УДК 517.581

Н.О. Вірченко, О.В. Діdиченко

r-КОНФЛЮЕНТНІ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

The new properties of the r-generalized confluent hypergeometric functions are investigated. The integral representations, the representation by series are constructed. Applications of these functions to the calculation of integrals absent in cash scientific and reference mathematical literature are given. Applications of the r-confluent hypergeometric functions in the theory of the special functions are considered, in partial, the r-generalized gamma-functions, incomplete gamma-functions, the r-generalized beta-functions, the r-generalized ζ-functions, Volterra functions and contiguous to them are introduced, their basic properties are investigated. The theorems of addition, multiplication for r-generalized hypergeometric function are proved. The interesting generalization of Ramanujan formula involving r-generalized confluent hypergeometric function and r-generalized beta-function. This formula gives the possibility to calculate the new complicated improper integrals.

Вступ

Останніми роками посилився інтерес до теорії спеціальних функцій, оскільки ці функції відіграють важливу роль у різноманітних галузях природничих, технічних наук, зокрема при розв'язанні складніших задач математичної фізики, атомної фізики, астрофізики, акустики, квантової теорії поля, теорії імовірностей та математичної статистики, хімії, біомедицини тощо. Серед спеціальних функцій особливо виділяються гіпергеометричні функції, із них — узагальнені та частинні випадки гіпергеометричних функцій, як от: функції Бесселя, функції Лежандра, функції Матьє, ортогональні многочлени та ін.

Як відомо, гіпергеометричні функції були запроваджені ще Л. Ейлером, і з часом їх вивченням, дослідженням, узагальненням займались багато вітчизняних і зарубіжних учених. Тепер особливо цінними для практики виявились узагальнені вироджені (конфлюентні) гіпергеометричні функції. Ці функції вже отримали застосування в теорії імовірностей та математичній статистиці, теорії кодування, інтегральному численні, а іноді — і несподівані застосування, наприклад в атомній фізиці. Цікавий підхід до узагальнення гіпергеометричних функцій подав Е. Райт.

Теоретична та практична вагомість узагальнених вироджених гіпергеометричних функцій викликає необхідність і доцільність глибшого вивчення, дослідження, застосувань їх.

Постановка задачі

Мета статті — дослідження нових властивостей r-узагальнених конфлюентних гіпергеометричних функцій, інтегральних зображень, зображень рядами. Подано застосування цих функцій до обчислення інтегралів, які відсутні в наявній науковій та довідковій математичній літературі. Розглянуто застосування r-конфлюентних гіпергеометричних функцій у теорії спеціальних функцій, зокрема, запроваджено нові узагальнення Γ-функції, B-функції, ζ-функції, функцій Вольтерра, досліджено їх основні властивості.

r-конфлюентна гіпергеометрична функція, основні її властивості

Розглянемо r-узагальнену конфлюентну (вироджену) гіпергеометричну функцію у вигляді [1]

$$ {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\times $$

$$ \times e^{xt}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \qquad (1) $$

де $\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} a>0, \{\tau,\beta\}\subset R, \tau-\beta<1, r>0, \mathrm{B}(a, c-a)$ — класична бета-функція [2], $\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0, \alpha\in R, \alpha>0, \quad \gamma\in R, \gamma>0$, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(...)-(\tau,\beta)$ — узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [3]:

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)= $$

$$ =\frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(c;\tau);\\(c;\beta);\end{matrix}\middle|\, zt^{\tau}\right]dt, \ (2) $$

де ${}_1\Psi_1[...]$ — узагальнена функція Фокса–Райта [4].

Зауважимо, що при $\beta=\tau$ в (2) маємо функцію ${}_1\Phi_1^{\tau}$ [3], водночас із (1) – функцію ${}_1^r\Phi_1^{\tau}$; при $\tau=\beta=1, r=0$ (1) дає класичну конфлюентну гіпергеометричну функцію ${}_1\Phi_1(a;c;x)$ [2], яку називають першою функцією Куммера.

Другу функцію Куммера узагальнюємо у такому вигляді:

$$
{}^rU^{\tau,\beta}(a;c;x)=
$$

$$
=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{c-a+1}e^{-xt}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t^\delta}\right)dt, \quad (3)
$$

де $\operatorname{Re}a>\operatorname{Re}c>0,\{\tau,\beta\}\subset R;\tau>0,\tau-\beta<1;\{a,c\}\subset C;\delta>0,r>0,\operatorname{Re}\alpha>\operatorname{Re}\gamma>0;\Gamma(a)$ – класична гамма-функція [2], ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(...)-(\tau,\beta)$ – узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція (2).

Лема 1. Якщо $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0,\{\tau,\beta\}\subset R$, $\tau>0;\tau-\beta<1,r>0,\{\alpha,\gamma\}\subset R,\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0$, то справедливі такі формули диференціювання:

$$
\frac{d}{dx}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{a}{c}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+1;c+1;x), \quad (4)
$$

$$
\frac{d^n}{dx^n}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=
$$

$$
=\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(c+n)}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+n;c+n;x), \quad (5)
$$

$$
\frac{d}{dx}[e^{-x}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)]=
$$

$$
=\frac{a-c}{c}e^{-x}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c+1;x), \quad (6)
$$

$$
\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)]=
$$

$$
=(-1)^n\frac{\Gamma(c)\Gamma(c+n-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c+n)}e^{-x}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c+n;x). \quad (7)
$$

Д о в е д е н н я формул (4)–(7) виконується за допомогою безпосереднього диференціювання виразу (1) з використанням функціонального рівняння, якому справджує $\Gamma(z)$ [2]. Наприклад, доведемо (6):

$$
\frac{d}{dx}[e^{-x}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)]=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\times
$$

$$
\times\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(t-1)e^{(t-1)x}\times
$$

$$
\times{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt=-e^{-x}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\times
$$

$$
\times\frac{\Gamma(a)\Gamma(c+1-a)}{\Gamma(c+1)}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c+1;x)=
$$

$$
=-e^{-x}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a)\Gamma(c-a+1)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)c\Gamma(c)}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c+1;x)=
$$

$$
=-\frac{c-a}{c}e^{-x}{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c+1;x).
$$

Теорема 1 (про зображення функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$ рядом). Якщо виконуються умови $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0,\{\tau,\beta\}\subset R,\tau>0,\tau-\beta<1,r>0$, $\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0,\{\alpha,\gamma\}\subset R,\gamma>0$, $\operatorname{Re}(c-a-n)>0$, $\operatorname{Re}(a-n)>0$, то справедлива формула

$$
{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\mathrm{B}(a,c-a)}\times
$$

$$
\times\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(\alpha+n\tau)}{\Gamma(\gamma+n\beta)}\frac{(-r)^n}{n!}\mathrm{B}(c-a-n,a-n)\times
$$

$$
\times{}_1\Phi_1(a-n;c-2n;x), \quad (8)
$$

де ${}_1\Phi_1(...)$ – класична вироджена гіпергеометрична функція.

Д о в е д е н н я. Використавши зображення для функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(...)$

$$
{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)=
$$

$$
=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(\alpha+n\tau)}{\Gamma(\gamma+n\beta)}\frac{\left(-\frac{r}{t(1-t)}\right)^n}{n!},
$$

помінявши місцями операції інтегрування та підсумовування, що законно згідно з рівномірною збіжністю інтеграла та абсолютною збіжністю ряду, матимемо

$$
{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\times
$$

$$
\times e^{xt}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(\alpha+n\tau)}{\Gamma(\gamma+n\beta)}\frac{\left(-\frac{r}{t(1-t)}\right)^n}{n!}dt=
$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\mathrm{B}(a,c-a)}\times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n\tau)}{\Gamma(\gamma+n\beta)} \frac{(-r)^n}{n!} \int_0^1 t^{a-1-n}(1-t)^{c-a-1-n} e^{xt} dt.$$

Врахувавши значення інтеграла [5]

$$\int_0^u y^{\nu-1}(u-y)^{\mu-1} e^{\beta y} dy =$$

$$= \mathrm{B}(\mu,\nu) u^{\mu+\nu-1} {}_1\Phi_1(\nu;\mu+\nu;\beta u),$$

де $\operatorname{Re}\mu > 0, \operatorname{Re}\nu > 0, \mathrm{B}(\mu,\nu)$ – класична бета-функція, ${}_1\Phi_1(...)$ – класична вироджена гіпергеометрична функція, після перетворень одержуємо (8).

Лема 2. За умов існування *r*-конфлюентної гіпергеометричної функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$ справедливі такі інтегральні співвідношення:

$$\int_0^\infty x^n\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-x) dx =$$

$$= A n!\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a-n-1;c-n-1;-x), \qquad (9)$$

де

$$A = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-n-1)}{\Gamma(a)\Gamma(c-n-1)};$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+e^{-x}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-x) dx = \frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)}\times$$

$$\times \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \beta(t)\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right) dt, \quad (10)$$

де $\beta(t)$ – неповна бета-функція [2]. Тут враховано формулу 3.311(2) із [5]:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+e^{-x}} dx = \beta(t);$$

$$\int_0^\infty \exp(-e^x)\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x) dx = \frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)}\times$$

$$\times \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \Gamma(t)\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right) dt; \quad (11)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x(x+\omega)}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-x) dx = \frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)}\times$$

$$\times \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)\times$$

$$\times e^{\frac{\omega t}{2}} K_0\left(\frac{\omega t}{2}\right) dt, \qquad (12)$$

де $K_0(...)$ – циліндрична функція уявного аргументу.

Теорема 2 (теорема додавання для ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$). Для *r*-узагальненої конфлюентної функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$ справедливі формули

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x+y) =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{(y)^n}{n!}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+n;c+n;x), \quad (13)$$

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x+y) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}\times$$

$$\times e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+n-a)}{\Gamma(c+n)} \frac{(-y)^n}{n!}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c+n;x). \quad (14)$$

Д о в е д е н н я випливає із відповідних формул диференціювання (5), (7) і теореми Тейлора про те, що якщо $f(x)$ – аналітична функція, ряд для якої збігається при $|x| < \rho$, то для $|y| < \rho$ маємо [6]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x) \frac{y^n}{n!}.$$

Теорема 3 (теорема множення для ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$). Для *r*-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$ справедливі формули

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;xy) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n (y-1)^n}{n!}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+n;c+n;x), \quad (15)$$

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;xy) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} e^{-x}\times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+n-a)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n (1-y)^n}{n!}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c+n;x). \quad (16)$$

Доведення випливає із відповідних формул диференціювання (5), (7) і теореми Тейлора для $|y-1| < \mathrm{Re}\frac{x}{|x|}$ [6]:

$$f(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x)\frac{x^n(y-1)^n}{n!}.$$

Застосування функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$ в теорії спеціальних функцій

Подамо застосування r-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції до запровадження нових узагальнень Γ-функції, B-функції, ζ-функції, функцій Вольтерра.

1. *r-узагальнену гамма-функцію* ${}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(\alpha;\delta,\omega;r)$ визначимо виразом

$${}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(\alpha;\delta,\omega;r) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t^{\omega}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t^{\delta}}\right)dt, \quad (17)$$

де $\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,a > 0$, $\{\tau,\beta\} \subset R, r \ge 0$, $\omega > 0$, $\delta \ge 1$, ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)$ – функція вигляду (1). При $\omega = 1$, $r = 0$ матимемо класичну гамма-функцію [2].

r-узагальнені неповні гамма-функції визначимо за допомогою виразів

$${}_{\tau,\beta}^{\;r}\gamma_a^c(\alpha;x;\delta,\omega;r) =$$

$$= \int_0^{x} t^{\alpha-1}e^{-t^{\omega}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t^{\delta}}\right)dt, \quad (18)$$

$${}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(\alpha;x;\delta,\omega;r) =$$

$$= \int_x^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t^{\omega}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t^{\delta}}\right)dt, \quad (19)$$

де $x > 0$.

Теорема 4 (опуклість функції ${}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(\alpha;\delta,\omega;r)$). При $1 < p < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ справедлива формула

$${}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q};\delta,\omega;r\right) \le$$

$$\le \left({}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(x;\delta,\omega;r)\right)^{\frac{1}{p}}\left({}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(y;\delta,\omega;r)\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (20)$$

Доведення. Поклавши $\alpha = \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$ в (17) та використавши нерівність Гельдера, одержимо (20).

Цікаві частинні випадки (20). Наприклад, якщо в (20) $p = q = 2$, то одержимо

$${}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c\left(\frac{x+y}{2};\delta,\omega;r\right) \le$$

$$\le \sqrt{{}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(x;\delta,\omega;r)\,{}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(y;\delta,\omega;r)}, \quad (21)$$

звідки випливає порівняння середнього геометричного із середнім арифметичним:

$$\sqrt{{}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(x;\delta,\omega;r)\,{}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(y;\delta,\omega;r)} \le$$

$$\le \frac{1}{2}[\,{}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(x;\delta,\omega;r) + {}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(y;\delta,\omega;r)]. \quad (22)$$

Теорема 5 (про інтегральні зображення функції ${}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(\alpha;\delta,\omega;r)$). Якщо $\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,a > 0$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0, \delta > 0, \omega > 0, r \ge 1$, то справедливі такі рівності:

$${}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(\mu^{-1};\delta,\omega;r) =$$

$$= \mu\int_0^{\infty} \exp(-x^{\mu\omega})\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-rx^{-\mu\delta})dx, (\mu > 0); \quad (23)$$

$${}_{\tau,\beta}^{\;r}\Gamma_a^c(\alpha;\delta,\omega;r) =$$

$$= \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\omega}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-r\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-\delta}\right)\frac{dx}{x},$$

$$(x > 0). \quad (24)$$

Доведення випливає із формули (1) (основного інтегрального зображення функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}$) та відповідних підстановок.

2. *r-узагальнену бета-функцію* ${}_{\tau,\beta}^{\;r}\mathrm{B}_a^c(\alpha,\mu;r)$ визначимо таким виразом:

$${}_{\tau,\beta}^{\;r}\mathrm{B}_a^c(\alpha,\mu;r) =$$

$$= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\mu-1}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \quad (25)$$

де $\operatorname{Re} r > 0, \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$, $\{\tau,\beta\} \subset R$, ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(...)$ – функція (1). Зауважимо, що при $a = c, r = 0$ в (25) одержимо класичну бета-функцію [2].

Теорема 6. Для r-узагальненої бета-функції (25) справедливі такі інтегральні зображення:

$$ {}_{\tau,\beta}^{\ r}\mathrm{B}_a^c(\alpha,\mu;r) = $$

$$ = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\mu}} \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(t+t^{-1}+2))dt, \quad (26) $$

$$ {}_{\tau,\beta}^{\ r}\mathrm{B}_a^c(\alpha,\mu;r) = $$

$$ = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}+t^{\mu-1}}{(1+t)^{\alpha+\mu}} \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(t+t^{-1}+2))dt, \quad (27) $$

Теорема 7 (узагальнення формули Рамануджана). Якщо $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$, $\{\tau,\beta\} \subset R, |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$, то справедлива формула

$$ \int_0^\infty \frac{\cos(2zt)}{\operatorname{ch}(\pi t)} \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-4r\operatorname{ch}^2(\pi t))dt = $$

$$ = \frac{1}{2\pi} \, {}_{\tau,\beta}^{\ r}\mathrm{B}_a^c\left(\frac{1}{2}+\frac{iz}{2}, \frac{1}{2}-\frac{iz}{2}; r\right). \quad (28) $$

Доведення. Покладемо у формулі (27)

$$ \alpha = y + \frac{x}{p}, \ \mu = y - \frac{x}{p}, $$

тоді матимемо

$$ {}_{\tau,\beta}^{\ r}\mathrm{B}_a^c\left(y+\frac{x}{p}, y-\frac{x}{p}; r\right) = $$

$$ = \int_0^1 \left(t^{y+\frac{x}{p}-1} + t^{y-\frac{x}{p}-1} \right)(1+t)^{-2y} \times $$

$$ \times \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(t+t^{-1}+2))dt = 4^{1-y} p \times $$

$$ \times \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(2xt)}{[\operatorname{ch}(pt)]^{2y}} \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-4r\operatorname{ch}^2(pt))dt. $$

Далі нехай $x = iz, y = \frac{1}{2}, p = \pi$, і після перетворень одержимо формулу (28).

3. *r-узагальнену ζ-функцію Гурвіца*

$$ {}_{\tau,\beta}^{\ r}\zeta(\alpha,q;\delta,\omega;a,c) $$

визначимо так:

$$ {}_{\tau,\beta}^{\ r}\zeta(\alpha,q;\delta,\omega;a,c) = $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}e^{-qt}}{(1-e^{-t})^\omega} \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-rt^{-\delta})dt, \quad (29) $$

де $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} q > 0, \{\tau,\beta\} \subset R$, $\delta > 0, \omega \geq 1, \operatorname{Re} r > 0$, ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(...)$ – функція (1).

Очевидно, що при $r = 0, q = \omega = \delta = 1$, $a = c, \beta = \tau = 1$ матимемо класичну функцію Рімана $\zeta(\alpha)$ [2], а при $r = 0, \omega = \delta = 1, a = c$, $\tau = \beta = 1$ – дзета-функцію Гурвіца $\zeta(\alpha, q)$ [2].

Примітка. r-узагальнені функції гіпергеометричного типу можна застосувати і для *узагальнення функцій Вольтерра* [2] та споріднених до них.

Наприклад:

$$ {}_{\tau,\beta}^{\ r}\nu_a^c(b;x) = \int_0^\infty \frac{x^t}{{}_{\tau,\beta}^{\ r}\Gamma_a^c(t+1;b)}dt, \quad (30) $$

$$ {}_{\tau,\beta}^{\ r}\mu(b;x;y) = \int_0^\infty \frac{x^t t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)\, {}_{\tau,\beta}^{\ r}\Gamma_a^c(t+1;b)}dt. \quad (31) $$

Висновки

Нове узагальнення вироджених (конфлюентних) гіпергеометричних функцій становить певний вклад у подальший розвиток теорії спеціальних функцій, зокрема, воно дало змогу запровадити r-узагальнені гамма-, бета-, дзета-функції, функції Вольтерра. Досліджені властивості r-конфлюентних гіпергеометричних функцій дали змогу обчислити велику низку інтегралів, які відсутні в наявній науковій та довідковій літературі.

Беручи до уваги перспективність одержаних наукових результатів, плануємо в майбутньому значно збільшити кількість нових обчислених інтегралів, розширити область практичного застосування r-конфлюентних гіпергеометричних функцій.

1. *Вірченко Н.О.* Узагальнення конфлюентних гіпергеометричних функцій // Доп. НАН України. – 2012. – № 5. – С. 7–11.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.: Наука. – 1973. – 296 с.
3. *N. Virchenko,* "On the generalized confluent hypergeometric function and its application", Fract. Calculus and Appl. Anal., vol. 9, no. 2, pp. 101–108, 2006.
4. *A.A. Kilbas, M. Saigo,* H-Transforms. Florida: Charman and Hall/CRC, 2004, 390 pp.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз. – 1963. – 1100 с.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
30 серпня 2012 року