varphi = 45^\circ$$

$$\text{Звідси } \cos \varphi = \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким чином, перетворення обертання матиме вигляд:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\acute{x} - \acute{y}) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\acute{x} + \acute{y}) \end{cases}$$

Підставимо x та y у вихідне рівняння і одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(\acute{x}^2 - 2\acute{x}\acute{y} + \acute{y}^2) + 5(\acute{x}^2 - \acute{y}^2) + \frac{3}{2}(\acute{x}^2 + 2\acute{x}\acute{y} + \acute{y}^2) - \sqrt{2}\acute{x} + \sqrt{2}\acute{y} - \\ - 7\sqrt{2}\acute{x} - 7\sqrt{2}\acute{y} - 13 = 0 \end{aligned}$$

Розкриємо дужки та зведемо подібні:

$$8\acute{x}^2 - 2\acute{y}^2 - 8\sqrt{2}\acute{x} - 6\sqrt{2}\acute{y} - 13 = 0$$

Виділимо повні квадрати по кожній змінній:

$$8\left(\acute{x}^2 - 2\acute{x}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) - 4 - 2\left(\acute{y}^2 + 2\acute{y}\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{2}\right) + 9 - 13 = 0$$

або

$$8\left(\acute{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(\acute{y} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8$$

Виконаємо паралельний перенос:

$$\begin{cases} x'' = \dot{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'' = \dot{y} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

В результаті одержимо:

$$8x''^2 - 2y''^2 = 8$$

або

$$\frac{x''^2}{1} - \frac{y''^2}{4} = 1$$

Отже, одержали канонічне рівняння гіперболи.

2. Звести до канонічного виду наступне рівняння лінії другого порядку
 $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$. Вказати тип кривої.

Розв'язання:

Спочатку повернемо систему координат на кут, який визначається наступним співвідношенням:

$$tg 2\varphi = \frac{24}{14 - 21} = -\frac{24}{7} < 0$$

Таким чином, кут 2φ лежить у другій координатній чверті, а кут φ лежить у першій координатній чверті. Отже, $\cos 2\varphi < 0$, $\cos \varphi > 0$.

Знайдемо, що:

$$\cos 2\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1 + (tg 2\varphi)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{24}{7})^2}} = -\frac{7}{25}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}$$

Отже, перетворення обертання матиме вигляд:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}\acute{x} - \frac{4}{5}\acute{y} \\ y = \frac{4}{5}\acute{x} + \frac{3}{5}\acute{y} \end{cases}$$

Підставимо x та y у вихідне рівняння і одержимо:

$$14\left(\frac{3}{5}\acute{x} - \frac{4}{5}\acute{y}\right)^2 + 24\left(\frac{3}{5}\acute{x} - \frac{4}{5}\acute{y}\right)\left(\frac{4}{5}\acute{x} + \frac{3}{5}\acute{y}\right) + 21\left(\frac{4}{5}\acute{x} + \frac{3}{5}\acute{y}\right)^2 - \\ - 4\left(\frac{3}{5}\acute{x} - \frac{4}{5}\acute{y}\right) + 18\left(\frac{4}{5}\acute{x} + \frac{3}{5}\acute{y}\right) - 139 = 0$$

Розкриємо дужки та зведемо подібні:

$$30\acute{x}^2 + 5\acute{y}^2 + 12\acute{x} + 14\acute{y} - 139 = 0$$

Виділимо повні квадрати по кожній змінній:

$$30\left(\acute{x}^2 + 2\acute{x}\frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right) - \frac{6}{5} + 5\left(\acute{y}^2 + 2\acute{y}\frac{7}{5} + \frac{49}{25}\right) - \frac{49}{5} - 139 = 0$$

або

$$30\left(\acute{x} + \frac{1}{5}\right)^2 + 5\left(\acute{y} + \frac{7}{5}\right)^2 = 150$$

Виконаємо паралельний перенос:

$$\begin{cases} x'' = \acute{x} + \frac{1}{5} \\ y'' = \acute{y} + \frac{7}{5} \end{cases}$$

В результаті одержимо:

$$30x''^2 + 5y''^2 = 150$$

або

$$\frac{x''^2}{5} - \frac{y''^2}{30} = 1$$

Отже, одержали канонічне рівняння еліпса.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Кожне з наступних рівнянь привести до канонічного виду; визначити тип кожного з них; встановити, які геометричні образи вони визначають; для кожного випадку зображувати на кресленні осі первинної координатної системи, осі інших координатних систем і геометричний образ, що визначається цим рівнянням :

a) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

b) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;

c) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

d) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;

e) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$.

f) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$;

g) $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$;

h) $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$;

i) $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$;

j) $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$;

k) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$;

l) $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$.

m) $3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 1 = 0$;

n) $x^2 - 6xy + 8y^2 - 4y - 4 = 0$;

o) $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$;

p) $x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 12y + 9 = 0$.

q) $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 16x - 12y + 3 = 0$;

r) $17x^2 - 18xy - 7y^2 + 34x - 18y + 7 = 0$;

s) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x + 10y = 0$;

t) $6x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 18y + 14 = 0$;

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 13

ТЕОРІЯ МНОГОЧЛЕНІВ. НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ДІЛЬНИК. РОЗКЛАД ЗА ОСНОВНОЮ ТЕОРЕМОЮ АЛГЕБРИ

Теоретичні відомості

Многочленом називатимемо вираз виду:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (13.1)$$

Многочлен виду (13.1) називають **многочленом степеня n** , якщо коефіцієнт a_n відмінний від нуля: $\deg f(x) = n$.

Коефіцієнт a_n називають **старшим коефіцієнтом**. Многочлени зі старшим коефіцієнтом a_n , що дорівнює 1, часто називають **нормалізованими** (або нормованими).

Єдиним многочленом, що не має визначеного степеня, є многочлен, у якого всі коефіцієнти дорівнюють нулеві. Такий многочлен називається **нульовим многочленом**.

Многочлени степеня 1, 2, 3 називають відповідно **лінійними**, **квадратичними** (або квадратними) і **кубічними многочленами**.

Два многочлени називають **рівними**, якщо вони мають однаковий степінь, і рівні всі їх коефіцієнти при однакових степенях аргумента.

Нехай задано два многочлени – $f(x)$ степеня n та $g(x)$ степеня s :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_sx^s \quad (13.2)$$

причому для визначеності припустимо, що $n \geq s$.

Сумою многочленів $f(x)$ та $g(x)$ називають многочлен

$$f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n, \text{ де } c_i = a_i + b_i, \ i = \overline{0..s}, \ c_i = a_i, \ i = \overline{s+1..n}.$$

Степінь суми многочленів дорівнює n у випадку, коли $n > s$; при $n = s$ він може бути меншим за n , якщо $b_i = -a_i$, $i = \overline{k..n}$, $0 \leq k \leq n$.

Добутком многочленів $f(x)$ та $g(x)$ називають многочлен $f(x) \cdot g(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_{n+s}x^{n+s}$, де $d_i = \sum_{k+l=i} a_k \cdot b_l$, $i = \overline{0..n+s}$, тобто коефіцієнт d_i дорівнює сумі добутків тих коефіцієнтів многочленів $f(x)$ та $g(x)$, сума індексів яких дорівнює i .

$$d_0 = a_0 b_0$$

$$d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$d_{n+s} = a_n \cdot b_s$$

З останньої рівності випливає, що $d_{n+s} \neq 0$, і степінь добутку ненульових многочленів дорівнює сумі степенів співмножників:

$$\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$

тобто добуток ненульових многочленів є ненульовий многочлен.

Окремим випадком добутку многочленів є добуток многочлена $f(x)$ на число α , оскільки ненульове число можна розглядати як многочлен нульового степеня. Для многочлена $f(x)$ його добуток на число α матиме вигляд: $\alpha \cdot f(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha \cdot a_i) x^i$.

Теорема (про ділення многочленів)

Для будь-якого многочлена $f(x)$ і ненульового многочлена $g(x)$ знайдуться такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x), \quad (13.3)$$

де степінь $r(x)$ менший за степінь $g(x)$ (або $r(x) = 0$), причому таке представлення єдине.

Многочлен $f(x)$ називається **діленням**, многочлен $q(x)$ – **часткою** від ділення $f(x)$ на $g(x)$, а многочлен $r(x)$ – **остачею** від ділення $f(x)$ на $g(x)$.

Якщо остача дорівнює нулю, то кажуть, що $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а многочлен $g(x)$ називають **дільником** многочлена $f(x)$.

Нехай задано два многочлени $f(x)$ і $g(x)$ виду (16.2). Многочлен $d(x)$ називають **найбільшим спільним дільником** (НСД) многочленів $f(x)$ і $g(x)$ (записують $d(x) = \text{НСД}(f(x), g(x))$), якщо:

- 1) многочлен $d(x)$ є дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$;
- 2) будь-який інший дільник $\tilde{d}(x)$ многочленів $f(x)$ і $g(x)$ є у свою чергу дільником многочлена $d(x)$.

Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називають взаємно простими, якщо $\text{НСД}(f(x), g(x)) = 1$.

Для знаходження найбільшого спільного дільника многочленів $f(x)$ і $g(x)$ використовують **алгоритм Евкліда** (**алгоритм послідовного ділення**). Його ідея полягає в наступному.

Згідно теорії ділення многочленів, має місце розкладання:

$$f(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x), \text{ аналогічно } g(x) = q_2(x) \cdot r_1(x) + r_2(x).$$

Застосовуючи далі скінченну кількість разів теорему про ділення многочленів до многочленів $r_i(x)$, отримаємо:

$$r_1(x) = q_3(x) \cdot r_2(x) + r_3(x)$$

...

$$r_{k-1} = q_{k+1}(x) \cdot r_k(x) + r_{k+1}(x)$$

$$r_k(x) = q_{k+2}(x) \cdot r_{k+1}(x)$$

тобто останнє ділення відбувається без остачі. Тоді остання відмінна від нуля остача $r_{k+1}(x)$ (тобто та, ділення на яку відбулося націло) і буде найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Слід зазначити, що найбільший спільний дільник визначається однозначно з точністю до постійного множника, тобто якщо

$$d(x) = \text{НСД}(f(x), g(x)), \text{ то } \alpha d(x) = \text{НСД}(\beta f(x), \gamma g(x)).$$

Це означає, що під час ділення многочлени можна множити на число.

Число x_0 називають **коренем** (або **розв'язком**) многочлена $f(x)$, якщо $f(x_0) = 0$.

Число x_0 називається **коренем многочлена** $f(x)$ кратності k , якщо многочлен $f(x)$ ділиться на $(x - x_0)^k$ і не ділиться на $(x - x_0)^{k+1}$.

Іншими словами, число x_0 – корінь кратності k многочлена $f(x)$ тоді і лише тоді, коли

$$f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x) \quad (13.4)$$

Причому $g(x_0) \neq 0$.

Корінь, кратність якого дорівнює 1, називається **простим коренем**.

Теорема (основна теорема алгебри)

Довільний многочлен $f(x)$ степеня $n \geq 1$ з комплексними коефіцієнтами має принаймні один корінь, в загальному випадку комплексний.

Наслідок

Якщо комплексне число $z_0 = \alpha + i\beta$ є коренем многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то коренем многочлена також є число, спряжене до числа z_0 : $\bar{z}_0 = \alpha - i\beta$.

Наслідок

Будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами можна подати єдиним чином з точністю до перестановки множників у вигляді добутку многочленів степеня не вищого за другий з дійсними коефіцієнтами:

$$f(x) = a_0(x - x_1)^{s_1} \dots (x - x_k)^{s_k} (x^2 + c_1x + d_1)^{p_1} \dots (x^2 + c_lx + d_l)^{p_l}$$
$$c_i, d_i \in R, \quad s_1 + \dots + s_k + 2(p_1 + \dots + p_l) = n = \deg f(x)$$

Приклади розв'язання задач

1. Знайти найбільший спільний дільник многочленів

$$f(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 16, g(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 4.$$

Розв'язання:

Застосуємо алгоритм Евкліда. На першому кроці одержимо:

$$2f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot g(x) + \left(-\frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 30\right)$$

Позначимо

$$r_1(x) = -\frac{15}{2}x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 30$$

На другому кроці одержимо:

$$15g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (-4) \cdot r_1(x)$$

Отже, найбільший спільний дільник дорівнює

$$-4r_1(x) = 30x^3 - 30x^2 - 120 \text{ або } x^3 - x^2 - 4.$$

2. Скоротити дріб: $\frac{x^3 - x^2 + x + 3}{x^2 - 2x + 3}$.

Розв'язання:

Поділимо чисельник на знаменник та одержимо:

$$x^3 - x^2 + x + 3 = (x + 1)(x^2 - 2x + 3)$$

Отже,

$$\frac{x^3 - x^2 + x + 3}{x^2 - 2x + 3} = \frac{(x + 1)(x^2 - 2x + 3)}{x^2 - 2x + 3} = x + 1$$

3. Побудувати многочлен мінімального степеня з дійсними коефіцієнтами, що має корінь $2 + i$ кратності 2 та корінь 3 кратності 4.

Розв'язання:

Оскільки $2 + i$ є коренем, то $2 - i$ також є коренем. Тоді:

$$\begin{aligned}(x - (2 + i))(x - (2 - i)) &= x^2 - (2 + i)x - (2 - i)x + (2 + i)(2 - i) = \\ &= x^2 - 2x - ix - 2x + ix + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5\end{aligned}$$

Отже, многочлен мінімального степеня з дійсними коефіцієнтами має вигляд:

$$f(x) = (x^2 - 4x + 5)^2(x - 3)^4$$

4. Перевірити, чи є $\frac{1-i}{2}$ коренем многочлена

$f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 44x + 20$. Знайти розклад многочлена $f(x)$ в добуток многочленів, незвідних над полем дійсних чисел.

Розв'язання:

Оскільки $\frac{1-i}{2}$ є коренем, то $\frac{1+i}{2}$ також є коренем. Тоді:

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1-i}{2}\right)\left(x - \frac{1+i}{2}\right) &= x^2 - \frac{1-i}{2}x - \frac{1+i}{2}x + \frac{(1-i)(1+i)}{4} = \\ &= x^2 - x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Поділимо $f(x)$ на останній вираз (поділиться без остачі). Отже:

$$f(x) = 4\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 10)$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти НСД двох многочленів:

a) $x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 4x - 4.$

b) $6x^5 - 53x^4 + 151x^3 - 117x^2 - 81x + 54$

$4x^3 - 12x^2 - x + 3.$

c) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6$

$x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 81x - 54.$

d) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 16$

$2x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 4.$

2. Розкласти на дійсні множники 1-ої та 2-ої степені наступні многочлени:

a) $x^5 - 1$

e) $x^8 - 1$

b) $x^6 - 1$

f) $x^4 + x^2 + 1$

c) $x^8 + 1$

g) $x^4 + 3x^2 + 1$

d) $x^4 + 1$

h) $x^5 + 1$

3. Скоротіть дріб:

a) $\frac{x^3 - x^2 + x + 3}{x^2 - 2x + 3}$

c) $\frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

b) $\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x^2 + 2x + 5}$

d) $\frac{x^3 + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x - 8}$

4. Довести, що дріб нескоротний:

a) $\frac{x^4 + 1}{x^3 + 1}$

b) $\frac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$

5. Знайти многочлен A , для якого справедливо:

a) $x^{12} - 1 = (x^3 - 1) * A$

c) $x^6 - 64 = (x - 1) * A$

b) $x^{12} - 1 = (x^2 - 1) * A$

d) $x^7 - 128 = (x - 2) * A$

6. Побудувати многочлен мінімального степеня з дійсними коефіцієнтами, що має корені $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 5 - 3i$.
7. Знайдіть всі корені многочлена $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Подайте його як добуток многочленів, незвідних над $\mathbb{C}$ і як добуток многочленів, незвідних над $\mathbb{R}$.
8. Знайдіть розклад многочлена $x^2 + x + 1$ в добуток многочленів, незвідних над $\mathbb{C}$.
9. Подайте у вигляді елементарних дробів функцію:
- $$\frac{x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 10x^2 + 17x - 15}{(x^2 - 1)(x - 1)(x^2 + 2)}$$
10. Перевірити, що $(1 + i)$ є коренем поліному $x^4 + 4$. Знайдіть розклад цього многочлена у добуток многочленів, незвідних над $\mathbb{C}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зайцев Є.П. Вища математика. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу: навч. посіб. / Є. П. Зайцев. - Київ : Алерта, 2017. – 572 с.
2. Клімова Н.П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання : навч. посібник для студ. вищ. навч. закл. / Н. П. Клімова, О.Г. Нерух, О.О. Ремаєва. – Харків: Компанія СМІТ, 2012. – 317 с.
3. Парамонова С.М. Аналітична геометрія та лінійна алгебра : конспект лекцій / С. М. Парамонова, А.Ю. Мальцев. – К. : НТУУ «КПІ», 2007. – 124 с.
4. Марчук Р.А. Курс аналітичної геометрії та лінійної алгебри / Р. А. Марчук. – Хмельницький: ХНУ, 2005. – 255 с.

Електронне мережне навчальне видання

Третиник Віолета Вікентіївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Ліскін Вячеслав Олегович, канд. техн. наук, доц.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ПРАКТИКУМ

ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

Дизайн, комп'ютерна верстка, коректура авторські

Відповідальний за випуск Сирота С.В.



Промислово-торговельна фірма «Просвіта»
у формі товариства з обмеженою відповідальністю.
01032, Київ, бульвар Т. Шевченка, 46,
тел. (067) 440 29 96, E-mail prosvita.kyiv@gmail.com
Свідоцтво ДК № 221 від 16.10.2000 р.

Підп. до публікації 03.10.2025.

Обл. вид арк. 5

Електронні текстові дані (1 файл: 2,7 Мбайт).