Майже ейнштейнові напівзвідні простори

Ю. С. Федченко[1], О. В. Лесечко[2], Я. Г. Мар'янко[2]

[1] *Одеський національний технологічний університет, Одеса, Україна*
[2] *Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна*

fedchenko20@ukr.net

Анотація

Розглядаються напівзвідні псевдоріманові простори з алгебраїчними умовами на тензор Річчі та тензор Рімана. Для майже ейнштейнових та слабо рекурентних просторів знайдено вид тензорної ознаки напівзвідності та вивчені деякі їх властивості. Дослідження ведуться локально в тензорній формі.

Ключові слова: тензор Рімана; тензор Річчі; напівзвідні простори; майже ейнштейнові простори; слабо рекурентні простори.

Напівзвідним розкладом метрики псевдоріманового простору V_n $(n > 2)$ з метричним тензором g_{ij} називають її представлення в виді

$$ds^2 = ds_1^2(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^r) + \sigma(x^1,\, x^2, \ldots,\, x^r) ds_2^2(x^{r+1},\, x^{r+2}, \ldots,\, x^n).$$

Тут ds_1^2 та ds_2^2 — самостійні метрики, що залежать від різних координат, а функція σ залежить лише від координат ds_1^2.

Простір V_n, що допускає хоча б один напівзвідний розклад називають *напівзвідним.* Напівзвідні простори [Fedchenko, Ogorodnichuk, Ugol'nikov, 2022] узагальнюють звідні простори.

Для того, щоб псевдоріманів простір V_n був напівзвідним необхідно та достатньо, щоб в ньому існував симетричний ідемпотентний тензор, не пропорційний метричному, такий, що

$$b_{\alpha i} b_j^{\alpha} \;= b_{ij}, \tag{1}$$

$$b_{ij,k} \;= u_i b_{jk} + u_j b_{ik}. \tag{2}$$

Тут $u_i = u_{,i} = \partial_i u$ — деякий градієнтний вектор, кома — знак коваріантної похідної, а $b^i_j = b_{\alpha j} g^{\alpha i}$, g^{ij} — елементи оберненої матриці до g_{ij}.

Рівняння (1) та (2) називають *тензорною ознакою напівзвідності псевдоріманових просторів* [Doikov, Kiosak, 2020].

Розглянемо напівзвідні псевдоріманові простори з умовами алгебраїчного характеру, що накладаються на тензор Річчі.

Тензор E_{ij} такий, що

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij},$$

називають *тензором Ейнштейна.*

Тоді тензор D_{ij}, для якого

$$E_{ij} - D_{ij} = 0,$$

називають *тензором деформації тензора Ейнштейна.* Для просторів Ейнштейна $D_{ij} = 0$.

Простори, в яких тензор деформації тензора Ейнштейна має вигляд

$$D_{ij} = \lambda_i \lambda_j,$$

називають *майже ейнштейновими просторами.* Де λ_i— деякий не нульовий градієнтний вектор [Kiosak, Savchenko, Khniunin, 2020].

Мають місце теореми:

Теорема 1. *Для напівзвідних псевдоріманових просторів $V_n (n > 2)$ тензор деформації тензора Ейнштейна задовольняє умові*

$$b_{\alpha i} D^\alpha_l - b_{\alpha l} D^\alpha_i = 0.$$

Теорема 2. *В напівзвідних псевдоріманових майже ейнштейнових просторах вектор λ_i із рівняння*

$$R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij} = \lambda_i \lambda_j.$$

є власним вектором матриці тензора b_{ij}, а власне число приймає значення 0 або 1.

Теорема 3. *В напівзвідних майже ейнштейнових псевдоріманових просторах вектор u_i із рівняння (2) задовольняє умові*

$$b(u_{l,i} - u_l u_i) = ({u_{\alpha,}}^{\alpha} - u_\alpha u^\alpha + \frac{R}{n}) b_{li} + e \lambda_l \lambda_i - b_{\alpha\beta} {R^{\alpha}}_{ij}{}^{\beta},$$

де e приймає значення 0 або 1.

Псевдоріманові простори, в яких виконується умова

$$\rho_l R^h_{ijk} + \rho_j R^h_{ikl} + \rho_k R^h_{ilj} = 0,$$

називають *слабо рекурентними просторами*[Kiosak, Latysh, Kuz'mich, 2024].

Теорема 4. *В напівзвідних слабо рекурентних просторах вектор u_i задовольняє одній із умов*

$$b(u_{i,j} - u_i u_j) = (u_{\alpha,}{}^{\alpha} - u_\alpha u^\alpha + b^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) b_{ij} - b_{\alpha\beta} R^{\alpha}{}_{ij}{}^{\beta},$$

$$u_{l,i} - u_i u_l + u_\alpha u^\alpha b_{il} = c\tau_l \tau_i,$$

$$u_{i,j} - u_i u_j + u^\alpha u_\alpha b_{ij} = b^\alpha_i R_{\alpha j} - R_{ij}.$$

Таким чином, знайдемо умови, яким за необхідністю задовольняє вектор із тензорної ознаки напівзвідності для майже ейнштейнових просторів та слабо рекурентних псевдоріманових просторів.

Перелік посилань

Fedchenko Yu., Ogorodnichuk I., Ugol'nikov A. (2022). Pseudo-Riemannian spaces with semireducible metrics. *AIP Conference Proceedings*, vol. 2522, no. 120001. https://doi.org/10.1063/5.0100795.

Doikov D., Kiosak V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, vol. 2302, no. 040001. https://doi.org/10.1063/5.0033657.

Kiosak V., Savchenko S., Khniunin S. (2020). On the typology of quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, vol. 2302, no. 040003. https://doi.org/10.1063/5.0033700.

Kiosak V., Latysh O., Kuz'mich V. (2024). Split curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 17, no. 3, pp. 232-243. https://doi.org/10.15673/pigc.v17i3.2817.