

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**О. А. Жуковська**

**Економічна кібернетика:**  
**методичні рекомендації до виконання**  
**комп'ютерних практикумів**  
**за темою:**  
**«Балансові моделі»**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів, які навчаються  
за спеціальністю 051 «Економіка»*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2020

Рецензент *Файнзільберг Л.С., д-р техн. наук, професор*

Відповідальний редактор: *Капустян В.О., д-р фіз.-мат. наук, професор*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 9 від 30.04.2020 р.)  
за поданням Вченої ради факультету менеджменту та маркетингу  
(протокол № 8 від 27.04.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Жуковська Ольга Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.*

# Економічна кібернетика: методичні рекомендації до виконання комп'ютерних практикумів за темою: «Балансові моделі»

**Економічна кібернетика:** методичні рекомендації до виконання комп'ютерних практикумів за темою «Міжгалузеві балансові моделі» [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 051 «Економіка»/ О. А. Жуковська; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові данні (1 файл: \_\_ ). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 75 с.

У навчальному посібнику наведені теоретичні відомості про міжгалузеву балансову модель, балансову модель з факторами виробництва, цінову балансову модель та балансову модель міжнародної торгівлі. Завданням комп'ютерного практикуму є відпрацювання теоретичних вмінь та практичних навичок побудови балансових моделей. Наведено варіанти завдань.

Для студентів бакалаврату спеціальності 051 «Економіка».

© О. А. Жуковська, 2020  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

## Зміст

Вступ.....	4
Комп'ютерний практикум за темою «Міжгалузеві балансові моделі». Теоретичні відомості.....	4
Економіко-математична модель міжгалузевого балансу.....	7
Дослідження системи балансових рівнянь.....	10
Умови збіжності матриці $A^m$ .....	15
Економічний сенс матриці $S = (I - A)^{-1}$ .....	16
Приклад.....	17
Задачі для самостійного розв'язування.....	19
Комп'ютерний практикум за темою «Балансові моделі з факторами виробництва». Теоретичні відомості.....	33
Алгоритм розв'язування задачі.....	35
Приклад.....	36
Задачі для самостійного розв'язування.....	39
Комп'ютерний практикум за темою «Цінові балансові моделі». Теоретичні відомості.....	60
Приклад.....	63
Задачі для самостійного розв'язування.....	67

## Вступ

### 1. Мета навчальної дисципліни.

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів здатностей:

- прогнозувати на основі стандартних теоретичних та економетричних моделей соціально-економічні процеси (ФК 9),
- обґрунтовувати економічні рішення на основі розуміння закономірностей економічних систем і процесів та із застосуванням сучасного методичного інструментарію (ФК 11),
- управляти соціально-економічними системами методами економічної кібернетики (ФК 15).

### 2. Основні завдання навчальної дисципліни.

Згідно з вимогами освітньої програми студенти після засвоєння навчальної дисципліни мають продемонструвати такі результати навчання:

#### **знання:**

- теоретичних засад та методів економічної кібернетики (ЗН 112),
- методології аналізу і синтезу систем управління складними соціально-економічними процесами (ЗН 113),
- інструментарію створення та діагностування прогнозних моделей соціально-економічних процесів (ЗН 114).

#### **уміння:**

- застосовувати аналітичний та методичний інструментарій для обґрунтування пропозицій та прийняття управлінських рішень різними економічними агентами (індивідуумами, домогосподарствами, підприємствами та органами державної влади) (УМ 5),
- застосовувати відповідні економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач (УМ 8),
- створювати прогнозні моделі соціально-економічних процесів (УМ 57).

## Комп'ютерний практикум за темою «Міжгалузеві балансові моделі»

**Теоретичні відомості.** Часто при економічному плануванні на рівні регіонів або країни в цілому виникає необхідність визначення обсягу випуску товарів, що забезпечує заданий попит населення та виробничі потреби. Вирішити це завдання можна з використанням балансових моделей виробництва і розподілу продукції. В основі по-

будови цих моделей лежить балансовий метод, тобто метод взаємного зіставлення наявних матеріальних, трудових і фінансових ресурсів з потребою в них.

Балансові методи планування можна розглядати на різних рівнях ієрархії економічних об'єктів: підприємствах, об'єднаннях, галузях, народному господарстві в цілому. Модель міжгалузевого балансу (МГБ) історично є першою економіко-математичною моделлю зведеного В даній час міжгалузеві баланси на національному рівні складаються приблизно у вісімдесяти країнах світу. Також будуються міжгалузеві баланси на рівні регіонів і великих міст.

Попередниками МОБ були: економічна таблиця Ф. Кене (1758) і схеми суспільного відтворення К. Маркса (XIX ст.). Російський економіст В. К. Дмитрієв (1868-1913), вивчаючи міжгалузеві зв'язки, вперше використав для цієї мети лінійні рівняння і запропонував технологічні коефіцієнти. Автором сучасної моделі міжгалузевого балансу (в англійськомовних країнах він має назву «input-output analysis») є американський вчений (росіянин за походженням) Василь Леонтьєв. У 1973 році за розроблені методи економічного аналізу (модель "витрати-випуск") йому була присуджена Нобелівська премія.

Модель "витрати-випуск" дозволяє розраховувати повні витрати валової продукції, прямі і непрямі витрати на одиницю продукції, а також надає можливість встановлювати чіткі кількісні співвідношення між валовим суспільним продуктом, національним доходом, розвитком окремих галузей економіки. Метод універсальний. З його допомогою американці, наприклад, проводили перебудову економіки з військових рейок на мирні. Він був покладений в основу індикативних планів, застосовуваних у Японії.

**Міжгалузевий баланс** виробництва і розподілу продукції – інструмент аналізу та планування структури суспільного виробництва, що враховує комплексні взаємозв'язки галузей виробничої сфери. Залежно від того, в яких одиницях вимірюються потоки продуктів в балансі, існує різні варіанти міжгалузевих балансів: *в натуральному, у вартісному, в натурально-вартісному, у трудовому вираженні*. За економічним змістом інформації баланси можна розділити на *планові і звітні*; за характером використовуваної моделі – *на статичні і динамічні*.

Розглянемо фрагмент (три розділи) звітнього міжгалузевого балансу (МГБ), в якому потоки продукції вимірюються на основі вартості виробленої продукції в деяких фіксованих цінах (табл. 1).

Фрагмент таблиці міжгалузевого балансу

Галузі, які виробляють	Галузі, які споживають					Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	3	...	n		
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	...	$x_{1n}$	$Y_1$	$X_1$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	...	$x_{2n}$	$Y_2$	$X_2$
3	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	I	$x_{3n}$	$Y_3$	$X_3$
...	...	...	...		...	...	... II
n	$x_{n1}$	$x_{n2}$	$x_{n3}$	...	$x_{nn}$	$Y_n$	$X_n$
Амортизація	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	$c_n$		
Оплата праці	$v_1$	$v_2$	$v_3$	III	$v_n$		IV
Чистий дохід	$m_1$	$m_2$	$m_3$	...	$m_n$		
Валовий продукт	$X_1$	$X_2$	$X_3$	...	$X_n$		$\sum_{j=2}^n X_j = \sum_{i=1}^n X_i$

Оснoву балансу становить сукупність  $n$  галузей матеріального виробництва. У міжгалузевому балансі поняття галузі відрізняється від загальноприйнятого, тут використовується поняття "чистої" (або технологічної), тобто умовної галузі, що об'єднує всі виробництво даного продукту незалежно від відомчої підпорядкованості підприємств і фірм.

В першому квадранті міститься інформація про міжгалузеві зв'язки. Величини  $x_{ij}$ , які знаходяться на перетині галузей (тобто рядків і стовпців таблиці) треба розуміти як вартість засобів виробництва, вироблених в  $i$ -й галузі та споживаних в якості матеріальних витрат у  $j$ -й галузі (міжгалузеві поставки продукції, обумовлені виробничою діяльністю галузей).

Таким чином, кожен  $i$ -й рядок першого розділу показує розподіл продукції  $i$ -й галузі між іншими галузями народного господарства.

У другому квадранті містяться величини  $Y_i$  – значення кінцевого продукту і  $X_i$  – значення валового продукту ( $i = \overline{1, n}$ ).

**Кінцевий продукт** – це продукція галузей матеріального виробництва, яка надходить на цілі особистого і громадського невиробничого споживання, накопичення та відшкодування вибуття основних фондів, приріст запасів, витрати на освіту, охорону здоров'я, експорт і

г. д.).

$\sum_{i=1}^n Y_i$  – сумарний кінцевий продукт економічної системи або на-

ціональний дохід, а стовпець  $Y$  характеризує матеріальну структуру національного доходу.

У розгорнутих схемах балансу кінцевий продукт кожної галузі показують диференційовано за напрямками використання: для споживання, інвестиції, приріст запасів і резервів, експорт та інші витрати.

У третьому квадранті МБ відбивається вартісна структура валового продукту галузей, як сума чистої продукції та амортизації. Чиста продукція розуміється як сума оплати праці  $v_j$  та чистого доходу  $m_j$

галузей. Сума амортизації  $c_j$  та чистої продукції  $v_j + m_j$  називається умовно-чистою продукцією (або доданою вартістю) та позначається  $Z_j = c_j + (v_j + m_j)$ .

Умовно-чиста продукція визначається як різниця між валовою продукцією і сумарними виробничими витратами:

$$Z_j = X_j - \sum_{i=1}^n x_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

**Додана вартість** – різниця між вартістю продукції, що випускає галузь (підприємство), та вартістю засобів виробництва.

Зазвичай в розгорнутих МБ умовно-чисту продукцію підрозділяють на амортизаційні відрахування і чисту продукцію.

Четвертий квадрант балансу відображує кінцевий розподіл та використання національного доходу.

### **Економіко-математична модель міжгалузевого балансу**

Балансова модель будується на таких припущеннях про властивості економічного об'єкта:

– економічна система складається з кількох економічних об'єктів. Кількість випущеної кожним об'єктом продукції може бути охарактеризоване одним числом, в якості якого найчастіше розглядається валовий випуск в деяких фіксованих цінах;

– мета системи полягає у виробництві заданої кількості кінцевого

продукту;

– властивість комплектності споживання: для випуску заданої кількості продукту об'єкт повинен отримувати строго певну кількість інших продуктів;

– властивість лінійності споживання: збільшення випуску продукції в деяке число раз вимагає збільшення споживання об'єктом усіх інших продуктів в те ж саме число разів.

Розглядаючи схему балансу за стовпцями, можна зробити очевидний висновок: підсумок матеріальних витрат будь-якої галузі, що споживає, та її умовно-чистої продукції дорівнює валової продукції цієї галузі, а саме

$$X_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + Z_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (1)$$

Співвідношення (1) охоплюють систему з  $n$  рівнянь, які відображають вартісний склад продукції всіх галузей матеріальної сфери.

Розглядаючи схему балансу за рядками, можна зробити такий висновок: валова продукція тієї чи іншої галузі дорівнює сумі матеріальних витрат галузей, які споживають її продукцію, та кінцевої продукції даної галузі:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Формула (2) описує систему з  $n$  рівнянь, які називаються рівняннями розподілу продукції галузей матеріального виробництва за напрямками використання: продукція, яка випускається кожним об'єктом частково споживається іншими об'єктами системи, а частково надходить зовні в якості кінцевого продукту даної системи

Просумуємо за всіма галузями рівняння (1), в результаті отримаємо

$$\sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n Z_j.$$

Виконавши аналогічну процедуру для рівнянь (2), маємо

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Ліві частини обох рівностей рівні, так як представляють весь валовий суспільний продукт. Перші доданки правих частин цих рівностей також рівні, їх величина дорівнює підсумку першого квадранта. Отже, повинно виконуватись рівність

$$\sum_{j=1}^n Z_j = \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (3)$$

Ліва частина рівняння (3) є сума третього квадранту, а права – підсумок другого квадранту. В цілому це *рівняння показує, що у міжгалузевому балансі дотримується важливий принцип єдності матеріального та вартісного складу національного доходу.*

**Коефіцієнт прямих матеріальних витрат.** Для виробництва одиниці продукції в  $j$ -й галузі необхідна певна кількість  $a_{ij}$  витрат проміжної продукції  $i$ -ї галузі. Величини  $a_{ij}$  називаються коефіцієнтами прямих матеріальних витрат і розраховуються за формулою:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Матриця, складена з величин  $a_{ij}$  називається матрицею технологічних коефіцієнтів або матрицею прямих витрат

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

З економічного змісту величин  $a_{ij}$  випливає, що всі елементи матриці  $A = (a_{ij})$  невід'ємні  $A \geq 0$ .

**Означення.** Коефіцієнт прямих матеріальних витрат показує, яка кількість продукції  $i$ -ї галузі необхідна, якщо враховувати тільки

прямі витрати для виробництва одиниці продукції  $j$ -ї галузі.

З урахуванням формули (4) систему рівнянь балансу (2) можна переписати у вигляді

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + Y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Якщо ввести в розгляд матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат  $A = (a_{ij})$ , вектор-стовпець валової продукції  $X$  і вектор-стовпець кінцевої продукції  $Y$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

то система рівнянь (5) в матричній формі матиме вигляд

$$X = AX + Y. \quad (6)$$

Система рівнянь (5), або в матричній формі (6), називається економіко-математичною моделлю міжгалузевго балансу (моделлю Леонт'єва, моделлю "витрати - випуск") і є відображенням реальних економічних процесів, в яких змістовний сенс можуть мати тільки невід'ємні значення валових випусків  $X \geq 0$ .

### **Дослідження системи балансових рівнянь**

Дослідження системи балансових рівнянь (6) означає, в першу чергу, з'ясування умов, що гарантують існування і єдність невід'ємного розв'язку цієї системи. Система (6) – це лінійна система з  $n$  рівнянь з  $n$  змінними. Такі системи мають єдиний розв'язок, якщо їх визначник не дорівнює нулю. Для отримання розв'язку фіксують  $n$  будь-яких змінних, наприклад, компоненти вектору валового продукту  $X$  та визначають компоненти вектору кінцевого продукту  $Y$  ( $X \rightarrow Y$ ) або, навпаки, за фіксованим вектором кінцевого продукту  $Y$  визначають вектор валового продукту  $X$  ( $Y \rightarrow X$ ). Таким чином, з рівнянь (6)

маємо дві задачі.

**Задача 1.** *Задача спостережуваності* ( $X \rightarrow Y$ ) відображає процес розподілу валового продукту. Вона є основою для складання балансів. Входом в модель (або екзогенним фактором) є вектор валового продукту  $X$ , а виходом – вектор кінцевого продукту  $Y$ .

Для того, щоб знайти  $Y$ , в системі (6) перенесемо  $AX$  в іншу частину рівності

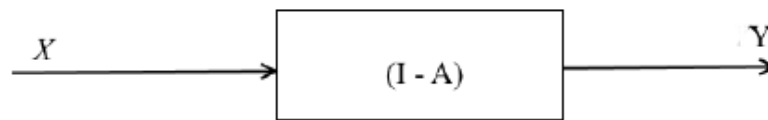
$$X - AX = Y,$$

та винесемо вектор  $X$  за дужки

$$(I - A)X = Y, \quad (7)$$

де  $I$  – одинична матриця розміром  $n \times n$ .

Рівняння (7) – матричне представлення задачі спостережуваності. Кібернетична модель представлена на рисунку 1.



**Рис.1.** Кібернетична модель задачі спостережуваності

**Задача 2.** *Задача синтезу* ( $Y \rightarrow X$ ) відображає процес зміст планування валової продукції  $X$  за заданим вектором кінцевої продукції  $Y$ . Задача синтезу відповідає на питання, в якому об'ємі потрібно планувати валову продукцію  $X$  галузей, щоб забезпечити бажаний випуск кінцевої продукції  $Y$ .

В задачі планування валової продукції  $X$  система (6) розв'язується відносно вектору валової продукції  $X$ . З цією метою множимо зліва і справа систему (7) на обернену матрицю  $S = (I - A)^{-1}$ :

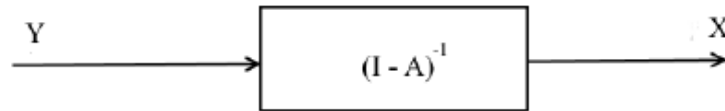
$$(I - A)^{-1}(I - A)X = (I - A)^{-1}Y$$

і отримуємо розв'язок системи (6):

$$X = (I - A)^{-1}Y. \quad (8)$$

Однак, для того, щоб системи рівнянь (6) мала розв'язок необхідно, щоб визначник матриці  $(I - A)$  не дорівнював нулю ( $\det(I - A) \neq 0$ ). У цьому випадку існує обернена матриця  $S = (I - A)^{-1}$ .

Кібернетичним аналогом задачі планування є перетворювач вектору кінцевої продукції  $Y$  в вектор валової продукції  $X$  (рис.2).



**Рис.2.** Кібернетична модель задачі синтезу

Тут  $(I - A)^{-1}$  – оператор планування, який перетворює екзогенний вектор кінцевої продукції  $Y$  в вектор валової продукції  $X$ .

Із співставлення кібернетичних моделей видно, лінійні балансові моделі задач розподілу валової продукції та задача планування є взаємно оберненими. Ці моделі дозволяють побудувати систему взаємопов'язаних показників, але вони не відповідають на питання, наскільки ефективний той чи інший план. Цю задачу вирішують за допомогою оптимізаційних методів.

Зупинимось на проблемі розв'язання задачі (8). Для того, щоб розв'язок задачі (8) мав економічний сенс, необхідна його невід'ємність, тобто  $X \geq 0$ . Зауважимо, що існування матриці  $(I - A)^{-1}$  не забезпечує невід'ємність одержуваного розв'язку. Крім того, з економічної точки зору особливий інтерес представляють системи, що мають невід'ємне рішення при будь-якому завданні вектору кінцевої продукції, тобто за будь-яких позитивних  $Y$  ( $Y > 0$ ).

Таким чином, основне питання, яке виникає при дослідженні моделі Леонтьєва полягає в наступному: чи зможе розподіл, що задається матрицею  $A$ , забезпечити додатній кінцевий попит  $Y > 0$  за всіма галузями. З математичної точки зору це означає виявлення умов, яким повинна задовольняти матриця  $A$ , щоб при будь-якому  $Y > 0$  система балансових рівнянь мала невід'ємний розв'язок. Відповідь на це питання пов'язане з поняттям продуктивності матриці  $A$ .

**Означення.** Невід'ємна матриця  $A$  називається продуктивною,

якщо існує такий невід'ємний вектор  $X > 0$ , що

$$(I - A)X > 0 \quad \text{або} \quad X > AX. \quad (9)$$

Умова (9) означає, що продукції виробляється більше, ніж йде на виробниче споживання (проміжний продукт  $AX$ ). Це, в свою чергу, означає існування додатного вектору кінцевої продукції. Таким чином, у разі продуктивної матриці  $A$  модель (6) також називається продуктивною.

Для того, щоб матриця прямих матеріальних затрат  $A$  була продуктивною, необхідно та достатньо, щоб виконувалась одна з нижче наведених умов:

1) для матриці  $(I - A)$  існує невід'ємна обернена матриця  $(I - A)^{-1} \geq 0$ ;

2) матричний ряд (ряд Неймана)

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

збігається, причому

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots = (I - A)^{-1}. \quad (10)$$

Доведення формули (10) таке: обидві частини матричного рівняння (10) множимо зліва на матрицю  $(I - A)$ , отримуємо

$$(I - A)(I + A + A^2 + A^3 + \dots) = (I - A)(I - A)^{-1}$$

або

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots - A - A^2 - A^3 - \dots = I.$$

Звідси, після зведення подібних членів, маємо  $I = I$ .

Отже, вираз (10) є справедливим.

3) найбільше за модулем власне значення  $\lambda$  матриці  $A$ , строго менше за одиницю  $\lambda < 1$ .

Простішою, однак тільки достатньою умовою продуктивності матриці  $A$  є обмеження на величину найбільшої із сум елементів матриці  $A$  в кожному стовпці або кожному рядку: матриця  $A$  є продуктивною, якщо сума елементів матриці  $A$  в кожному стовпці або кож-

ному рядку менша або дорівнює одиниці.

Проте це тільки достатня умова і матриця  $A$  може бути продуктивною і у випадку, коли сума елементів рядка або стовпця більша за одиницю.

Розглянемо розв'язок системи (6) використовуючи рівність (10). Тоді розв'язок міжгалузевого балансу матиме вигляд

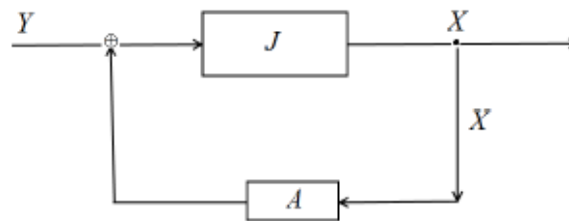
$$X = (I + A + A^2 + A^3 + \dots)Y. \quad (11)$$

Розв'язок (11) балансової моделі записаний у вигляді

$$X = Y + AY + A^2Y + A^3Y + \dots \quad (12)$$

можна інтерпретувати таким чином: початковий валовий продукт  $X$  дорівнює кінцевому продукту  $Y$ . Це означає, що  $X = Y$  є перше наближення до розв'язку (12). Однак, для виробництва валового продукту в об'ємі  $Y$  необхідні засоби виробництва у кількості  $AY$ . Це в свою чергу потребує виробити засобів виробництва у кількості  $A(AY) = A^2Y$  і т. д.

Розв'язок (12) можна тлумачити також за допомогою кібернетичної схеми (рис. 3).



**Рис. 3. Кібернетична модель з оберненим зв'язком**

Після першого проходження величини  $Y$  по ланцюгу оберненого зв'язку до початкового значення додається величина  $AY$ , яка в свою чергу, знову проходить через систему оберненого зв'язку, зростає на  $A(AY) = A^2Y$  і т. д.

Обернений зв'язок призведе до руху об'єктивний нескінченний процес, який збігається до кінцевої границі, якщо матриця  $A$  має таку властивість, що  $A^m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ , тобто коли послідовні прирости кі-

нцевого продукту  $AY, A^2Y, A^3Y, \dots$  зменшуються доти, доки не згасають.

Отже, необхідно встановити умови, при виконанні яких ця властивість справедлива, тобто, коли нескінченний ряд збігається и розв'язок задачі планування валової продукції  $X$  може бути представлений у вигляді (12).

### Умови збіжності матриці $A^m$

Необхідна та достатня умова збіжності ряду

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots \quad (13)$$

полягає в тому, щоб всі власні значення  $\lambda$  матриці  $A^m$  мали абсолютне значення строго менше за одиницю  $|\lambda| < 1$ .

*Доведення.* Помножимо характеристичне рівняння  $Ax = \lambda x$  матриці  $A$  на матрицю  $A$ .

Маємо:  $A^2x = \lambda Ax$ , або  $A^2x = \lambda(\lambda x)$ , звідки  $A^2x = \lambda^2x$ . Остання рівність задовольняється, якщо визначник системи дорівнює нулю  $|A^2 - \lambda^2I| = 0$ . Аналогічним чином знаходимо, що характеристичне рівняння матриці  $A^m$  має вигляд  $A^m x = \lambda^m x$  та є справедливим, якщо визначник дорівнює нулю:

$$|A^m - \lambda^m I| = 0. \quad (14)$$

З рівняння (14) випливає, що  $\lambda^m$  – власні значення матриці  $A^m$ . З рівняння  $A^m x = \lambda^m x$  при  $x \neq 0$  випливає, що  $A^m$  прямує до нуля  $A^m \rightarrow 0$ , якщо  $\lambda^m \rightarrow 0$ , та навпаки,  $\lambda^m \rightarrow 0$ , якщо  $A^m \rightarrow 0$ .

Отже, необхідною та достатньою умовою того, що  $A^m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , є, щоб  $\lambda^m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Ця умова задовольняється тільки тоді, коли  $|\lambda_i| < 1$ .

З'ясуємо економічний зміст умови  $|\lambda_i| < 1$ . На основі рівняння  $A^m x = \lambda^m x$  можемо записати  $A^m x = \lambda A^{m-1} x$ . Тому розв'язок

$$X = Y + AY + A^2Y + A^3Y + \dots \quad (12)$$

можна записати так

$$X = Y + (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots)AY.$$

Якщо  $|\lambda_i| < 1$ , абсолютні значення послідовних приростів валового продукту зменшуються з коефіцієнтом  $|\lambda|$ . Таким чином, абсолютні значення власних значень  $|\lambda|$  є коефіцієнтами зменшення послідовних приростів валового продукту в ланцюгу оберненого зв'язку.

**Економічний сенс матриці  $S = (I - A)^{-1}$**

Отже, з урахуванням позначення  $S = (I - A)^{-1}$  для продуктивної матриці  $A$  розв'язок системи (6) балансових рівнянь можна записати:

$$X = SY,$$

тобто на основі коефіцієнтів прямих витрат за заданим кінцевим продуктом відразу можна визначити валові випуски галузей. У цьому закладена основна ідея використання міжгалузевих моделей для планування виробництва. З лінійності моделі Леонтьєва випливає, що приріст  $\Delta Y$  вектору  $Y$  і відповідний приріст  $\Delta X$  вектору  $X$  пов'язані між собою рівнянням  $\Delta X = S\Delta Y$ . Отже, матриця дозволяє обчислити зміну валового випуску, викликане зміною кінцевого споживання. Тому матрицю  $S = (I - A)^{-1}$  часто називають *матричним мультиплікатором* або *мультиплікатором Леонтьєва*.

Позначимо через  $s_{ik}$   $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, n}$  елементи матриці  $S$  і з'ясуємо їх економічний зміст.

Розглянемо окремий випадок: нехай одну одиницю кінцевої продукції виробляє деяка  $k$ -та галузь, а інші галузі кінцевої продукції не виробляють, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1k} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2k} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i1} & s_{i2} & \dots & s_{ik} & \dots & s_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nk} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1k} \\ s_{2k} \\ \vdots \\ s_{ik} \\ \vdots \\ s_{nk} \end{pmatrix}.$$

Звідси можна зробити висновок, що коефіцієнти  $s_{ik}$   $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, n}$  матриці  $S = (I - A)^{-1}$  представляють витрати валової продукції, яку повинна виготовити  $i$ -а галузь, щоб  $k$ -а галузь випустила одну одиницю кінцевої продукції. Тому елементи  $s_{ik}$  називають *коефіцієнтами повних матеріальних витрат*, а матрицю  $S$  – *матрицею повних матеріальних витрат* (матеріальні витрати в даному випадку – це продукція, виготовлена об'єктами даної економічної системи).

Матриця коефіцієнтів *непрямих витрат* визначається як різниця між матрицею коефіцієнтами повних матеріальних витрат  $S = (I - A)^{-1}$  та прямих витрат  $A$ .

### Приклад

Для трьох галузевої економічної системи задані: матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

та вектор кінцевої продукції  $Y = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{bmatrix}$ .

Знайти коефіцієнти повних матеріальних витрат та вектор валової продукції, заповнити схему міжгалузевого матеріального балансу.

**Розв'язання:** за моделлю Леонтьєва:  $X = AX + Y$ . Звідси маємо

$$X = (I - A)^{-1}Y.$$

$$\text{Відповідь: } X = \begin{bmatrix} 775.3 \\ 510.1 \\ 729.6 \end{bmatrix}.$$

Матриця повних матеріальних витрат:  $B = I - A$ .

$$\text{Відповідь: } B = \begin{bmatrix} 2.041 & 0.612 & 1.02 \\ 0.816 & 2.245 & 0.408 \\ 0.867 & 0.510 & 1.684 \end{bmatrix}$$

**Схема міжгалузевого матеріального балансу:**

Галузі, які виробляють	Галузі, які споживають				
	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	$x_{11}$ ( $x_{ij} = a_{ij}X_j$ )	$x_{12}$	$x_{13}$	$Y_1$	$X_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + Y_1$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$Y_2$	$X_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + Y_2$
3	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$Y_3$	$X_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + Y_3$
Умовно чиста продукція	$z_1 = X_1 - (x_{11} + x_{21} + x_{31})$	$z_2$	$z_3$	$\sum_{i=1}^n z_i = \sum_{j=1}^n Y_j$	
Валова продукція	$X_1$	$X_2$	$X_3$		$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{j=1}^n X_j$

Галузі, які виробляють	Галузі, які споживають				
	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	232,6	51	291,8	200	775,3
2	155,1	255	0	100	510,1
3	232,6	51	145,9	300	729,6
Умовно чиста продукція	155	153,1	291,9	600	
Валова продукція	775,3	510,1	729,6		2015

### Задачі для самостійного розв'язування

У таблиці наведені дані про виконання балансу за звітний період. Знайти вектор валової продукції та заповнити схему міжгалузевого матеріального балансу, якщо кінцеве споживання першої галузі збільшиться втричі, а другої та третьої залишиться на тому ж рівні.

#### Варіант 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	7	21	23	72	123
2	12	15	34	123	184
3	15	13	12	100	140
Умовно чиста продукція	89	135	71	295	
Валова продукція	123	184	140		447

#### Варіант 2

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	12	21	23	54	110
2	10	12	34	145	201
3	15	15	23	100	153
Умовно чиста продукція	73	153	73	299	
Валова продукція	110	201	153		464

#### Варіант 3

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	11	15	34	80	140
2	25	23	34	123	205
3	15	13	32	100	160
Умовно чиста продукція	89	154	60	303	
Валова продукція	140	205	160		505

#### Варіант 4

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	12	25	23	97	157
2	34	15	34	67	150
3	54	27	28	100	209
Умовно чиста продукція	57	83	124	264	
Валова продукція	157	150	209		516

#### Варіант 5

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	23	45	23	67	158
2	32	15	34	76	157
3	34	13	46	190	283
Умовно чиста продукція	69	84	180	333	
Валова продукція	158	157	283		598

#### Варіант 6

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	45	56	23	120	244
2	32	15	34	100	181
3	15	13	42	100	170
Умовно чиста продукція	152	97	71	320	
Валова продукція	244	181	170		595

### Варіант 7

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	24	31	23	60	138
2	45	15	34	50	144
3	48	12	12	100	172
Умовно чиста продукція	21	86	103	210	
Валова продукція	138	144	172		454

### Варіант 8

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	52	37	34	80	203
2	10	15	34	124	183
3	10	25	12	200	247
Умовно чиста продукція	131	106	167	404	
Валова продукція	203	183	247		633

### Варіант 9

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	23	27	64	90	204
2	42	15	54	400	511
3	15	28	12	100	155
Умовно чиста продукція	124	441	25	590	
Валова продукція	204	511	155		870

### Варіант 10

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	54	33	23	54	164
2	12	15	34	78	139
3	22	13	18	100	153
Умовно чиста продукція	76	78	78	232	
Валова продукція	164	139	153		456

### Варіант 11

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	15	33	55	99	202
2	12	15	34	123	184
3	28	44	12	100	184
Умовно чиста продукція	147	92	83	322	
Валова продукція	202	184	184		570

### Варіант 12

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	42	43	38	95	218
2	61	15	34	461	571
3	15	12	12	100	139
Умовно чиста продукція	100	501	55	656	
Валова продукція	218	571	139		928

### Варіант 13

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	21	21	58	60	160
2	56	45	34	90	225
3	15	13	12	100	140
Умовно чиста продукція	68	146	36	250	
Валова продукція	160	225	140		525

### Варіант 14

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	23	61	24	110	218
2	43	52	34	120	249
3	15	12	12	100	139
Умовно чиста продукція	137	124	69	330	
Валова продукція	218	249	139		606

### Варіант 15

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	64	10	15	70	159
2	12	15	34	90	151
3	10	13	12	120	155
Умовно чиста продукція	73	113	94	280	
Валова продукція	159	151	155		465

### Варіант 16

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	63	21	23	400	507
2	25	15	34	300	374
3	15	13	12	100	140
Умовно чиста продукція	404	325	71	800	
Валова продукція	507	374	140		1021

### Варіант 17

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	10	21	50	150	231
2	12	10	34	200	256
3	15	13	12	400	440
Умовно чиста продукція	194	212	344	750	
Валова продукція	231	256	440		927

### Варіант 18

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	35	20	37	350	442
2	47	33	34	250	364
3	15	13	12	200	240
Умовно чиста продукція	345	298	157	800	
Валова продукція	442	364	240		1046

### Варіант 19

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	25	35	65	260	385
2	12	24	34	230	300
3	15	13	12	400	440
Умовно чиста продукція	333	228	329	890	
Валова продукція	385	300	440		1125

### Варіант 20

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	29	37	54	530	650
2	10	48	34	300	392
3	27	13	12	230	282
Умовно чиста продукція	584	294	182	1060	
Валова продукція	650	392	282		1324

### Варіант 21

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	70	10	5	190	275
2	15	15	34	65	129
3	15	35	12	300	362
Умовно чиста продукція	175	69	311	555	
Валова продукція	275	129	362		766

**Варіант 22**

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	80	20	25	700	825
2	15	33	34	200	282
3	15	53	12	100	180
Умовно чиста продукція	715	176	109	1000	
Валова продукція	825	282	180		1287

**Варіант 23**

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	19	10	35	450	514
2	10	15	34	350	409
3	15	10	12	600	637
Умовно чиста продукція	470	374	556	1400	
Валова продукція	514	409	637		1560

**Варіант 24**

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	75	35	26	120	256
2	10	15	34	230	289
3	15	13	12	500	540
Умовно чиста продукція	156	226	468	850	
Валова продукція	256	289	540		1085

### Варіант 25

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	65	34	35	260	394
2	23	15	34	270	342
3	15	10	12	280	317
Умовно чиста продукція	291	283	236	810	
Валова продукція	394	342	317		1053

### Варіант 26

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	34	56	54	170	314
2	35	15	34	236	320
3	36	24	12	100	172
Умовно чиста продукція	209	225	72	506	
Валова продукція	314	320	172		806

### Варіант 27

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	31	42	54	600	727
2	37	15	34	700	786
3	48	13	12	290	363
Умовно чиста продукція	611	716	263	1590	
Валова продукція	727	786	363		1876

### Варіант 28

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	25	67	23	540	655
2	67	15	34	460	576
3	15	36	12	200	263
Умовно чиста продукція	548	458	194	1200	
Валова продукція	655	576	263		1494

### Варіант 29

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	25	54	58	548	685
2	26	15	34	690	765
3	27	13	12	300	352
Умовно чиста продукція	607	683	248	1538	
Валова продукція	685	765	352		1802

### Варіант 30

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	34	46	34	680	794
2	12	15	34	400	461
3	15	13	35	600	663
Умовно чиста продукція	733	387	560	1680	
Валова продукція	794	461	663		1918

### Варіант 31

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	4	45	54	534	637
2	5	15	34	431	485
3	78	9	12	200	299
Умовно чиста продукція	550	416	199	1165	
Валова продукція	637	485	299		1421

### Варіант 32

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	81	3	5	570	659
2	12	15	34	430	491
3	100	13	12	100	225
Умовно чиста продукція	466	460	174	1100	
Валова продукція	659	491	225		1375

### Варіант 33

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	33	22	25	340	420
2	12	16	34	540	602
3	12	12	12	500	536
Умовно чиста продукція	363	552	465	1380	
Валова продукція	420	602	536		1558

### Варіант 34

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	43	12	26	260	341
2	45	15	34	270	364
3	11	16	12	280	319
Умовно чиста продукція	242	321	247	810	
Валова продукція	341	364	319		1024

### Варіант 35

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	43	48	25	470	586
2	12	15	34	320	381
3	18	46	12	400	476
Умовно чиста продукція	513	272	405	1190	
Валова продукція	586	381	476		1443

### Варіант 36

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	24	46	58	129	257
2	25	15	34	450	524
3	37	13	12	100	162
Умовно чиста продукція	171	450	58	679	
Валова продукція	257	524	162		943

### Варіант 37

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	45	34	47	450	576
2	10	15	53	540	618
3	12	45	12	600	669
Умовно чиста продукція	509	524	557	1590	
Валова продукція	576	618	669		1863

### Варіант 38

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	47	21	48	670	786
2	12	15	34	230	291
3	15	13	12	400	440
Умовно чиста продукція	712	242	346	1300	
Валова продукція	786	291	440		1517

### Варіант 39

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	43	65	10	780	898
2	35	15	34	760	844
3	15	13	12	100	140
Умовно чиста продукція	805	751	84	1640	
Валова продукція	898	844	140		1882

### Варіант 40

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	23	54	25	700	802
2	24	15	34	600	673
3	56	45	12	100	213
Умовно чиста продукція	699	559	142	1400	
Валова продукція	802	673	213		1688

## Комп'ютерний практикум за темою «Балансові моделі з факторами виробництва»

**Теоретичні відомості.** Для функціонування економічних об'єктів необхідна не тільки продукція інших об'єктів цієї системи, але і такі фактори виробництва, як виробничі фонди (обладнання, виробничі площі, праця і т. д. Крім того, економічна система може отримувати продукцію з інших економічних систем. Обсяги цих факторів зазвичай обмежені, що є причиною того, що не всякий вектор кінцевого продукту може бути вироблений економічною системою навіть у разі продуктивності матриці  $A$ . Тому для визначення плану необхідно розрахувати потребу системи в факторах виробництва. Допустимим планом буде лише план, при якому ці потреби не перевищують наявних обсягів факторів.

Потреба системи в факторах виробництва позначимо  $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ , де  $f_i$  – потреба в  $i$ -му факторі. Потреба може вимірюватися як в натуральних одиницях (годинах, кв. м., т., та ін.), так і в грошових одиницях. Кожен економічний об'єкт будемо характеризувати вектором витрат факторів виробництва на одиницю продукції:  $B_j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj})$ ,  $b_{ij}$  – кількість  $i$ -го фактору, яка необхідна об'єкту  $j$  для випуску одиниці продукції. Величини  $b_{ij}$  називають коефіцієнтами прямих витрат факторів виробництва, а матрицю  $B$  – матрицею прямих витрат факторів виробництва. Кожен стовпець матриці

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

визначає прямі витрати факторів певної галузі, а кожен  $i$ -й рядок описує потребу системи в  $i$ -му факторі виробництва. Вважаємо, що для факторів виробництва виконуються властивості лінійності і комплексності споживання.

Якщо  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  – вектор валового випуску продукції, то сумарна потреба економічної системи в  $i$ -му факторі:  $\sum_{j=1}^n b_{ij} X_j = F_i$ .

Це співвідношення в матричній формі запишеться так:

$$F = BX = BSY, \quad (15),$$

де  $X = SY$ ,  $S = (I - A)^{-1}$ .

Матриця  $B^* = BS$  визначає повні витрати факторів виробництва на одиницю продукції.

План кінцевої продукції є допустимим, якщо необхідні для його реалізації об'єми факторів виробництва не перевищують їх наявність, а саме, виконується співвідношення:

$$BSY \leq D, \quad (16)$$

де  $D = (d_1, d_2, \dots, d_m)$  – вектор кількості кожного фактору виробництва.

Запишемо балансову модель с факторами виробництва:

$$\begin{cases} AX + Y = X \\ X \geq 0 \\ BSD \leq D \end{cases} \quad (17)$$

На відміну від простої балансової моделі ця модель навіть у разі продуктивної матриці має розв'язок не для будь-якого  $Y > 0$ , а тільки для  $Y$ , який задовольняє співвідношення (16), тобто в даному випадку вже не можна говорити про задоволення будь-якого кінцевого попиту.

Тому перш ніж приступати до розв'язування системи балансових рівнянь необхідно перевірити справедливість умови (16) при заданому плані. Якщо умова (16) не виконується, то слід змінити обсяг випуску кінцевого продукту, зберігши його структуру, тобто всі елементи плану повинні бути змінені в одне і теж число разів. Коефіцієнт масштабування при цьому визначається таким чином:

$$k = \min_i \left( \frac{d_i}{f_i} \right), \quad i = \overline{1, m}.$$

### Алгоритм розв'язування задачі

**1 крок.** Знаходимо матрицю  $A$ :  $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Перевіряємо її продуктивність.

**2 крок.** Збільшимо кінцеву продукцію першої галузі вдвічі  $Y^* = \begin{pmatrix} 2Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$

**3 крок.** Знаходимо валовий випуск  $X^*$  за нових умов. Для цього розв'язуємо матричне рівняння  $X^* = AX^* + Y^*$

**4 крок.** Знаходимо матрицю прямих витрат факторів виробництва  $B$ :

$b_{ij} = \frac{f_{ij}}{X_j}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Перевіряємо її продуктивність.

**5 крок.** План кінцевої продукції є допустимим, якщо необхідні для його реалізації об'єми факторів виробництва не перевищують їх наявність, а саме, виконується співвідношення:

$$F = B(I - A)^{-1}Y^* \leq D, \quad (16)$$

де  $D = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T$  – вектор кількості кожного фактору виробництва.

**6 крок.** Якщо умова (16) виконується, то переходимо до кроку 9. Якщо умова (16) не виконується, то слід змінити обсяг випуску кінцевого продукту, зберігши його структуру, тобто всі елементи плану повинні бути змінені в одне і теж число разів. Коефіцієнт масштабування при цьому визначається таким чином:  $k = \min_i \left( \frac{d_i}{f_i} \right)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

**7 крок.** Знаходимо новий кінцевий випуск  $kY^* = \begin{pmatrix} k2Y_1 \\ kY_2 \\ kY_3 \end{pmatrix}$ .

**8 крок.** Знаходимо валовий випуск  $X^{**}$  за нових умов. Для цього розв'язуємо матричне рівняння  $X^{**} = AX^{**} + kY^*$ .

**9 крок.** Заповнити схему міжгалузевого балансу.

### Приклад

У таблиці 1 наведені дані про виконання балансу за звітний період. У таблиці 2 наведені дані про використання факторів виробництва.

Вияснити чи можливо збільшити кінцеву продукцію першої галузі вдвічі за наявних обсягів факторів виробництва  $D = \begin{pmatrix} 124 \\ 150 \end{pmatrix}$ . Якщо ні, то знайти нове планове завдання випуску кінцевої продукції. Знайти вектор валової продукції та заповнити схему міжгалузевого балансу.

Таблиця 1

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	45	56	56	157
2	12	15	200	227
Умовно чиста продукція	100	156	256	
Валова продукція	157	227		384

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі	
	1	2
1	62	47
2	59	42

#### Розв'язання:

**1 крок.** Знаходимо матрицю  $A: a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Перевіряємо її продуктивність.

$$A = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,25 \\ 0,08 & 0,67 \end{pmatrix}. \text{ Сума елементів в кожному рядку та стовпчику}$$

не перевищують за модулем одиницю. Достатня умова продуктивності виконана.

**2 крок.** Збільшимо кінцеву продукцію першої галузі вдвічі

$$Y^* = \begin{pmatrix} 2Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 56 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

**3 крок.**  $X^* = \begin{pmatrix} 237,79 \\ 233,61 \end{pmatrix}$

**4 крок.** Знаходимо матрицю прямих витрат факторів виробництва  $B$ :

$b_{ij} = \frac{f_{ij}}{X_j}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Перевіряємо її продуктивність.

$$B = \begin{pmatrix} 0,39 & 0,2 \\ 0,37 & 0,18 \end{pmatrix}. \text{ Сума елементів в кожному рядку та стовпчику}$$

не перевищують за модулем одиницю. Достатня умова продуктивності виконана.

**5 крок.** План кінцевої продукції є допустимим, якщо необхідні для його реалізації об'єми факторів виробництва не перевищують їх наявність, а саме, виконується співвідношення:

$$F = \begin{pmatrix} 142,27 \\ 132,58 \end{pmatrix} \leq D = \begin{pmatrix} 124 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

**6 крок.** Так як умова  $F = \begin{pmatrix} 142,27 \\ 132,58 \end{pmatrix} \leq D = \begin{pmatrix} 124 \\ 150 \end{pmatrix}$  не виконується, то

слід змінити обсяг випуску кінцевого продукту, зберігши його структуру, тобто всі елементи плану повинні бути змінені в одне і теж число разів. Коефіцієнт масштабування при цьому визначається таким

чином:  $k = \min_i \left( \frac{124}{142,27}, \frac{150}{132,58} \right) = \min_i (0,87, 1,13) = 0,87$ .

**7 крок.** Знаходимо новий кінцевий випуск

$$Y^* = k \begin{pmatrix} 2Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = 0,87 \begin{pmatrix} 112 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97,62 \\ 174,31 \end{pmatrix}.$$

**8 крок.** Знаходимо валовий випуск  $X^{**}$  за нових умов. Для цього розв'язуємо матричне рівняння  $X^{**} = AX^{**} + kY^*$  та отримуємо таку відповідь  $X^{**} = \begin{pmatrix} 207,25 \\ 203,61 \end{pmatrix}$ .

**9 крок.** Заповнюємо схему міжгалузевого балансу.

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	59,402211	50,2295619	97,615941	207,24771
2	15,8405896	13,4543469	174,31418	203,60912
Умовно чиста продукція	132,0049133	139,925208	271,930121	
Валова продукція	207,2477139	203,609117		410,85683

### Задачі для самостійного розв'язування

У таблиці 1 наведені дані про виконання балансу за звітний період. У таблиці 2 наведені дані про використання факторів виробництва. Вияснити чи можливо збільшити кінцеву продукцію першої галузі

вдвічі за наявних обсягів факторів виробництва  $D = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix}$ . Якщо ні,

то знайти нове планове завдання випуску кінцевої продукції. Знайти вектор валової продукції та заповнити схему міжгалузевого балансу.

#### Варіант 1

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	12	21	23	54	110
2	10	12	34	145	201
3	15	15	23	100	153
Умовно чиста продукція	73	153	73	299	
Валова продукція	110	201	153		464

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	35	65	50
2	45	42	41
3	34	53	35

**Варіант 2**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	11	15	34	80	140
2	25	23	34	123	205
3	15	13	32	100	160
Умовно чиста продукція	89	154	60	303	
Валова продукція	140	205	160		505

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	23	43	50
2	43	42	41
3	45	67	35

**Варіант 3**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	12	25	23	97	157
2	34	15	34	67	150
3	54	27	28	100	209
Умовно чиста продукція	57	83	124	264	
Валова продукція	157	150	209		516

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	35	35	34
2	54	42	41
3	34	23	35

**Варіант 4**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	23	45	23	67	158
2	32	15	34	76	157
3	34	13	46	190	283
Умовно чиста продукція	69	84	180	333	
Валова продукція	158	157	283		598

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	35	65	45
2	25	42	41
3	54	54	35

**Варіант 5**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	45	56	23	120	244
2	32	15	34	100	181
3	15	13	42	100	170
Умовно чиста продукція	152	97	71	320	
Валова продукція	244	181	170		595

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	24	65	50
2	15	42	41
3	78	53	35

**Варіант 6**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	24	31	23	60	138
2	45	15	34	50	144
3	48	12	12	100	172
Умовно чиста продукція	21	86	103	210	
Валова продукція	138	144	172		454

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	55	35	50
2	45	42	56
3	21	53	35

**Варіант 7**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	52	37	34	80	203
2	10	15	34	124	183
3	10	25	12	200	247
Умовно чиста продукція	131	106	167	404	
Валова продукція	203	183	247		633

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	54	65	50
2	45	56	41
3	24	53	35

**Варіант 8**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	23	27	64	90	204
2	42	15	54	400	511
3	15	28	12	100	155
Умовно чиста продукція	124	441	25	590	
Валова продукція	204	511	155		870

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	26	65	70
2	45	39	41
3	34	53	35

**Варіант 9**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	54	33	23	54	164
2	12	15	34	78	139
3	22	13	18	100	153
Умовно чиста продукція	76	78	78	232	
Валова продукція	164	139	153		456

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	53	45	50
2	45	45	41
3	34	53	35

**Варіант 10**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	15	33	55	99	202
2	12	15	34	123	184
3	28	44	12	100	184
Умовно чиста продукція	147	92	83	322	
Валова продукція	202	184	184		570

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	45	65	50
2	45	24	41
3	34	43	35

**Варіант 11**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	42	43	38	95	218
2	61	15	34	461	571
3	15	12	12	100	139
Умовно чиста продукція	100	501	55	656	
Валова продукція	218	571	139		928

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	24	65	43
2	45	34	41
3	34	53	45

**Варіант 12**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	21	21	58	60	160
2	56	45	34	90	225
3	15	13	12	100	140
Умовно чиста продукція	68	146	36	250	
Валова продукція	160	225	140		525

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	31	75	50
2	55	35	41
3	34	53	35

**Варіант 13**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	23	61	24	110	218
2	43	52	34	120	249
3	15	12	12	100	139
Умовно чиста продукція	137	124	69	330	
Валова продукція	218	249	139		606

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	32	65	56
2	45	34	41
3	34	45	35

**Варіант 14**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	64	10	15	70	159
2	12	15	34	90	151
3	10	13	12	120	155
Умовно чиста продукція	73	113	94	280	
Валова продукція	159	151	155		465

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	56	45	50
2	45	42	41
3	34	46	35

**Варіант 15**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	63	21	23	400	507
2	25	15	34	300	374
3	15	13	12	100	140
Умовно чиста продукція	404	325	71	800	
Валова продукція	507	374	140		1021

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	35	56	65
2	45	45	24
3	45	53	35

**Варіант 16**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	10	21	50	150	231
2	12	10	34	200	256
3	15	13	12	400	440
Умовно чиста продукція	194	212	344	750	
Валова продукція	231	256	440		927

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	24	65	65
2	45	45	41
3	67	53	35

**Варіант 17**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	35	20	37	350	442
2	47	33	34	250	364
3	15	13	12	200	240
Умовно чиста продукція	345	298	157	800	
Валова продукція	442	364	240		1046

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	35	45	50
2	45	45	46
3	34	56	35

**Варіант 18**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	25	35	65	260	385
2	12	24	34	230	300
3	15	13	12	400	440
Умовно чиста продукція	333	228	329	890	
Валова продукція	385	300	440		1125

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	56	65	50
2	45	42	45
3	67	53	35

**Варіант 19**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	29	37	54	530	650
2	10	48	34	300	392
3	27	13	12	230	282
Умовно чиста продукція	584	294	182	1060	
Валова продукція	650	392	282		1324

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	54	65	50
2	45	42	24
3	34	53	35

**Варіант 20**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	70	10	5	190	275
2	15	15	34	65	129
3	15	35	12	300	362
Умовно чиста продукція	175	69	311	555	
Валова продукція	275	129	362		766

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	25	65	50
2	45	42	41
3	34	53	35

**Варіант 21**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	80	20	25	700	825
2	15	33	34	200	282
3	15	53	12	100	180
Умовно чиста продукція	715	176	109	1000	
Валова продукція	825	282	180		1287

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	27	65	50
2	45	42	41
3	56	12	35

**Варіант 22**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	19	10	35	450	514
2	10	15	34	350	409
3	15	10	12	600	637
Умовно чиста продукція	470	374	556	1400	
Валова продукція	514	409	637		1560

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	17	35	35
2	45	42	41
3	18	53	35

**Варіант 23**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	75	35	26	120	256
2	10	15	34	230	289
3	15	13	12	500	540
Умовно чиста продукція	156	226	468	850	
Валова продукція	256	289	540		1085

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	15	19	50
2	45	42	41
3	22	16	35

**Варіант 24**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	65	34	35	260	394
2	23	15	34	270	342
3	15	10	12	280	317
Умовно чиста продукція	291	283	236	810	
Валова продукція	394	342	317		1053

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	12	23	22
2	45	42	41
3	22	6	35

**Варіант 25**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	34	56	54	170	314
2	35	15	34	236	320
3	36	24	12	100	172
Умовно чиста продукція	209	225	72	506	
Валова продукція	314	320	172		806

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	11	15	29
2	14	24	41
3	16	12	11

**Варіант 26**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	31	42	54	600	727
2	37	15	34	700	786
3	48	13	12	290	363
Умовно чиста продукція	611	716	263	1590	
Валова продукція	727	786	363		1876

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	12	14	11
2	11	15	41
3	12	15	12

**Варіант 27**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	25	67	23	540	655
2	67	15	34	460	576
3	15	36	12	200	263
Умовно чиста продукція	548	458	194	1200	
Валова продукція	655	576	263		1494

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	35	15	6
2	12	5	6
3	16	13	7

**Варіант 28**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	25	54	58	548	685
2	26	15	34	690	765
3	27	13	12	300	352
Умовно чиста продукція	607	683	248	1538	
Валова продукція	685	765	352		1802

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	10	5	50
2	12	42	41
3	34	32	35

**Варіант 29**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	34	46	34	680	794
2	12	15	34	400	461
3	15	13	35	600	663
Умовно чиста продукція	733	387	560	1680	
Валова продукція	794	461	663		1918

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	10	65	50
2	45	42	41
3	34	10	10

**Варіант 30**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	4	45	54	534	637
2	5	15	34	431	485
3	78	9	12	200	299
Умовно чиста продукція	550	416	199	1165	
Валова продукція	637	485	299		1421

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	12	11	11
2	23	12	9
3	11	53	12

**Варіант 31**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	81	3	5	570	659
2	12	15	34	430	491
3	100	13	12	100	225
Умовно чиста продукція	466	460	174	1100	
Валова продукція	659	491	225		1375

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	32	65	25
2	65	55	55
3	65	65	5

**Варіант 32**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	33	22	25	340	420
2	12	16	34	540	602
3	12	12	12	500	536
Умовно чиста продукція	363	552	465	1380	
Валова продукція	420	602	536		1558

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	12	34	50
2	45	42	41
3	23	45	35

**Варіант 33**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	43	12	26	260	341
2	45	15	34	270	364
3	11	16	12	280	319
Умовно чиста продукція	242	321	247	810	
Валова продукція	341	364	319		1024

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	23	45	50
2	45	42	41
3	24	45	45

**Варіант 34**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	43	48	25	470	586
2	12	15	34	320	381
3	18	46	12	400	476
Умовно чиста продукція	513	272	405	1190	
Валова продукція	586	381	476		1443

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	25	45	50
2	45	42	41
3	34	45	55

**Варіант 35**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	24	46	58	129	257
2	25	15	34	450	524
3	37	13	12	100	162
Умовно чиста продукція	171	450	58	679	
Валова продукція	257	524	162		943

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	55	65	45
2	15	42	41
3	45	55	35

**Варіант 36**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	45	34	47	450	576
2	10	15	53	540	618
3	12	45	12	600	669
Умовно чиста продукція	509	524	557	1590	
Валова продукція	576	618	669		1863

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	25	25	25
2	45	42	41
3	34	53	35

**Варіант 37**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	47	21	48	670	786
2	12	15	34	230	291
3	15	13	12	400	440
Умовно чиста продукція	712	242	346	1300	
Валова продукція	786	291	440		1517

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	15	65	15
2	45	42	41
3	34	15	35

**Варіант 38**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	43	65	10	780	898
2	35	15	34	760	844
3	15	13	12	100	140
Умовно чиста продукція	805	751	84	1640	
Валова продукція	898	844	140		1882

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	16	65	17
2	45	16	41
3	17	53	16

**Варіант 39**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	23	54	25	700	802
2	24	15	34	600	673
3	56	45	12	100	213
Умовно чиста продукція	699	559	142	1400	
Валова продукція	802	673	213		1688

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	25	65	25
2	45	42	41
3	34	25	35

**Варіант 40**

Таблиця 1

	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	7	21	23	72	123
2	12	15	34	123	184
3	15	13	12	100	140
Умовно чиста продукція	89	135	71	295	
Валова продукція	123	184	140		447

Таблиця 2

Фактори виробництва	Галузі		
	1	2	3
1	35	65	50
2	45	42	41
3	34	53	35

## Комп'ютерний практикум за темою «Цінові балансові моделі»

**Теоретичні відомості.** В балансових моделях об'єми валового випуску  $X$  і об'єми кінцевого випуску  $Y$  виражені в матеріальних або в натуральних одиницях – тонах, кілограмах, метрах і т. д. – тому балансову модель (6) називають балансовою моделлю в натуральному вираженні. Якщо змінні моделі (6) виражені в грошових одиницях, то балансову модель називають моделлю Леонтьєва в вартісному вираженні.

З метою зведення балансової моделі у натуральній формі до вартісної введемо вартості  $p_i$  одиниці продукції, яка випускається галузю  $i$ . Об'єм валової продукції  $X_i^*$  та об'єм кінцевої продукції  $Y_i^*$  галузі  $i$  в вартісному вигляді відповідно дорівнюють

$$X_i^* = p_i X_i, \quad Y_i^* = p_i Y_i.$$

Тоді вектори валової продукції  $X^*$  та кінцевої продукції  $Y^*$  в вартісному вигляді матимуть вигляд

$$X^* = \begin{bmatrix} p_1 X_1 \\ p_2 X_2 \\ \dots \\ p_n X_n \end{bmatrix} = PX, \quad Y^* = \begin{bmatrix} p_1 Y_1 \\ p_2 Y_2 \\ \dots \\ p_n Y_n \end{bmatrix} = PY. \quad (17)$$

де  $P$  – діагональна  $n \times n$  матриця.

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}.$$

Помноживши модель Леонтьєва  $X = AX + Y$  на матрицю  $P$  зліва, отримуємо

$$PX = PAX + PY,$$

або з урахуванням (16):

$$X^* = PAX + Y^*. \quad (18)$$

Так як  $X^* = PX$ , то  $X = P^{-1}X^*$ , і з виразу (18) матимемо

$$X^* = PAP^{-1}X^* + Y^*,$$

або

$$X^* = A^*X^* + Y^*. \quad (19)$$

де  $A^* = PAP^{-1}$ .

Матриця  $A^* = PAP^{-1}$  представляє собою матрицю прямих матеріальних витрат, виражену в грошових одиницях, її елементами є коефіцієнти прямих матеріальних витрат  $a_{ij}^*$  у вартісному вираженні, які пов'язані з коефіцієнтами прямих матеріальних витрат  $a_{ij}$  у натуральному вираженні співвідношенням

$$a_{ij}^* = p_i a_{ij} p_j^{-1}. \quad (20)$$

Як зазначалося вище, що розглядаючи схему балансу за стовпцями, можна зробити очевидний висновок: підсумок матеріальних витрат будь-якої галузі, що споживає, та її умовно-чистої продукції дорівнює валової продукції цієї галузі, а саме

$$X_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} X_j + Z_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Помноживши рівність (1) на матрицю  $P$  зліва, отримаємо

$$PX = PAX + PZ,$$

або

$$X^* = PAX + Z^*. \quad (21)$$

де

$$X^* = \begin{bmatrix} p_1 X_1 \\ p_2 X_2 \\ \dots \\ p_n X_n \end{bmatrix} = PX, \quad Z^* = \begin{bmatrix} p_1 Z_1 \\ p_2 Z_2 \\ \dots \\ p_n Z_n \end{bmatrix} = PZ. \quad (22)$$

Так як  $X^* = PX$ , то  $X = P^{-1}X^*$ , і з виразу (21) матимемо

$$X^* = PAP^{-1}X^* + Z^*,$$

або

$$X^* = A^*X^* + Z^*. \quad (23)$$

де  $A^* = PAP^{-1}$ .

Покладемо, що додана вартість  $Z_j^*$ , пропорційна обсягу продукції  $Z_j^* = r_j X_j^*$ , тоді з (23) маємо

$$X_j^* = \sum_{i=1}^n a_{ij}^* X_j^* + r_j X_j^*, \quad j = \overline{1, n}. \quad (24)$$

З економічних міркувань природно припустити, що  $X_j^* \neq 0$ , тоді з рівності (24) отримуємо

$$1 = \sum_{i=1}^n a_{ij}^* + r_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (25)$$

Помножимо (25) справа на  $p_j$  ( $p_j \neq 0$ )

$$p_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}^* p_j + r_j p_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (26)$$

Враховуючи співвідношення (20), маємо



	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція	$v$
1	50	54	54	500	658	28
2	75	32	34	600	741	23
3	36	12	24	300	372	12
Умовно чиста продукція	497	643	260	1400		
Валова продукція	658	741	372		1771	

**Розв'язання.**

Вектор цін  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$  визначаємо з рівняння

$$\begin{aligned}
 p &= A^T p + v, \\
 (I - A^T)p &= v, \\
 p &= (I - A^T)^{-1}v,
 \end{aligned}$$

де  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$  – вектор норм доданих вартостей.

Матрицю прямих витрат  $A$  знаходимо використовуючи дані таблиці за формулою

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i, j = \overline{1,3}.$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{X_1} & \frac{x_{12}}{X_2} & \frac{x_{13}}{X_3} \\ \frac{x_{21}}{X_1} & \frac{x_{22}}{X_2} & \frac{x_{23}}{X_3} \\ \frac{x_{31}}{X_1} & \frac{x_{32}}{X_2} & \frac{x_{33}}{X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{658} & \frac{54}{741} & \frac{54}{372} \\ \frac{75}{658} & \frac{32}{741} & \frac{34}{372} \\ \frac{36}{658} & \frac{12}{741} & \frac{24}{372} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,076 & 0,073 & 0,145 \\ 0,114 & 0,043 & 0,091 \\ 0,055 & 0,016 & 0,065 \end{pmatrix}.$$

Матриця прямих витрат  $A$  є продуктивною за достатньою умовою продуктивності: сума елементів матриці  $A$  в кожному стовпці або кожному рядку менша одиниці.

Далі, знаходимо:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0,076 & 0,114 & 0,055 \\ 0,073 & 0,043 & 0,016 \\ 0,145 & 0,091 & 0,065 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I - A^T = \begin{pmatrix} 0,924 & -0,114 & -0,055 \\ -0,073 & 0,957 & -0,016 \\ -0,145 & -0,091 & 0,935 \end{pmatrix},$$

$$(I - A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,104 & 0,138 & 0,067 \\ 0,087 & 1,058 & 0,023 \\ 0,18 & 0,125 & 1,082 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} p &= (I - A^T)^{-1}v = \\ &= (I - A^T)^{-1}v = \begin{pmatrix} 1,104 & 0,138 & 0,067 \\ 0,087 & 1,058 & 0,023 \\ 0,18 & 0,125 & 1,082 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34,876 \\ 27,048 \\ 20,881 \end{pmatrix}. \\ p &= \begin{pmatrix} 34,876 \\ 27,048 \\ 20,881 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Збільшуємо норму доданої вартості в перший галузі на 10%

$$v' = \begin{pmatrix} 30,8 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix}$$

та визначаємо новий вектор  $p'$  врівноважених цін

$$\begin{aligned} p' &= (I - A^T)^{-1}v' = \\ &= (I - A^T)^{-1}v' = \begin{pmatrix} 1,104 & 0,138 & 0,067 \\ 0,087 & 1,058 & 0,023 \\ 0,18 & 0,125 & 1,082 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30,8 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37,966 \\ 27,292 \\ 21,385 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$p' = \begin{pmatrix} 37,966 \\ 27,292 \\ 21,385 \end{pmatrix}.$$

Порівнюємо зі старим вектором цін  $p$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{p'_1 - p_1}{p_1} \\ \frac{p'_2 - p_2}{p_2} \\ \frac{p'_3 - p_3}{p_3} \end{pmatrix} \cdot 100\% = \begin{pmatrix} 8,86 \\ 0,9 \\ 2,41 \end{pmatrix}.$$

З результатів порівняння бачимо, що

- продукція першої галузі подорожчала на 8,86%,
- продукція другої галузі подорожчала на 0,9%,
- продукція третьої галузі подорожчала на 2,41%.

Валові випуски  $X^*$  галузей у вартісному вигляді для вектору цін  $p'$  знаходимо з рівняння

$$X^* = A^* X^* + Y^*,$$

де  $A^* = PAP^{-1}$ ,  $Y^* = \begin{pmatrix} p_1 Y_1 \\ p_2 Y_2 \\ \dots \\ p_n Y_n \end{pmatrix}$ ,  $P$  – діагональна  $n \times n$  матриця,

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$Y^* = \begin{pmatrix} p_1 Y_1 \\ p_2 Y_2 \\ p_3 Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18982,85 \\ 16374,98 \\ 6415,572 \end{pmatrix},$$

$$(I - A^*)X^* = Y^*,$$

$$X^* = (I - A^*)^{-1}Y^*,$$

$$A^* = PAP^{-1},$$

$$A \approx \begin{pmatrix} 0,076 & 0,073 & 0,145 \\ 0,114 & 0,043 & 0,091 \\ 0,055 & 0,016 & 0,065 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 37,966 & 0 & 0 \\ 0 & 27,292 & 0 \\ 0 & 0 & 21,385 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0,026 & 0 & 0 \\ 0 & 0,037 & 0 \\ 0 & 0 & 0,047 \end{pmatrix}$$

$$A^* = PAP^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 37,966 & 0 & 0 \\ 0 & 27,292 & 0 \\ 0 & 0 & 21,385 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,076 & 0,073 & 0,145 \\ 0,114 & 0,043 & 0,091 \\ 0,055 & 0,016 & 0,065 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,026 & 0 & 0 \\ 0 & 0,037 & 0 \\ 0 & 0 & 0,047 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0,076 & 0,101 & 0,258 \\ 0,082 & 0,043 & 0,117 \\ 0,031 & 0,013 & 0,065 \end{pmatrix}, \quad (I - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,104 & 0,121 & 0,319 \\ 0,099 & 1,058 & 0,159 \\ 0,038 & 0,018 & 1,082 \end{pmatrix}$$

$$X^* = (I - A^*)^{-1}Y^* = \begin{pmatrix} 1,104 & 0,121 & 0,319 \\ 0,099 & 1,058 & 0,159 \\ 0,038 & 0,018 & 1,082 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18982,85 \\ 16374,98 \\ 6415,572 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24981,43 \\ 20223,1 \\ 7955,309 \end{pmatrix}.$$

Тобто кожна галузь 1, 2 і 3 випускає продукцію в об'ємі:

$$X_1^* = 24981,43 \text{ гр.од.}, X_2^* = 20223,1 \text{ гр.од.}, X_3^* = 7955,309 \text{ гр.од.}$$

### Задачі для самостійного розв'язування

У таблиці наведені дані про виконання балансу за звітний період. Задано вектор норм доданої вартості  $v$ .

Визначити вектор цін  $p$ . Збільшити норму доданої вартості в першій галузі на 10% та визначити новий вектор  $p'$  врівноважених цін, порівняти зі старим (в %). Знайти валові випуски галузей у вартісному вигляді для вектору цін  $p'$ .

#### Варіант 1

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція	$v$
1	7	10	25	42	8
2	8	5	45	58	11
Умовно чиста продукція	27	43	70		
Валова продукція	42	58		100	

#### Варіант 2

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція	$v$
1	7	4	25	36	1
2	3	5	45	53	2
Умовно чиста продукція	26	44	70		
Валова продукція	36	53		89	

**Варіант 3**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	3	4	25	32
2	6	5	45	56
Умовно чиста продукція	23	47	70	
Валова продукція	32	56		88

v

3

4

**Варіант 4**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	4	5	25	34
2	8	6	45	59
Умовно чиста продукція	22	48	70	
Валова продукція	34	59		93

v

4

5

**Варіант 5**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	5	6	25	36
2	10	7	45	62
Умовно чиста продукція	21	49	70	
Валова продукція	36	62		98

v

5

6

**Варіант 6**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	6	3	25	34
2	9	7	45	61
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	34	61		95

v

6

7

**Варіант 7**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	7	4	25	36
2	10	7	45	62
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	36	62		98

v  
7  
8**Варіант 8**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	8	5	25	38
2	11	7	45	63
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	38	63		101

v  
8  
9**Варіант 9**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	9	6	25	40
2	12	7	45	64
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	40	64		104

v  
9  
10**Варіант 10**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	10	7	25	42
2	13	7	45	65
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	42	65		107

v  
10  
11

### Варіант 11

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	11	8	25	44
2	14	7	45	66
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	44	66		110

v  
11  
12

### Варіант 12

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	12	9	25	46
2	15	7	45	67
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	46	67		113

v  
12  
13

### Варіант 13

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	13	10	25	48
2	16	7	45	68
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	48	68		116

v  
13  
14

### Варіант 14

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	14	11	25	50
2	17	7	45	69
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	50	69		119

v  
14  
15

**Варіант 15**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	15	12	25	52
2	18	7	45	70
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	52	70		122

v  
15  
16

**Варіант 16**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	16	13	25	54
2	19	7	45	71
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	54	71		125

v  
16  
17

**Варіант 17**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	17	14	25	56
2	20	7	45	72
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	56	72		128

v  
17  
18

**Варіант 18**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	18	15	25	58
2	21	7	45	73
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	58	73		131

v  
18  
19

### Варіант 19

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	19	16	25	60
2	22	7	45	74
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	60	74		134

v

19

20

### Варіант 20

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	20	17	25	62
2	23	7	45	75
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	62	75		137

v

20

21

### Варіант 21

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	21	18	25	64
2	24	7	45	76
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	64	76		140

v

21

22

### Варіант 22

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	22	19	25	66
2	25	7	45	77
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	66	77		143

v

22

23

**Варіант 23**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	23	20	25	68
2	26	7	45	78
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	68	78		146

v  
23  
24

**Варіант 24**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	24	21	25	70
2	27	7	45	79
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	70	79		149

v  
24  
25

**Варіант 25**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	25	22	25	72
2	28	7	45	80
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	72	80		152

v  
25  
26

**Варіант 26**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	26	23	25	74
2	29	7	45	81
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	74	81		155

v  
26  
27

**Варіант 27**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	27	24	25	76
2	30	7	45	82
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	76	82		158

v

27

28

**Варіант 28**

	1	2	Кінцева продукція	Валова продукція
1	28	25	25	78
2	31	7	45	83
Умовно чиста продукція	19	51	70	
Валова продукція	78	83		161

v

28

29