

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Факультет прикладної математики**

**Кафедра програмного забезпечення комп'ютерних систем**

«На правах рукопису»  
УДК 519.688

«До захисту допущено»

Науковий керівник кафедри

\_\_\_\_\_ Іван ДИЧКА

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 р.

**Магістерська дисертація**

**на здобуття ступеня магістра**

**за освітньо-професійною програмою**

**«Інженерія програмного забезпечення комп'ютерних  
та інформаційно-пошукових систем»**

**зі спеціальності 121 Інженерія програмного забезпечення**

**на тему: «Алгоритмічно-програмний метод оцінювання  
інвестиційного ризику із застосуванням копулярних моделей»**

Виконав:

студент II курсу, групи КП-91мп  
Бабенко Валерій Павлович \_\_\_\_\_

Керівник:

Старший викладач кафедри ПЗКС, к.ф.-м.н.,  
Гречко Анастасія Валеріївна \_\_\_\_\_

Консультант з нормоконтролю:

Доцент кафедри ПЗКС, к.т.н., доцент,  
Онай Микола Володимирович \_\_\_\_\_

Рецензент:

Доцент кафедри СПіСКС, к.т.н., доцент,  
Петрашенко Андрій Васильович \_\_\_\_\_

Засвідчую, що у цій магістерській  
дисертації немає запозичень з праць інших  
авторів без відповідних посилань.

Студент \_\_\_\_\_

Київ – 2020 року

**Національний технічний університет України**  
**«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**  
**Факультет прикладної математики**  
**Кафедра програмного забезпечення комп'ютерних систем**

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 121 «Інженерія програмного забезпечення»

Освітньо-професійна програма «Інженерія програмного забезпечення комп'ютерних та інформаційно-пошукових систем»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Науковий керівник кафедри

\_\_\_\_\_ Іван ДИЧКА  
(підпис)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2019 р.

**ЗАВДАННЯ**  
**на магістерську дисертацію студенту**

Бабенко Валерію Павловичу

1. Тема дисертації «Алгоритмічно-програмний метод оцінювання інвестиційного ризику із застосуванням копулярних моделей», науковий керівник дисертації Гречко Анастасія Валеріївна, к.ф.-м.н., старший викладач, затверджені наказом по університету від «12» листопада 2020 р. №3298-С
2. Термін подання студентом дисертації «14» грудня 2020 р.
3. Об'єкт дослідження: процес оцінювання ризиків інвестицій.
4. Предмет дослідження: копулярні методи.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
  - провести аналіз методів оцінювання інвестиційного ризику;
  - дослідити способи оцінювання точкових та інтервальних оцінок;
  - розробити метод розрахунку точкових та інтервальних оцінок ризик-метрик;
  - розробити програмне забезпечення для оцінювання ризику інвестиційного портфелю.
6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу:
  - таблиця описових логарифмічних прибутковостей;
  - таблиця характеристик для ризик-метрики VaR, отриманих з використанням бутстрап-процедури;
  - таблиця економічних розрахунків діяльності;
  - канва бізнес-моделі;
  - дерево проблем;
  - таблиця характеристик для ризик-метрики CVaR, отриманих з використанням бутстрап-процедури.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

- Тези доповіді «Алгоритмічно-програмний метод оцінювання інвестиційного ризику із застосуванням копулярних моделей».

8. Консультанти розділів дисертації

| Розділ        | Прізвище, ініціали та посада консультанта | Підпис, дата   |                  |
|---------------|---|----------------|------------------|
|               |   | завдання видав | завдання прийняв |
| Нормоконтроль | Онай М.В., доцент кафедри ПЗКС            |                |                  |

9. Дата видачі завдання «11» жовтня 2019 р.

Календарний план

| № з/п | Назва етапів виконання магістерської дисертації   | Термін виконання етапів магістерської дисертації | Примітка |
|-------|---|--|----------|
| 1.    | Ґрунтовне ознайомлення з предметною галуззю   | 19.10.2019                                       |          |
| 2.    | Визначення структури магістерської дисертації; вивчення літератури, пошук додаткової літератури, патентний пошук  | 02.12.2019                                       |          |
| 3.    | Робота над першим розділом магістерської дисертації; проведення наукового дослідження   | 18.02.2020                                       |          |
| 4.    | Проведення наукового дослідження; робота над другим розділом магістерської дисертації; розроблення програмного забезпечення                                   | 02.04.2020                                       |          |
| 5.    | Проведення наукового дослідження; робота над статтею за результатами наукового дослідження  | 13.05.2020                                       |          |
| 6.    | Проведення наукового дослідження; робота над третім розділом магістерської дисертації   | 13.06.2020                                       |          |
| 7.    | Завершення роботи над основною частиною магістерської дисертації; підготовка ілюстративного матеріалу; підготовка матеріалів доповіді на конференції ПМК-2020 | 07.11.2020                                       |          |
| 8.    | Оформлення текстової і графічної частини магістерської дисертації   | 03.12.2020                                       |          |

Студент

\_\_\_\_\_ Валерій БАБЕНКО

Науковий керівник

\_\_\_\_\_ Анастасія ГРЕЧКО

## РЕФЕРАТ

**Актуальність теми.** Майже кожному відомі проблеми досягнення фінансової свободи, забезпечення безбідної старості, створення індивідуальних накопичень та вкладень в майбутнє своїх дітей. Для цього в сучасних реаліях необхідно багато коштів, що в свою чергу важко заробити простою найманою працею. Тут на сцені і з'являється інвестування, як один із основних способів збагачення. Інвестор, особа, що займається інвестуванням, купує цінні папери, формуючи свій інвестиційний портфель. У будь-якого портфелю є характеристики. Одна з них – ризик – ймовірність того, що комбінація фінансових інструментів, що належать інвестору, не зможе досягти поставленої інвестором мети. Для мінімізації витрат і максимізації прибутку інвестору необхідно володіти програмним забезпеченням, що зможе оцінювати ризик інвестиційного портфелю якнайточніше.

**Об'єктом дослідження** є процес оцінювання ризиків інвестицій.

**Предметом дослідження** є копулярні методи.

**Мета роботи:** вдосконалити процес оцінювання ризику інвестиційного портфелю з використанням копулярних моделей для збільшення прибутків інвесторів.

**Методи дослідження.** В роботі використовуються методи математичного програмування, методи непараметричної статистики, методи факторного аналізу.

**Наукова новизна** роботи полягає в наступному:

1. Показано, що гаусові, Стюдента та ієрархічні копули можуть бути використані для представлення багатовимірної залежності в коротких часових рядах (тільки 512 спостереження), в той час як застосування копул вивчалось тільки для тривалих спостережень.
2. Використано маргінальні розподіли, відмінні від нормального: гіперболічне, стійке і Мейкснера. Стоянов та ін. розглядають подібну задачу, використовуючи тільки симетричні варіанти

розподілів Стюдента та стійкого, а також узагальнений нормальний розподіл.

**Практична цінність** отриманих в роботі результатів полягає у тому, що користувачі системи можуть оцінювати ризик інвестиційного портфелю, шляхом побудови змодельованих рядів мір ризиків VaR та CVaR для досліджуваних активів.

**Апробація роботи.** Основні положення і результати роботи були представлені та обговорювались на XIII науковій конференції магістрантів та аспірантів «Прикладна математика та комп'ютинг» ПМК-2020 (Київ, 18-20 листопада 2020 р.).

**Структура та обсяг роботи.** Магістерська дисертація складається з вступу, п'яти розділів, висновків та додатків.

У вступі надано загальну інформацію про оцінювання ризику інвестиційного портфелю.

У першому розділі розглянуто існуючі аналоги знаходження числових значень ризик-метрик VaR та CVaR, вибрано двоетапний параметричний метод для знаходження параметрів маргінальних розподілів та копул.

У другому розділі проаналізовано маргінальні розподіли та копули. Наведено формули для розрахунку оптимального портфелю. Запропоновано алгоритми для обчислення точкових та інтервальних оцінок.

У третьому розділі описано архітектуру програмного забезпечення. Наведено результати тестування та сформульовано кроки для подальшої розробки.

У четвертому розділі наведено результати порівняння досліджуваних копул, скріншоти інтерфейсу програми.

У висновках проаналізовано отримані результати роботи.

У додатках наведено описові характеристики логарифмічних прибутковостей, характеристики для ризик-метрик VaR та CVaR, отримані з використанням бутстрап-процедури.

Робота виконана на 70 аркушах, містить 3 додатки та посилання на список використаних літературних джерел з 58 найменувань. У роботі наведено 16 рисунків та 16 таблиць.

**Ключові слова:** статистичні оцінки параметрів розподілів, метод розрахування точкових та інтервальних оцінок.

## ABSTRACT

**Theme urgency.** Almost everyone knows the problems of achieving financial freedom, ensuring a safe old age, creating individual savings and investments in the future of their children. This requires a lot of money in today's reality, which in turn is difficult to earn by simple hired labor. This is where investing comes into play, as one of the main ways to get rich. An investor, an investor, buys securities, forming his investment portfolio. Any portfolio has characteristics. One of them – risk – the probability that the combination of financial instruments owned by the investor will not be able to achieve the goal set by the investor. To minimize costs and maximize profits, the investor must have software that can assess the risk of the investment portfolio as accurately as possible.

**Object of research** is the process of investment risk assessment.

**Subject of research** is copular methods.

**Research objective:** to improve the risk assessment process of the investment portfolio using co-popular models.

**Research methods.** Methods of mathematical programming, methods of nonparametric statistics, methods of factor analysis are used in the work.

**Scientific novelty** consists in the following:

1. It is shown that Gaussian, Student's and hierarchical copulas can be used to represent multidimensional dependence in short time series (only 512 observations), while the use of copulas has been studied only for long-term observations.
2. Used marginal distributions other than normal: hyperbolic, stable and Meixner. Stoyanov and others. consider a similar problem using only symmetric variants of the Student's and stable distributions, as well as a generalized normal distribution.

**Practical value** of the results obtained in this work is that system users can assess the risk of the investment portfolio by building a simulated series of risk measures VaR and CVaR for the studied assets.

**Approbation.** The basic points and outcomes of the research have been presented and discussed at the 18<sup>th</sup> scientific conference for students and postgraduates «Applied mathematics and computing» PMK-2020 (Kyiv, November 18-20, 2020).

**Structure and content of the thesis.** The master thesis consists of the introduction, four chapters, conclusions and appendixes.

The introduction provides general information on risk assessment of the investment portfolio.

In the first section, the existing analogues of finding the numerical values of risk metrics VaR and CVaR are considered, and a two-stage parametric method is chosen to find the parameters of marginal distributions and copulas.

The second section analyzes marginal distributions and copulas. Formulas for calculating the optimal portfolio are given. Algorithms for calculating point and interval estimates are proposed.

The third section describes the software architecture. The test results are presented and steps for further development are formulated.

The fourth section presents the results of comparison of the studied copulas, screenshots of the program interface.

The results of the work are analyzed in the conclusions.

The appendixes provide descriptive characteristics of logarithmic returns, characteristics for VaR and CVaR risk metrics, obtained using the bootstrap procedure.

The work is performed on 70 sheets, contains 3 appendixes and links to a list of used literature sources from 58 titles. The paper presents 16 figures and 16 tables.

**Key words:** statistical estimates of distribution parameters, method of calculating point and interval estimates.

## ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| ВСТУП.....  | 7  |
| 1. ІСНУЮЧІ РІШЕННЯ.....   | 10 |
| 1.1. Поняття копули .....   | 10 |
| 1.2. Огляд літератури .....                                       | 16 |
| 1.3. Постановка задачі на основі огляду літератури.....           | 19 |
| 1.4. Висновки .....   | 20 |
| 2. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ТА АЛГОРИТМИ.....                        | 21 |
| 2.1. Збір та підготовка початкових даних .....                    | 21 |
| 2.2. Оцінювання параметрів маргінальних розподілів.....           | 22 |
| 2.3. Оцінювання параметрів копулярних моделей .....               | 24 |
| 2.4. Побудова інвестиційного портфелю .....                       | 30 |
| 2.5. Алгоритм розрахунку точкових оцінок ризик-метрик.....        | 31 |
| 2.6. Алгоритм розрахунку характеристик ризик-метрик .....         | 33 |
| 2.7. Висновки .....   | 35 |
| 3. АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ .....                          | 37 |
| 3.1. Описання мови програмування та бібліотек .....               | 37 |
| 3.2. Архітектура програмного забезпечення .....                   | 39 |
| 3.3. Модуль відтворення даних.....                                | 41 |
| 3.4. Висновки .....   | 42 |
| 4. РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ПРОГРАМИ.....                                | 43 |
| 4.1. Тестування програмного забезпечення.....                     | 43 |
| 4.2. Початкові дані .....   | 44 |
| 4.3. Результати оцінювання параметрів розподілів .....            | 45 |
| 4.4. Результати оцінювання параметрів копул.....                  | 48 |
| 4.5. Результати рішення задачі пошуку оптимального портфелю ..... | 52 |
| 4.6. Точкові оцінки ризик-метрик $VaR$ та $CVaR$ .....            | 53 |
| 4.7. Інтервальні оцінки ризик-метрик $VaR$ та $CVaR$ .....        | 56 |
| 4.8. Моделювання кривих $VaR$ і $CVaR$ з використанням копул..... | 58 |

|  |    |
|--|----|
| 4.9. Порівняння з існуючими аналогами.....   | 60 |
| 4.10.Висновки .....                          | 61 |
| 5. СТАРТАП СКЛАДОВА ПРОЄКТУ.....             | 62 |
| 5.1. Описання проблеми .....                 | 62 |
| 5.2. Зацікавлені сторони .....               | 63 |
| 5.3. Конкурентні переваги рішення.....       | 64 |
| 5.4. Клієнти. Сегменти ринку споживання..... | 65 |
| 5.5. Унікальна ціннісна пропозиція.....      | 65 |
| 5.6. Доходи та витрати .....                 | 65 |
| 5.7. Бізнес-модель.....                      | 67 |
| 5.8. Висновок .....                          | 68 |
| ВИСНОВКИ.....                                | 69 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ..... | 72 |
| ДОДАТКИ.....                                 | 76 |

## СПИСОК ТЕРМІНІВ, СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ

Довірчий інтервал – тип інтервальної оцінки, яка обчислюється за даними спостереження, і покриває невідомий статистичний параметр із заданою надійністю.

Квантиль – значення, яке задана випадкова величина не перевищить з фіксованою ймовірністю. Квантиль називається перцентилем або процентилям, якщо ймовірність задана у відсотках.

VaR – Value At Risk.

CVaR – Conditional Value At Risk – ES – Expected Shortfall – Очікуваний дефіцит.

Конзистентна оцінка – це точкова оцінка, що збігається по ймовірності до оцінюваного параметру.

MLE – Maximum Likelihood Estimation – Метод максимальної правдоподібності.

IFM – Inference Functions for Margins.

MST – Maximum Spanning Tree – Максимальне кістякове дерево.

Актуарна математика – розділ у математиці, який вивчає питання, що пов'язані з оцінюванням ризиків.

Ф'ючерсний контракт (англ. futures contract) – документ, що засвідчує зобов'язання придбати (чи продати) базовий актив на визначених умовах та у визначений час в майбутньому, з фіксацією цін сторонами контракту на момент виконання зобов'язань.

Стійкий розподіл (англ. stable distribution) – це розподіл, який може бути отриманий як границя за розподілом сум незалежних випадкових величин.

Густина або щільність ймовірності неперервної випадкової величини (англ. Probability density function, PDF) – це функція, що для кожної окремої точки у просторі подій визначає ймовірнісну міру відносної

правдоподібності того, що значення випадкової величини буде відповідати заданій події.

Функція розподілу ймовірностей або кумулятивна функція розподілу ймовірностей (англ. Cumulative distribution function, CDF) – це функція, яка повністю описує розподіл ймовірностей випадкової величини.

Допасованість (англ. Goodness-of-fit, GoF) – те, що описує, наскільки добре статистичну модель допасовано до набору спостережень.

SD – Standard Deviation – стандартне відхилення.

P&L – Profit and Loss.

RMSD – Root-mean-square deviation – RMSE – Root-mean-square error – середньо-квадратична помилка, середньо-квадратичне відхилення.

Котування – ціна товару, яку оголошує покупець або продавець і за якою вони згодні зробити продаж або купівлю.

Тикер – скорочена назва котируваних інструментів в біржовій інформації (акцій, облігацій, індексів, ф'ючерсів).

Ринок похідних цінних паперів – це фінансовий ринок, де торгують похідними цінними паперами.

Інвестиційний портфель – це сукупність цінних паперів, що належать інвестору, тобто особі, що вклала в цінні папери свій капітал.

$p$ -значення (англ.  $p$ -value) – ймовірність отримати для даної ймовірнісної моделі розподілу значень випадкової величини таке ж або більш екстремальне значення статистики, за умови, що нульова гіпотеза вірна.

Перевірка відношенням правдоподібностей (англ. Likelihood Ratio test, LR) – це статистична перевірка, що застосовується для порівняння допасованості двох моделей, одна з яких (нульова модель) є окремим випадком іншої (альтернативної моделі).

Консервативна оцінка (англ. Conservative Estimate) – це оцінка, що значно не перевищує кількість, ступінь чи цінність і т.д.

Ліберальна оцінка (англ. Liberal Estimate) – це оцінка, що значно не применшує кількість, ступінь чи цінність і т.д.

## ВСТУП

Майже кожному відомі проблеми досягнення фінансової свободи, забезпечення безбідної старості, створення індивідуальних накопичень та вкладень в майбутнє своїх дітей. Для цього в сучасних реаліях необхідно багато коштів, що в свою чергу важко заробити простою найманою працею. Тут на сцені і з'являється інвестування, як один із основних способів збагачення.

Інвестор, особа, що займається інвестуванням, купує цінні папери, формуючи свій інвестиційний портфель. У будь-якого портфелю є характеристики. Одна з них – ризик – ймовірність того, що комбінація фінансових інструментів, що належать інвестору, не зможе досягти поставленої інвестором мети. Кожен актив має свій потенційний прибуток та свою ймовірність невдачі, що мають прямопропорційну залежність один з однією, тобто, чим вищий потенційний прибуток, тим вища ймовірність втрат.

Оцінювання інвестиційного ризику портфелю – це основа управління портфелем цінних паперів. Ризик акції показує, наскільки її курс може коливатися. Навіть ризики двох акцій з однаковою середньою прибутковістю можуть бути різними, якщо волатильність однієї акції більша за іншу.

Оскільки як прибутковість, так і ризик окремої акції розглядаються з позиції портфельного інвестування, а не для кожного активу окремо, то необхідно визначити, як же ці показники впливають на зміну прибутковості і ризику всього портфелю в цілому.

Прибутковість портфелю безпосередньо залежить від показників прибутковості активів, що входять у нього, і може бути розрахована за формулою середнього арифметичного зваженого. Це означає, що чим більша в портфелі доля найбільш дохідної акції, тим вище прибутковість самого портфелю, і навпаки. Тому найприбутковіший портфель

складатиметься з однієї найприбутковішої акції, але ризик такого портфелю незрівнянно більший в порівнянні з диверсифікованим портфелем.

У той же час взаємозв'язок між ризиком портфелю та ризиком активів, що входять у нього, не настільки очевидний і не описується формулою середнього зваженого.

Іноді актив, що має високий ризик, в поєднанні з іншими утворює портфель з меншим ризиком, аніж окремий вищезгаданий актив. Теоретично можна підібрати дві акції, кожна з яких має високий рівень ризику, але які, будучи об'єднані разом, створять абсолютно безризиковий портфель.

Третє ключове поняття при управлінні інвестиційними ризиками – це кореляція між прибутковостями акцій. На ринку деякі акції можуть одночасно зростати чи падати, а інші можуть рухатися в різних напрямках, незалежно одна від одної. Цей стійкий взаємозв'язок між курсами різних акцій враховується в управлінні портфелем і дозволяє досягти значного зниження ризику портфелю.

Мета даної роботи – вдосконалити процес оцінювання ризику інвестиційного портфелю з використанням копулярних моделей для збільшення прибутків інвесторів.

Для того, щоб вдосконалити процес оцінювання ризику інвестиційного портфелю з використанням копулярних моделей, необхідно послідовно вирішити такі завдання:

1. Проаналізувати існуючі підходи і вибрати метод для оцінювання параметрів копулярних моделей.
2. З використанням копулярних моделей створити програмне забезпечення, обчислити та порівняти поведінку різних мір ризику (VaR, CVaR) для інвестиційного портфелю.

Дана робота містить два нововведення. По-перше, показано, що гаусові, Стюдента та ієрархічні копули можуть бути використані для представлення багатовимірної залежності в коротких часових

рядах (тільки 512 спостережень), в той час як застосування копул вивчалось тільки для тривалих спостережень. По-друге, використано маргінальні розподіли, відмінні від нормального: гіперболічний, стійкий та Мейкснера. Стоянов та інші розглядають подібну задачу, використовуючи тільки симетричні варіанти розподілів Стюдента та стійкого, а також узагальнений нормальний розподіл.

# 1. ІСНУЮЧІ РІШЕННЯ

## 1.1. Поняття копули

При побудові системи вимірювання ризику інвестицій існує певна свобода вибору методології для визначення фактичного та потенційного ризиків. Методи оцінювання ризику представлено на рис. 1.1.

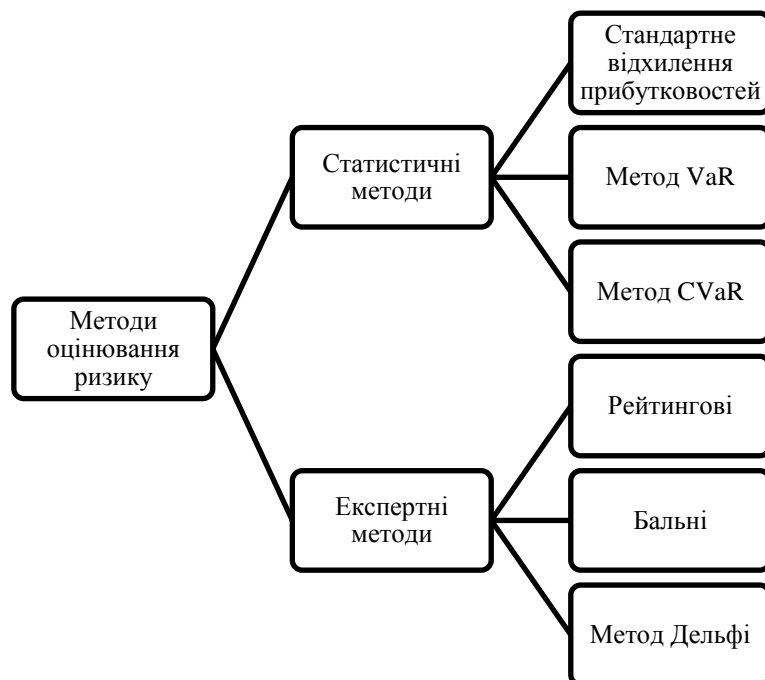


Рис. 1.1. Методи оцінювання ризику

Програмно можна реалізувати саме статистичні методи, серед яких Стандартне відхилення прибутковостей, Методи VaR і CVaR.

Стандартне відхилення прибутковостей або Середньоквадратичне відхилення – найбільш поширений показник розсіювання значень випадкової величини щодо її математичного очікування.

Value At Risk – вартісна міра банківського ризику. Це оцінка величини, що виражена в грошових одиницях, яку не перевищать очікувані протягом даного періоду часу втрати із заданою ймовірністю.

Три параметри характеризують VaR:

1. Часовий горизонт, що залежить від ситуації, що досліджується. Розрахунок з часовим горизонтом 1 день найчастіше поширений (за методикою RiskMetrics). 10 днів (за Базельськими документами) використовується для розрахунку величини капіталу, що покриває можливі збитки.
2. Довірчий рівень або Confidence Level – рівень допустимого ризику. В системі RiskMetrics використовується значення 95%, а за Базельськими документами – 99%.
3. Базова валюта, в якій вимірюється показник.

Conditional Value At Risk – це міра ризику, що використовується для вимірювання фінансового ризику. Наприклад, для оцінки ризику ринку або кредитного ризику портфелю. Очікуваний дефіцит на рівні  $q\%$  – це очікувана прибутковість портфелю в найгірших  $q\%$  випадках. CVaR – це альтернатива ризику, який більш чутливий до форми хвоста розподілу втрат.

Очікуваний дефіцит – це узгоджений, спектральний показник ризику фінансового портфелю. Тому він вважається більш корисною мірою ризику, аніж VaR. CVaR визначається як середня втрата портфельного значення, з урахуванням, що збитки відбуваються на рівні  $q$  квантилю.

Розподіли прибутковостей випадкових величин мають не строго фіксовані характеристики, а являють собою цілий клас випадкових величин з коваріаційною матрицею, обмеженою деякою фіксованою позитивно визначеною матрицею.

У даній роботі будемо розраховувати міри ризику, що широко використовуються в ризик-менеджменті: вартісну міру ризику Value At Risk (VaR) і умовну вартісну міру ризику Conditional Value At Risk (CVaR), які можна визначити для різних рівнів значимості  $\alpha$ . Переваги та недоліки кожного статистичного методу представлено у таблиці 1.

## Переваги і недоліки статистичних методів

| Методи                               | Переваги   | Недоліки  |
|--------------------------------------|--|---|
| Стандартне відхилення прибутковостей | легкий у реалізації  | розподіли прибутковостей випадкових величин мають не строго фіксовані характеристики, що значно зменшує точність обчислень                    |
| Value At Risk                        | використання не передбачає ніяких обмежень на моментальні характеристики   | використання вимагає попереднього вибору рівня довірчої ймовірності, значення якого істотно впливає на рішення задачі квантильної оптимізації |
| Conditional Value At Risk            | має властивості, зручні для вирішення завдань пошуку оптимальної стратегії | вимагає існування моментальних характеристик у розподілу  |

У статті О. Крицького і М. Ульянової [1] показано, що за наявності кореляції в динаміці активів портфелю оцінка одновимірних величин VaR і CVaR виявляється неадекватною по відношенню до ризику портфелю. Тому для оцінювання ризику портфелю доцільно використовувати  $d$ -мірні випадкові величини, що визначаються за допомогою багатовимірних функцій спільного розподілу.

Залежність між випадковими величинами  $X_1, X_2, \dots, X_d$  може бути повністю визначена через спільну функцію розподілу  $F(X_1, X_2, \dots, X_d)$ . Ідея представлення цієї функції через дві складові частини, одна з яких визначає структуру залежності, а інша – маргінальні розподіли для кожної з

розглянутих випадкових величин  $X_1, X_2, \dots, X_d$  окремо, приводить до поняття **копула-функції**, або просто **копули**.

Копула або зв'язка використовується як загальний метод формулювання спільного розподілу випадкових величин таким чином, що можна зобразити різні загальні типи залежності.

Сьогодні існує безліч способів описання фінансових часових даних з використанням нормального (гаусового) розподілу. Добре відомо, що гаусова копула, тобто копула, для якої в якості маргінального розподілу вибрано нормальний розподіл, використовується в якості одного із способів описання портфелю в теорії Марковіца. З іншого боку, багато емпіричних досліджень показали, що гаусовий розподіл має безліч недоліків в описанні залежності фінансових часових рядів [2-4]. Зауважимо, що стандарт ЕВА [5] не рекомендує використовувати гаусові копули при моделюванні фінансового ризику, а в більшості випадків більш придатною виявляється двухпараметрична копула *t*-Стюдента, для якої ступінь свободи  $\nu$  (параметр моделі) зазвичай вибирається рівним трьом або чотирьом.

Загальна проблема використання копулярних моделей, як і будь-яких інших моделей в реальній практиці, – вимога знаходження оцінок невідомих параметрів з найкращими статистичними властивостями. При цьому якість оцінок може визначатися по-різному: незміщена оцінка, оцінка з мінімальною дисперсією; конзистентна оцінка; оцінка з хорошою асимптотичною поведінкою; зручна для обчислювальної роботи оцінка та інше.

На даний момент запропоновано безліч підходів для оцінювання параметрів і побудови копулярних моделей: повний параметричний [6], напівпараметричний [7, 8] і непараметричний методи [9, 10]. Вони представлені на рис. 1.2.

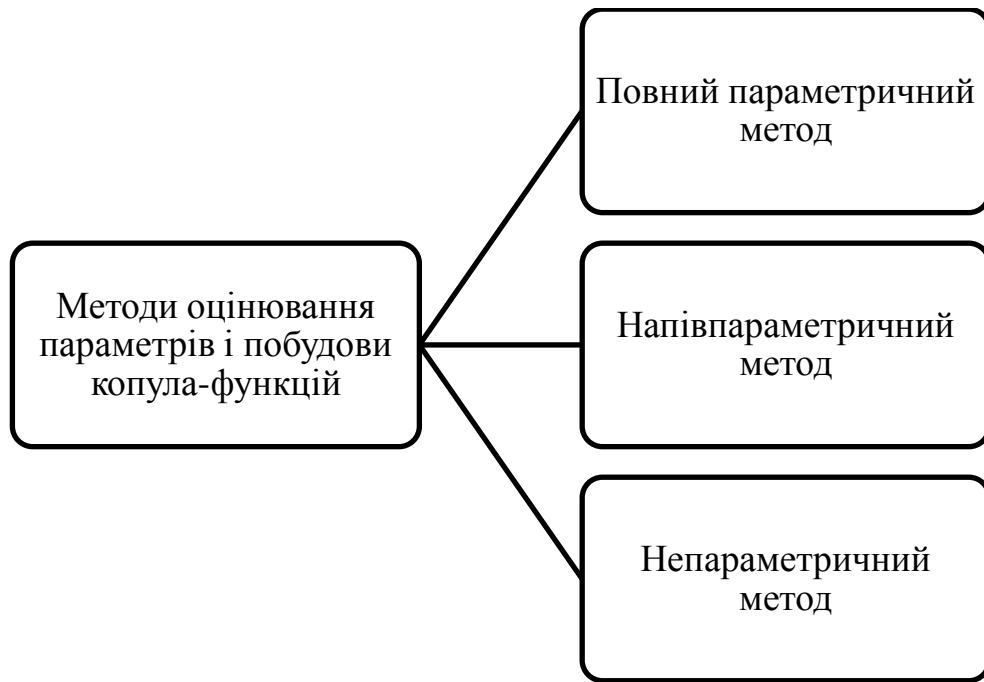


Рис. 1.2. Оцінювання параметрів і побудова копула-функцій

Повний параметричний метод реалізується за допомогою двоетапної оцінки максимальної правдоподібності (MLE), що було запропоновано Гаррі Джо [11, 12]. Параметри копули оцінюються з використанням двоступеневого параметричного підходу MLE, що також називають методом оцінювання маргінальних розподілів (IFM). Даний метод включає два етапи: оцінювання параметрів маргінальних розподілів і потім оцінювання параметрів копули.

Напівпараметричний метод передбачає ці ж два етапи, в першому з яких замість маргінальних розраховуються емпіричні розподіли.

Непараметричний метод на обох етапах передбачає оцінювання емпіричних функцій розподілу: в першому – для маргіналів, а в другому – для копули.

Порівняння методів оцінювання параметрів і побудови копула-функцій представлено у таблиці 2.

Для двовимірного випадку серед основних сімейств копул виділяють: еліптичні (Гаусова,  $t$ -Стюдента), архімедові (Клейтона, Франка, Джо) і екстремальні (Гумбеля, Коші).

## Порівняння методів оцінювання параметрів і побудови копула-функцій

| Метод       | Повний параметричний метод                    | Напівпараметричний метод                    | Непараметричний метод                                  |
|-------------|---|---|--|
| Перший етап | Оцінювання параметрів маргінальних розподілів | Оцінювання параметрів емпіричних розподілів | Оцінювання емпіричних функцій розподілу для маргіналів |
| Другий етап | Оцінювання параметрів копули                  | Оцінювання параметрів копули                | Оцінювання емпіричних функцій розподілу для копул      |

У дисертаційному дослідженні [13] для оцінювання параметрів і тестування був використаний двоетапний параметричний MLE-метод, в ході якого автор використовує всі можливі комбінації різних маргінальних розподілів (нормальний, Стюдента з асиметрією і без неї), а також різні архімедові копули. Рішення про вибір маргінального розподілу здійснюється після другого етапу MLE. Для цього в роботі [14] була запропонована модифікація тесту Хансена, даний тест дозволяє визначити найбільш адекватну копулу.

Багатовимірні копули, засновані на одному розподілі (наприклад, гаусова або  $t$ -Стюдента) або створені з так званих функцій-генераторів, не володіють необхідною гнучкістю для проведення моделювання залежності між великим числом змінних [15]. Ці недоліки визначили напрямок подальших досліджень, в результаті яких Гаррі Джо [16] запропонував концепцію регулярних ієрархічних копул (*regular vine copula, R-vine*), подальший розвиток цієї концепції представлено в роботах [15, 17]. *R-vine* копули представляють собою досить гнучку математичну модель для описання багатовимірних законів розподілу з використанням каскаду

двовимірних копул (двовимірних функцій розподілу). На сьогодні активно розвиваються різні підходи для роботи з  $R$ -vine копулами, такі копули легше інтерпретувати і візуалізувати (наприклад, у вигляді дерева або матриць). Відзначимо роботи [17-19], в яких автори приділяють велику увагу розробленню нових алгоритмів для оцінювання параметрів копулярних моделей, а також  $R$ -vine копулам для моделювання часових рядів з різних предметних областей. Автори використовують деревоподібну та матричні структури для візуалізації процесу вибору і об'єднання двовимірних функцій розподілу в  $R$ -vine копулі, при цьому вони використовують алгоритм побудови Максимального кістякового дерева (Maximum Spanning Tree, MST), в якому вага ребер визначає ступінь кореляційної залежності початкових часових рядів даних.

## 1.2. Огляд літератури

Існує багато різних підходів, які активно застосовують для подання багатовимірної залежності випадкових величин, наприклад, метод головних компонент, байєсовські мережі, нечітка логіка, факторний аналіз [20, 21]. Вони представлені на рис. 1.3.

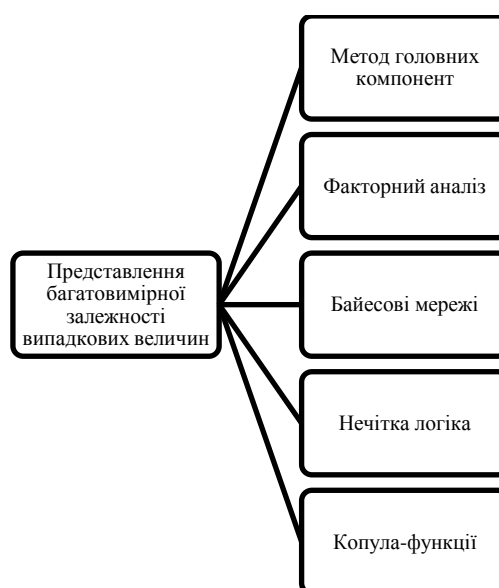


Рис. 1.3. Існуючі представлення багатовимірної залежності випадкових величин

У 1959 році Абе Шкляр [22] сформулював і вперше довів теорему про те, що набір маргінальних розподілів можна записати через один багатовимірний розподіл за допомогою копули.

Незважаючи на те, що теорія копула-моделей досліджена відносно повно, проблема оцінювання та статистичні висновки для копула-моделей, у певному контексті, все ще потребують подальших досліджень [23].

В даний час копули активно використовуються при вирішенні задач з різних предметних областей: економетрика, фінансова та актуарна математики [24-30], в задачах побудови систем безпеки [31], біостатистиці, гідрології, кліматології [23]. В статті [29] автор представив концептуальні підходи застосування копулярних моделей для вирішення задач управління фінансами, включаючи ризик-менеджмент. Детальному описанню копула-функцій та їх властивостям присвячені монографії [12, 32].

За останні роки запропоновані різні методи оцінювання параметрів копула-функцій, серед яких виділяють параметричні [6], напівпараметричні [7, 8], а також непараметричні методи [9, 10]. Більш того, в роботі [33] автори пропонують використовувати «суміші» методів [23], які дозволили б заощадити час на обчисленнях.

Дослідження [34, 21, 8, 13] ринкового ризику в рамках управління портфелем багато в чому схожі один з одним і часто відрізняються тільки використаними даними і незначними деталями в оцінюванні параметрів копулярних моделей.

Серед комплексних досліджень виділимо статтю Тьеррі Ане і Сесіль Харубі [34] – одну з перших, в якій автори використали копулу Клейтона як інструмент для визначення структури залежності між акціями міжнародного фондового індексу.

Олександр Лурме та інші [8] фокусуються на тестуванні можливостей використання гаусової та  $t$ -копули для вирішення задач ризик-менеджменту. Вони пропонують  $d$ -мірну компактну гаусову і  $t$ -Стюдента довірчу область, всередині якої вектор з вибірки багатовимірної випадкової

величини, рівномірно розподілений на відрізку  $[0,1]$ , потрапляє з ймовірністю  $\alpha$ . Результати досліджень показали, що копула  $t$ -Стюдента, використана для побудови VaR-моделі, є більш консервативною і адекватною в порівнянні з гаусовою.

Важливість вибору правильної копули для ризик-менеджменту була показана в роботі [21], в якій розраховувався портфель акцій, облігацій та угод з нерухомістю. Для моделювання залежності денних прибутковостей, які апроксимують дані для зазначених вище активів, були протестовані такі копули: гаусові, Стюдента і Гумбеля. Потім за розрахунками VaR було встановлено, що гаусова копула занадто оптимістична щодо переваг диверсифікації активів, тоді як копула Гумбеля занадто песимістична.

Аналітичне рішення для знаходження міри чутливості ризику (CVaR) було представлено в статті [35], в якій автори наводять формули для обчислень, припускаючи, що багатовимірною випадковою величиною підпорядковується одному з наступних розподілів – нормальному, стійкому та Стюдента.

В даному огляді відзначимо групу вчених під керівництвом професора Claudia Czado [18, 19, 36], які активно розвивають як математичний апарат копула-функцій, так і розширюють інструментарій пакетів програм для роботи з ними.

Значного розвитку апарат копула-функцій отримав після циклу публікацій Д. Фантацціні [23]. Коротко вкажемо напрями використання копула-моделей: моделювання інвестиційного портфелю [27-29], моделювання спільного розподілу біржових індексів [26], оптимізації інвестиційного портфелю [25], прогнозування курсів валют [24].

Серед реалізованих програмних застосунків для обчислення інвестиційного ризику можна виділити NetTradeX та MetaTrader 4, де для оцінювання ризику портфелю використовується звичайне середньоквадратичне відхилення.

### 1.3. Постановка задачі на основі огляду літератури

У даній роботі досліджується модель оцінювання інвестиційного ризику за допомогою застосування копулярних моделей. При цьому в якості початкових даних будуть використані часові ряди денних цін на ф'ючерсні контракти, а при моделюванні в даній роботі будуть використані наступні копула-функції:

1. Гаусова копула.
2. Копула Стьюдента.
3.  $R$ -vine ( $R$ -ієрархічна копула).

Для описання логарифмічних прибутковостей фінансових часових рядів в якості кандидатів будуть розглянуті наступні чотирьохпараметричні розподіли:

1. Гіперболічний.
2. Стійкий.
3. Мейкснера.

Параметри цих маргінальних розподілів, а також копула-функцій будемо оцінювати з використанням двоступеневого параметричного підходу. Для представлення копулярних функцій будемо використовувати матричний спосіб, а також графові моделі. При моделюванні ієрархічної копули допускаємо використання в якості ступеню свободи дійсне число.

Міри ризику VaR і CVaR будемо розраховувати стосовно оптимального портфелю з обраних ф'ючерсних контрактів. Для визначення доль оптимального портфелю сформулюємо і вирішимо оптимізаційну задачу лінійного програмування. В якості оптимального портфелю будемо використовувати портфель, що має мінімільне значення CVaR при заданих обмеженнях.

Для обчислення точкових та інтервальних оцінок і характеристик мір ризику VaR і CVaR будемо використовувати метод Монте-Карло, застосований до оптимального портфелю.

Оберемо мову програмування, відповідні бібліотеки і реалізуємо вищеописані елементи у вигляді програмного застосунку. Змоделюємо часові ряди ризик-метрик VaR та CVaR в порівнянні з емпірично спостережуваними значеннями та оберемо копулу для найточнішого оцінювання ризику інвестиційного портфелю.

Проведемо тестування розробленого програмного забезпечення та порівняємо його з існуючими аналогами.

#### **1.4. Висновки**

В даному розділі був проведений аналіз існуючих методів оцінювання ризику інвестиційного портфелю: стандартне відхилення прибутковостей, методи Value-At-Risk та Conditional-Value-At-Risk. Переглянуто переваги та недоліки статистичних методів оцінювання ризику.

Потім обгрунтовано вибір копула-функцій як функцій спільного розподілу, порівняно методи оцінювання параметрів та побудови копула-функцій, вибрано метод, що підходить для подальшої роботи.

Визначилися з копула-функціями, що будемо досліджувати, та з маргінальними розподілами, що будемо використовувати для описання логарифмічних прибутковостей фінансових часових рядів.

## 2. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ МАРГІНАЛЬНИХ РОЗПОДІЛІВ І КОПУЛ. АЛГОРИТМИ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧКОВИХ ТА ІНТЕРВАЛЬНИХ ОЦІНОК

### 2.1. Збір та підготовка початкових даних

В першу чергу, наявні початкові дані, що представляють собою часові ряди, необхідно перетворити в логарифмічні прибутковості. Таким чином ми отримуємо набір даних, який будемо використовувати для оцінювання параметрів маргінальних розподілів і параметрів копул. Рівняння (2.1) перетворює ряд денних цін закриття активів  $p_i$  в ряд денних логарифмічних прибутковостей  $r_i$  для кожного активу  $i$ :

$$r_{t,i} = \log \frac{P_{t,i}}{P_{t-1,i}}, \quad (2.1)$$

де  $i \in \overline{1, d}$ ;  $d$  – кількість активів у портфелі;  $t \in \overline{1, T}$  – час у днях.

Фінансові часові ряди, як правило, мають нелінійну залежність один з одним. Як відомо, звичайна лінійна кореляція Пірсона не показує нелінійну залежність між величинами. Тому для оцінювання параметрів копул необхідно використовувати коефіцієнти рангової кореляції, наприклад,  $\tau$  Кендалла [37] або  $\rho$  Спірмена [38].

Нехай  $X$  і  $Y$  – дві випадкові величини, визначені на одному й тому ж ймовірнісному просторі, тоді коефіцієнт рангової кореляції Спірмена визначається з наступного рівняння [38]:

$$\rho = r(rg_X, rg_Y) = \frac{\text{cov}(rg_X, rg_Y)}{\sigma_{rg_X} \sigma_{rg_Y}}, \quad (2.2)$$

де  $r(\cdot)$  – лінійний коефіцієнт кореляції Пірсона;  $rg_X, rg_Y$  – ранги випадкових величин  $X$  та  $Y$ ;  $\text{cov}(rg_X, rg_Y)$  – коваріація рангів;  $\sigma$  – стандартне відхилення.

Для двох незалежних пар  $(X_a, X_b)$  і  $(Y_a, Y_b)$  деяких випадкових величин  $X$  і  $Y$  можна також обчислити коефіцієнт рангової кореляції Кендалла [37] (2.3).

$$\begin{aligned} \tau &= P[(X_a - X_b)(Y_a - Y_b) > 0] - P[(X_a - X_b)(Y_a - Y_b) < 0] = \\ &= r(\text{sgn}(X_a - X_b), \text{sgn}(Y_a - Y_b)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

де  $r(x, y)$  – лінійний коефіцієнт кореляції Пірсона;  $\text{sgn}(\cdot)$  – функція взяття знака дійсного числа.

Обидва наведених вище коефіцієнти рангової кореляції, на відміну від лінійної кореляції Пірсона, менш чутливі до сильних відхилень, що постійно виникають в динаміці фінансових рядів. Це відбувається тому, що відхилення і викиди обмежуються коефіцієнтами  $\rho$  Спірмена і  $\tau$  Кендалла до значення їх рангу [34]. Згідно зі статтею [19], в подальших обчисленнях будемо використовувати  $\tau$  Кендалла.

## 2.2. Оцінювання параметрів маргінальних розподілів

Розроблено безліч різних методів застосування гаусового розподілу для описання фінансових даних [39]. В емпіричних дослідженнях [2-4] показано, що використання нормального розподілу при описанні фінансових часових рядів спричиняє виникнення різних проблем, наприклад, важкі хвости й асиметрія функцій розподілів. Для моделювання екстремальних подій запропоновані різні розподіли, що показують властивості фінансових рядів, які неможливо описати нормальним розподілом.

У даній роботі використано в якості кандидатів наступні маргінальні розподіли: гіперболічний [40], стійкий [41, 3, 35] і Мейкснера [42]. Перераховані розподіли мають параметри, що дозволяють враховувати особливості фінансових часових рядів, що не описуються нормальним розподілом, а саме: важкі хвости й асиметрія [35].

Наведемо коротке описання зазначених розподілів. Гіперболічний розподіл визначається чотирма параметрами:

1.  $\pi$  показує крутизну.
2.  $\zeta$  показує асиметрію.
3.  $\mu$  визначає зрушення.

4.  $\delta$  визначає масштаб.

Розподіл є симетричним щодо параметра зсуву  $\mu$  при параметрі асиметрії  $\zeta = 0$ . Рівняння (2.4) описує щільність гіперболічного розподілу:

$$f_H(x | \pi, \zeta, \delta, \mu) = \frac{1}{2\sqrt{1+\pi^2} K_1(\zeta)} e^{-\zeta \left[ \sqrt{1+\pi^2} \sqrt{1+\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} - \pi \frac{x-\mu}{\delta} \right]}, \quad (2.4)$$

де  $K_1(x)$  – модифікована функція Бесселя третього роду 1-го порядку [43];  $\pi \in \mathbb{R}; \zeta > 0; \delta > 0; \mu \in \mathbb{R}$ .

Стійкий розподіл також описується чотирма параметрами:

1.  $\alpha$  визначає тяжкість хвостів і ексцес.
2.  $\beta$  визначає асиметрію.
3.  $\gamma$  є параметром масштабу.
4.  $\mu$  є параметром зсуву.

Так як для даного розподілу в аналітичній формі не існує ні кумулятивної функції, ні функції густини розподілу ймовірності, прийнято використовувати характеристичну функцію:

$$\varphi_S(x | \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \exp \left[ ix\delta - |\gamma x|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(x)\Phi(x)) \right], \quad (2.5)$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} (|\gamma x|^{1-\alpha} - 1) \tan \frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \log |\gamma x|, & \alpha = 1, \end{cases}$$

де  $\alpha \in (0; 2]; \beta \in [-1; 1]; \gamma > 0; \delta \in \mathbb{R}; i$  – уявна одиниця.

Розподіл Мейкснера задається наступними чотирма параметрами:

1.  $\alpha$  – параметр масштабу.
2.  $\beta$  – параметр асиметрії.
3.  $\delta$  – параметр форми.
4.  $\mu$  – параметр зсуву.

Щільність розподілу Мейкснера описується наступним рівнянням:

$$f_M(x | \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\left(2 \cos \frac{\beta}{2}\right)^{2\delta}}{2\alpha\pi\Gamma(2\delta)} \exp \frac{\beta(x-\mu)}{\alpha} \left| \Gamma \left( \delta + i \frac{x-\mu}{\alpha} \right) \right|^2, \quad (2.6)$$

де  $\Gamma(z)$  – гамма-функція з комплексним аргументом  $z$ ;  $\alpha > 0; |\beta| < \pi; \delta > 0; \mu \in \mathbb{R}$ .

Для оцінювання параметрів гіперболічного розподілу можна скористатися методом Нелдера-Міда, а для стійкого розподілу і розподілу Мейкснера – критерієм омега-квадрат (метод дистанції Крамера-фон Мізеса). Для оцінювання якості отриманих параметрів будемо використовувати тести Колмогорова-Смирнова, а також Андерсона-Дарлінга і Крамера-фон Мізеса. У цих тестах будемо порівнювати емпіричні спостереження, тобто безпосередньо реальні логарифмічні прибутковості, зі значеннями модельних даних, отриманих з використанням зазначених розподілів.

### 2.3. Оцінювання параметрів копулярних моделей

Для побудови копулярних моделей будемо використовувати два види функцій:  $d$ -мірна копула і регулярна ( $R$ ) ієрархічна копула. Наведемо необхідні визначення і позначення.

У свою чергу,  $d$ -мірні копулярні функції, які використовуються в даній роботі, можна розділити на два види:

1. Будемо називати  $d$ -мірну копулу  $C$  еліптичною, якщо функція її розподілу задовольняє рівняння:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d | \theta) = F(F^{-1}(u_1 | \theta), F^{-1}(u_2 | \theta), \dots, F^{-1}(u_d | \theta) | \theta), \quad (2.7)$$

де  $F(x)$  – кумулятивна функція маргінального розподілу;  $F^{-1}(p)$  – зворотня функція розподілу;  $F(x_1, x_2, \dots, x_d)$  – кумулятивна функція  $d$ -мірного спільного розподілу;  $\theta$  – вектор параметрів.

2.  $d$ -мірна копула  $C$  називається архімедовою, якщо функція її розподілу задовольняє рівняння:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d | \theta) = \psi^{[-1]}(\psi(u_1 | \theta) + \psi(u_2 | \theta) + \dots + \psi(u_d | \theta) | \theta), \quad (2.8)$$

де  $\psi: [0,1] \rightarrow [0,\infty]$  – безперервна строго спадна опукла функція така, що  $\psi(1) = 0$ , так звана функція-генератор;  $\psi^{[-1]}(p)$  – псевдо-обернена функція, яка визначається з рівняння:

$$\psi^{[-1]}(p) = \begin{cases} \psi^{-1}(p), & 0 \leq p \leq \psi(0), \\ 0, & \psi(0) \leq p \leq \infty. \end{cases}$$

Для еліптичної копули (2.7) будемо використовувати спільний багатовимірний розподіл Гауса і Стюдента відповідно, так як вони найбільш часто використовуються щодо фінансових даних [8].

У загальному випадку  $d$ -мірна гаусова копула з кореляційним параметром  $\rho$  описується як [44]:

$$C_{Gauss}(u_1, u_2, \dots, u_d | \rho) = \Phi(\Phi_1^{-1}(u_1), \Phi_2^{-1}(u_2), \dots, \Phi_d^{-1}(u_d) | \rho), \quad (2.9)$$

де  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_d)$  – кумулятивна функція  $d$ -мірного спільного гаусового розподілу;  $\Phi^{-1}(p)$  – зворотня функція одновимірного гаусового розподілу;  $\rho$  – кореляційний параметр.

Для багатовимірної гаусової копули кореляційним параметром  $\rho$  є кореляційна матриця  $\Sigma$ , що описує залежність між вхідними змінними.

У загальному випадку  $d$ -мірна  $t$ -копула з кореляційним параметром  $\rho$  і числом ступенів свободи  $\nu$  описується як [44]:

$$C_t(u_1, u_2, \dots, u_d | \rho, \nu) = t(t_1^{-1}(u_1 | \nu), t_2^{-1}(u_2 | \nu), \dots, t_d^{-1}(u_d | \nu) | \rho, \nu), \quad (2.10)$$

де  $t(x_1, x_2, \dots, x_d)$  – кумулятивна функція  $d$ -мірного спільного  $t$ -розподілу;  $t^{-1}(p)$  – зворотня функція одновимірного  $t$ -розподілу;  $\rho$  – кореляційний параметр;  $\nu \geq 2$  – число ступенів свободи.

Кореляційним параметром  $\rho$  в багатовимірній копулі Стюдента також є кореляційна матриця  $\Sigma$ .

Альтернативний спосіб побудови багатовимірної залежності – використання  $R$ -ієрархічних копул. Будемо називати  $d$ -мірною ієрархічною копулою функцію, побудовану з  $d(d-1)/2$  двовимірних (парних)

копул [45]. Структура цієї функції визначається набором пов'язаних дерев  $V^* = \{T_1, T_2, \dots, T_{d-1}\}$  за наступними правилами:

1.  $T_1 = (V_1, E_1)$  – дерево з вузлами  $V_1 = \{1, 2, \dots, d\}$  та ребрами  $E_1$ . Це дерево є графом, в якому будь-які два вузли пов'язані унікальним з'єднанням [46].
2. Для  $m = 2, 3, \dots, d-1$  дерево  $T_m$  складається з вузлів  $V_m = E_{m-1}$  і ребер  $E_m$ .
3. Для  $m = 2, 3, \dots, d-1$  два вузли дерева  $T_m$  можуть бути пов'язані ребром тільки у випадку, якщо відповідні ребра дерева  $T_{m-1}$  мають спільний вузол.

Нехай  $c_{j_e, k_e; D_e}$  – двовимірна (парна) копула для кожного ребра  $e$  в деякому з  $(d-1)$  дерев ієрархічної копули [18]. Позначимо через  $j_e$  та  $k_e$  індекси умовних змінних  $U_{j_e}$  і  $U_{k_e}$ . Також позначимо через  $D_e$  умовну вибірку, відповідну ребру  $e$ . Таким чином,  $c_{j_e, k_e; D_e}$  – копула-функція щільності розподілу для двох випадкових величин  $U_{j_e|D_e}$  і  $U_{k_e|D_e}$ , де  $U_{i|D} = C_{i|D}(U_i | U_D)$ . Наприкінці, наведемо функцію щільності для  $R$ -ієрархічної копули у вигляді:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \prod_{m=1}^{d-1} \prod_{e \in E_m} c_{j_e, k_e; D_e} \left( C_{j_e|D_e}(u_{j_e} | \mathbf{u}_{D_e}), C_{k_e|D_e}(u_{k_e} | \mathbf{u}_{D_e}); \mathbf{u}_{D_e} \right). \quad (2.11)$$

Структура ієрархічної копули, в якій всі вузли з'єднані послідовно, називається  $D$ -vine, тоді як дерева з зіркоподібною структурою називаються  $C$ -vine [19]. У подальшій роботі будемо використовувати  $R$ -vine структуру, що представляє собою комбінацію двох вищеписаних типів. Така структура є найбільш загальним прикладом максимально покриваючого дерева. Головна перевага ієрархічних копул в тому, що кожна їх компонента являє собою парну копулу з незалежним від інших компонент розподілом. Такі копули легше інтерпретувати і візуалізувати. Сьогодні існує безліч різних підходів для роботи з ними [17-19]. До того ж істотно

збільшується гнучкість копулярної моделі, що розглядається, за рахунок можливості вибору різних розподілів для кожної парної копули.

Грунтуючись на результатах дослідження [19], будемо використовувати абсолютне емпіричне значення  $\tau$  Кендалла в якості міри залежності, так як ця міра не залежить від передбачуваного розподілу, а тому особливо корисна на третьому кроці. Зауважимо, що для ієрархічних копул як параметр допустимо використовувати дійсне значення ступенів свободи, а також різні сімейства розподілів для кожної двовимірної (парної) копули [47].

Розглянемо найбільш поширені сімейства двовимірних (парних) копул. Запишемо рівняння (2.8) для двовимірного випадку:

$$C(u, v | \theta, \delta) = \varphi(\varphi^{-1}(u | \theta, \delta) + \varphi^{-1}(v | \theta, \delta) | \theta, \delta). \quad (2.12)$$

Наведемо формули для сімейств двовимірних копул [11], які будемо використовувати в подальшій роботі.

*Копула Франка.*

Розглянемо рівняння (2.12) при  $0 \leq u, v, t \leq 1, \theta \geq 1, -\infty < \delta < \infty$ , де:

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \varphi(s | \delta) = -\delta^{-1} \log \left[ 1 - (1 - e^{-\delta}) e^{-s} \right], \\ \varphi^{-1}(t | \delta) &= -\log \left[ (1 - e^{-\delta t}) / (1 - e^{-\delta}) \right]. \end{aligned}$$

Тоді:

$$C(u, v | \delta) = -\delta^{-1} \log \left( \frac{1 - e^{-\delta} - (1 - e^{-\delta u})(1 - e^{-\delta v})}{1 - e^{-\delta}} \right).$$

*Копула Гумбеля.*

Розглянемо рівняння (2.12) при  $0 \leq u, v, t \leq 1, \delta \geq 1$ , де:

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \varphi(s | \delta) = \exp\{-s^{1/\delta}\}, \\ \varphi^{-1}(t | \delta) &= (-\log t)^\delta. \end{aligned}$$

Тоді:

$$C(u, v | \delta) = \exp\left\{-\left([\log u]^\delta + [\log v]^\delta\right)^{1/\delta}\right\}.$$

*Копула Клейтона.*

Розглянемо рівняння (2.12) при  $0 \leq u, v, t \leq 1, \delta \geq 0$ , де:

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \varphi(s|\delta) = (1 + s\delta)^{-1/\delta}, \\ \varphi^{-1}(t|\delta) &= \frac{1}{\delta}(t^{-\delta} - 1)^{\delta}.\end{aligned}$$

Тоді:

$$C(u, v|\delta) = (u^{-\delta} + v^{-\delta} - 1)^{-1/\delta}.$$

*Копула Клейтона-Гумбеля (BB1).*

Розглянемо рівняння (2.12) при  $0 \leq u, v, t \leq 1, \theta > 0, \delta \geq 1$ , де:

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \varphi(s|\theta, \delta) = (1 + s^{1/\delta})^{-1/\theta}, \\ \varphi^{-1}(t|\theta, \delta) &= (t^{-\theta} - 1)^{\delta}.\end{aligned}$$

Тоді:

$$C(u, v|\theta, \delta) = \left\{ 1 + [(u^{-\theta} - 1)^{\delta} + (v^{-\theta} - 1)^{\delta}]^{1/\delta} \right\}^{-1/\theta}.$$

Також варто зазначити *незалежну копулу*, що була вперше описана в монографії [32]. Ця копула відповідає випадку, коли вхідні величини  $u$  і  $v$  незалежні:

$$C(u, v) = uv.$$

У статті [15] наведено загальні формули для приведення функції двовимірної копули (2.12) до її «поверненої» (в англійській літературі «survival») версії:

$$\begin{aligned}C_{90}(u, v) &= v - C(1 - u, v), \\ C_{180}(u, v) &= u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v), \\ C_{270}(u, v) &= u - C(u, 1 - v).\end{aligned}\tag{2.13}$$

Число в індексі  $\{90, 180, 270\}$  означає кут повороту в градусах (проти годинникової стрілки). Цей кут може бути визначений на підставі знаку коефіцієнта кореляції.

Детальну інформацію по іншим сімействам можна знайти в монографіях [12, 32]. Вибір найбільш придатного сімейства будемо здійснювати з використанням статистичних тестів Вуонга [48] і Кларка [49].

Для оцінювання параметрів копулярних моделей необхідно початкові дані (наприклад, в разі фінансових часових рядів це логарифмічні прибутковості активів інвестиційного портфелю) відобразити в простір області визначення копули, тобто в одиничний гіперкуб:

$$\mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]^d .$$

Таким чином ми побудуємо емпіричну копулу на основі псевдоспостережень. Нехай з рівняння (2.1) маємо ряд логарифмічних прибутковостей  $\mathbf{r}_i = (r_{1,i}, \dots, r_{T,i})^T$  для всіх історичних спостережень кожного активу  $i \in \overline{1, d}$ , тоді псевдоспостереження будуть визначатися за наступним правилом [50]:

$$u_{t,i} = \frac{rg(r_{t,i})}{T+1}, \forall t \in \overline{1, T}, i \in \overline{1, d} , \quad (2.14)$$

де  $rg(r_{t,i})$  – ранг  $r_{t,i}$  (від найменшого до найбільшого) по відношенню до значень, що спостережуються;  $r_{\tau,i}, \tau \in \overline{1, T}$ , – спостереження.

Кожне псевдоспостереження  $u_{t,i}$  знаходиться в інтервалі  $[0,1]$ .

За історію вивчення копулярних моделей було запропоновано велику кількість різних методів для оцінювання параметрів моделі. Прикладне значення тих чи інших методів визначається їх обчислювальною зручністю, імовірнісними та асимптотичними характеристиками отриманих оцінок.

Для оцінювання параметрів копули будемо використовувати метод «інверсії  $\tau$  Кендалла» [51], який можна застосувати до псевдоспостережень, обчисленим за формулою (2.14).

Для перевірки адекватності отриманих копулярних моделей будемо виконувати параметричний завантажувальний тест оцінки якості (GoF-тест) знайдених параметрів копулярних моделей [52].

У даній роботі будемо використовувати наступні GoF-тести:

1. Для еліптичних копул – функціонал Крамера-фон Мізеса  $S_n$  [52].
2. Для регулярних ієрархічних копул – матричне рівняння інформаційного критерію Уайта,  $W$  [53].

#### 2.4. Побудова інвестиційного портфелю

Для проведення чисельного моделювання будемо використовувати модельні портфелі: рівноважний портфель та оптимальний портфель. У рівноважний портфель будемо включати активи в рівних долях:  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_d)$ , де  $w_i = 1/d$  – це доля  $i$ -го активу у портфелі  $i = 1, 2, \dots, d$ . Очікувана прибутковість такого портфелю буде виражена як:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^d \mu_i w_i.$$

Для побудови оптимального портфелю сформулюємо задачу оптимізації. В якості цільової функції будемо використовувати мінімізацію величини очікуваних втрат  $CVaR_\alpha$ , яку реальні втрати не перевищать з ймовірністю  $\alpha$ :

$$\min_{\mathbf{w}} CVaR_\alpha = \min_{\mathbf{w}} \mathbb{E} \{ -\mu_p \mid -\mu_p \geq VaR_\alpha \}. \quad (2.15)$$

Згідно роботі [54] міра ризику  $VaR_\alpha$  для портфелю з очікуваною прибутковістю  $\mu_p$  визначається з формули:

$$VaR_\alpha = \min \{ \zeta \in \mathbb{R} \mid P(-\mu_p \leq \zeta) \geq \alpha \},$$

де  $\zeta$  – деяке значення випадкової величини  $\xi$ , поставленої у відповідність зі збитками портфелю  $-\mu_p$ .

Обмеження в задачі оптимізації портфелю сформулюємо у вигляді:

$$\sum_{i=1}^d \mu_i w_i \geq \bar{\mu}_p, \quad (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^d w_i = 1, \quad (2.17)$$

$$w_i \geq 0, \forall i. \quad (2.18)$$

Тут обмеження (2.16) визначає умову на мінімальну прибутковість оптимального портфелю, позначену  $\mu_p$ , обмеження (2.17) – доступні грошові кошти повинні бути інвертовані повністю, обмеження (2.18) накладає заборону на позиції без покриття (короткі позиції).

Таким чином, рішенням задачі (2.15)-(2.18) буде структура портфелю  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_d)$  з мінімальним значенням очікуваних втрат  $CVaR_\alpha$  і прибутковістю не менше, ніж значення  $\mu_p$ . Задача (2.15)-(2.18) являє собою задачу лінійного програмування [54], а отже далі можна знайти портфель з мінімальним  $VaR_\alpha$  для заданого рівня  $\alpha$ .

## 2.5. Алгоритм розрахунку точкових оцінок ризик-метрик з використанням копул

Наведемо правило для знаходження ризик-метрик методом історичного моделювання для емпіричних даних. Маючи вектор  $\mathbf{w}$  часток портфелю і масив логарифмічних прибутовостей, можна знайти щоденні прибуток-збитки (profit and loss) портфелю:

$$P \& L(t) = \sum_{i=1}^d w_i r_i(t). \quad (2.19)$$

Згідно з історичним методом моделювання  $VaR$  і  $CVaR$  можуть бути обчислені за правилами [55]:

$$VaR_\alpha = \mathbb{Q}_{-P \& L}(\alpha), \quad (2.20)$$

$$CVaR_\alpha = \mathbb{E}(-P \& L | -P \& L > VaR_\alpha). \quad (2.21)$$

Для перевірки адекватності отриманої оцінки (2.20) будемо використовувати тест Купича [56, 28] на рівні 95%, в якому в якості основної висувається гіпотеза  $H_0$ : оцінка  $VaR$  адекватна. Даний тест передбачає деяку випадкову величину  $\xi$ , що має біноміальний розподіл з числом випробувань  $m$  і ймовірністю успіху  $p$  в якості параметрів.

Алгоритм 1 описує метод для обчислення  $VaR$  і  $CVaR$  з використанням копулярних моделей. Метод заснований на Монте-Карло

генерації псевдоспостережень з використанням побудованих копулярних моделей копул. Даний алгоритм використовується для кожного використовуваного в даній роботі виду копули: гаусової, Стюдента і  $R$ -ієрархічної.

Алгоритм 1. Розрахунок ризик-метрик з використанням копул

Вхід: логарифмічні прибутковості  $\{r_{i,t}\}$ ,  $i \in \overline{1,d}$ , вагові коефіцієнти  $w_i$  оптимального портфелю, маргінальні розподіли і параметри для кожного активу,  $d$ -мірна копула з відомими параметрами, рівень  $\alpha$  для обчислення  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$ .

1. Згенерувати масив псевдоспостережень  $\{\hat{u}_{i,s}\} \in [0,1]^d$ ;  $i \in \overline{1,d}$ ;  $s \in \overline{1,S}$  відповідно до обраної копули.
2. Перетворити згенеровані псевдоспостереження в масив квантилів:
3. *for*  $i \in \overline{1,d}$  *do*
4.     *for*  $s \in \overline{1,S}$  *do*
5.         Обчислити  $\hat{r}_{i,s}$  з рівняння (2.22).
6.     *end for*
7. *end for*
8. Обчислити ряд прибутків і втрат ( $P\&L$ ) портфелю:
9. *for*  $s \in \overline{1,S}$  *do*
10.     Присвоїти  $P\&L(s) = \sum_{i=1}^d \hat{r}_{i,s} \cdot w_i$ .
11. *end for*
12. Обчислити  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$  з рівнянь (2.20) і (2.21) відповідно.

Вихід:  $VaR$  і  $CVaR$  для згенерованих  $P\&L$  портфелю.

Для генерації масиву випадкових псевдоспостережень розмірності  $S \times d$  (рядок 1) використовуються оцінки параметрів

відповідних копул. Параметри еліптичних копул вказані в рівняннях (4.1) і (4.2), а структура ієрархічної копули – в рівняннях (4.3)-(4.6). Потім отримані псевдоспостереження перетворюються в масив квантилів:  $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  (рядки 2-7). Тут необхідно використовувати маргінальні розподіли, отримані для кожного з активів. Для даного перетворення використовується формула:

$$\hat{r}_{i,s} = F_i^{-1}(\hat{u}_{i,s}), \forall i, s, \quad (2.22)$$

де  $F^{-1}(p)$  – зворотня квантильна функція ймовірності маргінального розподілу  $i$ -го активу;  $i \in \overline{1, d}$ ;  $S$  – кількість змодельованих сценаріїв,  $s \in \overline{1, S}$ .

В даному перетворенні зберігається порядок змінних в кожній вибірці сценаріїв. Таким чином, в кінцевій вибірці квантилів між величинами зберігається початкова залежність.

Використовуючи вагові коефіцієнти знайденого *CVaR*-оптимального портфелю, обчислюється ряд *P&L* портфелю (рядок 10). Далі за формулами (2.4) і (2.15) оцінюються ризик-метрики (рядок 12).

Алгоритм 1 дозволяє отримати точкову оцінку ризику модельного портфелю за допомогою копула-моделей. Для отримання незміщених оцінок ризик-метрик пропонуємо використовувати Алгоритм 2.

## **2.6. Алгоритм розрахунку усереднених та інтервальних характеристик ризик-метрик**

Суть алгоритму 2 полягає у генеруванні множини з  $N$  вибірок з подальшим обчисленням усереднених та інтервальних характеристик ризик-метрик.

Нехай  $\hat{x}$  – значення ризик-метрики, отримане історичним методом за емпіричними спостереженнями з рівнянь (2.20) і (2.21). Отримані значення оцінок ризик-метрик порівнюються зі значеннями  $\hat{x}$ . Середнє значення  $\bar{x}$ ,

зміщення  $\Delta$ , стандартне відхилення ( $SD$ ) і середньо-квадратичну помилку ( $RMSE$ ) відповідно запишемо як:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \mathbb{E}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \\ \Delta &= \bar{x} - \hat{x} \\ SD &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}, \\ RMSE &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{x} - x_i)^2}.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Алгоритм 2. Процедура для обчислення оцінок і характеристик ризик-метрик

Вхід: Число вибірок  $N$ , вхідні дані Алгоритму 1.

1. Створити порожні вектори  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$ .
2. *for*  $i \in \overline{1, N}$  *do*
3.     Запустити Алгоритм 1.
4.     Додати отримані значення  $VaR_{\alpha,i}$  і  $CVaR_{\alpha,i}$  до векторів  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$  відповідно.
5. *end for*
6. Обчислити характеристики для  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$  за формулами (2.6).
7. Обчислити довірчий інтервал векторів  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$  за рівнянням (2.24).

Вихід: Середні значення, довірчий інтервал, характеристики помилок оцінок  $VaR$  і  $CVaR$ .

Для проведення чисельних експериментів вибрано інтервал між ймовірностями 2,5 і 97,5%:

$$q^- = \mathbb{Q}_x(0.025), q^+ = \mathbb{Q}_x(0.975), \tag{2.24}$$

де  $\mathbb{Q}_x(p)$  – емпіричний квантиль вектора  $\mathbf{x}$  на імовірності  $p$ ;  $\mathbf{x}$  – вектор відповідної ризик-метрики (алгоритм 2).

Результатом такої процедури буде набір з  $N$  оцінок, за допомогою якого можна отримати незміщену оцінку необхідної ризик-метрики і знайти для неї довірчий інтервал.

## 2.7. Висновки

У даному розділі було вказано формулу перетворення ряду денних цін закриття активів в ряд логарифмічних прибутковостей. Через нелінійну залежність фінансових часових рядів наведено коефіцієнти рангової кореляції Кендалла та Спірмена, вказано, що коефіцієнт Пірсона не підходить для роботи.

Наведено коротке описання маргінальних розподілів-кандидатів: гіперболічного, стійкого і Мейкснера. Вказано методи для оцінювання параметрів маргінальних розподілів: для гіперболічного – Нелдера-Міда, для інших – метод дистанції Крамера фон Мізеса. Вказано методи для оцінювання якості отриманих параметрів: тести Колмогорова-Смирнова, Андерсона-Дарлінга, Крамера-фон Мізеса.

Наведено описання різних  $d$ -мірних (еліптичної та архімедової) і  $R$ -ієрархічних копул. Описано  $d$ -мірні еліптичні гаусова копула та  $t$ -копула. В якості міри залежності використано абсолютне емпіричне значення  $\tau$  Кендалла. Розглянуто найбільш поширені сімейства двовимірних копул для  $R$ -vine моделі: Клейтона, Гумбеля, BB1, Франка, незалежну. Для оцінювання параметрів копул використовуватимемо метод «інверсії  $\tau$  Кендалла». Для перевірки адекватності отриманих копулярних моделей наведено GoF-тести для знайдених параметрів моделей: для еліптичних – функціонал Крамера-фон Мізеса, для регулярних – матричне рівняння Уайта.

Описано модельні інвестиційні портфелі, що будемо використовувати: рівноважний та оптимальний. Для побудови оптимального портфелю, сформулюємо задачу оптимізації, де цільова

функція – мінімізація величини втрат  $CVaR_\alpha$ , яку реальні втрати не перевищать з ймовірністю  $\alpha$ .

Наведено формулу для обчислення  $P\&L$  методом історичного моделювання для емпіричних даних. З  $P\&L$  можна отримати  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$ . Для перевірки адекватності оцінки  $VaR_\alpha$  запропоновано тест Купича.

Також записано алгоритм розрахунку точкових оцінок ризик-метрик з використанням копул і алгоритм розрахунку усереднених та інтервальних характеристик ризик-метрик. Для проведення чисельних експериментів вказано інтервал між 2,5 та 97,5%.

## 3. АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

### 3.1. Описання мови програмування та бібліотек

Для відтворення відповідних формул та алгоритмів, а також для роботи зі статистичними даними найкращими мовами програмування будуть R чи Python.

Мова програмування R – це мова для статистичної обробки даних та роботи з графікою. Також це вільне середовище програмування з відкритим кодом. Ця мова широко використовується як статистичне програмне забезпечення для аналізу даних. Вона практично стала стандартом статистичних програм.

Мова програмування Python – високорівнева мова програмування, що орієнтована на підвищення продуктивності розробника та читання коду. Для цієї мови створено багато бібліотек для зручної роботи із статистичними даними.

Переваги мови програмування Python:

1. Простий, але виразний синтаксис.
2. Великий вибір бібліотек. І мова не тільки про бібліотеки алгоритмів машинного навчання – на Python розробляють хмарні сховища, стрімінгові сервіси, ігри.
3. Висока культура документації. Сам Python прекрасно документований, і зазвичай бібліотеки, засновані на ньому продовжують цю традицію.

Бібліотеки для мови програмування Python:

1. Statsmodels – це модуль Python, який надає класи та функції для оцінювання багатьох різних статистичних моделей, а також для проведення статистичних тестів та дослідження статистичних даних. Для кожного користувача доступний великий перелік результатів статистичних даних. Результати перевіряються на основі існуючих статистичних пакетів, щоб переконатися в їх

правильності. Пакет випущено з ліцензією відкритого коду «Modified BSD». Інтернет-документація розміщена на сайті [statsmodels.org](http://statsmodels.org).

2. NumPy – бібліотека, що надає підтримку високорівневих математичних функцій, що призначені для роботи з багатомірними масивами даних. Також надає підтримку цих багатовимірних масивів, включаючи матриці. При цьому швидкість роботи цих функцій на рівні MATLAB.
3. Seaborn – це бібліотека, яка використовує Matplotlib для побудови графіків. В даній роботі вона потрібна, перш за все, для того, щоб побудувати парні графіки (Pair plot).
4. Matplotlib – бібліотека для гарної візуалізації даних. Згенеровані графіки можуть бути використані в наукових публікаціях, інтерактивній графіці, графічному інтерфейсі користувача, веб-застосунках, де треба побудувати діаграми.
5. Pandas – бібліотека для обробки та аналізу даних. Надає спеціальні операції та структури даних для роботи з числовими таблицями та часовими рядами.
6. Scikit-learn – бібліотека машинного навчання, що дозволяє створювати та тренувати різноманітні алгоритми регресії, класифікації, кластеризації (наприклад, градієнтний бустинг, лінійна регресія і т.д.). Працює з іншими бібліотеками, такими як NumPy, SciPy.
7. SciPy – бібліотека, спеціально розроблена інженерних та наукових робіт. Вона потрібна для пошуку мінімумів та максимумів функції. В даному випадку я застосую її для знаходження долей активів в оптимальному портфелі.
8. Dbfread – бібліотека для роботи з .dbf файлами. DBF – це формат файлу, який використовується базами даних, такими як dBase, Visual FoxPro та FoxBase+. Дана бібліотека зчитує файли

DBF і повертає дані як типи даних Python для їх подальшої обробки. Він, насамперед, призначений для пакетних завдань та одноразових сценаріїв.

### 3.2. Архітектура програмного забезпечення

Програма реалізована у вигляді додатку Python Script. Для запуску необхідно виконати команду «python main.py».

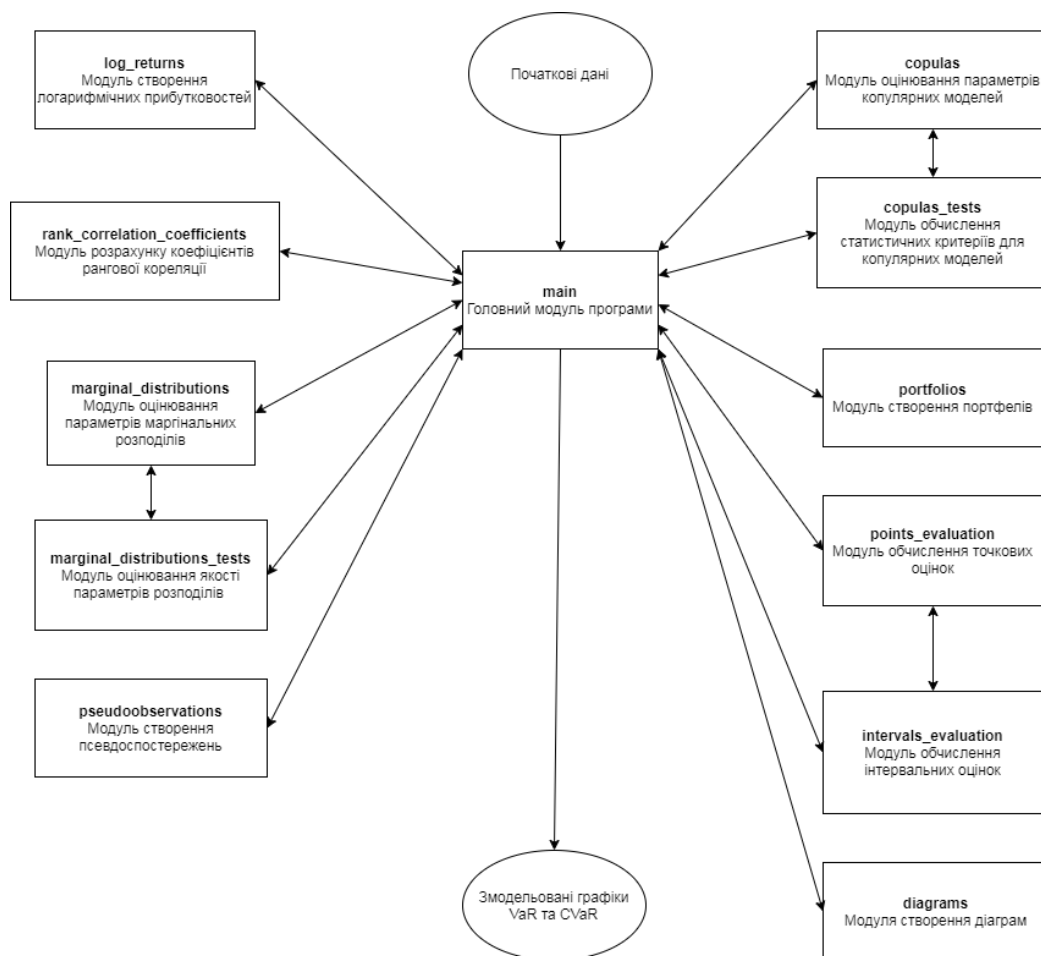


Рис. 3.1. Структура програми

Структура програми складається з модулів, що описані на рис. 3.1.

В додатку наявні наступні модулі, до яких по черзі звертається головний модуль main:

1. Log\_returns – модуль, в якому прибутковості завантажуються з файлів прибутковостей біржі. Тут використовується бібліотека

Dbfread для зчитування .dbf файлів. В цьому модулі також відбувається перетворення даних у логарифмічні прибутковості для більш зручного дослідження фінансових часових рядів.

2. Rank\_correlation\_coefficients – модуль розрахунку коефіцієнтів рангової кореляції Спірмена та Кендалла. Модуль повертає коефіцієнти Кендалла до головного модулю main.
3. Marginal\_distributions – модуль побудови маргінальних розподілів, оцінювання їх параметрів за допомогою методів Нелдера-Міда та критерію омега-квадрат (метод дистанції Крамера-фон Мізеса).
4. Marginal\_distributions\_tests – модуль для оцінювання якості отриманих параметрів маргінальних розподілів: Колмогорова-Смирнова, Андерсона-Дарлінга, Крамера-фон Мізеса.
5. Pseudoobservations – модуль для створення псевдоспостережень для роботи з копулярними моделями.
6. Copulas – модуль для оцінювання параметрів копул: створення гаусової та Стюдента кореляційних матриць. Також в цьому модулі розраховуються коефіцієнти двохпараметричних копул для  $R$ -vine дерева та повертаються матриці  $M$  та  $P$ .
7. Copulas\_tests – модуль для обчислення статистичних критеріїв для копулярних моделей: функціоналу Крамера-фон Мізеса для гаусової та Стюдента копул, а також статистики Уайта для  $R$ -vine копули.
8. Portfolios – модуль для створення рівноважного та оптимального портфелів.
9. Points\_evaluation – модуль обчислення точкових оцінок  $VaR$  та  $CVaR$  за алгоритмом 1, для кожного рівня ризик-метрик  $\alpha$ .
10. Intervals\_evaluation – незміщених оцінок  $VaR$  та  $CVaR$  за алгоритмом 2 та розрахунку довірчих інтервалів для кожного рівня ризик-метрик  $\alpha$ . Тут розраховуються стандартне відхилення та RMSE.

11. Diagrams – модуль створення діаграм для відтворення отриманих даних. Від буде гістограми логарифмічних прибутковостей контрактів: DE, GOLDU, DX, UX, квантиль-квантильні графіки (QQ plot) логарифмічних прибутковостей з накладеними на них розподілом Мейкснера, парні графіки (Pair plot) для початкових спостережень та псевдоспостережень, графіки точкових оцінок ризик метрик VaR та CVaR кожної копули для кожного  $\alpha$ -рівня, графіки інтервальних оцінок ризик-метрик VaR та CVaR кожної копули з довірчими інтервалами, кінцеві змодельовані ряди VaR та CVaR для різних копулярних моделей в порівнянні з емпірично досліджуваними даними.

### 3.3. Модуль відтворення даних

Як було вказано у підрозділі 3.2, в модулі Diagrams зберігаються функції, що будують різні графіки для зручного відтворення результатів роботи програми.

Наведемо короткий перелік цих функцій:

1. Create\_histogram – функція побудови гістограми одного активу.
2. Create\_histograms – функція побудови чотирьох гістограм відповідних активів UX, DX, DE, GOLDU.
3. Create\_final\_plot – функція побудови змодельованого ряду VaR чи CVaR для різних копулярних моделей в порівнянні з емпірично спостережуваними значеннями.
4. Create\_pair\_plot – функція побудови парних графіків для початкових спостережень чи псевдоспостережень.
5. Create\_points\_var\_cvar\_plot – функція побудови графіку точкових оцінок для VaR чи CVaR для різних рівнів ризик-метрик  $\alpha$ .
6. Create\_intervals\_var\_cvar\_plot – функція побудови графіку інтервальних оцінок з довірчими інтервалами для VaR чи CVaR для різних рівнів ризик-метрик  $\alpha$ .

7. `Create_qq_plot` – функція побудови квантиль-квантильного графіку для симульованих даних та логарифмічних прибутковостей.
8. `Create_qq_plots` – функція побудови чотирьох квантиль-квантильних графіків для активів DE, DX, UX, GOLDU.
9. `Create_final_plots` – функція побудови двох змодельованих рядів для *VaR* та *CVaR* на основі навчання копулярних моделей протягом трьох місяців.
10. `Create_pair_plots` – функція побудови двох парних графіків: для псевдоспостережень та початкових спостережень.
11. `Create_points_intervals_var_cvar_plots` – функція побудови чотирьох графіків (двох точкових та двох інтервальних) для ризик-метрик *VaR* та *CVaR*.

### **3.4. Висновки**

Обрано мову програмування Python для розроблення програми. Вибрано бібліотеки, що підходять для роботи із статистичними даними та графіками.

Описано структуру програмного забезпечення, її модулі та взаємозв'язки різних частин застосунку. Детально описано модуль `Diagrams`, що будує різні графіки: QQ plot, Pair plot, гістограми, точкові та інтервальні оцінки ризик-метрик.

## 4. РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ПРОГРАМИ. КАЛІБРУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ. ОБЧИСЛЕННЯ РИЗИК-МЕТРИК З ВИКОРИСТАННЯМ КОПУЛ

### 4.1. Тестування програмного забезпечення

Об'єктом випробувань є програмне забезпечення для оцінювання ризику інвестиційного портфелю.

При тестуванні застосунку перевірено:

1. Зручність роботи із програмою.
2. Робота алгоритмів для обчислення точкових та інтервальних оцінок ризик-метрик  $VaR$  та  $CVaR$ .
3. Робота окремих модулів та їх комбінацій.
4. Працездатність вікон, де відтворюються згенеровані графіки результатів роботи застосунку.
5. Безпечність роботи із програмним забезпеченням.

Для тестування модулів написано Unit-тести для кожної функції, до якої звертається модуль main:

1. Створення логарифмічних прибутковостей.
2. Розрахунок коефіцієнтів рангової кореляції.
3. Оцінювання параметрів маргінальних розподілів.
4. Оцінювання якості параметрів розподілів.
5. Створення псевдоспостережень.
6. Оцінювання параметрів копулярних моделей.
7. Обчислення статистичних критеріїв для копулярних моделей.
8. Створення портфелів.
9. Обчислення точкових оцінок.
10. Обчислення інтервальних оцінок.

Для Unit-тестування на вхід до функції подавалися тестові дані і записувався деякий очікуваний результат. При співпадінні очікуваного

результату та результату, що був розрахований системою, тест вважався пройденим успішно.

Результати тестування показали, що застосунок є зручним для використання, стабільно працюючим при різних умовах, безперебійно працюючим при максимальному навантаженні та має зручні елементи інтерфейсу.

Розглянемо результати тестування розробленої в роботі системи, отримані у вигляді діаграм та графіків, наведених на рис. 4.1-4.11, та одночасно проведемо калібрування математичної моделі, обчислимо ризик-метрики з використанням копул.

#### **4.2. Початкові дані**

У даній роботі використовується інвестиційний портфель з чотирьох активів.

Портфель складається з даних деривативів:

1. Ф'ючерс на курс євро – долар США (Тикер: DE).
2. Ф'ючерс на ціну однієї тройської унції афінованого золота (Тикер: GOLDU).
3. Ф'ючерс на курс долар США – українська гривня (Тикер: DX).
4. Ф'ючерс на індекс українських акцій (Тикер: UX).

Дані по цим активам взято з Української біржі, де представлено український ринок похідних цінних паперів [57].

В якості початкових даних використовуються денні ціни закриття вищеперелічених контрактів з 14 червня 2016 до 14 червня 2018 (512 спостережень). З 14 червня 2018 року дані про ринок деривативів на сайті біржі відсутні.

В першу чергу, отримані котованні активів були перетворені в логарифмічні прибутковості через рівняння (2.1). На рис. 4.1 зображені результати роботи програми – гістограми отриманих часових рядів, а в таблиці «Описові характеристики логарифмічних прибутковостей»

в Додатку 1 вказані їх основні характеристики: середня денна прибутковість  $\mu$  і стандартне відхилення  $\sigma$ . Згідно з методологією (підрозділ 2.1), в даній роботі використовувався коефіцієнт нелінійної рангової кореляції  $\tau$  Кендалла (2.3).

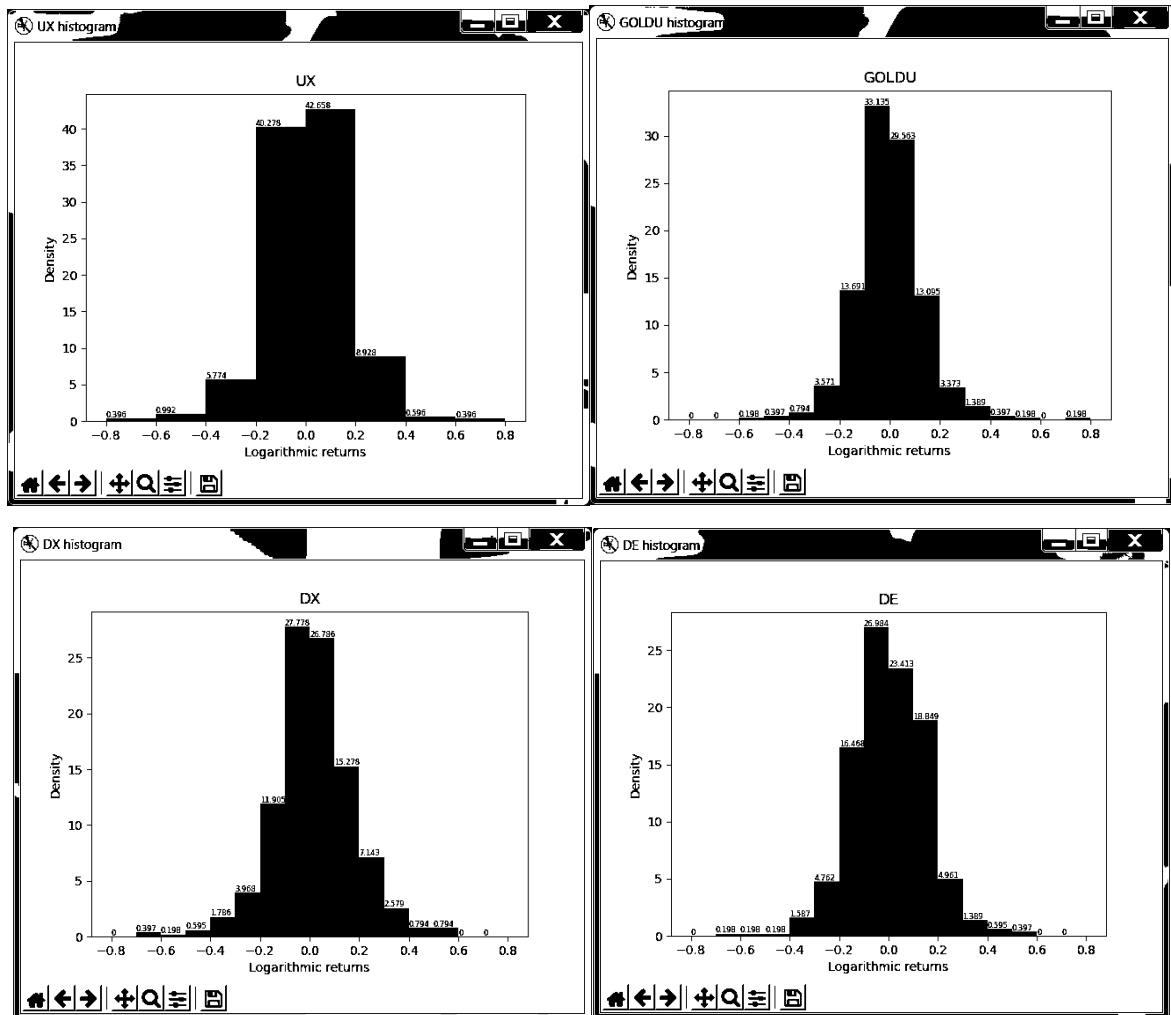


Рис. 4.1. Результати роботи програми: гістограми логарифмічних прибутковостей контрактів

#### 4.3. Результати оцінювання параметрів розподілів

Параметри маргінальних розподілів оцінюються згідно з методологією, описаною в підрозділі 2.2. Отримані результати наведені в таблиці 3. Результати тестів оцінювання якості отриманих результатів, а саме Колмогорова-Смирнова, Андерсона-Дарлінга і Крамера-фон Мізеса, наведені в таблиці 4.

Для вибору одного розподілу будемо використовувати значення  $p$ -значення, що були отримані в результаті тесту Крамера-фон Мізеса, який є найпотужнішим статистичним критерієм серед розглянутих в даній роботі.

За його результатами вибрано розподіл Мейкснера в якості маргінального, який будемо використовувати в подальших розрахунках.

Таблиця 3

Оцінки параметрів маргінальних розподілів

| Розподіли і параметри     |          | DE       | UX       | DX       | GOLDU    |
|---------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Розподіл<br>Мейкснера     | $\alpha$ | 0.00394  | 0.02943  | 0.02731  | 0.00512  |
|                           | $\beta$  | 0.88208  | 0.46558  | 0.20459  | 0.88233  |
|                           | $\delta$ | 18.2811  | 0.52306  | 0.52052  | 17.9421  |
|                           | $\mu$    | -0.03575 | -0.00183 | -0.00137 | -0.03559 |
| Гіперболічний<br>розподіл | $\pi$    | 0.03291  | 0.06244  | 0.06835  | 0.03249  |
|                           | $\zeta$  | 3.28643  | 0.79306  | 0.72346  | 3.29003  |
|                           | $\delta$ | 0.01835  | 0.00783  | 0.00577  | 0.02157  |
|                           | $\mu$    | -0.00081 | -0.00003 | -0.00143 | -0.00082 |
| Стійкий<br>розподіл       | $\alpha$ | 1.93875  | 1.57302  | 1.86326  | 1.93588  |
|                           | $\beta$  | 0.65712  | 0.20939  | 0.84887  | 0.65313  |
|                           | $\gamma$ | 0.00988  | 0.00934  | 0.00763  | 0.00987  |
|                           | $\delta$ | -0.00014 | 0.00066  | -0.00097 | -0.00014 |

На рис. 4.2-4.3 наведені графічні результати оцінювання параметрів розподілів, відтворені за допомогою розробленого програмного забезпечення: показані квантиль-квантильні графіки для модельних даних і даних, що спостерігаються при використанні обраного розподілу Мейкснера. Вертикальні пунктирні лінії відповідають квантилям рівня 0.05 і 0.95.

$p$ -значення статистичних тестів для розподілів-кандидатів

| Тест                 | Розподіл      | DE   | GOLDU | DX   | UX   |
|----------------------|---------------|------|-------|------|------|
| Андерсона-Дарлінга   | Гіперболічний | 0.92 | 0.99  | 0.93 | 0.86 |
|                      | Стійкий       | 0.96 | 0.49  | 0.84 | 0.75 |
|                      | Мейкснера     | 0.91 | 0.99  | 0.90 | 0.89 |
| Крамера-фон Мізеса   | Гіперболічний | 0.89 | 0.99  | 0.90 | 0.93 |
|                      | Стійкий       | 0.97 | 0.93  | 0.91 | 0.97 |
|                      | Мейкснера     | 0.97 | 0.99  | 0.95 | 0.99 |
| Колмогорова-Смирнова | Гіперболічний | 0.77 | 0.99  | 0.84 | 0.92 |
|                      | Стійкий       | 0.93 | 0.89  | 0.95 | 0.88 |
|                      | Мейкснера     | 0.95 | 0.99  | 0.94 | 0.99 |

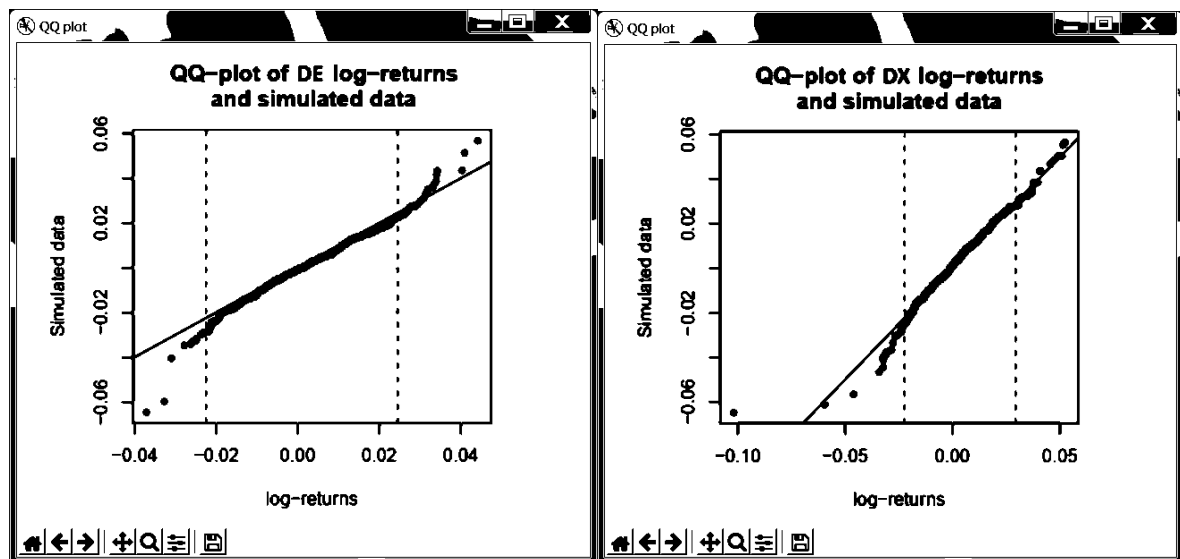


Рис. 4.2. Результати оцінювання параметрів розподілів – квантиль-квантильні графіки активів DE та DX

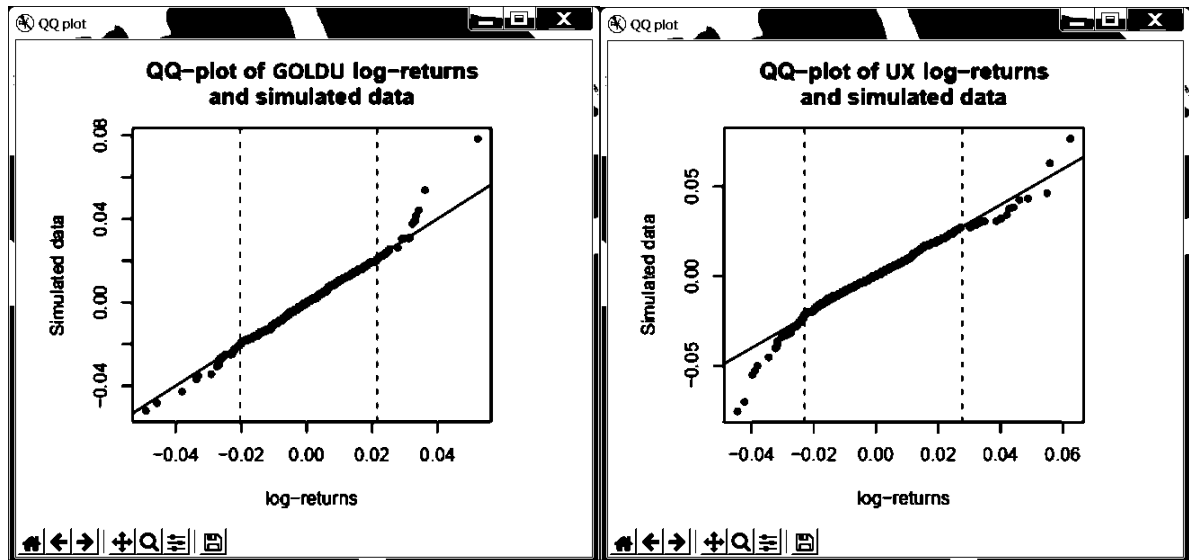


Рис. 4.3. Результати оцінювання параметрів розподілів – квантиль-квантильні графіки активів GOLDU та UX

#### 4.4. Результати оцінювання параметрів копул

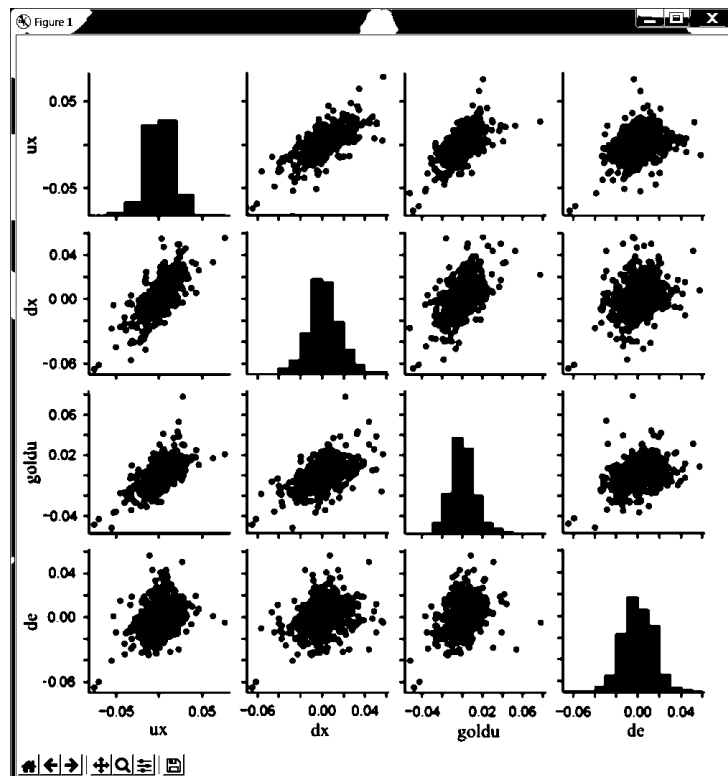


Рис. 4.4. Парні графіки спостережень: на головній діагоналі – гістограми маргінальних розподілів логарифмічних прибутковостей, нижче і вище діагоналі – точкові графіки парних спільних розподілів

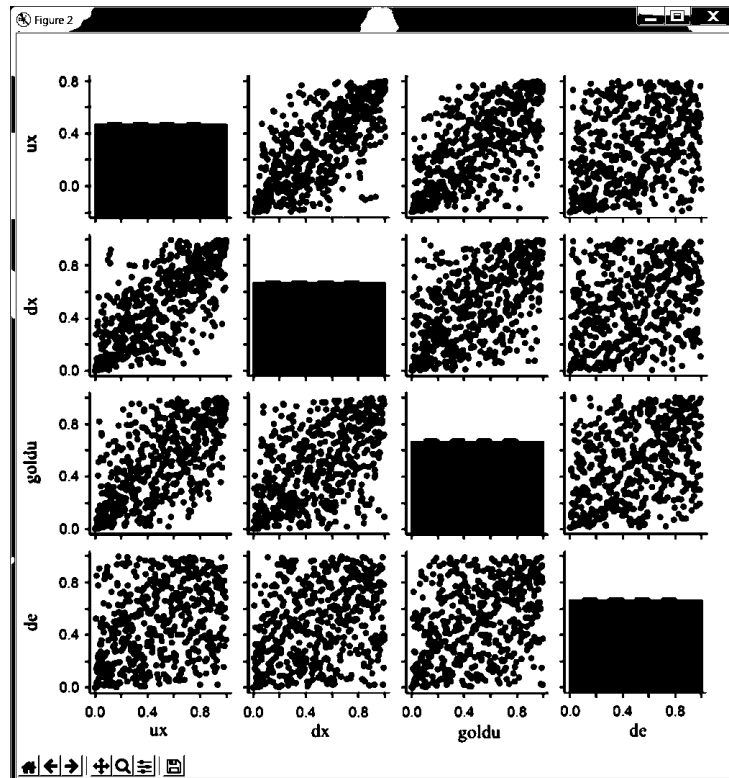


Рис. 4.5. Парні графіки псевдоспостережень: на головній діагоналі – гістограми маргінальних розподілів логарифмічних прибутковостей, нижче і вище діагоналі – точкові графіки парних спільних розподілів

На рис. 4.4-4.5 наведено графічне представлення за допомогою бібліотеки Seaborn для початкових спостережень і псевдоспостережень: вище та нижче головної діагоналі – точкові графіки парних спільних розподілів початкових спостережень і отриманих псевдоспостережень, на головній діагоналі – гістограми маргінальних розподілів.

З таблиці «Описові характеристики логарифмічних прибутковостей» з Додатку 1 видно, що максимальний коефіцієнт рангової кореляції  $\tau$  Кендалла спостерігається між логарифмічними прибутковостями UX і DX ( $\tau = 0,623$ ), ця величина зберігається після відображення прибутковостей в область визначення копули за правилом (2.14).

Отримані псевдоспостереження далі будемо використовувати для побудови оцінок параметрів копулярних моделей згідно методології, описаної в підрозділі 2.3. Підсумком даного кроку для моделі гаусової

копули є кореляційна матриця  $\sum_{Gauss}$ , копули Стюдента – кореляційна матриця  $\sum_t$  і число ступенів свободи  $\nu$ . Їх значення наведено в (4.1)-(4.2).

$$\sum_{Gauss} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0.689 & 1 & & \\ 0.613 & 0.552 & 1 & \\ 0.288 & 0.291 & 0.408 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\sum_t = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0.689 & 1 & & \\ 0.613 & 0.552 & 1 & \\ 0.288 & 0.291 & 0.408 & 1 \end{pmatrix}, \nu = 4. \quad (4.2)$$

Як можна помітити, кореляційні матриці для обох копул ідентичні. Це відбувається тому, що оцінка першого параметра багатовимірної копули визначається тільки залежністю між змінними.

Нехай кожному з активів  $\{UX, DX, GOLDU, DE\}$  портфелю відповідає ряд псевдоспостережень  $u_i$ , де  $i$  – порядковий номер активу,  $i \in \overline{1, d}$ . Тоді оцінки параметрів для ієрархічної копули можна описати наступною структурою:

1. Дерево 1:

- $c_{u_1; u_2}$  – копула Стюдента з даними параметрами  $\rho = 0.689, \nu = 8,134, \tau = 0.491$ .
- $c_{u_4; u_3}$  – копула Survival Gumbel (повернена на 180 градусів копула Гумбеля) з параметрами  $\delta = 1.296, \tau = 0.243$ .
- $c_{u_3; u_1}$  – копула Survival BB1 (повернена на 180 градусів копула Клейтона-Гумбеля) з параметрами  $\theta = 0.131, \delta = 1.723, \tau = 0.392$ .

2. Дерево 2:

- $c_{u_4; u_1; u_3}$  – копула Клейтона з параметрами  $\delta = 0.171, \tau = 0.069$ .
- $c_{u_3; u_2; u_1}$  – копула Гумбеля з параметрами  $\delta = 1.135, \tau = 0.084$ .

### 3. Дерево 3:

- $c_{u_4;u_2;u_3;u_1}$  – копула Франка з параметрами  $\delta = 0.612, \tau = 0.057$ .

Ця ж структура може бути представлена у вигляді набору матриць  $M, F, P_1, P_2$ , наведених в рівняннях (4.3)-(4.6). Матриця  $M$  визначає структуру дерева, інші матриці –  $F, P_1, P_2$  – вказують для кожного вузла (парної копули) набір сімейств, перший і другий параметри відповідно. Якщо копула має тільки один параметр, то таким є  $\delta$ , якщо ж копула двохпараметрична, то першим і другим параметрами є  $\theta$  і  $\delta$  відповідно. У матриці  $F$  введені скорочення для позначення сімейств:  $St$  – Стюдента,  $Gu$  – Гумбеля,  $Cl$  – Клейтона,  $Fr$  – Франка,  $SBB1$  – Survival  $BB1$ ,  $SG$  – Survival Gumbel.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 4 & 1 & & \\ 3 & 4 & 3 & \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$F = \begin{pmatrix} Fr & & \\ Gu & Cl & \\ St & SBB1 & SG \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.612 & & \\ 1,135 & 0,171 & \\ 0,689 & 0,131 & 1,296 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 8,134 & 1,723 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Результати статистичних тестів отриманих моделей наведені в таблиці 5. Для багатовимірних гаусової та Стюдента копул був розрахований функціонал Крамера-фон Мізеса, а для ієрархічної копули – статистика Уайта. Грунтуючись на  $p$ -значеннях GoF-тестів оцінки параметрів, у нас немає підстав відкидати нульову гіпотезу про приналежність копул одному з розподілів на 5% рівні значимості. Однак за

їх значеннями для  $R$ -vine копули можна зробити висновок, що ця модель є найбільш адекватною з усіх по відношенню до реальних даних.

Таблиця 5

Значення статистичних критеріїв для різних копулярних моделей.  $S_n$  – функціонал Крамера-фон Мізеса,  $W$  – статистика Уайта

| Копула    | Статистика    | $p$ -значення |
|-----------|---------------|---------------|
| $R$ -vine | $W = 15,283$  | 0,94          |
| Стьюдента | $S_n = 0,408$ | 0,08          |
| Гаусова   | $S_n = 0,067$ | 0,23          |

#### 4.5. Результати рішення задачі пошуку оптимального інвестиційного портфелю

В результаті рішення оптимізаційної задачі (2.15)-(2.18) отримано портфель, при мінімальній прибутковості  $\bar{\mu}_p = 0,05$ , з наступною структурою:

$$\mathbf{w} = \{0,062; 0,109; 0,366; 0,463\},$$

де кожен елемент вектора – це доля вкладення активів UX, DX, GOLDU, DE відповідно. Для того, щоб переконатися в доцільності виконання оптимізації, я порівняв ризик-метрики отриманого портфелю зі значеннями, отриманими для рівноважного портфелю. Для даного порівняння можна обійтися звичайним історичним методом розрахунку  $VaR$  і  $CVaR$ . В якості рівнів ризик-метрик виберемо наступні значення ймовірностей:

$$\boldsymbol{\alpha} = \{90; 95; 99; 99.5; 99.9\}.$$

У таблиці 6 наведені значення ризик-метрик для двох портфелів (оптимальний і рівноважний) і п'яти рівнів. Четверта колонка в першому рядку в таблиці показує різницю між результатами, що рівна абсолютній різниці ризик-метрик, отриманих для рівноважного і

оптимального портфелів. З таблиці 6 видно, що при розрахунку як  $VaR$ , так і  $CVaR$  для всіх заданих рівнів оптимальний портфель показав більш консервативну оцінку. Це говорить про доцільність виконання оптимізації портфелю.

Таблиця 6

Порівняння ризик-метрик рівноважного і оптимального портфелів для різних ймовірностей

| $\alpha$ ,<br>% | Оптимальний                          |                                       | Рівноважний                          |                                       | Зміщення, $\times 10^{-2}$           |                                       |
|-----------------|--------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
|                 | $VaR_{\alpha}$ ,<br>$\times 10^{-2}$ | $CVaR_{\alpha}$ ,<br>$\times 10^{-2}$ | $VaR_{\alpha}$ ,<br>$\times 10^{-2}$ | $CVaR_{\alpha}$ ,<br>$\times 10^{-2}$ | $VaR_{\alpha}$ ,<br>$\times 10^{-2}$ | $CVaR_{\alpha}$ ,<br>$\times 10^{-2}$ |
| 90.0            | 1.29                                 | 1.95                                  | 1.31                                 | 2.09                                  | 0.02                                 | 0.14                                  |
| 95.0            | 1.65                                 | 2.39                                  | 1.79                                 | 2.66                                  | 0.14                                 | 0.27                                  |
| 99.0            | 2.48                                 | 4.02                                  | 2.71                                 | 4.41                                  | 0.23                                 | 0.39                                  |
| 99.5            | 3.57                                 | 5.18                                  | 4.01                                 | 5.44                                  | 0.44                                 | 0.26                                  |
| 99.9            | 5.58                                 | 5.77                                  | 6.03                                 | 6.21                                  | 0.45                                 | 0.44                                  |

#### 4.6. Точкові оцінки ризик-метрик $VaR$ та $CVaR$

Для розрахунку ризик-метрик на даному етапі будемо використовувати масив логарифмічних прибутковостей з оціненими для кожної змінної параметрами маргінального розподілу Мейснера, вагові коефіцієнти знайденого  $CVaR$ -оптимального портфелю, три копулярні моделі зі знайденими параметрами. Для заданого в підрозділі 4.4 вектора рівнів ймовірностей  $\alpha$  обчислимо значення  $VaR_{\alpha}$  і  $CVaR_{\alpha}$  згідно з алгоритмом 1.

У таблицях 7 і 8 приведені результати розрахунку  $VaR$  і  $CVaR$  відповідно. На рис. 4.6-4.7 зображені графіки ризик-метрик  $VaR$  і  $CVaR$ , отримані за результатами роботи програми. З таблиць 7 і 8 та рис. 4.6-4.7

видно, що всі три моделі залишаються консервативними на невеликих та середніх рівнях ймовірності. Причому оцінки, отримані за допомогою гаусової і Стюдента копул, більш консервативні, порівняно з більш точною моделлю  $R$ -ієрархічної копули.

Таблиця 7

Значення емпіричної  $VaR^{emp}$  і оціненої ризик-метрики  $VaR^{est}$  з використанням гаусової (Gauss), Стюдента (St),  $R$ -vine копул

| Рівень,<br>% | $VaR^{emp}$ ,<br>$\times 10^{-2}$ | $VaR^{est}$ , $\times 10^{-2}$ |       |       | $\Delta$ , $\times 10^{-2}$ |       |       |
|--------------|-----------------------------------|--------------------------------|-------|-------|-----------------------------|-------|-------|
|              |                                   | $R$ -vine                      | Gauss | St    | $R$ -vine                   | Gauss | St    |
| 90.0         | 1.291                             | 1.504                          | 1.541 | 1.694 | 0.213                       | 0.250 | 0.403 |
| 95.0         | 1.653                             | 1.906                          | 2.114 | 2.346 | 0.253                       | 0.461 | 0.693 |
| 99.0         | 2.482                             | 3.188                          | 3.187 | 3.548 | 0.706                       | 0.705 | 1.066 |
| 99.5         | 3.570                             | 3.879                          | 3.646 | 3.984 | 0.309                       | 0.076 | 0.414 |
| 99.9         | 5.582                             | 5.968                          | 5.598 | 5.804 | 0.386                       | 0.016 | 0.222 |

Таблиця 8

Значення емпіричної  $CVaR^{emp}$  і оціненої ризик-метрики  $CVaR^{est}$  з використанням гаусової (Gauss), Стюдента (St),  $R$ -vine копул

| Рівень,<br>% | $CVaR^{emp}$ ,<br>$\times 10^{-2}$ | $CVaR^{est}$ , $\times 10^{-2}$ |       |       | $\Delta$ , $\times 10^{-2}$ |        |        |
|--------------|------------------------------------|---------------------------------|-------|-------|-----------------------------|--------|--------|
|              |                                    | $R$ -vine                       | Gauss | St    | $R$ -vine                   | Gauss  | St     |
| 90.0         | 1.953                              | 2.261                           | 2.324 | 2.521 | 0.308                       | 0.371  | 0.568  |
| 95.0         | 2.392                              | 2.820                           | 2.852 | 3.087 | 0.428                       | 0.460  | 0.695  |
| 99.0         | 4.025                              | 4.564                           | 4.328 | 4.442 | 0.539                       | 0.303  | 0.417  |
| 99.5         | 5.182                              | 5.393                           | 5.001 | 4.916 | 0.211                       | -0.181 | -0.266 |
| 99.9         | 5.772                              | 5.920                           | 5.723 | 5.915 | 0.148                       | -0.049 | 0.143  |

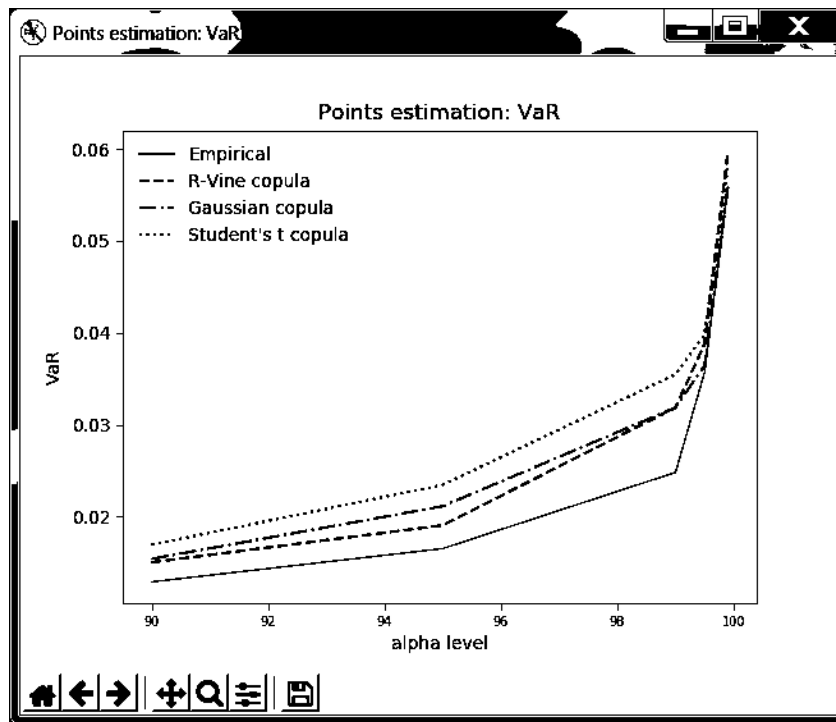


Рис. 4.6. Результати роботи програми: точкові оцінки ризик-метрики  $VaR$  для різних копулярних моделей в порівнянні з емпіричними даними

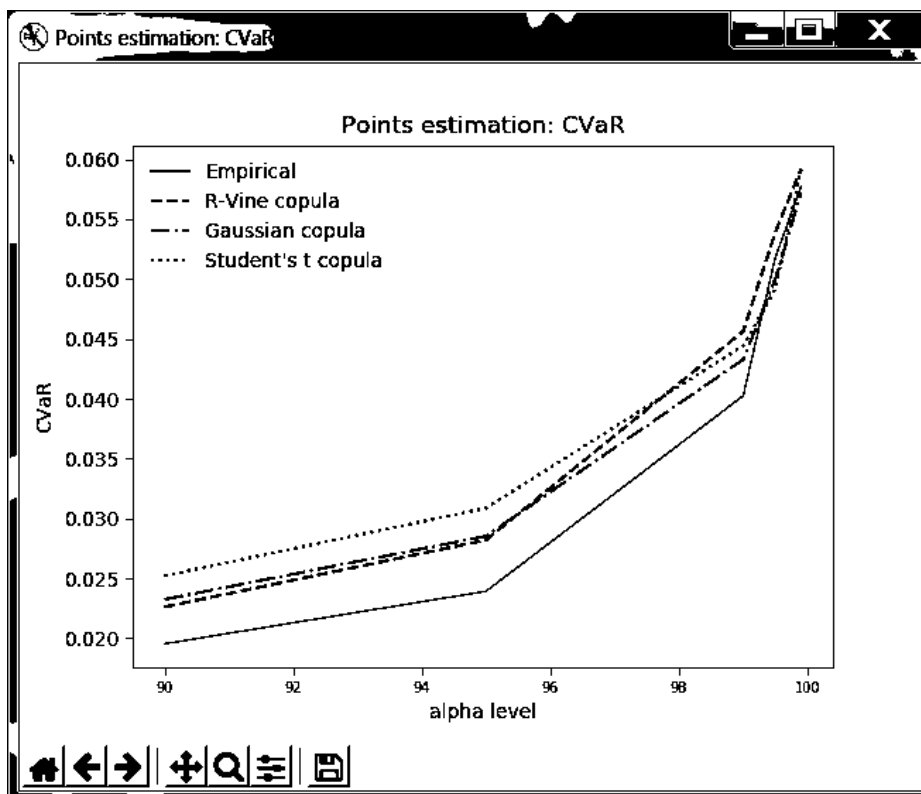


Рис. 4.7. Результати роботи програми: точкові оцінки ризик-метрики  $CVaR$  для різних копулярних моделей в порівнянні з емпіричними даними

Далі, на рівнях 99.5 і 99.9% моделі гаусової та Стюдента копул починають вести себе агресивно (недооцінюють ризик), в той час як  $R$ -ієрархічна залишається консервативною. На даному етапі можна зробити вибір на користь  $R$ -ієрархічної копули, потім копули Стюдента, і в останню чергу гаусової як найменш консервативної.

#### 4.7. Інтервальні оцінки ризик-метрики $VaR$ та $CVaR$

Обґрунтування для використання бутстрап-процедури описано в підрозділі 2.6.

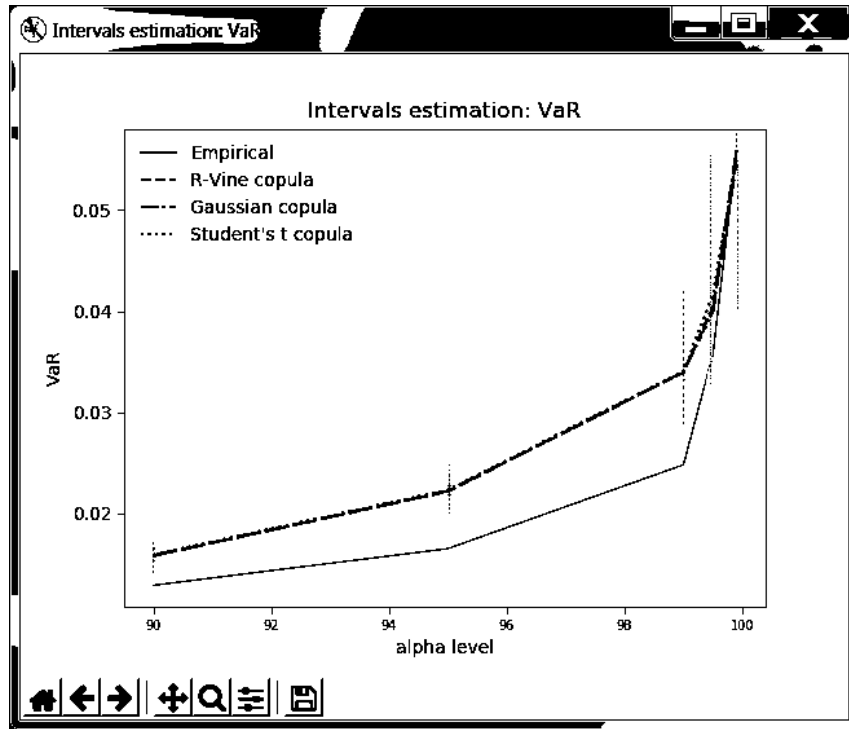


Рис. 4.8. Результати роботи програми: інтервальні оцінки ризик-метрики  $VaR$  в порівнянні з емпіричними даними. Вертикальні лінії – довірчий інтервал від 2.5% до 97.5%-вої квантилі на кожному рівні  $\alpha$ ,  $N = 200$

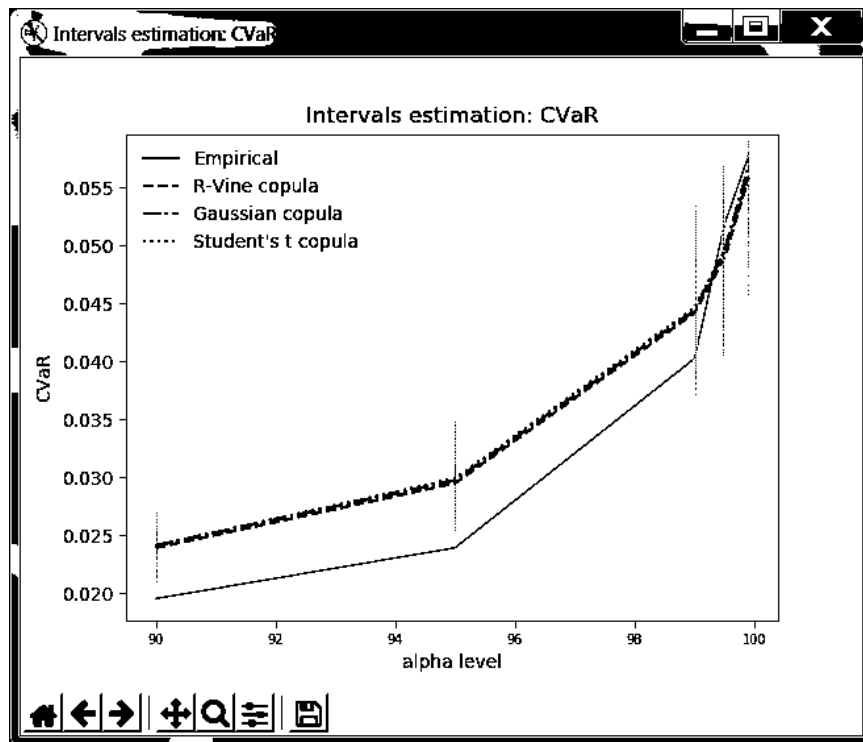


Рис. 4.9. Результати роботи програми: інтервальні оцінки ризик-метрики *CVaR* в порівнянні з емпіричними даними. Вертикальні лінії – довірчий інтервал від 2.5% до 97.5%-вої квантилі на кожному рівні  $\alpha$ ,  $N = 200$

Для розрахунків використано запропонований алгоритм 2. Результати обчислень для  $N = 200$  ітерацій наведені в таблицях «Характеристики для ризик-метрики VaR, отримані з використанням бутстрап-процедури для гаусової (Gauss), Стюдента (St), R-vine копул» та «Характеристики для ризик-метрики CVaR, отримані з використанням бутстрап-процедури для гаусової (Gauss), Стюдента (St), R-vine копул» з Додатку 1 і на рис. 4.8-4.9.

Як видно, середні значення для всіх трьох моделей дуже близькі одне до одного. Вертикальні лінії на рис. 4.8-4.9 показують довірчий інтервал від 2.5% до 97.5%-вої квантилі на кожному рівні, обчислені за правилом (2.24).

Цей інтервал збільшується зі зростанням рівня  $\alpha$  для обох ризик-метрик, а отже, для більш точного обчислення міри ризику на великих значеннях  $\alpha$  необхідно використовувати більшу кількість спостережень. Величина  $\Delta$  показує зміщення середніх значень ризик-метрик від

емпіричних. Можна помітити, що всі три моделі втрачають свою консервативність на рівнях 99.5 і 99.9%. Отже, досліджувана модель працює для рівнів не більше 99%, що для фінансових моделей цілком достатньо.

#### 4.8. Моделювання кривих $VaR$ і $CVaR$ з використанням копул

Вибравши для навчання копулярних моделей перші три місяці, за допомогою застосунку побудовано криві  $VaR$  і  $CVaR$  на рівні 95% і перевірено їх адекватність з використанням тесту Купича. В якості «еталонних» використано криві ризик-метрик, отримані методом історичного моделювання, описаного рівняннями (2.20) і (2.21).

За результатами на рис. 4.10-4.11 видно, що всі три моделі копул є консервативними (всі модельні криві лежать нижче кривої  $P\&L$ ), причому  $R$ -ієрархічна модель оцінює ризик точніше інших.

За результатами тесту Купича для кривих  $VaR$ , що знаходяться у таблиці 9, модель  $t$ -копули є неадекватною і не може бути використана для оцінювання ризику в реальному часі. Дані результати узгоджуються з результатами GoF-тестів з таблиці 5, в яких було отримано крайнє  $p$ -значення для  $t$ -копули.

Таблиця 9

Значення статистики  $LR$  і  $p$ -значення тесту Купича для кривих  $VaR$  на рівні 95%

| Копула         | $LR$ -статистика | $p$ -значення |
|----------------|------------------|---------------|
| Емпіричний     | 0.00             | 0.99          |
| R-vine         | 2.01             | 0.15          |
| Гаусова копула | 3.22             | 0.09          |
| $t$ -копула    | 11.91            | 0.00          |

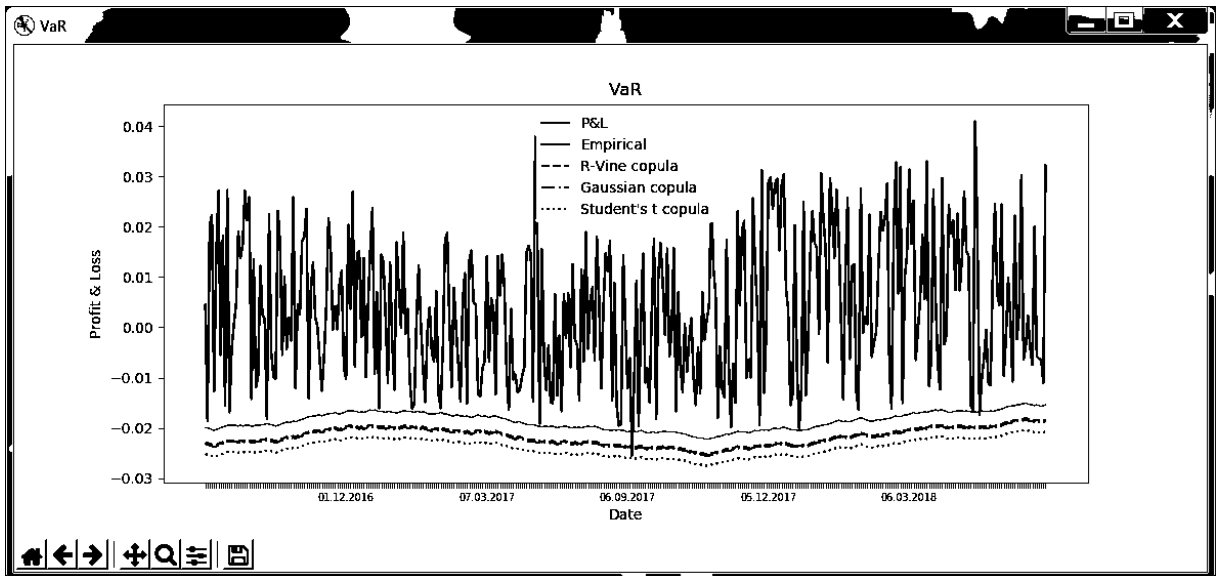


Рис. 4.10. Результати роботи програми: змодельовані ряди мір ризику  $VaR$  для різних копулярних моделей в порівнянні з емпірично спостережуваними значеннями.

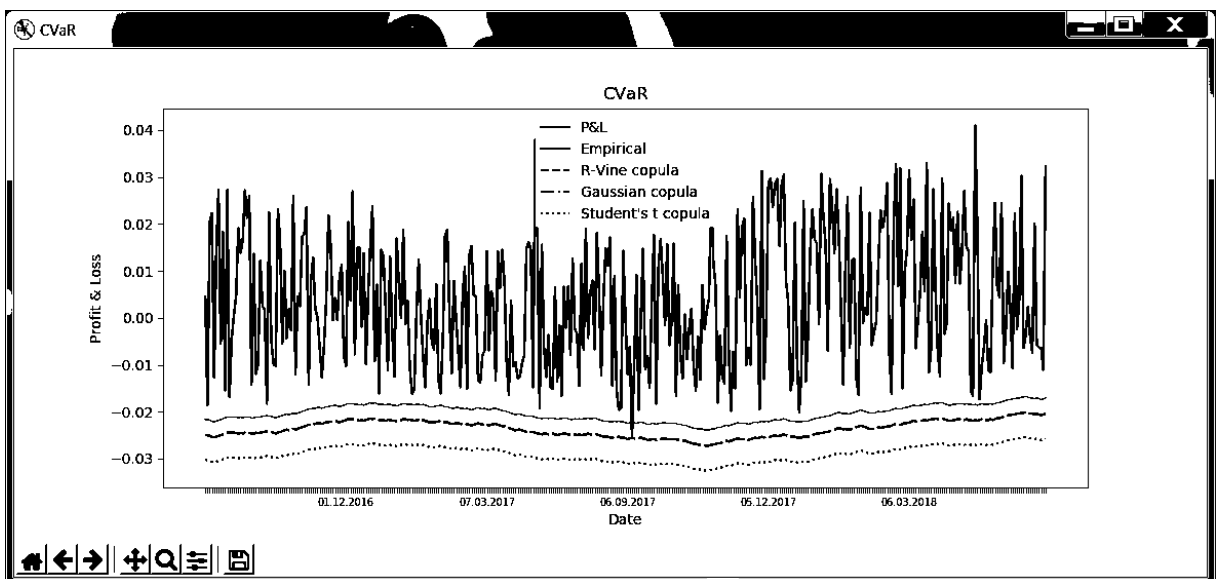


Рис. 4.11. Результати роботи програми: змодельовані ряди мір ризику  $CVaR$  для різних копулярних моделей в порівнянні з емпірично спостережуваними значеннями

#### 4.9. Порівняння з існуючими аналогами. Результати аналізу ефективності

Близько 85% усіх банків за даними McKinsey [58] використовують метод історичного моделювання і тільки 15% користуються методами Монте-Карло для розрахунку ризик-метрики VaR.

Таблиця 10

Результати аналізу ефективності розробленого способу

| Кількість днів | Автоматизоване прогнозування розробленим способом із застосуванням копули <i>R-vine</i> |                  | Автоматизоване прогнозування системою оцінювання ризиків RiskMetrics |                  |
|----------------|---|------------------|--|------------------|
|                | Точність прогнозування  | Час, мілісекунди | Точність прогнозування   | Час, мілісекунди |
| 459            | 0,15  | 890              | 0,15   | 825              |
| 902            | 0,14  | 920              | 0,14   | 865              |
| 1353           | 0,14  | 1050             | 0,13   | 1005             |
| 1796           | 0,13  | 1110             | 0,12   | 1045             |
| 2705           | 0,10  | 1215             | 0,09   | 1140             |
| 4013           | 0,07  | 1260             | 0,06   | 1245             |

Серед програмних аналогів, що розраховують Value-at-Risk та Conditional Value-at-Risk для портфелю можна виділити систему оцінювання ризиків RiskMetrics.

У таблиці 10 наведено результати порівняння розробленого методу з вбудованою функцією для оцінювання ризик-метрик в RiskMetrics. При

навчанні копулярної моделі  $R$ -vine протягом трьох місяців для різної кількості днів моделюються ряди Value-at-Risk. При цьому порівнюються точність прогнозування та час, за який алгоритм будує змодельовані ряди. З таблиці видно, що прогнозування розробленим способом оцінює міри ризику з трохи більшою точністю, але за більший проміжок часу.

#### 4.10. Висновки

Вибрано початкові дані для моделі: ф'ючерси з Української біржі. Котування активів були переведені в логарифмічні прибутковості та з них були отримані гістограми часових рядів.

Оцінено параметри маргінальних розподілів. Оцінена якість отриманих результатів. Спираючись на  $p$ -значення тесту Крамера-фон Мізеса обрано маргінальний розподіл Мейкснера. Побудовано квантиль-квантильні графіки розподілу Мейкснера для кожного деривативу.

Переведено початкові спостереження у псевдоспостереження. Побудовано парні графіки (Pair plot) для спостережень та псевдоспостережень. Побудовано кореляційні матриці для гаусової та Стюдента копул, а також описано параметри для ієрархічної копули через деревовидну структуру. Потім виконано статистичні тести для отриманих моделей: функціонал Крамера-фон Мізеса та статистику Уайта.

Виконано оптимізацію портфелю та порівняно ризик-метрики оптимізованого портфелю зі значеннями для рівноважного портфелю.

Для вектора рівнів ймовірності були обчислені значення  $VaR$  та  $CVaR$  за алгоритмом 1.

Виконано бутстрап-процедуру, використовуючи алгоритм 2.

Було проведено навчання копулярних моделей перші три місяці, побудовано криві  $VaR$  і  $CVaR$  на рівні 95% та перевірена їх адекватність з використанням тесту Купича.

## 5. СТАРТАП СКЛАДОВА ПРОЄКТУ

### 5.1. Описання проблеми

Є три основні способи використання грошей: заробляти, а потім витратити, заробляти і відкладати, заробляти та інвестувати. Вважається, що у процесі фінансового розвитку людина проходить перший, другий, а потім і третій способи. Останній вважається найскладнішим і найкращим. І хоча їм користуються по різним даним лише до п'яти відсотків від усього населення на планеті, ця кількість достатня, аби створити цілі сектори з економіки. І оскільки капіталізм, що наразі є домінуючою економічною системою у світі, має за основну ідею максимізацію прибутку, інвестування завжди буде актуальною діяльністю.

Оцінювання інвестиційних ризиків одна із найголовніших проблем інвестування.

Проблеми-причини:

1. Проблема прийняття правильних політичних рішень.
2. Проблема допускання помилок в корпоративному управлінні.
3. Проблема збоїв та відмов у виробництві продукції і її постачання.
4. Проблема знецінення облігацій на відкритому ринку.
5. Проблема знецінення основного капіталу.

Проблеми-ефекти:

1. Проблема знецінення інвестицій.
2. Проблема втрачання коштів.

Підпроблеми:

1. Проблема пошуку CVaR оптимального портфелю.
2. Проблема розрахунку точкових і інтервальних оцінок VaR і CVaR.
3. Проблема розрахунку VaR і CVaR з використанням копулярних моделей.
4. Проблема вибору правильної копули.

5. Проблема знаходження оцінок невідомих параметрів з найкращими статистичними властивостями.

Дерево проблем представлено на графічному рисунку «Дерево проблем» у Додатку 1.

## 5.2. Зацікавлені сторони

До зацікавлених сторін можна віднести основних користувачів системи: брокерів, інвестиційні фонди та приватних інвесторів.

Таблиця 11

Аналіз зацікавлених сторін

| Зацікавлена сторона проекту | Інтерес зацікавленої сторони в проєкті |         | Оцінка впливу на проєкт | Потенційні стратегії для забезпечення підтримки або скорочення числа перешкод   |
|-----------------------------|--|---------|-------------------------|---|
|                             | Вплив                                  | Інтерес |                         |   |
| Керівник проєкту            | 9                                      | 10      | 90                      | Створення і просування продукту. Виконання головних цілей плану проєкту.  |
| Інвестиційні фонди          | 3                                      | 6       | 18                      | Ефективне вирішення проблеми оцінювання інвестиційного ризику (На великих об'ємах даних і з високою якістю результатів) |
| Брокери                     | 3                                      | 6       | 18                      |   |
| Приватні інвестори          | 3                                      | 6       | 18                      |   |
| Конкуренти                  | 9                                      | 7       | 63                      | Покращення і відносне порівняння показників власних технологій.   |
| Розробники                  | 8                                      | 4       | 32                      | Розроблення програмного забезпечення, освоєння нових технологій   |

У них приблизно однакові стратегії, їх вплив невисокий, а зацікавленість знаходиться на достатньому рівні.

Також це команда проекту: керівник і розробники. Керівник має дуже високий інтерес у проєкті, бо він отримує основні бонуси від його впровадження. Розробники менш зацікавлені, але вони в значній мірі впливають на якість продукту. Аналіз зацікавлених сторін представлено в таблиці 11.

### **5.3. Конкурентні переваги рішення**

Приватні інвестори, банки та банківські організації користуються переважно методом історичного моделювання для оцінювання портфельного ризику. А також вельми поширеним є метод Монте-Карло, який використовується для симуляції поведінки цінних паперів і подальшого розрахунку VaR, CVaR, коефіцієнта Шарпа та інших ризик-метрик. Результати цієї роботи будуть найбільш привабливими переважно для дрібних компаній, приватних інвесторів та акціонерів.

Сильними сторонами проєкту є роздільне дослідження маргіналів і залежності активів, слабка залежність від обсягу портфеля, висока адекватність і консервативність.

Висока якість одержуваних результатів укупі з високим попитом на ризикові моделі стосовно портфелів з великою кількістю активів дозволять швидко зайняти свою нішу на ринку.

Завдяки високому попиту можна спростити алгоритм, використовуючи його окремо для кожного конкретного завдання.

Універсальність моделі і висока якість одержуваних результатів дозволять ефективніше боротися з конкурентами.

Мала поширеність на ринку подібних моделей дозволить ефективніше боротися з конкурентами.

#### **5.4. Клієнти. Сегменти ринку споживання**

Потенційними споживачами результатів даного проєкту можуть бути інвестори, які володіють портфелем, банки, банківські організації, інвестиційні фонди, брокери.

Також даними досліджень можуть скористатися державні установи, інтернет-ресурси та інші організації, пов'язані з фінансовими ризиками.

#### **5.5. Унікальна ціннісна пропозиція**

Ціннісна пропозиція – це пояснення того, як продукт вирішує проблему. Її можна описати формулою:  
Ціннісна пропозиція = Проблема + Рішення / Продукт.

У дереві проблем було виділено низку проблем, а у зацікавлених сторонах – було визначено очікування відповідних сторін від продукту. Інвестиційні фонди, брокери та приватні інвестори хочуть отримати максимально адекватну і справедливую оцінку інвестиційних ризиків. Дійсно, запропоноване рішення, дозволяє частково задовольнити всі з наведених вище вимог зацікавлених сторін та вирішити наведені проблеми.

Отже, основною унікальною ціннісною пропозицією є розроблена модифікація методу Монте-Карло для обчислення точкових та інтервальних оцінок.

#### **5.6. Доходи та витрати**

Для прийняття рішення про інвестиційний проєкт, всі витрати пов'язані з його реалізацією слід розділити на виробничі та інвестиційні.

Загальна вартість проєкту включає:

1. Витрати на створення оборотних коштів.
2. Виробничі витрати.
3. Витрати на створення основних фондів (включають первісні та поточні інвестиції).

Усі інвестиційні потреби підприємства можна розділити на три групи:

1. Інвестування в дослідження.
2. Прямі інвестиції – інвестиції, необхідні для реалізації інвестиційного проєкту.
3. Супутні інвестиції – інвестиції в об'єкти, функціонально та територіально пов'язані з цільовим об'єктом.

Початкові інвестиції складаються з:

1. Витрати на передінвестиційні дослідження, науково-дослідні та дослідно-конструкторські роботи, підготовку дизайнерських матеріалів, робочу підготовку та проєктування.
2. Витрати на купівлю та оренду потужностей, включаючи витрати на підготовку до розширення.
3. Вартість придбання та доставки машин, приладів, інструментів та витратних матеріалів, у тому числі імпортних.
4. Витрати на приймально-здавальні випробування.
5. Стартові витрати, всебічний розвиток проєктних можливостей та досягнення проєктних техніко-економічних показників.
6. Вартість придбання патентів, ліцензій, ноу-хау, технологій та інших нематеріальних активів.
7. Витрати на навчання кадрів для введених в експлуатацію об'єктів.
8. Одноразові платежі, зокрема гарантії страховим компаніям.
9. Витрати, пов'язані із створенням та реєстрацією компанії (плата за юридичні послуги з підготовки установчих документів, вартість реєстрації компанії та реєстрації майнових прав).
10. Вартість підготовчих досліджень, не включаються до кошторисної вартості об'єкта.
11. Витрати, пов'язані з діяльністю персоналу під час підготовки виробництва (обслуговування приміщень, автомобілів, комп'ютерів та іншого обладнання, зарплата), не включаються до кошторисної вартості об'єкта.

Висновки щодо вартості:

Вартість проєкту = ціна проєкту + ціна реалізації + технічне обслуговування та вдосконалення після впровадження + плата за компоненти і послуги + реклама та просування.

Економічні розрахунки діяльності на один рік представлено у таблиці «Економічні розрахунки діяльності» в Додатку 1.

## **5.7. Бізнес-модель**

*Сегмент користувачів:*

Для кого? – Акціонери, банки, інвестори, банківські організації, інвестиційні фонди, брокери.

Найважливіші клієнти? – Переважно дрібні компанії, інвестори та акціонери.

*Пропозиція:*

Яку цінність від методу отримують клієнти? – Розрахунок VaR і CVaR метрик інвестиційних ризиків.

Яку проблему користувачів ми вирішуємо? – Ми вирішуємо проблему оцінювання інвестиційних ризиків.

Яку необхідність користувачів ми задовольняємо? – Ми задовольняємо необхідність збереження коштів користувачів.

Які набори продуктів ми пропонуємо? – Метод копула-функцій для розрахунку VaR і CVaR, реалізований у вигляді програмного забезпечення з підтримкою користувачів.

*Канали розповсюдження:*

Через які канали ми хочемо досягти кожен сегмент наших споживачів? – рекламування та створення бібліотеки, розповсюдження її у пакетах для різних мов програмування.

Який з каналів розповсюдження є найпривабливішим? – розповсюдження коду через вільні бібліотеки чи пропрієтарне програмне забезпечення.

*Потоки доходу:*

За що готові платити користувачі? – за виконання методу, його підтримки і технічне обслуговування.

Яким чином вони можуть платити? – вони будуть платити, укладаючи контракт, що гарантуватиме їм підтримку і технічне обслуговування в разі потреби.

Альтернативні шляхи? – ми можемо перепродати ліцензію на даний метод монополісту в цій галузі.

*Основні ресурси:*

Необхідні ресурси? – в числі необхідних ресурсів платформи для тестування. Наукові досягнення і патенти у цій сфері.

Шляхи знаходження необхідних ресурсів? – безкоштовні тестові пакети і література.

Відносини з клієнтами? – замовник підписує наданий контракт і отримує пакети необхідних йому інструментів.

Потоки доходів? – як вже було сказано основні потоки доходів йдуть від приватних інвесторів, інвестиційних фондів і брокерів.

Канва бізнес-моделі, де представлено Проблема, Рішення, Унікальну цінність пропозиції, Приховану перевагу, Споживачів, Канали, Ключові метрики, Потоки доходів та Структуру витрат зображена у таблиці «Канва бізнес-моделі» в Додатку 1.

## **5.8. Висновок**

Для розробленого програмного забезпечення описано проблему користувачів, складено дерево проблем і визначено зацікавлені сторони проєкту. Проаналізовано конкурентні переваги рішення, досліджено клієнтів та сегменти ринку споживання, сформульована унікальна ціннісна пропозиція. Досліджено доходи та витрати, складено економічні розрахунки діяльності, створено канву бізнес-моделі.

## ВИСНОВКИ

У даній роботі я використовував математичний апарат копула-функцій для дослідження багатовимірної залежності між фінансовими часовими рядами та порівняння ризик-метрик  $VaR$  і  $CVaR$  для керування портфелем.

В якості початкових даних я використовував чотири часові ряди з денних цін закриття ф'ючерсів:

1. Ф'ючерс на курс євро – долар США (Тикер: DE).
2. Ф'ючерс на ціну однієї тройської унції афінованого золота (Тикер: GOLDU).
3. Ф'ючерс на курс долар США – українська гривня (Тикер: DX).
4. Ф'ючерс на індекс українських акцій (Тикер: UX).

В роботі використовувалися спостереження за два роки: з 14 червня 2016 до 14 червня 2018 (512 спостережень).

Для оцінювання параметрів копулярних моделей застосований двоетапний повний параметричний метод. Для кожного часового ряду було виконано оцінювання параметрів наступних чотирьохпараметричних розподілів-кандидатів: гіперболічного, стійкого і Мейкснера. Статистичне тестування оцінок розподілів показало задовільні результати якості отриманих значень параметрів для всіх розподілів. Розподіл Мейкснера вибрано в якості маргінального для всіх активів на основі результатів статистичного критерію Крамера-фон Мізеса.

Далі в роботі було здійснено оцінювання параметрів для трьох копулярних моделей: гаусової,  $t$ -Стюдента і  $R$ -ієрархічної. Оцінювання параметрів для трьох обраних копула-моделей було проведено методом «інверсії  $\tau$  Кендалла». Вибір сімейств для ієрархічної копули виконувався на основі тестів Вуонга і Кларка.

Для вибраних активів UX, DX, GOLDU, DE був знайдений оптимальний портфель із мінімальним  $CVaR$  із долями  $\mathbf{w} = \{0,062; 0,109; 0,366; 0,463\}$ .

Запропоновано алгоритм для розрахунку точкових та інтервальних оцінок ризик-метрик  $VaR$  і  $CVaR$  з використанням копулярних моделей, заснований на моделюванні Монте-Карло. Даний алгоритм був також вдосконалений за рахунок проведення бутстрап-процедури, завдяки якій були отримані незміщені оцінки ризик-метрик, а також довірчий інтервал для них. В результаті було встановлено, що досліджувані копула-моделі для обраних часових рядів перестають бути консервативними на рівні вище 99.0%.

Як показали результати моделювання для кривих  $VaR$  і  $CVaR$  на рівні 95%, всі використані копула-моделі є консервативними, причому більш точно оцінює ризик ієрархічна копула, в той час як  $t$ -Стюдента копула його переоцінює. Така поведінка двопараметричної  $t$ -Стюдента копули було очікуваною, так як вона більш чутлива до об'єму вибірки, ніж інші розглянуті копули.

Дана робота містить два нововведення. По-перше, показано, що гаусові, Стюдента та ієрархічні копули можуть бути використані для представлення багатовимірної залежності в коротких часових рядах (тільки 512 спостережень), в той час як застосування копул вивчалось тільки для тривалих спостережень [19, 21, 8]. По-друге, використано маргінальні розподіли, відмінні від нормального: гіперболічний [40], стійкий [3] та Мейкснера [42]. Стоянов та інші [35] розглядають подібну задачу, використовуючи тільки симетричні варіанти розподілів Стюдента та стійкого, а також узагальнений нормальний розподіл.

Наразі програмний застосунок запускається з консолі і вимагає спеціальних навичок, аби ним користуватися. Можна виділити наступні можливі покращення програмного забезпечення:

1. Створення інтерфейсу для роботи з конкретними інвестиційними платформами.
2. Забезпечення експорту даних у різних формах (наприклад, у вигляді таблиць Excel).

3. Створення Android/iOS версії додатку для зручного користування з мобільних пристроїв.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Крицький О. Визначення багатовимірного фінансового ризику портфелю акцій / О. Крицький, М. Ульянова.
2. Limpert E. Проблеми з використанням нормального розподілу та шляхи підвищення якості та ефективності аналізу даних / E. Limpert, W. Stahel.
3. Rachev S. Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing розподілу та шляхи підвищення якості та ефективності аналізу даних / S. Rachev, F. Fabozzi. – New Jersey.
4. Wilmott P. Поширені запитання з кількісних фінансів / P. Wilmott.
5. European Banking Authority. Final Draft RTS on AMA Assessment for Operational Risk / European Banking Authority.
6. Patton A. Моделювання асиметричної валютної залежності / A. Patton.
7. Chen X. Оцінка напівпараметричних моделей часових рядів на основі копул / X. Chen, Y. Fan.
8. Lourtme A. Тестування копул Гауса та Стюдента в рамках управління ризиками / A. Lourtme, F. Maurer.
9. Fermanian J. Непараметричне оцінювання копул для часових рядів / J. Fermanian, O. Scaillet.
10. Silvarulle P. Порівняння напівпараметричних та параметричних методів оцінювання копул / P. Silvarulle, G. Kim.
11. Joe H. Багатовимірні моделі та концепції залежності / H. Joe.
12. Joe H. Моделювання залежності з копулами / H. Joe.
13. Xu Q. Оцінювання моделей, заснованих на архімедовій копулі, в управлінні фінансовими ризиками / Q. Xu.
14. Hansen P. Тест на кращі прогнозні здібності / P. Hansen.
15. Brechmann E. Modeling Dependence with C- and D-Vine Copulas: The R Package CDVine / E. Brechmann.

16. Joe H. Сім'ї  $m$ -варіативних розподілів із заданими полями та  $m(m-1)/2$  двовимірних параметрів залежності, розподіли з фіксованими маргіналами та пов'язані теми / Н. Джо.
17. Wilson K. Відбір проб, кондиціонування, підрахунок, злиття, пошук R-vine / К. Вілсон, Р. Куок.
18. Szado C. Парно-копульні конструкції багатовимірних копул / С. Цзато.
19. Dißmann J. Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns / J. Dißmann.
20. Huynh, V. Моделювання залежності в економетрії: Вибрані матеріали сьомої міжнародної конференції Таїландського економетричного товариства, економічний факультет, Університет Чіангмая, Таїланд, 8-10 січня 2014 р. / V. Huynh., S. Sriboonchitta.
21. Verbeek M. Вибір копул для управління ризиками / М. Вербек, Е. Коле.
22. Sklar A. Fonctions de Repartion A N Dimension Et Leurs Marges / А. Склар.
23. Фантащині Д. Моделювання багатовимірних розподілів з використанням копула-функцій / Д. Фантащині.
24. Антонов І. Прогнозування курсів валют на основі копулярних моделей / І. Антонов.
25. Ацканов І. Використання GAS-копул для оптимізації інвестиційного портфелю акцій російських компаній / І. Ацканов.
26. Князев А. Спільний розподіл біржових індексів: методологічні аспекти побудови та вибору копулярних моделей / А. Князев, А. Шемякін.
27. Пенікас Г. Ієрархічні копули при моделюванні ризиків інвестиційного портфелю / Г. Пенікас.
28. Травкін А. Конструкції з парних копул при формуванні портфелю акцій / А. Травкін.

29. Пенікас Г. Фінансове застосування копула моделей / Г. Пенікас.
30. Shemyakin A. Вступ до оцінки Байєса та моделей залежності копул. Структури статистичної залежності / А. Shemyakin, А. Kniazev.
31. Sundaresan A. Злиття корельованих рішень на основі копул / А. Sundaresan, S. Nageswara.
32. Nelsen R. An Introduction to Copulas. Lecture Notes in Statistics / R. Nelsen.
33. Cherubini U. Копула-функції у фінансах / U. Cherubini, W. Vecchiato, E. Luciano.
34. Ané T. Структура залежності та міра ризику / Т. Ané, С. Kharoubi.
35. Stoyanov S. CVaR sensitivity with respect to tail thickness / S. Stoyanov, S. Rachev, F. Fabozzi.
36. Klüppelberg C. Vine Copula Models / C. Klüppelberg, C. Czado.
37. Kendall M. Rank Correlation Methods / M. Kendall.
38. Myers J. Research Design and Statistical Analysis (2nd ed.) / J. Myers, A. Well.
39. Johnson N. Системи частотних кривих, що генеруються методами переміщення / N. Johnson.
40. Barndorff-Nielsen O. Hyperbolic distributions / O. Barndorff-Nielsen, P. Blæsild.
41. Nolan J. Stable Distributions – Models for Heavy Tailed Data / J. Nolan.
42. Schoutens W. Meixner Processes: Theory and Applications in Finance / W. Schoutens.
43. Bessel F. Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen / F. Bessel.
44. Embrechts P. Моделювання залежності з копулами та додатки до управління ризиками / P. Embrechts, F. Lindskog, A. McNeil.
45. Bedford T. Vines – нова графічна модель для залежних випадкових величин / Т. Bedford, R. Cooke.
46. Diestel R. Теорія графів (Тексти випускників з математики) / R. Diestel.

47. Belgorodski N. Selecting pair-copula families for regular vines with application to the multivariate analysis of European stock market indices / N. Belgorodski.
48. Vuong Q. Ratio tests for model selection and non-nested hypotheses / Q. Vuong.
49. Clarke K. A Simple Distribution-Free Test for Nonnested Model Selection / K. Clarke.
50. Hofert M. Copula: Multivariate Dependence with Copulas / M. Hofert.
51. Kojadinovic I. Comparison of three semiparametric methods for estimating dependence parameters in copula models / I. Kojadinovic, J. Yan.
52. Genest C. GoF тести на копул: огляд та дослідження потужності / C. Genest, D. Beaudoin.
53. White H. MLE неправильно визначених моделей / H. White.
54. Rockafellar R. Оптимізація CVaR / R. Rockafellar, S. Uryasev.
55. Лобанов А. Енциклопедія фінансового ризик менеджменту / А. Лобанов, А. Чугунов.
56. Курієс Р. Методи перевірки точності моделей вимірювання ризику / Р. Курієс.
57. Українська біржа – Архів підсумків торгів на строковому ринку [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <ftp://ftp.ux.ua/pub/info/statforts/>
58. McKinsey. Working Papers on Risk / McKinsey.

## **ДОДАТКИ**

**Додаток 1**  
**Копії графічних матеріалів**

Описові характеристики логарифмічних прибутковостей

| Деривативи | Моменти  |         | $\tau$ Кендалла |       |       |       | $\rho$ Спірмена |       |       |       |
|------------|----------|---------|-----------------|-------|-------|-------|-----------------|-------|-------|-------|
|            | $\sigma$ | $\mu$   | UX              | DX    | GOLDU | DE    | UX              | DX    | GOLDU | DE    |
| UX         | 0.017    | 0.00069 | 1               | 0.623 | 0.503 | 0.198 | 1               | 0.731 | 0.585 | 0.292 |
| DX         | 0.017    | 0.00148 | 0.623           | 1     | 0.417 | 0.208 | 0.731           | 1     | 0.519 | 0.344 |
| GOLDU      | 0.012    | 0.00001 | 0.503           | 0.417 | 1     | 0.281 | 0.585           | 0.519 | 1     | 0.406 |
| DE         | 0.016    | 0.00041 | 0.198           | 0.208 | 0.281 | 1     | 0.292           | 0.344 | 0.406 | 1     |

Бабенко В.П., група КП-91мп

Характеристики для ризик-метрики  $VaR$ , отримані з використанням бутстрап-процедури для гаусової (Gauss), Стьюдента (St),  $R$ -vine копул

| Рівень,<br>% | $\overline{VaR}_\alpha, \times 10^{-2}$ |       |       | $VaR^{emp}, \times 10^{-2}$ | $\Delta, \times 10^{-2}$ |       |        | $SD, \times 10^{-2}$ |       |       | $RMSE, \times 10^{-2}$ |       |       |
|--------------|---|-------|-------|-----------------------------|--------------------------|-------|--------|----------------------|-------|-------|------------------------|-------|-------|
|              | $R$ -vine                               | Gauss | St    |                             | $R$ -vine                | Gauss | St     | $R$ -vine            | Gauss | St    | $R$ -vine              | Gauss | St    |
| 90.0         | 1.582                                   | 1.584 | 1.593 | 1.291                       | 0.291                    | 0.293 | 0.302  | 0.861                | 0.797 | 0.801 | 0.312                  | 0.309 | 0.316 |
| 95.0         | 2.218                                   | 2.223 | 2.234 | 1.653                       | 0.565                    | 0.570 | 0.581  | 1.491                | 1.204 | 1.382 | 0.521                  | 0.521 | 0.528 |
| 99.0         | 3.395                                   | 3.399 | 3.406 | 2.482                       | 0.913                    | 0.917 | 0.924  | 2.463                | 1.789 | 2.316 | 0.908                  | 0.893 | 0.937 |
| 99.5         | 4.045                                   | 3.993 | 4.161 | 3.570                       | 0.475                    | 0.423 | 0.591  | 5.704                | 4.215 | 6.093 | 0.728                  | 0.595 | 0.838 |
| 99.9         | 5.463                                   | 5.588 | 5.491 | 5.582                       | -0.119                   | 0.006 | -0.091 | 5.159                | 3.822 | 5.184 | 0.531                  | 0.377 | 0.528 |

Бабенко В.П., група КП-91мп

Характеристики для ризик-метрики  $CVaR$ , отримані з використанням бутстрап-процедури для гаусової (Gauss), Стьюдента (St),  $R$ -vine копул

| Рівень,<br>% | $\overline{CVaR}_\alpha, \times 10^{-2}$ |       |       | $CVaR^{emp}, \times 10^{-2}$ | $\Delta, \times 10^{-2}$ |        |        | $SD, \times 10^{-2}$ |       |       | $RMSE, \times 10^{-2}$ |       |       |
|--------------|--|-------|-------|------------------------------|--------------------------|--------|--------|----------------------|-------|-------|------------------------|-------|-------|
|              | $R$ -vine                                | Gauss | St    |                              | $R$ -vine                | Gauss  | St     | $R$ -vine            | Gauss | St    | $R$ -vine              | Gauss | St    |
| 90.0         | 2.391                                    | 2.410 | 2.411 | 1.953                        | 0.438                    | 0.457  | 0.458  | 1.349                | 1.074 | 1.331 | 0.459                  | 0.470 | 0.479 |
| 95.0         | 2.949                                    | 2.974 | 2.991 | 2.392                        | 0.557                    | 0.582  | 0.599  | 1.908                | 1.505 | 1.898 | 0.603                  | 0.604 | 0.619 |
| 99.0         | 4.417                                    | 4.440 | 4.462 | 4.025                        | 0.392                    | 0.415  | 0.437  | 4.223                | 3.048 | 4.309 | 0.569                  | 0.513 | 0.622 |
| 99.5         | 4.888                                    | 4.952 | 4.953 | 5.182                        | -0.294                   | -0.230 | -0.229 | 5.362                | 4.063 | 5.413 | 0.593                  | 0.458 | 0.595 |
| 99.9         | 5.582                                    | 5.674 | 5.590 | 5.772                        | -0.190                   | -0.098 | -0.182 | 3.517                | 2.447 | 3.876 | 0.405                  | 0.258 | 0.430 |

Бабенко В.П., група КП-91мп

Економічні розрахунки діяльності

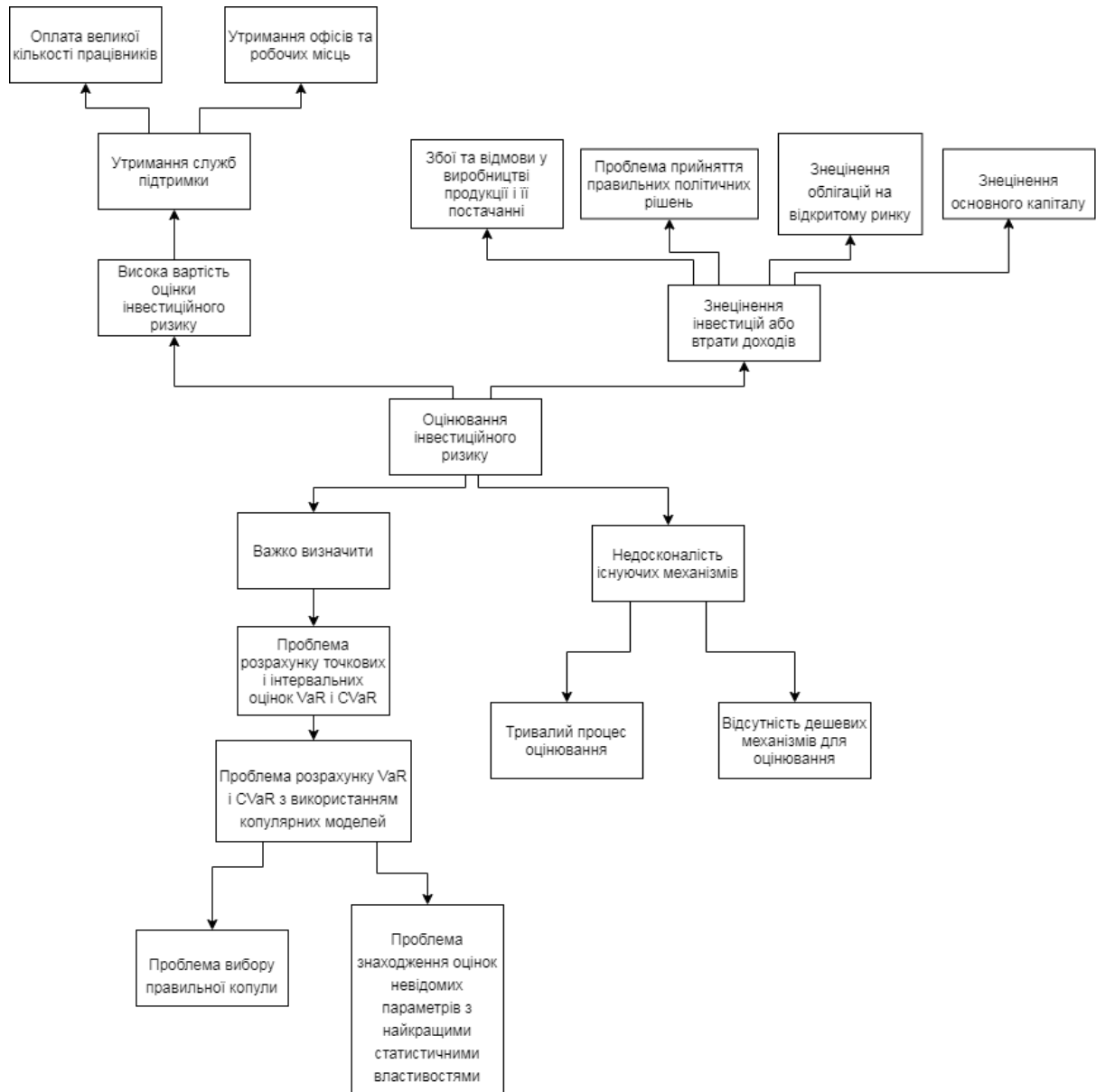
| Місяць   | 1  | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | Загалом |
|--|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|---------|
| Зарплата, тисяч \$                                 | 2  | 18  | 18  | 18  | 18  | 18  | 22 | 22 | 22 | 22 | 22 | 22 | 224     |
| Інші витрати, тисяч \$                             | 2  | 5   | 5   | 5   | 5   | 5   | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 57      |
| Сума витрат, тисяч \$                              | 4  | 23  | 23  | 23  | 23  | 23  | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 281     |
| Заплановані прибутки, тисяч \$                     |    |     |     |     |     |     | 35 | 45 | 75 | 75 | 75 | 75 | 380     |
| Результат (без урахування оподаткування), тисяч \$ | -4 | -23 | -23 | -23 | -23 | -23 | 8  | 18 | 48 | 48 | 48 | 48 | 99      |

Бабенко В.П., група КП-91мп

### Канва бізнес-моделі

|   |  |  |  |   |
|---|--|--|--|---|
| <p><i>Проблема.</i> Складність пошуку оптимального портфелю. Велика втрата ресурсів для розрахунку точкових і інтервальних оцінок VaR і CVaR. Складність розрахунку VaR і CVaR з використанням копулярних моделей. Складність вибору правильної копули. Проблема знаходження оцінок невідомих параметрів з найкращими статистичними властивостями</p> | <p><i>Рішення.</i> ПЗ розраховує інтегральні і точкові оцінки VaR і CVaR для оцінювання ризику</p> | <p><i>Унікальна ціннісна пропозиція.</i> Висока якість одержуваних результатів укупі з високим попитом на ризикові моделі стосовно портфелів з великою кількістю активів, універсальність моделі і висока якість одержуваних результатів, мала поширеність на ринку подібних моделей дозволить ефективніше боротися з конкурентами</p> | <p><i>Прихована перевага.</i> Врахування специфіки оцінювання ризику</p> | <p><i>Споживачі.</i> Банківські організації, брокери, приватні інвестори, державні компанії</p> |
| <p><i>Структура витрат.</i> Утримання робочих місць для персоналу (оплата за оренду офісу та комунальні послуги); утримання персоналу для надання технічної підтримки (виплати заробітних плат, соціальних виплат); податкові витрати; оплата послуг юриста, бухгалтера, прибиральниці</p>  |  | <p><i>Потоки доходів.</i> Доходи від продажу ліцензій; доходи від підтримки програмного забезпечення</p>   |  |   |

# Дерево проблем



Бабенко В.П., група КП-91мп

**Додаток 2**  
**Лістинг програми**

```

def get_pow_ten_minus_two(cli_list):
    for i in range(0, len(cli_list)):
        cli_list[i] /= 100

def point_inverval_var_cvar_plot(title, estimation_type, a, empirical,
r_copula, g_copula, t_copula):
    plt.figure(num=estimation_type+": "+title)
    line_emp, = plt.plot(a, empirical, color='y')
    line_r, = plt.plot(a, r_copula, color='m', linestyle='--')
    line_g, = plt.plot(a, g_copula, color='b', linestyle='-.')
    line_t, = plt.plot(a, t_copula, color='r', linestyle=':')
    line_emp.set_label('Empirical')
    line_r.set_label('R-Vine copula')
    line_g.set_label('Gaussian copula')
    line_t.set_label("Student's t copula")
    plt.legend()
    plt.xlabel('alpha level')
    plt.ylabel(title)
    plt.xticks(rotation='horizontal', fontsize=7)
    plt.title(estimation_type+": "+title)
    plt.show()

def create_xml_var_cvar_plot(plot_name, time_line, empirical, r_copula,
g_copula, t_copula, profit_n_loss):
    doc = minidom.Document()
    root = doc.createElement(plot_name)
    doc.appendChild(root)

    empirical_child = doc.createElement('empirical')
    create_xml_array(doc, empirical_child, time_line, empirical)
    root.appendChild(empirical_child)

    r_copula_child = doc.createElement('r_copula')
    create_xml_array(doc, r_copula_child, time_line, r_copula)
    root.appendChild(r_copula_child)

    g_copula_child = doc.createElement('g_copula')
    create_xml_array(doc, g_copula_child, time_line, g_copula)
    root.appendChild(g_copula_child)

    t_copula_child = doc.createElement('t_copula')
    create_xml_array(doc, t_copula_child, time_line, t_copula)
    root.appendChild(t_copula_child)

    profit_n_loss_child = doc.createElement('profit_n_loss')
    create_xml_array(doc, profit_n_loss_child, time_line, profit_n_loss)
    root.appendChild(profit_n_loss_child)

    xml_str = doc.toprettyxml(indent="\t")
    save_path_file = plot_name + ".xml"
    with open(save_path_file, "w") as f:
        f.write(xml_str)

def create_xml_array(doc, array_child, time_line, copula):
    for i in range(0, len(time_line)):
        node = doc.createElement("node")
        value_text = doc.createTextNode(str(copula[i]))
        date_text = doc.createTextNode(str(time_line[i]))

```

```

        value = doc.createElement("value")
        date = doc.createElement("date")
        value.appendChild(value_text)
        date.appendChild(date_text)
        node.appendChild(value)
        node.appendChild(date)
        array_child.appendChild(node)

def display_var_or_cvar_plot(plot_name):
    time_line, empirical, r_copula, g_copula, t_copula, profit_n_loss =
    parse_xml_var_cvar_plot(plot_name)
    create_final_plot(plot_name, time_line, empirical, r_copula, g_copula,
    t_copula, profit_n_loss)

def parse_xml_var_cvar_plot(plot_name):
    dom = minidom.parse(plot_name + ".xml")
    dom.normalize()
    plot_name_node = dom.getElementsByTagName(plot_name)[0]

    time_line = []
    empirical = []
    r_copula = []
    g_copula = []
    t_copula = []
    profit_n_loss = []

    empirical_node = plot_name_node.getElementsByTagName("empirical")[0]
    r_copula_node = plot_name_node.getElementsByTagName("r_copula")[0]
    g_copula_node = plot_name_node.getElementsByTagName("g_copula")[0]
    t_copula_node = plot_name_node.getElementsByTagName("t_copula")[0]
    profit_n_loss_node = plot_name_node.getElementsByTagName("profit_n_loss")[0]

    parse_xml_array(empirical_node, empirical)
    parse_xml_array(r_copula_node, r_copula)
    parse_xml_array(g_copula_node, g_copula)
    parse_xml_array(t_copula_node, t_copula)
    parse_xml_array(profit_n_loss_node, profit_n_loss)
    parse_xml_dates(empirical_node, time_line)
    return time_line, empirical, r_copula, g_copula, t_copula, profit_n_loss

def parse_xml_array(copula_node, copula_list):
    for i in range(0, len(copula_node.getElementsByTagName("node"))):
        node = copula_node.getElementsByTagName("node")[i]
        value = node.getElementsByTagName("value")[0]
        #print(value.childNodes[0].nodeValue + ", i=" + str(i))
        copula_list.append(float(value.childNodes[0].nodeValue))

def parse_xml_dates(copula_node, time_line_list):
    for i in range(0, len(copula_node.getElementsByTagName("node"))):
        node = copula_node.getElementsByTagName("node")[i]
        date = node.getElementsByTagName("date")[0]
        time_line_list.append(date.childNodes[0].nodeValue)

def create_final_plot(title, time_line, empirical, r_copula, g_copula,
t_copula, profit_n_loss):
    plt.figure(num=title)

```

```

line_pnl, = plt.plot(time_line, profit_n_loss, color='b')
line_emp, = plt.plot(time_line, empirical, color='y')
line_r, = plt.plot(time_line, r_copula, color='r', linestyle='--')
line_g, = plt.plot(time_line, g_copula, color='g', linestyle='-.')
line_t, = plt.plot(time_line, t_copula, color='m', linestyle=':')
line_pnl.set_label('P&L')
line_emp.set_label('Empirical')
line_r.set_label('R-Vine copula')
line_g.set_label('Gaussian copula')
line_t.set_label("Student's t copula")
plt.legend()
plt.xlabel('Date')
plt.ylabel('Profit & Loss')
plt.xticks(rotation='horizontal', fontsize=7)
plt.title(title)
time_line_ticks = []
counter = 0
for i in time_line:
    if counter == 64:
        counter = 0
        time_line_ticks.append(i)
    else:
        time_line_ticks.append(None)
        counter += 1
#print(len(time_line_ticks))
frame1 = plt.gca()
frame1.axes.xaxis.set_ticklabels(time_line_ticks)
plt.show()

```

```

def create_histogram(title, array, bins_array):
    plt.figure(num=title + ' histogram')
    # n, bins, patches = plt.hist(x=d, bins=bins_array, color='#0504aa',
alpha=0.7, rwidth=0.85, weights=ux)
    plt.hist(bins_array[:-1], bins_array, weights=array, color="gray")
    plt.grid(axis='y', alpha=0.60)
    plt.xlabel('Logarithmic returns')
    plt.ylabel('Density')
    plt.title(title)

    j = 0
    for obj in array:
        plt.text(x=bins_array[j], y=obj + 0.1, s=obj, size=6)
        j += 1
    plt.show()

```

**Додаток 3**  
**Копія презентації**

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ  
СІКОРСЬКОГО”



ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ

# АЛГОРИТМІЧНО-ПРОГРАМНИЙ МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙНОГО РИЗИКУ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ КОПУЛЯРНИХ МОДЕЛЕЙ

Виконав: Бабенко Валерій Павлович

Науковий керівник: ст. викл. каф. ПЗКС, к.ф.-м.н. Гречко А.В.

Київ – 2020



# АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ

Майже кожному відомі проблеми досягнення фінансової свободи, забезпечення безбідної старості, створення індивідуальних накопичень та вкладень в майбутнє своїх дітей. Для цього в сучасних реаліях необхідно багато коштів. Одним із способів збагачення є портфельне інвестування.

Оцінювання інвестиційного ризику портфелю – це основа управління портфелем цінних паперів.

# ОБ'ЄКТ ТА ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ



Предмет дослідження: популярні методи



Об'єкт дослідження: процес оцінювання  
ризиків інвестицій

# ОКРЕМІ ЗАВДАННЯ ТА МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Дослідження підходів оцінювання параметрів копулярних моделей.
2. Побудова системи оцінювання ризику інвестицій з використанням копулярних моделей.
3. Розроблення програмного забезпечення для реалізації створеного методу оцінки ризиків інвестицій.

**Мета дослідження:** вдосконалити процес оцінювання ризику інвестиційного портфелю з використанням копулярних моделей для збільшення прибутків інвесторів.





# НАУКОВА НОВИЗНА

При розв'язанні даної задачі доцільно використовувати маргінальні розподіли: гіперболічний, стійкий і Мейкснера (на відміну від нормального).

Гаусові, t-Стюдента та ієрархічні копули (R-vine) можуть бути використані для подання багатовимірної залежності в коротких часових рядах.

# АНАЛОГИ

Зазвичай торговельні платформи розраховують стандартне відхилення. Наприклад, NetTradeX, MetaTrader 4.

85% великих банків розраховують VaR та CVaR шляхом історичної симуляції, а інші 15% – методами Монте-Карло.



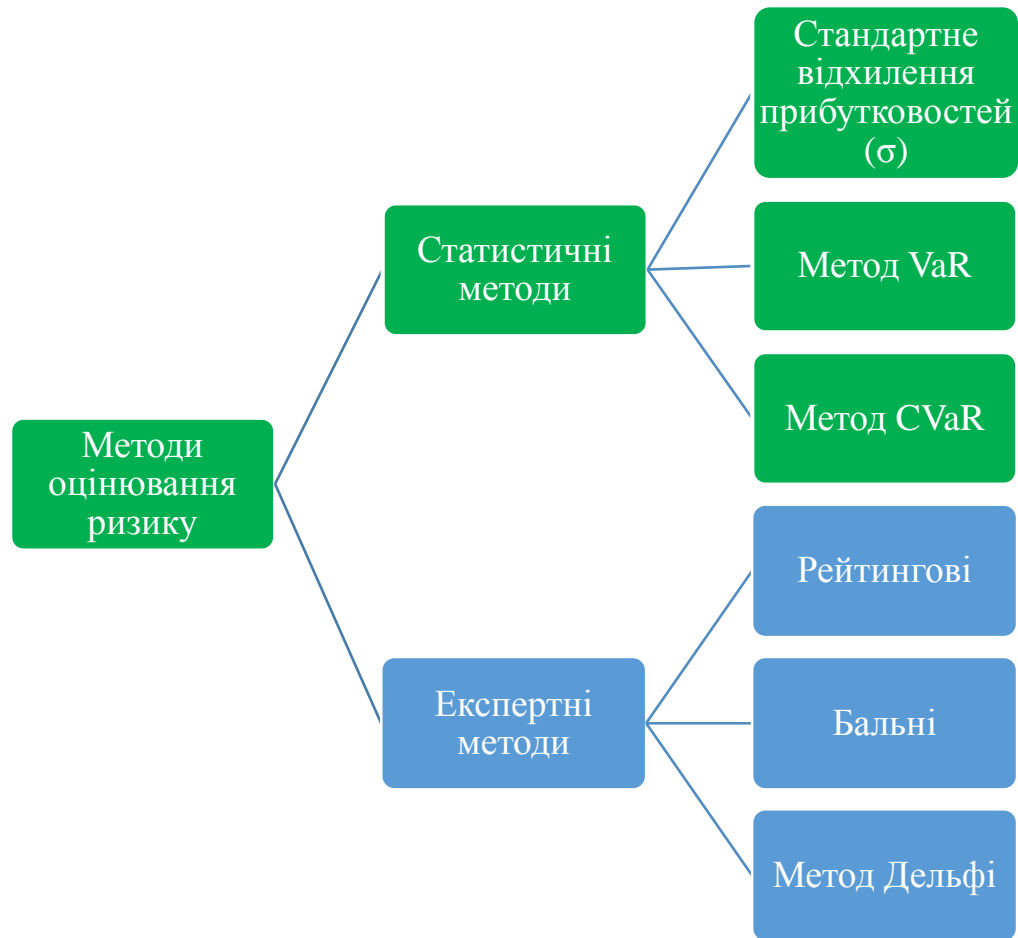
MetaTrader 4

NetTradeX  
Trading analytical platforms

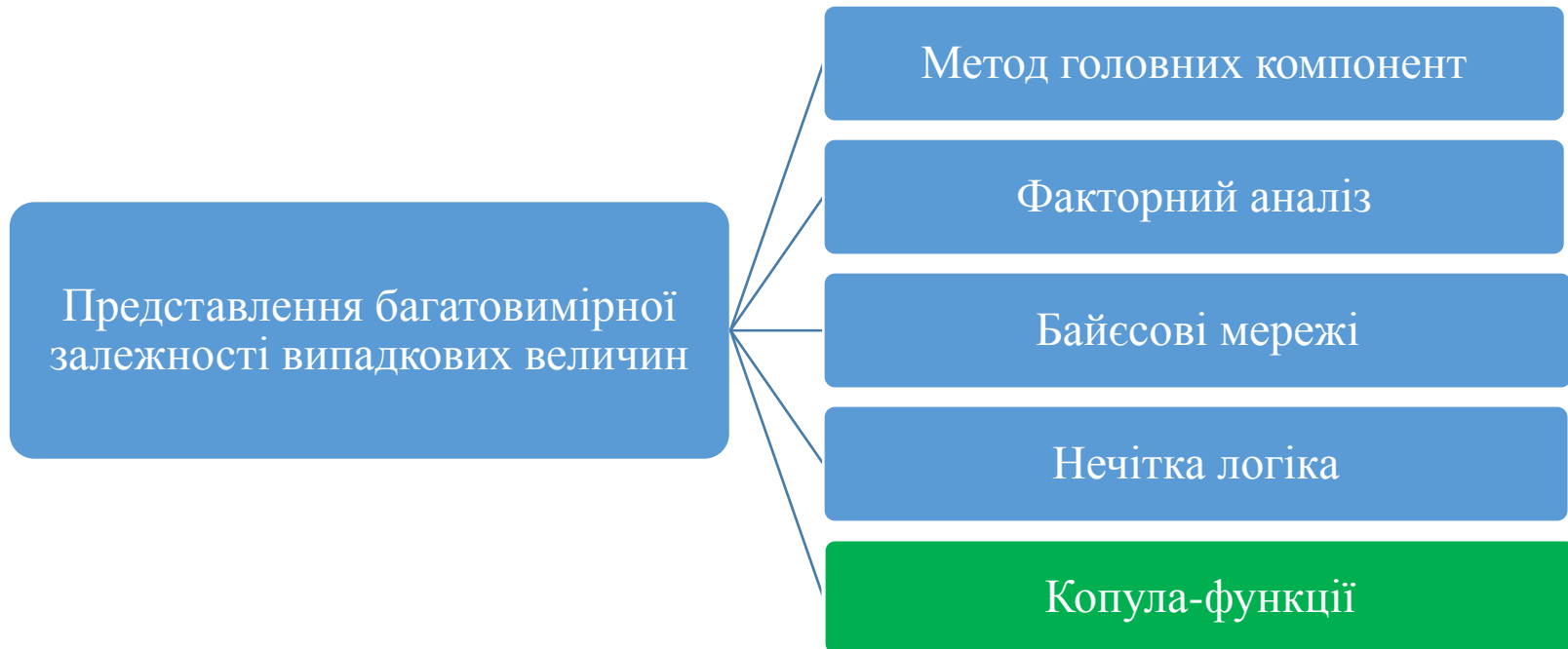


RiskMetrics Group

# МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙНОГО РИЗИКУ



# ПРЕДСТАВЛЕННЯ БАГАТОВИМІРНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН



# ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ І ПОБУДОВИ КОПУЛА ФУНКЦІЙ



| Метод       | Повний параметричний метод                    | Напівпараметричний метод                    | Непараметричний метод                                  |
|-------------|---|---|--|
| Перший етап | Оцінювання параметрів маргінальних розподілів | Оцінювання параметрів емпіричних розподілів | Оцінювання емпіричних функцій розподілу для маргіналів |
| Другий етап | Оцінювання параметрів копули                  | Оцінювання параметрів копули                | Оцінювання емпіричних функцій розподілу для копул      |

# ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Знайти та підготувати початкові дані (активи).
2. Вибрати маргінальні розподіли, оцінити їх параметри, обрати маргінальний розподіл для досліджуваних активів.
3. Вибрати копули для дослідження та метод для оцінки параметрів копулярних моделей.
4. Сформулювати та вирішити задачу пошуку CVaR-оптимального портфелю.
5. Створити алгоритм для розрахунку точкових та інтервальних оцінок вартісних мір ризиків VaR і CVaR з використанням копулярних моделей.
6. Вибрати мову програмування, бібліотеки. Розробити програмне забезпечення для оцінювання інвестиційного ризику.
7. З використанням копулярних моделей обчислити і порівняти поведінку різних вартісних мір ризиків (VaR, CVaR) для інвестиційного портфелю.
8. Протестувати розроблене програмне забезпечення.

# ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ

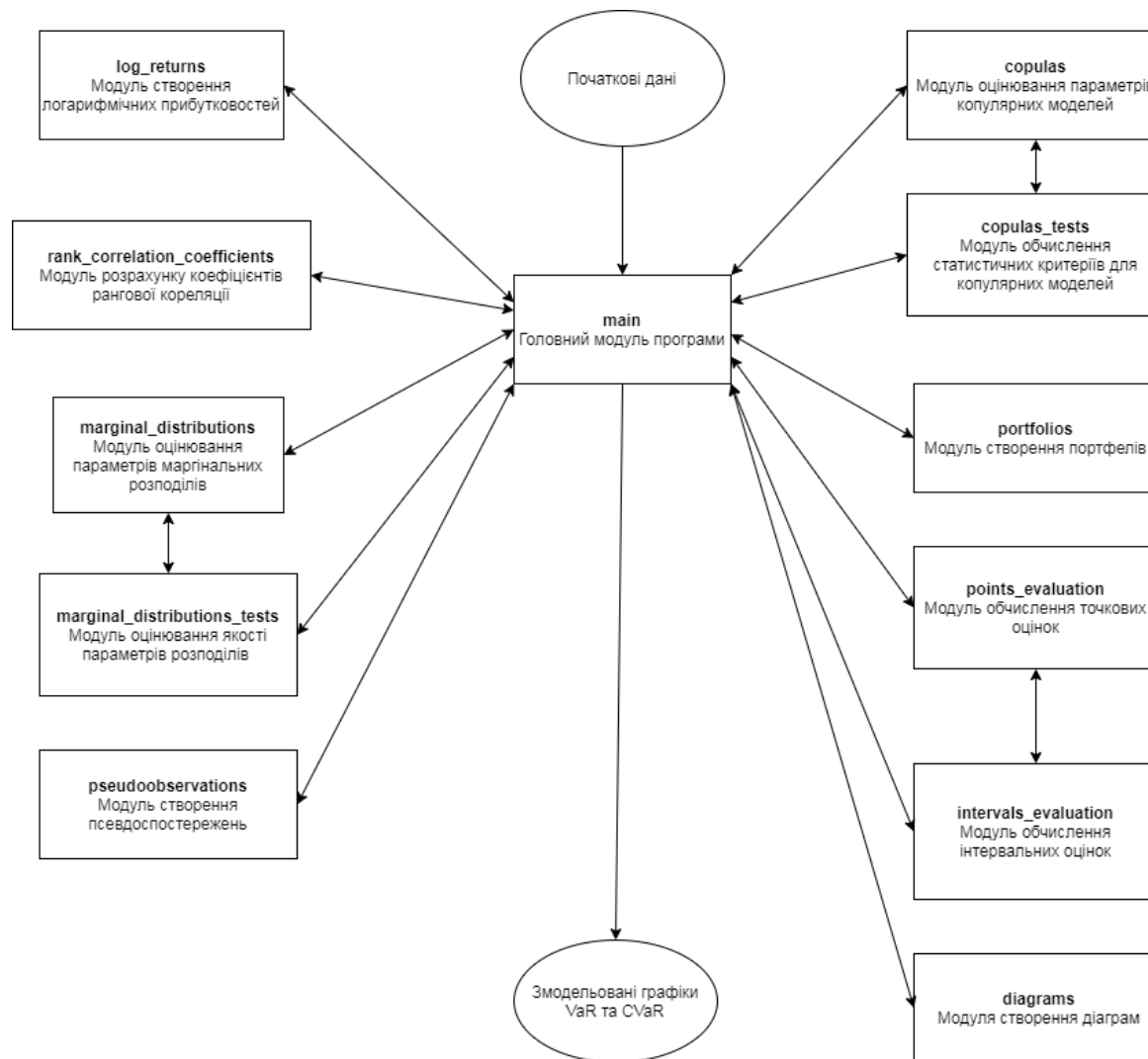
Мова програмування: Python

Бібліотеки:

1. Statsmodels – бібліотека для проведення статистичних тестів, для оцінки статистичних моделей.
2. NumPy – бібліотека високорівневих математичних функцій.
3. Seaborn – бібліотека для побудови графіків.
4. Matplotlib – бібліотека для візуалізації даних.
5. Pandas – бібліотека для обробки та аналізу даних.
6. Scikit-learn – бібліотека машинного навчання.
7. SciPy – бібліотека для інженерних та наукових робіт.
8. Dbfread – бібліотека для роботи з .dbf файлами.



# СТРУКТУРА ПРОГРАМИ



# ПОЧАТКОВІ ДАНІ

У даній роботі використовується портфель з таких активів (деривативів):

1. Ф'ючерс на курс євро – долар США (Тикер: DE).
2. Ф'ючерс на ціну однієї тройської унції афінованого золота (Тикер: GOLDU).
3. Ф'ючерс на курс долар США – українська гривня (Тикер: DX).
4. Ф'ючерс на індекс українських акцій (Тикер: UX).

Дані по цим активам взято з Української біржі, де представлено український ринок похідних цінних паперів.

В якості початкових даних використовуються денні ціни закриття вищеперелічених контрактів з 14 червня 2016 до 14 червня 2018 (512 спостережень).

# АЛГОРИТМ РОЗРАХУНКУ ТОЧКОВИХ ОЦІНОК РИЗИК- МЕТРИК З ВИКОРИСТАННЯМ КОПУЛ



Алгоритм 1. Розрахунок ризик-метрик з використанням копул

Вхід: логарифмічні прибутковості  $\{r_{i,t}\}$ ,  $i \in \overline{1, d}$ , вагові коефіцієнти  $w_i$  оптимального портфелю, маргінальні розподіли і параметри для кожного активу,  $d$ -мірна копула з відомими параметрами, рівень  $\alpha$  для обчислення  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$ .

1. Згенерувати масив псевдоспостережень  $\{\hat{u}_{i,s}\} \in [0, 1]^d$ ;  $i \in \overline{1, d}$ ;  $s \in \overline{1, S}$  відповідно до обраної копули.
2. Перетворити згенеровані псевдоспостереження в масив квантилів:
3. *for*  $i \in \overline{1, d}$  *do*
4.     *for*  $s \in \overline{1, S}$  *do*
5.             Обчислити  $\hat{r}_{i,s} = F_i^{-1}(\hat{u}_{i,s}), \forall i, s$ .
6.             *end for*
7.     *end for*
8. Обчислити ряд прибутків і втрат ( $P \& L$ ) портфелю:
9. *for*  $s \in \overline{1, S}$  *do*
10.     Присвоїти  $P \& L(s) = \sum_{i=1}^d \hat{r}_{i,s} \cdot w_i$ .
11. *end for*
12. Обчислити  $VaR_\alpha = \mathbb{Q}_{-P \& L}(\alpha)$  та  $CVaR_\alpha = \mathbb{E}(-P \& L | -P \& L > VaR_\alpha)$ .

Вихід:  $VaR$  і  $CVaR$  для згенерованих  $P \& L$  портфелю.

# АЛГОРИТМ РОЗРАХУНКУ УСЕРЕДНЕНИХ ТА ІНТЕРВАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК РИЗИК-МЕТРИК

Алгоритм 2. Процедура для обчислення оцінок і характеристик ризик-метрик

Вхід: Число вибірок  $N$ , вхідні дані Алгоритму 1.

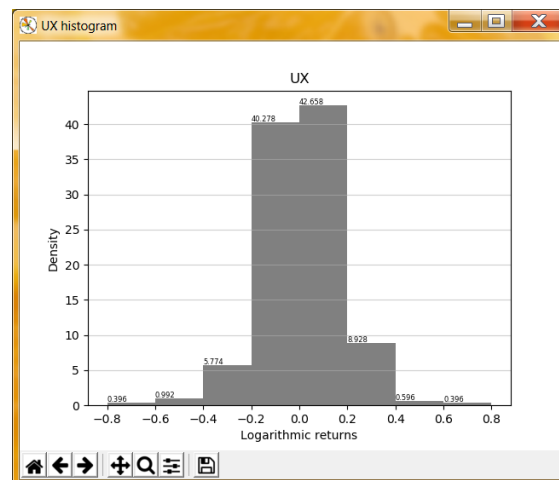
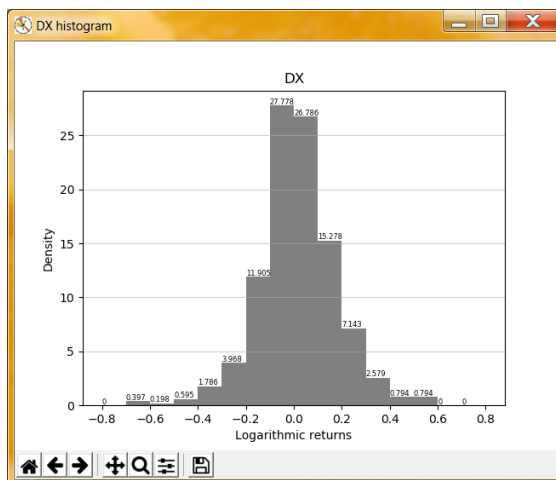
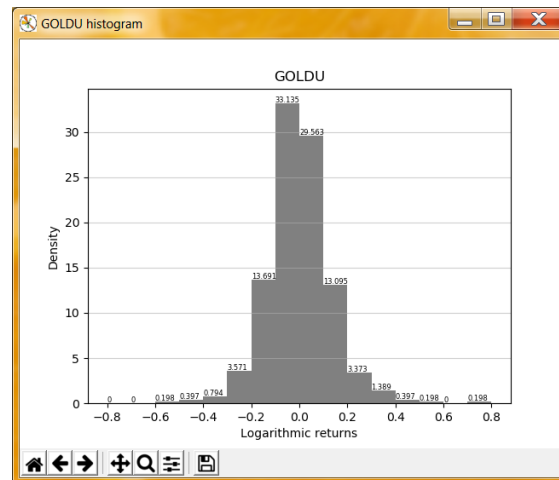
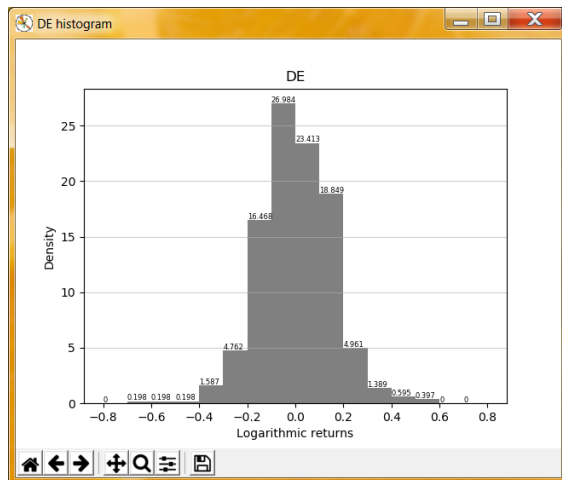
1. Створити порожні вектори  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$ .
2. *for*  $i \in \overline{1, N}$  *do*
3.     Запустити Алгоритм 1.
4.     Додати отримані значення  $VaR_{\alpha,i}$  і  $CVaR_{\alpha,i}$  до векторів  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$  відповідно.
5. *end for*
6. Обчислити характеристики для  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$  за формулою

$$f_M(x | \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\left(2 \cos \frac{\beta}{2}\right)^{2\delta}}{2\alpha\pi\Gamma(2\delta)} \exp \frac{\beta(x-\mu)}{\alpha} \left| \Gamma\left(\delta + i \frac{x-\mu}{\alpha}\right) \right|^2.$$

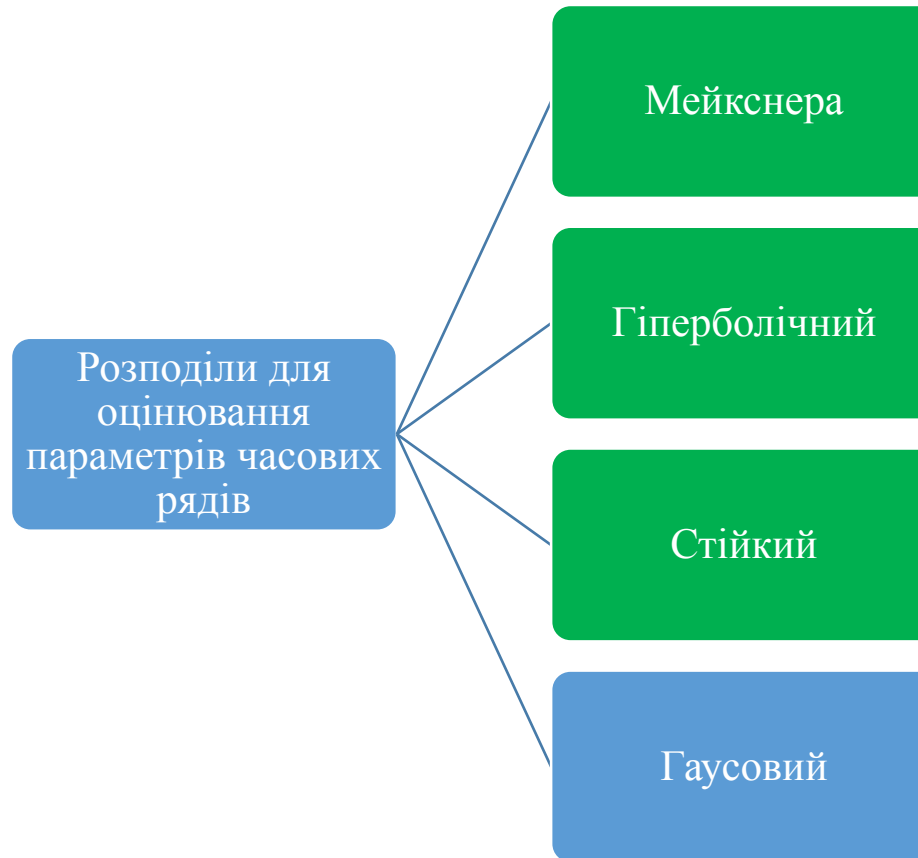
7. Обчислити довірчий інтервал векторів  $VaR_\alpha$  і  $CVaR_\alpha$  за рівнянням  $q^- = \mathbb{Q}_x(0.025), q^+ = \mathbb{Q}_x(0.975)$ .

Вихід: Середні значення, довірчий інтервал, характеристики помилок оцінок  $VaR$  і  $CVaR$ .

# ЛОГАРИФМІЧНІ ПРИБУТКОВОСТІ



# РОЗПОДІЛИ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ





# ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ МАРГІНАЛЬНИХ РОЗПОДІЛІВ

Для оцінювання параметрів гіперболічного розподілу можна скористатися методом Нелдера-Міда.

Для стійкого розподілу і розподілу Мейкснера – критерієм омега-квадрат (метод дистанції Крамера-фон Мізеса).

Для оцінювання якості отриманих параметрів будемо використовувати тести:

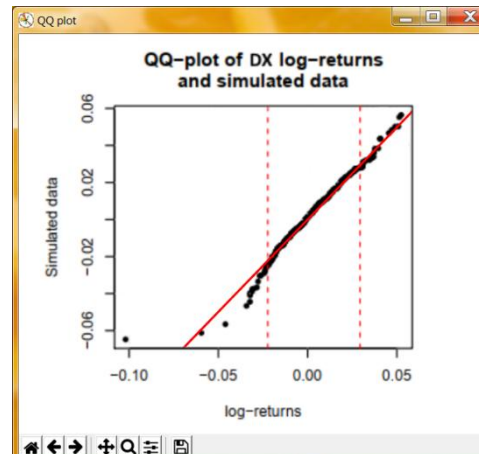
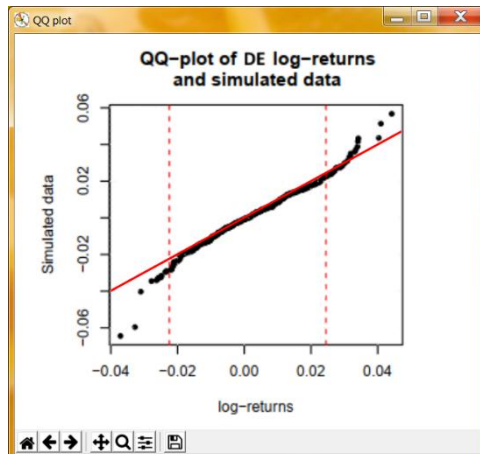
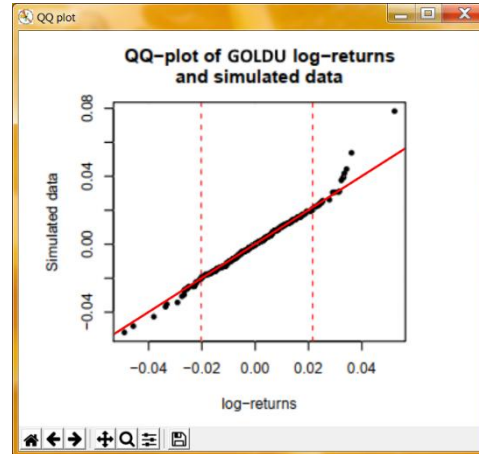
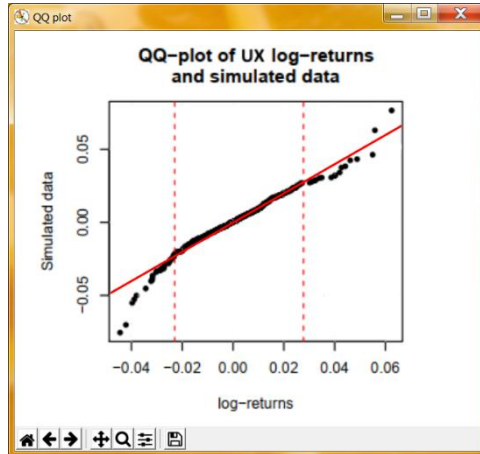
1. Колмогорова-Смирнова.
2. Андерсона-Дарлінга.
3. Крамера-фон Мізеса.

# СТАТИСТИЧНІ ТЕСТИ ДЛЯ РОЗПОДІЛІВ-КАНДИДАТІВ

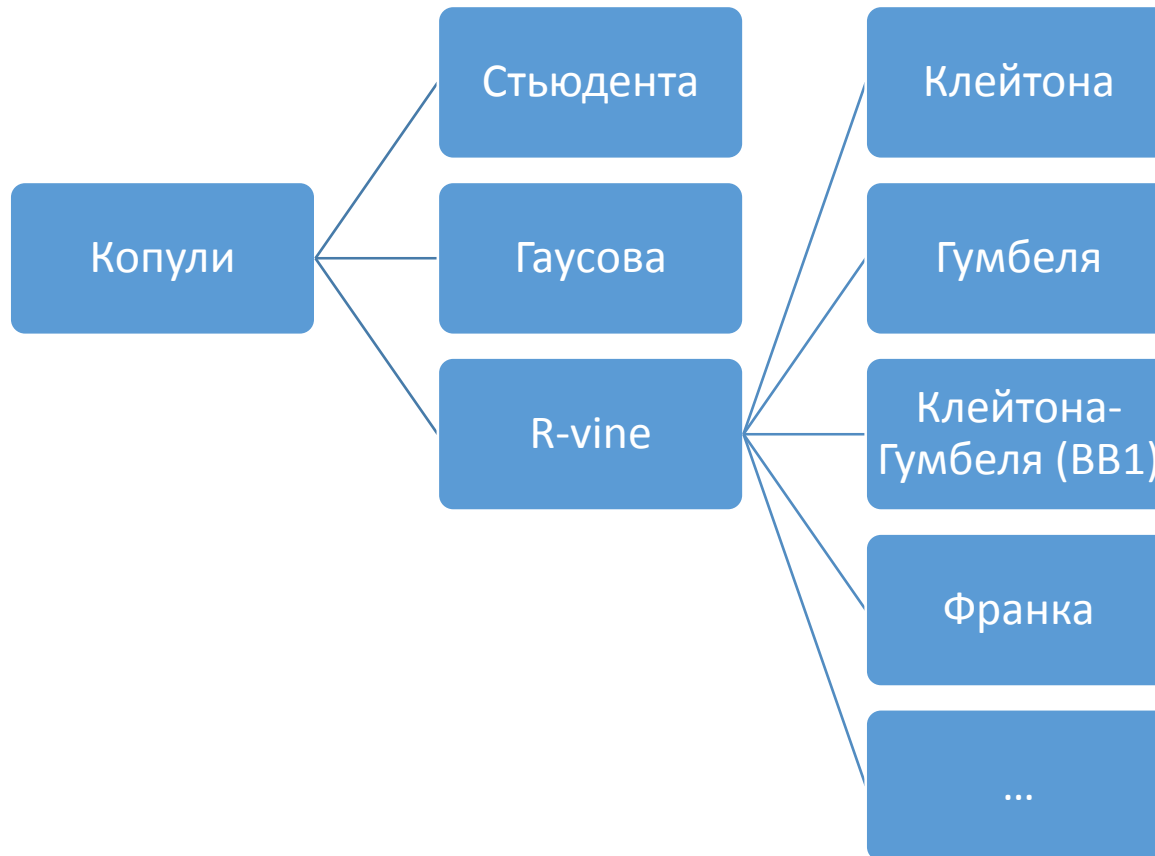


| Тест                 | Розподіл      | DE   | GOLDU | DX   | UX   |
|----------------------|---------------|------|-------|------|------|
| Андерсона-Дарлінга   | Гіперболічний | 0.92 | 0.99  | 0.93 | 0.86 |
|                      | Стійкий       | 0.96 | 0.49  | 0.84 | 0.75 |
|                      | Мейкснера     | 0.91 | 0.99  | 0.90 | 0.89 |
| Крамера-фон Мізеса   | Гіперболічний | 0.89 | 0.99  | 0.90 | 0.93 |
|                      | Стійкий       | 0.97 | 0.93  | 0.91 | 0.97 |
|                      | Мейкснера     | 0.97 | 0.99  | 0.95 | 0.99 |
| Колмогорова-Смирнова | Гіперболічний | 0.77 | 0.99  | 0.84 | 0.92 |
|                      | Стійкий       | 0.93 | 0.89  | 0.95 | 0.88 |
|                      | Мейкснера     | 0.95 | 0.99  | 0.94 | 0.99 |

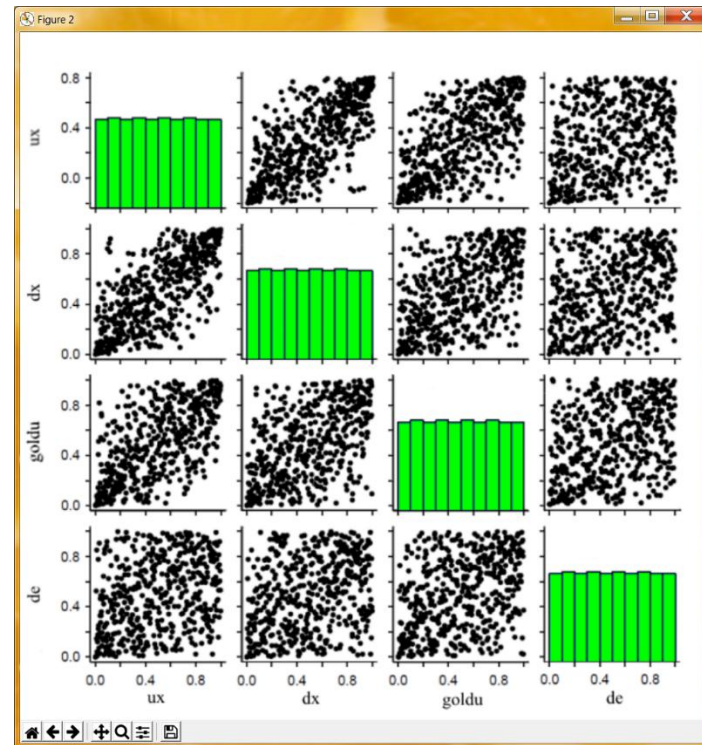
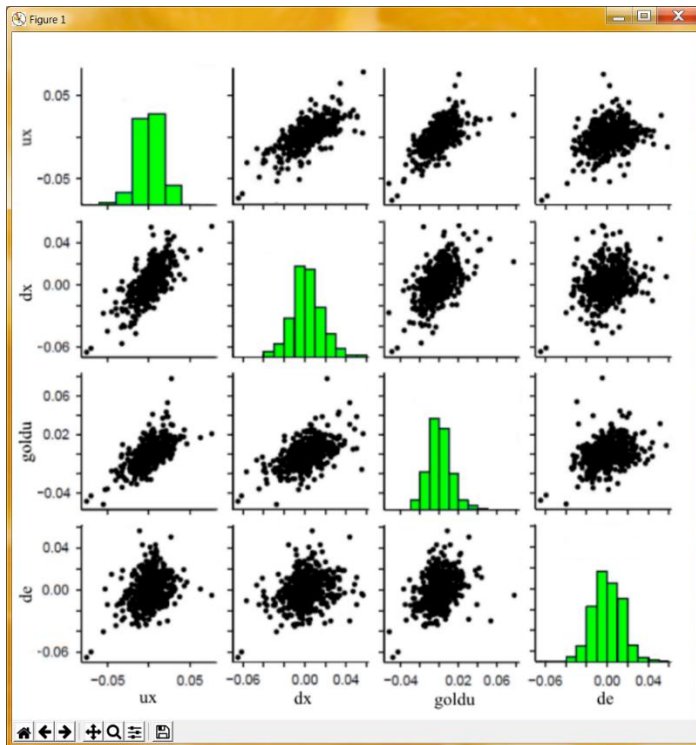
# РЕЗУЛЬТАТИ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛІВ



# ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ КОПУЛ



# ПАРНІ ГРАФІКИ ДЛЯ ПОЧАТКОВИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ТА ПСЕВДОСПОСТЕРЕЖЕНЬ



# ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ КОПУЛ



$$\sum_{Gauss} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0.689 & 1 & & \\ 0.613 & 0.552 & 1 & \\ 0.288 & 0.291 & 0.408 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_t = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0.689 & 1 & & \\ 0.613 & 0.552 & 1 & \\ 0.288 & 0.291 & 0.408 & 1 \end{pmatrix}, \nu = 4$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 4 & 1 & & \\ 3 & 4 & 3 & \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} Fr & & & \\ Gu & Cl & & \\ St & SBB1 & SG & \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.612 & & & \\ 1,135 & 0,171 & & \\ 0,689 & 0,131 & 1,296 & \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 8,134 & 1,723 & 0 & \end{pmatrix}$$

# ГОФ-ТЕСТИ ДЛЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ



| Копула         | Статистика    | <i>p</i> -значення |
|----------------|---------------|--------------------|
| <i>R</i> -vine | $W = 15,283$  | 0,94               |
| Стьюдента      | $S_n = 0,408$ | 0,08               |
| Гаусова        | $S_n = 0,067$ | 0,23               |



# ОПТИМАЛЬНИЙ ПОРТФЕЛЬ

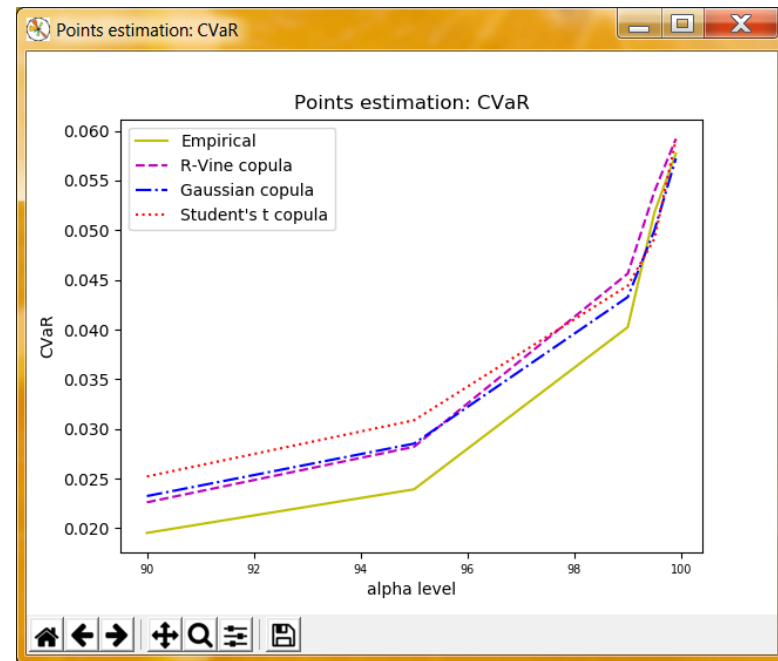
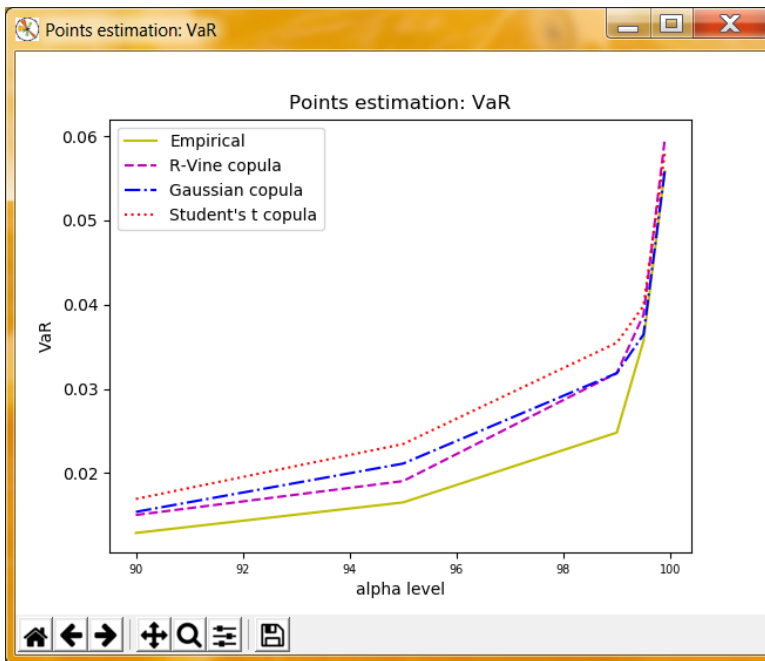
Оптимальний інвестиційний портфель (UX, DX, GOLDU, DE)  
при мінімальній прибутковості  $\bar{\mu}_p = 0,05$  :

$$\mathbf{w} = \{0,062; 0,109; 0,366; 0,463\}$$

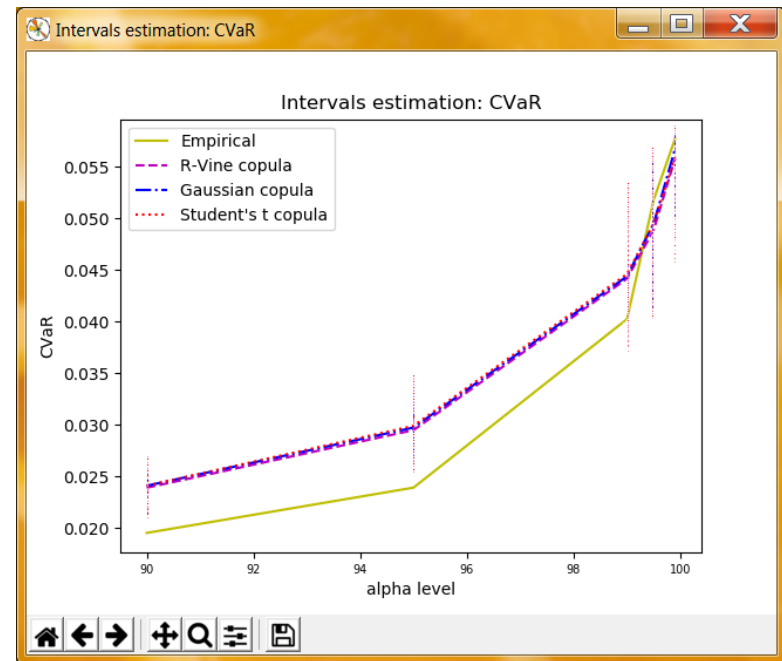
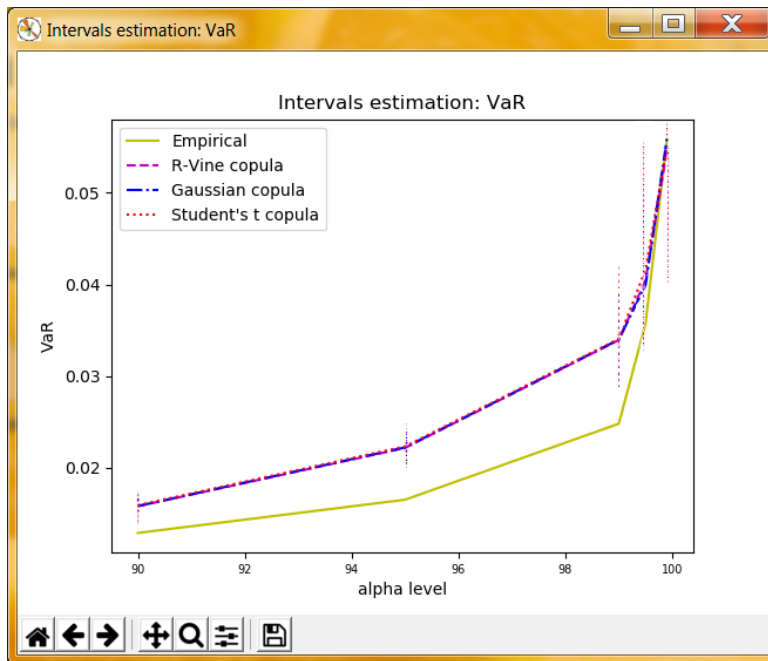
В якості рівнів ризик-метрик виберемо наступні значення ймовірностей:

$$\boldsymbol{\alpha} = \{90; 95; 99; 99.5; 99.9\}$$

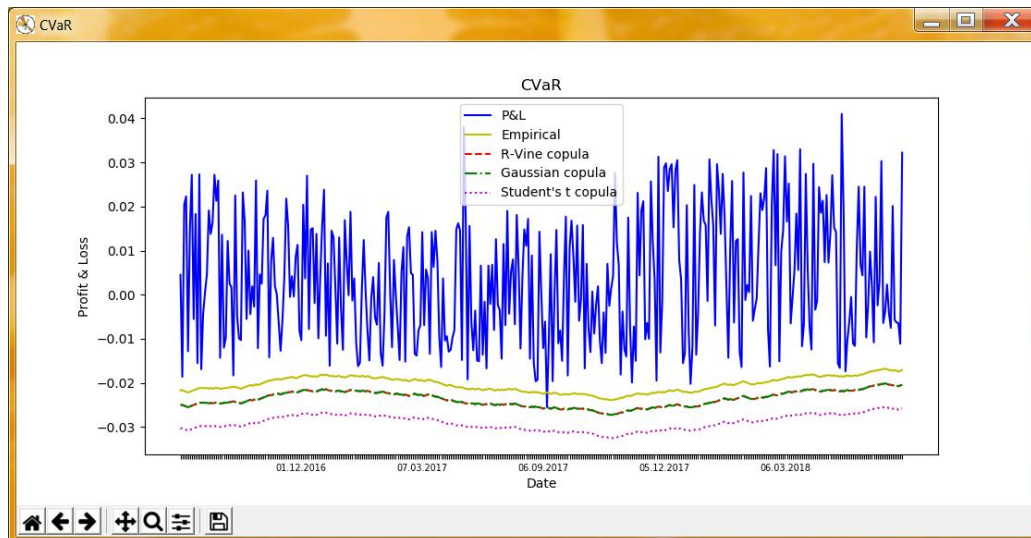
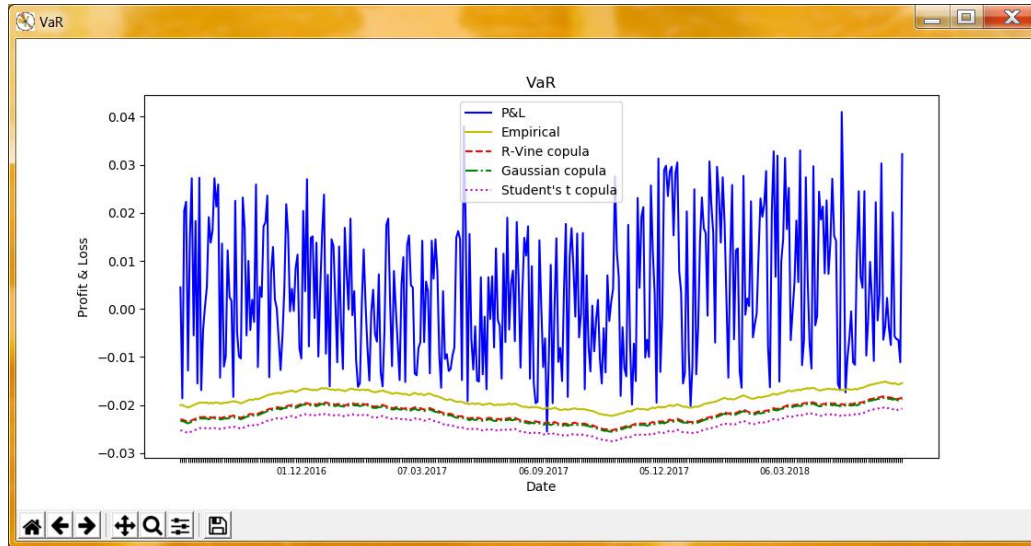
# ТОЧКОВІ ОЦІНКИ ЗНАЧЕНЬ РИЗИК-МЕТРИК VaR ТА CVaR



# ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ ЗНАЧЕНЬ РИЗИК-МЕТРИК VaR ТА CVaR



# ЗМОДЕЛЬОВАНІ РЯДИ VAR ТА CVAR



# ТЕСТ КУПИЧА ДЛЯ КРИВИХ VAR НА РІВНІ 95%



| Копула         | $LR$ -статистика | $p$ -значення |
|----------------|------------------|---------------|
| Емпіричний     | 0.00             | 0.99          |
| R-vine         | 2.01             | 0.15          |
| Гаусова копула | 3.22             | 0.09          |
| $t$ -копула    | 11.91            | 0.00          |

# БІЗНЕС-МОДЕЛЬ

|  |   |  |  |   |
|--|---|--|--|---|
| <p><b>Проблема.</b> Складність пошуку CVaR оптимального портфелю. Велика втрата ресурсів для розрахунку точкових і інтервальних оцінок VaR і CVaR. Складність розрахунку VaR і CVaR з використанням копулярних моделей. Складність вибору правильної копули. Проблема знаходження оцінок невідомих параметрів з найкращими статистичними властивостями</p> | <p><b>Рішення.</b> ПЗ розраховує інтегральні і точкові оцінки VaR і CVaR для оцінювання ризику</p> <p><b>Ключові метрики.</b> Кількість проданих ліцензій</p> | <p><b>Унікальна ціннісна пропозиція.</b> Висока якість одержуваних результатів укупі з високим попитом на ризикові моделі стосовно портфелів з великою кількістю активів, універсальність моделі і висока якість одержуваних результатів, мала поширеність на ринку подібних моделей дозволить ефективніше боротися з конкурентами</p> | <p><b>Прихована перевага.</b> Врахування специфіки оцінювання ризику</p> <p><b>Канали.</b> Через фондові біржі і відділи співпраці банківських організацій</p> | <p><b>Споживачі.</b> Банківські організації, брокери, приватні інвестори, державні компанії</p> |
| <p><b>Структура витрат.</b> Утримання робочих місць для персоналу (оплата за оренду офісу та комунальні послуги); утримання персоналу для надання технічної підтримки (виплати заробітних плат, соціальних виплат); податкові витрати; оплата послуг юриста, бухгалтера, прибиральниці</p>   |   | <p><b>Потоки доходів.</b> Доходи від продажу ліцензій; доходи від підтримки програмного забезпечення</p>   |  |   |

# ЕКОНОМІЧНІ РОЗРАХУНКИ ДІЯЛЬНОСТІ



| Місяць   | 1  | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | Загалом |
|--|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|---------|
| Зарплата, тисяч \$                                 | 2  | 18  | 18  | 18  | 18  | 18  | 22 | 22 | 22 | 22 | 22 | 22 | 224     |
| Інші витрати, тисяч \$                             | 2  | 5   | 5   | 5   | 5   | 5   | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 5  | 57      |
| Сума витрат, тисяч \$                              | 4  | 23  | 23  | 23  | 23  | 23  | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 281     |
| Заплановані прибутки, тисяч \$                     |    |     |     |     |     |     | 35 | 45 | 75 | 75 | 75 | 75 | 380     |
| Результат (без урахування оподаткування), тисяч \$ | -4 | -23 | -23 | -23 | -23 | -23 | 8  | 18 | 48 | 48 | 48 | 48 | 99      |



# АПРОБАЦІЯ РОБОТИ

Основні положення і результати роботи були представлені та обговорювались на науковій конференції магістрантів та аспірантів «Прикладна математика та комп'ютинг» ПМК-2020 (Київ, 18-20 листопада 2020 р.)





**Дякую за увагу!**