МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник для інженерних спеціальностей

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Операційне числення. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна меїханіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Г. В. Журавська, Т. О. Карпалюк, І. М. Копась, Н. В. Рева. – Електронні текстові данні (1 файл: 2208 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 79 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 9 від 24.05.2018 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол № 4 від 26.04.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник для інженерних спеціальностей

Укладачі: *Журавська Ганна Вікторівна*, канд. фіз.-мат. наук,
Карпалюк Тамара Олексіївна, канд. фіз.-мат. наук,
Копась Інна Миколаївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Рева Надія Віталіївна, канд. фіз.-мат. наук

Відповідальний редактор *Журавська Ганна Вікторівна*, канд. фіз.-мат. наук

Рецензенти: *Денисенко Н. Л.,* , канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь КПІ ім. Ігоря Сікорського
Варивода В.О., асистент кафедри вищої та обчислювальної математики Національного авіаційного університету

Даний навчальний посібник призначено для студентів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів, які вивчають операційне числення в курсі математики. Посібник містить коротке викладення теорії з операційного числення та його застосування до розв'язування задач. Особливу увагу приділено перетворенню Лапласа та перетворенню Фур'є. Навчальний посібник містить Додатки, в яких коротко сформульовано основні властивості перетворень Лапласа та Фур'є, а також подано таблицю оригіналів і зображень основних елементарних функцій. У посібнику наведено достатню кількість розв'язаних прикладів з докладними поясненнями щодо розв'язування, що допоможе закріпити теоретичний матеріал, а також запропоновано задачі для самостійного розв'язування та індивідуальні завдання для самостійної роботи, що дозволить студенту оволодіти основами операційного числення.

Зміст

Передмова

Даний навчальний посібник призначено для студентів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів, які вивчають операційне числення в курсі математики.

Багато фізичних явищ і процесів у техніці описуються за допомогою звичайних лінійних диференціальних рівнянь чи їхніх систем, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь та ін. Операційне числення є одним із ефективних методів розв'язування різних математичних задач, зокрема, тих, які є математичними моделями фізичних явищ чи технічних процесів. Воно широко застосовується при вивченні різноманітних задач механіки, електротехніки, радіотехніки, автоматичного регулювання, теплопровідності та ін.

Операційне числення – це потужний і зручний математичний апарат для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь та систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, інтегральних рівнянь, крайових задач математичної фізики.

Запропонований навчальний посібник містить коротке викладення теорії операційного числення та його застосування до розв'язування задач. Особливу увагу приділено перетворенню Лапласа та перетворенню Фур'є. Навчальний посібник містить Додатки, в яких коротко сформульовано основні властивості перетворень Лапласа та Фур'є, а також подано таблицю оригіналів і зображень основних елементарних функцій.

У посібнику наведено достатню кількість розв'язаних прикладів з докладними поясненнями щодо розв'язування, що допоможе закріпити теоретичний матеріал, а також запропоновано задачі для самостійного розв'язування та індивідуальні завдання для самостійної роботи, що дозволить студенту оволодіти основами операційного числення.

1. Перетворення Лапласа

1.1. Означення перетворення Лапласа

Перетворенням Лапласа функції $f(t)$ дійсної змінної t називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка задається за формулою

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \tag{1.1}$$

В цьому випадку функцію $f(t)$ називають *оригіналом*, а функцію $F(p)$ – *зображенням за Лапласом функції* $f(t)$, або коротко – *зображенням функції* $f(t)$. Інтеграл в правій частині формули (1.1) називається *інтегралом Лапласа*.

Зв'язок функцій $f(t)$ та $F(p)$ за допомогою формули (1.1) символічно позначають:

$$f(t) \div F(p), \text{ а також } f(t) \xrightarrow{L} F(p),\ F(p) = L\{f(t)\}.$$

Оскільки в правій частині формули (1.1) знаходиться невласний інтеграл, то, очевидно, не для кожної функції $f(t)$ цей інтеграл має сенс. Для того, щоб невласний інтеграл у формулі (1.1) збігався і дійсно визначав деяку функцію $F(p)$, достатньо, щоб для функції $f(t)$ виконувались такі умови:

I. Функція $f(t)$ дорівнює нулю при від'ємних значеннях t ($\forall t < 0, f(t) = 0$).

II. Функція $f(t)$ є кусково-неперервною, тобто будь-який скінчений інтервал можна розбити на деяку кількість інтервалів, у кожному з яких функція $f(t)$ неперервна. Функція $f(t)$ може мати лише розриви першого роду (стрибки та усувні), причому на кожному скінченому інтервалі таких точок існує не більш, ніж скінчене число.

III. Функція $f(t)$ при $t \geq 0$ зростає не швидше, ніж деяка показникова функція із лінійним за змінною t степенем, тобто існують дійсні сталі $M > 0,\ s \geq 0$ такі, що для всіх $t > 0$ виконується нерівність

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t}, \quad s_0 < s. \tag{1.2}$$

Нижня межа s_0 всіх чисел s, для яких виконується нерівність (1.2), називається *показником зростання функції* $f(t)$. Умова II дозволяє інтегрувати функцію $f(t)$ на довільному скінченому інтервалі осі t, а умова III забезпечує збіжність інтеграла Лапласа (1.1).

Для обґрунтування операційного числення використовується така теорема.

Теорема 1.1. *Нехай функція* $f(t)$ *дійсної змінної задовольняє умови I–III. Тоді інтеграл* $F(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$ *– визначений та абсолютно збіжний у півплощині* $\operatorname{Re} p = s > s_0$*, де* s_0 *– показник зростання функції* $f(t)$*. Функція комплексної змінної* $F(p)$ *– зображення функції* $f(t)$*, є **аналітичною** для всіх* p *таких, що* $\operatorname{Re} p > s_0$.

Зауваження 1.1. Використовуючи умову III щодо функції $f(t)$ та означення перетворення за Лапласом, можна показати, що виконується співвідношення

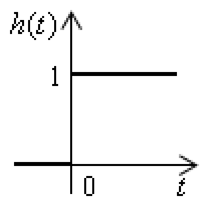
$$\lim_{\operatorname{Re} p\to\infty} F(p)=0.$$

Дана рівність є *необхідною умовою* того, щоб функція $F(p)$ була зображенням за Лапласом деякої функції $f(t)$.

Користуючись означенням перетворення Лапласа, знайдемо зображення деяких елементарних функцій дійсної змінної.

Приклад 1. Знайти зображення функції Хевісайда $h(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

Розв'язування.



За формулою (1.1)

$$h(t) \div F(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^b=\lim_{b\to\infty}\frac{e^{-pb}}{-p}+\frac{1}{p}=\frac{1}{p},$$

де $\operatorname{Re} p > 0$. Тут враховано, що показник зростання функції Хевісайда дорівнює нулю.

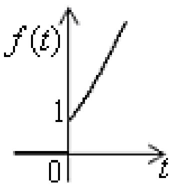
Оскільки за умовою I кожний оригінал дорівнює нулю при $t<0$, то для спрощення записів будемо вважати $h(t)=1$ і $h(t)\div\dfrac{1}{p}$. ●

Зауваження 1.2. Якщо ми будемо розглядати такі функції як e^t, $\sin t$, $\cos t$ та інші, то завжди будемо мати на увазі функції вигляду

$$f_1(t)=\begin{cases}\sin t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0;\end{cases}\quad f_2(t)=\begin{cases}\cos t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0;\end{cases}\quad f_3(t)=\begin{cases}e^t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

За допомогою одиничної функції Хевісайда $h(t)$ ці функції можна переписати у вигляді $f_1(t)=h(t)\sin t$, $f_2(t)=h(t)\cos t$, $f_3(t)=h(t)e^t$. Надалі множник $h(t)$ писати не будемо, вважаючи, що розглянуті функції продовжені нулем для від'ємних t.

Приклад 2. Знайти зображення показникової функції $f(t)=e^{at}$, $a\in \mathrm{R}$, $t\ge 0$.



Розв'язування.

Для функції $f(t)=e^{at}$ маємо $s_0=a$, тому зображення $F(p)$ є визначеною та аналітичною функцією в півплощині $\mathrm{Re}\,p>a$.

За формулою (1.1)

$$f(t)\div\int_0^\infty e^{-pt}e^{at}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(p-a)t}dt=-\lim_{b\to\infty}\left.\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\right|_0^b=-\lim_{b\to\infty}\frac{e^{-(p-a)b}}{p-a}+\frac{1}{p-a}=\frac{1}{p-a},$$

де $\mathrm{Re}\,p>a$.

Отже,

$$e^{at}\div\frac{1}{p-a}.\bullet$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти зображення для функцій за означенням.

а) $f(t)=\sin t$;
б) $f(t)=\cos t$;
в) $f(t)=e^{-t}$;
г) $f(t)=\mathrm{sh}\,t$;
д) $f(t)=\mathrm{ch}\,t$;
е) $f(t)=t$;
є) $f(t)=t^2$;
ж) $f(t)=te^t$.

Відповіді: 1. а) $\frac{1}{1+p^2}$; б) $\frac{p}{1+p^2}$; в) $\frac{1}{1+p}$; г) $\frac{1}{p^2-1}$; д) $\frac{p}{p^2-1}$; е) $\frac{1}{p^2}$; є) $\frac{2}{p^3}$; ж) $\frac{1}{(p-1)^2}$.

1.2. Основні властивості перетворення Лапласа

Розглянемо властивості перетворення Лапласа та їх застосування.

1. Лінійність зображення.

Якщо $f_k(t) \div F_k(p)$*, де* $\operatorname{Re} p > s_k$, $k = \overline{1,n}$*, то*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t) \div F(p) = \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p),$$

де $\operatorname{Re} p > s_0 = \max\limits_{k=\overline{1,n}} s_k$, C_k*– довільні дійсні або комплексні числа,* $k = \overline{1,n}$.

Приклад 1. Знайти зображення функцій $f_1(t) = \sin \omega t$ та $f_2(t) = \cos \omega t$.

Розв'язування.

Перетворення Лапласа тригонометричних функцій можна знайти, використовуючи властивість лінійності зображення. Візьмемо до уваги зображення для показникової функції

$$e^{at} \div \frac{1}{p-a}.$$

Тоді

$$f_1(t) = \sin \omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$f_2(t) = \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Тут $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|$.●

Приклад 2. Знайти зображення функції $f(t) = e^{at} \sin \omega t$.

Розв'язування.

$$f(t) = e^{at} \sin \omega t = \frac{1}{2i} e^{at}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2i}(e^{(a+i\omega)t} - e^{(a-i\omega)t}) \div$$

$$\div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-a-i\omega} - \frac{1}{p-a+i\omega}\right) = \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2},$$

де $\operatorname{Re} p > a + |\operatorname{Im}\omega|$.●

2. Подібність (зміна масштабу незалежної змінної).

Якщо $f(t) \div F(p)$, *де* $\mathrm{Re}\, p > s_0$, *то для довільного додатного числа* C *маємо*

$$f(Ct) \div \frac{1}{C} F\left(\frac{p}{C}\right),$$

де $\mathrm{Re}\, p > s_0$. *Цю ж саму властивість інколи зручно використовувати в такому вигляді: якщо* $f(t) \div F(p)$, *де* $\mathrm{Re}\, p > s_0$, *то для довільного додатного числа* C *маємо*

$$f\left(\frac{t}{C}\right) \div CF(Cp), \text{ де } \mathrm{Re}\, p > s_0.$$

Приклад 3. Знайти зображення функції $f(t) = \sin \omega t$.

Розв'язування.

Відомо, що $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$. Тоді за властивістю подібності

$$\sin \omega t \div \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

що повністю співпадає з результатом прикладу 1. ●

3. Зсув аргументу (теорема запізнення).

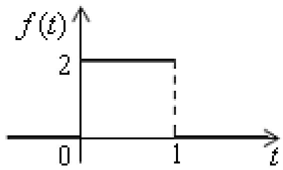
Якщо $f(t) \div F(p)$, *де* $\mathrm{Re}\, p > s_0$, *то для довільного додатного числа* $\tau > 0$ *справедлива рівність*

$$f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p), \ \mathrm{Re}\, p > s_0.$$

Остання властивість використовується при знаходженні зображень за Лапласом періодичних функцій (періодичні імпульси) та функцій, які на різних інтервалах визначаються різними аналітичними виразами (кусково-неперервних функцій).

Приклад 4. Знайти зображення функції

$$f(t) = \begin{cases} 2, & t \in (0,1), \\ 0, & t \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$



Розв'язування.

Перепишемо функцію $f(t)$ за допомогою одиничної функції Хевісайда

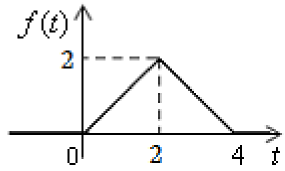
$$f(t) = 2h(t) - 2h(t-1).$$

Тоді за теоремою запізнення, враховуючи, що $\tau = 1$, маємо

$$f(t) = 2h(t) - 2h(t-1) \div 2 \cdot \frac{1}{p} - 2e^{-p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{2}{p}(1 - e^{-p}).\bullet$$

Приклад 5. Знайти зображення функції

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in (0,2), \\ 4 - t, & t \in (2,4), \\ 0, & t \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty). \end{cases}$$



Розв'язування.

Перепишемо функцію $f(t)$ за допомогою одиничної функції Хевісайда

$$f(t) = t\,h(t) - t\,h(t-2) + (4-t)\,h(t-2) + (t-4)\,h(t-4) =$$

$$= t\,h(t) - 2(t-2)\,h(t-2) + (t-4)\,h(t-4).$$

Тоді за теоремою запізнення

$$f(t) \div \frac{1}{p^2} - 2e^{-2p}\,\frac{1}{p^2} + e^{-4p}\,\frac{1}{p^2} = \frac{(1 - e^{-2p})^2}{p^2}.\bullet$$

Приклад 6. Знайти загальну формулу для зображення періодичної функції.

Розв'язування.

Нехай $f(t)$ – деяка T-періодична функція.

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-pt} f(t)dt.$$

В інтегралі від T до ∞, заміняючи $t = \tau + T$ та враховуючи, що $f(\tau + T) = f(t)$, отримаємо

$$F(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + e^{-pT} F(p).$$

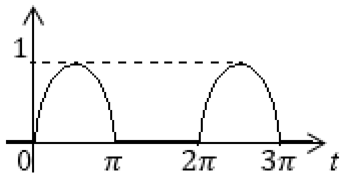
Тоді

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt.\bullet$$

Приклад 7. Знайти зображення періодичної функції

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in (2\pi n, (2n+1)\pi), \\ 0, & t \in ((2n+1)\pi, (2n+2)\pi), \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Розв'язування.



За результатом прикладу 6, маємо

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi}e^{-pt}f(t)dt=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi}e^{-pt}\sin t dt=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\cdot\frac{e^{-pt}}{p^2+1}(-p\sin t-\cos t)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Отже,

$$f(t)\div\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\cdot\frac{1}{p^2+1}.\ \bullet$$

4. Зміщення (теорема згасання).

Якщо $f(t)\div F(p)$, *де* $\operatorname{Re}p>s_0$, *то для довільного числа* a *справедлива формула*

$$e^{at}f(t)\div F(p-a),\quad \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a+s_0,$$

тобто множення оригіналу на функцію e^{at} *рівносильне "зміщенню" зображення на* a *одиниць.*

Приклад 8. Знайти зображення функцій $f(t)=e^{at}\cos\omega t$.

Розв'язування.

За результатом прикладу 1. маємо

$$\cos\omega t\div\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Тоді за теоремою згасання маємо

$$e^{at}\cos\omega t\div\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}.\bullet$$

5. Диференціювання зображення.

Якщо $f(t)\div F(p)$, *де* $\operatorname{Re}p>s_0$, *то*

$$\frac{d^n}{dp^n}F(p)\div(-1)^n t^n f(t),\ \text{де}\ \operatorname{Re}p>s_0.$$

Приклад 9. Знайти зображення степеневої функції t^n, $n \in \mathbf{N}$, $t \geq 0$.

Розв'язування.

Перепишемо задану функцію таким чином:

$$g(t) = h(t)t^n = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^n, & t \geq 0. \end{cases}$$

Використаємо властивість диференціювання зображення, взявши за $f(t)$, $t \geq 0$, функцію Хевісайда. Тоді, враховуючи, що $h(t) \div \frac{1}{p}$, маємо

$$(-1)^n h(t)t^n \div \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}}, \ \operatorname{Re} p > 0,$$

звідки отримаємо зображення

$$t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}, \ \operatorname{Re} p > 0. \bullet$$

Приклад 10. Знайти зображення функції $t^n e^{at}$, $n \in \mathbf{N}$, $t \geq 0$.

Розв'язування.

За властивістю диференціювання зображення, врахувавши, що $e^{at} \div \frac{1}{p-a}$, отримаємо

$$t^n e^{at} \div (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p-a}\right) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a.$$

Цю ж саму формулу можна отримати скориставшись результатом прикладу 5. та властивістю зміщення (теоремою згасання). ●

6. Інтегрування зображення.

Якщо $f(t) \div F(p)$, *де* $\operatorname{Re} p > s_0$, *а інтеграл* $\int_p^\infty F(z)dz$ *збіжний, то справедлива формула*

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(z)dz, \ \ \operatorname{Re} z \geq s > s_0, \ \ \operatorname{Re} p > s_0.$$

Приклад 11. Знайти зображення функції $\frac{\sin t}{t}$.

Розв'язування.

Оскільки $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, то

$$\frac{\sin t}{t} \div \int_p^\infty \frac{1}{z^2+1}dz = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} z\Big|_p^b = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} p = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p \text{ . } \bullet$$

7. Властивість часткового виродження оригінала (теорема випередження).

Якщо $f(t) \div F(p)$, *де* $\operatorname{Re} p > s_0$, *то для довільного дійсного числа* $t_0 > 0$ *справедлива формула* $f(t+t_0) \div e^{t_0 p}\left[F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t)dt\right]$, $\operatorname{Re} p > s_0$.

8. Зображення похідної (диференціювання оригіналу).

Якщо $f(t) \div F(p)$, *де* $\operatorname{Re} p > s_0$ *і функція* $f'(t)$ *має зображення за Лапласом, то*

$$f'(t) \div pF(p) - f(0), \ \operatorname{Re} p > s_0,$$

де $f(0) = \lim_{t\to 0+} f(t)$.

Якщо додатково до вказаних вище умов функція $f^{(n)}(t)$ *задовольняє умови існування зображення за Лапласом, тобто має зображення за Лапласом, то*

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

де $f^{(k)}(0) = \lim_{t\to 0+} f^{(k)}(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, $n \in \mathrm{N}$.

Ця властивість є однією з основних властивостей зображень за Лапласом і використовується, зокрема, під час розв'язування задач Коші для лінійних звичайних диференціальних рівнянь і крайових задач для рівнянь математичної фізики, оскільки дозволяє замінити диференціювання оригіналу операцією множення зображення на незалежну змінну.

У частинному випадку, коли $f(0) = 0$, маємо $f'(t) \div pF(p)$. Якщо ж, крім того, $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \div p^n F(p)$.

Приклад 12. Знайти зображення диференціального виразу

$$y^{\text{IV}}(t)+2y'''(t)-3y''(t)-y'(t)+5y(t)-4,$$

при початкових умовах $y'''(0)=1,\ y''(0)=2,\ y'(0)=0,\ y(0)=-1.$

Розв'язування.

Нехай $y(t)\div Y(p)$. Тоді

$y'(t)\div pY(p)-y(0)=pY(p)+1;$

$y''(t)\div p^2Y(p)-y(0)p-y'(0)=p^2Y(p)+p;$

$y'''(t)\div p^3Y(p)-y(0)p^2-y'(0)p-y''(0)=p^3Y(p)+p^2-2;$

$y^{\text{IV}}(t)\div p^4Y(p)-y(0)p^3-y'(0)p^2-y''(0)p-y'''(0)=p^4Y(p)+p^3-2p-1.$

Отже, враховуючи, що $4\div\dfrac{4}{p}$, маємо

$$y^{\text{IV}}(t)+2y'''(t)-3y''(t)-y'(t)+5y(t)-4\to p^4Y(p)+p^3-2p-1+2(p^3Y(p)+p^2-2)-$$

$$-3(p^2Y(p)+p)-(pY(p)+1)+5Y(p)-\frac{4}{p}=$$

$$=(p^4+2p^3-3p^2-p+5)Y(p)+p^3+2p^2-5p-6-\frac{4}{p}.\bullet$$

9. Інтегрування оригіналу (зображення інтеграла від функції).

Якщо $f(t)\div F(p)$, *де* $\operatorname{Re}p>s$, *то справедлива формула*

$$\int_0^t f(y)dy\div\frac{1}{p}F(p),\ \operatorname{Re}p>s.$$

Ця властивість використовується для знаходження розв'язків лінійних інтегральних рівнянь.

Приклад 13. Знайти зображення інтегрального синуса $\operatorname{Si}(t)=\int_0^t\frac{\sin y}{y}dy$.

Розв'язування.

Оскільки за результатом прикладу 11 маємо $\dfrac{\sin t}{t}\div\operatorname{arcctg}p$, то

$$\operatorname{Si}(t)=\int_0^t\frac{\sin y}{y}dy\div\frac{1}{p}\operatorname{arcctg}p.\bullet$$

10. Теорема множення (Бореля).

Якщо $f(t) \div F(p)$, *де* $\operatorname{Re} p > s_1$, $g(t) \div G(p)$, *де* $\operatorname{Re} p > s_2$, *то справедлива формула*

$$\int_0^t f(z) g(t-z) dz \div F(p) G(p), \ \operatorname{Re} p > \max(s_1, s_2).$$

Функція

$$\varphi(t) = \int_0^t f(z) g(t-z) dz = \int_0^t f(t-z) g(z) dz$$

називається ***згорткою*** *функцій* $f(t)$ *та* $g(t)$ *і позначається* $f(t) * g(t)$.

Наслідком теореми Бореля є ***формула Дюамеля:***

$$pF(p)G(p) \div f(0)g(t) + \int_0^t f'(z) g(t-z) dz = g(0) f(t) + \int_0^t f(t-z) g'(z) dz.$$

Ця формула часто застосовується під час відшукання оригіналу за заданим зображенням (див. далі розділ 2).

Приклад 14. Знайти згортку функцій $f(t) = e^t$ та $g(t) = t$.

Розв'язування.

$$f(t) * g(t) = e^t * t = \int_0^t e^z (t-z) dz = t(e^t - 1) - (te^t - e^t + 1) = e^t - t - 1. \bullet$$

Приклад 15. Знайти зображення згортки функцій $f(t) = e^t$ та $g(t) = t$.

Розв'язування.

Оскільки $e^t \div \frac{1}{p-1}$, а $t \div \frac{1}{p^2}$, то за теоремою Бореля

$$e^t * t \div \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{\mathrm{p}^2} = \frac{1}{p^2 (p-1)}. \bullet$$

Зауваження 1.3. Короткий перелік властивостей перетворення Лапласа і таблиця зображень для основних елементарних функцій наведено в Додатках 1 і 2 на сторінках 76, 77 відповідно.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Користуючись властивістю лінійності, знайти зображення для функцій:

а) $f(t)=\sin^2 t;$

б) $f(t)=\cos^3 t;$

в) $f(t)=e^{at}\cos\omega t;$

г) $f(t)=\mathrm{ch}t+5\mathrm{sh}t;$

д) $f(t)=\mathrm{sh}t\cos 5t;$

е) $f(t)=\mathrm{ch}3t(2\cos 3t-4\sin t);$

є) $f(t)=3^t\cos^2 t.$

2. Користуючись властивістю подібності та результатом попереднього завдання, знайти зображення для функцій:

а) $f(t)=\sin^2 4t;$ б) $f(t)=\cos^3 3t;$ в) $f(t)=3\mathrm{ch}4t+5\mathrm{sh}6t.$

3. Користуючись властивістю зміщення, знайти зображення для функцій:

а) $f(t)=e^{at}\sin\omega t;$

б) $f(t)=e^{3t}\cos^2 t;$

в) $f(t)=\mathrm{ch}2t\cos 2t+2\mathrm{sh}3t\sin 3t;$

г) $f(t)=4\mathrm{sh}t\cos 2t\cos 3t;$

д) $f(t)=5^t\cos t;$

е) $f(t)=\mathrm{ch}3t\sin^3 t.$

4. Користуючись властивістю диференціювання зображення, знайти зображення для функцій:

а) $f(t)=(t^3+2t^2+3t)e^t;$

б) $f(t)=(t^2+t)\cos t;$

в) $f(t)=(t^2+5t)\sin t;$

г) $f(t)=te^t\cos 2t;$

д) $f(t)=te^{3t}\sin t;$

е) $f(t)=t\,\mathrm{ch}t\sin^2 t.$

5. Користуючись властивістю інтегрування зображення, знайти зображення для функцій:

а) $f(t)=\dfrac{e^{-2t}\sin t}{t};$

б) $f(t)=\dfrac{\mathrm{sh}3t}{t};$

в) $f(t)=\dfrac{\sin 4t\sin 3t}{t};$

г) $f(t)=\dfrac{\mathrm{ch}3t-\mathrm{ch}2t}{t};$

д) $f(t)=\dfrac{1-e^{at}}{te^t};$

е) $f(t)=\dfrac{e^{-at}\sin^2 bt}{t};$

є) $f(t)=\dfrac{\mathrm{sh}^2 t}{t}.$

6. Користуючись властивістю диференціювання оригінала, знайти зображення диференціального виразу із заданими початковими умовами:

а) $4y''(t)-5y'(t)+2y(t)-2e^{t}$,

$y'(0)=0,\ y(0)=0;$

б) $y'''(t)+7y''(t)+3y'(t)-y(t)+2t$,

$y''(0)=1,\ y'(0)=-3,\ y(0)=2;$

в) $y^{\mathrm{IV}}(t)+y'''(t)-2y''(t)-4y'(t)-2y(t)+\sin 2t$,

$y'''(0)=3,\ y''(0)=-2,\ y'(0)=0,\ y(0)=0.$

7. Користуючись теоремою запізнення, знайти зображення кусково-неперервних функцій (побудувати графіки):

а) $f(t)=\begin{cases}0,\ t<1 \text{ т } \ t>2,\\ 1,\ 1<t<2;\end{cases}$ б) $f(t)=\begin{cases}0,\ t<0 \text{ т } \ t>2,\\ 1,\ 0<t<1,\\ -1,\ 1<t<2;\end{cases}$

в) $f(t)=\begin{cases}t-2,\ 2<t<3,\\ 4-t,\ 3<t<4,\\ 0,\ t>4 \text{ т } \ t<2;\end{cases}$ г) $f(t)=\begin{cases}0,\ t<a,\\ t-a,\ a<t<b,\\ b-a,\ t>b.\end{cases}$

8. Користуючись результатом прикладу 6, знайти зображення періодичних функцій (побудувати графіки):

а) $f(t)=\begin{cases}1,\ 2\pi n<t<(2n+1)\pi,\\ -1,\ (2n+1)\pi<t<(2n+2)\pi,\ n=0,1,2,3\ldots\\ 0,\ t<0;\end{cases}$

б) $f(t)=\begin{cases}t-2n,\ 2n<t<2n+1,\\ 0,\ 2n+1<t<2n+2,\ n=0,1,2,3\ldots,\\ 0,\ t<0;\end{cases}$

в) $f(t)=|\sin t|,\ t>0$.

9. Знайти згортку функцій $f(t)$ та $g(t)$ та її зображення за теоремою Бореля:

а) $f(t)=\sin t$ та $g(t)=t$;

б) $f(t)=\cos t$ та $g(t)=t$;

в) $f(t)=\sin t$ та $g(t)=\cos t$.

Відповіді: 1. а) $\dfrac{2}{p^3+4p}$; б) $\dfrac{p^2+2}{p^3+4p}$; в) $\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$; г) $\dfrac{p+5}{p^2-1}$;

д) $\dfrac{0{,}5p-0{,}5}{(p-1)^2+25}-\dfrac{0{,}5p+0{,}5}{(p+1)^2+25}$; е) $\dfrac{2p^3}{p^4+324}-\dfrac{2}{p^2-6p+10}-\dfrac{2}{p^2+6p+10}$;

є) $\dfrac{0{,}5}{p-\ln 3}+\dfrac{0{,}5(p-\ln 3)}{(p-\ln 3)^2+4}$; 2. а) $\dfrac{32}{p^3+64p}$; б) $\dfrac{0{,}25p}{p^2+81}+\dfrac{0{,}75p}{p^2+9}$;

в) $\dfrac{3p}{p^2-16}+\dfrac{30}{p^2-36}$; 3. а) $\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$; б) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-3}+\dfrac{p-3}{(p-3)^2+4}\right)$;

в) $\dfrac{p^3}{p^4+64}+\dfrac{36p}{p^2+324}$; г) $\dfrac{p-1}{(p-1)^2+25}+\dfrac{p-1}{(p-1)^2+1}-$ $-\dfrac{p+1}{(p-1)^2+25}-\dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}$;

д) $\dfrac{p-\ln 5}{(p-\ln 5)^2+1}$; е) $\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{1}{(p-3)^2+1}-\dfrac{1}{(p-3)^2+9}+ +\dfrac{1}{(p+3)^2+1}-\dfrac{1}{(p+3)^2+9}\right)$;

4. а) $\dfrac{3p^2-2p+5}{(p-1)^4}$; б) $\dfrac{p^4+2p^3+6p-1}{(p^2+1)^3}$; в) $\dfrac{2(5p^3+6p^2+5p-1)}{(p^2+1)^3}$; г) $\dfrac{(p-1)^2-4}{((p-1)^2+4)^2}$;

д) $\dfrac{p-3}{((p-3)^2+1)^2}$; е) $\dfrac{p^2+1}{(p^2-1)^2}-$ $-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{(p-1)^2-4}{((p-1)^2+4)^2}+\dfrac{(p+1)^2-4}{((p+1)^2+4)^2}\right)$; 5. а) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{p+2}$;

б) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p-3}{p+3}$; в) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2+49}{p^2+1}$; г) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2-4}{p^2-9}$; д) $\ln\dfrac{p+1-a}{p+1}$; е) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(p+a)^2+4b^2}{(p+a)^2}$;

є) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2}{p^2-4}$; 6. а) $(4p^2-5p+2)Y(p)-\dfrac{2}{p-1}$;

б) $(p^3+7p^2+3p-1)Y(p)-2p^2-11p+14-\dfrac{2}{p^2}$;

в) $(p^4+p^3-2p^2-4p-2)Y(p)+2p-1+\dfrac{2}{p^2+4}$; 7. а) $\dfrac{e^{-p}-e^{-2p}}{p}$; б) $\dfrac{(1-e^{-p})^2}{p}$;

в) $\left(\dfrac{e^{-p}-e^{-2p}}{p}\right)^2$; г) $\left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{a}{p}\right)(e^{-ap}-e^{-bp})$; 8. а) $\dfrac{\mathrm{th}0{,}5p}{p}$; б) $\dfrac{1-(1+p)e^{-p}}{p^2(1-e^{-2p})}$; в) $\dfrac{\mathrm{cth}0{,}5\pi p}{1+p^2}$;

9. а) $t-\sin t$, $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$; б) $1-\cos t$, $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$; в) $\dfrac{1}{2}t\sin t$, $\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

2. Відновлення оригіналу за заданим зображенням

В процесі застосування методів операційного числення для розв'язання практичних задач, важливе значення має відповідь на питання: як за відомою функцією $F(p)$ – зображенням за Лапласом – знайти функцію $f(t)$, що є оригіналом для $F(p)$.

По-перше, існують таблиці зображень тих функцій, які найчастіше зустрічаються при застосуванні операційного числення.

По-друге, враховуючи властивості перетворення Лапласа, зазначені в першому розділі, можна розв'язати і задачу щодо відновлення оригіналу за зображенням.

Таблиця основних властивостей перетворення Лапласа та таблиця оригіналів і зображень наведені в додатках 1, 2.

По-третє, існує загальний метод побудови оригіналу за зображенням (формула обернення Мелліна).

2.1. Визначення оригіналу за зображенням за допомогою властивостей перетворення Лапласа

I. Нехай зображенням деякої функції $f(t)$ є дробово-раціональна функція вигляду $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, де $P_m(p)$ та $Q_n(p)$ − многочлени степеня m та n, причому дріб $F(p)$ є правильним, тобто $m<n$.

Як відомо (див., наприклад, [3]) довільний правильний дріб $\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$ можна зобразити у вигляді суми елементарних дробів вигляду

$$\frac{A}{p-a},\quad \frac{A}{(p-a)^k},\quad \frac{Bp+C}{p^2+bp+c},\quad \frac{Bp+C}{(p^2+bp+c)^k},$$

де $A,\ B,\ C,\ a,\ b,\ c$ – дійсні числа, а $k-$ ціле додатне число, причому $b^2-4c<0$, тобто знаменники третього та четвертого дробів не мають дійсних коренів. Коефіцієнти $A,\ B,\ C$ можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Для кожного елементарного дробу можна знайти оригінал, користуючись таблицею оригіналів та зображень і властивостями перетворення Лапласа. Сума отриманих оригіналів і буде шуканою функцією $f(t)$.

Приклад 1. Знайти оригінал для зображення $F(p) = \dfrac{5p+8}{p^2+2p-8}$.

Розв'язування.

Оскільки квадратний тричлен у знаменнику має дійсні корені, зобразимо дріб у вигляді суми елементарних дробів

$$\frac{5p+8}{p^2+2p-8} = \frac{5p+8}{(p-2)(p+4)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+4} = \frac{A(p+4)+B(p-2)}{(p-2)(p+4)}.$$

Порівнявши чисельники першого та останнього дробу, складемо систему для визначення невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A+B=5, \\ 4A-2B=8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3, \\ B=2. \end{cases}$$

Тоді

$$F(p) = \frac{3}{p-2} + \frac{2}{p+4} \div 3e^{2t} + 2e^{-4t}.$$

Отже

$$f(t) = 3e^{2t} + 2e^{-4t}. \bullet$$

Приклад 2. Знайти оригінал для зображення $F(p) = \dfrac{3p+1}{p^2-2p+5}$.

Розв'язування.

Оскільки квадратний тричлен у знаменнику не має дійсних коренів, скористаємось методом виділення повного квадрата у знаменнику.

$$\frac{3p+1}{p^2-2p+5} = \left| \begin{array}{l} \text{виділимо} \\ \text{повний квадрат} \\ \text{у знаменнику} \end{array} \right| = \frac{3p+1}{(p-1)^2+4} = \left| \begin{array}{l} \text{за знаменником} \\ \text{підбираємо} \\ \text{табличну формулу} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3(p-1)+4}{(p-1)^2+4} = 3\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2} + 2\frac{2}{(p-1)^2+2^2} \div 3e^t\cos 2t + 2e^t \sin 2t. \bullet$$

Приклад 3. Знайти оригінал для зображення $F(p)=\dfrac{5p^2-4p+3}{p^3-p^2+p-1}$.

Розв'язування.

$$\frac{5p^2-4p+3}{p^3-p^2+p-1}=\frac{5p^2-4p+3}{(p-1)(p^2+1)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+1}=\frac{A(p^2+1)+(Bp+C)(p-1)}{(p-1)(p^2+1)}=$$

$$=\frac{Ap^2+A+Bp^2-Bp+Cp-C}{(p-1)(p^2+1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=5,\\ C-B=-4,\\ A-C=3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2,\\ B=3,\\ C=-1.\end{cases}$$

Тоді

$$\frac{5p^2-4p+3}{p^3-p^2+p-1}=\frac{2}{p-1}+\frac{3p-1}{p^2+1}=2\cdot\frac{1}{p-1}+3\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+1}\div 3e^t+3\cos t-\sin t.$$

Отже,

$$f(t)=3e^t+3\cos t-\sin t.\bullet$$

Приклад 4. Знайти оригінал для зображення $F(p)=\dfrac{3p^2+4p-16}{(p^2+4p+8)^2}$.

Розв'язування.

Виділяємо повний квадрат у знаменнику

$$\frac{3p^2+4p-16}{(p^2+4p+8)^2}=\frac{3p^2+4p-16}{((p+2)^2+4)^2}$$

Оскільки $t\sin\omega t\div\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$, $t\cos\omega t\div\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$, а, за теоремою зміщення,

$te^{at}\sin\omega t\div\dfrac{2(p-a)\omega}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$, $te^{at}\cos\omega t\div\dfrac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$, то

$$\frac{3p^2+4p-16}{((p+2)^2+4)^2}=\frac{3((p^2+4p+4)-4)-8p-16}{((p+2)^2+2^2)^2}=\frac{3((p+2)^2-2^2)-8p-16}{((p+2)^2+2^2)^2}=$$

$$=3\cdot\frac{(p+2)^2-2^2}{((p+2)^2+2^2)^2}-2\cdot\frac{4(p+2)}{((p+2)^2+2^2)^2}\div 3te^{-2t}\cos 2t-2te^{-2t}\sin 2t.\bullet$$

Задачі для самостійного розв’язування

Знайти оригінал за заданим зображенням:

а) $F(p)=\dfrac{p^2+3p+4}{p(p-1)(p-2)}$;

б) $F(p)=\dfrac{1}{p^3-8}$;

в) $F(p)=\dfrac{6p+5}{(p+2)(p^2-2p+10)}$;

г) $F(p)=\dfrac{4p+6}{p^2(p-1)^2}$;

д) $F(p)=\dfrac{3p^2-1}{(p+1)^2(p^2+4)}$;

е) $F(p)=\dfrac{p+3}{p^3-4p^2+3p}$;

є) $F(p)=\dfrac{p}{p^4-1}$;

ж) $F(p)=\dfrac{3p^2+3p-13}{p^3+4p^2+13p}$;

з) $F(p)=\dfrac{1}{(p+2)^2(p-1)^3}$.

Відповіді: а) $2-8e^t+7e^{2t}$; б) $\dfrac{1}{12}(e^{2t}-e^{-t}\cos\sqrt{3}t-\sqrt{3}e^{-t}\sin\sqrt{3}t)$; в) $-\dfrac{7}{18}e^{-2t}+\dfrac{7}{18}e^t\cos 3t+\dfrac{87}{54}e^t\sin 3t$; г) $16+6t-16e^t+10te^t$; д) $-\dfrac{29}{25}e^{-t}+\dfrac{2}{5}te^{-t}+\dfrac{29}{25}\cos 2t+\dfrac{81}{50}\sin 2t$; е) $1-2e^t+e^{3t}$; є) $0{,}5(\operatorname{ch}t-\cos t)$; ж) $-1+4e^{-2t}\cos 3t-3e^{-2t}\sin 3t$; з) $\dfrac{1}{27}e^t(t-1)+\dfrac{1}{18}e^{-2t}(t^2+\dfrac{4}{3}t+\dfrac{2}{3})$.

II. Якщо задане зображення $F(p)$ можна зобразити у вигляді добутку двох зображень табличних оригіналів $F(p)=F_1(p)F_2(p)$, то можна скористатися теоремою множення Бореля: $F_1(p)F_2(p)\div\int\limits_0^t f_1(z)f_2(t-z)dz$.

У деяких випадках доцільно користуватися формулою Дюамеля:

$$pF_1(p)F_2(p)\div f_1(0)f_2(t)+\int\limits_0^t f_1'(z)f_2(t-z)dz.$$

Приклад 5. Знайти оригінал для зображення $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

Розв'язування.

Оскільки $\cos t \div \dfrac{p}{p^2+1}$, то за теоремою множення Бореля

$$\frac{p^2}{(p^2+1)^2}=\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\div\int_0^t\cos z\cos(t-z)dz=\frac{1}{2}\int_0^t(\cos t+\cos(2z-t))dz=$$

$$\frac{1}{2}\left(z\cos t+\frac{1}{2}\sin(2z-t)\right)\Bigg|_0^t=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$$

Отже

$$f(t)=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).\bullet$$

Приклад 6. Знайти оригінал для зображення $F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)^2}$.

Розв'язування.

Скористаємось формулою Дюамеля:

$$\frac{p^3}{(p^2+1)^2}=p\cdot\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\div\cos 0\cos t+\int_0^t(\cos z)'\cos(t-z)dz=$$

$$=\cos t-\int_0^t\sin z\cos(t-z)dz=\cos t-\frac{1}{2}\int_0^t(\sin t+\sin(2z-t))dz=$$

$$=\cos t-\frac{1}{2}\left(z\sin t-\frac{1}{2}\cos(2z-t)\right)\Bigg|_0^t=\cos t-\frac{1}{2}t\sin t.\bullet$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти оригінал за заданим зображенням:

а) $F(p)=\dfrac{9}{(p^2+9)^2}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$; в) $F(p)=\dfrac{p}{p^4-1}$;

г) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

Відповіді: а) $\dfrac{\sin 3t-3t\cos 3t}{6}$; б) $e^{-t}-(1+t)e^{-2t}$; в) $\dfrac{\mathrm{ch}t-\cos t}{2}$; г) $\dfrac{3\sin 3t-2\sin 2t}{5}$.

2.2. Формула Мелліна

Теорема 2.1. *Нехай функція* $F(p)$ *комплексної змінної* $p = s + i\sigma$ *задовольняє умови:*

- *функція* $F(p)$ *аналітична в області* $\operatorname{Re} p = s > s_0$*;*
- $F(p) \to 0$ *при* $|p| \to \infty$ *рівномірно за* $\arg p$ *(в області* $\operatorname{Re} p = s > s_0$*);*
- *для всіх комплексних чисел* p *таких, що* $\operatorname{Re} p = s > s_0$*, збігається інтеграл*

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(p)|dp, \quad s > s_0,$$

де інтеграл розуміється в сенсі головного значення.

Тоді функція $F(p)$ *при* $\operatorname{Re} p > s_0$ *є зображенням функції* $f(t)$ *дійсної змінної* $t > 0$, *що визначається формулою*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)dp, \tag{2.1}$$

де інтеграл береться вздовж довільної прямої $\operatorname{Re} p = s > s_0$ *і розуміється в сенсі головного значення, тобто*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\sigma \to \infty} \int_{s-i\sigma}^{s+i\sigma} e^{pt} F(p)dp.$$

Формулу (2.1) називають ***формулою Мелліна***, а інтеграл у правий частині формули (2.1) – ***інтегралом Мелліна.***

У більшості випадків невласний інтеграл у правій частині (2.1) можна обчислити за допомогою теорії лишків.

Нехай функція $F(p)$ визначена в області $\operatorname{Re} p > s_0$. Припустимо, що функцію $F(p)$ можна аналітично продовжити на всю комплексну площину, а її аналітичне продовження при $\operatorname{Re} p > s_0$ задовольняє умови леми Жордана [див.1, 2]. Тоді при $t > 0$ маємо

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} e^{pt} F(p)dp = 0,$$

де C_R – дуга кола $|p - s| = R,$ яка лежить у півплощині $\operatorname{Re} p < s$.

Приклад 1. Знайти оригінал для зображення $F(p)=\dfrac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p>0$.

Розв'язування.

Легко перевірити, що умови теореми 2.1 виконуються. Тоді оригіналом буде функція

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,dp,\ s>0.$$

Підінтегральна функція має один простий полюс в точці $p=0$. Тому

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{p=0}\frac{e^{pt}}{p}=\lim_{p\to 0}p\frac{e^{pt}}{p}=1,\ t\geq 0.\bullet$$

Приклад 2. Знайти оригінал для зображення $F(p)=\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$, $\operatorname{Re} p>0,\ \omega^2>0.$

Розв'язування.

Очевидно, що функція $F(p)$ задовольняє умови теореми 2.1. Аналітичне продовження функції $F(p)$ на всю комплексну площину задовольняє умови леми Жордана, оскільки $\lim\limits_{R\to+\infty}\max\limits_{|p|=R}|F(p)|=0.$

Функція $F(p)=\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$, як функція комплексної змінної p, має дві скінченні ізольовані особливі точки $p_1=i\omega$ та $p_2=-i\omega$, кожна з яких є простим полюсом. Тоді отримаємо:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{2}\operatorname{Res}\frac{e^{pt}\omega}{p^2+\omega^2}=\lim_{p\to i\omega}(p-i\omega)\frac{e^{pt}\omega}{p^2+\omega^2}+\lim_{p\to -i\omega}(p+i\omega)\frac{e^{pt}\omega}{p^2+\omega^2}=$$

$$=\frac{e^{i\omega t}\omega}{2i\omega}-\frac{e^{-i\omega t}\omega}{2i\omega}=\sin\omega t,\ t\geq 0.\bullet$$

Задачі для самостійного розв'язування

Знайти оригінали для заданих зображень використовуючи формулу Мелліна:

а) $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$; б) $F(p)=\dfrac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$; в) $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$.

Відповіді: а) $-\frac{1}{6}e^{t}+e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}+\frac{2}{3}e^{4t}$; б) $2e^{t}-4t-3$; в) $1-\cos t$.

2.3 Теореми про розклад

У багатьох випадках при знаходженні оригінала використовується розклад зображення (функції $F(p)$) в ряд, для членів якого відомі оригінали. Ці теореми є наслідками формули обернення Мелліна, якщо зображення є дробово-раціональними функціями, і називаються *теоремами про розклад*.

Теорема 2.2. (перша теорема про розклад).

Нехай зображення $F(p)$ розкладається в ряд Лорана за степенями p^{-k}:

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k p^{-k},$$

який збігається при $|p|\ge R$. Тоді оригіналом для функції $F(p)$ є функція

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k t^{k-1}}{(k-1)!}h(t), \tag{2.2}$$

де $h(t)$ – функція Хевісайда. При цьому оригінал є цілою функцією від t.

Доведення теореми 2.2 випливає з формули $\dfrac{t^n}{n!}\div\dfrac{1}{p^{n+1}}$.

Надалі множення на функцію Хевісайда $h(t)$ опускається.

Справедливе й обернене твердження: *якщо оригінал $f(t)$ є цілою функцією від t і зображується рядом $f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{c_k t^{k-1}}{(k-1)!}$, причому коефіцієнт зростання функції $f(t)$ дорівнює r, то відповідне зображення $F(p)$ можна подати у вигляді збіжного за степенями $\dfrac{1}{p}$ ряду при $|p|\ge r$.*

Зауваження 2.1. З першої теореми про розклад випливає, що у випадку зображення за Лапласом, яке розкладається в ряд за степенями $\dfrac{1}{p}$, його оригінал можна подати за допомогою ряду, який збігається для всіх t. Однак обернене твердження не є вірним, тобто, якщо оригінал подається у вигляді ряду, що збігається для всіх t, то відповідне його зображення за Лапласом не завжди розкладається в збіжний ряд за степенями $\frac{1}{p}$.

Приклад 1. Знайдемо оригінал для зображення $F(p)=\frac{1}{p-1}$.

Розв'язування.

Оскільки

$$F(p)=\frac{1}{p-1}=\frac{1}{p\left(1-\frac{1}{p}\right)}=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^k}\text{, при } |p|<1,$$

то згідно з формулою (2.2), знаходимо відповідний оригінал

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}=e^t. \bullet$$

Приклад 2. Знайти оригінал для зображення $F(p)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$.

Розв'язування.

Використовуючи розклад функції $\cos p$ в степеневий ряд знаходимо:

$$F(p)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!\,p^{2k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!\,p^{2k+1}}.$$

Отже, за формулою (2.2)

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}.$$

Отриманий ряд є розкладом функції $\cos t$ в ряд Маклорена, отже

$$f(t)=\cos t,\ t>0. \bullet$$

Приклад 3. Знайти оригінал зображення $F(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$.

Розв'язування.

Запишемо розклад функції $F(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$ в ряд Лорана за степенями p:

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2(1+\frac{1}{p^2})} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{p^2})} = \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-\ldots\right) = \frac{1}{p}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^5}-\ldots,$$

де $\left|\dfrac{1}{p^2}\right| < 1$, тобто $|p| > 1$.

Отже, $f(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} - \ldots,\ t > 0.$

Отриманий ряд є розкладом функції $\cos t$ в ряд Маклорена, отже

$$f(t) = \cos t,\ t > 0\,.●$$

Теорема 2.3. (друга теорема про розклад).

Нехай виконуються наступні умови:

1) *функція* $F(p)$ *визначена в деякій півплощині* $\operatorname{Re} p > s_0$ *та не має інших особливих точок крім полюсів;*
2) *функція* $F(p)$ *прямує рівномірно до нуля щодо* $\arg p$ *при* $|p| \to \infty$*;*
3) *для будь-якого* $s > s_0$ *абсолютно збігається невласний інтеграл*

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(p)|\,dp\,.$$

Тоді оригіналом для функції $F(p)$ *є функція*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p_k}\left(e^{pt}F(p)\right), \qquad (2.3)$$

де сума лишків обчислюється у всіх ізольованих особливих точках p_k *функції* $F(p)$ *за порядком не спадання їх модулів.*

Приклад 4. Знайти оригінал зображення $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

Розв'язування.

Функція $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$ має дві ізольовані особливі точки:

$p_1=1$ – полюс 2-го порядку, $p_2=-2$ – простий полюс.

Отже, згідно з формулою (2.3)

$$f(t)=\underset{p_1=1}{\mathrm{Res}}\left(\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}\right)+\underset{p_2=-2}{\mathrm{Res}}\left(\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{1!}\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\left((p-1)^2\cdot\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}\right)+\lim_{p\to-2}\left((p+2)\cdot\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}\right)=$$

$$=\lim_{p\to1}\left(\frac{e^{pt}}{(p+2)}\right)_p^{/}+\lim_{p\to-2}\left(\frac{e^{pt}}{(p-1)^2}\right)=\lim_{p\to1}\frac{te^{pt}(p+2)-e^{pt}}{(p+2)^2}+\frac{1}{9}e^{-2t}=$$

$$=\frac{1}{9}(3te^t-e^t+e^{-2t}).\bullet$$

У випадку, коли ізольованими особливими точками зображення вигляду $F(p)=\dfrac{P_n(p)}{Q_m(p)}$ є лише прості полюси p_k $(k=\overline{1,m})$, оригінал знаходять за формулою

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{P_n(p_k)}{Q'_m(p_k)}e^{p_kt}. \tag{2.4}$$

Приклад 5. Знайти оригінал зображення $F(p)=\dfrac{p-1}{(p+1)(p-2)}$.

Розв'язування.

Функція $F(p)$ має лише прості полюси $p_1=-1$, $p_2=2$.

Позначимо

$$P_1(p) = p-1,\ \ Q_2(p) = (p+1)(p-2) = p^2 - p - 2\,.$$

Тоді, враховуючи вигляд похідної $Q_2'(p) = 2p-1$, згідно з формулою (2.4) знаходимо оригінал шуканої функції

$$f(t) = \frac{P_1(-1)}{Q_2'(-1)}e^{-t} + \frac{P_1(2)}{Q_2'(2)}e^{2t} = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}. \bullet$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти оригінали для зображень використовуючи теореми розкладу:

а) $F(p) = \dfrac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$; б) $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$;

в) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^3(p^3+1)}$. г) $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+1)(p^2+4)}$;

д) $F(p) = \dfrac{1}{p(p^4+1)}$; ж) $F(p) = \dfrac{1}{(p^k+\omega^k)}$, k − ціле додатне число.

Відповіді: а) $-\dfrac{1}{6} + e^t - \dfrac{3}{2}e^{2t} + \dfrac{2}{3}e^{3t}$; б) $\dfrac{1}{54}e^t(3t^2+2t-2) + \dfrac{1}{27}e^{-2t}(2t+1)$;

в) $1-\cos t - 0{,}5t\sin t$; г) $\dfrac{1}{12}(3-4\cos t+\cos 2t)$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}t^{4k}}{(4k)!}$; ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}\omega^{(m-1)k}t^{mk}}{(mk)!}$.

3. Застосування операційного числення

3.1. Розв’язування лінійних диференціальних рівнянь операційним методом

Властивості перетворення Лапласа дають можливість знаходити розв’язки задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Операції над зображенням є значно простішими, ніж операції над шуканою функцією, оскільки диференціюванню відповідає множення на змінну p, а інтегруванню – ділення на p.

I. Розглянемо задачу Коші вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t), \tag{3.1}$$

де $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in \mathrm{R}$,

з початковими умовами

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \tag{3.2}$$

Якщо $f(t)$ − оригінал, то шуканий розв’язок $y(t)$ рівняння (3.1) також є оригіналом. Припустимо, що його зображення $Y(p)$.

За властивістю диференціювання оригіналу знайдемо зображення лівої та правої частин рівняння

$$y'(t) \div pY(p) - y(0);$$

$$y''(t) \div p^2 Y(p) - y(0)p - y'(0);$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)}(t) \div p^n Y(p) - y(0)p^{n-1} - y'(0)p^{n-2} - \ldots - y(0);$$

$$f(t) \div F(p).$$

Складемо операторне рівняння, яке є лінійним алгебраїчним рівнянням для зображення $Y(p)$. Визначивши вираз для $Y(p)$ і знайшовши його оригінал, отримаємо розв’язок $y(t)$ задачі Коші (3.1), (3.2).

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші

$$y''(t)-2y'(t)+y(t)=0, \quad y'(0)=1, \quad y(0)=0.$$

Розв'язування.

Нехай $y(t)\div Y(p)$. Використовуючи властивість диференціювання оригіналу та початкові умови задачі, отримаємо:

$$y'(t)\div pY(p)-y(0)=pY(p);$$

$$y''(t)\div p^2Y(p)-y(0)p-y'(0)=p^2Y(p)-1.$$

У результаті, після застосування перетворення Лапласа, задача Коші перепишеться у вигляді

$$Y(p)(p^2-2p+1)=1.$$

Звідси легко знаходимо

$$Y(p)=\frac{1}{p^2-2p+1}=\frac{1}{(p-1)^2}.$$

Невідому функцію $y(t),\ t\geq 0$ шукаємо за її перетворенням $Y(p)$, використовуючи таблицю зображень

$$y(t)=te^t,\ t\geq 0.\bullet$$

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші

$$y''(t)+4y(t)=\cos 2t, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=-1.$$

Розв'язування.

Нехай $y(t)\div Y(p)$. За властивістю диференціювання оригіналу отримаємо:

$$y'(t)\div pY(p)-y(0)=pY(p)-1;$$

$$y''(t)\div p^2Y(p)-y(0)p-y'(0)=p^2Y(p)-p+1.$$

Знайдемо зображення правої частини рівняння

$$\cos 2t\div\frac{p}{p^2+4}.$$

Складемо операторне рівняння

$$Y(p)(p^2+4)-p+1=\frac{p}{p^2+4}.$$

Розв'язавши отримане рівняння відносно $Y(p)$, маємо:

$$Y(p)=\frac{p}{(p^2+4)^2}+\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{p^2+4}.$$

Невідому функцію $y(t),\, t\ge 0$ шукаємо за її перетворенням $Y(p)$, використовуючи таблицю зображень,

$$y(t)=\frac{1}{4}t\sin 2t+\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t,\ t\ge 0.\bullet$$

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$y''(t)+y(t)=f(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0,$$

де $f(t)=\begin{cases}0, & 0<t<1,\\ 2, & t>1.\end{cases}$

Розв'язування.

Нехай $y(t)\div Y(p)$. Тоді

$$y''(t)\div p^2Y(p)-y(0)p-y'(0)=p^2Y(p).$$

Знайдемо зображення для правої частини рівняння

$$f(t)=2h(t-1)\div\frac{2}{p}e^{-p}.$$

Задача Коші перепишеться у вигляді

$$Y(p)=\frac{2}{p(p^2+1)}e^{-p}=\left(\frac{2}{p}-\frac{2p}{(p^2+1)}\right)e^{-p}.$$

Тоді $y(t)=(2-2\cos t)h(t-1),\ t\ge 0.\bullet$

II. При розв'язанні задачі Коші вигляду

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(t), \tag{3.3}$$

де $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n\in \mathrm{R}$,

з початковими умовами

$$y(0)=0,\ y'(0)=0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0)=0 \tag{3.4}$$

можна скористатися методом Дюамеля.

Розв'яжемо допоміжну задачу

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 1,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = 0.$$

За теоремою про диференціювання оригіналу знайдемо зображення лівої та правої частин рівняння

$$x'(t) \div pX(p),\ \ x''(t) \div p^2 X(p),\ \ldots\ x^{(n)}(t) \div p^n X(p),\ 1 \div \frac{1}{p}.$$

Тоді $X(p) = \dfrac{1}{p(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)}$. Звідки знайдемо $x(t),\ t \geq 0$.

Застосуємо тепер операційний метод до задачі (3.3), (3.4). Скориставшись властивостями перетворення Лапласа, отримаємо

$$Y(p)(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) = F(p).$$

Звідси

$$Y(p) = \frac{F(p)}{(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)} = pF(p)\frac{1}{p(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)} = pX(p)F(p).$$

Тоді розв'язок задачі Коші (3.3), (3.4) можна знайти скориставшись формулою Дюамеля

$$y(t) = \int_0^t f'(z)x(t-z)dz = \int_0^t f(t-z)x'(z)dz.$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші

$$y''(t) + y'(t) = \frac{1}{1+e^t},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$$

Розв'язування.

Розв'яжемо допоміжну задачу

$$x'' + x' = 1,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

Знайдемо зображення лівої та правої частин рівняння

$$x'(t) \div pX(p),\ \ x''(t) \div p^2 X(p),\ 1 \div \frac{1}{p}.$$

Тоді $X(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)} = \dfrac{-1}{p} + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p+1}$. Звідки знайдемо $x(t) = -1 + t + e^{-t},\ t \geq 0$.

Розв'язок задачі Коші знайдемо за формулою Дюамеля

$$y(t)=\int_0^t f(z)(-1+(t-z)+e^{-(t-z)})'dz=\int_0^t \frac{1-e^{-(t-z)}}{1+e^z}dz=\int_0^t\left(\frac{1}{e^z(1+e^z)}-\frac{e^{-t}}{1+e^z}\right)e^z dz=$$

$$=\int_0^t\left(\frac{1}{e^z}-\frac{1+e^{-t}}{1+e^z}\right)de^z=\left(\ln e^z-(1+e^{-t})\ln\left|e^z+1\right|\right)\Big|_0^t=t-(1+e^{-t})\ln\left|\frac{e^z+1}{2}\right|,\quad t\ge 0.\bullet$$

Задачі для самостійного розв’язування

Розв’язати наступні диференціальні рівняння при заданих початкових умовах:

1. $x'(t)+x(t)=e^{-t},\ x(0)=1;$
2. $x'(t)-x(t)=1,\ x(0)=-1;$
3. $x'(t)+2x(t)=\sin t,\ x(0)=0;$
4. $x''(t)=1,\ x(0)=0, x'(0)=1;$
5. $x''(t)+x'(t)=1,\ x(0)=0, x'(0)=1;$
6. $x''(t)+x(t)=0,\ x(0)=1, x'(0)=0;$
7. $x''(t)-2x'(t)=e^{2t},\ x(0)=x'(0)=0;$
8. $x''(t)+2x'(t)-3x(t)=e^{-t},\ x(0)=0, x'(0)=1;$
9. $x'''(t)+x'(t)=1,\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0;$
10. $x''(t)+x(t)=t\cos t,\quad x(0)=x'(0)=0;$
11. $x''(t)+2x'(t)+x(t)=\sin t,\ x(0)=0, x'(0)=-1;$
12. $x''(t)-2x'(t)+x(t)=1,\ x(0)=x'(0)=0;$
13. $x'''(t)+x'(t)=t,\ x(0)=-3, x'(0)=1, x''(0)=0;$
14. $x^{\mathrm{IV}}(t)-x''(t)=\cos t\ \ x(0)=0, x'(0)=-1, x''(0)=x'''(0)=0;$
15. $x''(t)+4x'(t)=t,\ x(0)=1, x'(0)=0;$
16. $x''(t)+2x'(t)+x(t)=f(t),\ f(t)=\begin{cases}1,\ 0<t<2,\\ 3,\ t>2,\end{cases}\quad x(0)=x'(0)=0;$
17. $x''(t)+x'(t)=f(t),\ f(t)=\begin{cases}0,\ 0<t<1,\\ 1,\ 1<t<3,\\ 0,\ t>3,\end{cases}\quad x(0)=0,\ x'(0)=2;$

18. $x''(t)+2x'(t)+x(t)=f(t),\ \ f(t)=\begin{cases} t,\ 0<t<1, \\ 2-t,\ 1<t<2, \\ 0,\ t>2, \end{cases}\ \ x(0)=0,\ x'(0)=1;$

Розв’язати диференціальні рівняння методом Дюамеля:

19. $y''(t)-y'(t)=\dfrac{1}{1+e^t},\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=0;$

20. $y''(t)+y(t)=\dfrac{1}{2+\cos t},\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=0;$

21. $y''(t)+y(t)=\dfrac{1}{1+\sin^2 t},\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=0;$

22. $y''(t)-y(t)=\operatorname{th}t,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=0.$

Відповіді:

1. $(t+1)e^{-t}$; 2. -1; 3. $\dfrac{1}{5}(e^{-2t}-\cos t+2\sin t)$; 4. $t+\dfrac{1}{2}t^2$; 5. t; 6. $\cos t$; 7. $\dfrac{1-e^{2t}+2te^{2t}}{4}$; 8. $\dfrac{1}{8}(e^t-e^{3t}-2e^{-t})$; 9. $t-\sin t$; 10. $\dfrac{1}{4}(t\cos t-\sin t+t^2\sin t)$; 11. $\dfrac{1}{2}(e^{-t}-te^{-t}-\cos t)$; 12. $\dfrac{1}{2}(1-e^t\cos t+e^t\sin t)$; 13. $\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{2}t^2+2t-4+e^{-t}$; 14. $\dfrac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch}t)-t-1$; 15. $\dfrac{1}{4}t+$ $+\cos 2t-\dfrac{1}{8}\sin 2t$; 16. $1-e^{-t}-te^{-t}+2(1-e^{-(t-2)}-(t-2)e^{-(t-2)})h(t-2)$; 17. $2-2e^{-t}+$ $+(t-2+e^{-(t-1)})h(t-1)-(t-4+e^{-(t-3)})h(t-3)$; 18. $t-2(t-1-\sin(t-1))h(t-1)+$ $+(t-2-\sin(t-2))h(t-2)$; 19. $e^t-1-(t+\ln 2-\ln(e^t+1))(e^t+1)$; 20. $\cos t\ln(2+\cos t)-$ $-\ln 3\cos t+\sin t\left(t-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}0{,}5t}{\sqrt{3}}\right)$ 21. $\cos t\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right|-\ln(2+2\sqrt{2})\right)$ $+\sin t\operatorname{arctg}\sin t$; 22. $\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t+2\operatorname{ch}t\left(\operatorname{arctg}e^t-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.2. Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь операційним методом

Задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами також можна розв'язувати за допомогою операційного методу. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + 3x(t) - 2t, & y(0) = 1; \\ x'(t) = y(t) - x(t) + e^t, & x(0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язування.

Припустимо, що функції $y(t),\ x(t)$ є оригіналами, тоді для них існують зображення: $y(t) \div Y(p), \quad x(t) \div X(p).$

За властивістю диференціювання оригіналу, маємо

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p) - 1,$$
$$x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p).$$

За властивістю лінійності отримуємо зображення правих частин рівнянь

$$y(t) + 3x(t) - 2t \div Y(p) + 3X(p) - \frac{2}{p^2},$$
$$y(t) - x(t) + e^t \div Y(p) - X(p) - \frac{1}{p-1}.$$

У результаті виписуємо систему у вигляді

$$\begin{cases} pY(p) - 1 = Y(p) + 3X(p) - \dfrac{2}{p^2}, \\ pX(p) = Y(p) - X(p) - \dfrac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Отже

$$\begin{cases} (p-1)Y(p) - 3X(p) = \dfrac{p^2 - 2}{p^2}, \\ Y(p) - (p+1)X(p) = \dfrac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -3 \\ 1 & -(p+1) \end{vmatrix} = 4 - p^2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \dfrac{p^2-2}{p^2} & -3 \\ \dfrac{1}{p-1} & -(p+1) \end{vmatrix} = \frac{-p^4+6p^2-2}{p^2(p-1)}, \quad \Rightarrow \quad Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{p^4-6p^2+2}{p^2(p-1)(p^2-4)},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{p^2-2}{p^2} \\ 1 & \dfrac{1}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{2}{p^2}, \qquad X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-2}{p^2(p^2-4)}.$$

Відновлюємо оригінали за зображеннями

$$Y(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+2} \div \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + e^t - \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-2t},$$

$$X(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+2} \div \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t}.$$

Отже, розв’язком системи буде

$$\begin{matrix} y(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t + e^t - \dfrac{3}{8}e^{2t} - \dfrac{1}{8}e^{-2t}, \\ x(t) = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{8}e^{2t} + \dfrac{1}{8}e^{-2t}, \end{matrix} \qquad t \ge 0. \bullet$$

Приклад 2. Розв’язати задачу Коші

$$\begin{cases} x''(t) + x'(t) + y''(t) - y(t) = e^t, & y'(0) = y(0) = 0; \\ x'(t) + 2x(t) - y'(t) + y(t) = e^{-t}, & x'(0) = 1,\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Розв’язування.

Нехай функції $y(t),\ x(t)$ є оригіналами, тоді

$$\begin{aligned} &y(t) \div Y(p), && x(t) \div X(p), \\ &y'(t) \div pY(p), && x'(t) \div pX(p), \\ &y''(t) \div p^2Y(p), && x''(t) \div p^2X(p) - 1. \end{aligned}$$

За властивістю лінійності отримуємо зображення правих частин рівнянь.

Враховуючи, що $e^t \div \dfrac{1}{p-1},\ \ e^{-t} \div \dfrac{1}{p+1}$, запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} p^2X(p)+pX(p)+p^2Y(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p-1}+1, \\ pX(p)+2X(p)-pY(p)+Y(p)=\dfrac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} X(p)=\dfrac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2}=\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{(p-1)}+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(p+1)^2}-\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{(p+1)}, \\ Y(p)=\dfrac{3p}{2(p^2-1)^2}. \end{cases}$$

Відновимо оригінали. Оскільки $\mathrm{sh}t \div \dfrac{1}{p^2-1}$ та $e^{-t}\div\dfrac{1}{p+1}$, то за теоремою про диференціювання зображення, маємо

$$t\mathrm{sh}t \div \left(\frac{1}{p^2-1}\right)'=-\frac{2p}{(p^2-1)^2} \text{ та } te^{-t}\div\left(\frac{1}{p+1}\right)'=-\frac{1}{(p+1)^2},$$

Отже, розв'язком системи буде

$$\begin{aligned} y(t)&=\frac{3}{4}t\mathrm{sh}t, \\ x(t)&=\frac{1}{4}\mathrm{sh}t+\frac{3}{4}te^{-t}, \end{aligned} \quad t\ge 0. \bullet$$

Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати задачі Коші для систем диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} y'=4x-3y, & y(0)=1, \\ x'=3x+4y, & x(0)=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y'=x+1, & y(0)=0, \\ x'=-y+2, & x(0)=-1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y'=x+y, & y(0)=2, \\ x'=-x+3+1, & x(0)=1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x'+y'-y=e^t, & y(0)=0, \\ 2x'+y'+2y=\cos t, & x(0)=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x''-x'+9x-y''-y'-3y=0, & y'(0)=y(0)=0; \\ 2x''+x'+7x-y''+y'-5y=0, & x'(0)=x(0)=1. \end{cases}$

е) $\begin{cases} x''+2x+4y=0{,}5\sin 2t, & y'(0)=1,\ y(0)=0, \\ y''-3y-x=-t, & x'(0)=x(0)=0; \end{cases}$

є) $\begin{cases} x' + 2x + y = \sin t, & y(0) = 1, \\ y' + 4x - 2y = \cos t, & x(0) = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x'' - x + y + z = 0, & x'(0) = 0, \quad x(0) = 1, \\ y'' + x - y + z = 0, & y'(0) = y(0) = 0, \\ z'' + x + y - z = 0, & z'(0) = z(0) = 0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x' + y - z = 0, & x(0) = 0, \\ y' - z = e^t, & y(0) = 0{,}5, \\ z' + x - z = 0, & z(0) = 0. \end{cases}$

Відповіді:

а) $\begin{cases} x = \dfrac{6}{5}e^{5t} - \dfrac{1}{5}e^{-5t}, \\ y = \dfrac{3}{5}e^{5t} + \dfrac{2}{5}e^{-5t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2\sin t - 1, \\ y = 2 - 2\cos t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \dfrac{15}{8}e^{2t} - \dfrac{9}{8}e^{-2t} + \dfrac{1}{4}, \\ y = \dfrac{15}{8}e^{2t} + \dfrac{3}{8}e^{-2t} - \dfrac{1}{4}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{11}{34}e^{4t} + e^t - \dfrac{3}{17}\cos t + \dfrac{5}{17}\sin t, \\ y = \dfrac{22}{51}e^{4t} - \dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{4}{17}\cos t - \dfrac{1}{17}\sin t; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(e^t + 2\cos 2t + \sin 2t), \\ y = \dfrac{1}{3}(2e^t - 2\cos 2t - \sin 2t); \end{cases}$

е) $\begin{cases} x = -2t - \dfrac{7}{36}\sin 2t + \dfrac{28}{9}\sin t - \dfrac{13\sqrt{2}}{36}\operatorname{sh}\sqrt{2}t, \\ y = t + \dfrac{1}{36}\sin 2t - \dfrac{7}{9}\sin t + \dfrac{13\sqrt{2}}{36}\operatorname{sh}\sqrt{2}t; \end{cases}$ є) $\begin{cases} x = 2\sin t - 3t, \\ y = 6t + 3 - 2\cos t - 3\sin t; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\cos t + \dfrac{2}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t, \\ y = z = \dfrac{1}{3}\cos t - \dfrac{1}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x = -0{,}5(e^{-t} - \cos t + 2\sin t), \\ y = 0{,}5(e^t - 1{,}5e^{-t} + 1{,}5\cos t - 0{,}5\sin t), \\ z = 0{,}5(e^t - 0{,}5e^{-t} - 0{,}5\cos t - 1{,}5\sin t). \end{cases}$

3.3 Розв’язування інтегральних рівнянь операційним методом

Рівняння вигляду

$$ay(t) = f(t) + \lambda\int_0^t k(t,z)y(z)dz, \tag{3.5}$$

де $y(t)$ − невідома функція, $f(t)$ та $k(t,z)$ − задані функції, a та λ − сталі, називають *інтегральним рівнянням Вольтерри*. При цьому функцію $k(t,z)$ називають *ядром* інтегрального рівняння.

Інтегральні рівняння Вольтерри застосовуються при вивченні властивостей в'язко-пружних матеріалів, в демографії, страховій математиці та ін.

Якщо $a = 0$, то рівняння (3.5) називають рівнянням Вольтерри 1-го роду, якщо ж $a \neq 0$, то рівняння (3.5) − 2-го роду.

Якщо ядро таке, що $k(t,z) = k(t-z)$, то рівняння

$$ay(t) = f(t) + \lambda\int_0^t k(t-z)y(z)dz$$

називають *інтегральним рівнянням типу згортки* і його розв’язки можна знайти операційним методом аналогічно описаному для розв’язування задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Припустимо, що для функцій $y(t)$, $f(t)$ та $k(t)$ виконуються умови I−III існування зображення за Лапласом. Тоді

$$y(t) \div Y(p) = \int_0^\infty e^{-pt}y(t)dt,$$

$$k(t) \div K(p) = \int_0^\infty e^{-pt}k(t)dt,$$

$$f(t) \div F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt.$$

Якщо інтеграл $\int_0^\infty e^{-pt}(k(t) * y(t))dt = \int_0^\infty e^{-pt}\int_0^t k(t-z)y(z)dzdt$ абсолютно збіжний, то за теоремою множення Бореля маємо

$$k(t) * y(t) = \int_0^t k(t-z)y(z)dz \to K(p)\cdot Y(p).$$

У результаті інтегральне рівняння набуває вигляду лінійного щодо невідомої функції $Y(p)$ рівняння:

$$aY(p) = F(p) + \lambda K(p)Y(p).$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$Y(p) = \frac{F(p)}{a - \lambda K(p)}.$$

Далі знаходимо оригінал за цим зображенням.

Приклад 1. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду

$$y(t) = \text{sh}3t + 2\int_0^t e^{t-z} y(z)dz, \quad t \geq 0.$$

Розв'язування.

Для розв'язання цього рівняння застосуємо перетворення Лапласа. Нехай $y(t) \div Y(p)$. Для першого доданка у правій частині маємо $\text{sh}3t \div \dfrac{3}{p^2 - 9}$. Другий доданок є згорткою функцій $y(t)$ та e^t. Враховуючи те, що $e^t \div \dfrac{1}{p-1}$, за теоремою про згортку функцій отримаємо

$$e^t * y(t) = \int_0^t e^{t-z} y(z)dz \div Y(p) \cdot \frac{1}{p-1}.$$

У результаті інтегральне рівняння перепишемо у вигляді

$$Y(p) = \frac{3}{p^2 - 9} + 2Y(p) \cdot \frac{1}{p-1}.$$

З останньої рівності знаходимо

$$Y(p) = \frac{3(p-1)}{(p^2 - 9)(p-3)} = \frac{3(p-1)}{(p+3)(p-3)^2}.$$

Знайдемо оригінал

$$Y(p) = \frac{3(p-1)}{(p+3)(p-3)^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p-3} + \frac{1}{(p-3)^2} \div -\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{3t} + te^{3t}.$$

Остаточно маємо розв'язок інтегрального рівняння

$$y(t) = \frac{2}{3}\text{sh}3t + te^{3t}, \quad t \geq 0. \bullet$$

Приклад 2. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерри 1-го роду

$$1-\cos t=\int_0^t \operatorname{sh}(t-z)y(z)dz,\quad t\ge 0.$$

Розв'язування.

Перейдемо до зображення за Лапласом

$$y(t)\div Y(p),$$

$$1-\cos t\div\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p(p^2+1)},$$

$$\int_0^t \operatorname{sh}(t-z)y(z)dz=\operatorname{sh}t*y(t)\div\frac{1}{p^2-1}\cdot Y(p).$$

Тоді рівняння набуде вигляду

$$\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p^2-1}Y(p).$$

Звідси

$$Y(p)=\frac{p^2-1}{p(p^2+1)}=\frac{2p}{p^2+1}-\frac{1}{p}.$$

Перейдемо до оригіналів та отримаємо розв'язок інтегрального рівняння

$$y(t)=2\cos t-1,\quad t\ge 0.\bullet$$

Приклад 3. Розв'язати інтегро-диференціальне рівняння

$$y'(t)=\cos t+\int_0^t (t-z)y(z)dz,\quad t\ge 0,$$

що задовольняє початкову умову $y(0)=1$.

Розв'язування.

Застосуємо операційний метод. Нехай

$$y(t)\div Y(p),$$

$$y'(t)\div pY(p)-y(0)=pY(p)-1,$$

$$\cos t\div\frac{p}{p^2+1},$$

$$\int_0^t (t-z)y(z)dz=t*y(t)\div\frac{1}{p^2}\cdot Y(p).$$

Тоді рівняння перепишемо у вигляді

$$pY(p)-1=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}\cdot Y(p).$$

Розв’яжемо операторне рівняння:

$$Y(p)=\frac{p^2}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Знайдемо оригінал за отриманим зображенням

$$Y(p)=\frac{p^2}{(p-1)(p^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}\right)\div\frac{1}{2}(e^t+\cos t+\sin t).$$

Отже

$$y(t)=\frac{1}{2}(e^t+\cos t+\sin t),\quad t\geq 0.\bullet$$

Задачі для самостійного розв’язування

1. Розв’язати інтегральні рівняння:

а) $\sin t=\int\limits_0^t \cos(t-z)y(z)dz,\quad t\geq 0;$

б) $t^3=\int\limits_0^t (t-z)^2 y(z)dz,\quad t\geq 0;$

в) $y(t)=\cos 3t+\int\limits_0^t e^{t-z}y(z)dz,\quad t\geq 0;$

г) $y(t)=t+2\int\limits_0^t \cos(t-z)y(z)dz,\quad t\geq 0;$

д) $y(t)=\sin 2t-\frac{8}{3}\int\limits_0^t \mathrm{sh}3(z-t)y(z)dz,\quad t\geq 0.$

2. Розв’язати системи інтегральних рівнянь ($t\geq 0$):

а) $\begin{cases} x(t)=t+\int\limits_0^t y(z)dz, \\ y(t)=1+\int\limits_0^t x(z)dz; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x(t)=2+\int\limits_0^t y(\tau)d\tau, \\ y(t)=9t-t^2-t^4+\int\limits_0^t z(\tau)d\tau; \\ z(t)=15+\int\limits_0^t x(\tau)d\tau. \end{cases}$

3. Розв’язати інтегро-диференціальні рівняння, що задовольняють задані початкові умови:

а) $y'(t)+\int\limits_0^t (t-z)y(z)dz=\cos t,\quad y(0)=1;$

б) $y'(t)-y(t)+\int\limits_0^t \sin(t-z)y(z)dz=1-\sin t,\quad y(0)=0;$

в) $y'(t)=2\int\limits_0^t e^{t-z}y(z)dz,\quad y(0)=1.$

Відповіді: 1. а) 1; б) 3; в) $\dfrac{2e^{2t}+11\cos 3t+3\sin 3t}{13}$; г) $2e^t(t-1)+t+2$;

д) $\dfrac{13\sin 2t-16\operatorname{sh}t}{15}$; 2. а) $\begin{cases} x=2\operatorname{sh}t, \\ y=2\operatorname{ch}t-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x(t)=2(1+6t^2), \\ y(t)=24t, \\ z(t)=15+2t(1+2t^2); \end{cases}$

3. а) $y=\dfrac{1}{2}(\cos t+\sin t+e^t)$; б) $y=t$; в) $y=\dfrac{1}{3}(e^{2t}+2e^{-t})$.

3.4. Розв'язування задач математичної фізики операційним методом

Перетворення Лапласа можна застосувати до розв'язування нестаціонарних рівнянь математичної фізики (хвильового та теплопровідності).

Загальну схему застосування операційного методу для задач математичної фізики можна задати такими кроками:

– залежно від типу задачі, кількості змінних та області, в якій задачу поставлено, вибираємо змінну, за якою будемо проводити перетворення Лапласа;

– за його допомогою перетворюємо задачу так, щоб виключити диференціювання за однією зі змінних та отримати більш просту задачу відносно перетвореної функції;

– розв'язуємо перетворену задачу (за потреби інтегральне перетворення застосовують повторно, послідовно виключаючи диференціальні операції за декількома змінними);

– за допомогою оберненого перетворення знаходимо розв'язок вихідної задачі.

Приклад 1. Розв'язати задачу про коливання тонкої однорідної струни довжини l із жорстко закріпленими кінцями, якщо її форму в початковий момент часу задано формулою $A\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$.

Розв'язування.

Задача зводиться до такої початково-крайової задачі для одновимірного хвильового рівняння:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = A\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \ge 0.$$

Скористаємось перетворенням Лапласа за змінною t. Нехай

$$u(x,t) \div \int_0^\infty e^{-pt} u(x,t)\,dt = U(x, p),$$

тоді

$$u_{xx}(x,t) \div \int_0^{\infty} e^{-pt} u_{xx}(x,t)dt = U_{xx}(x,p),$$

і за теоремою про диференціювання оригіналу маємо

$$u_{tt}(x,t) \div p^2U(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) = p^2U(x,p) - Ap\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Отже початково-крайова задача зводиться до задачі

$$U_{xx} - \left(\frac{p}{a}\right)^2 U = -\frac{Ap}{a^2}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad 0 < x < l,$$

$$U(0,p) = U(l,p) = 0.$$

В отриманому рівнянні присутня похідна лише за змінною x, тобто після перетворення Лапласа за t початково-крайова задача для рівняння з частинними похідними зводиться до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.

Розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді суми загального розв'язку однорідного та частинного розв'язку неоднорідного рівняння (див. [3])

$$U(x,p) = U_{од}(x,p) + U_{ч.н}(x,p).$$

1. Розглянемо однорідне рівняння

$$U_{xx} - \left(\frac{p}{a}\right)^2 U = 0,$$

тоді його характеристичне рівняння $k^2 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 = 0$ має корені $k = \pm\frac{p}{a}$ і загальний розв'язок визначається формулою

$$U_{од}(x,p) = C_1\cos\left(\frac{px}{a}\right) + C_2\sin\left(\frac{px}{a}\right),$$

де $C_1,\ C_2$ – довільні сталі.

2. Враховуючи вигляд правої частини диференціального рівняння, шукаємо частинний розв'язок $U_{ч.н}(x,p)$ у вигляді

$$U_{ч.н}(x,p) = C_3\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + C_4\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right),$$

і після підстановки цієї функції у рівняння отримаємо

$$C_4 = \frac{Ap}{p^2 + \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$U(x, p) = C_1 \cos\left(\frac{px}{a}\right) + C_2 \sin\left(\frac{px}{a}\right) + \frac{Ap}{p^2 + \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

З умов $U(0, p) = U(l, p) = 0$ випливає, що $C_1 = 0,\ C_2 = 0$, й остаточно

$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Для відшукання невідомої функції $u(x,t)$ за її перетворенням Лапласа $U(x, p)$ скористаємось тим, що

$$\cos\omega t \div \frac{p}{p^2 + \omega^2} \text{ (таблиця 4.1).}$$

Отже, при $\omega = \frac{\pi a}{l}$ розв'язком початково-крайової задачі є функція

$$u(x,t) = A\cos\left(\frac{a\pi t}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0. \bullet$$

Приклад 2. Розглянемо задачу про вільні коливання тонкої однорідної струни довжини l, якщо в початковий момент часу вона перебувала у стані спокою, лівий кінець жорстко закріплено, а до правого вільного кінця прикладено силу $A\sin\omega t$, напрямлену вздовж осі струни.

Розв'язування.

Задача зводиться до такої початково-крайової задачі:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = \frac{A}{E}\sin\omega t, \quad t \ge 0,$$

де E − модуль пружності.

Скористаємось перетворенням Лапласа за змінною t. Нехай

$$u(x,t) \div U(x,p),$$

$$u_{xx}(x,t) \div U_{xx}(x,p),$$

$$u_{tt}(x,t) \div p^2U(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) = p^2U(x,p),$$

$$u(0,t) = 0 \div U(0,p) = 0,$$

$$u_x(l,t) = \frac{A}{E}\sin\omega t \div U_x(l,p) = \frac{A}{E}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

У результаті задана початково-крайова задача набуває вигляду такої крайової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$U_{xx} - \left(\frac{p}{a}\right)^2 U = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$U(0,p) = 0, \qquad U_x(l,p) = \frac{A}{E}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Розв’язуючи це рівняння, знаходимо

$$U(x,p) = C_1\operatorname{ch}\frac{p}{a}x + C_2\operatorname{sh}\frac{p}{a}x,$$

а з крайових умов отримуємо

$$C_1 = 0,$$

$$C_2 = \frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{1}{p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{p}{a}l}.$$

Отже,

$$U(x,p) = \frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{p}{a}x}{p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{p}{a}l}.$$

Для обчислення оригіналу скористаємось другою теоремою про розклад.

Розв’яжемо рівняння $p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{p}{a}l = p(p^2+\omega^2)\cos\left(i\frac{pl}{a}\right) = 0$ та отримаємо особливі точки функції $U(x,p)$. Це прості полюси:

$$p=0,\quad p=\pm i\omega,\quad p=\pm i\omega_n,\ \text{де}\ \omega_n=\frac{\pi a(2n-1)}{2l}\ \ (n=1,2,\ldots).$$

Тут не розглядатимемо випадок резонансу, тобто $\omega\neq\omega_n$, $n=1,2,\ldots$.

Тоді

$$u(x,t)=\underset{p=0}{res}[e^{pt}U(x,p)]+\underset{p=\omega}{res}[e^{pt}U(x,p)]+\sum_{n=1}^{\infty}\underset{p=\omega_n}{res}[e^{pt}U(x,p)].$$

Для обчислення лишків скористаємось формулою $\underset{z=z_0}{res}\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right]=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, якщо $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, а z_0 – простий полюс.

Тоді

$$\varphi(p)=\operatorname{sh}\frac{p}{a}x,$$

$$\psi'(p)=\left(p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{p}{a}l\right)'=(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{p}{a}l+2p^2\operatorname{ch}\frac{p}{a}l+\frac{l}{a}p(p^2+\omega^2)\operatorname{sh}\frac{p}{a}l.$$

Отже,

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\left[\left(\frac{\varphi(p)}{\psi'(p)}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=0}+2\operatorname{Re}\left(\left(\frac{\varphi(p)}{\psi'(p)}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=i\omega}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi(p)}{\psi'(p)}e^{pt}\right)\Bigg|_{p=i\omega_n}\right)\right]=$$

$$=\frac{Aa\omega}{E}2\operatorname{Re}\left(-\frac{i\sin\frac{\omega}{a}x}{2\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}}e^{i\omega t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\omega_n t}\sin\frac{\omega_n}{a}x}{i\frac{\omega_n l}{a}(\omega^2-\omega_n^2)\sin\frac{\omega_n l}{a}}\right).$$

Остаточно маємо

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\left(\frac{\sin\omega t\sin\frac{\omega}{a}x}{\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}}+\frac{2a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\omega_n t\sin\frac{\omega_n}{a}x}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}\right),$$

де $\omega_n=\frac{\pi a(2n-1)}{2l}$ $(n=1,2,\ldots)$.●

Приклад 3. Розв'язати крайову задачу

$$u_t = u_{xx} + a^2 u + f(x), \quad 0 < x < \infty, \; 0 < t < \infty;$$

$$u(0,t) = 0; \quad u_x(0,t) = 0.$$

Розв'язування.

Для цієї задачі за змінну, за якою проводиться інтегральне перетворення Лапласа, вибираємо x. Тоді

$$u(x,t) \div U(p,t),$$

$$u_t(x,t) \div U_t(p,t),$$

$$u_{xx}(x,t) \div p^2 U(p,t) - pu(0,t) - u_x(0,t) = p^2 U(p,t),$$

$$f(x) \div \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx = F(p).$$

Задача набуде вигляду

$$U_t - (p^2 + a^2)U = F(p).$$

Отримане рівняння є звичайним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку щодо незалежної змінної t. Загальний розв'язок цього рівняння можна отримати методом Бернуллі:

$$U(p,t) = Ce^{(p^2+a^2)t} - \frac{F(p)}{p^2 + a^2}.$$

Оскільки розв'язок має бути обмеженим ($\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) < \infty$), то $C = 0$. Тоді

$$U(p,t) = -\frac{F(p)}{p^2 + a^2}.$$

Знайдемо оригінал за цим зображенням. Оскільки

$$\sin ax \div \frac{a}{p^2 + a^2}; \quad f(x) \div F(p),$$

то за теоремою множення Бореля

$$u(x,t) = -\frac{1}{a}\int_0^x f(x-\xi) \sin a\xi d\xi. \bullet$$

Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати задачі, використовуючи перетворення Лапласа.

1. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0,$

$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = B\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad 0 \le x \le l,$ n − натуральне число,

$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \ge 0.$

2. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0,$

$u(x,0) = A\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l,$ n − натуральне число,

$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad t \ge 0.$

3. $u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \;\; t > 0,$

$u(x,0) = \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{3x}{2}, \quad 0 \le x \le \pi,$

$u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0.$

4. $u_t = u_{xx} + u + x, \quad 0 < x < \infty, \;\; 0 < t < \infty;$

$u(0,t) = t, \quad u_x(0,t) = 0, \quad t \ge 0.$

Відповіді:

1. $u(x,t) = \frac{Bl}{a\pi n}\sin\left(\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right);$ 2. $u(x,t) = A\cos\left(\frac{an\pi t}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right);$

3. $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin\frac{3x}{2} + e^{-t}\sin\frac{x}{2};$ 4. $u(x,t) = x + t\cos x - \sin x - \frac{1}{2}x\sin x.$

4. Перетворення Фур'є

Нехай функція $f(x)$ визначена на нескінченному інтервалі та абсолютно інтегровна на цьому інтервалі, тобто існує збіжний невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = M < \infty$.

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам Діріхле [3] на будь-якому скінченому проміжку $[-l, l]$, то її можна зобразити у вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\omega(t - x) dt. \tag{4.1}$$

Формула (4.1) називається *інтегральною формулою Фур'є*, а інтеграл у правій частині формули називається *інтегралом Фур'є* для функції $f(x)$.

Ця інтегральна формула Фур'є отримується з ряду Фур'є для функції $f(x)$ на проміжку $[-l, l]$ при $l \to \infty$.

Формула Фур'є (4.1) має місце в точках неперервності функції $f(x)$, а в точках розриву x_0 даної функції інтеграл Фур'є дорівнює середньому арифметичному її односторонніх границь:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\omega(t - x_0) dt = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Формулу (4.1) можна переписати також у вигляді однократного інтеграла:

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} \left(A(\omega) \cos\omega x + B(\omega) \sin\omega x \right) d\omega, \tag{4.2}$$

де

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\omega t dt, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin\omega t dt. \tag{4.3}$$

Формула (4.2) є аналогом ряду Фур'є. В обох випадках функція $f(x)$ розкладається на суму гармонічних складових. Проте, на відміну від ряду Фур'є, який дає розклад функції на гармонічні коливання з дискретною частотою $\omega = \dfrac{n\pi}{l}$,

$n=1,2,3,\ldots$, інтеграл Фур'є дає розклад функції на гармонічні коливання з неперервною частотою ω, яка змінюється від 0 до $+\infty$.

Для парної та непарної функції інтеграл Фур'є спрощується.

Якщо функція $f(x)$ − **парна**, тобто $f(-x)=f(x)$, формула Фур'є (4.2) набуває вигляду:

$$f(x)=\int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x d\omega, \tag{4.4}$$

де

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt.$$

Якщо функція $f(x)$ − **непарна**, тобто $f(-x)=-f(x)$, формула Фур'є (4.2) набуває вигляду:

$$f(x)=\int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x d\omega, \tag{4.5}$$

де

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt.$$

Зауваження 4.1. Якщо функція $f(x)$ задана лише на проміжку $(0,+\infty)$, то її можна довільним чином (парним або непарним) продовжити на проміжок $(-\infty,0)$ та потім зобразити її різними інтегралами Фур'є; зокрема інтегралом (4.4) за умови парного продовження або інтегралом (4.5) за умови непарного продовження цієї функції на інтервал $(-\infty,0)$.

Формули (4.4) і (4.5) можна зобразити в симетричній формі запису, якщо покласти

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tilde{A}(\omega), \qquad B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tilde{B}(\omega).$$

Тоді у випадку парної функції формула (4.4) набуває вигляду:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\tilde{A}(\omega)\cos\omega x d\omega, \tag{4.6}$$

де

$$\widetilde{A}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt\,, \tag{4.7}$$

у випадку непарної функції формула (4.5) набуває вигляду:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\widetilde{B}(\omega)\sin\omega x d\omega\,, \tag{4.8}$$

де

$$\widetilde{B}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt\,. \tag{4.9}$$

Функції $\widetilde{A}(\omega)$ і $\widetilde{B}(\omega)$, які визначаються формулами (4.7) і (4.9), називаються відповідно *косинус-перетворенням* і *синус-перетворенням Фур'є* для функції $f(x)$, а функція $f(x)$, яка визначається формулами (4.6) і (4.8), називається *оберненим косинус-перетворенням* і *синус-перетворенням Фур'є* для функцій $\widetilde{A}(\omega)$ та $\widetilde{B}(\omega)$ відповідно.

За допомогою формул Ейлера з формули (4.2) можна отримати *комплексну форму інтеграла Фур'є*:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\,, \tag{4.10}$$

або коротко

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)e^{i\omega x}d\omega\,, \tag{4.11}$$

де

$$C(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\,.$$

Інтеграл Фур'є у комплексній формі можна також подати в симетричній формі запису, якщо покласти

$$\widetilde{C}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}C(\omega)\,.$$

Тоді формули (4.11) набувають вигляду:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \tag{4.12}$$

де

$$\tilde{C}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \tag{4.13}$$

Функція $\tilde{C}(\omega)$, визначена формулою (4.13), називається *перетворення Фур'є у комплексній формі* для функції $f(x)$. У свою чергу, функція $f(x)$, визначена формулою (4.12), називається *оберненим перетворенням Фур'є* для функції $\tilde{C}(\omega)$.

В формулі (4.11) число ω називається *хвильовим числом*, яке приймає всі значення від $-\infty$ до $+\infty$, і спектр хвильових чисел називається *неперервним спектром*.

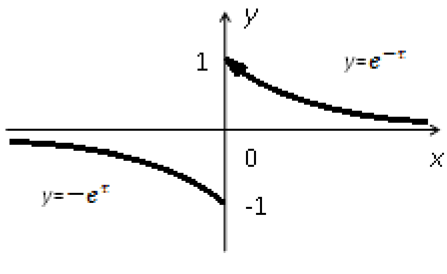
Функції $\tilde{A}(\omega)$, $\tilde{B}(\omega)$, $\tilde{C}(\omega)$ називають також *спектральною щільністю* (або *спектральною характеристикою*) функції $f(x)$, модуль $\left|\tilde{C}(\omega)\right|$ − *амплітудним спектром* (або *амплітудно-частотною характеристикою*) функції $f(x)$, а її аргумент $\arg \tilde{C}(\omega)$ − *фазовим спектром* функції $f(x)$.

Зв'язок між функціями $\tilde{A}(\omega)$, $\tilde{B}(\omega)$, $\tilde{C}(\omega)$ визначається формулою

$$\tilde{C}(\omega) = \pi(\tilde{A}(\omega) + i\tilde{B}(\omega)).$$

Приклад 1. Зобразити інтегралом Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} -e^{x}, & \text{при } x < 0, \\ e^{-x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$



Розв'язування.

Функція задовольняє всім умовам, при яких її можна зобразити інтегралом Фур'є. Дійсно, функція задана на всій числовій осі і кусково-монотонна на будь-якому скінченному відрізку $[-l, l]$, оскільки складається з двох неперервних функцій і має одну точку розриву $x = 0$.

Крім того, функція абсолютно інтегрована на проміжку $(-\infty,+\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx=2<\infty.$$

Функція непарна, тому застосуємо формулу (4.5):

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\sin\omega t dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

(даний інтеграл обчислюється окремо за формулою інтегрування частинами).

Тоді

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega}{1+\omega^2}\cdot\sin\omega x d\omega,\quad x\neq 0.$$

Тут $x\neq 0$, оскільки в точці розриву $x=0$ значення функції $f(0)=1$, а отриманий інтеграл Фур'є дорівнює середньому арифметичному її односторонніх границь.

Тобто,

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega}{1+\omega^2}\cdot\sin\omega x d\omega=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0,\quad x=0.\bullet$$

Зауваження 4.2. Відмітимо, що при $x=1$

$$f(1)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\cdot\sin\omega}{1+\omega^2}d\omega.$$

З іншого боку, значення функції $f(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

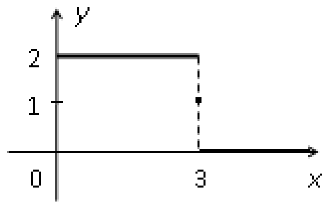
Таким чином,

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\cdot\sin\omega}{1+\omega^2}d\omega=f(1)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2e}.$$

Іншими словами, за допомогою подання функції інтегралом Фур'є, іноді можна обчислювати значення невласних інтегралів.

Приклад 2. Зобразити інтегралом Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}2, \text{ при } 0<x<3,\\ 1, \text{ при } x=3,\\ 0, \text{ при } x>3.\end{cases}$$



Розв'язування.

Функція $f(x)$ визначена тільки на інтервалі $(0,+\infty)$. Тому її можна по-різному продовжити на інтервал $(-\infty,0]$ і тому подати різними інтегралами Фур'є.

За умови парного продовження функції на інтервал $(-\infty,0]$, використовуючи формулу (4.4), отримаємо:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt=\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{3}2\cdot\cos\omega t dt+\int_{3}^{+\infty}0\cdot\cos\omega t dt\right)=\frac{4}{\pi}\frac{\sin 3\omega}{\omega}.$$

Тоді

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega x d\omega=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin 3\omega\cdot\cos\omega x}{\omega}d\omega.$$

За непарного продовження функції на інтервал $(-\infty,0]$, використовуючи формулу (4.5), отримаємо:

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt=\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{3}2\cdot\sin\omega t dt+\int_{3}^{+\infty}0\cdot\sin\omega t dt\right)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1-\cos 3\omega}{\omega}.$$

Тоді

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega x d\omega=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{(1-\cos 3\omega)\sin\omega x}{\omega}d\omega.$$

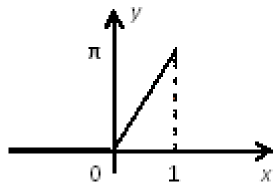
Обидва отримані інтеграли Фур'є зображають задану функцію в усій області її визначення, включаючи і точку $x=3$, в якій функція розривна, оскільки в цій точці значення кожного з отриманих інтегралів:

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{2+0}{2}=1$$

і значення функції $f(3)=1$ − однакові. ●

Приклад 3. Зобразити інтегралом Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ \pi x, & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{при } x>1.\end{cases}$$



Розв'язування.

Застосовуючи формулу (4.3), обчислимо коефіцієнти $A(\omega)$ і $B(\omega)$:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}0\cdot\cos\omega t+\pi\int_{0}^{1}t\cos\omega t dt+\int_{0}^{+\infty}0\cdot\cos\omega t dt\right)=$$

$$=\left(\frac{t\sin\omega t}{\omega}+\frac{\cos\omega t}{\omega^2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1}=\frac{\omega\sin\omega+\cos\omega-1}{\omega^2}.$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt=\int_{0}^{1}t\sin\omega t dt=\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^2}.$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти в формулу (4.2), отримаємо

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{(\omega\sin\omega+\cos\omega-1)\cos\omega x+(\sin\omega-\omega\cos\omega)\sin\omega x}{\omega^2}d\omega.$$

Отриманий інтеграл збігається до функції $f(x)$ на всій числовій осі, крім точки $x=1$, в якій ця функція розривна. У точці $x=1$ значення інтеграла Фур'є

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2},$$

тоді як значення функції $f(1)=\pi$.

Розв'язування буде коротшим, якщо скористатися комплексною формою (4.10) або (4.11) інтеграла Фур'є:

$$C(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\pi\int_0^1 te^{-i\omega t}dt=\pi\left(\frac{te^{-i\omega t}}{-i\omega}-\frac{e^{-i\omega t}}{i^2\omega^2}\right)\Bigg|_0^1=\pi\frac{e^{-i\omega}(1+i\omega)-1}{\omega^2},$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega}(1+i\omega)-1}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega.\bullet$$

Зауважимо, що ці зображення даної функції інтегралом Фур'є в комплексній формі та отримане вище зображення її інтегралом Фур'є в звичайній формі відрізняються тільки за формою і можуть бути перетворені одне в інше за допомогою формул Ейлера.

Приклад 4. Знайти косинус- і синус-перетворення Фур'є для функції

$$f(x) = e^{-x} \quad (x \geq 0).$$

Розв'язування.

Використовуючи формулу (4.7), знаходимо

$$\tilde{A}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos \omega t dt .$$

Оскільки $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega^2 + 1}$, то

$$\tilde{A}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega^2 + 1} .$$

Аналогічно за формулою (4.9) отримаємо

$$\tilde{B}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + 1} . \bullet$$

Зауваження 4.3. Якщо застосувати косинус- і синус-перетворення Фур'є для функцій $\tilde{A}(\omega)$ і $\tilde{B}(\omega)$, отримаємо за формулами (4.6) і (4.8) функцію $f(x)$, тобто

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{A}(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + 1} d\omega = e^{-x},$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{B}(\omega) \sin \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^2 + 1} d\omega = e^{-x} .$$

Звідси отримаємо *інтеграли Лапласа*:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + 1} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^2 + 1} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} .$$

Приклад 5. Знайти спектральну щільність, амплітудний та фазовий спектр функції

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } -\infty < x \le 0, \\ 1, \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0, \text{ при } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

Розв'язування.

За формулою (4.13) знаходимо перетворення Фур'є функції $f(x)$, яке визначає спектральну щільність цієї функції:

$$\tilde{C}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega i} e^{-i\omega t} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1 - e^{-i\omega})}{\omega i} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i(e^{-i\omega} - 1)}{\omega} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}\omega} (\cos\omega - i\sin\omega - 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega} (\sin\omega + i(\cos\omega - 1)).$$

Амплітудний спектр функції $f(x)$ визначається модулем спектральної щільності, тобто

$$\left|\tilde{C}(\omega)\right| = \sqrt{((a(\omega))^2 + (b(\omega))^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\omega|} \sqrt{\sin^2\omega + (\cos\omega - 1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\omega|} \sqrt{\sin^2\omega + \cos^2\omega - 2\cos\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\omega|} \sqrt{2(1 - \cos\omega)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}|\omega|} \sqrt{2\sin^2\frac{\omega}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\omega|} \left|\sin\frac{\omega}{2}\right|.$$

Амплітудний спектр $\left|\tilde{C}(\omega)\right|$ задовольняє, очевидно, нерівностям

$$0 \le \left|\tilde{C}(\omega)\right| \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\omega|},$$

обертається в нуль разом з $\sin\frac{\omega}{2}$ в точках

$$\frac{\omega}{2} = \pi k, \quad \omega = 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

і приймає максимальне значення $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\omega|}$ в точках, де $\left|\sin\frac{\omega}{2}\right| = 1$,

$$\frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \omega = \pi(2k + 1), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Крім того, $\left|\tilde{C}(\omega)\right| \to 0$ при $\omega \to \infty$.

Фазовий спектр функції $f(x)$ визначається аргументом спектральної щільності, тобто

$$\arg \tilde{C}(\omega) = arctg\, \frac{b(\omega)}{a(\omega)} = arctg\, \frac{\cos\omega - 1}{\sin\omega}. \bullet$$

Зауваження 4.4. Короткий перелік властивостей перетворення Фур'є наведено в Додатку 3 на сторінці 78.

Задачі для самостійного розв'язування

Побудувати графік даної функції та зобразити її інтегралом Фур'є:

1. $f(x) = \begin{cases} e^{x}, & x < 0, \\ e^{-x}, & x \ge 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 3, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - x/a, & 0 \le x \le a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi, \\ \cos(x/2), & -\pi \le x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi, \\ \sin(x/2), & -\pi \le x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 < x \le 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & |x| \ge 1. \end{cases}$

Знайти косинус і синус-перетворення Фур'є функції:

8. $f(x) = e^{-ax} \quad (a > 0, \ \ x \geq 0)$.

9. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a, \\ \dfrac{1}{2}, & x = a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & 0 \leq x \leq 1/4, \\ 0, & x > 1/4. \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & 0 \leq x \leq 3/2, \\ 0, & x > 3/2. \end{cases}$

Знайти спектральну щільність, амплітудний та фазовий спектр функції:

14. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \alpha x e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \quad (\alpha > 0). \end{cases}$ (*лінійно-експоненціальний імпульс*)

15. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\tau/2, \\ h\cos(\pi x/\tau), & -\tau/2 \leq x \leq \tau/2, \\ 0, & x > \tau/2. \end{cases}$ (*косинусоідальний імпульс*)

Відповіді: 1. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\omega}{1+\omega^2} \cdot \sin \omega x d\omega, \quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$;

2. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\omega}{1+\omega^2} \cdot \sin \omega x d\omega$,

в точках розриву $x = 0$ та $x = 1$ інтеграл збігається до числа $3/2$;

3. *Вказівка.* Довизначити функцію на $(-\infty; 0)$ парним або непарним чином;

4. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{a\omega^2}(1 - \cos a\omega)\cos \omega x + \frac{1}{\omega}\left(1 - \frac{\sin a\omega}{a\omega}\right)\sin \omega x \right) d\omega$;

5. $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos \pi\omega}{1 - 4\omega^2} \cos \omega x d\omega$; 6. $f(x) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\omega \cos \pi\omega}{1 - 4\omega^2} \sin \omega x d\omega$;

7. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\dfrac{(1-\cos\omega)}{1-\omega^2}\cos\omega x d\omega$; 8. $\tilde{A}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{a^2+\omega^2}$, $\tilde{B}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\omega}{a^2+\omega^2}$;

9. $\tilde{A}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin a\omega}{\omega}$, $\tilde{B}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1-\cos a\omega}{\omega}$; 10. $\tilde{A}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin\pi\omega}{1-\omega^2}$,

$\tilde{B}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\omega(1-\cos\pi\omega)}{1-\omega^2}$; 11. $\tilde{A}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1+\cos\pi\omega}{1-\omega^2}$, $\tilde{B}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin\pi\omega}{1-\omega^2}$;

12. $\tilde{A}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{4}{\omega^2}\left(\cos\dfrac{\omega}{4}-1\right)$, $\tilde{B}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{1}{\omega}-\dfrac{4}{\omega^2}\sin\dfrac{\omega}{4}\right)$;

13. $\tilde{A}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{2}{\omega^2}\left(\cos\dfrac{3\omega}{2}-1\right)$, $\tilde{B}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{2}{\omega^2}\sin\dfrac{3\omega}{2}-\dfrac{3}{\omega}\right)$;

14. $\tilde{C}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\alpha}{(\alpha+i\omega)^2}$; 15. $\tilde{C}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{2\pi h}{\tau}\dfrac{\cos(\omega\tau/2)}{(\pi/\tau)^2-\omega^2}, & \omega\neq\pm\dfrac{\pi}{\tau};\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{h\tau}{2}, & \omega=\pm\dfrac{\pi}{\tau}.\end{cases}$

Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти зображення наступних функцій:

1. $f(t) = t^2 \cos 2t$;

2. $f(t) = t^2 \sin 3t$;

3. $f(t) = (1+t)\sin 2t$;

4. $f(t) = t(e^{-t} + \mathrm{ch}\, t)$;

5. $f(t) = \int_0^t e^{\tau}\tau^4 d\tau$;

6. $f(t) = e^{-t}\cos 2t$;

7. $f(t) = e^{t}\sin^2 t$;

8. $f(t) = t\cdot\sin 2t\cdot\sin 3t$;

9. $f(t) = t\cdot\cos t\cdot\mathrm{ch}\,2t$;

10. $f(t) = \dfrac{e^{-t}\sin 3t}{t}$;

11. $f(t) = \dfrac{\mathrm{sh}^2 2t}{t}$;

12. $f(t) = \dfrac{\sin t\cdot\sin 3t}{t}$;

13. $f(t) = \dfrac{\mathrm{sh}\,3t}{t}$;

14. $f(t) = \dfrac{\cos 2t - \cos 4t}{t}$;

15. $f(t) = \dfrac{1-\cos t}{t}e^{t}$;

16. $f(t) = \dfrac{e^{t}\sin^2 2t}{t}$;

17. $f(t) = \int_0^t \tau\,\mathrm{sh}\,2\tau\, d\tau$;

18 $f(t) = \int_0^t (\tau+1)\cos 3\tau\, d\tau$;

19. $f(t) = \int_0^t e^{-2\tau}\tau^3 d\tau$;

20. $f(t) = \int_0^t \dfrac{\sin 2\tau}{\tau}\, d\tau$;

21. $f(t) = \sin t\cdot\cos 2t$;

22. $f(t) = \cos t\cdot\cos 4t$;

23. $f(t) = e^{-t}\cdot\sin 2t\cdot\sin 4t$;

24. $f(t) = \int_0^t e^{-3\tau}\,\mathrm{ch}\,2\tau\, d\tau$;

25. $f(t) = \cos 2t\cdot\mathrm{ch}\, t$;

26. $f(t) = t\cdot\mathrm{sh}\,2t$;

27. $f(t) = \dfrac{e^{-t} - t - 1}{t}$;

28. $f(t) = \int_0^t \cos^2 2\tau\, d\tau$;

29. $f(t) = \sin^3 t$;

30. $f(t) = \cos^4 t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за заданими зображеннями.

1. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$;

2. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$;

3. $\dfrac{6}{p^3-3}$;

4. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$;

5. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$;

6. $\dfrac{4}{p^3+8}$;

7. $\dfrac{p+4}{p^2+4p+3}$;

8. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$;

9. $\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$;

10. $\dfrac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$;

11. $\dfrac{1}{p^3(p^2-4)}$;

12. $\dfrac{1}{p^3-1}$;

13. $\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$;

14. $\dfrac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$;

15. $\dfrac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$;

16. $\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$;

17. $\dfrac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$;

18. $\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$;

19. $\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$;

20. $\dfrac{3p+2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$;

21. $\dfrac{p-2}{p^2-4p+13}$;

22. $\dfrac{2-p}{p^2-2p+5}$;

23. $\dfrac{1}{(p-1)(p^2-4)}$;

24. $\dfrac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$;

25. $\dfrac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$;

26. $\dfrac{p+2}{p^2(p^2+5p+4)}$;

27. $\dfrac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$;

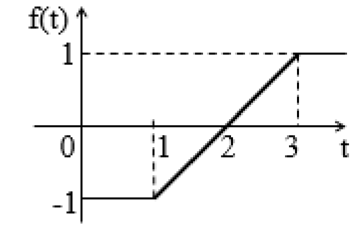
28. $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$;

29. $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$;

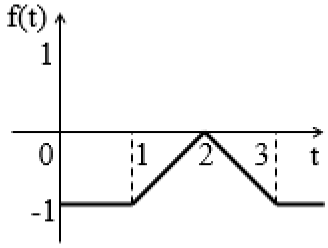
30. $\dfrac{p+4}{p^3+1}$.

Завдання 3. За поданим графіком оригіналу знайти зображення.

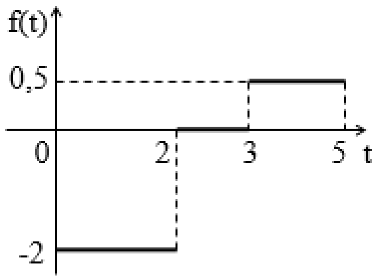
1.



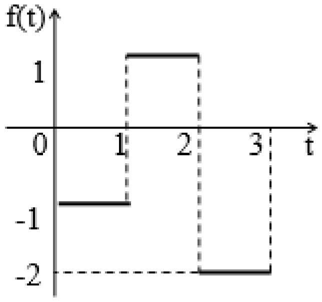
2.



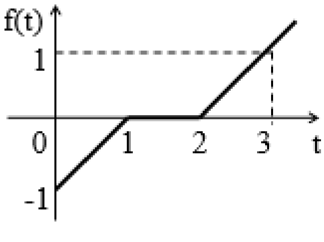
3.



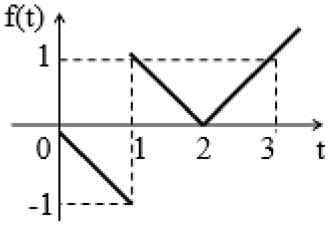
4.



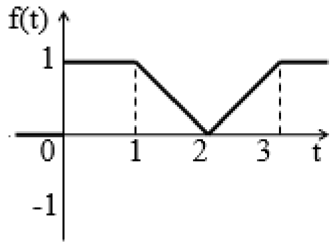
5.



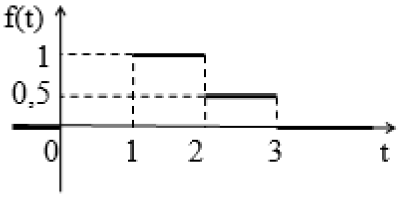
6.



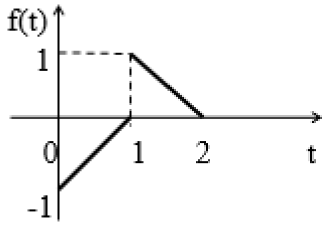
7.



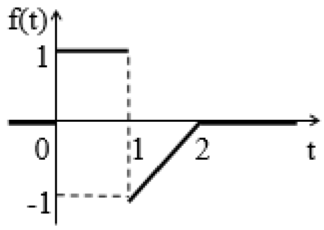
8.



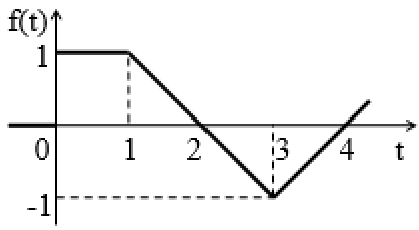
9.



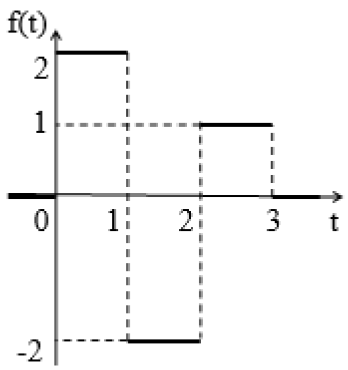
10.



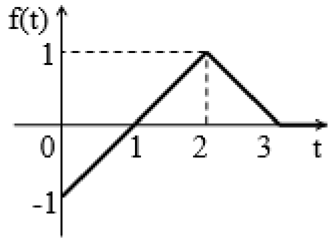
11.



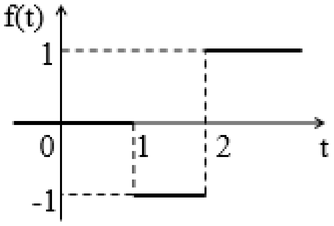
12.



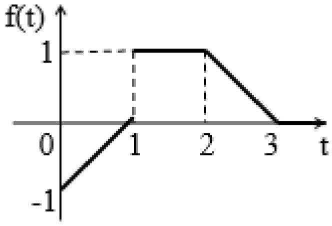
13.



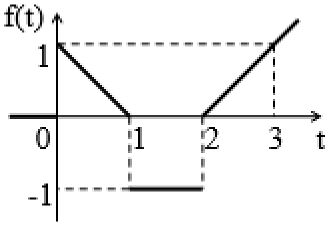
14.



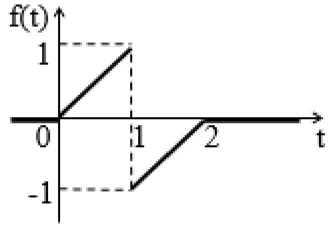
15.



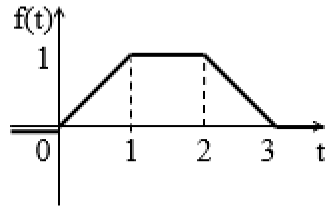
16.



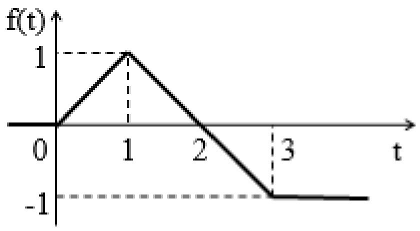
17.



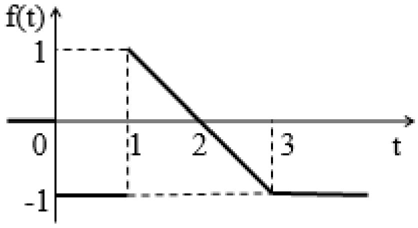
18.



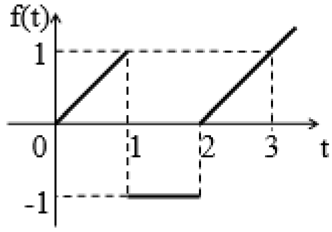
19.



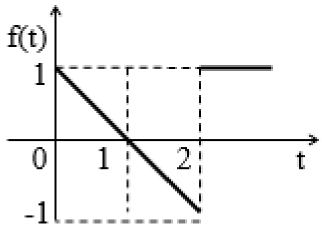
20.



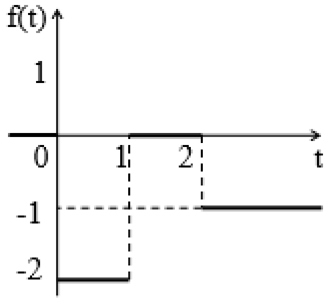
21.



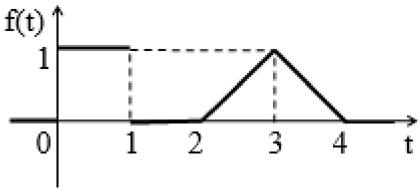
22.



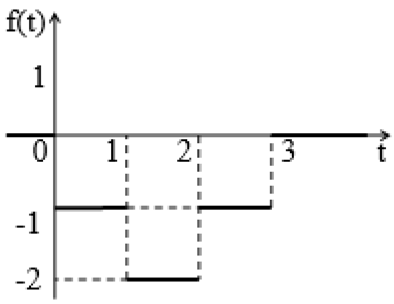
23.



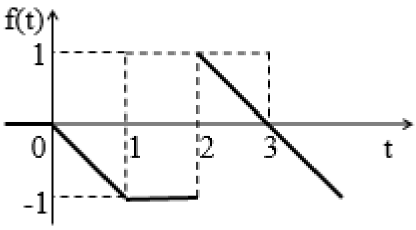
24.



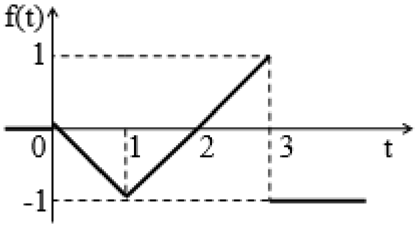
25.



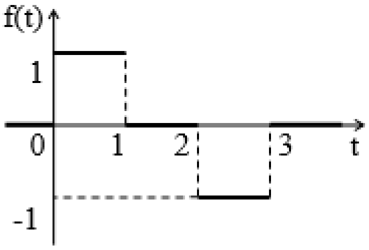
26.



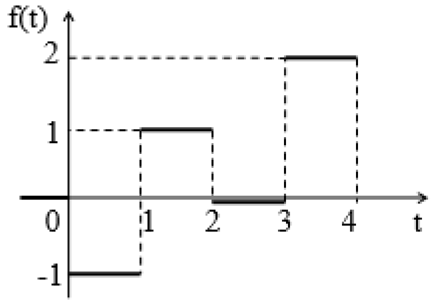
27.



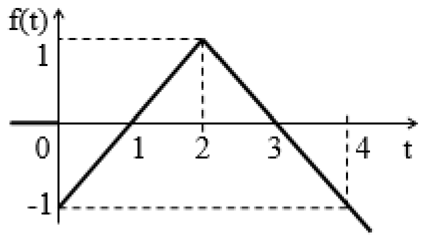
28.



29.



30.



Завдання 4. Операційним методом розв'язати задачу Коші:

1. $y'' + y = 6e^t, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1.$

2. $y'' + y' = t^2 + 2t, \ y(0) = 0, y'(0) = -2.$

3. $y'' + y' + y = 7e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = 4$

4. $y'' - 9y = \sin t - \cos t, \quad y(0) = -3, y'(0) = 2.$

5. $y'' - y' = t^2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

6. $y'' - y = \cos 3t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

7. $y'' + y' - 2y = -2(t+1), \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

8. $y'' + 2y' = 2 + e^t, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

9. $2y'' - y' = \sin 3t, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$

10. $y'' + 2y' = \sin \dfrac{t}{2}, \quad y(0) = -2, y'(0) = 4.$

11. $y'' + y = \operatorname{sh} t, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$

12. $y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

13. $y'' - 3y' + 2y = e^{t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

14. $2y'' + 3y' + y = 3e^{t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

15. $y'' - 2y' - 3y = 2t$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

16. $y'' + 4y = \sin 2t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

17. $2y'' + 5y' = 29\cos t$, $y(0) = -1, y'(0) = 0$.

18. $y'' + y' + y = t^2 + t$, $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

19. $y'' + 4y = 8\sin 2t$, $y(0) = 3, y'(0) = -1$.

20. $y'' - y' - 6y = 2$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

21. $y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

22. $y'' + 4y' + y = 16e^{2t}$, $y(0) = y'(0) = 2$.

23. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$, $y(0) = 2, y'(0) = 6$.

24. $y'' + 4y = 3\sin t + 10\cos 3t$, $y(0) = -2, y'(0) = 3$.

25. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3\mathrm{t}$, $y(0) = 5, y'(0) = 1$.

26. $y'' + 3y' - 10y = 40$, $y(0) = 3, y'(0) = 6$.

27. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, $y(0) = -1, y'(0) = 0$.

28. $y'' - 2y' = e^{t}(\mathrm{t}^2 + \mathrm{t} - 3)$, $y(0) = 2, y'(0) = 2$.

29. $y'' + y = 2\cos t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

30. $y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t$, $y(0) = -1, y'(0) = -2$.

Завдання 5. Розв'язати рівняння, побудувати графік правої частини ($h(t)$ – функція Хевісайда).

1. $y' + 2y = h(t) + h(t-3)$, $y(0) = 1$.

2. $y' + 4y = 2(h(t) + h(t-1))$, $y(0) = 0$.

3. $2y' + y = h(t) - h(t-2)$, $y(0) = 2$.

4. $y'' + y = h(t) - 2h(t-1) + h(t-2)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

5. $y' + 3y = 2h(t) - h(t-1),\ y(0) = 3.$

6. $y'' + y = h(t) + h(t-2),\ y(0) = 1, y'(0) = 0.$

7. $y'' + 2y' + 2y = h(t) - h(t-2),\ y(0) = y'(0) = 0.$

8. $y'' + 3y' = h(t-1),\ y(0) = 4, y'(0) = 0.$

9. $y' + 3y = \eta(t) - 2\eta(t-1) + 2\eta(t-2),\ y(0) = 1.$

10. $y' - y = -2h(t) + 2h(t-2) + 0{,}5h(t-3) - 0{,}5h(t-5),\ y(0) = 0.$

11. $y' - y = h(t) + 2h(t - \frac{\pi}{2}),\ y(0) = 0.$

12. $y'' - 2y' + y = th(t) - (t-1)h(t-1),\ y(0) = y'(0) = 0.$

13. $y' + 2y = 2h(t) - h(t-1) - h(t-2),\ y(0) = 3.$

14. $y' + y = -h(t-1) + 2h(t-2),\ y(0) = 0.$

15. $y'' - 3y' + 2y = h(t-2) - h(t-3),\ y(0) = y'(0) = 0.$

16. $y'' - 3y' + 2y = h(t-1) - h(t-2),\ y(0) = y'(0) = 0.$

17. $y'' + 4y' + 4y = 2(h(t) - h(t-1)),\ y(0) = 1, y'(0) = 0.$

18. $4y' + 2y = h(t) - h(t-1),\ y(0) = 2.$

19. $y' + 2y = 2h(t) - h(t-1),\ y(0) = 3.$

20. $y' + y = h(t) + h(t-2) - h(t-1) - h(t-3),\ y(0) = 1.$

21. $y'' + 2y' + 2y = h(t) + h(t-2),\ y(0) = y'(0) = 0.$

22. $y' + 4y = h(t) + 4h(t-1),\ y(0) = 0.$

23. $2y' + 3y = h(t) - 2h(t-1) + 2h(t-2),\ y(0) = 0.$

24. $y' + y = h(t-1) + h(t-2) + h(t-3),\ y(0) = 0.$

25. $y'' + 4y = h(t) - h(t-2\pi),\ y(0) = y'(0) = 0.$

26. $y'' + y = h(t) - 2h(t-1) + h(t+2),\ y(0) = y'(0) = 0.$

27. $y'' + 3y' = h(t-2),\ y(0) = 4, y'(0) = 0.$

28. $y'' + 4y = 2h(t-2) - h(t-1),\ y(0) = y'(0) = 0.$

29. $y'' + 9y = h(t-3),\ y(0) = y'(0) = 0.$

30. $y'' + 2y' = h(t-1),\ y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Завдання 6. Розв'язати систему диференціальних рівнянь операційним методом.

1. $\begin{cases} x' = x + 2y + 2e^t, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

2. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2(x + y), \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

3. $\begin{cases} x' = x + 3y + 2, \\ y' = x - y + 1, \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 2.$

4. $\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - 2, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

5. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

6. $\begin{cases} x' + y' = 1, \\ x' = x - y, \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 0.$

7. $\begin{cases} x' = y, \\ x' - y' = x + y, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

8. $\begin{cases} x' + x = 3y + 1, \\ y' = x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2.$

9. $\begin{cases} x' + 2x - y = 0, \\ y' - 3x = 0, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

10. $\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

11. $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0, \end{cases}$ $x(0) = 3, y(0) = 15.$

12. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t, \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 4.$

13. $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

14. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

15. $\begin{cases} x' = -4(x + y), \\ x' + 4y' = -4y, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0.$

16. $\begin{cases} x' = 4x - 5y, \\ y' = x, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

17. $\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = -x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = -2, y(0) = 1.$

18. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0.$

19. $\begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = x - 2y + 2, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

20. $\begin{cases} x' = x + 2y + 1, \\ y' = 4x - y, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

21. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2.$

22. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2.$

23. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' + 5x + 3y = 2, \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 0.$

24. $\begin{cases} x' + 3x + 4y = 1, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2.$

25. $\begin{cases} x' + 2x = 6y + 1, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

26. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, \\ y' = 4x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 0.$

27. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 5.$

28. $\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -4x, \end{cases}$ $x(0) = 3, y(0) = 1.$

29. $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1, \\ y' = -\dfrac{3}{2}x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0$.

30. $\begin{cases} x' = 1 + 2y, \\ y' = 2x + 3, \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 0$.

Завдання 7. Використовуючи формулу Дюамеля, знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє умови $y(0) = 0, y'(0) = 0$:

1. $y'' - y = \operatorname{th} t$.

2. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1 + t^2}$.

3. $y'' - y = \operatorname{th}^2 t$.

4. $y'' - y' = \dfrac{e^t}{1 + e^t}$.

5. $y'' + y' = \dfrac{e^{2t}}{3 + e^t}$.

6. $y'' - 4y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}$.

7. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{2e^{2t}}{\operatorname{ch}^2 2t}$.

8. $y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.

9. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{(1 + t)^2}$.

10. $y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$.

11. $y'' + 2y' + y = \dfrac{te^{-t}}{1 + t}$.

12. $y'' - y = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$.

13. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{1 + t^2}$.

14. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{\operatorname{ch}^2 t}$.

15. $y'' + 2y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.

16. $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^t}$.

17. $y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t$.

18. $y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$.

19. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1 + t}$.

20. $y'' - 2y' = \dfrac{e^t}{\operatorname{ch} t}$.

21. $y'' + y' = \dfrac{1}{1 + e^t}$.

22. $y'' - 4y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}$

23. $y'' + y' = \dfrac{e^t}{1 + e^t}$.

24. $2y'' - y' = \dfrac{e^t}{\left(1 + e^{\frac{t}{2}}\right)^2}$.

25. $y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{(1 + e^t)^2}$.

26. $y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{2 + e^t}$.

27. $y'' + y' = \dfrac{e^t}{(1 + e^t)^2}$.

28. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{\mathrm{ch}^2 t}$.

29. $y'' - 4y = \mathrm{th}^2\, 2t$.

30. $y'' + y' = \dfrac{1}{(1 + e^t)^2}$.

Завдання 8. Знайти розв’язок інтегрального рівняння операційним методом.

1. $y(x) = \sin x + \int_0^x (x - t) y(t) dt$.

2. $y(x) = x - \int_0^x e^{x-t} y(t) dt$.

3. $\int_0^x \mathrm{ch}(x - t) y(t) dt = x$.

4. $y(x) = \cos x + \int_0^x (x - t) y(t) dt$.

5. $y(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{t-x} y(t) dt$.

6. $\int_0^x \sin(x - t) y(t) dt = x^3 (x - 1)$.

7. $y(x) = e^x + \int_0^x y(t) dt$.

8. $y(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\int_0^x \sin 2(x - t) y(t) dt$.

9. $y(x) = \cos x + \int_0^x y(t) dt$.

10. $\int_0^x e^{x-t} y(t) dt = x^2$.

11. $y(x) = e^x - 2\int_0^x \cos(x - t) y(t) dt$.

12. $\int_0^x \cos(x - t) y(t) dt = \sin x$.

13. $y(x) = \mathrm{sh}\, x - \int_0^x \mathrm{ch}(x - t) y(t) dt$.

14. $\mathrm{sh}\, x = \int_0^x \mathrm{ch}(x - t) y(t) dt$.

15. $y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt$

16. $y(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t} y(t) dt$

17. $y(x) = 1 + \dfrac{1}{6}\int_0^x (x - t)^3 y(t) dt$

18. $y(x) = x + \int_0^x \sin(x - t) y(t) dt$

19. $y(x) = x - \int_0^x (x - t) y(t) dt$

20. $y(x) = 1 + x + \int_0^x \sin(x - t) y(t) dt$

21. $y(x) = \mathrm{sh}\, x + \int_0^x (x - t) y(t) dt$

22. $y(x) = 1 + 2\int_0^x \cos(x - t) y(t) dt$

23. $y(x) = e^x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt$

24. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt = x + x^2$

25. $\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\,y(t)\,dt = x^2 e^x$

26. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt = x\cos x$

27. $y(x) = x - \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,y(t)\,dt$

28. $y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2\,y(t)\,dt$

29. $y(x) = \frac{x^2}{2} + \int\limits_0^x (x-t)e^{x-t}\,y(t)\,dt$

30. $y(x) = x + 2\int\limits_0^x [(x-t) - \sin(x-t)]\,y(t)\,dt$

Додаток 1.

Основні властивості перетворення Лапласа

1. Лінійність $f(t)=\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t) \div F(p)=\sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p)$.

2. Подібність $f(ct) \div \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right)$.

3. Теорема запізнення $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p),\ \tau>0$.

4. Теорема згасання $e^{at} f(t) \div F(p-a)$.

5. Диференціювання зображення $t^n f(t) \div (-1)^n F^{(n)}(p)$.

6. Інтегрування зображення $\frac{f(t)}{t} \div \int_0^\infty F(z)dz$.

7. Теорема випередження $f(t-t_0) \div e^{t_0 p}\left(F(p)-\int_0^{t_0} e^{-pt} f(t)dt\right),\ t_0>0$.

8. Диференціювання оригінала $f'(t) \div pF(p)-f(0)$,

$$f''(t) \div p^2 F(p)-pf(0)-f'(0),$$

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p)-p^{n-1} f(0)-p^{n-2} f'(0)-\ldots-f^{n-1}(0).$$

9. Інтегрування оригіналу $\int_0^t f(y)dy \div \frac{1}{p} F(p)$.

10. Теорема множення Бореля $f(t)*g(t)=\int_0^t f(y)g(t-y)dy \div F(p)G(p)$.

11. Формула Дюамеля $pF(p)G(p) \div f(0)g(t)+\int_0^t f'(y)g(t-y)dy$.

12. Теорема множення оригіналів $f(t)g(t) \div \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(p-z)dz$.

Додаток 2.

Оригінали та зображення основних елементарних функцій

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
1	$\frac{1}{p}$	$\mathrm{sh}\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$\mathrm{ch}\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

Додаток 3.

Основні властивості перетворення Фур’є

1. Лінійність $f(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(x) \xrightarrow{\Phi} F(\omega)=\sum_{k=1}^{n} C_k F_k(\omega)$.

2. Подібність $f(ax) \xrightarrow{\Phi} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

3. Теорема про зсув оригіналу $f(x \pm \alpha) \xrightarrow{\Phi} e^{\pm i\alpha\omega} F(\omega),\ \alpha > 0$.

4. Теорема про зсув зображення $e^{\pm i\alpha x} f(x) \xrightarrow{\Phi} F(i(\omega \pm \alpha))$.

5. Диференціювання оригіналу $f'(x) \xrightarrow{\Phi} i\omega F(\omega)$,

$$f''(x) \xrightarrow{\Phi} -\omega^2 F(\omega),$$

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow{\Phi} (i\omega)^n F(\omega).$$

6. Диференціювання зображення $(-ix)^n f(x) \xrightarrow{\Phi} F^{(n)}(i\omega)$.

7. Теорема множення зображень $f(x) * g(x) = \int_0^x f(y) g(x-y) dy \xrightarrow{\Phi} F(\omega) G(\omega)$.

8. $f(x)\cos\beta x \xrightarrow{\Phi} \frac{1}{2}\left(F(\omega-\beta)+F(\omega+\beta)\right)$,

$f(x)\sin\beta x \xrightarrow{\Phi} \frac{1}{2}\left(F(\omega-\beta)-F(\omega+\beta)\right)$.

9. $\frac{1}{2}\int_{x-a}^{x+a} f(y) dy \xrightarrow{\Phi} \frac{\sin a\omega}{\omega} F(\omega)$.

10. $\frac{1}{2}\left(f(x+a)+f(x-a)\right) \xrightarrow{\Phi} F(\omega)\cos\omega a$.

11. $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{i\omega x} d\omega \xrightarrow{\Phi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$.

Список використаної літератури

1. Свешников А. Г. Теория функций комплексной переменной. / Свешников А.Г., Тихонов А.Н. – Москва: Наука, 1970 – 315 с.

2. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости./ Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Єльсгольц Л.Є. – Москва: Наука, 1965. – 416 с.

3. Дубовик В. П. Вища математика. Навчальний посібник./ Дубовик В. П., Юрик І. І. – Киев, 2006. – 648 с.

4. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – Москва: Высш. шк., 1973 –512 с.

5. Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. / Волковыский Л.И., Лунц И.Г., Араманович И.Г. – М.: Физматгиз, 1960. – 367 с.

6. Гурский Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: Учеб.пособие. В 2 ч. // Гурский Е.И., Домашов В.П., Кравцов В.К., Сильванович А.П. – Мн.: Выш. Шк., 1990. – Ч.2 – 400 с.

7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч.// Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М: Высш. Шк., 1986. – Ч.2 – 415 с.

8. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости./ Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. – Москва:Наука, 1971. – 255 с.

9. Шелковников Ф.А. Сборник упражнений по операционному исчислению./ Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. – Москва: Высшая школа, 1968. – 253 с.

10. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Том 4. Функции комплексного переменного: теория и практика. – Москва: Едиториал УРСС, 2001. – 352 с.

11. Мартыненко В.С. Операционное исчисление./ Мартыненко В.С. – Киев: Издательство Киевского университета, 1965. – 187 с.