



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

**В.В. Самсонов,
А.М. Сільвестров**

НАРИСИ З ТЕОРІЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

Монографія

Київ НУХТ 2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Самсонов В. В., Сільвестров А. М.

НАРИСИ З ТЕОРІЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

Монографія

Всі цитати, цифровий та фактичний матеріал, бібліографічні відомості перевірені, написання одиниць відповідає стандартам

Підписи авторів:

30 серпня 2012 р.

Київ НУХТ 2012

УДК 519.711

Рецензенти:

Нариси з теорії ідентифікації: монографія/ В.В.Самсонов,
А.М.Сільвестров.
К.: НУХТ, 2012. – 164 с.

ISBN

Монографія містить викладання деяких елементів теорії ідентифікації, важливих як для практичного використання, так і для подальших теоретичних досліджень, направлених на побудову логічно закінченої фундаментальної та прикладної теорії ідентифікації, як математично обґрунтованої теорії пізнання причинно-наслідкових зв'язків в об'єктах реального світу.

Для спеціалістів, які займаються теоретико - експериментальними дослідженнями об'єктів реального світу (технічних, економічних, біологічних, соціальних і т. д.) з метою оптимального адаптивного керування ними, діагностики стану, прогнозування наслідків і т. і.

Буде корисною також для студентів, аспірантів, докторантів та співшукачів, які мають справу з реальними об'єктами.

Рекомендовано до друку Науково-технічною радою Національного університету харчових технологій Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № від)

ISBN
519.711

УДК

© В.В. Самсонов, А.М. Сільвестров, 2012
© НУХТ, 2012

Вступ

Задача підвищення точності ідентифікації складних динамічних процесів, не зважаючи на суттєвий розвиток цих питань, **залишається актуальною**: якщо прибуток Σ^+ (рис.1) має кінцеве значення навіть за умови ідеальної моделі ($\bar{\varepsilon}^2 = 0$), то витрати (Σ^-) на отримання такої моделі прямують до нескінченності; тому чистий прибуток (Δ) буде додатнім в обмеженому діапазоні складності моделі. Задача полягає в максимізації Δ . Для цього треба знайти ту фундаментальну властивість, загальну для всіх об'єктів, за допомогою якої можна досягти поставленої мети ($\max \Delta$, рис.1), і на основі використання цієї властивості:

- 1) удосконалити моделі і методи ідентифікації;
- 2) знайти шляхи коректного оцінювання структури і параметрів складних динамічних об'єктів;
- 3) отримати методи незміщеного оцінювання параметрів моделі в умовах зашумленості вимірів як виходу, так і входу;
- 4) розробити низку підходів до покращення обумовленості інформаційної матриці в умовах активного і пасивного експерименту;
- 5) розробити метод незалежного оцінювання нелінійної статички і динаміки моделі Гамерштейна за умов довільної динаміки об'єкта;
- 6) чітко розрізняти задачі сигнальної і параметричної ідентифікації.

ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ, МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ.



Рис. 1

Властивості, притаманні об'єктам реального світу:

– не автономність і нескінченномірність, внаслідок яких, не існує стану спокою, тому всі процеси динамічні;

– обмежена потужність і природна інерційність не допускають миттєвої зміни будь-якої координати об'єкту, тому всі процеси **гладкі**. Цю фундаментальну властивість, покладемо в основу ідентифікації;

– не існує двох чи більше однакових об'єктів, тому усереднення на множині не дає точної інформації відносно параметрів конкретного об'єкта;

– аналогічно природна не стаціонарність процесів обмежує можливість усереднення у часі;

– взаємозв'язок і нескінченномірність реальних об'єктів не дають можливості побудувати модель ізоморфну об'єкту.

Залежно від цілі, заради якої будується модель, нескінченномірний функціональний простір всіх змінних стану гіпотетичної базової моделі (рис.2) можна розділити за частотною ознакою на низько – ($X_{Нч}$), середнє – ($X_{Сч}$) і високо – ($X_{Вч}$) частотний. Тоді в частковій моделі (модель (1), рис. 2) залишається лише середньочастотна складова, а $X_{Нч}$ враховується квазістаціонарністю вектора $\beta(t)$ параметрів цієї моделі, $X_{Вч}$ – розглядається як поміха $N(t)$. Для скалярної i -ої складової f_i від f і обмеженої мірності $X_{Сч}$ отримаємо вже кінцевомірну модель (модель (3), (4) рис.2).

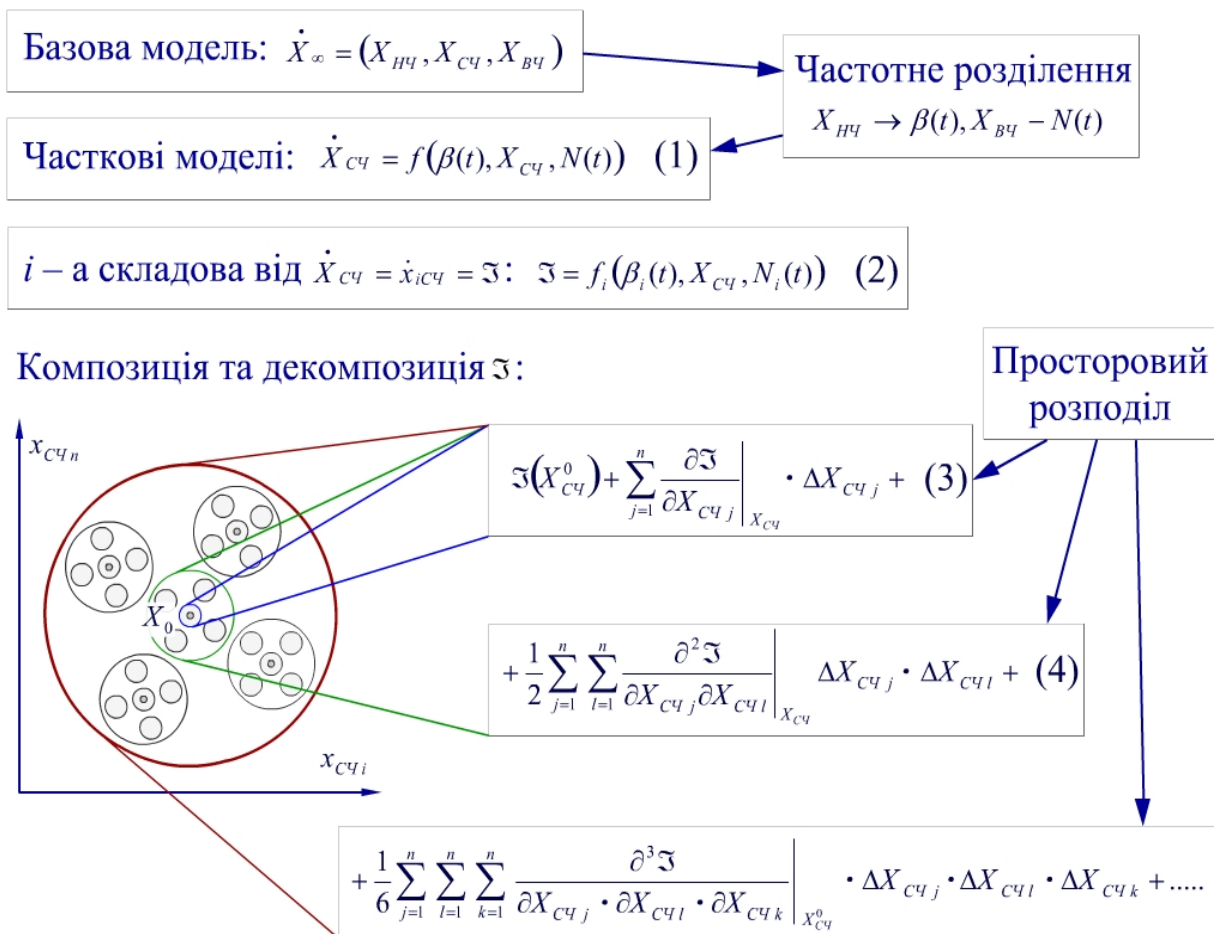


Рис. 2. Ієрархія моделей

Система ідентифікації, в цілому, розглядається як підсистема багаторівневої системи, де використано принципи декомпозиції, композиції і оптимізації. Розглянута базова модель реальних процесів та похідні від неї моделі, моделювання та прогнозування рішення за умов відсутності або наявності інформації про процес, який досліджується.

Задача підвищення точності ідентифікації складних динамічних процесів залишається актуальною. Тому важливо знайти фундаментальну властивість, загальну для всіх об'єктів, за допомогою якої можна досягти поставленої мети і на її основі удосконалити моделі і методи ідентифікації.

Розглянуто підхід до структурно-параметричної ідентифікації багатомірних нелінійних залежностей. Він базується на представленні ряду (3), (4), рис.2 у вигляді (14), рис.3 або (15), де для локальних підобластей (рис.2) α дорівнює (16), для об'єднання локальних сусідніх областей (17), розширюючи область далі, маємо модель (18), далі модель (19), і т.д.

Для $A \approx I + \Delta t \cdot A_1$, $B \approx I + \Delta t \cdot B_1$ використано авторегресійні моделі наступних типів:

АР ,
 АРКС ,
 АРИКС ,
 АРУГ ,
 УАРУГ

Два підходи до коректної композиції моделей

1) Для неортогональної сітки даних 2) Для ортогональної

Замість (4) маємо:

$$J(\beta) - J(\beta_0) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial J}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_0} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \Big|_{\beta_0} + \left\{ \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \Big|_{\beta_0} + \dots \right\} \dots \Delta \beta_k \right\} \Delta \beta_j \right\} \Delta \beta_i \quad (14)$$

або $\Delta y = \alpha(\beta) \cdot \Delta \beta$ (15), де $\Delta y = \Delta J$, $\alpha \cong \frac{\partial J}{\partial \beta} \Big|_{\beta_{0r}}$, $\Delta \beta = \beta - \beta_{0r}$ (16)

Для локальних сусідніх областей $\Delta y = \frac{\partial J}{\partial \beta} \Big|_{\beta_{0p}} - \frac{\partial J}{\partial \beta} \Big|_{\beta_{0r}}$, $\alpha \cong \frac{\partial^2 J}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta_{0r}}$, $\Delta \beta = \beta_{0p} - \beta_{0r}$, $p \neq r$ (17)

Далі, розширюючись, маємо: Далі:

$\frac{\partial J}{\partial \beta_j} \Big|_{\beta_{0p}} \cong \frac{\partial J}{\partial \beta_j} \Big|_{\beta_{0r}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \Big|_{\beta_{0r}} (\beta_{i0p} - \beta_{i0r})$ (18)

$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \Big|_{\beta_{0k}} \cong \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \Big|_{\beta_{0r}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \Big|_{\beta_{0r}} (\beta_{i0k} - \beta_{i0r})$ (19)

і так далі...

Рис. 3. Композиція моделей

Методику використано для:

1) Визначення структури і параметрів тестової залежності $I(\beta)$ (рис. 4, п.1) з несуттєвою похибкою $0,05\beta_2$ внаслідок наближеності розрахунку $\frac{\partial I}{\partial \beta}$.

2) Побудови аналітичної залежності енергії першої півхвилі струму розряду конденсатора C в RLC - колі, як функції добротності β (рис. 4, п.2), та визначення її оптимального значення. Помилка у визначенні оптимальної добротності склала 0,05% відносно значення, знайденого на основі числового моделювання.

3) Визначення багатомірних нелінійних залежностей за експериментальними даними, поданими таблицями (механічні та енергетичні об'єкти). Тут послідовно будуються моделі в функції однієї змінної, коефіцієнти яких апроксимуються як функції другої змінної; якщо змінних три, то процес продовжується по третій змінній. В результаті такої послідовної композиції в моделі автоматично обнуляються несуттєві складові, тобто коректно відбувається структурна ідентифікація. При цьому пошук канонічної структури проміжних одномірних моделей не створює складностей. Стандартний регресійний аналіз з перебором структур суттєво складніший, особливо за великої мірності n вектора β змінних.

ПРИКЛАДИ ОТРИМАННЯ БАТОМІРНИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ З ЕКСПЕРИМЕНТУ:

Тестовий приклад:

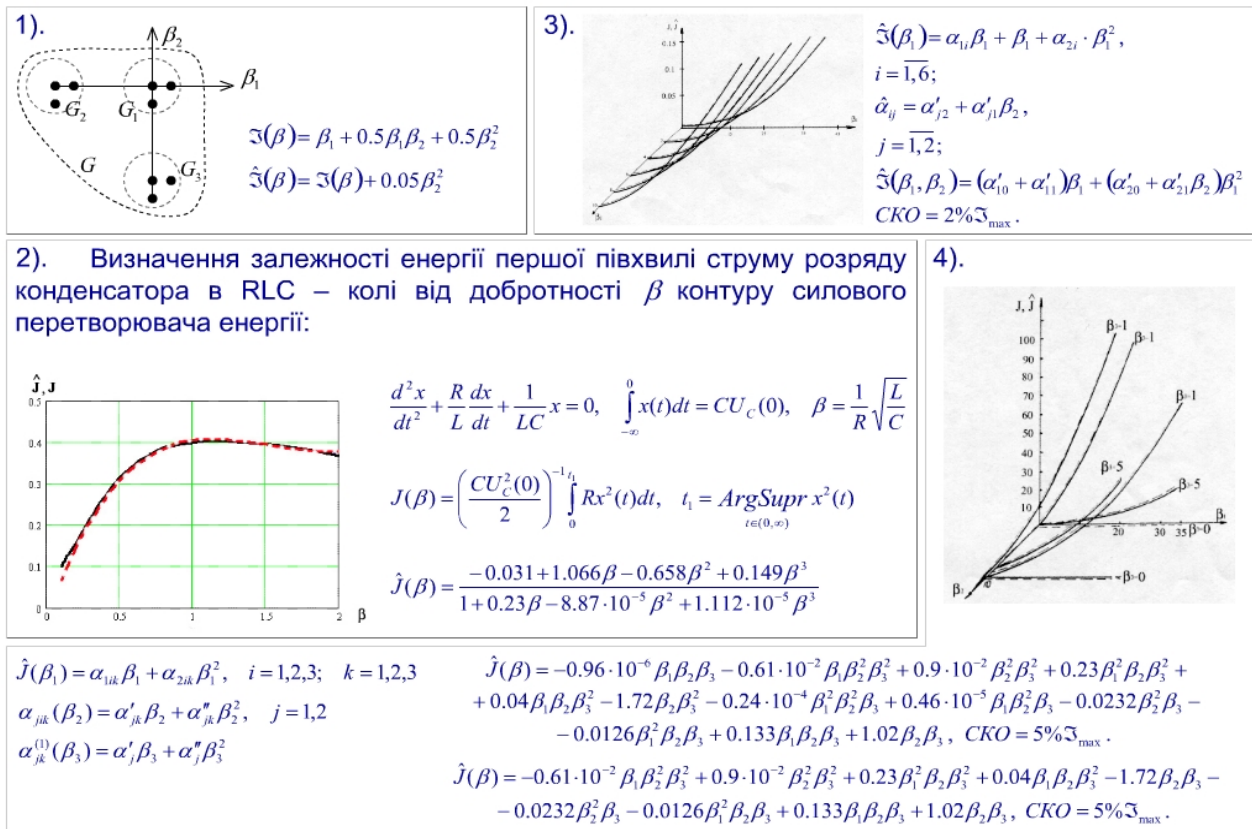


Рис. 4.

За умови відсутності інформації про структуру моделі задача ідентифікації, як задача апроксимації, має безліч рішень, однак тільки єдине рішення буде оптимальним відносно задачі прогнозу на конкретний час τ .

Розглянуто тестовий приклад рис.5, п.1÷4. Невідома залежність апроксимується на інтервалі $[0, T]$ степеневими поліномами I, II, III степені. Чим вища степінь, тим точніша апроксимація. Але похибка прогнозування, можна

сказати, пропорційна добутку мірності моделі „ n ” на інтервал τ прогнозу: чим більше n , тим треба менше τ . Для селекції структури моделі прогнозу академіком О.Г. Івахненко запропоновано ввести зовнішній критерій, наприклад критерій „регулярності” (рис.5, п.3). В таблиці (рис.5, п.4) для наведеного тесту співставлено ідеальний I і „зовнішній” критерій. Для $\tau=0,2$ і $\tau=0,5$ критерій „регулярності” не помилився у виборі оптимальної структури. З метою збільшення точності прогнозу пропонується створити базу канонічних моделей, упорядкованих на множині ознак. Тоді задача структурної ідентифікації зведеться до задачі розпізнавання образів. При цьому можлива ноніусна апроксимація з вибором з бази моделей на кожному кроці відповідної уточнюючої добавки (рис.5, п.8).

Якщо є інформація відносно структури моделі (рис.5, п.6, 7), то її слід враховувати в прогнозних моделях. Так процес енергоспоживання визначається аперіодичним трендом з накладеними на нього сезонними коливаннями. Цьому відповідає неперервна модель (рис.5, п.6) та її різницевий аналог з кроком 1 рік. Цьому процесу можна поставити у відповідність структурну схему (рис.5, п.6).

ПРОГНОЗУВАННЯ РІШЕННЯ (10) СИСТЕМИ (8), ЯКЩО ВІДОБРАЖЕННЯ НЕВІДОМЕ.

1). Залежність $x_i(t)$
 $x_i(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \sin \omega t + \varepsilon_i$

2). Модель
 $\hat{x}_i(t) = \sum_{j=0}^n \hat{\beta}_j \cdot t^j, \text{ де } n=1,2,3.$

5).

3). Критерій „регулярності”

$$\hat{I} = \left[\frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{тест}}} (x_i^{\text{сп}}(k) - \hat{x}_i^{\text{сп}}(k))^2}{\sum_{k=1}^{N_{\text{тест}}} (x_i^{\text{сп}}(k))^2} \right]^{1/2}$$

4). Результати прогнозу

n	ε_i	\hat{I}	$N_{\text{визк}}$	I	$N_{\text{визк}}$
1	0.2	0.7	1	1.4	2
2	0.2	1.8	3	3.6	4
3	0.2	0.2	5	0.4	6
3	0.5	5	7	6.2	8
2	0.5	5	9	6.2	10
1	0.5	0.2	11	0.3	12

6). Прогноз енергоспоживання
 $(T_1 p - 1)(T_2^2 p^2 - 2\xi T_2 p + 1)x(t) = 0$

7). Прогноз за відомим $T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$

8). Множина канонічних моделей
 $y_1 = \beta_1 \sin(\beta_2 x + \beta_3), \dots, y_{11} = \beta_1 x^{\beta_2} e^{\beta_3 x}$

Рис. 5.

Більш точно ураховують властивості реальних об’єктів нелінійні динамічні моделі, наприклад, моделі Гамерштейна.

У випадку параметризації нелінійності $f(u)$ моделі такий підхід вимагає визначення великої кількості $(n + m + r)$ взаємозв’язаних (через інформаційну матрицю) невідомих параметрів.

В методі, що пропонується, з метою роздільного непараметричного оцінювання нелінійності $f(v)$ і динамічної складової, використана фундаментальна властивість – гладкість процесів, яка в реальних об'єктах розповсюджується на нелінійність.

Маючи результати довільної динаміки об'єкта спочатку будемо відшукувати непараметричну модель нелінійної залежності $f(v)$ чи $f(z)$ за умови мінімуму середнього квадрата $r+1$ -ої похідної від f по v чи по z , або еквівалентній їй відповідній різниці $r+1$ -ого порядку по оптимізуємим параметрам лінійної динамічної складової. Далі, отримавши модель $\hat{f}(v)$ чи $\hat{f}(z)$, знаходимо коефіцієнти лінійної складової моделей Гамерштейна.

Метод використано для визначення нелінійних залежностей з динаміки процесів натурних випробувань літальних апаратів, електропривода та таріровочних характеристик терморезисторних вимірювачів ТП-100 температури газу в магістральних газопроводах.

Досліджено можливість підвищення ефективності вирішення задачі прогнозування часових рядів шляхом використання головного критерію, розширення множини методів ідентифікації, застосування множини канонічних моделей.

Показано важливість оптимізації натурального експерименту для об'єктивного визначення параметрів математичної моделі динамічного об'єкту.

Ще раз вказано на необхідність чіткого розділення задач сигнальної і параметричної ідентифікації.

Наведено приклади систем ідентифікації і оптимізації технологічних процесів витягування кварцової трубки та навчання на комп'ютерному тренажері.

Наведений нижче матеріал, що являє собою лише фрагменти теорії ідентифікації, може бути ефективно використаний як на практиці, такі для подальшого розвитку теорії ідентифікації – математично формалізованої теорії пізнання об'єктів реального світу.

Глава 1. Системний погляд на задачу ідентифікації

1.1 Визначення системи

Початковим кроком вирішення задачі ідентифікації є етап формалізації. На цьому етапі повинна бути поставлена задача. Постановка полягає у відображенні вхідної невизначеної ситуації, що пов'язана з реальним об'єктом, у формалізовану задачу, визначену на множині кількісно порівнянних елементів. Такими елементами є система, процеси, що в ній протікають, критерії (цілі) і стратегії їх оптимізації (досягнення цілей).

Загальне математичне визначення системи дано Р. Калманом [7], де з урахуванням умов фізичної реалізованості наведено визначення стаціонарної, дискретної, безперервної, зкінченномірної, лінійної, гладкої і динамічної систем з точки зору їх зовнішньої поведінки; визначено необхідні умови існування математичних моделей (ММ). Для гладких систем доведено теорему про те, що перехідна функція стану, тобто відображення виду

$$T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$$

водночас є рішенням диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad (1.1)$$

де $x \in X$, $u(t) = \omega(t) \in \Omega; t \in T$; T - впорядкована множина моментів часу Ω , X — множина вхідних впливів і станів.

Стан системи [7] - це та мінімальна інформація про минуле, яка необхідна для повного опису майбутньої поведінки (тобто вихідних змінних) системи, якщо поведінка її вхідних змінних відома, починаючи з поточного часу t_0 .

Якщо множина X належить зкінченномірному простору, то модель (1.1) являє собою зкінченномірну систему нелінійних нестаціонарних диференціальних рівнянь першого порядку. З системи (1.1) за певних припущень можуть бути отримані системи лінійних і (або) стаціонарних рівнянь, дискретна система також лінійна і (або) стаціонарна. Чим вужча область визначення змінних $\{X, \Omega, T\}$, тим ближче в просторі X буде спрощена модель до повної (1.1). Для гладкої системи (1.1), має місце існування таких $X_1 \subset X$, $\Omega_1 \subset \Omega$, $T_1 \subset T$, що (з точністю до наперед заданої малої ε) системі (1.1) буде еквівалентна система лінійних диференціальних рівнянь з матрицями A і B постійних коефіцієнтів:

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t); y_1(t) = Cx_1(t), \quad (1.2)$$

де $x_1(t)$ - вектор-функція $\{x_i(t)\}$, $i = \overline{1, n}$; $u_1(t)$ - вектор-функція $\{u_j(t)\}$, $j = \overline{1, m}$; $\dot{x}_1(t)$ - вектор-функція похідних $\{\dot{x}_{1i}(t)\}$, $i = \overline{1, n}$; $y_1(t)$ - вектор-функція вимірювань $\{y_i(t)\}$, $i = \overline{1, r}$; A, B, C - матриці розміру $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(r \times n)$ відповідно.

Структура і рангові властивості матриць A, B, C визначають умови керованості, спостережувості і ідентифікаційності системи (1.2) [1].

Критерій оптимізації або мета, поставлена системою більш високого рівня ієрархії, може мати "розмитий" характер. Однак у багатьох випадках формалізація критерію (цілі) досягається шляхом завдання функціонала, який однозначно визначає ефективність поведінки системи. Мета системи - забезпечення

екстремального значення цього функціоналу. Під функціоналом розуміють відображення

$$T \times T \times X \times \Omega \rightarrow R,$$

де R - множина дійсних чисел.

Системі (1.1) для фіксованих початкових $t_0 \in T$ і кінцевих $t_1 \in T$ моментів часу, станів $x_0 \in X, x_1 \in X$, поведінки системи $x(t)$, викликаній не нульовими початковими умовами та керуючим впливом $u(t)$, відповідає конкретне дійсне число $I \in R$.

Управління $u^*(t)$ оптимальне, якщо число I з урахуванням початкових умов, рівняння (1.1) та інших обмежень на $x(t)$ і $u(t)$ приймає екстремальне (мінімальне або максимальне) значення $I^* \in R$.

Для знаходження оптимальної стратегії управління $u^*(t)$ реальним об'єктом необхідна його модель (1.1), тобто вид і параметри функціонального відображення f . *Визначення відображення f в (1.1) за результатами вимірів $x(t)$, $u(t)$ є задачею ідентифікації.* Оптимальність моделі \hat{f} відображення f оцінюється критерієм якості ідентифікації J , який також є функціоналом, що відображає множини реалізацій або конкретні реалізації $x(t)$ і $x_m(t)$ в дійсне число J , де $x_m(t)$ є рішенням рівняння моделі

$$\frac{dx_m}{dt} = \hat{f}(t, x_m, u) \quad (1.3)$$

для спільної з об'єктом вхідної дії $u(t)$.

Так як в загальному випадку $\hat{f} \neq f$, то значення I^* отримане при керуючому впливі на об'єкт $u(t)$, для моделі (1.3), буде гірше істинного оптимального значення I^* .

Модель (1.3), побудовану з урахуванням не тільки функціонала J , але і I , називають цілеорієнтованною [35].

Якщо на множині $\{f_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) допустимих відображень відображення f (1.3) для фіксованого управління $u(t)$ дає екстремальне значення I^* , тобто

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \text{argextr } I, \\ \hat{f}_i &\in \{f_i\}, \end{aligned}$$

то таку модель називають *цілеорієнтованною оптимальною*.

Близькість моделі до *цілеорієнтованої* оптимальної визначається близькістю вимірюваних змінних $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ до дійсних змінних $x(t)$ і $u(t)$ реального об'єкта. При вирішенні задачі ідентифікації в (1.3) і в $J(x, x_m)$ підставляють не $x(t)$ і $u(t)$, а їх оцінки $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$, формування яких є задачею ідентифікації сигналів об'єкта. Оцінки $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ сигналів $x(t)$ і $u(t)$ в (1.1) отримують за допомогою фільтрів f_Φ :

$$\frac{dz}{dt} = f_0(t, \hat{z}, z) \quad (1.4)$$

де $z(t)$ - вектор-функція вимірюваних первинними перетворювачами сигналів $x(t)$, $u(t)$, $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix}$, N_x , N_u - похибки вимірювання x і u відповідно.

Оптимальність фільтрів (1.4) оцінюється критерієм якості фільтрації J_Φ - функціоналом від сигналів z, \hat{z} або їх спектральних характеристик.

Так як f_Φ не дає ідеального перетворення z в (x, u) , то від критерію J_Φ в задачі ідентифікації сигналів \hat{z}, z буде залежати значення критерію J в задачі ідентифікації відображення f в (1.3), від якого у свою чергу залежить значення критерію I якості управління реальним об'єктом. Так само як і для моделі (1.3), для фільтра (1.4) введемо поняття цілеорієнтованості та оптимальності. Фільтр (1.4) цілеорієнтований, якщо при його побудові певним чином бралася до уваги задача ідентифікації f в (1.3). Якщо на множині допустимих відображень $\{f_{\Phi_i}\}$ відображення f_Φ в (1.4) при фіксованому f забезпечує екстремальне значення J^* , тобто

$$f_\Phi = \operatorname{argextr} J,$$

$$f_{\Phi_i} \in \{f_{\Phi_i}\},$$

то фільтр (1.4) буде *цілеорієнтованим оптимальним*.

Оптимізація функціоналів I, J, J_Φ пов'язана з поняттям *релаксаційного процесу* [16]. Множина $\{Q_k\}, k \geq 0$, кожен елемент якої належить деякій (зазвичай опуклій) області G нормованого простору, називають *релаксаційним процесом* (РП) щодо оптимізуємої функції $F(Q_k)$, якщо послідовність $F(Q_k)$, для упорядкованого за значенням k також впорядкована. Так, в задачі мінімізації послідовність $F(Q_k)$ така, що $F(Q_0) \geq F(Q_1) \geq F(Q_2) \geq \dots$. РП збігається за функціоналом, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (F(Q_k) - F(Q^*)) = 0,$$

і просто збігається, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = Q^*,$$

де Q^* - істинне значення.

Визначення РП спробуємо розширити на випадок, якщо елементи Q_k належать області G простору, в якому не задано поняття норми або відстані, знак \geq розуміється як символ відношення порядку. Так, наприклад, в задачі ідентифікації при введенні підмножини структур Σ моделей і множин методів Opt оцінювання вектора β параметрів моделі (Σ, β) РП не є строго релаксаційним. Множину $\{Q_k\}, k \geq 0$, назвемо РП щодо $F(Q_k)$, якщо для будь-якого $k > 0$, існує таке значення $j > 0$, що $F_{k+j} \leq F_k$. Такий РП не є, чітко кажучи, релаксаційним, і збіжність його за функціоналом F або за Q_k залежить від розмірності і впорядкованості підмножини ненормованих елементів (у нашому випадку це $\{\Sigma, Opt\}$).

Системою ідентифікації в загальному вигляді будемо називати прямий добуток підмножин $\{\Sigma, \beta\}, \{Opt, \alpha\}, \{J\}, \{I\}, \{T\}$, що позначається як $\{\Sigma, \beta\}, \{Opt, \alpha\}, \{J\}, \{I\}, \{T\}$ і наділений структурою, яка дозволяє реалізувати релаксаційний процес $\{Q_k\}$ відносно показника F , такий що $F_{k+j} \leq F_k, k = 1, 2, \dots; j > 0; Q_k \in \{\{\Sigma, \beta\}, \{Opt, \alpha\}\}, F_k \in \{J, I\}$. Тут $\{\Sigma, \beta\}$ - підмножина моделей; $\{Opt, \alpha\}$ - підмножина методів оцінювання вектора параметрів моделей $\{\Sigma, \beta\}$; α - вектор параметрів методу Opt ; $\{J\}$ - підмножина оптимізуємих по β методами $\{Opt, \alpha\}$ функціоналів від $\varepsilon(\beta, t)$; $\varepsilon(\beta, t)$ - різниця вимірюваних координат реального об'єкта Σ_∞ і моделі; $\{I\}$

- підмножина основних функціоналів, що визначають якість вирішення основної задачі для реальної системи Σ_∞ з використанням моделі $\{\Sigma, \beta\}$; $\{T\}$ - підмножина моментів t_k часу, на якому реальну систему Σ_∞ представлено набором даних $\{u(t_k), y(t_k)\}$ у вигляді системи з точки зору її зовнішньої поведінки [7].

Таблиця 1.1

№ пп	Тип сигналу	$\{Q_k\}$			Opt	$\{F_k\}$	
		β	Σ	α		J	I
1	сі	$\{\beta_k\}$	Σ	α	Opt	J	-
2	СІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	α	Opt	J	-
3	асі	$\{\beta_k\}$	Σ	$\{\alpha\}$	Opt	J	-
4	АСІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha\}$	Opt	J	-
5	басі	$\{\beta_k\}$	Σ	$\{\alpha\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	I
6	БАСІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	I
7	СС	$\{\beta_k\}$	Σ	$\{\alpha\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	$\{I_k\}$

В практичному застосуванні система ідентифікації тим ефективніше, чим менше потрібно для її роботи апріорної інформації. Забезпечення необхідної якості ідентифікації досягається шляхом *адаптації*, що полягає в цілеспрямованій зміні одного або всіх елементів підмножини $\{Q_k\}$ з метою досягнення екстремуму головного показника F . За інших рівних умов, чим краще алгоритм адаптації, тим ефективніше система. Якщо не враховувати фактор складності, то при адаптації $\{Q_k\}$ результат тим ефективніший, чим ширша підмножина $\{Q_k\}$. При врахуванні в показнику F складності системи існує оптимальна по F потужність підмножини $\{Q_k\}$.

Зазвичай в адаптивних системах ідентифікації підмножина $\{Opt, \alpha\}$ за типом методу Opt одноелементна. Спільним для всіх видів систем ідентифікації є наявність РП $\{\beta_k\}$ щодо показника J , різним - склад підмножин $\{Q_k\}$ і $\{F_k\}$.

У табл. 1.1 визначено різні за $\{Q_k\}$ і $\{F_k\}$ системи ідентифікації.

1. Системи ідентифікації у вузькому сенсі (сі) реалізують РП $\{\beta_k\}$ щодо J за постійних Σ , Opt, α і порожній множині I , тобто $Q_k = \{\beta_k\}$, $F = J$. Тут задача ідентифікації є еквівалентною задачі оптимізації функції $J(\beta_k)$, яка, в залежності від виду J , може бути вирішена методами теорії лінійного або нелінійного оцінювання або алгоритмами математичного програмування.

2. Системи ідентифікації в широкому сенсі (СІ) реалізують РП $\{\Sigma_k, \beta_k\}$ щодо J за постійних Opt α , і порожній множині I , тобто $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k\}$, $F = J$. Наприклад, в [37] розглянуто динамічні ортогональні, ноніусні або регресійні моделі з вектором β_k змінної розмірності, для яких оптимальна по J пара $\{\Sigma^*, \beta^*\}$ визначається з умови

$$\{\Sigma^*, \beta^*\} = \arg \min J \{\Sigma_k, \beta_k\},$$

$$\{\Sigma_k, \beta_k\}.$$

3. Адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (асі) реалізують РП $\{\beta_k, \alpha_k\}$ щодо J при постійному Opt і порожній множині I , тобто $Q_k = \{\beta_k, \alpha_k\}, F = J$.

Так, системи, що використовують прискорений градієнтний спуск $\{\beta_k\}$ по J , в якості α_k мають параметр регуляризації, що оптимізується з допоміжною умови мінімуму різниці середньоквадратичних значень помилок для двох однотипних моделей, що настроюються однаковими алгоритмами Opt , але відрізняються параметром α : для першого $\alpha = \alpha_k$, для другого $\alpha = \alpha_k + \Delta$, де $\Delta > 0, \alpha_k > 0$.

4. Адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі (АСІ) реалізують РП $\{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\}$ щодо показника J при постійному Opt і порожній множині I , тобто $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\}, F = J$. Наприклад, системи вибору "найкращої регресії", при оцінці розширюючогося за розмірністю вектора β із застосуванням регуляризуючого параметра α , підбираємо за алгоритмом гребневої регресії [5].

5. Багатократно адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (басі) реалізують щодо основного показника I РП $\{\beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ у вигляді композиції двох РП:

а) РП $\{\beta_{k,n}\}, n = 1, 2, \dots$, щодо J_k ;

б) РП $\{Opt_k, \alpha_k, J_k\}, k = 1, 2, \dots$, щодо I ; тобто $Q_k = \{\beta_k, Opt_k, \alpha_k\}, F = \{U_k, I\}$.

Поняття багатократності пов'язано з повторенням РП $\{\beta_{k,n}\}$ для кожного елемента $\{Opt_k, \alpha_k, J_k\}$ РП більш високого рангу.

Часто кожному показнику J_k відповідає конкретний метод Opt або для евристичних алгоритмів J_k взагалі відсутній, тоді відносно I оптимізується пара «метод-його параметри» $\{Opt_k, \alpha_k\}$.

Прикладом може служити система "БАСІ — 1" [9,35,37], в якій для заданої за одним із п'яти показників I (або їх зваженої сумі), що включають критерії регулярності та незміщеності [4], точності прогнозування по моделі і т.п., з семи методів $\{Opt_k\}$ і їх параметрів $\{\alpha_k\}$ - визначався оптимальний елемент $\{\beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$ згідно з пп. 5а і б.

6. Багатократно адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі (БАСІ) реалізують відносно головного показника I РП $\{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ у вигляді композиції двох РП:

а) РП $\{\beta_{k,n}\}, n = 1, 2, \dots$, щодо J_k ;

б) РП $\{\Sigma_k, Opt_k, \alpha_k, J_k\}, k = 1, 2, \dots$, щодо I , тобто $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}, F = \{U_k, I\}$, де I - показник більш високого рівня.

Прикладом БАСІ (при одноелементної множині $\{Opt\}$) є системи, побудовані на основі методу групового обліку аргументів [5], у яких структуру Σ і параметри β підбирають з умови екстремуму I . За інших рівних умов обґрунтоване розширення множини $\{Opt_k\}$ дозволить отримати моделі, більш ефективні за критерієм I .

Якісною відмінністю систем за пп. 5,6 є їх цілеорієнтація на показник I , регулюючий і оптимізуючий задачу вибору $\{\Sigma^*, \beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$. У багатократно адаптивних системах знімається традиційне для систем за пп. 1-4 питання: як

оцінити якість моделі, отриманої в результаті ідентифікації [3,33]? Якість моделі оцінюють за показником I . Це найбільш об'єктивна оцінка, так як хороша та модель, застосування якої дає найкраще рішення основної задачі, якість якої визначено показником I .

7. Системи керування, що самоорганізуються (СС) реалізують щодо деякого показника $\Lambda(I)$ РП $\{\Sigma_k, \beta_k, \text{Opt}_k, \alpha_k, J_k, I_k\}$, у вигляді композиції трьох РП:

а) РП, $\{\beta_{qkn}\}$, $n=1, 2, \dots$ (q і k постійні), щодо J_{qk} зі стаціонарною точкою

$$\beta_{qk} = \text{argextr } \beta_{qkn} J_{qk}(\beta_{qkn}, \Sigma_q, \text{Opt}_{qk}, \alpha_{qk}) = \text{arg} J_{qk}^*;$$

б) РП $\{J_{qk}^*(\beta_{qk}, \Sigma_{qk}, \text{Opt}_{qk}, \alpha_{qk})\}$, $k=1, 2, \dots$ (q постійне), щодо I_q зі стаціонарною точкою

$$J_q^* = J_q(\beta_q, \Sigma_q, \text{Opt}_q, \alpha_q) = \text{argextr } I_q(J_q^*) = \text{arg} I_q^*;$$

в) РП $\{I_q^*(\beta_q, \Sigma_q, \text{Opt}_q, \alpha_q)\}$, $q=1, 2, \dots$, щодо показника Λ більш високого рівня зі стаціонарною точкою

$$I^* = \text{argextr } \Lambda(I_q^*) = \text{arg} \Lambda^*.$$

Тобто $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, \text{Opt}_k, \alpha_k\}$, $F = \{J, I_k\}$.

Наприклад, задача вдосконалення процесу автоматизованого керування складним енергетичним агрегатом. Нехай Λ - показник ефективності підприємства $\{I_q\} = \{I_1, I_2\}$; I_1 - показник якості стабілізації технологічних змінних x агрегату в області робочих режимів x_0 , що задаються експертами (технологами), I_2 - показник якості роботи агрегату; $\{J_{qk}\}$ - множина показників якості ідентифікації локальними моделями $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$, що відображають управління u в x ($k=1$), і моделями якості $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$, що відображають u в I_2 ($k=2$). На першому етапі автоматизації ($I_q = I_1$) за J_{1k} визначають локальні моделі $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$ за допомогою найпростіших методів ідентифікації $\{\text{Opt}_{1k}, \alpha_{1k}\}$. За моделями $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$ підбирають локальні регулятори, стабілізуючі x в області x_0 за критерієм мінімуму I_1 . Згідно РП пп. 7, а, 7, б визначають оптимальний по I_1 елемент. На другому етапі, після автоматизації процесу збору і обробки інформації, переходять до побудови більш повної моделі $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$, що зв'язує I_2 зі змінними x, u . По моделям $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$, які містять в собі моделі $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$, уточнюють параметри локальних регуляторів та оптимальне значення x_0^* робочих режимів x_0 . Далі оптимальний (вже по I_2) елемент $\{\Sigma_2^*, \beta_2^*, \text{Opt}_2^*, \alpha_2^*\}$ визначають вже за результатом РП пп. 7а, 7б. Таким чином, перехід від Σ_1 до Σ_2 привів до заміни (згідно РП п. 7в) основного показника I_1^* та I_2^* .

1.2. Багаторівнева декомпозиція систем

Декомпозиція систем є зручним прийомом, що дозволяє точно або наближено представити систему великої розмірності зі складною мережею прямих і зворотних зв'язків системою більш простих підсистем, які краще піддаються формалізації.

Уявімо (рис. 1.1) завдання проектування системи і саму систему оптимального адаптивного управління реальним об'єктом у вигляді трьох підзадач і відповідних їм підсистем:

- оптимального управління реальним об'єктом;
- ідентифікації відображення вхід-вихід об'єкта;
- ідентифікації сигналів об'єкта.

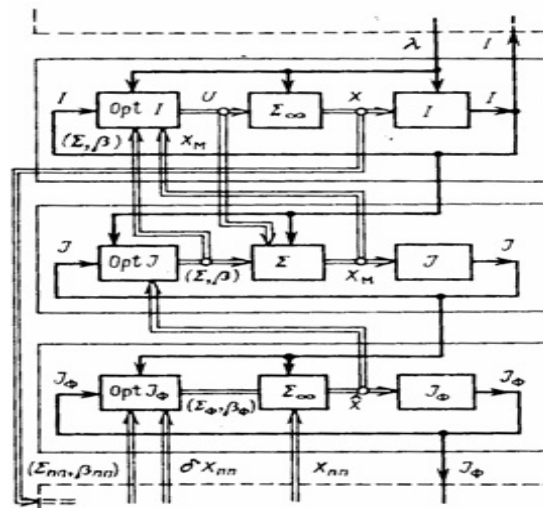


Рис. 1.1. Три рівні оптимізації в багаторівневій системі

Ці елементи всередині кожної підсистеми утворюють замкнену за місцевим показником якості систему оптимізації, працюючу за алгоритмом систем зі зворотнім зв'язком:

- видача керуючого впливу на об'єкт;
- вимір або розрахунок реакції об'єкта;
- оцінка оптимальності підсистеми за критерієм її рівня.

Між собою підсистеми об'єднано прямими (знизу вгору) і зворотними (зверху вниз) зв'язками. Крайні підсистеми об'єднано такими ж зв'язками з не розглянутими тут системами більш низького та високого рівнів. Наведемо позначення і фізичний зміст елементів, внутрішніх і зовнішніх прямих і зворотних зв'язків.

Підсистема ідентифікації сигналів має такі елементи та зв'язки:

J_ϕ – формувач показника якості ідентифікації (фільтрації) вектора x сигналів об'єкта;

Σ_ϕ - фільтр, що перетворює сигнал виходу первинного перетворювача x_{nn} в його оцінку \hat{x} ;

$Opt J_\phi$ - оптимізатор по J_ϕ структури Σ_ϕ і вектора β_ϕ параметрів фільтру;

Σ_{nn}, β_{nn} - інформація про структуру і параметри первинних перетворювачів (датчиків) фізичних змінних об'єкта Σ_∞ - передаточна функція датчика, статична (тарувальна) характеристика і т. п.;

δx_{nn} – інформація про похибки датчиків: систематичні, випадкові, часові, частотні та імовірнісні характеристики (закон розподілу, його параметри, кореляційні функції і т. п.);

J, J_Φ – інформація про критерії оптимальності систем ідентифікації об'єкта і його сигналів: J надходить по каналу зворотного зв'язку в дану підсистему, J_Φ – в підсистему первинних перетворювачів.

Підсистема ідентифікації об'єкта містить:

J – формувач показника якості ідентифікації об'єкта;

Σ, β – модель об'єкта зі структурою Σ і вектором β параметрів;

$Opt J$ – оптимізатор по J структури Σ і вектора β параметрів моделі;

$\Sigma_\Phi, \beta_\Phi, \hat{x}$ – інформація про фільтр і оцінку \hat{x} сигналу x , отриману з сигналу x_{nn} первинного перетворювача;

Σ, β, x_M – інформацію про модель (Σ, β) об'єкта управління і оцінку x_M сигналу x , отриману за сигналом \hat{x} фільтра;

I, J – \square ип. \square з \square ий зворотні зв'язки з системи управління в систему ідентифікації і з системи ідентифікації об'єкта в систему ідентифікації сигналів.

Підсистема оптимального управління об'єктом включає:

I – формувач показника якості управління;

Σ_∞ – реальний об'єкт (його вхідні і вихідні змінні u і x);

$Opt I$ – оптимізатор показника I по керуючому впливу u ;

x – вихід об'єкта – вхід підсистеми первинних перетворювачів;

u – вхід об'єкта і моделі;

Δ, I – \square козигуючі зворотні зв'язки із системи більш високого рівня в систему управління і, відповідно з системи управління в систему ідентифікації.

Кожен елемент (оптимізатор, модель, формувач критерію) має три складові:

- безпосередньо елемент, зав'язаний на вирішенні своєї задачі;
- множину таких елементів, упорядкованих за їх властивостями;
- проектор (ПР), що вибирає з множини елементів оптимальний за показником якості системи більш високого рангу.

На рис.1.2 подано схеми задач проектування і самі системи I, II і III рівнів. Індекси q, qk, qkn відповідають позначенням кроків композиційного релаксаційного процесу оптимізації системи. Наприклад, q – номер ітерації зміни виду показника I ; qk – відповідно зміни J ; qkn – номер кроку в оптимізації β в системі ідентифікації об'єкта.

Вся система складається з 27 елементів, серед яких елементи – множини $\{OptJ_\Phi^q\}, \{OptJ_q\}, \{OptI_q\}$ методів оптимізації, критеріїв $\{J_\Phi^q\}, \{J_q\}, \{I_q\}$ і моделей $\{\Sigma_\Phi^q\}, \{\Sigma_q\}, \{\Sigma_\infty^q\}$, складаються з множин наявних упорядкованих елементів. Для конкретного критерію теоретично існує єдиний оптимальний набір цих елементів і їх параметрів. Задача полягає у виборі «відповідного» (близького за I_q до оптимального) набору при обмежених витратах на його пошук в системі. Для повної апріорної \square невизначеності про всі елементи системи та їх властивості проблема віднайдення «підходящого» набору може здійснюватися методом перебору варіантів. Повний перебір гарантує відшукання оптимального набору, якщо в критерій оптимальності не входять витрати на пошук оптимуму. Якщо ці витрати істотні, то вони впливають на оптимальність рішення. Тому для того щоб

дана декомпозиція не призвела до ускладнень, необхідний ретельний аналіз підсистем та їх елементів, який дозволяє з допомогою проєкторів Π_r систем кожного рівня (рис. 1.2) істотно звужити вихідні множини елементів до обмежених підмножин претендентів на оптимальні для конкретної ситуації.

Принцип декомпозиції ефективний для складних систем та їх елементів. Так, неможливість одним функціоналом сформулювати всі вимоги до створюваної системи призвела до розв'язуваної на практиці задачі декомпозиції цього неформалізованого критерію на множини критеріїв, які піддаються чіткій формалізації, і рішенням багатокритерійної задачі оптимізації. Таке рішення не дає єдиного результату. Воно лише дозволяє виділити обмежену область (підмножина Парето) у просторі критеріїв-функціоналів від \square оптимізуючих змінних. Остаточний варіант рішення, що обирається проєктувальником, належить цій підмножині.

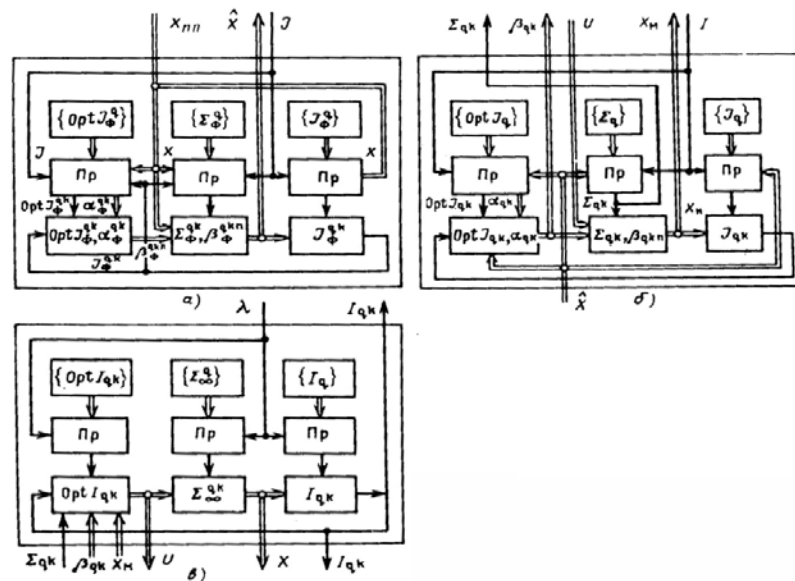


Рис. 1.2. Цілеорієнтована підсистема ідентифікації сигналів (а) і об'єкта (б) і оптимального адаптивного керування об'єктом (в)

Ще більш поширений принцип декомпозиції для методів оптимізації:

- найпростіший метод по I координатній оптимізації (метод Гауса-Зейделя), а також метод групової релаксації реалізують декомпозицію простору оптимізуючих \square змінних і почергової \square покоординатної \square або групової оптимізації;

- для лінійних оптимальних за квадратичним функціоналом стохастичних систем управління декомпозиція загальної задачі на \square підзадачі оптимального оцінювання станів та пошуку оптимальної стратегії управління [13] дозволяє істотно спростити складну задачу дуального управління [44];

- для задачі спільного оцінювання параметрів і станів стохастичних об'єктів (розширений фільтр Калмана [4], метод квазі-лінеарізації і інваріантного занурення [4]), поділ (декомпозиція) на незалежні \square підзадачі оцінювання сигналів, їх коварційних матриць, а потім параметрів дозволяє отримати рішення, близьке до оптимального, досить простими алгоритмами.

Особливий інтерес представляє задача декомпозиції моделі (1.1), описуваної системою нелінійних нестационарних рівнянь

$$\dot{x}_g(t) = f_g(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad g = \overline{1, n}, \quad (1.5)$$

множиною лінійних систем (1.2), що описують з необхідною точністю поведінку системи (1.1) в обмежених областях визначення змінних t, x, u . Ці локальні моделі виду (1.2) дозволяють у рамках лінійно-пропорційних систем легко вирішувати задачі аналізу, синтезу і реалізації оптимальних стратегій керування та ідентифікації.

По локальним моделям можна вирішувати задачу ідентифікації структури невідомої нелінійної залежності f моделі (1.1). Введемо в (1.5) позначення вектора v з компонентами V_i :

$$v_i = \begin{cases} x_i, i = \overline{1, n}; \\ u_i, i = \overline{n+1, n+m}; \\ t, i = n+m+1 = s. \end{cases} \quad (1.6)$$

В силу безперервності і i -кратної диференційованості залежності (1.1) залежність (1.5) може бути представлена рядом Тейлора:

$$y(v(t)) = y(v_0) + \sum_{i=1}^s \left. \frac{\partial y}{\partial v_i} \right|_{v_0} \Delta v_i(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \right|_{v_0} \Delta v_i \Delta v_j + \\ + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \left. \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \right|_{v_0} \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k + \dots + R_l(v), \quad (1.7)$$

де $\Delta v_i(t) = v_i(t) - v_{i0}$; $v \in G$; $v_0 \in G$;

$\text{Sup} R_l(v) \leq \delta$; δ — допустима похибка апроксимації залежності (1.1) рядом (1.7).

Розіб'ємо область G завдання змінних v на підобласті G_r , так, що

а) $\bigcup_{r=0}^m G_r = G, v_{r0} \in G_r, G_r \cap G_{r'} = \emptyset, r \neq r'$;

б) $(\forall G_r)(\exists \beta_r = \underset{\beta_r \in R}{\text{argmin}} \left(\sup_{v_{r0} \in G_r} \left\| \frac{dy}{dx} \right\|_{v_{r0}} \beta_r < h \right)$,

де β_r — вектор параметрів лінійної моделі

$$\Delta y_1(t) = \beta_r^T \Delta v(t) \quad (1.8)$$

i -а компонента β_{ri} якого є оцінка з точністю до h коефіцієнта $\left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{v_0}$, розкладання (1.7) навколо центру v_{r0} .

Для області G_0 , яка містить глобальний центр v_0 розкладання (1.7) за моделлю (1.8) і даними $y_1(t), v(t)$, знайдемо вектор β_r , який дорівнює (з точністю до h) вектору $\left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{v_0}$, тобто отримаємо оцінки перших похідних $\left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{v_0}$ в (1.7).

Аналогічно обчислимо вектори β_r часткових моделей (1.8.) для решти областей $G_r \in G$. Тепер за значеннями β_r і v_{r0} можна оцінити похідні більш високих

порядків. Так, якщо об'єднати сусідні з G_0 \square підобласті в розширену $G_{01} = \bigcup_{r=1}^{m_1} G_r, m_1 \geq s$, (для простоти позначень будемо вважати, що області перенумеровані з віддаленням від «центральної» G_0), таку, що

$$\sup_{v \in G_{0j}} R_3(v) \leq \delta,$$

то розклад (1.7), з точністю до δ , буде містити члени не вище другого порядку. Продиференціюємо (1.7) в області G_{01} по v_j , тоді (з точністю до $\partial R_3(v) / \partial v_j$)

$$\frac{\partial y(v(t))}{\partial v_j} = \frac{\partial y}{\partial v_j} \Big|_{v_0} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0} \square v_i, \quad (1.9)$$

де $\frac{\partial y}{\partial v_j} \Big|_{v_n}$ визначено з (1.8) для \square підобласті G_0 .

Якщо різниця $\Delta v_i = v_{r0i} - v_{0i}$, то їй наближено відповідає похідна

$$\frac{\partial y(v(t))}{\partial v_j} \Big|_{v_{r0}} \approx \beta_{ij}.$$

Отже, вираз (1.9) можна подати у вигляді

$$\beta_{ij} = \beta_{0j} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0} (v_{r0i} - v_{0i}). \quad (1.10)$$

Звідси для $r \geq s$ і, за умови лінійної незалежності хоча б s з r векторів $(v_{r0} - v_0)$, однозначно визначають s других похідних $\frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0}$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Для знаходження всіх коефіцієнтів $\frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \Big|_{v_0}$ ряду (1.7) необхідно мати не

менше s розширених навколо G_r^* \square підобластей G_{r1}^* , подібних G_{01} (число таких центральних підобластей повинно бути не менше s). Для кожної G_{r1}^* з рівняння (1.10) (в якому замість β_{0j} і v_{0i} взято значення, отримані для центральної під області G_r^*) знаходять другі похідні $\frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_{r^*0}}$. Двічі диференціюючи (1.7),

отримаємо

$$\frac{\partial^2 y(t)}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_{r^*0}} = \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \Big|_{v_0} (v_{r^*0k} - v_{0k}). \quad (1.11)$$

Звідси для $r^* \geq s$ і за умови лінійної незалежності хоча б s векторів $(v_{r^*0} - v_0)$ однозначно визначають треті похідні. Аналогічно отримують всі похідні ряду (1.7) і тим самим визначають його структуру. При недостатній кількості \square підобластей G_r можливо відновлення частини структури з тих v_j , які змінюються від області до області. При проведенні активного експерименту мінімізація числа областей G_r і оптимізація точності оцінок похідних в (1.7) досягається застосуванням композиційного планування експерименту, що забезпечує

ортогональність векторів $(v_{r0} - v_0), (v_{r^*0} - v_0)$. Перевагою такого підходу є обмежена (на кожному кроці розширення) розмірність вектора невідомих параметрів, можливість аналізу на кожному кроці значущості знайдених коефіцієнтів ряду (1.7) і відкидання незначущих.

Приклад 1.1. Невідома залежність (1.6) має вигляд

$$y(v) = v_1(t) + 0,5v_1(t)v_2(t) + v_2^2(t),$$

де змінні $y(v), v_i(t)$ визначено наступним чином $(v_{01} = 0, v_{02} = 0) \in G_0; (v_{11} = -1, v_{12} = 0) \in G_1; (v_{21} = 0, v_{22} = -1) \in G_2; y(0) = 0$.

В кожній області є по два вимірювання $v_i(t_{jr})$, відхилення яких від центрів для кожної області однакові: $\Delta v_1(t_{1r}) = 0,1; \Delta v_2(t_{1r}) = 0; \Delta v_1(t_{2r}) = 0, \Delta v_2(t_{2r}) = -0,1$. Враховуючи ці відхилення, отримуємо

$$\Delta y(t_{10}) = 0,1; \Delta y(t_{20}) = 0,005; \Delta y(t_{11}) = 0,1; \Delta y(t_{12}) = 0,5; \Delta y(t_{22}) = 0,105.$$

Потрібно визначити структуру і параметри невідомої залежності $y(v)$.

Рішення задачі:

а) для G_0 складемо рівняння (1.8)

$$\Delta y(t_{j0}) = \beta_{01}v_i(t_{j0}) + \beta_{02}\Delta v_2(t_{j0}); ;$$

підставивши дані, отримаємо

$$0,1 = \beta_{01} \times 0,1 + \beta_{02} \times 0; \quad 0,005 = \beta_{01} \times 0 + \beta_{02} \times (-0,1);$$

Звідси маємо шукані перші члени ряду (1.7):

$$\beta_{01} = 1; \beta_{02} = -0,05;$$

б) для G_1 :

$$\Delta y(t_{j1}) = \beta_{11}\Delta v_1(t_{j1}) + \beta_{12}\Delta v_2(t_{j2}),$$

звідси $\beta_{11} = 1; \beta_{12} = 0,55;$

в) для G_2 :

$$\Delta y(t_{j1}) = \beta_{21}\Delta v_1(t_{j1}) + \beta_{22}\Delta v_2(t_{j1}),$$

звідси $\beta_{21} = 0,5; \beta_{22} = -1,05;$

г) маючи β_{ir} , можна, згідно з рівнянням (1.10), переходити до знаходження других похідних у (1.7):

$$\left. \frac{\partial y}{\partial v_1} \right|_{v_{r0}} - \left. \frac{\partial y}{\partial v_1} \right|_{v_0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \right|_{v_0} (v_{r01} - v_{01}) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} (v_{r02} - v_{02}),$$

де зліва різниця β_{r1} , $r = 1, 2$, и β_{01} , а $(v_{r0j} - v_{0j})$, $j = 1, 2$ – різниця координат центрів r -й і нульової області.

Аналогічно друге рівняння

$$\left. \frac{\partial y}{\partial v_2} \right|_{v_{r0}} - \left. \frac{\partial y}{\partial v_2} \right|_{v_0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \right|_{v_0} (v_{r02} - v_{02}) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} (v_{r01} - v_{01}).$$

Підставивши дані для першого рівняння, отримаємо систему

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \Big|_{v_0} \times (-1) + \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} \times 0; \\ -0,5 &= \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \Big|_{v_0} \times 0 + \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} \times (-1). \end{aligned} \right\}$$

Її розв'язок відразу вказує (!) на відсутність квадратичної залежності від x_1 :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} = 0; \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} = 0,5.$$

Аналогічно, з другого рівняння

$$\left\{ \begin{aligned} 0,5 &= \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} \cdot 0 + \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} \cdot (-1); \\ -1 &= \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} \cdot (-1) + \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} \times (0); \end{aligned} \right.$$

отримаємо рішення

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} = 1; \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} = 0,5.$$

Отримані значення перших і других похідних підставимо в (1.7). Враховуючи, що $v_0=0$, $y_0=0$, знаходимо оцінку $\hat{y}(v)$ невідомої залежності $y(v)$:

$$\hat{y}(v) = v_1(t) - 0,05v_2(t) + 0,5v_1(t)v_2(t) + v_2^2(t).$$

Оцінка $\hat{y}(v)$ відрізняється від $y(v)$ на несуттєву для області G величину $-0,05v_2(t)$, яка з'явилася внаслідок наближеності обчислення перших похідних.

Не менш ефективний принцип декомпозиції має місце і при описі сигналів. Можна говорити про часове і частотне розбиття сигналів. Часове розбиття можна будувати за різними ознаками, наприклад виділення інтервалів, відповідних статичним і динамічним режимам об'єкта, для незалежного вивчення його статички та динаміки; виділення сильно – і слабозашумлених ділянок записів змінних для оптимального вибору інтервалів і алгоритмів оцінювання сигналів; виділення «інформативних» (в сенсі ідентифікації моделі об'єкта) ділянок записів з некорельованими або ортогональними змінними. Частотне розбиття еквівалентно розкладенню сигналів в ряд Фур'є. Перехід в частотну область дозволить достатньо просто синтезувати оптимальний фільтр Вінера для оцінювання сигналів [34,45]. Сучасна спектральна теорія аналізу і синтезу систем [1] також заснована на розкладанні сигналів і їх функціональних відображень. Розкладання проводиться за системою ортогональних функцій. Декомпозиція сигналів складних коливальних систем дозволяє виділити окремі тони і побудувати для них часткові спрощені моделі літака [8]. Таким чином принцип декомпозиції доцільний на всіх рівнях і для всіх елементів складних систем.

1.3. Принцип узгодженості критеріїв

Для ієрархічної системи управління (рис.1.1) існує хоча б одне значення для елементів множини $\{I, opt I, J, opt J, \Sigma, \beta, I_\phi, opt I_\phi, \Sigma_\phi, \beta_\phi, I_{nn}, opt I_{nn}, \beta_{nn}\}$, за якого головний показник Λ оптимальний, якщо не враховувати витрати на пошук цього значення.

Реальні оптимізаційні задачі не можуть не враховувати ці втрати. Тому релаксаційний процес відшукування абсолютного екстремуму (наприклад, мінімуму) зупиняється на певному етапі, якщо подальший приріст втрат на пошук перевищить зменшення решти частини функціоналу.

При повній відсутності інформації про залежність Λ від елементів множини пошук абсолютного екстремуму виконується методом перебору: з усіх n можливих значень m змінних множини F вибирається m оптимальних значень.

Загальне число кроків РП $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ для реальних значень m і n надмірно велике.

Задача набагато порядків спрощується, якщо кожен з функціоналів $\Lambda, I, \dots, J_{nm}$ оптимізується на підмножині змінних свого рівня: $X, u, \dots, (\Sigma_{nn}, \beta_{nn})$. Це призводить до композиції умовно оптимальних рішень

$$\Lambda^* = \text{extr} \Lambda \Big|_{\substack{x|_{I^* = \text{extr} I} \\ u|_{I^* = \text{extr} I} \\ (\Sigma, \beta)|_{J_\phi = \text{extr} J_\phi} \\ (\Sigma_\phi, \beta_\phi)|_{J_{nn} = \text{extr} J_{nn}} \\ (\Sigma_{nn}, \beta_{nn})|_{\dots}} \quad (1.12)$$

де зліва від кожної вертикальної риски змінна, що оптимізує функціонал «свого» рівня, праворуч – результат умовної оптимізації на нижніх рівнях.

Оптимізаційна задача кожного рівня піддається досить строгій формалізації, що дозволяє інтенсифікувати процес пошуку умовного екстремуму. Проблема розмірності знімається, але залишається проблема ефективності вирішення (1.12).

Щоб процедура (1.12) давала рішення, близьке до абсолютного екстремуму головного функціонала, необхідно забезпечити непротирічність критеріїв $\Lambda, I, \dots, J_{nm}$. Критерії $\Lambda, I, \dots, J_{nm}$ називають *абсолютно узгодженими*, якщо композиція умовних рішень (1.12) призводить до глобального екстремуму Λ . Два сусідніх за рівнями функціонала назовемо *локально несуперечливими*, якщо їх варіації в обмеженій області G простору змінних підсистеми нижнього рівня подібні:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Lambda(u + \delta u) &= k_1 \delta I(u + \delta u); \\ \delta I(\beta + \delta \beta) &= k_2 \delta J(\beta + \delta \beta); \\ \delta J(\beta_\phi + \delta \beta_\phi) &= k_3 \delta J_\phi(\beta_\phi + \delta \beta_\phi); \\ \delta J_\phi(\beta_{nn} + \delta \beta_{nn}) &= k_4 \delta J_{nn}(\beta_{nn} + \delta \beta_{nn}). \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Якщо перетин областей G_i існування змінних i -х рівнів представляє не порожню множину, що включає точку, що визначає глобальний екстремум за Λ , то їх багаторазова послідовна оптимізація від J_{nn} до Λ та назад від Λ до J_{nn} в принципі

дозволяє відшукати глобальний екстремум Λ . Проте досягти його не просто. Пояснюється це тим, що будувати оптимальним чином функціонали зверху вниз неможливо через незнання оптимальних по верхньому функціоналу значень елементів нижніх рівнів. Так, не можна синтезувати функціонал I управління u на об'єкті Σ_∞ не знаючи якою математичною моделлю (Σ, β) він буде описаний, який рівень і вид шумів ϵ в оцінках X_M , отриманих за оцінками підсистеми фільтрації і т. д.

Можна застосувати мінімакський підхід, і будувати I так, щоб для найгіршої моделі (Σ, β) та оцінок X_M сигналу отримати найкраще гарантоване вирішення. Але ж у загальній системі (див. рис. 1.1) є підсистема ідентифікації, яка в результаті оптимізації дасть завжди рішення не гірше гіршого, тому, застосовуючи мінімакський підхід, програємо в оптимальності.

Доцільним є наступний алгоритм побудови локально несуперечливих функціоналів:

1. На підставі апріорної інформації про об'єкт Σ_∞ , головний функціонал Λ і наявних елементах підсистем усіх рівнів, з урахуванням принципу раціонального ускладнення [9] на першому кроці багаторівневого РП приймають найпростіші, що задовольняють апріорно відомим даним, підсистеми первинних перетворювачів оцінювання сигналів X і моделі (Σ, β) і оптимального управління u .

2. Вибрані підсистеми i -го рівня оптимізують методом перебору структур і методом оптимізації за апріорно прийнятим критерієм підсистем $i + 1$ -го рівня: Σ_{nn} по J_Φ , $(\Sigma_\Phi, \text{Opt} J_\Phi)$ по J , $(\Sigma, \text{Opt} J)$ по I , $(\text{Opt} I)$ по Λ . Так як розмірності цих змінних невеликі, то витрати на пошук допустимі. У результаті цієї оптимізації отримуємо оптимальну систему першого наближення.

3. Методами теорії чутливості, або моделювання і планування експерименту [18], проєктують несуперечливі критерії I, J, J_Φ, J_{nn} .

Розглянемо спочатку підхід, заснований на аналітичному обчисленні чутливості функціоналів. Нехай ϵ оптимальна система першого наближення, в якій реальний об'єкт Σ_∞ замінено його моделлю (Σ, β) . Знайдемо варіацію основного функціоналу Λ відносно його екстремального значення $\Lambda^*(u^*)$, викликану варіацією δu оптимального управління об'єктом. Нехай

$$u(t) = u^*(t) + \epsilon \delta u(t), \quad (1.14)$$

де ϵ - мала величина; $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$ - вектор-функція часу t .

Нехай

$$\Lambda(u(t)) = \int_{\theta_1} \lambda(u^*(t) + \delta u(t) \epsilon) dt, \quad (1.15)$$

де \int_{θ_1} - оператор інтегрування на інтервалі θ_1 часу t ; $\lambda(\cdot)$ - скалярна функція векторного аргументу u .

Знайдемо першу варіацію Λ :

$$\delta\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial\varepsilon} = \int_{\theta_1} \frac{\partial\lambda}{\partial\varepsilon} dt = \int_{\theta_1} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \frac{\partial u}{\partial\varepsilon} dt = \int_{\theta_1} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \delta u dt,$$

де

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\lambda}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial\varepsilon} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

Тепер візьмемо другу варіацію:

$$\begin{aligned} \delta^2\Lambda &= \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \frac{\partial\Lambda}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \int_{\theta_1} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \delta u dt = \\ &= \int_{\theta_1} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \cdot \delta u \cdot dt = \int_{\theta_1} \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \delta u \right]^T \frac{\delta u}{\partial\varepsilon} dt, \end{aligned} \quad (1.16)$$

де

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^T \partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_1 \partial u_1} & \dots & \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_1 \partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_m \partial u_1} & \dots & \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_m \partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Якщо Λ визначено на $x(t)$, а не на $u(t)$, то, діючи аналогічно, отримаємо

$$\delta^2\Lambda = \int_{\theta_1} \delta x^T \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^T \partial x} \delta x dt,$$

або

$$\delta^2\Lambda = \int_{\theta_1} \delta u^T \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \delta u dt, \quad (1.17)$$

де

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \delta u,$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \delta u = \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \vdots \\ \delta u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Зіставляючи (1.16) і (1.17), бачимо, що

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^T \partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u}. \quad (1.18)$$

На екстремалі $x^*(t)$, $u^*(t)$ перша варіація дорівнює нулю, друга варіація (1.16) або (1.17) визначає еталонну [дня функціонала $I(u)$] поверхню у функціональному просторі варіацій $\delta u(t)$. Нехай $\delta u(t) = \mathbf{1}(t)$ - одинична вектор-функція від t , тоді (1.17) являє еталонну для I матрицю A_I дійсних чисел

$$\delta^2 \Lambda = A_I = \int_{\theta_2} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u} dt. \quad (1.19)$$

При побудові функціонала I будемо прагнути, щоб аргументи екстремумів Λ та I співпали, а другі варіації були подібні.

Приклад 1.2. Нехай

$$I = \int_{\theta_2} (x^T G x + u^T Q u) dt, \quad (1.20)$$

де G, Q - вагові матриці; θ_2 - інтервал управління.

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} &= \int_{\theta_2} \left[\delta u^T \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G x + x^T G \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \delta u^T Q u + u^T Q \delta u \right] dt, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \varepsilon^2} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} = \int_{\theta_2} \left[\delta u^T \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \delta u^T Q \delta u \right] du = \\ &= \int_{\theta_2} \delta u^T \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} + Q \right] \delta u dt. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Для тих же, що і в (1.19), одиничних варіацій δu функціонал (1.20) буде несуперечливим основному, якщо варіації (1.19) і (1.21) будуть подібними:

$$\int_{\theta_2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} + Q \right] dt = k_1 A_I, \quad (1.22)$$

або в скалярному вигляді

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} \int_{\theta_2} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} dt + \int_{\theta_2} q_{ik} dt = k_1 \alpha_{ik}^1, \quad l, k = \overline{1, m}; \quad (1.23)$$

де k_1 - коефіцієнт подібності; α_{ik}^1 - елемент матриці A в (1.19); g_{ij}, q_{ik} - елементи матриць G і Q відповідно.

Так як A_I симетрична, то загальна кількість рівнянь (1.23) $0,5m(m+1)$, а коефіцієнтів, що необхідно підібрати, g_{ij}, q_{ik} $0,5n(n+1)$ і $0,5m(m+1)$ відповідно. Це дозволяє підбором їх задовольнити $m(m+1)$ вимогам (1.23) несуперечності I до Λ , а також ряду інших вимог, що визначаються системою оптимізації I . При такому підході до побудови функціоналу I істотно полегшується задача [4] завдання матриць G і Q .

Наступний крок полягає в побудові критерію J підсистеми ідентифікації. Нехай на попередньому кроці було отримано несуперечний з Λ функціонал I

(1.20) з ваговими G^* і Q^* , що задовольняють умову (1.23). Знайдемо другу варіацію I вже в просторі параметрів β моделі (Σ, β) і задамо її в якості еталону для функціоналу J :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \varepsilon^2} = \int_{\theta_2} \delta u^T \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G^* \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + Q^* \right] \delta u dt,$$

де

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \beta} \delta \beta, \frac{\partial u}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial u_{r1}}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial \beta_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial u_n}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial \beta_r} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \delta^2 I(\beta) &= \int_{\theta_2} \delta \beta^T \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^T \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G^* \frac{\partial x}{\partial u} + Q^* \right] \frac{\partial u}{\partial \beta} \delta \beta dt = \\ &= \delta \beta^T \left[\int_{\theta_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^T \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \times G^* \frac{\partial x}{\partial u} + Q^* \right] \frac{\partial u}{\partial \beta} dt \right] \delta \beta = \delta \beta^T A_2 \delta \beta. \end{aligned} \quad (1.24)$$

У функціоналі

$$J = \int_{\theta_3} i(\hat{x}, x_M, \alpha) dt \quad (1.25)$$

в точці $\hat{x} = x_M$, що відповідає оцінці $\hat{\beta}$, що дорівнює β , перша варіація J повинна бити рівною нулю, а друга

$$\delta^2 J(\beta) = \delta \beta^T \left[\int_{\theta_3} \left(\frac{\partial x_M}{\partial \beta} \right)^T \frac{\partial^2 i(\alpha)}{\partial x_M^T \partial x_M} \cdot \frac{\partial x_M}{\partial \beta} dt \right] \delta \beta$$

подібна (1.24), тобто:

$$A_3 = \int_{\theta_3} \left(\frac{\partial x_M}{\partial \beta} \right)^T \frac{\partial^2 i(\alpha)}{\partial x_M^T \partial x_M} \cdot \frac{\partial x_M}{\partial \beta} dt = k_2 A_2, \quad (1.26)$$

де A_2 містить $0,5r(r+1)$ різноманітних елементів α_{ij}^2 .

Для того, щоб повністю задовольнити (1.26) функціонал (1.25) повинен містити не менше ніж $0,5r(r+1)$ керованих параметрів α .

Нехай модель (Σ, β) представлено у вигляді

$$x_M(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i W_i(p) u(t), \quad (1.27)$$

де $W_i(p)$ - задані оператори від $p = \frac{d}{dt}$.

Покладемо, що в (1.24)

$$A_2 = \text{diag} \left[\alpha_{ij}^2 \right].$$

З умови (1.26), тобто з умови $k_2 \alpha_{ij}^2 = \alpha_{ij}^3$, знайдемо $u(t)$ і представимо набором ортогональних функцій $\varphi_k(t)$:

$$u(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(t), \quad (1.28)$$

де m – кількість членів $\varphi_k(t)$, що надають адекватне уявлення $u(t)$ на інтервалі ідентифікації $\theta_3 = [0 \ T]$; $\varphi_k(t), k = \overline{1, n}$ – система ортогональних функцій, наприклад \square косинусний ряд

$$\varphi_k(t) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}\frac{\pi}{T}t\right). \quad (1.29)$$

Якщо $J = \int_0^T \varepsilon^2(t) dt$, де $\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x_M(t)$, то в (1.26) елементи

$$\alpha_{ij}^2 = \frac{\alpha_{ij}^3}{k_2} = \int_0^T [W_i(p)u(t)][W_j(p)u(t)] dt.$$

Позначимо

$$W_i(p)u(t) = y_i(t), i = \overline{1, n},$$

де з урахуванням (1.28), (1.29)

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k [W_i(p)\varphi_k(t)] = \sum_{k=1}^m \alpha_k y_{ij}(t);$$

$$y_{ij}(t) = W_i(p)\varphi_k(t).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{ij}^3}{k_2} &= \int_0^T \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k y_{ik}(t) \right) \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k y_{jk}(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q \int_0^T y_{ik}(t) y_{jq}(t) dt = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q y_{ik}, \end{aligned}$$

де $y_{ik} = \int_0^T y_{ik}(t) y_{jq}(t) dt$ розраховується заздалегідь.

Оптимальне значення α знайдемо з умови

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \in R} \left\| \frac{\alpha_{ij}^3}{k_2} - \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q y_{ij}^{kq} \right\|, i, j = \overline{1, n}, \quad (1.30)$$

де всі змінні, крім α , заздалегідь розраховані. Якщо розмірність α дорівнює або більше $0,5 r(r+1)$, то мінімум норми в (1.30) дорівнює нулю і маємо точну подібність варіацій функціоналів J та I .

Аналогічно попереднім, отримавши J і визначивши його варіацію від вектора β_Φ параметрів фільтра, підбираємо показник J_Φ якості фільтра ($\Sigma_\Phi \beta_\Phi$) з умови подібності (1.24), а показник J_{nm} якості первинних перетворювачів – подібним J_Φ , отриманому на попередньому кроці.

Зважаючи на складність аналітичного рішення задачі узгодження функціоналів конструктивним є підхід, що полягає у плануванні експерименту.

Створення систем автоматизованого проектування (САПР) критеріїв ієрархічних систем при наявності відповідного математичного забезпечення істотно полегшує задачу. На ЕВМ послідовно імітуються підсистеми двох суміжних рівнів, починаючи з верхнього; здійснюється експеримент, направлений на визначення других варіацій функціоналів відносно їх екстремального

значення; формується додатковий функціонал [типу (1.30)], що визначає близькість (подібність) других варіацій заданого (верхній рівень) і синтезованого (нижній) функціоналів; додатковий функціонал оптимізується шляхом підстроювання параметрів підсистеми нижнього рівня. Для скорочення варіантів доцільно застосовувати оптимальні плани експерименту [14,18].

Якщо експеримент виконується для дослідження області екстремуму функціоналу, то при відомому значенні екстремуму, для визначення тільки других варіацій, необхідно і достатньо виконувати «зірковий експеримент», що полягає в почерговому відхиленні на величину «зоряного плеча» $\pm\alpha$ кожному зі змінних, по яким знаходиться друга варіація функціонала; якщо координати екстремуму функціоналу невідомі, то оптимальним експериментом, з метою побудови квадратичної моделі виду

$$y(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2 \quad (1.31)$$

буде центральний композиційний план Бокса [18]. Цей план можливо зробити ортогональним. Нормовані змінні моделі (1.31) приймають п'ять значень - 0, +1, -1, + α , - α . План експерименту містить:

1) повний факторний – експеримент 2^n або дробні репліки (якщо $n \gg 5$) [18];

2) «зірковий план»;

3) точку в центрі плану (всього N експериментів).

Для побудови ортогонального плану модель (1.31) перетворюють до виду

$$y(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \tilde{x}_i^2, \quad (1.32)$$

де

$$b_0 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2, \tilde{x}_i^2 = x_i^2 - c, c = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_i^2(k),$$

k - номер досліджу.

Нові змінні \tilde{x}_i^2 будуть зміщуватися на значення $-c$. Це дозволить підібрати α так, щоб всі стовбці матриці експерименту були попарно ортогональні.

Наприклад, для $n = 3$ та моделі (1.31) матриця плану Боксу представлена в табл. 1.2, де $c = (1/15) 2 \sum_{k=1}^{15} x_i^2(k) = (8 + 2\alpha^2)/15$ для будь-якого i .

«Зоряне плече» α підбирають згідно табл. 1.2 з умови ортогональності \tilde{x}_i^2 :

$$\sum_{k=1}^N \tilde{x}_i^2(k) \tilde{x}_j^2(k) = 8(1-c)^2 - 4c(\alpha^2 - c) + 3c^2 = 0.$$

Підставивши сюди вирази для c , отримаємо

$$\alpha = \sqrt{30} - 4 \approx 1,5, c \approx 0,83.$$

Внаслідок взаємної ортогональності коефіцієнти $b_0, \alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{jj}$, моделі (1.36) визначають за методом найменших квадратів незалежно.

Від цих коефіцієнтів легко перейти до коефіцієнтів моделі (1.31), а від неї до моделі з ненормованими змінними. Для цього α_j - ділять на модуль кроку варіювання i -ї змінної, α_{ij} - на добуток цих модулів j -ї та i -ї змінної, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

При наявності моделей (1.31) функціоналів підсистем верхнього і нижнього рівнів нижній конструюють по верхньому шляхом варіювання структури і параметрів нижньої підсистеми з умови мінімуму додаткового функціонала різниці коефіцієнтів $\alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{ii}$ моделей (1.31) двох рівнів. Тут також можна досягти скорочення числа різних варіантів, застосовуючи методіку планування експерименту для побудови моделі залежності цього додаткового функціоналу від структур і параметрів підсистем нижнього рівня. Узгодивши критерії підсистем усіх рівнів та оптимізувавши їх, одержимо оптимальну систему другого наближення. Повторивши для неї процедуру узгодження критеріїв і оптимізувавши їх, отримаємо третє наближення. Процес узгодження припиняється, якщо результати подальших ітерацій мало відрізняються.

Таблиця 1.2

Вид плану	Нормовані змінні $X(k)$										
	X_0	X_1	X_2	X_3	X_2	X_1X_3	X_2X_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	$y(k)$
	1	.1	-1	-1	1	1	1	1-c	1-c	1-c	$y(1)$
	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1-c	1-c	1-c	$y(2)$
	1	.1	1	-1	-1	1	-1	1-c	1-c	1-c	$y(3)$
	1	1	1	-1	1	-1	-1	1-c	1-c	1-c	$y(4)$
1	1	.1	-1	1	1	-1	-1	1-c	1-c	1-c	$y(5)$
	1	1	-1	1	-1	1	-1	1-c	1-c	1-c	$y(6)$
	1	.1	1	1	-1	-1	1	1-c	1-c	1-c	$y(7)$
	1	1	1	1	1	1	1	1-c	1-c	1-c	$y(8)$
	1	$-\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2 - c$	$-c$	$-c$	$y(9)$
	1	α	0	0	0	0	0	$\alpha^2 - c$	$-c$	$-c$	$y(10)$
2	1	0	$-\alpha$	0	0	0	0	$-c$	$\alpha^2 - c$	$-c$	$y(11)$
	1	0	α	0	0	0	0	$-c$	$\alpha^2 - c$	$-c$	$y(12)$
	1	0	0	$-\alpha$	0	0	0	$-c$	$-c$	$\alpha^2 - c$	$y(13)$
	1	0	0	α	0	0	0	$-c$	$-c$	$\alpha^2 - c$	$y(14)$
	1	0	0	0	0	0	0	$-c$	$-c$	$-c$	$y(15)$

Забезпечення несуперечності критеріїв теоретично або імітаційним моделюванням на ЕВМ певною мірою наблизить задачу умовної оптимізації до задачі знаходження найкращого рішення (визначення глобального екстремуму головного критерію L).

1.4. Композиція підсистем різних рівнів в єдину систему

Третім, завершальним, етапом розробки близьких до оптимальних по Λ структури і алгоритмів функціонування багаторівневої системи оптимізації, є етап композиції (сполуки) окремих підсистем в єдиний комплекс.

Сформульовані визначення системи, релаксаційних процесів, принципу раціонального ускладнення [43] дозволяють окреслити коло основних підходів до проблеми композиції:

- впорядкування елементів множин моделей і методів оптимізації;
- вибір оптимальної системи першого наближення;
- організація релаксаційних процесів ускладнення і вдосконалення окремих елементів систем і, можливо, структури самої системи, починаючи з оптимальної системи першого наближення і закінчуючи оптимальною за Λ .

Впорядкування елементів підсистем реалізується проекторами Pr , звужуючими на першому кроці початкову множину елементів до підмножин допустимих, а потім до підмножин претендентів на оптимальні елементи. Наприклад, допустимими при неповній спостережуваності об'єкта Σ_∞ є методи нелінійної ідентифікації, які не потребують повної спостережуваності Σ_∞ . На першому рівні проекторів Pr_1 виділяють ті елементи (методи і моделі), які можуть бути застосовані в даній ситуації, яка визначається сигналами \hat{u}, \hat{x} , що спостерігаються, і заданими критеріями J_ϕ, J, I, Λ . Тут проектори є багатовимірними дискримінаторами, що пропускають на вихід ті елементи, властивості яких повністю узгоджуються з факторами, що визначають реальну ситуацію. На другому рівні проектори Pr_2 виділяють два-три претенденти на оптимальність. Для цього в проекторі Pr_2 для кожного елемента закладені регресійні залежності відповідних критеріїв $\hat{J}_\phi, \dots, \hat{\Lambda}$ (якщо критерії апріорі реалізувати не можна) від кількісно розрахованого вектора факторів θ , який характеризує конкретну ситуацію.

Для елементів-методів лінійного оцінювання чинниками є співвідношення сигнал-шум по амплітуді і ширині спектрів, кореляційність сигналів, наближеність моделі (величина кінцевої помилки апроксимації) і т. п. Визначивши в просторі цих факторів кілька найбільш характерних для практики регресійного аналізу областей, далі для кожної області будують регресійну залежність відповідного критерію J_ϕ, \dots, Λ , або його оцінки $\hat{J}_\phi, \dots, \hat{\Lambda}$ від θ . Тоді проектор Pr_1 визначає область, а Pr_2 - для кожного елемента значення критерію для конкретного θ , що належить цій області. Задача побудови проекторів відноситься до етапу проектування і вимагає тим більших витрат, чим точніше проектори і ширше області та розмірності факторів θ .

Вибір оптимальної системи першого наближення було описано вище. Основним процесом на цьому етапі є організація структури системи.

Розглянемо варіант структури системи оптимізації J – систему ідентифікації. У \square табл. 1.1 структурно систематизовані підсистеми ідентифікації від найпростішої до такої, що \square самоорганізується: для створення підсистеми ідентифікації в багаторівневій системі оптимізації Λ (якщо Σ^* і Opt^* апріорно незалежні) з \square табл. 1.1 в якості допустимої приймаємо структуру БАСІ. Для цієї системи ідентифікації, на відміну від більш простих, характерна замкненість по

основному (для неї) критерію I і \square неєдиничність елемента Σ (як для бази). Складемо функціональну схему БАСІ, визначивши її взаємозв'язок з підсистемами верхніх і нижніх рівнів (рис. 1.3). Характерні частини системи (підсистеми) обведено пунктиром і пронумеровано: 1 – оптимізація Λ , 2 – оптимізація I , 3 – оптимізація J , що доповнює найпростішу систему ідентифікації (частина 4) до багатократно адаптивної (частини 3 і 4), 5 – оптимізація J_ϕ .

Частина 4 системи містить функціонал I_{qk} , який задається вище, модель Σ_{qk} з вектором β_{qkn} , параметрів, що налаштовуються, оптимізатор (Opt_{qk}, α_{qk}). Тут реалізується РП $\{\beta_{qkn}\}, n = 1, 2, \dots$, щодо I_{qk} за допомогою оптимізатора Opt_{qk}, α_{qk} . Після закінчення РП інформація про оптимальні за I_{qk} структурі Σ_{qk} і векторі β_{qk} параметрів моделі надходить в підсистеми верхніх рівнів.

Частина 3 містить три множини $\{\Sigma_{qk_1}\}, \{Opt_{qk_1}\}, \{I_{qk_1}\}$; проектори першого рівня Pr_1 , що звужують ці множини до підмножин $\{\Sigma_{qk}\}, \{Opt_{qk}\}, \{I_{qk}\}$ допустимих елементів; проектори Pr_2 другого рівня, що вибирають з числа допустимих претенденти на оптимальні елементи. Для конкретного виду I_q потрібного значення I_{qk} , що задається вище, проектори Pr_1, Pr_2 задають елементи $I_{qk}, \Sigma_{qk}, Opt_{qk}, \alpha_{qk}$ частини 4, де в результаті РП $\{\beta_{qkn}\}$ отримують оптимальна по I_{qk} модель $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$. У підсистемі частини 2 на реальному об'єкті Σ_∞ або його моделі $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$ оцінюється значення критерію I_{qk} для k -й структури БАСІ, і якщо воно не задовольняє необхідному, то в одному з проекторів Pr_2 відбувається зміна претендента. Знову повторюється процес $\{\beta_{qkn}\}$ і так до виконання умови, що I_{qk} буде не гірше необхідного, або до закінчення процесу перебору всіх претендентів.

При зміні I_{qk} в частинах 4 та 5 можливі зміни структури і параметрів підсистеми нижнього рівня. У частинах 3 та 4 має місце композиція двох РП $\{\beta_{qkn}\}$ по n і $\{I_{qk}\}$ по k , що відповідає визначенню БАСІ.

Частина 2 містить реальний об'єкт Σ_∞ , його оптимізатор $Opt_u I_q$, множину $\{I_q\}$ і проектор Pr , що визначає (на основі значень I_{qk} і Λ) вид I_q критерію I_{qk} . Сигнал x з виходу об'єкта Σ_∞ надходить в підсистему нижнього рівня, з виходу якої його оцінка \hat{x} потрапляє в системи ідентифікації і управління. Оптимізатор $Opt_u I_{qk}$ на основі інформації $\Sigma_{qk}, \beta_{qk}, I_{qk}, \hat{x}$ виробляє керуючий вплив u , що надходить на об'єкт або його модель (на стадії пошуку оптимальних елементів системи). Якщо після закінчення РП $\{\beta_{qk}\}$ по k оптимальне значення I_q не задовольняє систему частини 1, то з системи верхнього рівня може надійти команда в проектор Pr на зміну по q виду функціоналу I_q . Крок по q призводить до повторення кроків по k , а k по n в МАСІ, тобто в частинах 1-4 має місце композиція з трьох РП, що відповідає визначенню самоорганізуючої системи (СС) (табл.1.1).

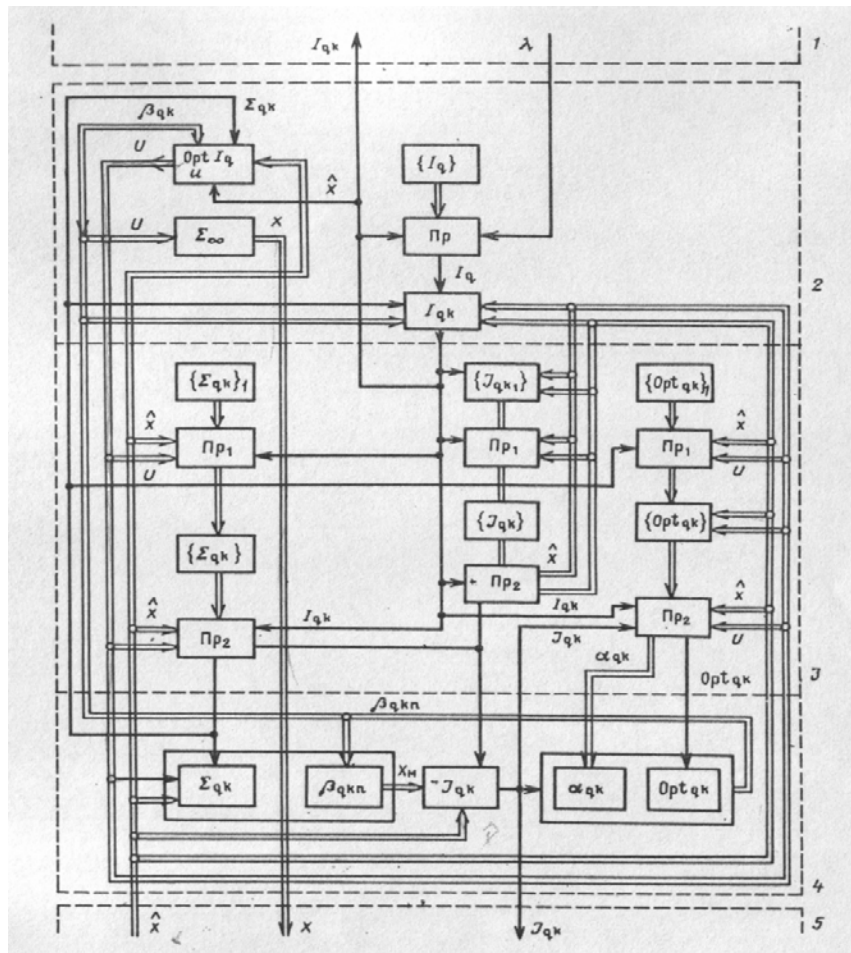


Рис.1.3 Функціональна схема багатократно адаптивної підсистеми ідентифікації

Глибокий зворотній зв'язок за критеріями від Λ до I , від I до J , від J до J_ϕ , оптимізуючий і цілеорієнтуєуючий структуру і параметри підсистеми всіх рівнів, здійснює регуляризацію рішення в широкому сенсі.

Багатократно адаптивні системи ідентифікації мають більш широкі можливості регуляризації в порівнянні зі звичайними. Ефективність БАСІ очевидна настільки, наскільки очевидна нерівність

$$\inf I_q(\Sigma, Opt, \alpha, u) \Big|_{\beta = \arg \min J} < \inf I_q(u) \Big|_{\substack{\Sigma = const \\ (Opt, \alpha) = const \\ \beta = \arg \min J}} \quad (1.33)$$

де права частина відповідає системам мінімізації I_q зі звичайним ідентифікатором (тільки частина 4 схеми на рис. 1.3), а ліва – системам з БАСІ- ідентифікатором (частини 2, 3, 4). Якщо I_q не враховує втрат на пошук $\inf I_q$ (як у прикладі прогнозу), то нерівність строга. Якщо враховує, то для великої розмірності елементів Σ, Opt, α і поганий їх впорядкованості проекторами Pr_1, Pr_2 нерівність може не виконуватися. У таких системах порушено принцип раціонального ускладнення. Ускладнення (розширення розмірності елементів) багаторівневої системи з БАСІ-ідентифікатором повинно бути таким, щоб нерівність (1.33) не послаблювалася, а посилювалася. Тільки таке ускладнення доцільне.

Глава 2. Базова модель реальних процесів та похідні від неї моделі

2.1. Базова математична модель реальних процесів

Процеси, що протікають у часі в реальних матеріальних об'єктах, підлягають фундаментальним закономірностям природи. Як уже говорилось в главі 1:

- усі процеси і їх елементи, як частка матерії, не можуть бути абсолютно автономними, все з усім взаємопов'язано;
- внаслідок нескінченості матеріального світу і безпосереднього чи опосередненого взаємозв'язку його складових, в реальних об'єктах не існує стану абсолютного спокою (статики), всі об'єкти динамічні;
- присутність інерційності (наприклад, маси в механічних об'єктах) і реальна обмеженість потужності керуючих впливів на об'єкт не допускають миттєвої зміни у часі будь-якої координати об'єкту реального світу, тобто всі змінні стану об'єкта – гладкі функції часу;
- у природі не існує двох чи більше абсолютно однакових об'єктів, тому усереднення по множині начебто однакових об'єктів не призводить до точного визначення їх характеристик чи коефіцієнтів, бо для кожного конкретного об'єкта вони свої;
- точно також \square нестационарність процесів у реальних об'єктах не дає можливості коректно використати усереднення у часі (теорема Чебишева про великі числа на практиці виконується лише наближено: так підкидаючи монету безліч разів ми будемо від тертя пальців об неї змінювати її геометрію і, як наслідок, поточне середнє значення відношення “орел-решка”);
- загальний взаємозв'язок об'єктів і їх природна нескінченість не дають можливості побудувати точну \square кінцевомірну модель будь-якого процесу; тобто всі моделі наближені, а задача дослідника полягає лише у виборі з них найкращої для конкретного застосування (прогнозу, керування, контролю внутрішніх параметрів та ін.).

Згідно до фундаментальної теореми Калмана [7], враховуючи гладкість реальних процесів, можна стверджувати наступне:

“Для гладких систем, перехідна функція яких є відображенням $T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$, водночас вона є також рішенням диференційного рівняння:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (2.1)$$

\dot{x} - похідна від x у часі t , T - упорядкована множина моментів часу t , Ω - множина вхідних впливів, X - множина станів, $x \in X$, $u \in \Omega$, $t \in T$ ”.

Таким чином будь-який процес, що протікає в часі t_0 , у реальному світі, може бути представлено моделлю (2.1) точно (якщо мірність x, u прямує до нескінченості) і наближено, якщо їх мірність кінцева. Доповнимо, що процес може бути представлено також рішенням $x(t)$ системи (2.1) – це пряма задача

моделювання; або, якщо мається експериментально отримана залежність $x(t)$, $u(t)$, а слід визначити функцію f (параметрично або не параметрично), то маємо зворотну задачу – задачу ідентифікації відображення f по замірах $x(t)$ і $u(t)$. В найпростішому випадку, не відшукуючи взаємозв'язку компонент $x_i(t)$, $x_j(t)$, $i, j = \overline{1, n}$, $x_i(t)$ з $u_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, будують залежність $x(t)$, як функцію t чи попередніх у часі значень $x(t)$ (це, як правило, поліноміальні і авторегресійні □ моделі).

Зрозуміло також, що (внаслідок гладкості процесів) для кінцевих значень відхилень ΔX , ΔU , Δt і допустимої похибки ε апроксимації нелінійна нестационарна модель (2.1) може бути представлена лінійною стаціонарною системою:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t), \quad (2.2)$$

де x , \dot{x} , u – відхилення від базового режиму, $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, $u(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$, $A_1 = [a_{ij}]_{j=1, n}^{i=1, n}$, $B_1 = [b_{ik}]_{k=1, m}^{i=1, n}$.

Для зворотної задачі виміри x і u збурені поміхою $N(t)$, яка (на обмежених мирностях X , U і інтервалу T_1 часу t) розглядається як випадковий процес. Присутність $N(t)$ обумовлює складність зворотної задачі: чим простіша модель (менші n і m), тим більша похибка ε апроксимації нею реального процесу; але, чим складніша (потенційно більш точна) модель (2.2), тим більше мірність ($n + m$) порядкове оцінюємих у зворотній задачі коефіцієнтів a_{ij} , b_{ij} , гірше обумовленість інформаційної матриці [1], і, як наслідок, гірше коректність рішення зворотної задачі: малі збурення $N(t)$ у вимірах $x(t)$, $u(t)$ призводять до великих похибок δA , δB в оцінюванні коефіцієнтів матриць A і B моделі (2.2).

Далі скористаємося властивістю **гладкості** для більш точного вирішення прямих (моделювання) і зворотних (ідентифікації) задач. З метою запобігання вказаної некоректності вирішення зворотної задачі, скористаємося принципами **декомпозиції** та коректної **композиції** при побудові математичних моделей реальних процесів. Для цього нескінченно велику кількість взаємопов'язаних гіпотетичною моделлю (2.1) змінних x , u розподілимо на:

– суттєві x_1 , u_1 , для вирішення головної задачі, заради якої будеється модель (мірність їх невелика);

– решта змінних x_2 , u_2 , що в свою чергу поділяються на змінні $x_2^{сч}$, $u_2^{сч}$, що мають смугу спектра частот близьку до смуги x_1 , u_1 (СЧ – середня частота), але несуттєву по відношенню до x_1 , u_1 амплітуду (потужність, дисперсію, ...), і

змінні, частотний спектр яких пролягає на осі частот вище $(x_1^{\text{ВЧ}}, u_1^{\text{ВЧ}})$ або нижче $(x_1^{\text{НЧ}}, u_1^{\text{НЧ}})$ середньої смуги частот суттєвих змінних x_1, u_1 .

Тоді для спрощеної моделі (2.2) невраховані змінні $x_2^{\text{СЧ}}, u_2^{\text{СЧ}}$ створюють систематичну похибку $\varepsilon_c(t)$ у визначенні коефіцієнтів матриць A_1 і B_1 , так як змінні $x_2^{\text{СЧ}}, u_2^{\text{СЧ}}$ можна представити в базисі x_2, u_2 і ортогональній добавці $x_2^0(t), u_2^0(t)$: $x_2^{\text{СЧ}} = k_1 x_1(t) + k_2 x_1^0(t), u_2^{\text{СЧ}} = k_3 u_2(t) + k_4 u_2^0(t)$. Звідси витікає, що при ідентифікації замість шуканих матриць A_1, B_1 , отримаємо їх зміщені на k_1, k_3 оцінки: $\hat{A}_1 = A_1 + k_1, \hat{B}_1 = B_1 + k_3$. Але задачам моделювання та прогнозу це не завадить. Навпаки оцінки \hat{A}_1, \hat{B}_1 враховують вплив неврахованих до моделі змінних, що корелюють з включеними.

Невраховані низькочастотні складові $x_2^{\text{НЧ}}, u_2^{\text{НЧ}}$, які мають місце в нелінійній моделі (2.1), повільно переводять відображаючу точку $\{x, u\}$ в просторі $\{X \times U\}$, точку розкладання (2.1) в ряд (2.2), з одного значення в інше, повільно змінюючи у часі значення матриць A_1, B_1 , як похідних від базової \square нелінійності f моделі

$$(2.1): [a_{ij}] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i,j=1,\overline{n}}; [b_{ie}] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_e} \right]_{i,e=1,\overline{m}}. \text{ Вони створюють похибку } \varepsilon_{\text{н}}(t) \text{ від}$$

\square нестационарності коефіцієнтів матриць A_1, B_1 , які на обмеженому інтервалі T_k часу t приймаються, як стаціонарні: $\hat{A}_1 \neq A_1(t); \hat{B}_1 \neq B_1(t)$. Але, шляхом визначення $\hat{A}_{1k}, \hat{B}_{1k}$ для окремих обмежених у часі інтервалів T_k і подальшої апроксимації $\hat{A}_{1k}, \hat{B}_{1k}$ на весь інтервал T , що складається з \square підінтервалів T_k , можна досить коректно отримати нестационарну модель (2.2) на основі композиції часткових моделей зі сталими матрицями $\hat{A}_{1k}, \hat{B}_{1k}$.

Нарешті вплив високочастотних складових $x_2^{\text{ВЧ}}, u_2^{\text{ВЧ}}$, шляхом допустимого для смуги спектру основних змінних x_1, u_1 , усереднення (фільтрації), може бути суттєво зменшений, як в прямій, так і в зворотній задачах (відповідно задачам моделювання і ідентифікації).

Об'єднаємо невраховані в (2.2) змінні $x^{\text{НЧ}}(t), u^{\text{НЧ}}(t), x^{\text{СЧ}}(t), u^{\text{СЧ}}(t), x^{\text{ВЧ}}(t), u^{\text{ВЧ}}(t)$, які входять в гіпотетичне точне рівняння (2.1) з невідомими кінцевого значення коефіцієнтами, в одну змінну-залишок $\varepsilon(t)$. Позначимо також множину (X, U) через z , матриці (A, B) через C , \dot{x} через y . Тоді замість наближеного рівняння (2.2) маємо гіпотетичне точне

$$y = z \cdot C + \varepsilon \quad (2.3)$$

Звідси МНК-оцінка \hat{C} [35] матриці C

$$\hat{C} = (z^T z)^{-1} z^T (y - \varepsilon) \quad (2.4)$$

буде складатись з шуканого точного значення

$$C = (z^T z)^{-1} z^T y \quad (2.5)$$

і похибки

$$\Delta C = -(z^T z)^{-1} z^T \varepsilon, \quad (2.6)$$

де скалярний добуток $z^T \varepsilon$ буде ненульовим для неортогональних з z складових ε (це x^{cu} і u^{cu}). Низькочастотні складові будуть ортогональні до z , якщо z спочатку відцентрувати, тобто взяти

$$z^0 = z - \bar{z}, \quad (2.7)$$

де \bar{z} – середнє для інтервалу T значення z . Тоді $\langle z^0 \cdot (x^{hc}, u^{hc}) \rangle \equiv 0$, так як x^{hc} і u^{hc} на інтервалі T можна вважати сталими. Високочастотні складові ортогональні до z і будуть впливати лише на дисперсію МНК-оцінки \hat{C} [2]:

$$\text{cov}\{\hat{C}\} = (z^T z)^{-1} z^T Q z (z^T z)^{-1}. \quad (2.8)$$

Якщо вважати x^{bc} , u^{bc} “білим шумом”, то коваріаційна матриця Q перетвориться в діагональну:

$$\text{cov}\{\hat{C}\} = \sigma^2 (z^T z)^{-1}, \quad (2.9)$$

де σ^2 – дисперсія “білого шуму”.

Враховуючи загальний взаємозв’язок змінних, можна стверджувати, що при збільшенні мирностей n і m , а для z – $(n+m)$ функціонального простору змінних $z(t)$, буде погіршуватися умова лінійної незалежності складових $z(t)$ і, як наслідок, збільшуватися норма зворотної матриці $(z^T z)^{-1}$. Це призводить до зростання коваріації (2.9) оцінок (2.5). Але, чим більше мірність $(n+m)$ моделі (2.3), тим більше враховано змінних, тим менше залишок ε і, як наслідок σ^2 в (2.9). Тож можна стверджувати, що в ряду упорядкованих по складності (мірності $n+m$) моделей існує оптимальна за умови мінімуму норми коваріаційної матриці (2.8) чи (2.9) [37].

2.2. Дискретні у часі математичні моделі, що точно або наближено відповідають базовій неперервній моделі (2.2)

Як природна для реальних процесів неперервність у часі, так природна для реальних вимірів цих процесів дискретність у часі. Тож виникає задача: як по дискретним у часі вимірам $x(k), u(k)$, $k = 0, 1, \dots, M$, знаючи постійний Δt чи змінний $\Delta_k t$ у часі крок, встановити неперервну залежність (2.2). Окремим питанням стоїть задача зробити це так, щоб якомога менше впливали на її вирішення збурення $N(k)$.

Однозначний перехід від неперервної моделі (2.2) при початкових умовах $x(0) = x_0$ до дискретної

$$x(t_{k+1}) = Ax(t_k) + Bu(t_k), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.10)$$

може бути отримано через рішення системи (2.2) для дискрет t_k часу t :

$$x(t_k) = \Phi(t_k - t_0)x(t_0) + \int_0^{t_k} \Phi(t - \tau)B_1u(\tau)d\tau, \quad (2.11)$$

де $\Phi(\cdot)$ – перехідна матриця системи (2.2), яка дорівнює [16]

$$\Phi(t) = e^{tA_1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_1^k \frac{t^k}{k!}, \quad (2.12)$$

або через перетворення Лапласа $X(s) = (s \cdot I - A_1)^{-1}x(t_0) + (s \cdot I - A_1)^{-1}Bu(s)$, звідки

$$\Phi(t - t_0) = Z^{-1}[(sI - A_1)^{-1}], \quad (2.13)$$

де s – змінна Лапласа, Z^{-1} – зворотне перетворення Лапласа.

У випадку вирішення зворотної задачі сигнал $u(\tau)$ в (2.4) представлено вибіркою вимірів $u(\tau_k)$, які (для обчислення $x(t_k)$ в (2.4)) слід апроксимувати аналітичною залежністю. Тоді рішення (2.4) можна отримати аналітично. Як буде показано нижче, в багатьох випадках вирішення зворотної задачі, крок Δt зсуву у часі змінних різницевого рівняння (2.10) більше кроку Δt дискретності вимірів. Представимо в межах кроку Δt експериментальну залежність $u(\tau)$ степеневим поліномом, наприклад, третього порядку:

$$u(\tau) = \alpha\tau^3 + \beta\tau^2 + \gamma\tau + \delta, \quad (2.14)$$

де $\tau \in [0, \Delta t]$. Якщо залежність простіша, то частина коефіцієнтів буде нульовою.

Згідно до скалярного запису метода найменших квадратів

$$R_k = \sum_{j=0}^n u(\tau_j) \cdot \tau_j^k, \quad k = 0, 1, 2, 3;$$

$$\alpha = D^{-1} \sum_{k=0}^3 A_{k3} \cdot R_k, \quad \beta = D^{-1} \sum_{k=0}^3 A_{k2} \cdot R_k,$$

$$\gamma = D^{-1} \sum_{k=0}^3 A_{k1} \cdot R_k, \quad \delta = D^{-1} \sum_{k=0}^3 A_{k0} \cdot R_k,$$

$$D = \det \begin{bmatrix} n+1 & \sum_{j=0}^n \tau_j & \sum_{j=0}^n \tau_j^2 & \sum_{j=0}^n \tau_j^3 \\ \sum_{j=0}^n \tau_j & \sum_{j=0}^n \tau_j^2 & \sum_{j=0}^n \tau_j^3 & \sum_{j=0}^n \tau_j^4 \\ \sum_{j=0}^n \tau_j^2 & \sum_{j=0}^n \tau_j^3 & \sum_{j=0}^n \tau_j^4 & \sum_{j=0}^n \tau_j^5 \\ \sum_{j=0}^n \tau_j^3 & \sum_{j=0}^n \tau_j^4 & \sum_{j=0}^n \tau_j^5 & \sum_{j=0}^n \tau_j^6 \end{bmatrix},$$

Тут A_{ks} , $k, s = 0, 1, 2, 3$ – алгебраїчні доповнення матриці $[D]$.

Матричний запис (2.11) векторного процесу $x(t_k)$ є сумою скалярних процесів, які (залежно від мірності матриці A_1) являють собою рішення типових диференційних рівнянь відповідного порядку. Розглянемо впорядковану по складності низку таких рівнянь та їх аналітичних рішень. Приймаючи оператор $\frac{d}{dt}$ як p , маємо:

$$px_1(\tau) = b_0\hat{u}(\tau), \quad (2.15)$$

$$(p + a_0)x_2(\tau) = b_0\hat{u}(\tau), \quad (2.16)$$

$$(p + a_0)x_3(\tau) = (b_1p + b_0)\hat{u}(\tau), \quad (2.17)$$

$$(p^2 + a_1p + a_0)x_4(\tau) = b_0\hat{u}(\tau), \quad (2.18)$$

$$(p^2 + a_1p + a_0)x_5(\tau) = (b_1p + b_0)\hat{u}(\tau), \quad (2.19)$$

$$(p^2 + a_1p + a_0)x_6(\tau) = (b_2p^2 + b_1p + b_0)\hat{u}(\tau), \quad (2.20)$$

де $\hat{u}(\tau)$ відповідає (2.14). Аналітичні рішення рівнянь (2.15)–(2.20) наведено в додатку А.

Для сталого кроку Δt , такого що з достатньою точністю матрична експонента e^{tA_1} в рівнянні (2.5) може апроксимуватися лінійним членом ряду $\sum_{k=0}^{\infty} A_1^k \frac{t^k}{k!}$, або інакше кажучи похідна $\dot{x}(t_k)$ може бути замінена на відносну різницю $[x(t_{k+1}) - x(t_k)] \cdot \Delta t^{-1}$, диференційне рівняння (2.2) переходить в різницеве (2.10) безпосередньо, де $A \cong I + \Delta t \cdot A_1$, $B \cong I + \Delta t \cdot B_1$.

В сучасних задачах моделювання та прогнозування найбільш поширеними є розглянуті в наступних розділах такі дискретні моделі:

- авторегресивні (АР);
- авторегресія з ковзним середнім (АРКС);
- авторегресія з інтегрованим ковзним середнім (АРІКС);
- авторегресійна умовно гетероскедастична модель (АРУГ);
- узагальнена АРУГ (УАРУГ).

Окрім цих моделей в роботі отримані і використані для прогнозування часових рядів комбіновані моделі: аперіодичний тренд апроксимоване ступеневим поліномом (рядом Тейлора), коливальні складові – □ авторегресією (СПАР).

2.3. Визначення структури нелінійного оператора f моделі (2.1) шляхом композиції локальних моделей (2.2) в глобальну

Позначимо змінні (x, u, t) , що є аргументом вектор-функції f в (2.1), через β , \dot{x}_i через J . Тоді для i -го рядка системи (2.1) \dot{x}_i від x, u, t буде представлено у вигляді $J(\beta)$. Далі, як відомо з теореми Вейерштраса, будь-яка гладка залежність $J(\beta)$ може бути представлена рядом Тейлора і, якщо область β обмежена, а ряд нескінченний, то таке представлення точне:

$$J(\beta) = J(\beta_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta_0} \Delta \beta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \Big|_{\beta_0} \Delta \beta_i \Delta \beta_j + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \Big|_{\beta_0} \Delta \beta_i \Delta \beta_j \Delta \beta_k + \dots \quad (2.21)$$

де β_0 – глобальний центр розкладання, $\Delta \beta = \beta - \beta_0$.

Окрім глобального центру β_0 області G введемо (згідно до можливостей експерименту) ряд локальних центрів β_{0_r} ($r = \overline{1, m}$) обмежених підобластей G_r . Розмір G_r обирається за умови, щоб з похибкою δ , яка не перебільшує допустиму, залежність $J(\beta)$ в цій підобласті апроксимувалася лінійною частиною розкладання (2.21), а відстань між центрами сусідніх підобластей була такою, що $J(\beta)$ на множині сусідніх підобластей апроксимувалася з точністю до δ лінійно-квадратичною складовою ряду (2.21). Аналогічно, щоб відстані між центрами груп сусідніх областей задовольняли умові апроксимації першими трьома членами ряду (2.21) і так далі. Таким чином, відбувається поступове збільшення розмірів області і, відповідно, порядку поліному (2.21). При цьому на p -му кроці ($p = 1, 2, \dots$) автоматично відкидаються складові ряду, для яких коефіцієнти $\frac{\partial^p J}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_n} \Big|_{\beta_{0_p}}$ несуттєві. Такий підхід дає можливість на кожному кроці визначити

кінцеву множину коефіцієнтів α , користуючись лише лінійною моделлю

$$\Delta y = \alpha \cdot \Delta \beta, \quad (2.22)$$

де – для локальних r -тих підобластей \square

$$\Delta y = \Delta J, \quad \alpha \cong \frac{\partial J}{\partial \beta} \Big|_{\beta_{0_r}}, \quad \Delta \beta = \beta - \beta_{0_r}; \quad (2.23)$$

– для збільшення області шляхом об'єднання сусідніх підобластей \square

$$\Delta y = \frac{\partial J}{\partial \beta} \Big|_{\beta_{0_p}} - \frac{\partial J}{\partial \beta} \Big|_{\beta_{0_r}}, \quad \alpha \cong \frac{\partial^2 J}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta_{0_r}}, \quad \Delta \beta = \beta_{0_p} - \beta_{0_r}, \quad p \neq r; \quad (2.24)$$

і так далі. Дійсно, для локальних сусідніх r -тих підобластей перша похідна від J по β в (2.21) наближено дорівнює

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \beta_j} \right|_{\beta_{0p}} \cong \left. \frac{\partial J}{\partial \beta_j} \right|_{\beta_{0r}} + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right|_{\beta_{0r}} (\beta_{i0p} - \beta_{i0r}), \quad (2.25)$$

звідки витікає залежність (2.24);

– для збільшення сусідніх областей

$$\left. \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right|_{\beta_{0k}} \cong \left. \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right|_{\beta_{0r}} + \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^3 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \right|_{\beta_{0r}} (\beta_{i0k} - \beta_{i0r}), \quad (2.26)$$

і так далі. Якщо в якомусь l -му напрямку якась p -та похідна близька до нуля, то відповідний член ряду (2.21) відкидається ще під час визначення коефіцієнтів α лінійної моделі (2.22). Тобто, шукана структура поліному (2.21) знаходиться автоматично без перебору всіх можливих варіантів. Коефіцієнти α отриманого таким чином поліному можуть бути уточнені за умови мінімізації відповідної норми близькості $J(\beta)$ і полінома $J(\alpha, \beta)$. Як правило, використовується Евклідова середньоквадратична або Чебишевська норма рівномірного наближення. Для збільшення точності у відповідних підобластях можна використовувати взважену середньоквадратичну норму.

Дещо інший підхід до апроксимації $J(\beta)$ аналітичною залежністю витікає з наступного представлення ряду Тейлора, ізоморфного до виразу (2.21):

$$\begin{aligned} J(\beta) - J(\beta_0) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left. \frac{\partial J}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_0} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right|_{\beta_0} + \left\{ \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial^3 J}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \right|_{\beta_0} + \dots \right\} \dots \Delta \beta_k \right\} \Delta \beta_j \right\} \Delta \beta_i, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\text{або} \quad \Delta y = \alpha(\beta) \cdot \Delta \beta. \quad (2.28)$$

Це вказує на можливість встановлення невідомої структури $J(\beta)$ шляхом побудови часткових моделей $J(\alpha_1, \beta_1)$ за умови останніх β_i ($i \neq 1$) сталих. Далі коефіцієнти α_1 , як функції β_2 , апроксимуються відповідними залежностями $\alpha_1(\beta_2, \alpha_2)$, далі α_2 від β_3 і, врешті решт, отримуємо шукану залежність $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n)$ для моделі (2.28). В такому підході одномірність залежностей, що апроксимуються, спрощує задачу вибору структури часткових моделей. Для цього можна створити базу канонічних моделей (моделей з мінімальною розмірністю вектора α невідомих коефіцієнтів) та впорядкувати її за допомогою таблиці властивостей. Тоді претендентом на кращу модель буде та, множина властивостей якої найбільше співпадає з аналогічною множиною властивостей експериментальної кривої.

Наведені методики проілюструємо прикладами.

Тестовий приклад Невідома залежність $J(\beta) = \beta_1 + 0.5\beta_1\beta_2 + 0.5\beta_2^2$ задана таблицею 2.1,

Таблиця 2.1

Область	G_1			G_2			G_3		
№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
J	0	0.1	0.005	-1	-0.9	-0.945	1	0.61	0.605
β_1	0	0.1	0	-1	-0.9	-1	0	0.1	0
β_2	0	0	-0.1	0	0	-0.1	-1	-1	-1.1

де загальна область G складається з трьох підобластей G_1, G_2, G_3 , у кожній з яких є центрова точка 1, 4, 7 відповідно і по дві з відхиленням ± 0.1 від центрної. За рівнянням (2.22) визначаються перші похідні $\left. \frac{\partial J}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_{0,r}}$, $i=1,2; r=1,2,3$; далі, для

всієї області G – другі похідні (2.24); після їх підстановки в рівняння (2.21) отримано рівняння моделі: $\hat{J}(\beta) = [\beta_1 + 0.5\beta_1\beta_2 + 0.5\beta_2^2] + 0.05\beta_2$, яке після відкидання несуттєвої складової $0.05\beta_2$, що виникла внаслідок заміни похідною різницею, співпало з шуканим.

Приклад 2. Визначення аналітичної залежності енергії першої півхвилі струму розряду конденсатора C в колі з індуктивністю L і опором R залежно від добротності β контуру силового перетворювача енергії.

Струм x з R, L, C – параметрами кола зв'язаний рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC} x = 0, \quad \int_{-\infty}^0 x(t) dt = CU_c(0), \quad \beta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.29)$$

де $U_c(0)$ – початкові умови по напрузі U_c на конденсаторі, $x(0) = 0$. Показник

$$J(\beta) = \left(\frac{CU_c^2(0)}{2} \right)^{-1} \int_0^{t_1} Rx^2(t) dt, \quad t_1 = \underset{t \in (0, \infty)}{\text{ArgSup}} x^2(t). \quad (2.30)$$

Задачу (2.29), (2.30) було вирішено чисельним методом. Отримано залежність $J(\beta)$, де β – скаляр, апроксимована дробово-раціональною функцією від β (рис. 2.1)

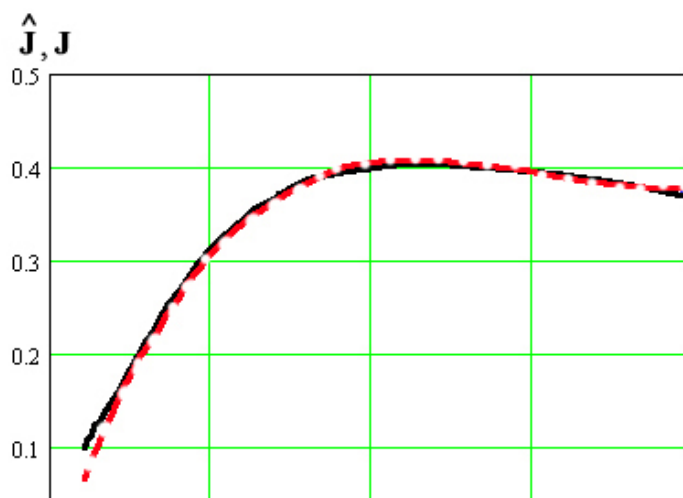


Рис.2.1. Залежність $J(\beta)$ (пунктир) та її модель (2.2.31) $\hat{J}(\beta)$ (лінії).

$$\hat{J}(\beta) = \frac{-0.031 + 1.066\beta - 0.658\beta^2 + 0.149\beta^3}{1 + 0.23\beta - 8.87 \cdot 10^{-5}\beta^2 + 1.112 \cdot 10^{-5}\beta^3}. \quad (2.31)$$

Звідси оцінка $\hat{\beta}^*$ оптимального значення β^* знаходиться за умови

$$\frac{\partial \hat{J}(\beta)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{J}(\beta)}{\partial \beta^2} < 0. \text{ Похибка } \frac{\beta^* - \hat{\beta}^*}{\beta^*} \cdot 100\% \text{ склала } 0.05\%.$$

Приклад 3. Отримання багатомірних нелінійних залежностей в енергетичних об'єктах за даними натурних випробувань.

На рис.2.2. наведено графіки експериментальної $J(\beta)$ та аналітичної $\hat{J}(\beta_1, \beta_2)$ залежностей. Останню отримано шляхом апроксимації коефіцієнтів α_i локальних i -х моделей $\hat{J}(\beta_1) = \alpha_{1i}\beta_1 + \alpha_{2i}\beta_1^2$, $i = \overline{1,6}$, лінійними функціями від β_2 $\alpha_{ij}(\beta_2) = \alpha'_{j2} + \alpha'_{j1}\beta_2$, $j = 1,2$. Повна модель має вигляд $\hat{J}(\beta_1, \beta_2) = (\alpha'_{10} + \alpha'_{11}\beta_2)\beta_1 + (\alpha'_{20} + \alpha'_{21}\beta_2)\beta_1^2$. Середньоквадратична похибка становить 2% від J_{\max} .

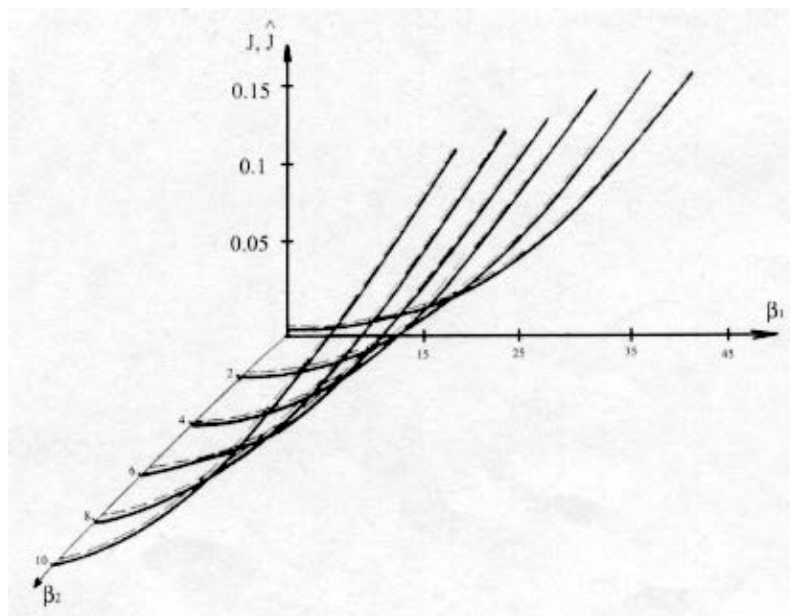


Рис.2.2. Залежність $J(\beta_1, \beta_2)$ (пунктир) та її модель $\hat{J}(\beta_1, \beta_2)$ (лінії)

На рис.2.3 наведено графіки експериментальної $J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ та аналітичної $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ залежностей, отриманих аналогічним шляхом:

$$\hat{J}(\beta_1) = \alpha_{1ik} \beta_1 + \alpha_{2ik} \beta_1^2, \quad i=1,2,3; \quad k=1,2,3; \quad (2.32)$$

$$\alpha_{jik}(\beta_2) = \alpha'_{jk} \beta_2 + \alpha''_{jk} \beta_2^2, \quad j=1,2; \quad (2.33)$$

$$\alpha_{jk}^{(1)}(\beta_3) = \alpha'_j \beta_3 + \alpha''_j \beta_3^2. \quad (2.34)$$

Після підстановки коефіцієнтів (2.34) в (2.33), а (2.33) в (2.32) отримаємо:

$$\hat{J}(\beta) = -0.96 \cdot 10^{-6} \beta_1 \beta_2 \beta_3 - 0.61 \cdot 10^{-2} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.9 \cdot 10^{-2} \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.23 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3^2 +$$

$$+ 0.04 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - 1.72 \beta_2 \beta_3^2 - 0.24 \cdot 10^{-4} \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3 + 0.46 \cdot 10^{-5} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0232 \beta_2^2 \beta_3 +$$

$$- 0.0126 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + 0.133 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + 1.02 \beta_2 \beta_3. \text{ Похибка апроксимації не перевищує}$$

0.5% від максимального значення J . У разі, якщо допустима похибка складає 5% вираз спрощується:

$$\hat{J}(\beta) = -0.61 \cdot 10^{-2} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.9 \cdot 10^{-2} \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.23 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3^2 + 0.04 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - 1.72 \beta_2 \beta_3^2 -$$

$$- 0.0232 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0126 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + 0.133 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + 1.02 \beta_2 \beta_3$$

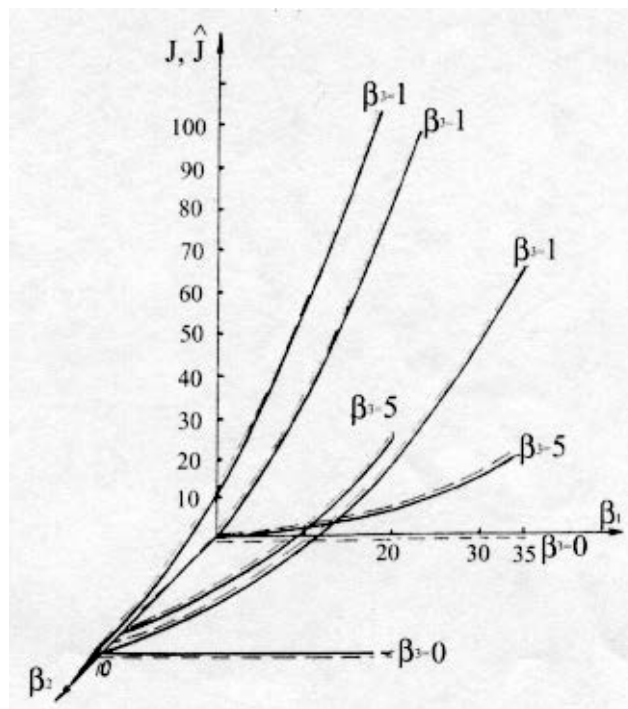


Рис.2.3. Залежність $J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (пунктир) та її моделі $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (лінії)

Таким чином, раціональне використання методів математичного чисельного моделювання або експериментального дослідження та методів теорії ідентифікації дає можливість отримати аналітичну залежність, що пов'язує відповідні параметри складної системи, що досліджується чи проектується. Отримана аналітична залежність $\hat{J}(\beta)$ далі використовується для вирішення задач

аналізу і синтезу систем, для інтерполяції та екстраполяції на режими, для яких відсутні експериментальні дані.

2.4. Моделювання і прогнозування рішення (2.11) системи (2.1) за умов відсутності інформації про відображення $T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$

За умов відсутності інформації про відображення множини Ω керуючих впливів $u(t)$, а також попередніх значень змінних стану X в наступні, задача моделювання фактично зводиться до задачі апроксимації вибірки даних $x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, M$, як правило, збурених поміхою $N(k)$. З урахуванням фундаментальної апріорі відомої властивості процесу $X(k)$ – його гладкості, а також двох теорем Вейерштраса про можливість апроксимації аперіодичних процесів рядом Тейлора, а періодичних – рядом Фур'є, задача ідентифікації з метою апроксимації не представляє складності.

Інша ситуація має місце при апроксимації з метою прогнозування. Тут серед множини моделей, що з заданою точністю описують процес $X(k)$ слід відібрати ту, що відповідає дійсній прихованій закономірності, бо тільки така може забезпечити достатню точність прогнозу процесу $X(k)$ в майбутнє. Особливо це стосується коротких вибірок $[k = \overline{1, m}]$ даних $x(k)$.

Приклад. Невідоме нам рішення (2.11) невідомої системи (2.2) для однієї з координат x_i вектор-функції $x(t)$ має невідомий нам вигляд

$$x_i(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \sin wt + \varepsilon_i, \quad (2.35)$$

де коефіцієнти $\beta_0 = 2; \beta_1 = 3/t; \beta_2 = 0.7; w = \frac{2\pi}{T}$, T – інтервал спостереження рішення $x_i(t)$, яке виглядає на $[0, T]$ як звичайна степенева функція (рис.2.4). Тому, як правило, дослідник чи автоматизована система в цих умовах вибере для апроксимації $x_i(t)$ модель $\hat{x}(t)$ у вигляді степеневого поліному:

$$\hat{x}_i(t) = \sum_{j=0}^n \hat{\beta}_j \cdot t^j, \text{ де } n = 1, 2, 3. \quad (2.36)$$

Для селекції моделей (степені n) необхідно скористатися зовнішнім критерієм, наприклад, критерієм “регулярності”

$$\hat{I} = \left[\frac{\sum_{k=1}^{N_{np}} (x_i^{np}(k) - \hat{x}_i^{np}(k))^2}{\sum_{k=1}^{N_{np}} (x_i^{np}(k))^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.37)$$

де $x_i^{np}(k)$, $k = \overline{1, N_{np}}$ – значення часового ряду $x_i(k)$, $k = \overline{1, M}$, вибрані у перевірочну послідовність; $\hat{x}_i^{np}(k)$, $k = \overline{1, N_{np}}$ – прогнозні оцінки $x_i(k)$ на перевірочній послідовності, отримані по моделі, побудованій на робочій послідовності $M - N_{np}$ точок k ($k = 1, 2, \dots, M - N_{np}$).

Прийmemo за робочий інтервал $[0, T - \tau_j]$, $j=1,2$, $\tau_1=0.2T$, $\tau_2=0.5T$, де отримаемо МНК-оцінки $\hat{\beta}_j$ моделі (2.36) для різних степенів n . За критерій “регулярності” (2.37) прийmemo модуль різниці дійсного і прогнозного значень $x_i(t)$ в точці T :

$$\hat{I} = |x_i(T) - \hat{x}_i^{np}(T)|. \quad (2.38)$$

Так як задача тестова, то розрахуємо також критерій точності прогнозу, що фізично не реалізується

$$\hat{I} = |x_i(T + \tau_j) - \hat{x}_i^{np}(T + \tau_j)|, \quad (2.39)$$

для співставлення його з фізично реалізуємим критерієм \hat{I} . У таблиці 2.2 наведено для $\tau = 0.2T$ і $\tau = 0.5T$ значення критеріїв I і \hat{I} , а також номери відповідних точок графіка (рис.2.5) для моделей (2.36) різних степенів $n: 1, 2, 3$.

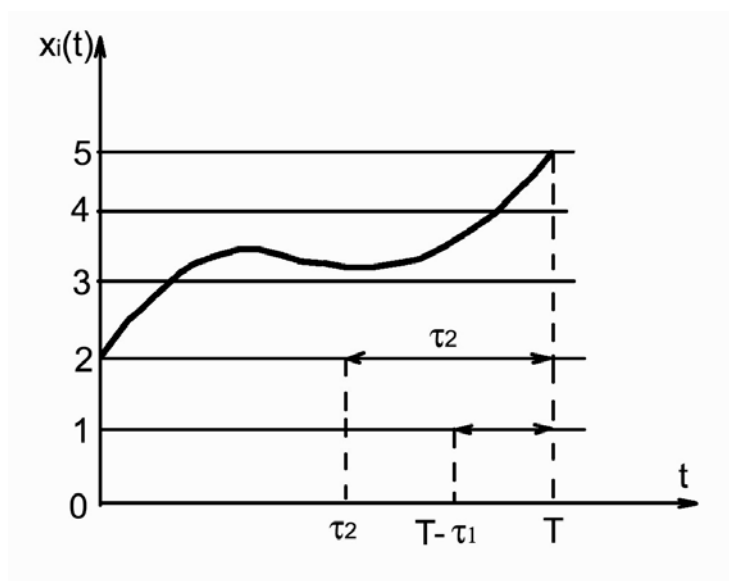


Рис. 2.4. Залежність $x_i(t)$

Таблиця 2.2

Результати прогнозу

n	τ_i	\hat{I}	№ _{ТЧК}	I	№ _{ТЧК}
1	0.2	0.7	1	1.4	2
2	0.2	1.8	3	3.6	4
3	0.2	0.2	5	0.4	6
3	0.5	5	7	6.2	8

2	0.5	5	9	6.2	10
1	0.5	0.2	11	0.3	12

Як витікає з таблиці та рисунка 2.5, для $\tau = 0.2T$ оптимальною як по \hat{I} , так і по I буде модель (2.36) при $n=3$; для $\tau = 0.5T$ – модель (2.36) при $n=1$. Близькість значень \hat{I} і I підтверджує дієвість критерію регулярності в задачі прогнозу. Але для різних інтервалів τ прогнозу оптимальні різні моделі. Якщо використати оптимальну для $\tau = 0.2T$ модель для прогнозу на $\tau = 0.5T$ (точка 13), то похибка прогнозу значно зросте. Це говорить про бажаність однаковості перевірного і прогнозного інтервалів τ . Ефект регуляризації зовнішнім критерієм (2.38) полягає в тому, що за одних і тих же даних, чим більше τ , тим простіша вибирається за критерієм (2.38) модель: для $\tau = 0.5T$ критерій \hat{I} відкинув моделі другого і третього порядків.

Розглянемо випадок, коли очевидна наявність періодичної складової часового ряду, наприклад, помісячний об'єм споживання електроенергії. Хоч цей показник рік від року змінюється, але в межах кожного року, тобто строго періодично у часі має місце збільшення його узимку і зменшення влітку. На рис.2.6 наведено вибірку в 312 точок середньомісячних значень електроспоживання на Україні за 26 років (1960÷1986).

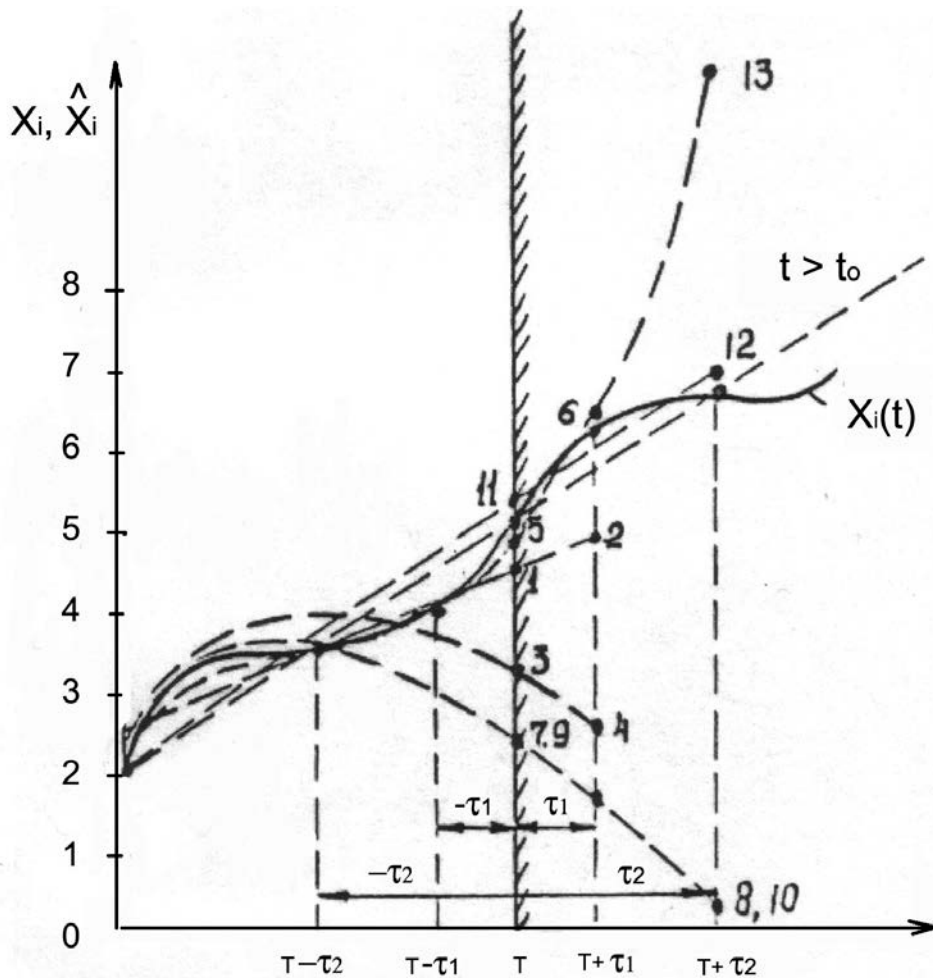


Рис.2.5 Графік $x_i(t)$ та його прогнозних моделей

Відсутність вхідної змінної $u(t)$ (в основному зростання промислових потужностей) не дає змоги побудувати модель “вхід-вихід” або “причина-наслідок”. Аналізуючи лише наслідок, маємо можливість представити його тільки однорідним диференціальним рівнянням

$$(T_1 p - 1)(T_2^2 p^2 - 2\xi T_2 p + 1)x(t) = 0, \quad (2.40)$$

$x(0) \cong 2000$; $px(0) \cong 70/\text{місяць}$, $p = \frac{d}{dt}$ – оператор диференціювання.

Така модель відповідає для того часу тенденції зростання середньорічного споживання (корінь $p_1 = \frac{1}{T_1}$) і поступового зростання коливань

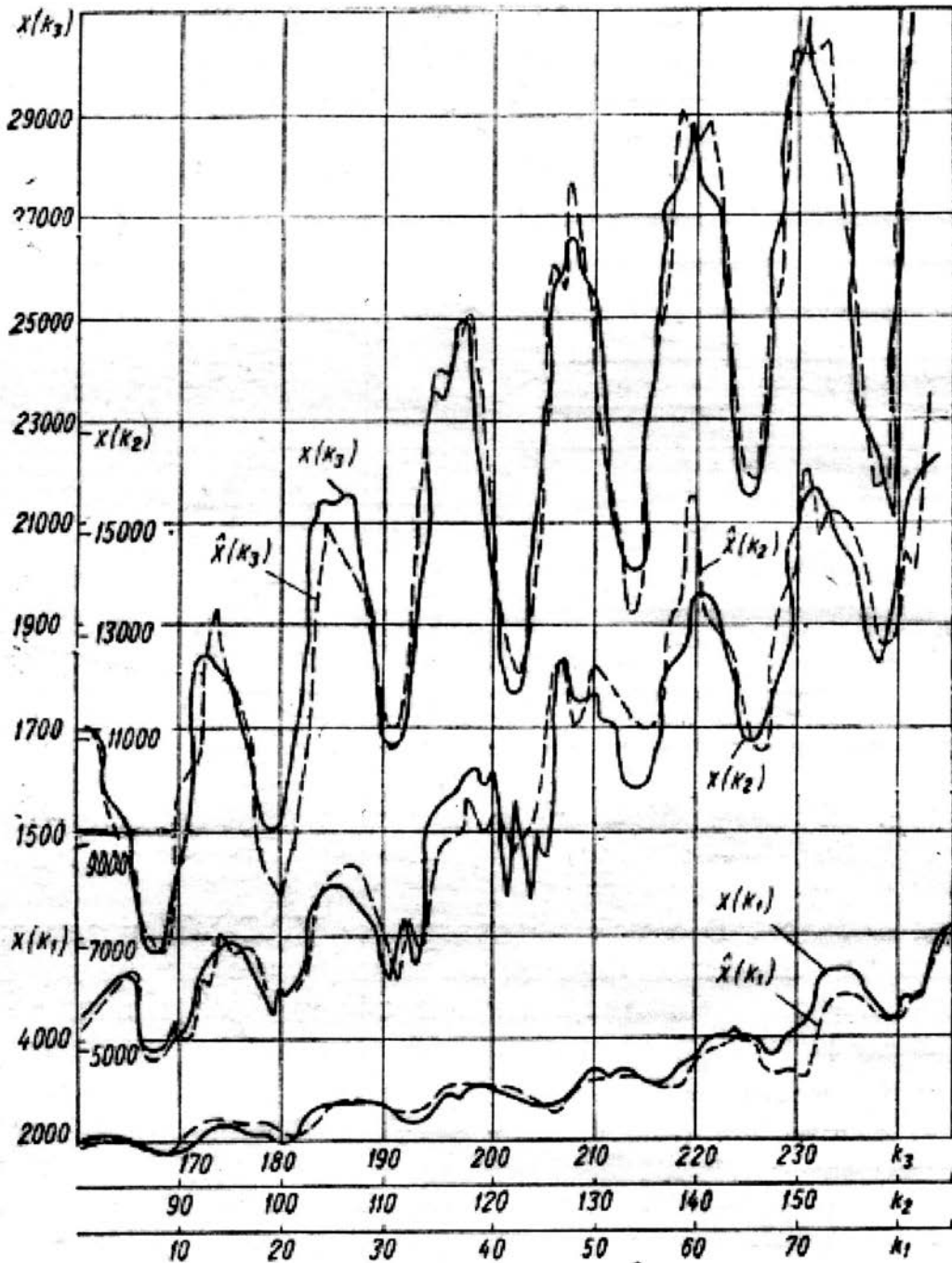


Рис.2.6 Прогнозне $\hat{x}(k_i)$ і виміряне $x(k_i)$ значення ряду, $i = 1, 2, 3$

$$(p_{2,3} = \frac{\xi}{T} \pm j\sqrt{\frac{\xi^2}{T^2} - 1}).$$

Але експоненціальна тенденція зростання має місце для $k = \overline{0,220}$. Далі процес виходить на усталений режим. Тому більш точною буде модель зі змінними у часі коефіцієнтами $T_1(t)$ і $\xi(t)$, тоді як T_2 залишається незмінним і дорівнює 12 місяцям. За такої постановки прогнозне значення $\hat{x}^{np}(T + \tau)$ обчислюється по моделі (2.40), як її рішення (2.11) для прогнозних значень $T_1(T + \tau)$ і $\xi(T + \tau)$. На

рис.2.6 наведено виміряні $x(k_i)$ та прогнози $\hat{x}(k_i)$ на один рік уперед значення електроспоживання. Прогноз виконано нестационарною різницевою моделлю з річним кроком (12 місяців), яка розраховувалась по попередніх трьох роках:

$$\hat{x}(k+12) = \beta_0 x(k) + \beta_1 x(k-12) + \beta_2 x(k-24) + \beta_3 x(k-36). \quad (2.41)$$

Ця модель є різницевим еквівалентом неперервної моделі (2.40) зі змінними у часі коефіцієнтами. Оцінки $\beta_i, i = \overline{0,3}$, моделі (2.41) визначено за методом найменших квадратів.

Як підкреслено в роботі [5], недоліком побудови моделей за критерієм (2.37) є надмірна критичність моделей до способу вибору точок у перевіряючу та робочу послідовності. Для більшої ефективності селекції моделей критерій (2.37), як правило, доповнюють критеріями незміщеності або балансу змінних. Це дає можливість будувати досить якісні моделі для середньострокового та довгострокового прогнозування часових рядів.

Взагалі моделі часових рядів у вигляді однорідних диференціальних чи авторегресійних різницевих рівнянь можна розглядати, як неоднорідні, у яких вхідну змінну $u(t)$ представлено додатковою системою диференціальних рівнянь порядку m : $\dot{u} = cu, u(0) = u_0$. Тоді замість системи (2.2) порядку n , отримаємо однорідну систему $\dot{Z}(t) = DZ(t)$ розширеної розмірності $n+m$, де $Z = (X, U)$, $D = D(A, B, C)$. Саме це і спостерігається при опису часових рядів. Так однорідне рівняння (2.40) штучно розширене до третього порядку внаслідок відсутності керуючого впливу $u(t)$, яким може бути внутрішній валовий продукт, загальний об'єм виробництва, що утворює аперіодичну (середньорічну) складову ряду; витрати на опалення, що складають коливальну складову, а їх зв'язок з енергоспоживанням носить безінерційний характер, чи максимум інерційність першого порядку та неоднорідний коефіцієнт передачі (внаслідок втрат). Звідси зрозуміло, що більш точною і фізичною є моделі, що враховують основні причинно-наслідкові зв'язки у об'єкті, що досліджується. За відсутності інформації про ці зв'язки слід провадити селекцію структур моделей по зовнішньому критерію \hat{I} , починаючи з якомога простіших (мінімальної мірності параметрів, що оцінюються), але таких, які б враховували геометричні властивості часового ряду, що апроксимується. Наведемо, як приклад, деякі з таких моделей та їх властивості (ознаки):

$y_1 = \beta_1 \sin(\beta_2 x + \beta_3)$ – синусоїда, витягнута в β_1 разів по y , зтиснута в β_2 раз по x , зсунута по осі на відрізок β_3/β_2 , з періодом $T = 2\pi/\beta_2$, має нулі в точках $x = \frac{n\pi - \beta_3}{\beta_2}$;

$y_2 = \beta_1 \operatorname{tg}(\beta_2 x + \beta_3)$ – має період π/β_2 , розриви по y_2 в точках $x = \frac{(n+1)\pi}{2\beta_2}$;

$y_3 = \beta_1 \arcsin(\beta_2 x)$ – монотонно зростає від $-\pi/2$ до $+\pi/2$ при зміні x від $-1/\beta_2$ до $+1/\beta_2$;

$y_4 = \beta_1 \operatorname{arctg}(\beta_2 x)$ – монотонно зростає від $-\pi/2$ до $+\pi/2$ при зміні x від $-\infty$ до $+\infty$;

$y_5 = \beta_1 x^{\beta_2}$ – монотонно росте з прискоренням росту при $\beta_2 > 1$ та замедленням, при $\beta_2 < 1$;

$y_6 = \beta_1 e^{\beta_2 x} = \beta_1 \cdot \beta_3^x$ – монотонно росте від 0 до ∞ при $\beta_2 > 0$ або $\beta_3 > 1$, монотонно зменшується від 0 при $\beta_2 < 0$ або $\beta_3 < 1$;

$y_7 = \beta_1 \log_{\beta_2} x$ ($\beta_2 > 0$) – при $\beta_1 = 1$ y_7 є дзеркальне відображення y_5 відносно лінії $y_7 = x$;

$y_8 = \beta_1 e^{-(\beta_2 x)^2}$ – монотонно зростає від 0 до β_1 і зменшується від β_1 до 0 симетрично відносно $x = 0$;

$y_9 = \beta_1 e^{\beta_2 x} + \beta_3 e^{\beta_4 x}$ – монотонно змінює конфігурацію в залежності від знаків і величин $\beta_1 \div \beta_4$;

$y_{10} = \beta_1 e^{\beta_2 x + \beta_3 x^2} = y_6 y_8$ – несиметрична зростаюча (при $\beta_3 > 0$) або спадаюча (при $|\beta_3| > |\beta_2|$, $\beta_3 < 0$) до β_1 ;

$y_{11} = \beta_1 x^{\beta_2} e^{\beta_3 x}$, $x > 0$ – зростаюча при $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$, екстремальна, випукла, несиметрична, колокоподібна з зсувом екстремуму по осі ОХ тим більше, чим більше β_3 .

Аналізуючи досліджуємий ряд по наведеним для функцій $y_1(x) \div y_{11}(x)$ признакам, де x для часових рядів це t , можна підібрати оптимальну по критерію мінімальної складності модель. Такий аналіз легко автоматизувати, використовуючи стандартні сучасні алгоритми розпізнавання образів, побудовані на основі теорії нечітких множин та нейроноподібних структур чи будь-яких інших статистичних методів.

2.5. Моделювання, прогнозування і діагностика рішення (2.11) системи (2.1) за умов наявності інформації про відображення $T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$

В розділі 2.2. вже розглянуто пряму задачу моделювання і прогнозування, за умови відомого відображення «вхід – вихід» з використанням кубічної апроксимації вхідних сигналів і аналітичного обчислення рішення відповідного диференційного рівняння.

У випадку невідомого відображення «вхід – вихід» але відомих вхідних $u(t)$ і вихідних $x(t)$ змінних має місце зворотна задача – задача ідентифікації відображення $f(x, u, t)$ в (2.1). Ця задача найбільш складна, але і найбільш важлива. Тут може бути декілька варіантів:

1) По входу $u(t)$, виходу $x(t)$, як правило, збурених завадою $N(t)$, визначити в заданій точці (x_0, u_0) лінійний оператор $W(p, \beta)$, $p = \frac{d}{dt}$, динамічного зв'язку малих відхилень Δu і Δx . Це необхідно для аналізу стійкості об'єкта та синтезу системи керування процесом $x(t)$.

2) По збурених поміхою $N(t)$ входу $u(t)$ і виходу $x(t)$ з динаміки процесу виявити фундаментальний (більш стабільний) статичний, як правило, нелінійний зв'язок ustalених значень \bar{u} і \bar{x} , тобто $\bar{x}(\bar{u})$ (балансні залежності).

3) По виходу $x(t)$ і апріорі відомому оператору $W(p, \beta)$, визначити форму вхідної сигнальної чи параметричної змінної і методами експертного оцінювання встановити її фізичний зміст: продіагностувати причину виникнення перехідного процесу в $x(t)$. Це задача аналізу причин.

Проілюструємо перші дві задачі на попередньому прикладі електроспоживання. Представимо процес $x(t)$ як суму періодичності $x_n(t)$ і аперіодичності $x_a(t)$ складових виходу об'єкта, що має таку структуру (рис.2.7)

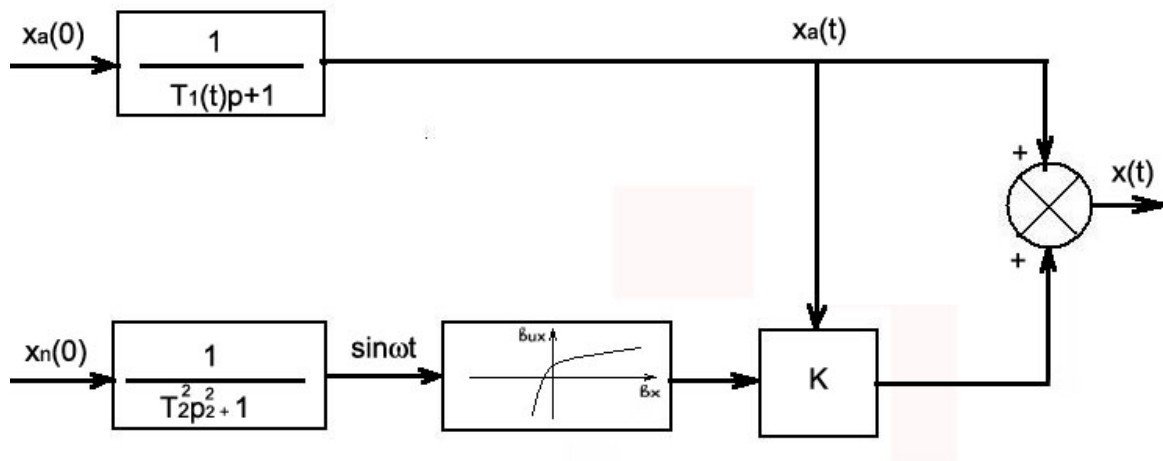


Рис. 2.7. Структурна схема моделі процесу $x(t)$.

Тут $T_1(t)$, відповідно змінюючись у часі з від'ємного до додатного, забезпечує співпадання аперіодичної складової $x_a(t)$ з поточним середньорічним значенням $\bar{x}(t)$. Оператор $(T_2^2 P + 1)^{-1}$ – це генератор синусоїдного сигналу $\sin \omega t$, де $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = 12$ місяців. Сигнал $\sin \omega t$ проходить через нелінійний

перетворювач, вихід якого підсилюється пропорційно оцінці середньорічного значення $x_a(t)$, утворюючи періодичну складову $x_n(t)$ сигналу $x(t)$.

Перша задача має місце у визначенні T_1 по вікну поточних значень $x_a(0)$, наприклад, на початку кожного року і реакції $x_a(t)$ на нього протягом 12 місяців.

Друга задача – це визначення виду \square нелінійності, що перетворює синусоїдний сигнал в $x_n(t)$. Фундаментальна (стабільна) властивість виявляється в несиметрії \square нелінійності: взимку півхвиля коливань має більшу площу, ніж влітку, а також в залежності амплітуди коливань від $x_a(t)$.

З аналізу моделі витікає, що керуючим впливом на систему електроспоживання України, що приведе до зменшення пікового навантаження взимку, може бути зміна тарифів на промислове споживання електроенергії пропорційно величині $x_n(t)$ (в пікові зимові місяці енергія дорожче), а влітку – дешевше). Це може змусити підприємства перерозподілити потужності у часі так, щоб мінімізувати вартість енергії, що споживається. В результаті пікове зимове навантаження зменшується.

Як приклад частково першої, частково третьої задачі, розглянемо графік

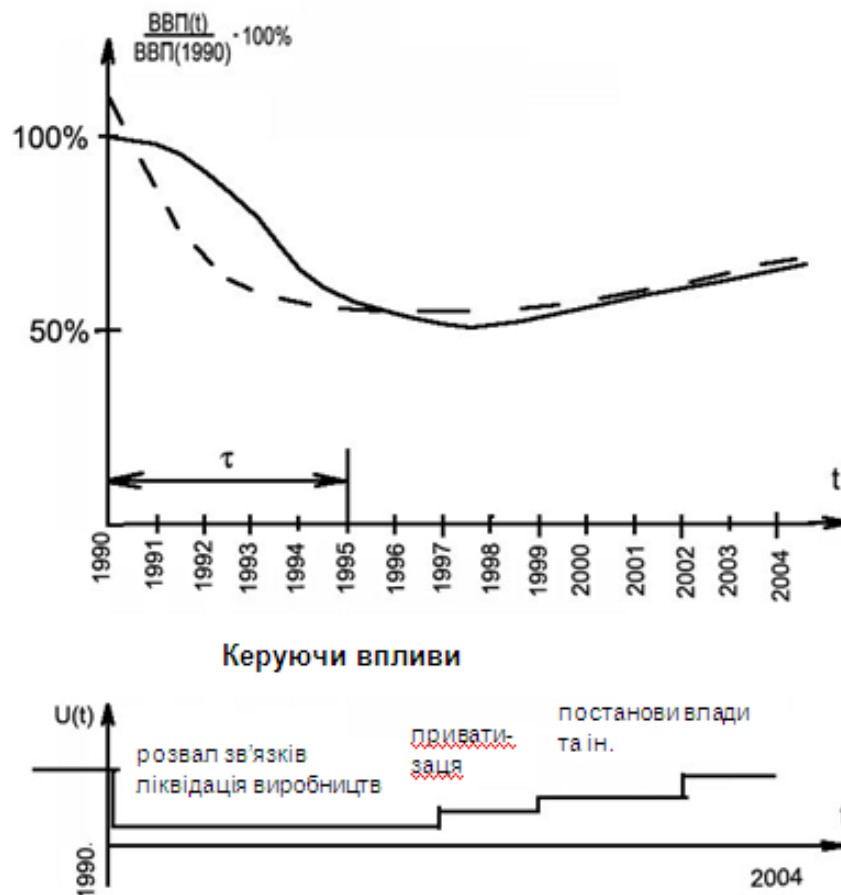


Рис. 2.8. Графік ВВП у період «перебудови» та ймовірні керуючі впливи $u(t)$.

Зміни у часі валового внутрішнього продукту (ВВП) (рис. 2.8). В 1989 – 1990 роках усталене значення ВВП починає швидко зменшуватися. В 1995 швидкість падає і в 1997 – 2000 роках маємо стабільно низький рівень ВВП. З 2001 р. і до сьогодні спостерігаємо повільне наростання темпу збільшення ВВП. Щоб установити причини такої динаміки ВВП, скористаємося класичною макроекономічною моделлю економіки в виробничо-технологічній інтерпретації (рис. 2.9).

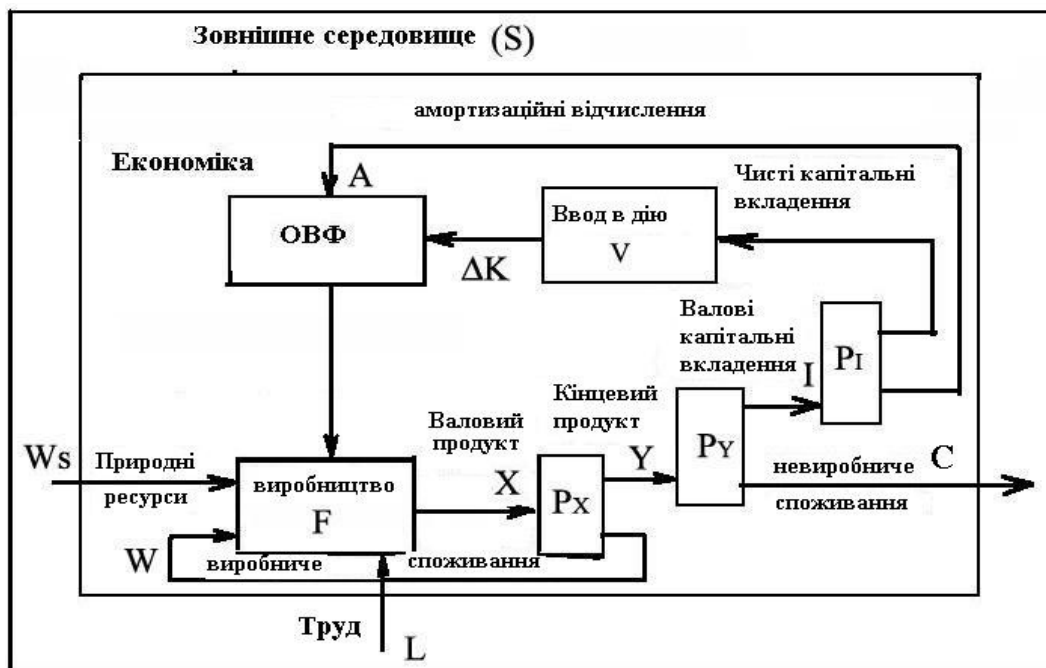


Рис.2.9. Динамічна макроекономічна модель.

Змінні процесу виробництва:

L – праця; K – засоби виробництва (основні виробничі фонди); \tilde{W} – предмети праці, що складаються з природних ресурсів W і предметів праці \tilde{W} , повернених у виробництво, як частина сукупного суспільного продукту.

Вихідні змінні процесу виробництва:

X – валовий продукт, що розподіляється в підсистемі P_x на виробниче споживання W і кінцевий продукт Y . Далі в підсистемі розподілу P_y продукт Y ділиться на валові капітальні вкладення I та виробниче споживання C . Підсистемою P_1 вкладення I діляться на амортизаційні відрахування A і чисті капітальні вкладення.

Зі схеми (рис.2.9) витікає, що $X = W + Y$, $Y = I + C$. Приймаючи, що вкладення I повністю використовуються на приріст ΔK основних фондів K за той самий рік, а також на A , отримаємо дискретну модель

$$I_t = q\Delta K_t + A, \quad A = \mu K_t, \quad (2.41)$$

або

$$\Delta K_t = q^{-1}(I - \mu K) \quad (2.42)$$

де q – параметр моделі; μ – коефіцієнт амортизації; K_t – основні виробничі фонди в t -му році.

Якщо замість року брати приріст за dt , отримаємо неперервну модель першого порядку:

$$\frac{dK}{dt} = q^{-1}(I - \mu K). \quad (2.43)$$

Якщо прийняти, що виробничі затрати W пропорційні валовому продукту X ($W=aX$), а $X_t = W_t + q\Delta K_t + \mu K_t + C_t$, то, переходячи до неперервної моделі, отримаємо вираз:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{q}[(1-a)X - \mu K - C]. \quad (2.44)$$

Згідно зі стовідсотковою моделлю Лаврентьєва приймемо, що приріст валового продукту $\Delta X_t = X_{t+1} - X_t$ (де t – в роках), пропорційний капітальним вкладенням I_t , $I_t = \chi \Delta X_t$.

Тоді з попередніх рівнянь отримаємо модель валового продукту:

$$\frac{dX}{dt} = \chi^{-1}[(1-a)X - C]. \quad (2.45)$$

Зі структурної схеми (рис.2.9) і рівняння (2.49) витікає, що зменшення вкладень I_t ($t=1990, \dots, 1997$) привело до експоненціального зменшення зі сталою часу

$\tau = \frac{q}{\mu}$ основних виробничих фондів K і, як наслідок, валового продукту X .

Для нормального розвитку економіки $X(t)$ повинно зростати, тобто корінь $P_1 = \chi^{-1}(1-a)$ характеристичного поліному $P_1 - \chi^{-1}(1-a) = 0$ рівняння (2.45) повинен бути додатнім. Але для періоду «перебудови» коефіцієнт a перебільшив одиницю і в рівнянні (2.45) маємо загасаючий в інтервалі [1990 – 1997] процес $x(t)$. Наближено апроксимуючи його експонентою (пунктир на рис. 2.8), визначимо

сталу часу $\tau = P_1^{-1} = \frac{\chi}{a-1} \approx 5$ років.

Тож з графіка (рис. 2.8), моделі (рис. 2.9) і формули (2.45) витікає висновок як про параметричне, так і сигнальне збурення, яке виникло в 1990 році. Сигнальне – зменшення W^S , K , W , L ; параметричне – зміна співвідношень a (між W і X) і χ (між I_t і ΔX_t): a – зросло, χ – зменшилось.

Даний приклад не забезпечує детального аналізу всіх проблем суспільного виробництва, розподілу, обміну і споживання, але він підтверджує неперервність

процесів у економіці і, як наслідок, можливість представлення їх динаміки неперервними або різницевиими рівняннями.

Присутність інерційності, неперервності і, як наслідок, гладкості залежностей показників економіки від часу, слід враховувати під час планування і прогнозування її розвитку у часі. Інакше бажане і реальність будуть суттєво різнитися, як, наприклад, це мало місце в програмі збереження первинних енергоресурсів ПЕР України і її реалізації (рис. 2.10).

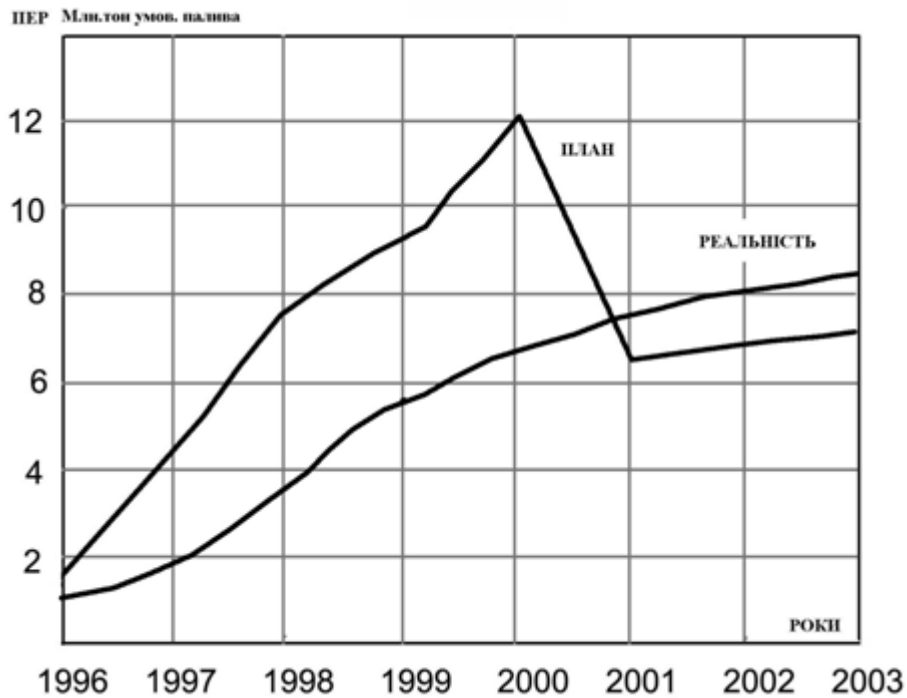


Рис. 2.10. Витрати ПЕР по Україні.

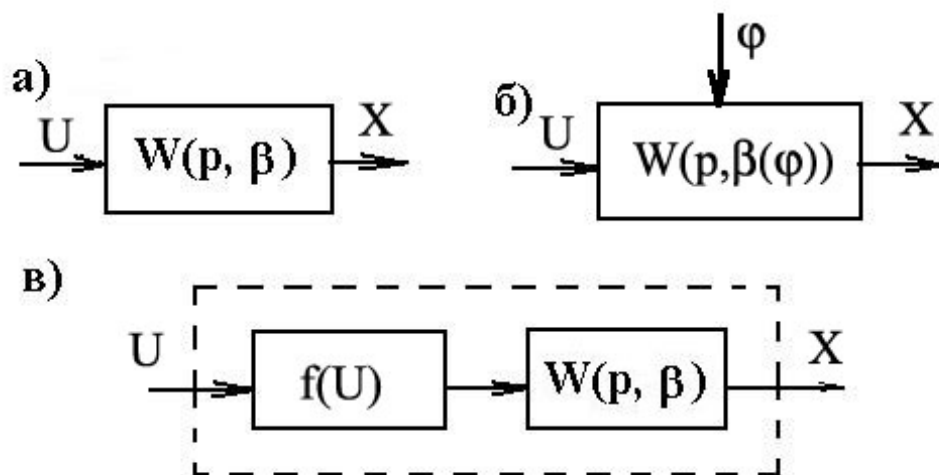


Рис. 2.11. Моделі відображень «вхід – вихід».

Ці об'єкти мають вимірювані вхідні змінні U , вихідні X , що пов'язані з вхідними:

- лінійним стаціонарним оператором $W(P, \beta)$ (рис. 2.11, а);

- лінійним нестационарним оператором $W(P, \beta(\varphi))$ (рис. 2.11, б);
- нелінійним стаціонарним оператором Гаммерштейна $W(P, \beta) \cdot f(U)$ (рис. 2.11, в),

де β – вектор параметрів, φ – змінна часу t чи входу U або виходу X , $f(U)$ – статична нелінійна залежність.

Змінні U, X і оператори W, f можуть бути як скалярні, так і векторні.

Глава 3. Аналіз спрощених методів конфлюентного аналізу

3.1. Аналіз методу найменших квадратів в ситуації зашумленості як вихідних, так і вхідних сигналів

Практична постановка задачі містить в собі суттєву долю невизначеності статистичних властивостей поміх у вимірах як вхідних X , так і вихідних Y даних про об'єкт, що досліджується, модель якого може бути представлено як

$$Y^* = X^* \beta^* + \varepsilon^*, \quad (3.1)$$

де Y^*, X^*, ε^* – точні значення змінних виходу, входу і нев'язки, за умови, що оцінку β^* для цих значень отримано за методом найменших квадратів:

$$\beta^* = (X^{*\top} X^*)^{-1} X^{*\top} \cdot Y^* = C^* Y^*, \quad (X^{*\top} X^*)^{-1} X^{*\top} = C^*. \quad (3.2)$$

Тобто, за умови:

$$\beta^* = \arg \min \varepsilon^{*\top} \cdot \varepsilon^* \quad (3.3)$$

На практиці МНК-оцінку (3.2) отримують по збуреним завадам N_x і N_y даним:

$$X = X^* + N_x, \quad Y = Y^* + N_y, \quad (3.4)$$

$$\text{де } X = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) \dots & x_i(1) \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(1) \dots & x_i(2) \dots & x_n(2) \\ \text{-----} \\ x_1(m) & x_2(m) \dots & x_i(m) \dots & x_n(m) \end{bmatrix},$$

$$Y^\top = [y(1) \ y(2) \dots \ y(m)], \quad x_i(j) = x_i^*(j) + N_x(j), \quad y_i(j) = y_i^*(j) + N_y(j), \quad j = \overline{1, M}.$$

Тоді МНК-оцінка (3.2) $\hat{\beta}$ вектора β^* знаходиться з умови (3.3), але вже для реальних даних (3.4) у звичайній

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y = C \cdot Y, \quad C = (X^\top X)^{-1} X^\top, \quad (3.5)$$

або у рекурентній

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(j+1) &= \hat{\beta}(j) + P(j+1) X(j) [Y(j) - X^\top(j) \cdot \hat{\beta}(j)], \\ P(j+1) &= P(j) - P(j) X(j) [X^\top(j) P(j) X(j) + I]^{-1} \cdot X^\top(j) \cdot P(j), \end{aligned} \quad (3.6)$$

формах з початковими умовами $P(0), \hat{\beta}(0)$. Якщо останні невідомі, то приймають, що $\hat{\beta}(0) = 0, P(0) = \sigma_{\beta(0)}^2 \cdot I, \sigma_{\beta(0)}^2 = \infty$.

Покладемо для спрощення аналізу, що поміхи N_x і N_y – гаусові «білі шуми», відповідно авто- і взаємо-некоректовані. Визначимо зсув $\Delta\hat{\beta}$ оцінки (3.5) відносно точної оцінки (3.2):

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\beta} &= M\{\hat{\beta}\} - \beta^* = M\left\{[C^* + \delta C(N)] \cdot [Y^* + \varepsilon^* + N_y]\right\} - \beta^* = \\ &= M\left\{[C^* + \delta C(N)] \cdot Y^*\right\} - \beta^* = M\{C^* + \delta C(N)\} \cdot Y^* - \beta^* = \\ &\cong \left[X^{*T} X^* + M\{N_x^T N_x\} \right]^{-1} \cdot X^{*T} Y^* - \beta^* = \\ &= \left[X^{*T} X^* + \text{diag}\sigma_i^2 \cdot M \cdot I \right]^{-1} \cdot X^{*T} \cdot Y^* - \beta^*.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Позначимо $X^{*T} X^* = A^*$, $M\{N_x^T N_x\} = \delta A$, $X^{*T} Y^* = B^*$. Тоді (2.3.2) і (2.3.7) дорівнюють відповідно: $A^* \beta^* = B^*$, $[A^* + \delta A] \hat{\beta} = B^*$. Звідси $\delta A \cdot \hat{\beta} = -A^* (\hat{\beta} - \beta^*) = -A^* \Delta\hat{\beta}$, тобто $\delta A (\beta^* + \Delta\hat{\beta}) = -A^* \Delta\hat{\beta}$, або

$$\Delta\hat{\beta} = -(A^* + \delta A)^{-1} \cdot \delta A \cdot \beta^*\tag{3.8}$$

Як бачимо, оцінка $\hat{\beta}$ за умов навіть некорельованих «білих шумів» N_x і N_y буде занижена відносно істинної β^* на величину (3.8). Остання, за умови, що норма $\|\delta A\| \rightarrow 0$, прямує до нуля, а $\hat{\beta}$ до β^* ; за умови, що норма $\|\delta A\| \rightarrow \infty$, прямує до $-\beta^*$, а $\hat{\beta}$ – до нуля.

Коваріація оцінки (3.5) за приведених вище умов, та приймаючи, що норма $\|N_x^T \cdot \varepsilon\|$ набагато менше, ніж $\|X^{*T} \cdot \varepsilon\|$ або $\|N_x^T \cdot Y^*\|$, наближено дорівнює:

$$\begin{aligned}\text{cov}[\hat{\beta}] &\cong M\left\{[C_1 \cdot \varepsilon + C_2 N_x] \cdot [C_1 \cdot \varepsilon + C_2 N_x]^T\right\} = \\ &= C_1 \cdot M\{\varepsilon \cdot \varepsilon^T\} \cdot C_1^T + C_2 \cdot M\{N_x N_x^T\} \cdot C_2^T,\end{aligned}\tag{3.9}$$

де $\varepsilon = \varepsilon^* + N_y$,

$$\begin{aligned}C_1 &= \left[X^{*T} X^* + M\{N_x N_x^T\} \right]^{-1} \cdot X^{*T}, \\ C_2 &= \left[X^{*T} X^* + M\{N_x N_x^T\} \right]^{-1} \cdot Y^{*T}.\end{aligned}$$

Перша складова виразу (3.9) зі зростанням рівня N_x зменшується, в другій C_2 зменшується, а $M\{N_x N_x^T\}$ збільшується, але C_2 входить в вираз (3.9) квадратично, тоді як $M\{N_x N_x^T\}$ – лінійно. Тому для «білого шуму», коли $M\{N_x N_x^T\} = \sigma_{N_x}^2 \cdot M \cdot I$, зі зростанням σ_{N_x} коваріація оцінки $\hat{\beta}$ буде зменшуватись. Таким чином МНК має властивість до регуляризації системи нормальних рівнянь, подібно до Тихонівської [14]. Остання полягає в мінімізації звичайного

квадратичного функціоналу $I = \varepsilon^T \varepsilon$ з регуляризуючою добавкою $\alpha \hat{\beta}^T \hat{\beta}$, де α – параметр регуляризації:

$$\begin{aligned}
 I &= \varepsilon^T \varepsilon = (Y - X^* \hat{\beta})^T (Y - X^* \hat{\beta}) + \alpha \hat{\beta}^T \hat{\beta}, \\
 \frac{\partial I}{\partial \hat{\beta}} &= 0 = 2(X^{*T} X^* \hat{\beta} - X^{*T} Y + \alpha \hat{\beta}), \\
 \hat{\beta} &= (X^{*T} X^* + \alpha \cdot I)^{-1} \cdot X^{*T} \cdot Y.
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

□ Співставляючи (3.7) і (3.10) бачимо, що в МНК параметр Тихонова дорівнює $\text{diag} \sigma_j^2 \cdot M$.

Графічну залежність нормованих величин $\frac{\|\hat{\beta}\|}{\|\beta^*\|}$ та $\frac{\|\text{cov} \hat{\beta}\|}{\|\text{cov} \beta^*\|}$ (крива *a*), та $\frac{\|\Delta \hat{\beta}\|}{\|\beta^*\|}$ (крива *б*) наведено на рис. 3.1.

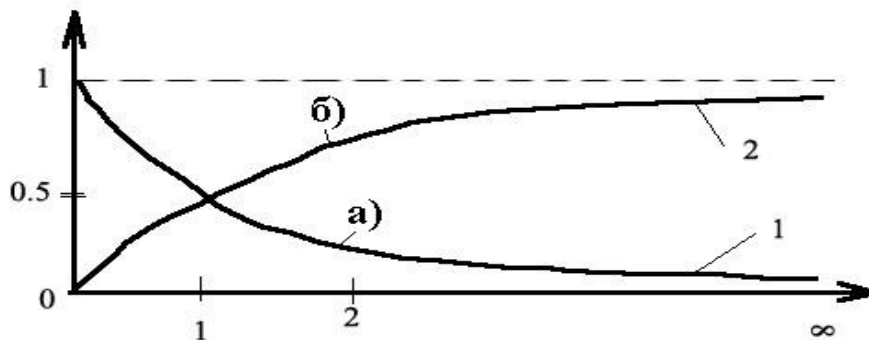


Рис. 3.1. Залежність зсуву і коваріації МНК-оцінки від співвідношення «шум-сигнал» в X .

3.2. Узагальнений МНК та його практична реалізація

В цьому методі відшукуються МНК-оцінки по зваженим (отфільтрованим) даним:

$$\hat{X} = U^{-1} X, \quad \hat{Y} = U^{-1} Y.$$

Це еквівалентно мінімізації функціоналу

$$I = 0,5 \sum_{j=1}^M \left\| \mathcal{X}(j) - x(j) \cdot \hat{\beta} \right\|^2 \cdot Q^{-1}, \tag{3.11}$$

де Q – матриця ваги кожного j – го виміру: $Q = (\text{cov} \hat{\beta}) \cdot U^T$.

Тоді зважена вагою Q^{-1} оцінка узагальненого МНК (УМНК), отримана за умови мінімуму (3.11), дорівнює:

$$\hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} \cdot X^T Q^{-1} Y. \quad (3.12)$$

Коваріація оцінки (3.12):

$$\text{cov} \hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} X^T Q^{-1} M\{N_y N_y^T\} \cdot Q^{-1} X (X^T Q^{-1} X)^{-1}. \quad (2.3.13)$$

Оцінки (2.3.12) мають мінімальну дисперсію за умови, що

$$Q = M\{N_y \cdot N_y^T\}.$$

Тоді

$$\text{cov} \hat{\beta} = [X^T \cdot M\{N_y N_y^T\} \cdot X]^{-1}. \quad (3.14)$$

Для некорельованого «білого шуму» в вимірах Y $Q = \sigma^2 y(j)I$. Тоді рекурентна формула УМНК співпадає з зваженим МНК:

$$\hat{\beta}(j+1) = \beta(j) + P(j+1) \cdot X(j) \cdot \frac{1}{\sigma_y^2(j)} \cdot [y(j) - X^T(j) \cdot \beta(j)], \quad (3.15)$$

$$P(j+1) = P(j) - X(j) [X^T(j) \cdot P(j) \cdot X(j) + \sigma_y^2(j)]^{-1} \cdot X^T(j) \cdot P(j).$$

Неточність визначення чи апріорного завдання матриці Q^{-1} призводить до суттєвої втрати оптимальності оцінок (3.12) чи (3.15).

Алгоритм не є робастним [21]: статистично незначна неадекватність матриці Q коваріації поміх N_y , визвано, наприклад, окремими збоями в даних, які утворюють в законі розподілення поміх N_y так звані «тяжкі хвости» [21], під час оцінювання вектора $\hat{\beta}$ за алгоритмом (3.12), може привести до суттєвої похибки. Тому в практичній реалізації більш зручним і надійним буде квазіоптимальний УМНК:

на першому етапі відбувається квазіоптимальне оцінювання сигналів X , Y шляхом згладжування лінійними фільтрами їх n -ий вибірок $X(j)$, $Y(j)$, $j = \overline{1, M}$;

на другому – МНК-оцінювання вектора $\hat{\beta}$ по отриманим на першому етапі оцінкам \hat{X} і \hat{Y} точних значень X^* , Y^* сигналів.

Для такого підходу поміхи $N_{x_i}, i = \overline{1, n}, N_y$ можуть бути взаємно корельованими. Окрім того, так як модель (3.1) лінійна, то, за умови фільтрації всіх змінних $X_i(t)$, $y(t)$ одним фільтром, невідповідність згладжених значень \hat{X}^* і \hat{Y}^* істинним X^* , Y^* не приводить до зміщення оцінки $\hat{\beta}$ відносно β^* . Дійсно знак рівняння в (3.1) не порушується, якщо на його ліву і праву частину подіяти лінійним оператором фільтра W_ϕ :

$$W_\phi\{Y^*\} = W_\phi\{X^* \beta^* + \varepsilon^*\} = W_\phi\{X^*\} \cdot \beta^* + W_\phi\{\varepsilon^*\}. \quad (3.16)$$

Математичне очікування оцінки $\hat{\beta}$:

$$M\{\hat{\beta}\} = \left[\hat{X}^{*T} \cdot \hat{X}^* + M\{N_x N_x^T\} \right]^{-1} \cdot \hat{X}^* \hat{Y}^*. \quad (3.17)$$

Якщо для спрощення прийняти що $M\{N_x N_x^T\} = \text{diag}\{\sigma_{\hat{N}_s}^2\} \cdot I$, а також покласти, що власні числа матриці $(\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \cdot \text{diag}\{\sigma_{\hat{N}_i}^2\}$ менше одиниці, то вираз $\left[I + (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \cdot \text{diag}\{\sigma_{\hat{N}_i}^2\} \right]^{-1}$ можна представити рядом. Тоді

$$\begin{aligned} (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*) \cdot \hat{\beta} &= \left[I + (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \cdot \text{diag}\{\sigma_{\hat{N}_i}^2\} \right]^{-1} \cdot \hat{X}^{*T} \hat{Y}^* \cong \\ &\cong \left[I - (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \cdot \text{diag}\{\sigma_{\hat{N}_i}^2\} \right] \cdot \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*. \end{aligned}$$

Звідси

$$\hat{\beta} \cong (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^* - (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-2} \cdot \text{diag}\{\sigma_{\hat{N}_i}^2\} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*.$$

Враховуючи, що

$$\hat{\beta} \cong (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^* = (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-2} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*,$$

отримаємо вираз для зсуву:

$$\Delta \hat{\beta} = \hat{\beta} - \beta = -\text{diag}\{\sigma_{\hat{N}_i}^2\} \cdot (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \cdot \hat{\beta}^*. \quad (3.18)$$

Так як норма $\Delta \beta$ не більше добутку норм складових правої частини (3.18), то маємо нерівність:

$$\frac{\|\Delta \hat{\beta}\|}{\|\hat{\beta}^*\|} \leq \left\| \text{diag}\{\sigma_{\hat{N}_i}^2\} \right\| \cdot \left\| \hat{X}^{*T} \hat{X}^* \right\|^{-1}. \quad (3.19)$$

Чим сильніше фільтрація X , Y оператором W_ϕ фільтра, тим менше норма матриці збурень $\sigma_{\hat{N}_i}^2$. Тобто фільтр подавляє поміхи, не порушуючи рівняння (2.16). Але згладжування фільтром складових $X_i(t)$ вектор-функції $X(t)$ звужує їх частотні спектри і, як наслідок, зменшує їх лінійну незалежність. Зменшується число обумовленості матриці $(\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)$ і, як наслідок, збільшується норма зворотної матриці $(\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1}$. Якісну картину залежності нормованих величин

$\frac{\|\Delta\hat{\beta}\|}{\|\hat{\beta}\|}$ (крива а), $\frac{\|diag\sigma_{\hat{N}_i}^2\|}{\|diag\sigma_{N_i}^2\|}$ (крива б), $\frac{\|(\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1}\|}{\|(X^{*T} X^*)^{-1}\|}$ (крива в), в функції інерційності τ фільтра W_ϕ , для фіксованого співвідношення «шум-сигнал» зображено на рис. 3.2.

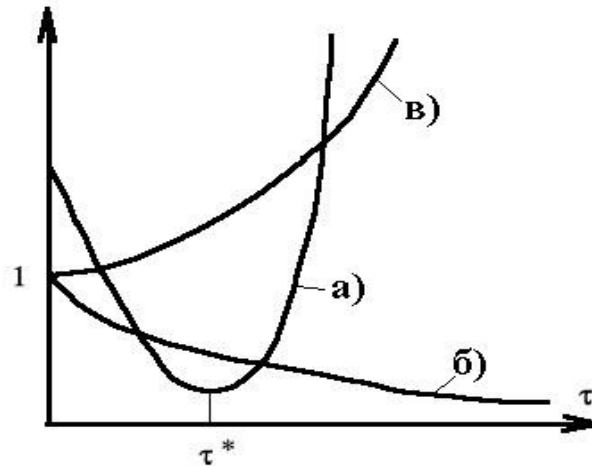


Рис. 3.2. Залежність нормованого зсуву (а), коваріації та поміх (б) та інформаційної матриці $(\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1}$ від параметра τ інерційності фільтра

Як витікає з графіка, для кожних конкретних випадків існує оптимальне значення τ , при якому ефект фільтра W_ϕ , за якого норма зміщення (3.19) буде мінімальною.

Коваріація оцінки $\hat{\beta}$ за методом УМНК при допущенні взаємно некорельованості поміх, подібна до МНК, але матриці $M\{\varepsilon\varepsilon^T\}$, $M\{N_X N_X^T\}$ вже не діагональні. Чим далі рознесені спектри сигналу і поміхи, тим краще оцінки квазіоптимального УМНК.

3.3. Аналіз інтегро-кореляційного критерію і метода його мінімізації (інтегрований МНК)

3.3.1. Сутність методу

МНК- і УМНК-оцінки попередніх методів знаходяться як координата точки мінімуму відповідних функціоналів $\varepsilon^T \varepsilon$ і $\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}$. При цьому за точку мінімуму приймається значення координати точки нуля похідної функціонала по β . Так як функціонал є усередненим на кінцевому інтервалі T значенням квадрата ε чи $\hat{\varepsilon}$, які є сумішшю корисного сигналу $Y^* - X^* \beta$ і випадкового збурення $N_Y - N_X \beta$, то він, як функція від β не є точним. Відомо [22], що операція диференціювання $\frac{\partial}{\partial \beta}(\varepsilon^T \varepsilon)$ зашумленої функції $\varepsilon^T \varepsilon$ є некоректною. Цим обумовлена невисока

точність МНК-оцінок на коротких сильно зашумлених вибірках даних X, Y . УМНК дещо покращує точність завдяки згладжуванню поміх в X і Y . Але на коротких вибірках впливає на точність фільтрації невизначеність краєвих умов. Окрім цього згладжування зменшує обумовленість матриці $\hat{X}^T \hat{X}$, що еквівалентно зменшенню крутизни функціонала. Тоді знову зростає область невизначеності G оцінки $\hat{\beta}$.

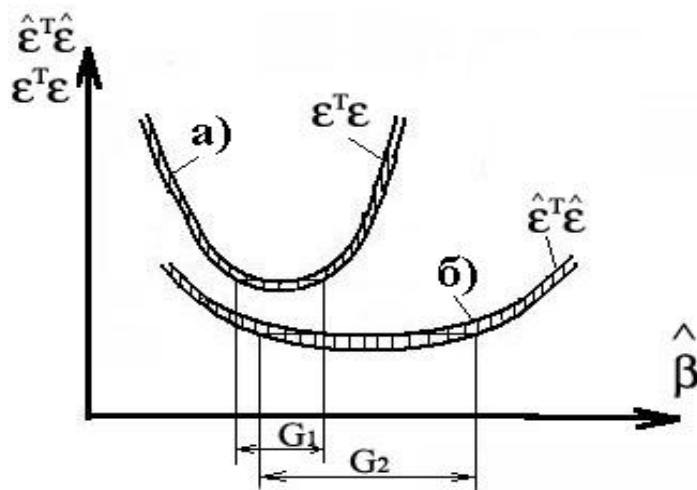


Рис. 3.3. Зона невизначеності G оптимального значення МНК (а) і УМНК (б) оцінки $\hat{\beta}$.

Як витікає з рис. 3.3, бажано було б зменшити розкид значень функціоналу, не зменшуючи його кривизни в зоні екстремуму. Це можливо зробити для незгладжених X, Y шляхом додаткового усереднення по множині квазістатистично незалежних функціоналів, близьких до середньо квадратичного. Такими функціоналами можуть бути зсунуті у часі t на інтервал Θ середні добутки,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t + \Theta) dt.$$

Усереднюючи їх на інтервалі

$[-\tau_1, \tau_1]$, отримаємо шуканий інтегро-кореляційний критерій:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\Theta) \int_0^T \varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t + \Theta) dt d\Theta, \quad (3.20)$$

де $\eta(\Theta)$ – функція ваги, в найпростішому вигляді одинична.

Необхідна умова мінімуму \mathbf{I} по $\hat{\beta}_k, k = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{A}}{\partial \beta_k} &= \frac{1}{2} \int_{-t_1}^{t_1} \eta(\Theta) \int_0^T \left[\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \beta_k} \cdot \varepsilon(t + \Theta) + \varepsilon(t) \cdot \frac{\partial \varepsilon(t + \Theta)}{\partial \beta_k} \right] dt d\Theta = \\
&= \int_{-t_1}^{t_1} \eta(\Theta) \int_0^T (-x_k(t)) \cdot \left[y(t + \Theta) - \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot x_i(t + \Theta) \right] + \\
&+ (-x_k(t + \Theta)) \cdot \left[y(t) - \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot x_i(t) \right] dt d\Theta = 0, \\
k &= \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

З виразу (3.21) витікає система нормальних рівнянь:

$$A \cdot \hat{\beta} = B, \tag{3.22}$$

де A – матриця $n \times n$ з елементами a_{ik} ;

B – матриця-стовпчик $n \times 1$ з елементами b_k ;

$$a_{ik} = \int_{-t_1}^{t_1} \eta(\Theta) \int_0^T [x_i(t + \Theta) \cdot x_k(t) + x_i(t) \cdot x_k(t + \Theta)] dt d\Theta, \tag{3.23}$$

$$b_k = \int_{-t_1}^{t_1} \eta(\Theta) \int_0^T [y(t + \Theta) \cdot x_k(t) + y(t) \cdot x_k(t + \Theta)] dt d\Theta. \tag{3.24}$$

Для дискретних у часі t вибірок інтеграли замінимо відповідними сумами.

Тоді

$$a_{ik} = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \cdot \sum_{j=1}^M [x_i(j+l) \cdot x_k(j) + x_i(j) \cdot x_k(j+l)], \tag{3.25}$$

$$b_k = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \cdot \sum_{j=1}^M [y(j+l) \cdot x_k(j) + y(j) \cdot x_k(j+l)]. \tag{3.26}$$

Рішення системи (3.22) дає шукану оцінку $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = A^{-1} \cdot B. \tag{3.27}$$

3.3.2. Аналіз складових методу

Проаналізуємо наскільки ця оцінка відрізняється від істинної β^* (3.2). Для цього спочатку розглянемо одну із складових суми по l , наприклад, якщо $l = -m$. Тобто є зсув $\tau = -m\Delta t$, де Δt – крок дискретності вимірів X, Y у часі t . Тоді, без урахування ваги $\eta(m)$, $-m$ -а складова дискретної моделі

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M \varepsilon(j) \cdot \varepsilon(j+l) \tag{3.28}$$

інтегро-корельованого критерію (3.20) буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_m &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{-\tau} = \frac{1}{2} (\mathbf{Y}_0 - \mathbf{X}_0 \hat{\boldsymbol{\beta}})^T (\mathbf{Y}_{-\tau} - \mathbf{X}_{-\tau} \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{Y}_0^T \mathbf{Y}_{-\tau} - \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\beta}}^T (\mathbf{X}_0^T \mathbf{Y}_{-\tau} + \mathbf{X}_{-\tau}^T \mathbf{Y}_0) + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_{-\tau} \hat{\boldsymbol{\beta}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

де індекс $-\tau$ означає зсув $x_i(t)$, $y(t)$ на $\tau = m\Delta t$:

$$\mathbf{X}_{-\tau} = \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & \dots & x_n(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M-m) & \dots & x_n(M-m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(M-m) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_1(m+1) & \dots & x_n(m+1) \\ x_1(m+2) & \dots & x_n(m+2) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M) & \dots & x_n(M) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} y(m+1) \\ y(m+2) \\ \dots \\ y(M) \end{bmatrix}.$$

Якщо зсув τ в (3.29) більше часу кореляції поміх N і $\tilde{\varepsilon}$, то математичне очікування \mathbf{I}_m (3.29) буде інваріантне до цих поміх.

$$M \{ \mathbf{I}_m \} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{*T} \boldsymbol{\varepsilon}_{-\tau}^*.$$

Необхідна умова мінімуму \mathbf{I}_m :

$$\frac{\partial \mathbf{I}_m}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}^T} = -\frac{1}{2} (\mathbf{X}_0^T \mathbf{Y}_{-\tau} \mathbf{Y}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_{-\tau} + \mathbf{X}_{-\tau}^T \mathbf{X}_0) \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = 0. \quad (3.30)$$

Достатня умова:

$$\frac{1}{2} \det(\mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_{-\tau} + \mathbf{X}_{-\tau}^T \mathbf{X}_0) > 0. \quad (3.31)$$

На відміну від МНК для додатної визначеності матриці $(\mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_{-\tau} + \mathbf{X}_{-\tau}^T \mathbf{X}_0)$ в (3.31) недостатньо лінійної незалежності функцій $x_i(k)$. Визначимо верхню

границю τ_{zp} для зсуву τ , за якого нерівність (3.31) перетворюється в рівність, тобто система стає виродженою.

Так як поміха N лише покращує обумовленість матриці $X^T X$, то при виведенні τ_{zp} будемо брати $N = 0$, $X = X^*$. Представимо $X_{-\tau}^*$ рядом Тейлора:

$$X_{-\tau}^* = X_0^* - \tau \dot{X}_0^* + R_1(\ddot{X}_0^*), \quad (3.32)$$

де $\dot{X}_0^* = \frac{d}{dt} X_0^*$, $R_1(\ddot{X}_0^*)$ – матриця залишкових членів в розкладанні (3.32). З точністю до $R_1(\ddot{X}_0^*)$ маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X_0^{*T} X_{-\tau}^*) + X_{-\tau}^{*T} X_0^* &\doteq \frac{1}{2} [X_0^{*T} (X_0^* - \tau \dot{X}_0^*) + (X_0^* - \tau \dot{X}_0^*)^T X_0^*] = \\ &= X_0^{*T} X_0^* - \frac{\tau}{2} (X_0^{*T} \dot{X}_0^* + \dot{X}_0^{*T} X_0^*) = \Gamma - \frac{\tau}{2} \Gamma_1, \end{aligned} \quad (3.33)$$

де Γ , Γ_1 – симетричні матриці. Γ – матриця Грама, тому вона додатньо визначена. Відомо [11], що дві симетричні матриці, з яких одна додатна визначена перетворенням T , можна одночасно привести до діагонального виду так, що на діагоналі матриці Γ будуть всі одиниці, а на діагоналі Γ_1 – власні значення λ_i матриці $\Gamma^{-1} \Gamma_1$ (для (2.33) – $\frac{\tau}{2} \Gamma^{-1} \Gamma_1$):

$$T^{-1} \left(\Gamma - \frac{\tau}{2} \Gamma_1 \right) T = \begin{bmatrix} 1 \cdots 0 \\ \vdots \\ 0 \cdots 1 \end{bmatrix} - \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{11} \cdots 0 \\ \vdots \\ 0 \cdots \lambda_{1n} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Граничне значення τ_{zp} зсуву визначається за умови:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\tau_p}{2} \max_i \lambda_{1i} &= 0, \text{ або} \\ \tau_{zp} &= \frac{2}{\max_i \lambda_{1i}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

де λ_{1i} – власні значення матриці $\frac{\tau}{2} \Gamma^{-1} \Gamma_1$. Ясно, що чим більше τ , тим гірше обумовлена матриця Γ (більше $\|\Gamma^{-1}\|$), тим більше $\max_i \lambda_{1i}$, і, як наслідок, менш можливий зсув τ_{zp} .

3.3.3. Визначення максимального зсуву

Розглянемо, як вплине симетрія зсуву $\pm \tau$ на граничне значення τ_{zp} .

Тут

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \varepsilon_0^T (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) = \left(\mathbf{Y}_0 - \mathbf{X}_0 \hat{\beta} \right)^T \left(\mathbf{Y}_\tau + \mathbf{Y}_{-\tau} - (\mathbf{X}_\tau + \mathbf{X}_{-\tau}) \hat{\beta} \right) = \\ &= \mathbf{Y}_0^T (\mathbf{Y}_\tau + \mathbf{Y}_{-\tau}) - \hat{\beta}^T \left[\mathbf{X}_0^T (\mathbf{Y}_\tau + \mathbf{Y}_{-\tau}) + (\mathbf{X}_\tau + \mathbf{X}_{-\tau})^T \mathbf{Y}_0 \right] + \\ &+ \hat{\beta}^T \mathbf{X}_0^T (\mathbf{X}_\tau + \mathbf{X}_{-\tau}) \beta^T, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_1(m+1) & \dots & x_n(m+1) \\ x_1(m+2) & \dots & x_n(m+2) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M-m) & \dots & x_n(M-m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} y(m+1) \\ y(m+2) \\ \vdots \\ y(M-m) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_\tau = \begin{bmatrix} x_1(2m+1) & \dots & x_n(2m+1) \\ x_1(2m+2) & \dots & x_n(2m+2) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M) & \dots & x_n(M) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_\tau = \begin{bmatrix} y(2m+1) \\ y(2m+2) \\ \vdots \\ y(M) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{-\tau} = \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & \dots & x_n(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M-2m) & \dots & x_n(M-2m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(M-2m) \end{bmatrix}.$$

Необхідна умова мінімуму I :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \hat{\beta}^T} &= \varepsilon_0^T (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) = \left[\mathbf{X}_0^T (\mathbf{Y}_\tau + \mathbf{Y}_{-\tau}) + (\mathbf{X}_\tau + \mathbf{X}_{-\tau})^T \mathbf{Y}_0 \right] + \\ &+ \left[\mathbf{X}_0^T (\mathbf{X}_\tau + \mathbf{X}_{-\tau}) + (\mathbf{X}_\tau + \mathbf{X}_{-\tau})^T \mathbf{X}_0 \right] \hat{\beta} = 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

Достатня умова:

$$\det \frac{\partial^2 \mathbf{I}}{\partial \hat{\beta}^T \partial \hat{\beta}} = \left| \mathbf{X}_0^T (\mathbf{X}_\tau + \mathbf{X}_{-\tau}) + (\mathbf{X}_\tau + \mathbf{X}_{-\tau})^T \mathbf{X}_0 \right| > 0. \quad (3.38)$$

Аналогічно виводу (3.35) знайдемо граничне τ_{zp} із умови, що (3.18) дорівнює нулю. Розглянемо вже три члена ряду (3.32):

$$\begin{aligned}
X_{\tau}^* &= X_0^* + \tau \dot{X}_0^* + \frac{\tau^2}{2} \ddot{X}_0^* + R_3(\ddot{X}^*, \tau), \\
X_{-\tau}^* &= X_0^* - \tau \dot{X}_0^* + \frac{\tau^2}{2} \ddot{X}_0^* + R_3(\ddot{X}^*, -\tau).
\end{aligned}
\tag{3.39}$$

З точністю до $R_3(\ddot{X}, \pm\tau)$, получимо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} X_0^{*T} \left[(X_{\tau}^* + X_{-\tau}^*) + (X_{\tau}^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* \right] \approx \\
&\approx X_0^{*T} X_0^* + \frac{\tau^2}{4} \left[X_0^{*T} \ddot{X}_0^* + \ddot{X}_0^{*T} X_0^* \right] = \\
&= \Gamma + \frac{\tau^2}{4} \Gamma_2,
\end{aligned}
\tag{3.40}$$

де Γ і Γ_2 – симетричні матриці, Γ – додатньо визначена матриця Грама. Тоді, як і (3.34), вираз (3.40) приводиться перетворенням T до виду:

$$T^{-1} \left(\Gamma + \frac{\tau^2}{4} \Gamma_2 \right) T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cdot \cdot 1 \end{bmatrix} + \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} \lambda_{21} & 0 \\ 0 & \cdot \cdot \lambda_{2n} \end{bmatrix},
\tag{3.41}$$

де $-\lambda_{2i}$ власні значення матриці $\frac{\tau^2}{4} \Gamma^{-1} \Gamma_2$ ($i = \overline{1, n}$).

Граничне значення $\tau_{гр.}$ зсуву τ буде визначатися із умови

$$1 + \frac{\tau_{гр.}^2}{4} \max_i |\lambda_{2i}| = 0$$

або

$$\tau_{гр.} = \frac{2}{\sqrt{\max_i |\lambda_{2i}|}},
\tag{3.42}$$

де, на відміну від (3.35) для несиметричного зсуву, $\max_i \{\lambda_{2i}\}$ береться по множині

$\{\lambda_{2i}\}$ від'ємних власних значень матриці $\frac{\tau^2}{4} \Gamma^{-1} \Gamma_2$. Якщо продовжити розкладання

(3.39) і підставити його в (3.38), легко впевнитися, що всі непарні члени розкладання (3.38) скоротяться. Таким чином, для точних X^* матриця

$X_0^{*T} (X_{\tau}^* + X_{-\tau}^*) + (X_{\tau}^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^*$ відрізняється від матриці $X_0^{*T} X_0^*$

МНК лише парними членами розкладання (3.39). Ураховуючи припущення

гладкості $x_0(t)$ можна очікувати, що ця різниця буде суттєво менше, ніж в (3.1) для

точних X^* , так як там присутні всі члени розкладання (3.39). Таким чином,

граничне значення (3.42) більше, ніж (3.35), а при тому ж τ показник (3.36) при

неточних $X=X^*+N$ ближче до показника МНК (при неточних X^*), ніж показник (3.29). Щоб це підтвердити, розглянемо зсув і коваріацію оцінки $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \left[X_0^T (X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0 \right]^{-1} \times \\ \times \left[X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0 \right]. \quad (3.43)$$

3.3.4. Оцінка зміщення оцінки вектора $\hat{\beta}$

Зсув $\Delta \hat{\beta}$:

$$\Delta \hat{\beta} = M \{ \hat{\beta} - \hat{\beta}^* \} = M \left\{ \begin{aligned} & \left[X_0^T (X_\tau + X_{-\tau}) X_0 \right]^{-1} \left[X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0 \right] - \\ & \left[X_0^{*T} X_0^* \right]^{-1} X_0^{*T} Y_0^* \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

або

$$\Delta \hat{\beta} = \mathbf{M} \left\{ \left[X_0^T (X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0 \right]^{-1} \times \right. \\ \times \mathbf{M} \left\{ X_0^T (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0 \right\} - \left. \left(X_0^{*T} X_0^* \right)^{-1} X_0^{*T} Y_0^* = \right. \\ = \left[X_0^{*T} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* \right]^{-1} \times \\ + \mathbf{M} \left\{ N_0^T (N_\tau + N_{-\tau}) + (N_\tau + N_{-\tau})^T N_0 \right\}^{-1} \times \\ \times \left[X_0^T (Y_\tau^* + Y_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T Y_0^* + \right. \\ \left. + \mathbf{M} \left\{ X_0^{*T} (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T \varepsilon_0 \right\} \right] - \left. \left(X_0^{*T} X_0^* \right)^{-1} X_0^{*T} Y_0^* \right. \quad (3.45)$$

Скориставшись розкладанням (3.39) і формулою (3.40), отримаємо:

$$\Delta \hat{\beta} = \left[(4\Gamma + \tau^2 \Gamma_2) + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau) \right]^{-1} \times \\ \times \left[4 X_0^{*T} Y_0^* + \tau^2 (X_0^{*T} \ddot{Y}_0^* + \ddot{X}_0^{*T} Y_0^*) + 2(M - 2m) \times \right. \\ \left. \times (R_{X^* \varepsilon^*}(\tau)) \right] - \Gamma^{-1} X_0^{*T} Y_0^*, \quad (3.46)$$

де $R_{NN}(\tau)$ – матриця ($n \times n$) кореляційних функцій $R_{N_i N_j}(\tau)$, $i, j = \overline{1, n}$,

$R_{X^* \varepsilon^*}(\pm \tau)$ – вектор-стовпчик ($n \times 1$) кореляційних функцій $R_{X_i^* \varepsilon_j^*}(\pm \tau)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Можна показати, що зсув $\Delta \hat{\beta}$ визваний членами $(M - 2m) R_{NN}(\tau)$ і $(M - 2m)(R_{X^* \varepsilon^*}(\tau) + R_{X^* \varepsilon^*}(-\tau))$. Перший, при τ , більшому часу кореляції поміх, дорівнює нулю. Другий – можна наближено представити так:

$$(M - 2m) [R_{X^* \varepsilon^*}(\tau)] \approx \frac{\tau^2}{2} (X_0^{*T} \ddot{\varepsilon}_0^* + \ddot{X}_0^{*T} \varepsilon_0^*), \quad (3.47)$$

$$\text{Тоді } \Delta \hat{\beta} = (2\Gamma + \frac{\tau^2}{2} \Gamma_2)^{-1} (M - 2m) (R_{X^* \varepsilon^*}(\tau) + (R_{X^* \varepsilon^*}(-\tau))). \quad (3.48)$$

Звідси бачимо, що зсув $\Delta \hat{\beta}$ зменшився, якщо

$$\left(\frac{M - 2m}{M - m} \right) \left\| (2\Gamma + \frac{\tau^2}{2} \Gamma_2)^{-1} \right\| < \left\| (2\Gamma - \tau \Gamma_1)^{-1} \right\|. \quad (3.49)$$

3.3.5. Оцінка дисперсії оцінки вектора $\hat{\beta}$

Коваріація оцінок $\hat{\beta}$:

$$\text{cov}[\hat{\beta}] = \mathbf{M} \left\{ (\hat{\beta} - \mathbf{M}\{\hat{\beta}\})(\hat{\beta} - \mathbf{M}\{\hat{\beta}\})^T \right\}$$

Представимо $\hat{\beta}$ у вигляді:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} = & [X_0^{*T} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau) + \\ & + \xi(X^*, N, \tau)]^{-1} [(X_0^{*T} + N_{0_0}^T)(Y_\tau^* + C + Y_{-\tau}^* + \varepsilon_{-\tau}) + \\ & + (X_\tau^* + N_\tau + X_{-\tau}^* + N_{-\tau})^T (Y_0^* + \varepsilon_0)]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

При великих M , нехтуючи випадковою складовою і випадковими компонентами $N_0^T(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})$, $(N_\tau + N_{-\tau})\varepsilon_0$ другого порядку малості, позначивши

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} C_1 &= [X_0^{*T} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau)]^{-1} X_0^{*T}, \\ \frac{1}{4} C_1' &= [X_0^{*T} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau)]^{-1} X_{-\tau}^{*T}, \\ \frac{1}{4} C_1'' &= [X_0^{*T} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau)]^{-1} X_\tau^{*T}, \\ \frac{1}{4} C_2 &= [X_0^{*T} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau)]^{-1} Y_0^*, \\ \frac{1}{4} C_2'' &= [X_0^{*T} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau)]^{-1} Y_{-\tau}^*, \\ \frac{1}{4} C_2''' &= [X_0^{*T} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau)]^{-1} Y_\tau^*. \end{aligned}$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned}
\text{cov}[\hat{\beta}] &\equiv \mathbf{M}\left\{\left[\frac{1}{4}C_1'(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) + \frac{1}{4}(C_1'' + C_1''')\varepsilon_0 + \frac{1}{4}C_2'(N_\tau + N_{-\tau}) + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4}(C_2'' + C_2''')N_0\right]\left[\frac{1}{4}C_1'(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) + \frac{1}{4}(C_1'' + C_1''')\varepsilon_0 + \frac{1}{4}C_2'(N_\tau + N_{-\tau}) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4}(C_2'' + C_2''')N_0\right]^T\} = \frac{1}{16}C_1' \mathbf{M}\{(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^T\}C_1'^T + \\
&+ \frac{1}{16}C_1' \mathbf{M}\{(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})\varepsilon_0^T\}(C_1'' + C_1''')^T + \frac{1}{16}(C_1'' + C_1''')\mathbf{M}\{\varepsilon_0(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^T\}C_1'^T + \\
&+ \frac{1}{16}(C_1'' + C_1''')\mathbf{M}\{\varepsilon_0\varepsilon_{\tau,0}^T\}(C_1'' + C_1''')^T + \frac{1}{16}C_1' \mathbf{M}\{(N_\tau + N_{-\tau})(N_\tau + N_{-\tau})^T\}C_1'^T \\
&+ \frac{1}{16}C_1' \mathbf{M}\{(N_\tau + N_{-\tau})N_0^T\}(C_1'' + C_1''')^T + \frac{1}{16}(C_1'' + C_1''')\mathbf{M}\{N_0(N_\tau + N_{-\tau})^T\}C_1'^T + \\
&+ \frac{1}{16}(C_1'' + C_1''')\mathbf{M}\{N_0N_{\tau,0}^T\}(C_1'' + C_1''')^T.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Або

$$\begin{aligned}
\text{cov}[\hat{\beta}] &= C_5'\left[\frac{1}{16}\mathbf{M}\{(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^T\} + \right. \\
&+ \frac{1}{8}\mathbf{M}\{(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})\varepsilon_0^T\} + \frac{1}{8}\mathbf{M}\{\varepsilon_0(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^T\} + \\
&+ \left. \frac{1}{4}\mathbf{M}\{\varepsilon_0\varepsilon_{\tau,0}^T\}C_5^T + C_6\left[\frac{1}{16}\mathbf{M}\{(N_\tau + N_{-\tau})(N_\tau + N_{-\tau})^T\} + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{1}{8}\mathbf{M}\{(N_\tau + N_{-\tau})N_0^T\} + \frac{1}{8}\mathbf{M}\{N_0(N_\tau + N_{-\tau})^T\} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4}\mathbf{M}\{N_0N_{\tau,0}^T\}C_6^T = C_5Q_3C_5^T + C_6F_3C_6^T,
\end{aligned} \tag{3.52}$$

де $C_1' \approx C_1'' \approx C_1''' = C_5$,

$C_2' \approx C_2'' \approx C_2''' = C_6$.

Враховуючи співвідношення (3.49), можна очікувати, що при $|\tau| > 0$

$$\|C_3\| > \|C_5\| > \|C_1\|, \quad \|C_4\| > \|C_6\| > \|C_2\|,$$

тоді як $\|Q_3\| = \|Q_2\|$, $\|F_3\| = \|F_2\|$,

внаслідок того, що в (3.52) має місце співвідношення діагональних і нільпотентних матриць. Тому при рівних τ зсув і коваріація оцінок $\hat{\beta}$ при $\pm\tau$ буде менше, ніж для $-\tau$. Тобто симетричний зсув наближає критерій $\varepsilon_0^T(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})$ до ідеального $\varepsilon_0^*{}^T\varepsilon_0^*$.

Таким чином, кожна m -а складова інтегро-кореляційного критерію (3.28) в межах зсуву $\pm m\Delta t = \pm\tau$, меншого по модулю, ніж τ_{sp} (3.42), при її мінімізації дає

оцінку $\hat{\beta}$ (2.3.43), близьку до істинної β^* , якщо зсув τ більший часу $T_{кор}$. Кореляції поміх і менше граничного $\tau_{гр}$.

Тоді вагову функцію $\eta(\Theta)$ найпростіше задавати з умови

$$\eta(\Theta) = \begin{cases} 0, & T_{кор.} \geq |\Theta| \geq \tau_{гр}. \\ 1, & T_{кор.} < |\Theta| < \tau_{гр}. \end{cases} \quad (3.53)$$

Якщо поміхи N_X – «білий шум», то вже при зсуві на один крок кореляція відсутня, а похибки часткових оцінок $\hat{\beta}$ для кожної l -ої складової критерію (3.28), статистично незалежні. Тоді середнє значення $\hat{\beta}$ по p частковим оцінкам (відкидається оцінка при нульовому зсуві) буде мати, згідно до законів статистики [19], в \sqrt{p} – менший розкид і нульовий зсув.

3.3.6. Рекурентна форма обчислень

Рекурентний МНК при нормальному розподілі апріорних оцінок β_a і шумів ε приводить до байєсовських оцінок [4]. Але присутність шумів N_X в X вносить зсув в оцінки $\hat{\beta}$. Тому розглянемо рекурентну форму обчислення для M вимірів кроком Δt , тобто

$$t_k = k\Delta t, \quad k = \overline{1, M};$$

$$I = \sum_{k=1}^M \left[\mathcal{Y}(k) - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_{i2} x_i(k) \right] \left[\mathcal{Y}(k+m) - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_{i2} x_i(k+m) \right]. \quad (3.54)$$

З умови (3.30) отримаємо систему:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \left[\mathcal{Y}(k) x_j(k+m) + \mathcal{Y}(k+m) x_j(k) \right] = \\ & = \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i \sum_{k=1}^M \left[x_i(k) x_j(k+m) + x_j(k+m) x_i(k) \right], \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

або у векторній формі:

$$\left[X_0^T X_m + X_m^T X_0 \right] \hat{\beta} = X^T Y_m + X_m^T Y_0. \quad (3.56)$$

Позначимо

$$P_2 = \left[X_0^T X_m + X_m^T X_0 \right]^{-1}, \quad (3.57)$$

тоді

$$\hat{\beta}_2 = P_2 \left(X^T Y_m + X_m^T Y_0 \right). \quad (3.58)$$

Представимо (3.57) в блочному вигляді для $(k+1)$ -го виміру:

$$\begin{aligned}
P_{k+1} &= [X_{0k}^T X_{mk} + X_{mk}^T X_{0k}]^{-1} = \\
&= \left[\begin{bmatrix} X_{0(k-1)} \\ X_{0k}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{m(k-1)} \\ X_{mk}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{m(k-1)} \\ X_{mk}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{0(k-1)} \\ X_{0k}^T \end{bmatrix} \right]^{-1} = \\
&= \left[\begin{bmatrix} X_{0(k-1)}^T X_{m(k-1)} + X_{m(k-1)}^T X_{0(k-1)} \\ X_{0k} X_{mk}^T + X_{mk} X_{0k}^T \end{bmatrix} \right]^{-1} = \\
&= \left[P_k^{-1} + \begin{bmatrix} X_{0k} X_{mk}^T + X_{mk} X_{0k}^T \end{bmatrix} \right]^{-1},
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$x_{0k}^T = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)],$$

де $x_{mk}^T = [x_1(k+m), x_2(k+m), \dots, x_n(k+m)].$

Із (3.59) знайдемо, що

$$P_{k+1}^{-1} - P_k^{-1} = x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T. \tag{3.60}$$

Тоді получимо $\hat{\beta}$ (3.58) для k -го виміру:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}(k+1) &= P_{k+1} (X_{0k}^T Y_{mk} + X_{mk}^T Y_{0k}) = \\
&= P_{k+1} \left[\begin{bmatrix} X_{0(k-1)}^T, X_{0k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{m(k-1)} \\ \mathcal{Y}(k+m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{m(k-1)}^T, X_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{0(k-1)} \\ \mathcal{Y}(k) \end{bmatrix} \right] = \\
&= P_{k+1} \left[P_k^{-1} \hat{\beta}(k) + x_{0k} \mathcal{Y}(k+m) + x_{mk} \mathcal{Y}(k) \right] = \\
&= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \left[x_{0k} \mathcal{Y}(k+m) + x_{mk} \mathcal{Y}(k) + (P_k^{-1} - P_{k+1}^{-1}) \hat{\beta}(k) \right].
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Із (3.61), враховуючи (3.60), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}(k+1) &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} [x_{0k} \mathcal{Y}(k+m) + x_{mk} \mathcal{Y}(k) - \\
&- (x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T) \hat{\beta}(k)] = \\
&= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} [x_{0k} (\mathcal{Y}(k+m) - x_{mk}^T \hat{\beta}(k)) + x_{mk} (\mathcal{Y}(k) - x_{0k}^T \hat{\beta}(k))] = \\
&= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} [x_{0k} \varepsilon(k+m) + x_{mk} \varepsilon(k)],
\end{aligned} \tag{3.62}$$

де P_{k+1} – визначено згідно до (3.59).

Для критерія (3.36), з умови мінімуму, отримаємо систему:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^M \left[(\mathcal{Y}(k+m) + \mathcal{Y}(k-m)) x_j(k) + \mathcal{Y}(k) (x_j(k+m) + x_j(k-m)) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i \left[(x_i(k+m) + x_i(k-m)) x_j(k) + x_i(k) (x_j(k+m) + x_j(k-m)) \right]
\end{aligned} \tag{3.63}$$

або у векторній формі:

$$\left[X_0^T Z + Z^T X_0 \right] \hat{\beta}_3 = X_0^T (Y_m + Y_{-m}) + Z^T Y_0, \tag{3.64}$$

де $Z = X_m + X_{-m}$.

Позначимо

$$\left[X_0^T Z + Z^T X_0 \right]^{-1} = P_3. \quad (3.65)$$

Тоді

$$\hat{\beta} = P_3 \left[X_0^T (Y_m + Y_{-m}) + Z^T Y_0 \right]. \quad (3.66)$$

Аналогічно (3.59) ÷ (3.61) получимо:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \left[X_{0k}^T Z_k + Z_k^T X_{0k} \right]^{-1} = \\ &= \left[\begin{bmatrix} X_{0(k-1)} \\ X_{0k}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_{k-1} \\ X_{mk}^T + X_{-mk}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{k-1} \\ X_{mk}^T + X_{-mk}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{0(k-1)} \\ X_{0k}^T \end{bmatrix} \right]^{-1} = \\ &= \left[P_k^{-1} + X_{0k} (X_{mk} + X_{-mk})^T + (X_{mk} + X_{-mk}) X_{0k}^T \right]^{-1}; \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{-1} - P_k^{-1} &= X_{0k} (X_{mk} + X_{-mk})^T + (X_{mk} + X_{-mk}) X_{0k}^T; \\ \hat{\beta}(k+1) &= P_{k+1} \left[X_{0k}^T (Y_{mk} + Y_{-mk}) + Z_k^T Y_{0k} \right] = \\ &= P_{k+1} \left[\begin{bmatrix} X_{0(k-1)}^T, X_{0k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{m(k-1)} + Y_{-m(k-1)} \\ y(k+m) + y(k-m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{k-1}^T, X_{mk} + X_{-mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{0(k-1)} \\ y(k) \end{bmatrix} \right] = \\ &= P_{k+1} \left[P_k^{-1} \hat{\beta}(k) + X_{0k} (y(k+m) + y(k-m)) + (X_{mk} + X_{-mk}) y(k) \right] = \\ &= \hat{\beta}(k) P_{k+1} \left[X_{0k} (y(k+m) + y(k-m)) + (X_{mk} + X_{-mk}) y(k) + \right. \\ &\quad \left. + (P_k^{-1} + P_{k+1}^{-1}) \hat{\beta}(k) \right]; \end{aligned} \quad (3.68)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} u(k) &= y(k+m) + y(k-m), \\ z_k &= X_{mk} + X_{-mk}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(k+1) &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \left[X_{0k} u(k) + z_k y(k) - (X_{0k} z_k^T + z_k X_{0k}^T) \hat{\beta}(k) \right] = \\ &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \left[X_{0k} (u(k) - z_k^T \hat{\beta}(k)) + z_k (y(k) - X_{0k}^T \hat{\beta}(k)) \right] = \\ &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \left[X_{0k} (\varepsilon(k+m) + \varepsilon(k-m)) + z_k \varepsilon(k) \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Оцінка рекурентного інтегрованого МНК дорівнює усередненій по $m = \overline{1, P}$ сумі оцінок (3.69). При цьому можна використовувати робастні алгоритми розрахунку середнього. Наприклад, алгоритм Тьюкі [12], де замість середнього береться медіана розподілу величин $\hat{\beta}_i$ по m , $i = \overline{1, n}$. Для цього оцінки $\hat{\beta}_i(m)$ ранжируються по величині, відкидаються найменші і найбільші значення, а ті, що залишились, усереднюються.

Параметри $\eta(\Theta)$ і P інтегрованого МНК можуть оптимізуватися по зовнішньому критерію [Нахненко] (стабільності, точності прогнозу та ін.).

3.4. Метод допоміжної змінної (МДЗ)

3.4.1. Сутність методу

В тих випадках, коли модель досить точно відображує поведінку об'єкта (процесу), що досліджується, тобто ε^* несуттєва, а шуми N_X у вимірах X значні і $x_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) знакозмінні, досить простим і точним може бути метод допоміжної змінної U_i , яку задають, як $\text{sign } x_i(t)$. При цьому, щоб частково зменшити вплив поміхи N_X , функції $U_i(t)$ (рис. 3.4) задають так:

$$U_i(t) = \begin{cases} \text{sign } x_i(t), & |x_i(t)| \geq \Delta i, \\ 0, & |x_i(t)| < \Delta i. \end{cases} \quad (3.70)$$

Тоді, згідно методу допоміжної змінної, існує оцінка $\hat{\beta}$ з рівняння

$$U^T Y = U^T X \hat{\beta}, \quad (3.71)$$

яка дорівнює:

$$\hat{\beta} = (U^T X)^{-1} U^T Y, \quad (3.72)$$

де

$$U^T X = \begin{bmatrix} \sum_{k_1=1}^{M_1} x_1(k_1)U_1(k_1), & \sum_{k_1=1}^{M_1} x_2(k_1)U_1(k_1), & \dots & \sum_{k_1=1}^{M_1} x_n(k_1)U_1(k_1) \\ \sum_{k_2=1}^{M_2} x_1(k_2)U_2(k_2), & \sum_{k_2=1}^{M_2} x_2(k_2)U_2(k_2), & \dots & \sum_{k_2=1}^{M_2} x_n(k_2)U_2(k_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k_n=1}^{M_n} x_1(k_n)U_n(k_n), & \sum_{k_n=1}^{M_n} x_2(k_n)U_n(k_n), & \dots & \sum_{k_n=1}^{M_n} x_n(k_n)U_n(k_n) \end{bmatrix},$$

$$U^T Y = \begin{bmatrix} \sum_{k_1=1}^{M_1} y(k_1)U_1(k_1) \\ \sum_{k_2=1}^{M_2} y(k_2)U_2(k_2) \\ \dots \\ \sum_{k_n=1}^{M_n} y(k_n)U_n(k_n) \end{bmatrix},$$

$\{k_i\}$ – множина дискретів k , в яких виконується умова (3.70).

3.4.2. Зсув оцінок (3.72)

Якщо поміхи N_X взаємно із X^* , Y^* некорельовані і малі, то наближено

$$U_i(t) \cong \text{sign } x_i^*(t)$$

і оцінка $\hat{\beta}$ при $\varepsilon^* = 0$ буде незмінною, так як

$$M\{U^T X\} = U^{*T} X, \quad M\{U^T Y\} = U^{*T} Y.$$

Зсув може мати місце, якщо $\varepsilon \neq 0$:

$$\Delta \hat{\beta} = (U^{*T} X^*)^{-1} U^{*T} \varepsilon^*, \quad (3.73)$$

так як із умови $X^{*T} \varepsilon^* = 0$ в загальному випадку не впливає, що

$$U^{*T} \varepsilon^* = 0.$$

Взагалі, зсув (3.73) менше зсуву оцінок МНК через поміхи N_X , якщо вплив на $\varepsilon \neq 0$ на (3.73) менше впливу N_X на зсув МНК-оцінок.

3.4.3. Коваріація оцінок (3.72)

$$\text{cov}[\hat{\beta}] = \mathbf{M}\{[\hat{\beta} - \mathbf{M}\{\hat{\beta}\}][\hat{\beta} - \mathbf{M}\{\hat{\beta}\}]^T\}.$$

Покладаючи некорельованість випадкових похибок в $(U^T X)^{-1}$ і $(U^T Y)$ та розкладаючи в ряд

$$\hat{\beta} \approx \mathbf{M}\{\hat{\beta}\}[\delta(U^T X)^{-1}][U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1}[\delta U^T Y^* + U^{*T} N_y], \quad (2.74)$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &\approx \mathbf{M}\{[[\delta(U^T X)^{-1}][U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1}[\delta U^T Y^* + U^{*T} N_y]] \times \\ &\times [[\delta(U^T X)^{-1}][U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1}[\delta U^T Y^* + U^{*T} N_y]]^T\} = \\ &= \mathbf{M}\{[\delta(U^T X)^{-1}][U^{*T} Y^*] \cdot [U^{*T} Y^*]^T [\delta(U^T X)^{-1}]^T\} + \\ &+ [U^{*T} X^*]^{-1} Y^{*T} \mathbf{M}\{\delta U \cdot \delta U^T\} [(U^{*T} X^*)^T]^{-1} Y^* + \\ &+ [U^{*T} X^*]^{-1} U^{*T} \mathbf{M}\{N_y N_y^T\} [(U^{*T} X^*)^T]^{-1} U^*, \end{aligned} \quad (3.75)$$

де перша і друга компоненти залежать від порогів Δ_i (3.70), шумів N_X , а третя – від шумів N_Y . Для конкретних умов існує оптимальний вектор Δ^* порогів, Δ_i , $i = \overline{1, n}$, при якому норма коваріації (3.75) мінімальна. Якщо поміхи N_X , N_Y некорельовані, а $\tilde{\varepsilon}^* \rightarrow 0$, то оцінка (3.72) буде незміщеною. Ефективність оцінки (3.72) може оптимізуватися по зовнішньому критерію шляхом підбору вектора Δ .

Оцінки (3.72) в МДЗ можна розраховувати за рекурентним алгоритмом:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(k+1) &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} [U(k) \cdot \varepsilon(k)], \\ P_{k+1} &= [P_k^{-1} + U(k) \cdot x^T(k)]^{-1}, \\ \varepsilon(k) &= y(k) - x^T(k) \cdot \hat{\beta}(k), \end{aligned} \quad (3.76)$$

де U_k – може бути не тільки релейною (3.70), а взагалі будь-якою системою лінійно-незалежних, або, навіть, ортогональних функцій. Але, щоб оцінка (3.76) наближалась до оптимальної (МНК-оцінки для точних X^* , Y^*) бажано, щоб допоміжна змінна була близька до X^* . Наприклад, $U = \hat{X}$. Це забезпечить додатну визначеність матриці $U^T X = \hat{X}^T X$, але згладжування X дещо погіршить

число обумовленості матриці $\hat{X}^T X$. Тому важливими є алгоритми квазидіагоналізації даних X , розглянути далі.

Глава 4. Підвищення інформативності даних і, як наслідок, точності оцінок параметрів об'єктів, що досліджуються

4.1. Підвищення інформативності вибірок даних в умовах пасивного експерименту

Якщо точні значення X^* , Y^* не на всіх ділянках вибірки достатньо потужні і мають ділянки з лінійно незалежними компонентами $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, то зі зростанням довжини M такої вибірки зменшення коваріації $\text{cov} \hat{\beta}$, визвано поміхою N_Y , може бути несуттєвим, а зсув, визваний поміхою N_X , може навіть зрости. Тому для досить великих чисел M доцільно провести зважування даних з метою їх повної чи часткової ортогоналізації.

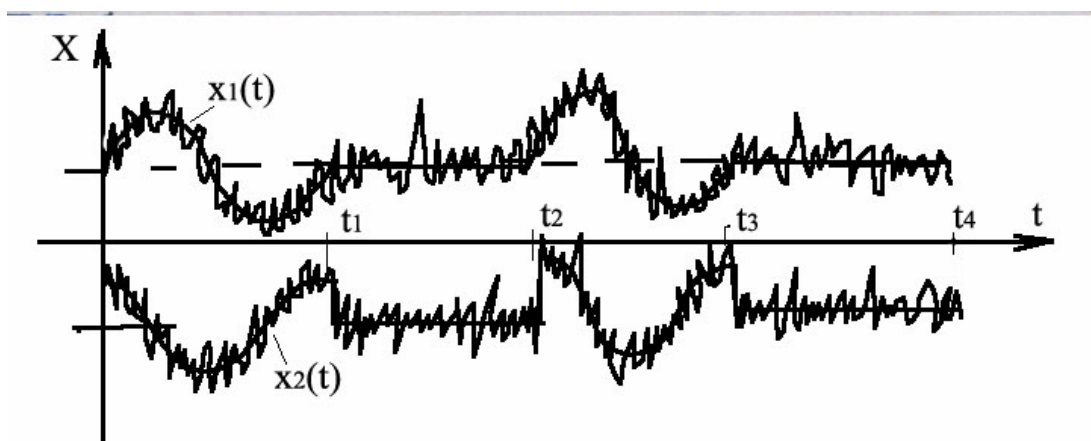


Рис. 4.1. Інформативні ($[0, t_1], [t_2, t_3]$) і неінформативні ($[t_1, t_2], [t_3, t_4]$) ділянки вибірки $X^T = [x_1, x_2]$.

На рис. 4.1 наведено найпростішу ілюстрацію необхідності такого зважування вибірок. Якщо ввести функцію ваги

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], [t_2, t_3] \\ 0, & t \in [t_1, t_2], [t_3, t_4] \end{cases}$$

то інформаційна матриця $X^T X$ буде діагональною внаслідок ортогональності $x_1(t)$ і $x_2(t)$ на ділянках, де $\eta(t) = 1$. Якщо зробити навпаки, то $X^T X$ буде виродженою.

Побудуємо декілька алгоритмів квазидіагоналізації матриці $X^T X$.

Алгоритм 1. В рекурентному МНК введемо адаптивну до поточного значення X вагову функцію

$$\eta_j(k) = \frac{x_j^2(k)}{\sum_{i=1}^n |x_i(k) x_j(k)|}. \quad (4.1)$$

Тоді вага вимірів буде збільшуватись для тих k , де більше відношення діагональних елементів матриці $X^T X$ до недиагональних. Зважена матриця вже не буде симетричною, але буде краще обумовленою:

$$\hat{\beta}(k+1) = \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \cdot X_B(k) \varepsilon(k), \quad P_{k+1} = [P_k^{-1} + X_B(k) \cdot X_B^T(k)]^{-1}, \quad (4.2)$$

де $X_B^T(k) = [\eta_1(k) \cdot x_1(k), \dots, \eta_n(k) \cdot x_n(k)]$.

Алгоритм 2. Можна отримати більш якісний результат, якщо вводити вагові функції $\eta_i(t)$ з умови максимальної точності оцінювання тільки i -го параметру $\hat{\beta}_i$, $i=\overline{1, n}$. Так для МНК, УМНК, \square ип, МДЗ оцінку $\hat{\beta}_i$ можна представити, як рішення рівняння

$$B = A \hat{\beta}, \quad (4.3)$$

яке є відношенням визначника Δ_i матриці A_i (матриці A , у якій i -й стовпчик замінено на вектор B) до визначника Δ матриці A :

$$\hat{\beta}_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}. \quad (4.4)$$

Диференціал виразу (4.4) відносно точних значень (*) дорівнює

$$d\hat{\beta}_i = \frac{d\Delta_i}{\Delta^*} - \frac{d\Delta \cdot \Delta_i^*}{(\Delta^*)^2}, \quad \text{або} \quad (4.5)$$

$$\frac{d\beta_i}{\hat{\beta}_i^*} = \frac{d\Delta_i}{\Delta_i^*} - \frac{d\Delta}{\Delta^*}.$$

Звідси отримаємо вираз для відносної дисперсії:

$$\left(\frac{\sigma_{\delta\beta_i}}{\hat{\beta}_i^*} \right)^2 = \frac{\sigma_{\Delta_i}^2}{(\Delta_i^*)^2} + \frac{\sigma_{\Delta}^2}{(\Delta^*)^2} - \frac{2\sigma_{\Delta_i\Delta}^2}{\Delta_i^* \Delta^*}. \quad (4.6)$$

Для зменшення дисперсії відносної похибки $\frac{\delta\beta_i}{\hat{\beta}_i^*}$ в оцінці $\hat{\beta}_i$ необхідно

максимізувати не тільки Δ , але і Δ_i . Виходячи з цього, отримаємо оптимальну вагову функцію $\eta_i^*(k)$:

$$\eta_i^*(k) = \arg \max_{\eta \in \{-1, 1\}} |\Delta \cdot \Delta_i|, \quad k = \overline{1, M}. \quad (4.7)$$

Тобто добавляємо змінні ($\eta_i(k) = 1$) чи віднімаємо ($\eta_i(k) = -1$), добиваючись виконання (4.7). Багатокроковий процес визначення $\eta_i^*(k)$ може бути побудовано по схемі:

для $(\eta_i^*(k) = 1)$, $k = \overline{1, M}$ обчислюються елементи a_{ij} , b_i матриць A і B в (4.3), по ним – Δ , Δ_i , а також значення $|\Delta \cdot \Delta_i|$;

для всіх рядків

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{\beta}_j$$

рівняння (4.3) послідовно в кожній k -ій точці перебираються всі можливі сполучення із n по 2 (так як $\eta_i \in \{-1; +1\}$) добутків $x_i(k) \cdot x_j(k)$ зі знаком плюс;

або мінус ($\eta = -1$) і залишається в кожній k -ій точці те, для якого (4.7) максимальне, і так для всіх $k = \overline{1, M}$;

– процес повторюється l разів, доки різниця величин $|\Delta \cdot \Delta_i|$ на l -му і $(l-1)$ -му кроках не стане малозначною по відношенню до $|\Delta \cdot \Delta_i|$. Після цього

обчислюється оцінка (4.4) $\hat{\beta}_i$. Процес повторюється для $(i+1)$ -ої оцінки, $i = \overline{1, n}$.

Швидкодія цього алгоритму невисока, так як приходиться $M \cdot l \cdot 2^n$ раз

розраховувати значення $|\Delta \cdot \Delta_i|$. Якщо X^* , Y^* гладкі функції, то перебір $\eta_i(k)$

можна проводити на відрізках $[k - m, k + m]$ з $2m$ точок. Кількість обчислень

$|\Delta \cdot \Delta_i|$ зменшиться до $\frac{M}{2m} \cdot l \cdot 2^n$.

Алгоритм 3. Попередні алгоритми діагоналізації матриці A системи нормальних рівнянь не забезпечують симетричності A . Даний алгоритм передбачає при діагоналізації матриці A збереження її симетричності. Нехай в результаті застосування МНК, УМНК, □ип чи МДЗ сформована система

$$A \hat{\beta} = B, \tag{4.8}$$

де, $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $a_{ij} = \sum_{k=1}^M a_{ij}(k)$ $a_{ij}(k)$ – визначається залежно від методу,

наприклад, для МНК: $a_{ij}(k) = x_i(k) x_j(k)$; $B = [b_i]_{i=1}^n$,

$$b_i = \sum_{k=1}^M b_i(k); \quad b_i(k) = \mathcal{Y}(k) \cdot x_i(k).$$

Введемо в систему (4.8) функцію ваги:

$$\left[\sum_{k=1}^M \eta_i(k) a_{ij}(k) \right]_{i,j=1}^n \cdot \hat{\beta} = \left[\sum_{k=1}^M \eta_i(k) b_i(k) \right]_{i=1}^n. \tag{4.9}$$

Число обумовленості ($cond A$) симетричної матриці A дорівнює відношенню максимального власного значення λ_A матриці A до мінімального [14]:

$$\text{cond}A = \frac{\max \lambda_A}{\min \lambda_A}. \quad (4.10)$$

Для діагональної матриці A $\text{cond} A=1$, для виродженої – нескінченність. Відома [25] нерівність:

$$\max |\lambda_i - \lambda_j| \leq \sqrt{2|SpAA^T| - \frac{1}{n}(SpA)^2}, \quad (4.11)$$

де SpA – слід матриці A , а $|SpAA^T| = \|A\|$ – евклідова норма матриці A , $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

З виразу (4.11) видно, що, мінімізуючи праву частину при обмеженні на слід A : $SpA = Cn$, або на кожний елемент a_{ii} сліду

$$\sum_{k=1}^M \eta_i(k) a_{ii}(k) = C, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.12)$$

за умови симетричності a_{ij} і a_{ji}

$$\sum_{k=1}^M \eta_i(k) a_{ij}(k) = \sum_{k=1}^M \eta_j(k) a_{ji}(k), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad (4.13)$$

можна забезпечити мінімум $|\lambda_i - \lambda_j|$ при фіксованій завдяки (4.12) мінімальній величині λ_i, λ_j ; тобто забезпечити мінімум $\text{cond} A$ (4.10). Якщо покласти $C = 1$, то при повній діагоналізації матриці A :

$$\hat{\beta}_i = \sum_{k=1}^M \eta_i(k) b_i(k), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.14)$$

де

$$\sum_{k=1}^M \eta_i(k) a_{ij}(k) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \neq j. \quad (4.15)$$

Таким чином, необхідно виконати n умов (4.12), $\frac{1}{2}(n^2 - n) -$ (4.13) або

$\frac{1}{2}(n^2 - n) -$ (4.15), всього $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ умов, змінюючи $M \cdot n$ значень $\eta_i(k)$ ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, M}$).

Так як $M \gg n$, то задача може бути розв'язана. Рішення можна спростити, якщо функції $\eta_i(k)$ параметризувати:

$$\eta_i(k) = \sum_{l=1}^m \gamma_{il} \varphi_l(k), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, M}, \quad (4.16)$$

де $\varphi_l(k)$ – базисні функції.

Тоді $m \cdot n$ коефіцієнтів γ_{il} визначаються $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ умовами (4.12), (4.13) або (4.15). так, поклавши $C = 1$, з (4.12), (4.15) та (4.16) отримаємо систему лінійних відносно γ_{il} рівнянь:

$$\sum_{k=1}^M \left(\sum_{l=1}^m \gamma_{il} \varphi_l(k) \right) a_{ii}(k) = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\sum_{k=1}^M \left(\sum_{l=1}^m \gamma_{il} \varphi_l(k) \right) a_{ij}(k) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}; j = \overline{i+1, n},$$

або

$$\sum_{l=1}^m \gamma_{il} \left(\sum_{k=1}^M \varphi_l(k) \right) a_{ii}(k) = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\sum_{l=1}^m \gamma_{il} \left(\sum_{k=1}^M \varphi_l(k) \right) a_{ij}(k) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}; j = \overline{i+1, n}.$$

У матричній формі:

$$F \cdot \gamma = G \quad (4.17)$$

де F – ґраткова матриця $(m \cdot n) \times (m \cdot n)$;

γ – вектор γ_{il} розмірності $(m \cdot n) \times 1$;

G – вектор з одиничними і нульовими елементами.

Система (4.17) вирішується по МНК.

МНК – рішення системи (2.4.17)

$$\hat{\gamma} = (F^T F)^{-1} F^T G \quad (4.18)$$

буде точно задовольняти умовам (4.12), (4.15), і оцінки $\hat{\beta}_i$ будуть визначені з (4.14). Якщо m – парне, то можна задати різні числа m_i для різних i так, щоб $\sum_{i=1}^n m_i = 0,5(n^2 + n)$. Тоді (4.18) буде точно задовольняти (4.12), (4.15). Матриця $(F^T F)$ невинроджена, якщо $x_i(k)$ і $\varphi_l(k)$ утворюють системи $\{x_i(k)\}$, $\{\varphi_l(k)\}$ лінійно незалежних функцій. Тобто повинна бути невинродженою сама матриця A в (4.8). В якості $\{\varphi_l(k)\}$ може бути задана будь-яка система лінійно незалежних, краще ортогональних функцій; Зручними для обчислень будуть функції функції Хаара [11] та інші, що приймають значення ± 1 .

4.2. Покращення збіжності

Для методів ідентифікації характерна така властивість: чим більше невизначеність задачі, тим простіше рішення. В алгоритмах (розділу 3), де $\hat{\beta}$ входить лінійно, це МНК; в алгоритмах нелінійного оцінювання, при невизначеності статистичних характеристик поверхні $I(\beta)$, це ґрадієнтна процедура [42]:

$$\hat{\beta}(q+1) = \hat{\beta}(q) - \lambda(q) \frac{\partial I(\hat{\beta}(q))}{\partial \hat{\beta}}. \quad (4.19)$$

Для збіжності алгоритму (3.16), необхідно, щоб $I(\hat{\beta})$ був неперервно диференційований за Фреше по $\hat{\beta}$:

$$\lim_{\|\Delta\hat{\beta}\|\rightarrow 0} \left\| \frac{\mathcal{A}(\hat{\beta} + \Delta\hat{\beta})}{\partial(\hat{\beta} + \Delta\hat{\beta})} - \frac{\mathcal{A}(\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}} \right\| = 0, \quad (4.20)$$

і задовольнялася умова Ліпшица для градієнта від I :

$$\lim_{\|\Delta\hat{\beta}\|\rightarrow 0} \left\| \frac{\mathcal{A}(\hat{\beta}_1)}{\partial\hat{\beta}_1} - \frac{\mathcal{A}(\hat{\beta}_2)}{\partial\hat{\beta}_2} \right\| \leq L \|\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2\|, \quad (4.21)$$

де $L > 0$, $\|\cdot\|$ – норма в n -вимірному евклідовому просторі [26].

Враховуючи (4.20), можна записати:

$$I(\hat{\beta} + \Delta\hat{\beta}) - I(\hat{\beta}) = \frac{\partial I(\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}^T} \Delta\hat{\beta} + \varepsilon(\|\Delta\hat{\beta}\|), \quad (4.22)$$

де

$$\lim_{\|\Delta\hat{\beta}\|\rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\|\Delta\hat{\beta}\|)}{\|\Delta\hat{\beta}\|} = 0, \quad \Delta\hat{\beta} = \hat{\beta}(q) - \hat{\beta}^*.$$

При виконанні (4.21), (3.19) існують [11] такі $\lambda(q)$, за яких алгоритм (4.19) сходиться до стаціонарної точки, яка для сильно випуклого функціонала відповідає $\hat{\beta}^*$. Так для квадратичного сильно випуклого функціоналу

$$I(\hat{\beta}(q)) = I_0 + \Delta\hat{\beta}^T \frac{\partial^2 I}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^T} \Delta\hat{\beta},$$

$$\Delta\hat{\beta} = \hat{\beta}(q) - \hat{\beta}^*,$$

взявши похідну по $\hat{\beta}$:

$$\frac{\partial I(\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}} = \frac{\partial^2 I}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^T} \Delta\hat{\beta}, \text{ і підставивши її в (4.19) отримаємо:}$$

$$\Delta\hat{\beta}(q+1) = -\lambda(q) \frac{\partial^2 I}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^T} \Delta\hat{\beta}(q), \quad (4.23)$$

де $\frac{\partial^2 I}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^T}$ – сильно додатній [27] оператор. Тоді існують такі не рівні нулю $\lambda(q) = \text{diag}\{\lambda_i(q)\}$, що система (4.23) буде асимптотично стійкою [42]. Практично градієнт розраховується неточно внаслідок поміх.

Суттєвим недоліком градієнтного алгоритму є мала швидкість збіжності в «овражних» ситуаціях. Для прискорення збіжності пропонується модифікація «овражного методу», яка полягає в застосуванні n однотипних моделей з

початковими значеннями $\hat{\beta}^{(l)}(0)$, ($l = \overline{1, n}$) параметрів l -ої моделі, заданими в l -й вершині n -мірного куба, всередині якого знаходиться значення $\hat{\beta}^*$. Тоді для кожної l -ої моделі можна побудувати показник $I_1^{(l)}$ з прискорюючою збіжністю добавкою:

$$I_2^{(l)} = \alpha_1 (\Delta \hat{\beta}_H^{(l)})^T \Delta \hat{\beta}_H^{(l)}, \quad (4.24)$$

де α_1 – параметр алгоритма,

$$\left(\Delta \hat{\beta}_H^{(l)} \right)^T = \left(\frac{\hat{\beta}_1^{(l)} - \bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_1}, \dots, \frac{\hat{\beta}_n^{(l)} - \bar{\beta}_n}{\bar{\beta}_n} \right), \quad \bar{\beta}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i^{(l)}$$

– i -а компонента для l -ої

моделі:

$$\frac{\partial I^{(l)}}{\partial \hat{\beta}_i^{(l)}} \approx \frac{\partial I_1^{(l)}}{\partial \hat{\beta}_{ii}^{(l)}} + \frac{\hat{\beta}_i^{(l)} - \bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_i}. \quad (4.25)$$

Підставивши (4.25) в (4.19), отримаємо градієнтні алгоритми з прискореною збіжністю в «овражних» ситуаціях. При $\alpha_1=0$ має місце градієнтна настройка n моделей. Тоді по розкиду стаціонарних точок між моделями можна судити про розкид оцінки $\hat{\beta}$:

$$\text{cov}[\hat{\beta}] \approx \left[\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i \hat{\beta}_j}^2 \right]_{i,j=1}^n, \quad (4.26)$$

де

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i \hat{\beta}_j}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{\beta}_i^{(l)} - \bar{\beta}_i)(\hat{\beta}_j^{(l)} - \bar{\beta}_j).$$

При $l_1 \rightarrow \infty$ усі n моделей зразу перебудують свої параметри до середньої відносно початкових значень величини, тобто до $\hat{\beta}_0$, відповідного центру гіперкуба початкових значень. Доцільно α_1 задавати зростаючим від нуля. Тоді на перших кроках має місце незалежний рух параметрів кожної моделі на «дно оврага», а потім зтягування по оврагу оцінок $\hat{\beta}^{(l)}$ до середньої $\bar{\beta}$, яка також змінюється, наближаючись до стаціонарної точки $\hat{\beta}^*$. Число моделей може бути як більшим, так і меншим n . Так застосування тільки двох моделей дозволяє побудувати алгоритм з бажаним законом зміни показника I у часі t :

$$I = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + \alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)})^T (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}). \quad (4.27)$$

Задамося бажаним законом

$$f(t) = \frac{dI}{dt} < 0, \quad (4.28)$$

де $f(t)$ – бажана функція часу, наприклад, експонента, константа і т.і.

Підставимо із (4.27) значення $\frac{dI}{dt}$ в (4.28). Тоді отримаємо:

$$f(t) = \left(\frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \hat{\beta}^{(1)}} \right)^T \cdot \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} + \left(\frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \hat{\beta}^{(2)}} \right)^T \cdot \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} + 2\alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)})^T \left(\frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} - \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} \right),$$

або

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \hat{\beta}^{(1)}} \right) + 2\alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right]^T \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} = \\ & = f(t) - \left[\left(\frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \hat{\beta}^{(2)}} \right) - 2\alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right]^T \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$A_1 = \left[\left(\frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \hat{\beta}^{(1)}} \right) + 2\alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right],$$

$$A_2 = \left[\left(\frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \hat{\beta}^{(2)}} \right) - 2\alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right],$$

тоді

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} &= (A_1 \cdot A_1^T)^{-1} \cdot A_1 \left(f(t) - A_2^T \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} \right) \\ \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} &= (A_2 \cdot A_2^T)^{-1} \cdot A_2 \left(f(t) - A_1^T \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

За умови випуклості функціоналу (4.27) алгоритми (4.29), побудовані за умови (4.28) гарантують збіжність не тільки по функціоналу (4.27), але і по параметрам $\hat{\beta}^{(1)}$, $\hat{\beta}^{(2)}$ до $\hat{\beta}^*$ при заданому законі зменшення I_1 .

В умовах нестационарності сигналів, поміх та параметрів доцільна додаткова фільтрація, наприклад, інерційним фільтром першого порядку

$$W_\phi(p) = (\alpha p + 1)^{-1}, \text{ де } p = \frac{d}{dt}, \alpha - \text{ стала фільтру.}$$

Тоді градієнтний алгоритм (4.19) перетворюється в метод «важкої кульки» [4]

$$\alpha \frac{d^2 \hat{\beta}}{dt^2} + \frac{d\hat{\beta}}{dt} = -\lambda \frac{\partial I(\hat{\beta}, t)}{\partial \hat{\beta}}, \quad (4.30)$$

в якому параметр α «маса кульки» може бути адаптивним: «маса» повинна бути такою, щоб $\hat{\beta}$ гладко «зкочувався» по нестационарній стохастичній поверхні до мінімуму. Для стаціонарних об'єктів (згідно з методом стохастичної апроксимації [24]) можна вимагати, щоб $\alpha(t)$ необмежено зростала. Суттєво впливає на збіжність алгоритму (4.30) множник λ . З метою доцільного вибору його структури перепишемо (4.30) з урахуванням (4.23):

$$\alpha \frac{d^2 \Delta \hat{\beta}}{dt^2} + \frac{d\Delta \hat{\beta}}{dt} + \lambda \frac{\partial^2 \mathbf{I}(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T} \Delta \hat{\beta} = 0, \quad (4.31)$$

де $\frac{\partial^2 \mathbf{I}(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T}$ – стохастична нестационарна симетрична матриця миттєвих значень.

Достатньою умовою стійкості системи (4.31) є діагональність матриці $\frac{\partial^2 \mathbf{I}(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T}$.

Для цього не обов'язково розраховувати матрицю $\left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T} \right)^{-1}$, тим більше, що для

не усереднених значень вона не завжди існує. Нехай

$\frac{\partial^2 \mathbf{I}(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T} = \mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$, тоді $\left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T} \right)^{-1} = \left[\frac{A_{ji}(t)}{\det \mathbf{A}(t)} \right]$, де $A_{ji}(t)$ – алгебраїчне

доповнення ji -го елемента матриці $\mathbf{A}(t)$.

Для ортогоналізації (4.31) достатньо задати $\lambda = \alpha' [A_{ji}(t)] = \alpha' \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$, тоді

$$\alpha \frac{d^2 \Delta \hat{\beta}}{dt^2} + \frac{d\Delta \hat{\beta}}{dt} + \alpha' \det \mathbf{A} \cdot \Delta \hat{\beta} = 0,$$

де α' – параметр алгоритму.

Такий алгоритм адаптивний до «інформативності»: якщо фішеровська матриця \mathbf{A} не інформативна (вироджена), то $\det \mathbf{A}(t)$ близький до нуля і (при $\alpha = const$) $\Delta \hat{\beta} = 0$, при появі корисної інформації відбувається незалежна настройка кожного елемента $\hat{\beta}_i$ вектора $\hat{\beta}$:

На практиці реалізується алгоритм

$$\frac{d\Delta \hat{\beta}}{dt} = -\alpha [\hat{A}_{ij}(t)] \cdot \frac{\partial \hat{I}(\hat{\beta}, t)}{\partial \hat{\beta}}, \quad (4.32)$$

де $\hat{A}_{ij}(t)$, $\frac{\partial \hat{I}(\hat{\beta}, t)}{\partial \hat{\beta}}$ – згладжені фільтром W_ϕ значення $A_{ij}(t)$, $\frac{\partial I(\hat{\beta}, t)}{\partial \hat{\beta}}$.

На рис. 4.2. представлено функціональну схему алгоритму (4.32) ортогональної настройки $\hat{\beta}_i$ з адаптацією до «інформативності» сигналів об'єкта.

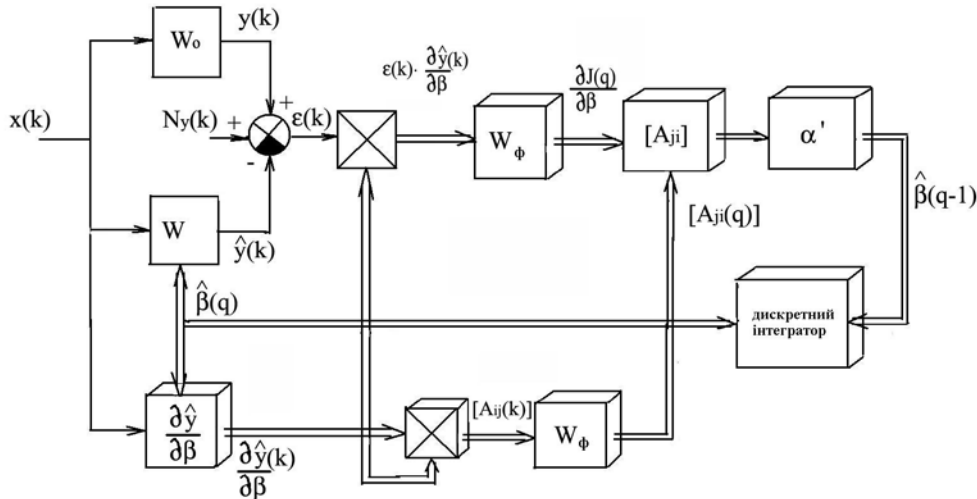


Рис.4.2. Структурна схема системи ідентифікації з градієнтним алгоритмом (4.32).

4.3. Підвищення інформативності вибірок даних в умовах активного експерименту

4.3.1. Теоретичне обґрунтування доцільності \square покоординатної квазідіагоналізації

Якщо функціонал $I(\beta)$ має «овражний» характер, тобто не є строго випуклим і в окремих напрямках має дуже малі зміни, то система

$$I''(\beta^*) \cdot \Delta \hat{\beta} = -I'(\beta^*), \quad (4.33)$$

де I'' – друга, а I' – перша похідні від I по $\hat{\beta}$ в точці β^* , буде погано обумовлена. Тоді рішення

$$\hat{\beta} = [I''(\beta^*)]^{-1} \cdot I'(\beta^*), \quad (4.34)$$

буде надто неточним внаслідок некоректності $[\cdot]$ обчислень за виразом (4.34).

Основна умова «овражності» $I(\beta)$ – це суттєве розділення спектра матриці $I''(\beta^*)$ на дві групи, що відповідають великим і малим власним числам λ :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{k-1} \geq \sigma \lambda_k \geq \dots \geq \sigma \lambda_n; \quad \sigma \gg 1. \quad (4.35)$$

Для системи (3.29) за дно «оврага» Q можна прийняти лінійну оболонку власних векторів, що відповідають малим власним числам:

$$Q = \left\{ x \in R^n \mid \langle x - x^*, u_i \rangle \geq 0 (i = \overline{1, n-r}) \right\}, \quad (4.36)$$

$$Q_\delta = R^n; \quad \sigma \approx \frac{\lambda_1}{|\lambda_{n-r+1}|}.$$

При цьому умова «овражності» (4.35) виконується.

Число обумовленості матриці $I''(\beta^*)$ для моделі (4.35), (4.36) «овражного» функціоналу $I(\beta)$ визначається співвідношенням:

$$\text{cond}(I''(\beta^*)) = \|I''(\beta^*)\| \cdot \|[I''(\beta^*)]^{-1}\| = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \geq \sigma \gg 1. \quad (4.37)$$

При чому найбільша похибка рішення (4.34) зосереджена в підпросторі, натягнутому на власні вектори матриці $I''(\beta^*)$, що відповідають малим власним числам. Покажемо це.

Лема. Нехай для $I''(\beta^*)$ виконується умова (4.35). Тоді похибки рішення (4.34) задовольняють співвідношенню.

$$\Delta d_i < \sigma^{-1} \Delta d_j; \quad \sigma \gg 1; \quad i = \overline{1, k-1}; \quad j = \overline{k, n}. \quad (4.38)$$

Відомо [33], що рішення (4.34) системи (4.33) може бути представлено у вигляді: $\Delta\beta = \sum d_i \cdot u_i$, де u_i – власні вектори матриці $I''(\beta^*)$.

Коефіцієнти d_i дорівнюють

$d_i = C_i / \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, де λ_i – власні числа матриці $I''(\beta^*)$ відповідні до векторів u_i ; C_i – коефіцієнти розкладання вектора $I(\beta)$ по базису $\{u_i\}_{i=1}^n$.

Розклавши похибку $\delta\beta$ по цьому ж базису

$$\Delta\beta + \delta\beta = \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i, \text{ де}$$

$$a_i = d_i + \Delta d_i = \frac{C_i + \Delta C_i}{\lambda_i + \Delta\lambda_i} = \frac{C_i}{\lambda_i} + \frac{\Delta C_i \cdot \lambda_i - C_i \cdot \Delta\lambda_i}{(\lambda_i + \Delta\lambda_i) \cdot \lambda_i}, \text{ отримаємо, що}$$

$$\Delta d_i = \frac{\Delta C_i \cdot \lambda_i - C_i \cdot \Delta\lambda_i}{(\lambda_i + \Delta\lambda_i) \cdot \lambda_i}, \quad i = \overline{1, n}. \text{ Так як згідно з (4.36), власні вектори } u_k, \dots, u_n$$

задають дно \square ип. \square з, де норма вектора градієнта $\|I'(\beta)\|$ визначається малими власними числами і суттєво менша, ніж в іншій частині простору параметрів β , то $C_i < C_j$; $i = \overline{1, k-1}$; $j = \overline{k, n}$; (4.38)

в той же час

$$\lambda_i \geq \sigma \lambda_j C_j; \quad i = \overline{1, k-1}; \quad j = \overline{k, n}. \quad (4.39)$$

Тобто маємо, що $\Delta d_i < \sigma^{-1} \cdot \Delta d_j$; $\sigma \gg 1$. Лему доведено.

З леми витікає, що осі найбільш раціональної системи координат при мінімізації квадратичних функціоналів овражної структури співпадають з власними векторами матриці $I''(\beta^*)$. Залежність похибки $\delta\beta$ від взаємної орієнтації координатного і ортонормованого базисів наведено на рис. 4.3.

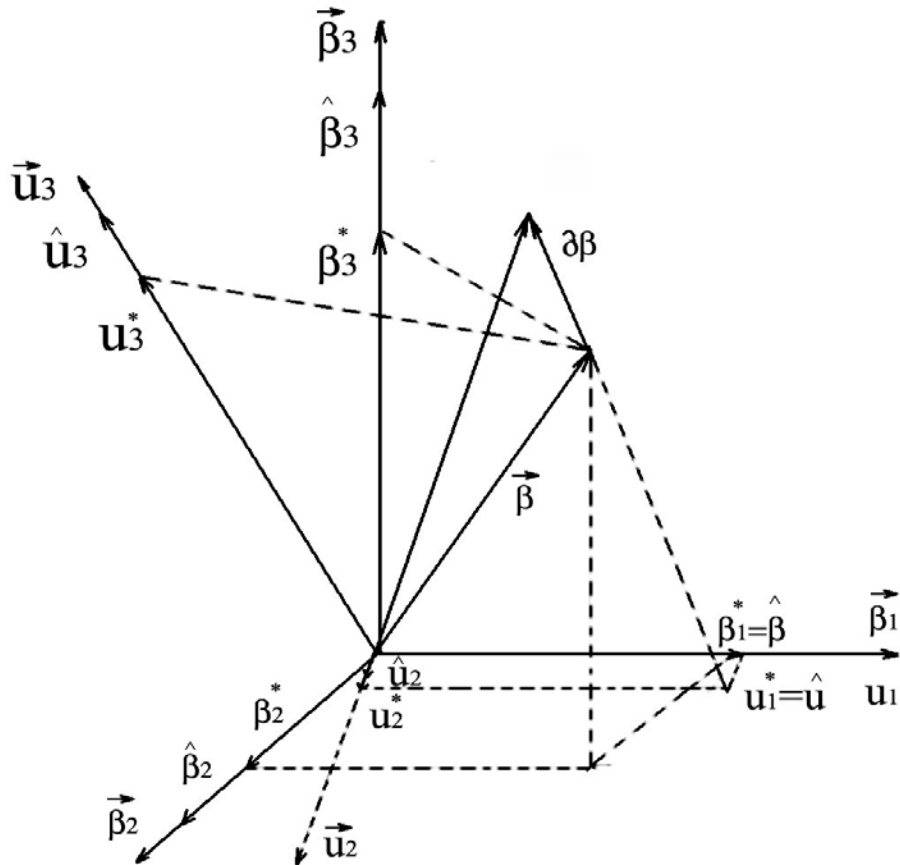


Рис. 4.3. Залежність похибки $\delta\beta$ від вибору базису

При співпаданні координатного орта і власного вектора u_i похибка $\delta\beta_1$ оцінки $\hat{\beta}_1$ мінімальна. В протилежному випадку навіть для великих власних чисел (β_2 і u_2) похибка $\delta\beta_2$ оцінки $\hat{\beta}_2$ суттєва. Для малих власних чисел (β_3 і u_3) похибка $\delta\beta_3$ максимальна. При співпаданні координатного і ортонормованого базисів квадратичний функціонал

$$I(\beta) \cong I(\beta^*) + \Gamma'(\beta^*) \cdot \Delta\beta + \frac{1}{2} \Delta\beta^T \Gamma''(\beta^*) \cdot \Delta\beta \quad (4.40)$$

приймає сепарабельний вигляд:

$$I(\beta) = \sum_{i=1}^n I(\beta_i), \quad (4.41)$$

оцінки $\hat{\beta}_i$ знаходяться незалежно і гарантується малість похибки $\delta\beta_j$ для тих β_j , що мають великі власні числа.

Задача суттєво спрощується, якщо необхідно забезпечити співпадання одного з координатних ортів β_i з власним вектором u_i . При цьому похибки $\delta\beta_j$ по іншим напрямкам u_j ($j \neq i$) мало впливають на $\delta\beta_i$.

Необхідні властивості $I(\beta)$ можна забезпечити відповідним вибором керуючих впливів, тобто активним експериментом на об'єкті, що досліджується. Доведемо це наступним твердженням:

Твердження: Хай матриця $I''(\beta)=A$ має структуру:

$a_{ij} \neq 0, a_{kj} = a_{jk} = 0; i, j \neq k$, де k – фіксоване число, $1 \leq k \leq n$, тоді $a_{kk} = \lambda_k(A)$ і власний вектор $u_k(A)$ співпадає з координатним ортом $\vec{\beta}_k$.

За теоремою про спектральний розклад [42] представимо матрицю A у вигляді:

$$A = U^T A U = U^T A_1 U + U^T A_2 U, \quad (4.42)$$

де $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$;

$A_1 = A - A_2$, $A_2 [n \times n]$ – матриця, в якій всі елементи, окрім a_{kk} , дорівнюють нулю; U – ортогональна матриця, стовпцями якої є власні числа матриці A .

В силу ортогональності базису

$$U^T A_2 U = a_{kk} \vec{U}_k \cdot \vec{U}_k = \text{diag}(0, \dots, a_{kk}, \dots, 0), \quad (4.43)$$

$$U^T A_1 U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n). \quad (4.44)$$

Тоді з (4.42) витікає, що

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n). \quad (4.45)$$

Звідси

$$\lambda_k = a_{kk}. \quad (4.46)$$

Згідно з спектральним представленням оператора A [21] для довільного вектора $\vec{\beta}$, $\vec{\beta} = C_1 \vec{U}_1 + \dots + C_n \vec{U}_n$, має місце співвідношення

$$A\vec{\beta} = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i \vec{U}_i = \lambda_1 C_1 \vec{U}_1 + \dots + \lambda_n C_n \vec{U}_n. \quad (4.47)$$

З урахуванням (4.46), для k -ого координатного орта матриці A отримаємо, що

$$a_{kk} \vec{\beta}_k = \lambda_k C_k \vec{U}_k. \quad (4.48)$$

Звідси витікає, що вектор $\vec{\beta}_k$ співпадає з вектором \vec{U}_k . Твердження доведено.

Скористаємося отриманим результатом. Задамо критерій синтезу \square ип. \square з \square и об'єкт сигналів у вигляді якої-небудь матричної норми $\|\cdot\|$ різниці оптимізуємої $I''(\beta)$ і бажаної A матриць:

$$\mathfrak{Z}(I''(\beta)) = \|I''(\beta) - A\|. \quad (4.49)$$

З нерівності [19] $\|A - B\| \geq \sum_{i=1}^n [\lambda_i(A) - \lambda_i(B)]^2$ витікає, що функціонал (4.49) з евклідовою нормою $\|\cdot\|$ і мінімізує середньоквадратичне відхилення власних чисел. Він випуклий, монотонний і однорідний на множині матриць Гессе. Для цього виконуються умови:

$$\mathfrak{Z}[\alpha A + (1-\alpha)B] \leq \alpha \mathfrak{Z}(A) + (1-\alpha) \mathfrak{Z}(B); 0 < \alpha < 1, \mathfrak{Z}(A) \leq \mathfrak{Z}; A \leq B; \mathfrak{Z}(\alpha A) = \alpha \mathfrak{Z}(A).$$

Ці умови виконуються згідно з аксіоматики матричних норм:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \|\alpha A\| \leq |\alpha| \cdot \|A\|.$$

Якщо функціонал зв'язати з одним k -им порядком матриці $I''(\beta)$, то замість (4.49) отримаємо:

$$\mathfrak{Z}(I''(\beta)) = \|j''_{ki}(\beta) - a_{ki}\|, \quad (4.50)$$

де j''_{ki} – i -й елемент k -ого рядка матриці $I''(\beta)$, $a_{ki} = a_{kk} \neq 0, i \neq k$.

Після такої оптимізації активних режимів ідентифікації, задача мінімізації овражного функціоналу $I(\beta)$ переходить в задачу покоординатної \square оптимізації, представленій відносно β в сепарабельному вигляді:

$$\min_{\beta} I(\beta) = \min_{\beta} \sum_{i=1}^n I_i(\beta), \quad (4.51)$$

де $I_i(\beta) = I_i(\beta_i / C_i \beta = d)$.

Матриця C_i лінійних обмежень має вигляд $C_i^T = [I_{n-1}, 0]$.

4.3.2. Синтез тестуючих вхідних впливів на досліджуваний об'єкт

Під час синтезу оптимальних тестуючих об'єкт сигналів слід урахувувати ряд обмежень:

1. Сигнали повинні бути фізично реалізуємими на об'єкті.
2. Вони не повинні вводити об'єкт в зону аварійних режимів.
3. Їх амплітуда повинна бути такою, щоб виконувались вимоги до співвідношення «сигнал-шум», але не настільки великою, щоб з'являлися на об'єкті явища, не передбачені моделлю (нелінійності та ін.).
4. Сигнали повинні забезпечувати оптимальність відповідного критерію (4.49) чи (4.50). Цим обмеженням може задовольняти послідовність імпульсних вхідних впливів.

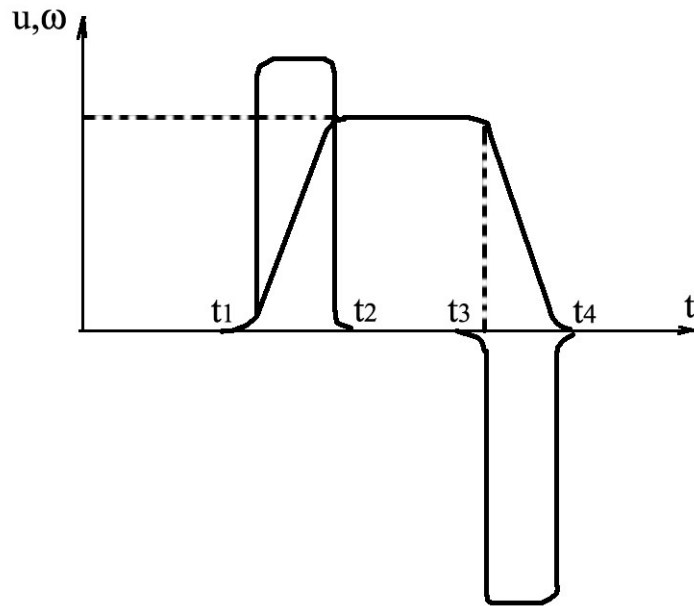


Рис. 4.4. Тестуючий імпульс $u(t)$ і його похідна $\omega(t)$.

$$u(t) = u(t_1, t_2, t_3, t_4) = \begin{cases} 0; & t < t_1 \\ \omega(t - t_1); & t_1 \leq t < t_2 \\ U_{\max}; & t_2 \leq t < t_3 \\ U_{\max} - \omega(t - t_1) & t_3 \leq t < t_4 \\ 0; & t_4 \leq t < t_5 \end{cases} \quad (4.52)$$

або

$$u(t) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} S(t - t_{j,k}), \quad (4.53)$$

Досить просто реалізуємою на реальних об'єктах техніки і економіки є послідовність імпульсів трапецієвидної форми (рис. 4.3).

$$S(t - t_{j,k}) = \varphi[\omega(t - t_{j,k})], \quad (4.54)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

де $\omega = \frac{du}{dt}$ – крутизна фронтів сигналу.

Послідовність управляючих сигналів i -го управління має вигляд:

$$u^i(t) = \sum_{l=1}^L (-1)^{l+1} u^i(t, t_{l,1}, t_{l,2}, t_{l,3}). \quad (4.56)$$

Похідна одиночного імпульса

$$\frac{du}{dt} = \omega \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} 1(t - t_{jk}), \quad (4.57)$$

де $l(t)$ – одинична функція $l(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$.

Відповідно обмеження на крутизну фронтів, довжину і амплітуду сигналів:

$$\max\left(\frac{du}{dt}\right) = \omega, \quad (4.58)$$

$$t_{min} \leq t_{j2} - t_{j1} \leq t_{max}, \quad (4.59)$$

$$U_{max} \geq \omega(t_{j2} - t_{j1}). \quad (4.60)$$

Так як сигнали повністю визначаються моментами $t_{i,k}$ та крутизною фронтів ω , то не складно, якщо це необхідно, ввести додаткові обмеження на взаємне розташування сигналів при їх синтезі. Задача синтезу оптимальних тестуючих сигналів формулюється як задача оптимального управління: при заданих рівняннях об'єкта

$$(x = Ax + Bu), \quad (4.61)$$

класі сигналів (4.53)–(4.57) і обмеженнях (4.58)–(4.60) знайти програмне управління $u(t)$, при якому функціонал (4.49) чи (4.50) приймає мінімальне значення. Оптимізація управління при класичному функціоналі

$$I = V_3[x(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} L[x(t), u(t), t] dt, \quad (4.62)$$

де L, V_3 – задані скалярні функції векторних аргументів x та u , досить складна. Це пов'язано з високою потужністю множин при чисельному рішенні двохточкової крайової задачі функціоналу.

Застосування напіввизначеного

$$I = V_3[x(t_k)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} Q(x, t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} (U^T K U + U_{opt}^T K^{-1} U_{opt}) dt, \quad (4.63)$$

дозволяє простіше і надійніше вирішити поставлену задачу. В роботі [13] ця задача вирішувалась методом прогнозуючих моделей для синтезу неперервного управління.

Рішення в нашому випадку. Будемо вважати моменти переключення в (4.53), (4.56), як компоненти узагальненого об'єкта, отриманого об'єднанням (4.60) і (4.64):

$$\dot{T}_p = U; \quad T_p = \{t_{ij}\}; \quad j = \overline{1, l}; \quad i = \overline{1, m} \quad (4.64)$$

Рівняння (4.64) описує перебудову моменту j -го переключення i -ої компоненти вектора управління T_p . Оптимальне за критерієм мінімуму узагальненої роботи (4.63) управління

$$U_{opt} = -K \frac{\partial V^T}{\partial T}, \quad (4.65)$$

де $\frac{\partial V}{\partial t}$ – часткова похідна скалярної функції $V(x, T, t)$, задовольняє рівнянню:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} (Ax + Bu) = -Q(x, t), \quad (4.66)$$

з граничною умовою $V(t_k) = V_3$.

Використання

$$\begin{cases} \dot{x}_M = Ax_M + Bu_M \\ T_p = 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

дозволяє знайти значення функції $V(x, T, t)$ в точці, що відповідає поточному стану τ_k по траєкторії

$$V(x, t, \tau) = V_3(x_M, \tau_k) + \int_{\tau_0}^{\tau_k} Q(x_M, \tau) d\tau, \quad (4.68)$$

де τ – поточний час для моделей (4.67).

Підставивши (4.68) в (4.65) з урахуванням правил диференціювання, отримаємо:

$$\begin{aligned} U_{opt} &= -k \left[\frac{dV_3(x_M, \tau_k)}{dT_p} + \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{dQ(x_M, \tau)}{dT_p} \right] = \\ &= -k \left\{ z^T(\tau_k) \frac{\partial V_3(\tau_k)}{\partial x_M(\tau_k)} + \frac{\partial V_3(x\tau_k)}{dT_p} \right. \\ &\quad \left. \int_{\tau_0}^{\tau_k} \left[z^T(\tau) \frac{\partial Q^T(\tau)}{\partial x_M(\tau)} + \frac{dQ^T(\tau)}{dT_p} \right] d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

де $z(\tau) = \frac{\partial x}{\partial T_p}$ – матрична функція чутливості розширеного об'єкта (4.63), (4.64),

яка отримується шляхом диференціювання по вектору T_p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_p} \left(\frac{dx}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial T_p} \right) = \dot{z} = A \frac{\partial x}{\partial T_p} + B \frac{\partial u}{\partial T_p} = Az + B \frac{\partial u}{\partial T_p} \text{ або} \\ \dot{z} &= Az + B \frac{\partial u}{\partial T_p}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Матриця часткових похідних $\frac{\partial u}{\partial T_p}$ з урахуванням (4.53)

$$\frac{\partial u}{\partial T_p} = \left\| \frac{\partial u^i(t)}{\partial t_{jk}^i} \right\|, \quad (4.71)$$

де

$$\frac{\partial u^i(t)}{\partial t_{jk}^i} = \omega(-1)^{k+j} 1(t - t_{jk}^i), \quad (4.72)$$

$1(t)$ – функція Хевісайда.

Вирішуючи (4.70) відносно z і водночас інтегруючи (4.72), по закінченню одного циклу моделювання отримаємо вектор градієнтів, який дозволяє визначити, куди вздовж часової осі зміщати моменти переключення t_{jk}^i для досягнення екстремуму функціонала I .

Розмірність вектора T_p можна скоротити. Так, якщо вважати амплітуду сигналів фіксованою, то розмірність T_p скорочується вдвічі. Сигнал повністю визначається моментами t_{j1}^i, t_{j3}^i , а послідовність сигналів i -го управління має вигляд:

$$u^i(t) = \sum_{j=1}^{L_i} (-1)^{j+1} S_j(t - t_j^i), \quad (4.73)$$

де L_i – число вмикань i -го органа управління, і $S_j(t - t_j^i) = \varphi[\omega(t - t_j^i)]$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ x; & 0 \leq x < 1. \\ 1; & x \geq 1 \end{cases} \quad (4.74)$$

Матриця часткових похідних:

$$\frac{\partial u^i(t)}{\partial t_j^i} = \omega(-1)^{j+1} \left[1(t - t_j^i) - 1\left(t - t_j^i - \frac{1}{\omega}\right) \right]. \quad (4.75)$$

Можливе подальше скорочення розмірності вектора T_p , якщо тестові сигнали мають фіксовану форму. Такі сигнали повністю визначаються моментом подачі і необхідно визначити лише їх взаємне розташування на часовій осі. Послідовність різнополярних імпульсів може бути описана рівнянням:

$$u_i^j(t) = \sum_{j=1}^{L_i} (-1)^{j+1} S_j(t - t_j^i), \quad (4.76)$$

$$\text{де } S(t - t_j^i) = \varphi[\omega(t - t_j^i)], \varphi(x) = \begin{cases} 0; & t < t_j \\ x; & t_j \leq t < t_j + c_1 \\ u_M = c_1; & t_j + c_1 \leq t < t_j + c_2 \\ u_M - x; & t_j + c_2 \leq t < t_j + c_2 + c_1 \\ 0; & t \geq t_j + c_2 + c_1 \end{cases}.$$

Обмеження на сигнали, пов'язані з їх взаємним розташуванням та тривалістю експерименту:

$$t_j^i - t_j^k \geq c_3; \forall i, k; t_k - t_1^1 \leq T_{\text{екс}}. \quad (4.77)$$

Критерій (4.63) має термінальну складову

$$V_3[t_k] = \mathfrak{J}[J''(\beta)] \quad (4.78)$$

і, з обмеженнями виду (4.58)-(4.60), інтегральну складову:

$$Q(x, t) = \begin{cases} c; & u \in G_u \\ \alpha^T t_c + \beta; & u \notin G_u \end{cases}. \quad (4.79)$$

Тоді

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial T_p} = \begin{cases} 0; & u \in G_u \\ \alpha; & u \notin G_u \end{cases}, \quad (4.80)$$

де α – вектор коефіцієнтів, величина яких залежить від обмежень.

Розроблена методика синтезу тестових сигналів дозволяє побудувати градієнтний алгоритм корекції вектора переключень T_p :

$$T_p^0 = T_p(t_k^0), k = 0, \quad (4.81)$$

що дозволяє ідентифікувати локальні екстремуми функціонала (2.4.64) в просторі керованих змінних. Умовою зупинки може бути вимога на відносну чи абсолютну точність:

$$|I_{\text{кн}} - I_k| \leq \alpha_1 |I_k| + \alpha_2, \quad (4.82)$$

де α_1, α_2 – задані значення відносної і абсолютної точності локалізації оптимуму по функціоналу. При повільному наближенні до екстремуму необхідно також виконувати перевірки по аргументу

$$\|T_p^{k+1} - T_p^k\| \leq \varepsilon_1 \|T_p^k\| + \varepsilon_2. \quad (4.83)$$

Внаслідок багатоекспериментальності функціонала (4.78) у просторі керованих змінних T_p можливий випадок, коли локалізований екстремум функціонала не забезпечить суттєвого покращення умов ідентифікування. При зупинці обчислень необхідно перевірити умову $\Phi_k \leq \Phi_0$ і повторити пошук оптимального T_p при інших початкових умовах T_p^0 .

Алгоритм оптимізації:

1. Формуються для (4.67), (4.70) початкові умови:
 $u(t) = u^0(t, T_p), T_p = T_p^0, z(t_0) = 0$, де T_p, T_p^0 – початкові умови для моментів переключення і функції чутливості.
2. По (4.67) моделюється рух об'єкта, одночасно по (4.70) інтегрується матричне рівняння чутливості.
3. По результатам моделювання за допомогою (4.69) визначаємо градієнт мінімізуемого функціоналу по керованим змінним T_p . Підібравши

експериментальним шляхом в (4.65) значення k , отримуємо алгоритм корекції компонент вектора T_p на j -й ітерації $T_p^j = T_p^{j-1} + kv_j$.

4. Якщо не виконується правило зупинки алгоритму, то перехід до п.2 для чергової ітерації пошуку T_p . Правило зупинки:

$A_1 = |\mathfrak{I}_j - \mathfrak{I}_{j-1}| \leq \varepsilon_1 |\mathfrak{I}_{j-1}| + \varepsilon_2$, $A_2 = \|T_j - T_{j-1}\| \leq \varepsilon_1 \|T_{j-1}\| + \varepsilon_2$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – заздалегідь задані малі числа.

5. Перевіряється умова $\mathfrak{I}_j \leq \mathfrak{I}_{зад}$ і якщо вона виконується, то перехід до п.1 з формуванням нових початкових умов.

4.4. Метод роздільного оцінювання статичної нелінійної і динамічної лінійної складових моделі Гомерштейна

Модель Гомерштейна описує реальну систему по входу (x_{ex}) – виходу (x_{eux}) комбінацією лінійного динамічного оператора.

$$\beta'_n \frac{d^n x_{eux}}{dt^n} + \beta'_1 \frac{dx_{eux}}{dt} + x_{eux}(t) = \gamma_m \frac{d^m x_{ex}}{dt^m} + \dots + \gamma_1 \frac{dx_{ex}}{dt} + \gamma_0 x_{ex}(t) \quad (4.84)$$

з статичним нелінійним $f(u)$, де останній розкладається по системі лінійно-незалежних (бажано ортогональних) функцій $\varphi_k(u)$:

$$f(u) = \sum_{k=1}^r l_k \cdot \varphi_k(u). \quad (4.85)$$

Залежно від розташування нелінійності (рис. 2.4.5), позначивши

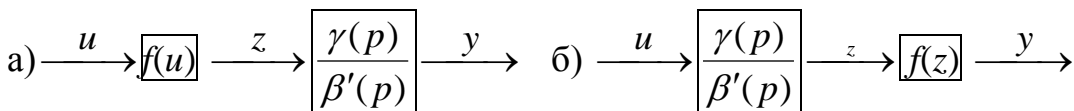


Рис. 4.5. Моделі Гомерштейна: а) – нелінійність на вході, б) – на виході.

Оператор $\frac{d^i}{dt^i} = p^i$ і підставивши розклад (4.85) і динаміку (4.84) у відповідні структури (рис. 4.5), отримуємо для варіантів (а) нелінійності на вході модель

$$\beta'(p) \cdot y(t) = \sum_{i=1}^m \gamma_i p^i \left(\sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi_k(u) \right) \quad (4.86)$$

для (б), нелінійність на виході, модель

$$\sum_{i=0}^n \beta'_i p^i \left(\sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi_k(y(t)) \right) = \gamma(p) \cdot u(t), \quad (4.87)$$

де $\beta'(p) = \beta'_n p^n + \dots + \beta'_1 p + 1$, $\gamma(p) = \gamma_m p^m + \dots + \gamma_1 p + \gamma_0$.

Тоді в задачі ідентифікації визначається $n+m+r+2$ параметрів $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. При цьому моделі (4.86) параметри γ_i, α_k входять як множина їх добутоків, в моделі

(4.87) та ж ситуація для параметрів β_i, α_k . Це ускладнює розв'язок задачі оцінювання. Окрім цього, якщо $u(t)$ таке, що забезпечує ортогональність $\varphi_k(u(t))$, що досить складно реалізувати, тим не менш ортогональність порушується внаслідок диференціювання функцій $\varphi_k(u(t))$ у часі. Наприклад, якщо φ_k – це синус-косинусний ряд, то вже перша похідна від φ_k буде лінійно залежною функцією від φ_{k+1} . Використання ступеневого поліному

$$f(u(t)) = \sum_{k=0}^r \alpha_k u^k(t) \quad (4.88)$$

тим паче не створює ортогональності. Все це погіршує практичне використання моделей (4.86), (4.87), особливо в умовах зашумленості сигналів, які підлягають диференціюванню. Тому, покладаючи обмеженість смуги спектру сигналів $x_{ex}(t)$, $x_{eux}(t)$ і допускаючи кінцеву похибку Δ апроксимації диференційного рівняння (4.84) рівнянням

$$\beta_n \frac{d^n x_{eux}}{dt^n} + \dots + \beta_1 \frac{dx_{eux}}{dt} + x_{eux}(t) = x_{ex}(t) + \Delta(t), \quad (4.89)$$

отримаємо спрощені моделі Гомерштейна: замість (4.86) модель

$$\beta(p) \cdot y(t) = \sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi^k(u), \quad (4.90)$$

замість (4.87) модель

$$\sum_{i=0}^n \beta_i P^i \left(\sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi_k(y(t)) \right) = u(t). \quad (4.91)$$

Останню можна представити у вигляді (4.90), якщо розглядати не пряму $y(k)$, а інверсну залежність $u(y)$ (рис. 4.6)

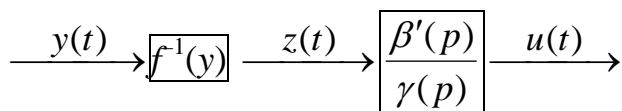


Рис. 4.6. Інверсна до моделі (4.87) модель.

Тоді задача ідентифікації обох моделей зводиться до задачі ідентифікації моделі (4.90) з $n+r+1$ невідомим. Подальше спрощення задачі досягається шляхом урахування фундаментальної закономірності гладкості всіх відображень, а саме $f(u)$.

Критерії наближення, що враховують гладкість шуканої залежності.

Поданий в 1806-1809 роках Лежандром-Гауссом середньоквадратичний критерій близькості дає можливість отримати найкраще наближення до математичного очікування шуканої залежності, якщо поміхи розподілені за нормальним законом, а вибірка даних достатньо велика. При обмежених вибірках і

порушенні нормальності закону розподілу поміх метод втрачає свою оптимальність [22]. Покращити ситуацію можна, якщо врахувати додаткову інформацію:

- відкинути аномальні дані,
- контролювати природну гладкість шуканих залежностей.

Аномальні дані відкидаються чи виправляються на етапі ротастної фільтрації сигналів, а властивість гладкості вперше була врахована при визначенні моделей технологічних процесів в роботі [23]. Замість мінімуму середнього квадрата похибки запропоновано мінімізувати в загальному випадку середнє значення квадрата $r+1$ – ої кінцевої різниці $\Delta^{r+1}\varepsilon$:

$$I = \sum (\Delta^{r+1}\varepsilon)^2 \rightarrow \min, \quad (4.92)$$

де, якщо $r=1$, то має місце наближення по гладкості, якщо $r=2$, – наближення по кривизні і так далі.

В роботі [23] також пропонується узагальнення критерію (4.92), де замість квадрата береться будь-яка ступінь. Але, ураховуючи вимогу робастності [22], збільшувати ступінь недоцільно. Порядок різниці $r+1$ встановлюється апріорі, якщо відомий порядок моделі (4.85), або відшукується поступово, починаючи з $r=1$.

Метод визначення гладкої статичної \square ип. \square з \square ий \square тьс з динаміки контролю

Нехай динаміка об'єкту описується лінійним диференціальним рівнянням

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k} y(t)}{dt^{n-k}} = f[x(t)], \quad (4.93)$$

де $f[x(t)]$ – статична \square нелінійність, на вхід якої поступає тестуючий сигнал $x(t)$, а вихід цієї нелінійності впливає на динаміку об'єкту, моделлю якого слугує передаточна функція $W(a, p)$.

Задача полягає у тому, щоб за вимірюваними зашумленими значеннями виходу $\hat{y}(t_k)$ відновити (оцінити) статичну нелінійність й отже таким чином компенсувати її вплив на динаміку об'єкту.

Класичні способи вирішення задач такого типу полягають у застосуванні для оцінювання параметрів моделі динаміки об'єкту (параметрів передаточної функції) методу найменших квадратів (МНК).

При цьому невідома нелінійність як функція вхідного впливу $f[x(t)]$ апроксимується поліномом

$$f[x(t)] = b_0 + b_1 x(t) + b_2 x^2(t) + \dots + b_m x^m(t). \quad (4.94)$$

Формується нев'язка

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} - f[x(t)] \quad (4.95)$$

й мінімізується функціонал

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt. \quad (4.96)$$

Параметри $b_k, k = \overline{1, m}; a_k, k = \overline{1, n}$, оцінюються за умови мінімуму цього функціоналу

$$\frac{\partial J}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial a} = 0. \quad (4.97)$$

Практика застосування методу найменших квадратів до вирішення такого роду задач свідчить, що йому властиві досить суттєві недоліки, які пов'язані з високими вимогами, що пред'являються до тестуючого (вхідного) сигналу $x(t)$, а також низька точність оцінок параметрів нелінійної динамічної моделі внаслідок неадекватності структури моделі об'єкту контролю, які обмежують застосування класичного МНК для вирішення задач такого типу. Спроби підвищення адекватності моделі за рахунок підвищення її порядку призводить до різкого збільшення часу оцінювання, що як правило, є недопустимим в умовах обмеженого часу контролю (особливо при вирішенні задачі у реальному часі) та зашумленості вихідних даних, що вимірюються. Це призводить до появи систематичних похибок, які суттєво обмежують застосування класичного МНК.

У зв'язку з вищевикладеним задача пошуку методів оцінювання статичних нелінійностей, які впливають на динаміку об'єкту контролю, а також оцінювання параметрів моделі передаточної функції об'єкту контролю, є важливою й актуальною.

З метою визначення непараметричної моделі $\hat{f}[x(t)]$ статичної нелінійності $\square f[x(t)]$ визначимо скомпенсований вихід об'єкту контролю у вигляді

$$y_{\text{ск}}(t) = \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2}, \quad (4.98)$$

де параметри β_1, β_2 визначаються за умови середнього квадрату r -ї похідної від $\hat{y}(t)$ по x .

$$(\beta_1, \beta_2) = \arg \min \sum_{k=1}^N \left(\frac{d^r y_{\text{ск}}(t_k)}{dx^r} \right)^2. \quad (4.99)$$

Приймаючи до уваги дискретність вимірювань вихідної величини y замість r -ї похідної можна використовувати відповідну дискретну послідовність $x(t_k)$, яка

вимірюється із сталим кроком у часі Δt у послідовність із сталим прирощенням Δx , але із змінним кроком у часі. Цю задачу можна вирішити у такий спосіб.

Перш за все треба виконати згладжування зашумлених \square вхідної та вихідної послідовностей вимірювань. Для вирішення цієї задачі використовується згладжування значень, що вимірюються, за допомогою сплайнів, що згладжуються.

Після цього впорядковуємо значення вхідної змінної $x(t_k)$ за зростанням. Далі, для визначення значень t_j , які відповідають значенням вхідної змінної, що змінюються зі сталим кроком, виконаємо інтерполювання одержаної послідовності також за допомогою інтерполяційних сплайнів.

$$S_2(t) = x_k + m_k(t - t_k) + c_k(t - t_k)^2, \quad t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}]. \quad (4.100)$$

Значення t_j , які відповідають $j\Delta x$, знаходимо шляхом розв'язання рівняння сплайну:

$$t_{jk} = t_k + \frac{1}{2c_k} \left(-m_k + \sqrt{m_k^2 + 4j c_k \Delta x} \right), \quad (4.101)$$

де $j = \overline{1, l_k}$, $l_k = [x(t_{k+1}) - x(t_k)] / \Delta x$.

Після визначення усіх t_{jk} обчислюються значення $\hat{y}(t_{jk}), d\hat{y}(t_{jk})/dt$ тощо.

Оскільки замість похідних використовуються скінчені різниці, маємо:

$$\Delta^r y_{ck} = \Delta^r \left[\hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2} \right]. \quad (4.102)$$

Зокрема, для $r = 2$ маємо:

$$\Delta^2 y_{ck} = [y_{ck}(t_{k+2}) - 2y_{ck}(t_{k+1}) + y_{ck}(t_k)] / (\Delta x)^2. \quad (4.103)$$

Для $r = 3$:

$$\Delta^3 y_{ck} = [y_{ck}(t_{k+3}) - 3y_{ck}(t_{k+2}) + 3y_{ck}(t_{k+1}) - y_{ck}(t_k)] / (\Delta x)^3. \quad (4.104)$$

Мінімізація функціоналу, таким чином, полягає у розв'язанні відносно β_1, β_2 такої системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N [\Delta^r \hat{y}(t_k) - \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} \beta_1 - \Delta^r \frac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2} \beta_2] \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} &= 0; \\ \sum_{k=1}^N \left[\sum_{k=1}^N [\Delta^r \hat{y}(t_k) - \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} \beta_1 - \Delta^r \frac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2} \beta_2] \Delta^r \frac{d^2\hat{y}(t_k)}{dt^2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Після визначення параметрів β_1, β_2 значення гладкої статичної нелінійності визначається за формулою

$$f[x(t)] = \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2}. \quad (4.106)$$

Алгоритм згладжування експериментальних даних.

Нехай внаслідок спостережень для значень аргументу $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ одержано значення функції $f(x)$ у вигляді таблиці. З метою зменшення випадкових похибок та одержання більш плавної функції застосовується процес згладжування, сутність якого полягає у тому, щоб значення, які одержано за результатами спостережень, замінити значеннями, які одержано внаслідок процедури згладжування таким чином.

Задача згладжування формулюється таким чином.

Треба знайти функцію $f^*(x) \in L_2^n[a, b]$ таку, щоб досягався мінімум функціоналу

$$J[f] = \sum_{i=0}^n p_i [y_i - f(x_i)]^2 + p \int_{\alpha}^{\beta} [f^{(n)}(t)] dt, \quad (4.107)$$

де $p > 0$ - допоміжний параметр, p_i - задані числа (вагові коефіцієнти).

При $p = 0$ задача зводиться до задачі наближення за МНК. При усіх $p = 0$ задача переходить у задачу інтерполяції.

Згладжуючий сплайн відшукується у вигляді

$$S_3(x) = \alpha + \beta x + \sum_{i=0}^3 c_k^{[i]} x^i, \quad x_k < x < x_{k+1}. \quad (4.108)$$

Для побудови сплайну, що згладжує, для визначеності системи рівнянь треба накласти додаткові умови у місцях “зшивання” сплайнів. Ці додаткові умови зазвичай називаються межовими умовами. Вони залежать від характеру даних, що вимірюються, а також від того, які умови мають бути виконаними у точках “зшивання”. При згладжуванні розрізняють: умови періодичності, а також умови на перші або другі похідні у цих точках [11].

У неперіодичному випадку для визначення коефіцієнтів сплайну, що згладжує, маємо систему:

$$\begin{aligned} a_0 M_0 + b_0 M_1 + c_0 M_2 &= g_0; \\ b_0 M_0 + a_1 M_1 + b_1 M_2 + c_1 M_3 &= g_1; \\ c_{k-2} M_{k-2} + b_{k-1} M_{k-1} + a_k M_k + b_k M_{k+1} + c_k M_{k+2} &= g_k; \quad k = \overline{2, N-2}; \\ c_{N-2} M_{N-3} + b_{N-2} M_{N-2} + a_{N-1} M_{N-1} + b_{N-1} M_N &= g_{N-1}; \\ c_{N-1} M_{N-2} + b_{N-1} M_{N-1} + a_N M_N &= g_N. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Коефіцієнти цієї системи визначаються формулами:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{2}(b_{k-1} + h_k) + \frac{1}{h_{k-1}^2} p_{k-1} + \left(\frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k} \right)^2 + \frac{1}{h_k^2} p_{k-1}; k = \overline{1, N-2}; \\
b_k &= \frac{h_k}{6} - \frac{1}{h_k} \left[\left(\frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k} \right)^2 + \frac{1}{h_{k-1}^2} p_k + \left(\frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \right) p_{k+1} \right]; k = \overline{1, N-2} \\
c_k &= \frac{1}{h_k h_{k+1}} p_{k-1}; k = \overline{1, N-3}; \\
g_k &= \frac{z_{k+1}^0 - z_k^0}{h_k} - \frac{z_k^0 - z_{k-1}^0}{h_{k-1}}; k = \overline{1, N-1}.
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Якщо сплайн, що згладжує, задовольняє межовим умовам $S''(a) = S''(b) = 0$, то

$$a_0 = a_N = 1; \quad b_0 = c_0 = b_{N-1} = c_{N-1} = g_N = g_0 = 0.$$

У періодичному випадку система рівнянь має вигляд

$$c_{k-2} M_{k-2} + b_{k-1} M_{k-1} + a_k M_k + b_k M_{k+1} + c_k M_{k+2} = g_k; k = \overline{1, N}, \tag{4.111}$$

де для усіх k коефіцієнти матриці визначаються за формулами (4.110).

Системи рівнянь, які наведено вище, розв'язуються методом немонотонної прогонки. Після визначення параметрів M_k величини z_k визначаються за співвідношеннями

$$z_k - z_k^0 = -p_k D_k; k = \overline{0, N}, \tag{4.112}$$

причому

$$\begin{aligned}
D_0 &= \frac{1}{h_0} (M_1 - M_0); \\
D_k &= \frac{1}{h_k} (M_{k-1} - M_k) - \frac{1}{h_{k-1}} (M_k - M_{k-1}); k = \overline{1, N-1}; \\
D_N &= \frac{1}{h_{N-1}} (M_N - M_{N-1}).
\end{aligned} \tag{4.113}$$

У періодичному випадку $h_0 = h_N; M_0 = M_N; M_1 = M_{N-1}$, тож усі величини D_k визначаються за формулами (4.113) для $k = \overline{1, N}$.

Найважливішим моментом під час побудови сплайну, що згладжує, є визначення вагових параметрів p_k . У практичних застосуваннях зазвичай відомі похибки визначення величин z_k^0 , тобто відомі $|z_k - \bar{z}_k| \leq \delta_k$, де \bar{z}_k - точні значення вимірюваної величини. У цій ситуації природно вимагати, щоб сплайн, що згладжує, $S(x)$ задовольняв умовам

$$|z_k - z_k^0| \leq \delta_k; k = \overline{0, N} \tag{4.114}$$

або, що теж саме, умовам

$$p_k |D_k| \leq \delta_k; k = \overline{1, N}.$$

Ці обмеження використовуються для обчислення вагових множників p_k . Побудуємо ітераційний процес, реалізація якого дозволить одержати невідомі коефіцієнти M_k та множники p_k .

$$(A + 6HR^{(m)}H^T)M^{(m)} = 6Hz^0. \quad (4.115)$$

$$p_k^{(m+1)} = \begin{cases} \delta / |D_k^{(m+1)}| & \text{если } D^{(m+1)} \neq 0, \\ 0 & \text{если } D^{(m+1)} = 0. \end{cases} \quad (4.116)$$

де m – номер ітерації.

Матриці A, H мають такий вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & r_1 & h_1 & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & h_1 & r_2 & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdot & \cdot & \cdot & h_{N-3} & r_{N-2} & h_{N-2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & h_{N-2} & r_{N-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.117)$$

де $r_k = 1(h_{k-1} + h_k)$;

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0^{-1} & -(h_0^{-1} + h_1^{-1}) & h_1^{-1} & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdot & h_{N-1}^{-1} & -(h_{N-2}^{-1} + h_{N-1}^{-1}) & \dots & h_{N-1}^{-1} \\ \cdot & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} p_0 & & \\ & \ddots & \\ & & p_N \end{bmatrix}. \quad (4.118)$$

Зв'язок M_k з z_k визначається матричним рівнянням

$$AM = 6Hz. \quad (4.119)$$

У якості початкового наближення природно взяти $p_0^0 = 0$, що відповідає інтерполяційному сплайну із значеннями $D_k = D^{(0)}$. Ітераційний процес продовжується доти, доки значення сплайну z_k не опиняться у “коридорі”.

Алгоритм інтерполяції параболічними сплайнами

Нехай $f(x) \in C_{[a,b]}$, $\{a,b\} \in R_n$; $a < b$, й задано дві множини вузлів Δ_n, Δ'_n

$$\Delta'_n : \bar{x}_0 = a < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_{n+1} = b. \quad (4.120)$$

Припустимо, що $x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i, i = \overline{1, n}$. Функція $S_2(x; f)$ називається інтерполяційним параболічним сплайном для функції $f(x)$, якщо

$$\begin{aligned}
S_2(x) &\in P_2; \quad x \in (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}); \quad i = \overline{1, n}; \\
S_2(x) &\in C_{[a, b]}^{(1)}; \\
S_2(x) &= f(x_i).
\end{aligned}
\tag{4.121}$$

Числа \bar{x}_i називаються вузлами сплайну, а числа x_i - вузлами інтерполяції. Вузли сплайну – це точки імовірного розриву старшої похідної (у даному випадку другої). Сплайн $S_2(x; f)$ залежить від $n + 3$ параметрів, отже містить два вільних параметри. Тому на інтерполяційний параболічний сплайн накладаються два додаткових обмеження.

Якщо функція $f(x)$ є $(b - a)$ -періодичною, то зазвичай вимагають, щоб сплайн також був $(b - a)$ - періодичним й мав неперервну першу похідну, так щоб точка $x_0 = a$ не була вузлом сплайну.

$$S_2^{(i)}(a) = S_2^{(i)}(b) \quad (i = 1, 2). \tag{4.122}$$

У більш загальному випадку найбільш розповсюдженими є такі умови:

$$S_2'(a) = a_n; \quad S_2'(b) = b_n; \tag{4.123}$$

$$S_2''(a) = A_n; \quad S_2''(b) = B_n, \tag{4.124}$$

де a_n, b_n, A_n, B_n - задані дійсні числа.

Конкретний вибір цих чисел залежить від задачі, що вирішується. Наприклад, якщо функція $f(x)$ має відповідні похідні, то можна покласти $a_n = f'(a), b_n = f'(b), A_n = f''(a), B_n = f''(b)$ або замістити їх відповідними наближеними значеннями похідних (кінцевими різницями). Якщо вибір межових умов викликає труднощі, можна вимагати, щоб у точках \bar{x}_1, \bar{x}_n сплайн $S_2(x)$ мав неперервну другу похідну, тобто

$$S_2''(z - 0) = S_2''(z + 0), \quad z = \bar{x}_i \quad (i = 1; i = n). \tag{4.125}$$

Нехай $m_i = S_2'(x_i); i = \overline{0, n}; M_i = S_2''(x_i)$. Оскільки $S_2''(x)$ - кусочно – стала функція, то

$$S_2''(x) = M_i; \quad \bar{x}_i < x < \bar{x}_{i+1}, \quad i = \overline{0, n}. \tag{4.126}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
h_i &= x_{i+1} - x_i; \quad \bar{h}_i = x_{i+1} - \bar{x}_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}; \\
\sigma_i &= f(x_{i+1}) - f(x_i)h_i = y_{i+1} - h_i y_i; \\
u_i &= h_i h_{i+1} + h_i; \quad \gamma_i = \bar{h}_i h_i - \bar{h}_i; \\
v_i &= h_{i-1} h_{i-1} + h_i; \quad \bar{u}_i = u_i \gamma_i; \quad \bar{v}_i = v_i \gamma_i; \quad i = \overline{0, n-1}.
\end{aligned}
\tag{4.127}$$

Тоді для $x \in [x_k, x_{k+1}]$ маємо

$$S_2(x) = y_i + m_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_{i+1})_+^2. \tag{4.128}$$

Будемо вимагати, щоб $S_2(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$ та $S'_2(x_{k+1}) = m_{k+1}, k = \overline{0, n-2}$. Тоді для коефіцієнтів c_k, d_k одержимо

$$c_i = \frac{m_{i-1}}{2} \left(\frac{1}{h_i} - \frac{\bar{v}_i}{\bar{h}_i} \right) - \frac{m_i}{2} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{\bar{v}_i}{\bar{h}_i} \right) + \frac{\sigma_i}{\bar{h}_i} \bar{v}_i, \quad (4.129)$$

$$d_i = \frac{\gamma_i h_i}{h_i^2} (m_i + m_{i+1} / 2 - (y_{i+1} - y_i)). \quad (4.130)$$

Оскільки у точці x_{i+1} має виконуватись рівність $S''_2(x_{k+1} - 0) = S''_2(x_{r+1} + 0)$, одержуємо рівність

$c_k + d_k = c_{k+1}$ або

$$\frac{1}{\gamma_k \bar{h}_k} m_k + \left(\frac{h_k + \bar{h}_k}{h_k \bar{h}_k} + \frac{1}{h_{k+1}} + \frac{\gamma_k}{\bar{h}_{k+1}} \right) m_{k+1} + \frac{1}{h_{k+1} \gamma_{k+1}} m_{k+2} = 2 \frac{\sigma_k}{\bar{h}_k} + 2 \frac{\sigma_{k+1}}{h_{k+1} - \bar{h}_{k+1}}. \quad (4.131)$$

У періодичному випадку $k = \overline{0, n-2}$, при цьому $m_0 = m_n; m_1 = m_{n+1}; h_0 = h_n, h_{n-1} = h_1$, тобто маємо систему рівнянь з n невідомими m_1, m_2, \dots, m_n .

У випадку межових умов (4.111) m_0, m_n відомі, тож система (4.123) містить $(n-1)$ рівняння з $(n-1)$ невідомими. Для межових умов (4.131) маємо

$$2c_0 = A_n; 2c_{n-1} + 2d_{n-1} = B_n.$$

Для межових умов (4.125):

$$d_0 = d_{n-1} = 0; \quad g_k = e_k = 2u_k \frac{h_{k-1}}{h_{k-1}} \sigma_{k-1} + 2v_k \gamma_k \frac{h_k}{h_k} \sigma_k; k = \overline{1, n-1}. \quad (4.132)$$

У періодичному випадку система рівнянь (4.131) відносно m_k набуває вигляду

$$\bar{u}_k m_{k-1} + (\bar{u}_k + v_k + 2) m_k + \sigma_k m_{k+1} = g_k; k = \overline{1, n}. \quad (4.133)$$

$$m_0 = m_n; m_{n+1} = m_1; h_n = h_0; \bar{h}_n = \bar{h}_0.$$

Для межових умов (4.123) система рівнянь має вигляд

$$Am = g, \quad (4.134)$$

$$m = [m_1, m_2, \dots, m_{n-1}];$$

$$g = [g_1 - \bar{u}_1 a_n, g_2, g_3, \dots, g_{n-2}, g_{n-1} - \bar{v}_{n-1} b_n]. \quad (4.135)$$

Для межових умов (4.124) система рівнянь має вигляд

$$(2 - \frac{\bar{h}_0}{h_0}) m_0 + \frac{\bar{h}_0}{h_0} m_1 = 2\sigma_0 - A_n (h_0 - \bar{h}_0);$$

$$\bar{u}_k m_{k-1} + (2 + \bar{u}_k + \bar{v}_k) m_k + \bar{v}_k m_{k+1} = g_k; k = \overline{1, n}; \quad (4.136)$$

$$\frac{1}{\gamma_{n-1}} m_{n-1} + \frac{h_{n-1} + \bar{h}_{n-1}}{h_{n-1}} m_n = 2\sigma_{n-1} + B_n \bar{h}_{n-1}.$$

Метод найменших квадратів

Мінімізація критерію (4.104) – визначення оцінок параметрів b_k , $k = \overline{1, m}$ та a_i , $i = \overline{1, n}$, реалізується шляхом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^N \left\{ \left[\sum_{i=1}^m b_i x_k^i - \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y_k}{dt^i} \right] x_k^l \right\} = \sum_{k=1}^N y_k x_k^l, \quad l = \overline{0, m};$$

$$\sum_{k=1}^N \left\{ \left[\sum_{i=1}^m b_i x_k^i - \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y_k}{dt^i} \right] \frac{d^l y_k}{dt^l} \right\} = \sum_{k=1}^N y_k \frac{d^l y_k}{dt^l}, \quad l = \overline{1, n}.$$
(4.137)

Запровадимо позначення:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]^T; \quad e_l = \sum_{k=1}^N y_k x_k^{l-1}; \quad l = \overline{1, m}; \quad e_l = \sum_{k=1}^N y_k \frac{d^l y_k}{dt^l}; \quad l = \overline{1, n}$$
(4.138)

$$d_{1,1} = N; \quad d_{j,l} = d_{l,j} = \sum_{k=1}^N x_k^j x_k^l, \quad j, l = \overline{1, m};$$

$$d_{l,m+j} = \sum_{k=1}^N \frac{d^j y_k}{dt^j} x_k^{l-1}; \quad j = \overline{1, n}; \quad l = \overline{1, m};$$
(4.139)

$$d_{l+m,j} = \sum_{k=1}^N x_k^{j-1} \frac{d^l y_k}{dt^l}; \quad l = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m};$$

$$d_{l+m,j+n} = \sum_{k=1}^N \frac{d^j y_k}{dt^j} \frac{d^l y_k}{dt^l}; \quad l = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих параметрів b_k , $k = \overline{1, m}$ та a_i , $i = \overline{1, n}$, набуває “класичного” вигляду

$$Dc = e. \quad (4.140)$$

Приклад визначення не лінійності автоматизованого електроприводу

З метою контролю стійкості та точності системи автоматизованого електроприводу необхідно визначити величину та асиметрію зони нечутливості, крутизну та рівні насиченості нелінійної залежності швидкості обертання вихідного валу системи від напруги $U_{\text{я}}$ на валу якоря двигуна постійного струму в режимі реверсу, тобто швидкість переходу від $-\Omega_{\text{max}}$ до $+\Omega_{\text{max}}$ [38]. Динаміці цього процесу відповідає диференціальне рівняння

$$a_2 \frac{d^2 \Omega(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t) = f[U_{\text{я}}(t)],$$
(4.141)

де $U_{\text{я}}$ змінюється в межах від $-U_{\text{яmax}}$ до $+U_{\text{яmax}}$ ступінчасте:

$$U_{\text{я}}(t) = U_{\text{max}} \left[-1 + \frac{1}{q/2} \sum_{k=1}^q 1(-k\Delta t) \right],$$

де $q = 16;$

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > k\Delta t, \\ 0, & t < k\Delta t. \end{cases}$$

Числові значення параметрів a_1, a_2 невідомі. Параметри тестуючого впливу дорівнюють $U_{\max} = 120B$, $\Delta t = 1c$. Початкові умови: $\Omega(0) = -\Omega_{\max} = -300\text{рад/с}$, $d\Omega(0)/dt = 0$.

З метою моделювання процесу нелінійну залежність задамо у вигляді

$$\Omega[U_{\text{я}}(t)] = 3[U_{\text{я}}(t)] - 60 \sin(0,065[U_{\text{я}}(t)]),$$

що відповідає умові гладкості залежності із зонами нечутливості та насичення. Вимірювання вихідного сигналу приводу здійснюються з кроком $\Delta t = 0,1c$ при $N = 200$, $q = 16$.

Оскільки вимірювання вихідної змінної виконуються в умовах впливу перешкод вимірювання, для моделювання процесу накладемо 10% похибку вимірювань у вигляді “білого шуму” – випадкового нормального процесу із нульовим середнім та одиничною дисперсією.

Моделювання процесу складається з таких кроків:

1. Згладжування вхідних $[U_{\text{я}}(t_k)]$ та вихідних \hat{y}_k , $k = \overline{1, N}$, значень, що вимірюються.
1. Упорядкування значень $U_{\text{я}}(t_k)$ у порядку їхнього зростання.
2. Інтерполяція цих значень за допомогою інтерполяційних сплайнів.
3. Визначення значень t_{k_j} , що відповідають рівномірному змінюванню $U_{\text{я}}(t_k)$ зі сталим кроком ΔU .
4. Обчислення значень $\hat{y}(t_{k_j})$, а також похідних першого та другого порядку від цих значень (кінцевих різниць).
5. Мінімізація функціоналу (4.96) шляхом складання та розв’язання системи рівнянь (4.140).

Моделювання процесу визначення статичної нелінійності виконувалось для декількох значень m з метою визначення оптимального степеню поліноміальної залежності статичної не лінійності від вхідного впливу. З рис. 4.7 бачимо, що оптимальне значення відповідає $m = 5$. При цьому досягнуто значення середньоквадратичної похибки $\varepsilon_5 = 26,72$.

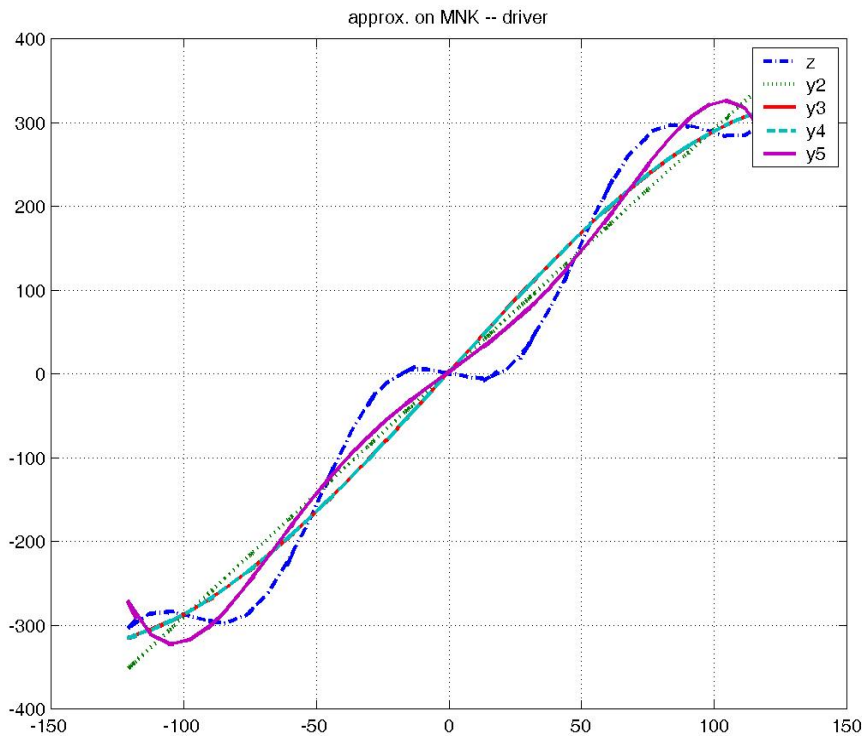


Рис. 4.7. Оцінка нелінійності для $m=2,3,4,5$ за МНК.

Цю ж задачу розв'яжемо за допомогою методу компенсації динаміки об'єкту контролю.

Перші три кроки ті ж самі. Після виконання кроків 4 та 5, тобто визначення часових інтервалів, що відповідають сталому прирощенню значень тестуючого \square сигналу, та визначення значень вихідного сигналу, які відповідають значенням часу t_{k_j} замість кроку 5 виконуємо:

6. Мінімізація по β_1, β_2 функціоналу (4.99) у такому вигляді

$$\min J_{ск} = \min \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^r \hat{y}_{ck}(t_k)}{\partial U^r(t)} \right)^2.$$

дає оцінки $\hat{\beta}_1 = 0,0196$, $\hat{\beta}_2 = 0,000134$. Тоді шукана не лінійності визначається таким чином: $f \left[U_{я}(t) = y(t) - 0,0196 \frac{dy(t)}{dt} - 0,000134 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right]$.

Результати моделювання для $r = 1,2,3$ наведено на рис. 4.8.

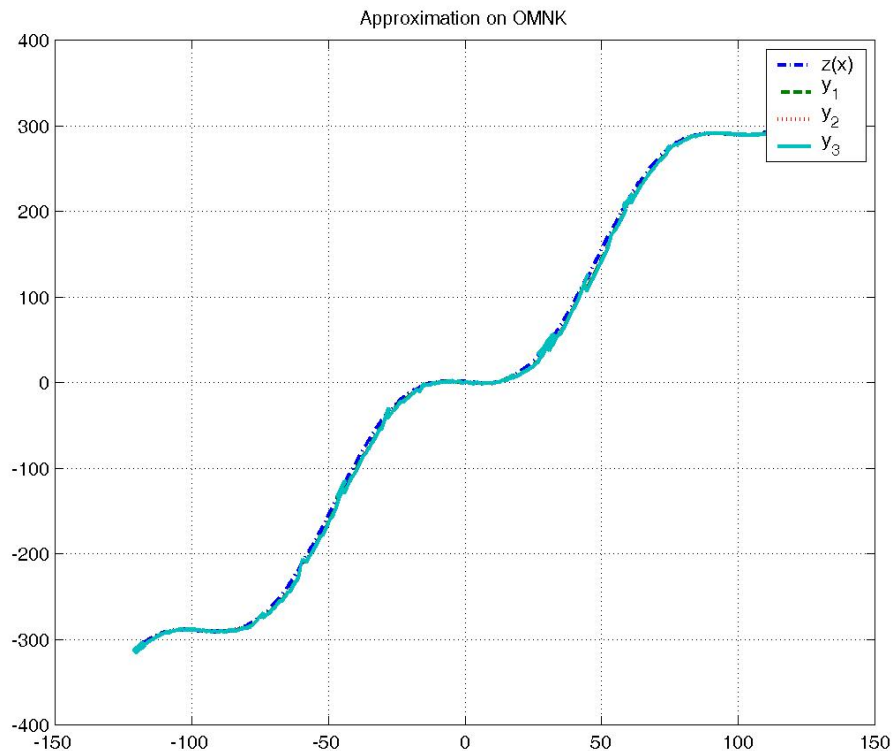


Рис. 4.8. Оцінка статичної нелінійності за методом компенсації динаміки для $r = 1,2$ та $r = 3$.

Остаточна похибка виявилась найменшою для $r = 2$ й дорівнює $\varepsilon_2 = 3,067$, що менше 0,5%.

Глава 5. Побудова моделей детермінованих процесів, виміри яких збурено випадковими завадами

5.1. Моделювання, ідентифікація і прогнозування показників економіки методами спрощеного конфлюентного аналізу

Показники економіки (енергетики та ін.), як функції часу, можуть мати найрізноманітнішу структуру, довжину ряду, точність, тип прихованої закономірності розвитку (зміни) у часі, кроку у часі, інтервалу прогнозу та ін [26].

Елементи, з яких складається модель часового ряду, можуть бути аналітичними функціями часу t (степеневі: t^i , $-\infty < i < \infty$; періодичні тригонометричні: $\sin(\omega t + \varphi)$; комбіновані: $\sin^i(\omega t + \varphi)$ та іншими точно заданими функціями $f(t)$ або затриманими у часі t значеннями самого ряду $y(t)$ ($y(t-\tau)$,

$0 \leq t \leq t_k$, де t_k – кінцеве значення часу). Як правило, час t представлено дискретами $t_k, k=0,1,2,\dots$ не завжди з рівномірним кроком Δt .

У випадку невідомої структури моделі ряду, перебираючи різні варіанти структур, побудованих на вказаних елементах, можна підібрати найкращу (за основним критерієм I (критерієм точності прогнозу) структуру. Моделі з степенними елементами, як правило, краще використовувати для коротких рядів, а авторегресійні – для довгих (де не так сильно впливає невизначеність початкових умов).

Фізично реалізуемий \square \square показник I точності прогнозу представимо зваженою сумою часткових показників $I_i (i=1,2,3)$, що відповідають за якість окремих властивостей моделі ряду показник I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{n} \operatorname{tr} \left[\operatorname{diag} \frac{|\hat{\beta}_i^p - \hat{\beta}_i^H|}{|\hat{\beta}_i|} \right], \quad i = \overline{1, n}; \quad (5.1)$$

де $\hat{\beta}_i^p, \hat{\beta}_i^H$ і $\hat{\beta}_i$ оцінки i -го параметра моделі, отримані по виборці парних, непарних та всіх дискретів k часу t_k ; це, так званий, параметричний показник регулярності. Показник I_2 :

$$I_2 = (\varepsilon^T \varepsilon) \cdot (x^T x)^{-1}, \quad (5.2)$$

де $\varepsilon^T = [\varepsilon(1) \dots, \varepsilon(M)]$, $\hat{x}^T = [\hat{x}(1) \dots, \hat{x}(M)]$, $\hat{x}(k)$ $\varepsilon(k)$ – похибки

апроксимації сигналу $x(k)$ відповідною моделлю в k -ій точці ряду; це, так званий, сигнальний показник незміщеності, або точності моделювання ряду моделлю. Показник I_3 :

$$I_3 = |1 - K|, \quad K = \frac{\sum_{i=1}^L \eta_i |x(M-i) \cdot \hat{x}(M-i)|}{\sum_{i=1}^L \eta_i |x(M-i)| \cdot \sum_{i=1}^L \eta_i |\hat{x}(M-i)|}. \quad (5.3)$$

Тут η_i коефіцієнт розподілу бажаної точності прогнозу по L останнім точкам вибірки $x(k), k = \overline{1, M}$; $\sum_{i=1}^L \eta_i = 1$; $\hat{x}(M-i)$ - прогнозні значення $x(M-i)$, отримані

з моделі, побудованої на скороченій на L останніх точок вибірки $k = \overline{1, M-L}$.

Оскільки, вважається, що прогнозований ряд $x(k)$ складається з прихованої детермінованої гладкої у часі складової і випадкової складової, близької до гаусівського “білого шуму”, то у варіаційному ряді упорядкованих по складності (мірності вектора β невідомих параметрів) моделей, показники I_1 і I_3 обмежують мірність n вектора β , в той час, як показник I_2 зі зростанням n зменшується.

Залежно від мети ідентифікації варіюються коефіцієнти ваги g_i зваженої суми цих трьох показників:

$$I = \sum_{i=1}^3 g_i I_i, \quad \sum_{i=1}^3 g_i = 1, \quad g_i \geq 0. \quad (5.4)$$

Для задачі контролю параметрів β_i моделі відомої структури максимальна вага g_1 ; для задачі $\hat{\beta}$ точної апроксимації ряду $x(k)$ моделлю $\hat{x}(k)$ – g_2 ; для задачі прогнозу – g_3 . Сукупність показників I_1, I_2, I_3 забезпечує компроміс між стабільністю оцінок моделі, точністю $\varepsilon^T \varepsilon$ апроксимації та точністю прогнозу.

На конкретному прикладі реального часового ряду, що має 43 дискрети $x(k)$ з рівномірним кроком $\Delta t=4$ місяці (один з показників у енергетиці України), рис. 5.1., та табл. 5.1., розглянемо рішення задачі прогнозу $x(k)$, на 6 останніх точок, вважаючи їх невідомими. Така постановка задачі дає можливість реалізувати, $k=1,37$, фізично не реалізований при прогнозі в майбутнє, об'єктивний показник I відносної точності прогнозу на ці 6 точок:

$$I = \frac{[\varepsilon(38), \dots, \varepsilon(43)] \cdot [\varepsilon(38), \dots, \varepsilon(43)]^T}{[x(38), \dots, x(43)] \cdot [x(38), \dots, x(43)]^T} \quad (5.5)$$

тобто відносне середньоквадратичне відхилення $\varepsilon(k) = \hat{x}(k) - x(k)$, $k = \overline{38,43}$, прогнозних значень $\hat{x}(k)$ від відомих $x(k)$. В критерії (5.3) взято $\eta_i = \frac{1}{L} = \frac{1}{6}$.

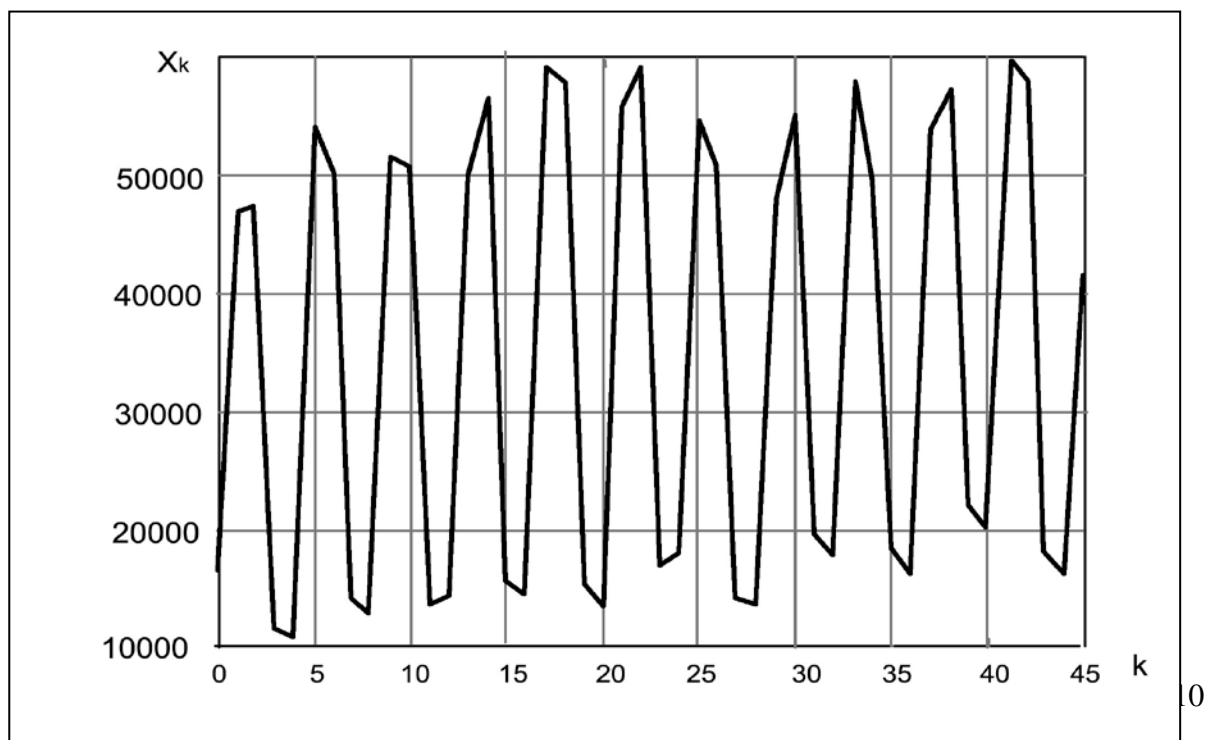


Рис. 5.1. Часовий ряд одного економічного показника в області енергетики України.

Коефіцієнти ваги g_i в узагальненому критерії (5.4) прийнято такими: $g_1=0,9$; $g_2=0,4$; $g_3=0,4$.

Таблиця 5.1

Залежність $x(k)$ від k :

k	x	k	x	k	x	k	x
1	10550	12	13600	23	59250	34	57800
2	47070	13	14550	24	16850	35	49630
3	47350	14	49900	25	17830	36	18780
4	11500	15	56750	26	54800	37	16000
5	10900	16	16050	27	50700	38	53950
6	54700	17	14680	28	14150	39	57500
7	50000	18	59300	29	13550	40	22000
8	14320	19	57700	30	47430	41	19650
9	12900	20	15500	31	56350	42	59900
10	51650	21	13350	32	19450	43	57550
11	50740	22	55600	33	17600		

Середнє значення ряду 35100, середньо-квадратичне відхилення ряду від середнього – 19550, коефіцієнт варіації – 0,55. Наведеному у таблиці 5.1. ряду ставились у відповідність різні математичні моделі.

1) моделі у вигляді різного порядку степеневого поліному від t , тобто від дискретів k часу:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k, \quad (5.6)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2, \quad (5.7)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \beta_3 k^3, \quad (5.8)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k^{\frac{1}{4}} + \beta_2 k^{\frac{1}{3}} + \beta_3 k^{\frac{1}{2}} + \beta_4 k^{\frac{3}{2}}, \quad (5.9)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^{-1} + \beta_3 k^{-3}, \quad (5.10)$$

2) моделі авторегресії від k з постійним та змінним кроком:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1), \quad (5.11)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2), \quad (5.12)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3), \quad (5.13)$$

$$x(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-4), \quad (5.14)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3) + \beta_4 x(k-4), \quad (5.15)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-4), \quad (5.16)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-4) + \beta_3 x(k-8), \quad (5.17)$$

3) комбіновані поліноміально-авторегресійні моделі:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1), \quad (5.18)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-4), \quad (5.19)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1) + \beta_3 x(k-4). \quad (5.20)$$

На множині структур (5.6) ÷ (5.20) моделей часового ряду (таблиця 5.1.) та множині, запропонованих в попередньому розділі для задач прогнозу методів (МНК, УМНК, ІМ□ипМДЗ), було перевірено ефективність використання фізично реалізуемого□ □критерію (5.4) на предмет його близькості до фізично не реалізуемого□ □критерію (5.5). Тут під ефективністю розуміється правильність вибору найкращого за критерієм (5.5) методу, вибраного по критерію (5.4). Результати числового моделювання представлено в таблиці 5.2, де в 15 рядках таблиці подано: в стовпчиках

- 1 – типи моделей (степеневі (5.6)-(5.10), авторегресійні □(5.11)-(5.17), комбіновані (5.18)-(5.20));
- 2 – відносну середньо-квадратичну похибку моделювання ряду відповідною моделлю при $k = 1,37$ ідентифікації її по МНК;
- 3 – фізично не реалізуемий□ідеальний критерій (5.5) по МНК;
- 4 – фізично реалізуемий□критерій (5.4) при ідентифікації моделі по МНК;
- 5 – найкращий по критерію (5.4) метод ідентифікації для відповідної до рядка моделі;
- 6 – значення ідеального критерію (5.5) для вибраного по реальному критерію (5.4) методу для відповідної до рядка моделі;
- 7 – значення критерію (5.4) для вибраного за ним найкращого методу ідентифікації для відповідної до рядка моделі;
- 8 – найкращий за ідеальним критерієм (5.5) метод ідентифікації відповідної до рядка моделі;
- 9 – значення ідеального критерію (5.5) для найкращого за ним методу ідентифікації моделі відповідного рядка;
- 10 – значення реального критерію (5.4) для найкращого за критерієм (5.5) методу ідентифікації моделі відповідного рядка.

Проаналізуємо отримані результати розрахунків:

1. На множині з 15-ти структур моделей і 4 методів ідентифікації для конкретного ряду (таблиця 5.1) найкращою по ідеальному критерію (5.5) виявилась авторегресійна модель (5.17) зі змінним запізненням на $k-1$, $k-4$ і $k-8$ кроків; найкращий метод – МДЗ. За реальним критерієм (5.4) отримано той же результат (!). Взагалі, з 15 розглянутих випадків у 8-ми оптимальний метод ідентифікації по реальному критерію (5.4) було вибрано вірно (рядки 2, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 15 таблиця 5.2), тобто він співпав з методом, вибраним по ідеальному критерію (5.5). В інших 7-ми випадках (рядки 1, 4, 5, 8, 9, 13, 14) ідеальний

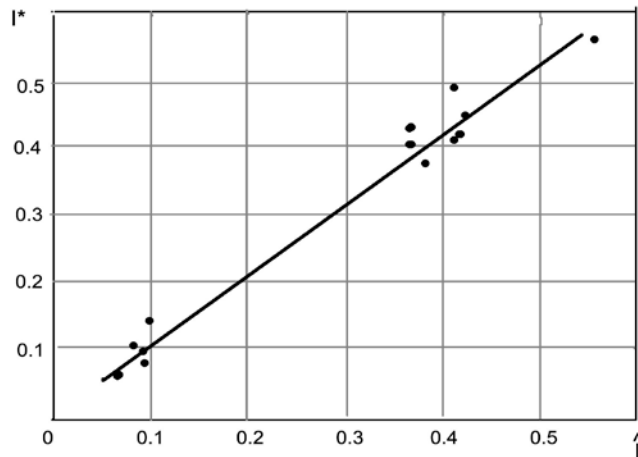


Рисунок 5.2. Залежність ідеального показника I^* (5.5), отриманого для оптимального по ньому методу ідентифікації від того ж показника для оптимального по реальному показнику \hat{I} метода ідентифікації.

показник (5.5) для методу, вибраного за реальним показником (5.4), несуттєво гірший за цей показник для оптимального по ідеальному показнику методу (стовпчики 6 і 9, рисунок 5.2).

З рисунку 5.2 наглядно випливає висновок про сильну кореляцію показників (5.4) і (5.5) і, як наслідок, можливість ефективного використання фізично реалізуємого критерію (5.4).

2. По мірі ускладнення моделей (5.6), (5.7), (5.8), що є степеневими рядами, показник (5.2) (II стовпчик таблиці 5.2) середньо-квадратичної похибки апроксимації ряду (таблиця 5.1) моделями (5.6)÷(5.8) зменшується, що природно витікає з першої теореми Вейерштрасса [11] про апроксимацію степеневими поліномами (рядами Тейлора). В той же час ідеальний критерій (4.5) точності прогнозу при ускладненні моделей погіршується (рядки 1,2,3 третього стовпчика таблиці 5.2). Це підтверджує необ'єктивність внутрішнього апроксимативного критерію (5.2), некоректність його використання для задачі прогнозу.

3. Дещо інша ситуація має місце для авторегресійних і змішаних поліноміально-авторегресійних моделей (5.11)÷(5.20). Тут, внаслідок

регуляризуючої властивості МНК, коли змінні зашумлені, внутрішній критерій (5.2) середньо-квадратичної міри близькості на ділянці апроксимації і зовнішній, як ідеальний (5.5), так і реальний (5.4) критерії стають достатньо сильно корельованими (рисунок 5.3).

Тобто для цього класу моделей менш критичне використання апроксимативного критерію (5.2) в задачі прогнозу в точки (38÷43) по зашумленим даним в точках (1÷37). Тут має місце саморегуляризація. Чим складніше авторегресія, тим гірше обумовленість інформаційної матриці МНК для точних даних. Але для зашумлених некорельованою перешкодою даних діагональні елементи цієї матриці збільшуються і, як результат, зменшуються (за модулем) МНК-оцінки коефіцієнтів моделі, тим самим спрощуючи (регуляризуючи за Тихоновим [14]) модель.

4. Зіставимо значення ідеального критерію (5.5) для моделей, отриманих по МНК (стовпчик 3) і одному з запропонованих методів (стовпчик 6) з оптимізацією по реальному критерію (5.4). З 15 моделей тільки для моделі (5.18) показник (5.5) несуттєво менший. Тобто тільки тут за критерієм (5.4) помилково замість МНК було вибрано МДЗ. В інших чотирнадцяти випадках метод, знайдений за умови мінімуму фізично реалізуємого критерію (5.4) точності прогнозу, дав кращі результати, ніж МНК, або такі ж, якщо по (5.4) вибирався, як кращий, МНК (див. стовпчики 6 і 3 таблиці 5.2).

5. В межах одного методу ідентифікації, наприклад, МДЗ (стовпчик 6, рядки 10÷13) розкид ідеального критерію (5.5) залежно від структури моделі складає від 0,063 до 0,489, що підтверджує актуальність вибору структури моделі.

В межах однієї, наприклад, оптимальної за критерієм (5.5) моделі (5.17), оптимізація рішення на множині з чотирьох методів (МНК, МДЗ, УМНК, ІНК) дає вигреш в 1,5 рази (0,092 – для МНК і 0,063 – для МДЗ, як оптимального методу).

6. В цілому оптимізація на множині методів і моделей дає суттєвий вигреш у точності прогнозу. Визначимо цей вигреш, як відношення критерію (5.5) для моделі з коефіцієнтами, визначеними по МНК (стовпчик 3, таблиця 5.2) до значення того ж критерію (5.5) для тієї ж моделі, з коефіцієнтами, визначеними оптимальним по (5.5) методом (стовпчик 9, таблиця 5.2). В стовпчику 11 таблиці 5.2 подано це відношення, що лежить у межах від 1 до 2,32. В середньому воно становить 1,33.

Таблиця 2.5.2 Результати моделювання

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	5.6	0,49	0,47	0,25	УМНК	0,41	0,242	МДЗ	0,363	0,26	1,3
2	5.7	0,484	0,593	0,26	ІМНК	0,415	0,223	ІМНК	0,415	0,223	1,43
3	5.8	0,476	0,883	0,41	ІМНК	0,38	0,2	ІМНК	0,38	0,2	2,32
4	5.9	0,485	0,593	0,27	УМНК	0,43	0,226	ІМНК	0,365	0,235	1,62
5	5.10	0,488	0,49	0,25	ІМНК	0,45	0,23	УМНК	0,425	0,237	1,15
6	5.11	0,49	0,435	0,24	УМНК	0,42	0,235	УМНК	0,415	0,235	1,05
7	5.12	0,62	0,58	0,28	УМНК	0,56	0,262	УМНК	0,558	0,262	1,04
8	5.13	0,123	0,143	0,04	МНК	0,143	0,04	МДЗ	0,096	0,048	1,49
9	5.14	0,133	0,1	0,03	МНК	0,1	0,03	МДЗ	0,088	0,126	1,13
10	5.15	0,113	0,122	0,037	МДЗ	0,092	0,03	МДЗ	0,092	0,03	1,33
11	5.16	0,131	0,103	0,034	МДЗ	0,091	0,031	МДЗ	0,091	0,031	1,13
12	5.17	0,087	0,092	0,015	МДЗ	0,063	0,011	МДЗ	0,063	0,011	1,46
13	5.18	0,488	0,47	0,245	МДЗ	0,489	0,225	УМНК	0,411	0,237	1,14
14	5.19	0,132	0,108	0,035	МНК	0,108	0,035	МДЗ	0,081	0,038	1,33
15	5.20	0,131	0,111	0,036	МНК	0,111	0,037	МНК	0,111	0,037	1

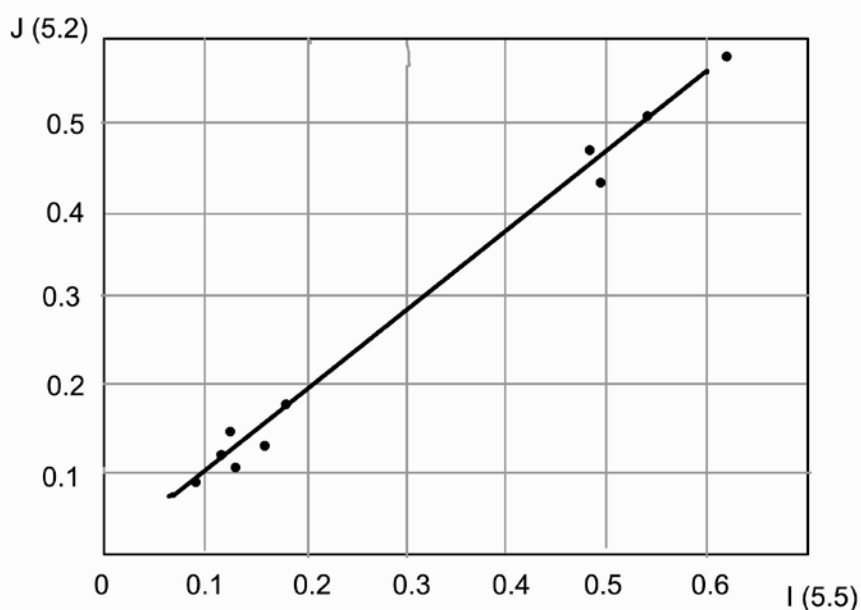


Рисунок 5.3. Регресійна залежність $J(4.2)$ від $I(4.5)$

5.2. Числове моделювання задачі активної ідентифікації параметрів дискретних динамічних систем

Розглянуті в розділі 5.1 теоретичні положення, щодо переваги методу активного експерименту з покоординатною оптимізацією, було також

підтверджено нижче наведеним числовим моделюванням. Неперервна система $X(t) = A_1 X(t) + B_1 U(t)$, що описує динаміку реального процесу (електромеханічного об'єкту), на множині дискрет $\square t_k$ часу t , за умови рівномірного кроку Δt , як відомо, може бути відображена дискретною системою

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k), Y(k) = X(k) + N(k), \quad (5.21)$$

де $k = \overline{1, M}$; $X(k)$ – змінні стану, $U(k)$ – керуючі впливи; $N(k)$ – похибки вимірів $k, k = \overline{1, 300}$; $U(k), Y(k)$ змінних $X(k)$. В наведеному нижче прикладі $X(k), Y(k), N(k)$ – трьохмірні вектор функції від – двомірна функція k ; $N(k)$ – послідовність “білих шумів”, відношення “шум-сигнал” складає 10%. Скалярний запис рівняння (5.21):

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j(k) + \sum_{l=1}^2 b_{il} u_l(k), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.22)$$

Числові значення коефіцієнтів математичної моделі (5.21) електромеханічного об'єкту наведено в таблиці 5.3.

Таблиця 5.3. Числові значення коефіцієнтів

	a_{ij}			b_{il}	
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$l=1$	$l=2$
$i=1$	-1,27	0,01	0,05	-1	0,8
$i=2$	-0,34	-0,13	1	-0,01	-12,5
$i=3$	-16	-3	0,18	-1	0

Користуючись методами синтезу оптимальних тестуючих \square сигналів $U_1(k), U_2(k)$ та технологією покоординатної \square оптимізації плану експерименту, розглянутих у розділі 4.3, слід знайти оцінки параметрів $a_{ij}, b_{il} (i=1,2,3; l=1,2)$, використовуючи інтегрований метод найменших квадратів (ІМНК). \square

Ідентифікація виконується порядкове. Але для кожного i -го рядка системи (5.22) матриці других похідних мінімізованого функціоналу співпадають і являють собою інформаційну матрицю ІМНК: \square

$$M = \sum_{-\tau}^{+\tau} \left[F^T (F_{-\tau} + F_{+\tau}) + (F_{-\tau} + F_{+\tau})^T F \right] \quad (5.23)$$

де F – $[300 \times 5]$ матриця плану експерименту, $F_{\pm\tau}$ – та ж матриця, зсунута у часі на дискрету $\tau, \tau=1,2,3$.

Кожний з тестових сигналів $U_1(k)$ і $U_2(k)$ задавався послідовністю з двох різнополярних імпульсів однакової форми. При цьому перший імпульс на часовій осі був зафіксований, а дискретно змінювалося положення трьох останніх імпульсів. На рисунку 2.5.4, як приклад, для коефіцієнтів першого

рядка таблиці 2.5.3 наведено залежність функціоналів Φ_j , $j=1,5$ по координатній оптимізації (2.4.46) від номера варіанту плану експерименту (взято 8 варіантів).

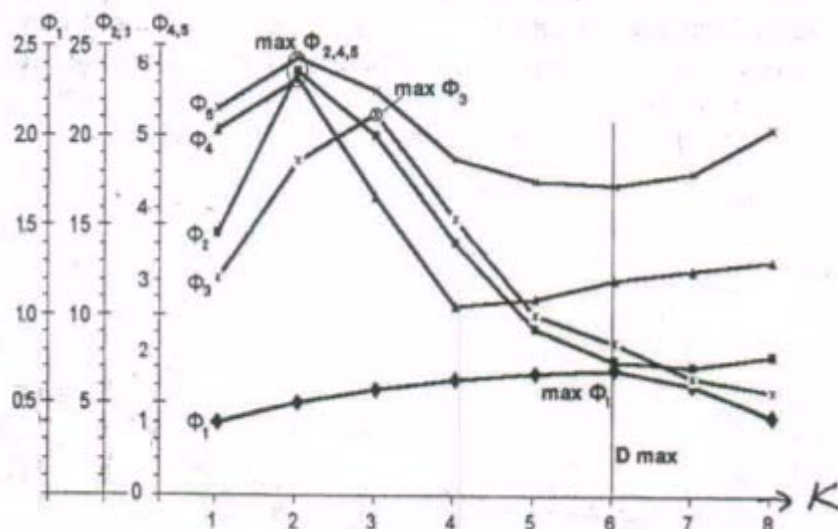


Рис. 5.4. Графіки зміни функціоналів Φ_j по координатній оптимізації від номера k плану експерименту.

Як видно з рисунку, максимумами функціоналів по іп.зійться оптимізації Φ_{ij} і максимум D -критерію [44], тобто нормованого визначника матриці (5.23), для всіх i , окрім $i=1$, суттєво різняться. Це підтверджує ефективність алгоритму по координатній оптимізації.

В таблиці 5.4 наведено оцінки параметрів \hat{a}_{ij} , \hat{b}_{il} моделі (5.22), отримані інтегрованим МНК (ІНМК) за результатами оптимального за D -критерієм експерименту. Зіставимо ці оцінки з істинними значеннями коефіцієнтів a_{ij} , b_{il} (таблиця 5.3). Як витікає з порівняння, оптимальність за D -критерієм не гарантує рівноцінності по точності для кожного з коефіцієнтів.

Таблиця 5.4
Числові значення оцінок коефіцієнтів для оптимального за D -критерієм плану

	\hat{a}_{ij}			\hat{b}_{il}	
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$l=1$	$l=2$
$i=1$	-1,38	0,007	0,063	-0,99	0,83
$i=2$	-0,3	-0,17	0,93	-0,011	-12,52
$i=3$	-16,24	-3,63	0,179	-1,04	0,0014

Суттєво відрізняються оцінки коефіцієнтів a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{22} , a_{23} , a_{32} , b_{32} .

В таблиці 5.5 наведено оцінки параметрів моделі (5.22), отримані по ІНМК за результатами активного експерименту при використанні процедури

покоординатної оптимізації. Ці оцінки $\hat{a}_{ij}, \hat{b}_{ij}$ найкраще наблизились до точних (таблиця 5.3) значень коефіцієнтів.

Таблиця 5.5

Числові значення оцінок коефіцієнтів для плану
покоординатної оптимізації

	\hat{a}_{ij}			\hat{b}_{ij}	
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$l=1$	$l=2$
$i=1$	-1,28	0,008	0,052	-0,99	0,83
$i=2$	-0,32	-0,14	0,99	-0,011	-12,52
$i=3$	-15,8	-3,28	0,1804	-1,03	0,0013

Під час оптимізації інформаційної матриці M (5.23) методами нелінійного програмування було випробувано декілька алгоритмів. В таблицях 5.6, 5.7 показано роботу градієнтного алгоритму з одночасним спуском за всіма напрямками і незмінним кроком. В таблиці 5.8 подано той же алгоритм, але довжина кроку змінюється при зміні знака градієнта. В таблиці 5.9 подано роботу алгоритму з незмінним малим кроком за всіма напрямками. В таблиці 5.10 – той же алгоритм, але при зміщенні початкових умов по одній з координат. Очевидна збіжність, але до локального екстремуму. Якщо суттєво змінити початкові умови по тій же координаті, то матиме місце збіжність до іншого локального екстремуму (таблиця 5.12). В таблиці 5.13 показано роботу алгоритму з покоординатним спуском. Таблиця 5.14 ілюструє роботу градієнтного алгоритму, де довжина кроку приймалася пропорційно градієнту при інтегральному обмеженні $Q(x)=x^T x$. В таблицях 5.15, 5.16 подано роботу градієнтного алгоритму мінімізації критерію покоординатної оптимізації вигляду $\Phi_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$, для максимального (таблиця 5.15) і мінімального (таблиця 5.16) діагональних елементів матриці M (5.23).

Результати моделювання градієнтних алгоритмів оптимізації плану експерименту показали працездатність градієнтних процедур. Для подальшого практичного використання доцільно скористатися алгоритмом з одночасним спуском за всіма напрямками з невеликим постійним кроком спуску. Але слід враховувати можливу багатоекспериментальність функціоналу i , для відшукування глобального екстремуму, повести градієнтну процедуру декілька разів при різних початкових умовах.

Таблиця 5.6

Оптимізація визначника інформаційної матриці при різних початкових умовах

№	градієнти			управління			Det (M)
	V_1	V_2	V_3	k_2	k_3	k_4	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,0567	0,0341	0,0522	100	50	200	0,96
2	0,1702	0,1268	0,1304	88	38	188	3,67
3	0,2610	0,0648	0,1628	76	26	176	10,17
4	0,3110	0,2027	0,2587	64	14	164	16,05
5	-0,2111	0,4469	0,1051	52	2	152	20,21

Зауваження: 1. Сталася зупинка алгоритму через наближення моменту подачі одного з імпульсів до початку підрахунку часу; 2. Крок алгоритму $\Delta=12$.

Таблиця 5.7

1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,0556	0,0424	0,0530	100	150	200	0,74
2	0,1189	0,1118	0,0976	88	138	188	2,16
3	0,1721	0,0880	0,1083	76	126	176	5,16
4	0,2496	0,1994	0,2089	64	114	164	8,571
5	0,4569	0,2179	0,0068	52	102	152	9,43

Таблиця 5.8

№	градієнти			управління			Det (M)
	V_1	V_2	V_3	k_2	k_3	k_4	
1	-0,0031	-0,0059	0,0117	150	50	180	0,221
2	0,6150	-0,0700	0,0865	162	62	168	1,789
3	0,2020	0,1567	0,0485	156	74	156	4,354
4	0,1548	-0,0269	0,1320	150	68	144	4,425
5	0,0805	-0,2831	-0,0888	144	71	132	4,611
6	-0,2769	-0,2932	0,0875	138	74	138	5,450
7	-0,0070	-0,0331	0,0244	141	77	135	5,743

Таблиця 5.9

№	градієнти			управління			Det (M)
	V_1	V_2	V_3	k_2	k_3	k_4	
1	-9,271	5,980	-5,511	80	50	150	4,679
2	-8,829	6,707	-7,953	82	48	152	5,443
3	-7,962	7,708	-11,26	84	46	154	6,366
4	-6,216	8,931	-14,81	86	44	156	7,389
5	-3,083	10,325	-19,29	88	42	158	8,440
6	2,022	11,855	-24,45	90	40	160	9,322
7	-0,104	11,730	-29,16	89	38	162	12,32
8	4,359	11,851	-33,95	90	36	164	13,88
9	1,379	9,683	-37,23	87	32	166	17,19
10	-7,088	5,565	-39,01	87	32	166	21,61
11	-2,009	2,709	-39,98	88	30	170	22,68
12	10,768	-0,216	-12,48	90	28	172	24,98

Таблиця 5.10

№	градієнти			управління			Det (M)
	V_1	V_2	V_3	k_2	k_3	k_4	
1	14,919	11,328	-12,94	100	50	150	0,532
2	9,335	8,416	-10,144	98	48	152	1,120
3	8,479	9,184	-12,180	96	46	154	2,170
4	7,548	10,442	-15,618	94	44	156	3,834
5	5,552	11,480	-19,849	92	42	158	6,211
6	2,022	11,855	-24,444	90	40	160	9,322
7	-3,208	11,252	-28,978	88	38	162	13,09
8	0,564	11,197	-33,632	89	36	164	14,76
9	-2,855	9,977	-36,938	88	34	166	18,16
10	8,322	7,118	-39,551	89	32	168	19,48
11	-2,009	2,709	-39,983	88	30	170	22,68
12	4,487	-1,057	-39,169	89	28	172	23,22
13	2,132	3,100	-36,107	88	29	174	23,41

Таблиця 5.11

№	градієнти			управління			Det (M)
	V_1	V_2	V_3	k_2	k_3	k_4	
1	-2,615	1,559	1,452	160	50	200	0,523
2	-3,439	1,646	1,514	162	48	198	0,714
3	-5,011	2,057	1,786	164	46	196	1,09
4	-7,485	2,685	2,114	166	44	194	1,78
5	-10,92	3,428	2,334	168	42	192	2,83
6	-15,25	4,128	2,207	170	40	190	4,35
7	-20,30	4,577	1,471	172	38	188	6,37
8	-25,30	4,539	-0,121	174	36	186	8,89
9	-28,94	4,253	2,037	176	34	187	10,23
10	-32,39	3,114	1,263	178	32	186	12,62
11	-34,37	0,866	-2,306	180	30	184	15,60
12	-34,01	-1,324	0,964	182	28	185	16,62
13	-29,58	1,925	0,164	184	29	184	16,84
14	-23,78	0,317	-5,117	186	28	182	17,47

Таблиця 5.12

№	градієнти			управління			Det (M)
	V_1	V_2	V_3	k_2	k_3	k_4	
1	14,919	11,328	-12,940	100	50	150	0,536
2	4,114	5,283	-5,681	96	50	150	0,957
3	0,967	4,836	-4,988	92	50	150	1,593
4	-2,064	5,051	-5,025	88	50	150	2,435
5	-2,563	6,242	-7,423	88	46	150	3,721
6	-3,344	6,652	-10,304	88	42	150	5,559
7	4,499	5,500	-13,337	88	38	150	8,007
8	-6,071	2,331	-16,991	88	34	150	11,01
9	-8,036	-2,769	-18,621	88	30	150	14,39
10	-8,084	-2,548	-25,424	88	30	154	16,85
11	-7,642	-2,010	-31,784	88	30	158	19,08
12	-6,674	-1,082	-36,878	88	30	162	20,903
13	-4,927	0,382	-39,883	88	30	166	22,13

Таблиця 5.13

Оптимізація сліду інформаційної матриці

№	градієнти			управління			Det (M)
	V_1	V_2	V_3	k_2	k_3	k_4	
1	-0,132	0,332	0,139	100	50	150	39,34
2	-0,090	0,257	0,174	102	44	148	42,84
3	-0,047	0,176	0,203	103	39	145	45,44
4	-0,020	0,120	0,242	103	36	141	47,85
5	0,007	0,078	0,279	103	34	137	49,32
6	0,042	0,055	0,314	103	33	132	51,66
7	0,106	0,045	0,330	103	32	126	54,67
8	0,165	0,096	0,337	101	32	120	58,10
9	0,224	0,148	0,339	98	31	114	62,23
10	0,269	0,188	0,340	94	29	108	67,31
11	0,280	0,206	0,339	89	26	102	73,37
12	0,268	0,182	0,317	84	22	96	79,62
13	0,207	0,200	0,246	79	19	90	84,86
14	0,148	0,141	0,213	75	15	86	88,35
15	0,137	0,138	0,116	73	13	82	90,19
16	0,098	0,112	0,088	71	11	80	91,23
17	0,098	0,112	0,088	71	11	80	91,23

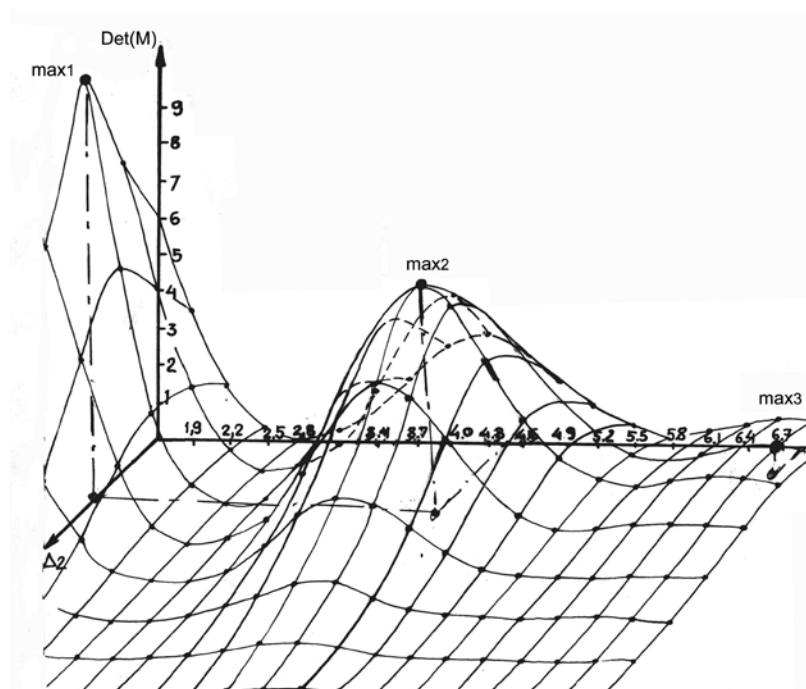
Таблиця 5.14

№	градієнти			управління			Det (M)
	V_1	V_2	V_3	k_2	k_3	k_4	
1	0,018	-0,003	0,014	160	40	180	0,757
2	1,048	-0,006	0,019	162	38	182	1,102
3	0,089	-0,006	0,022	164	36	184	1,562
4	0,146	-0,004	0,016	166	34	186	2,132
5	0,218	-0,010	-0,004	168	32	188	2,769
6	0,267	-0,002	0,003	170	30	187	2,718

Таблиця 5.15

1	0,041	0,002	-0,038	100	3	150	8,006
2	0,006	0,001	-0,005	102	32	148	9,123
3	0,006	0,001	-0,004	104	34	146	10,084
4	0,005	0,001	-0,002	106	36	144	10,809
5	0,003	0,001	-0,001	108	38	142	11,242
6	0,000	0,000	-0,001	110	40	140	11,357

На рисунку 5.5 для наочності при фіксованому значенні третього керуючого впливу, представлено поверхню функціоналу $J = \det M$, як функцію двох інших керуючих впливів (Δ_1 і Δ_2 – зсувів керуючих імпульсів у часі). Поверхня носить мультимодальний характер: найбільший максимум $\det M = 12$ має місце на початку координат ($\Delta_1 = 0$ і $\Delta_2 = 2$), далі локальний максимум $\det M = 8$ для $\Delta_1 = 4.5$, $\Delta_2 = 2$ і проглядається ще менший екстремум $\det M = 1$, для $\Delta_1 = 7$, $\Delta_2 = 1$. З рис. 5.5. витікає, що при $\Delta_1(0) < 2.8$ алгоритм (4.66) приводить до першого максимуму; при $5.8 > \Delta_1(0) > 2.8$ - до другого; а при $\Delta_1(0) > 5.8$ - до третього максимуму. Тому в загальному випадку бажано задачу оптимізації показника (4.46) чи D-критерію виконувати для різних початкових умов.

Рисунок 5.5. Залежність $\det M$ від Δ_1 і Δ_2 при $\Delta_3 = \text{const}$

Глава 6. Єдність і розбіжність сигнальної та параметричної ідентифікації реальних об'єктів

Виникнення теорії ідентифікації, як математичної формалізації причинно-наслідкових зв'язків у об'єктах реального світу має давню історію. Пік її розвитку припадає на другу половину ХХ-го століття – період появи і швидкого розвитку засобів комп'ютеризації і автоматизації експериментальних досліджень. Проте і зараз не можна стверджувати, що ця теорія остаточно сформована і її застосування до об'єктів реального світу завжди коректно [26]. Відповідно до фундаментальних категорій філософії, реальний світ нескінченномірний, □□ все зі всім взаємозв'язане безпосередньо або опосередковано. Умовно це можна представити рівнянням

$$\dot{X}_\infty = f_\infty(X_\infty), \quad (6.1)$$

де X_∞ - нескінченномірна вектор-функція змінних, \dot{X}_∞ - швидкість зміни X_∞ у відповідності з функцією загального взаємозв'язку f_∞ . Унаслідок загального взаємозв'язку f_∞ компонент x_i нескінченномірної вектор-функції, система (6.1) нестійка (матерія і рух єдині), а загальний взаємозв'язок f_∞ (навіть якщо він сталий) непізнаваний.

6.1. Постановка задачі

Обмежуючи просторово-часову область зміни X_∞ достатньо малою областю, розглядають лише проекцію X_∞ на кінцевечисло n координат [2]:

$$\dot{X} = f(X), \quad (6.2)$$

де $X(t)$ – n - мірна вектор-функція часу, \dot{X} - її похідна по часу t .

Продовжуючи звуження області, з певним ступенем точність ε , переходять до лінійної стаціонарної моделі:

$$\Delta \dot{X} = A \Delta X + B \Delta U, \quad (6.3)$$

де виділені в моделі (6.3) суттєві змінні реального об'єкту розділено на причинні U і слідчі X і взято у відхиленнях $\Delta X, \Delta U$ від деякого центру (X_0, U_0) області G [35].

Можлива також модель у вигляді оператора, що безпосередньо зв'язує умовно прийняті входи ΔU і виходи ΔY об'єкту:

$$\Delta Y = W \cdot \Delta U, \quad (6.4)$$

де $\Delta Y, \Delta U$ і W можуть бути функціями часу або комплексної змінної Лапласа.

Неврахована підмножина $(X_\infty - X)$ змінних реального світу визначає наближеність моделей (6.3) (6.4). Погрішність ε прагне до нуля лише при звуженні області G в точку. Але при цьому співвідношення «шум $(X_\infty - X)$ - сигнал $\Delta Y(t)$ » необмежено зростає. Таким чином, моделі (6.2), (6.3), (6.4) і методи їх ідентифікації в принципі не можуть бути точними: для малих вибірок впливають швидкі (відносно X, U) змінні складові відкинутої підмножини, що сприймаються як випадковий процес $N_1(t)$; для великих – гранична теорема Чебишева не працює унаслідок впливу повільно змінних складових $N_2(t)$ цієї

підмножини, що вносять не стаціонарність до усереднених характеристик випадкового процесу (процес не є ергодичним). Тоді з безлічі наближених моделей кращою буде та, за допомогою якої кращим чином досягається основна мета, заради якої визначається модель [9]. Такими цілями, наприклад, можуть бути оптимальне управління, прогнозування поведінки або контроль конкретних фізичних параметрів об'єкту. Відповідно головним цілям розрізнятимемо два принципово різних підходу до задачі ідентифікації. Перший підхід назовемо **сигнальною ідентифікацією**, якщо для заданої множини вхідних сигналів $U(t)$ необхідно підібрати таке довільне по структурі відображення $U(t)$, щоб деяка норма помилки ε була менша заданою Δ :

$$\|\varepsilon\| < \Delta. \quad (6.5)$$

Тобто, сигнал $Y(t)$ апроксимується з точністю до Δ в базисі, перетворених операторами W_i сигналів $U(t)$; $i = \overline{1, n}$. Другий підхід – це **параметрична ідентифікація**, якщо на множині сигналів ΔX або ΔY необхідно, окрім умови (6.5), визначити (для заданої точки (X_0, U_0, t_0) цієї області) структуру і/або параметри матриць A, B моделі (6.3) або оператора W моделі (6.4), які б відповідали суттєвим взаємозв'язкам змінних реального об'єкту. **Сигнальна ідентифікація** повинна застосовувати при цілеорієнтації моделей на задачі управління і прогнозування, **параметрична** – для діагностики і контролю конкретних, але безпосередньо не вимірюваних, параметрів реального об'єкту.

6.2. Стратегія сигнальної ідентифікації і інваріантність адаптивного керування (приклад першого підходу)

Представимо в обмеженій області G модель реального об'єкту у наступному вигляді:

$$\Delta Y = W \cdot \Delta U + W_1 \cdot \Delta F + W_2 \cdot \Delta N, \quad (6.6)$$

де ΔF – вектор контрольованих збурень, ΔN – неконтрольованих, W, W_1, W_2 – відповідні оператори.

Потрібно побудувати інваріантний, оптимальний (у сенсі квадратичного по ε і ΔU функціонала) регулятор:

$$\Delta U(t) = W_p(\varepsilon(t, \beta)), \quad (6.7)$$

де β – невідомий вектор параметрів операторів W і W_1 моделі (6.6).

Помилка у виразі (6.7) дорівнює:

$$\varepsilon(t) = \Delta Y^*(t) - \Delta Y(t), \quad (6.8)$$

де $\Delta Y^*(t)$ – бажана оптимальна траєкторія руху ЛА.

За відсутності обмежень оператор W_p регулятора лінійний:

$$\Delta U(t) = W_{p1} \cdot \varepsilon(t) + W_{p2} \cdot \Delta F(t). \quad (6.9)$$

Підставивши управління (6.9) в модель (6.6), отримаємо вираз для замкнутої системи:

$$\Delta Y(t) = (W \cdot W_{p1} + I)^{-1} \cdot [W \cdot W_{p1} \cdot \Delta Y^*(t) + (W \cdot W_{p2} + W_1) \cdot \Delta F(t) + W_2 \cdot \Delta N(t)]. \quad (6.10)$$

Умова інваріантності її виходу до контрольованого збурення $\Delta F(t)$:

$$W_{p2} = W^{-1} \cdot W_1, \quad (6.11)$$

де W і W_1 – невідомі оператори моделі (6.6) об'єкту.

Для ідентифікації цих операторів W і W_1 розглянемо модель:

$$\Delta \hat{Y} = \hat{W}(\hat{\beta}) \cdot \Delta U + \hat{W}_1(\hat{\beta}) \cdot \Delta F. \quad (6.12)$$

Вектор $\hat{\beta}$ параметрів моделі (6.12) оцінюється з умов мінімуму деякого показника I близькості $\Delta Y(t)$ і $\Delta \hat{Y}(t)$:

$$I(\hat{\beta}) = \|\Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(\hat{\beta}, t)\|. \quad (6.13)$$

У цьому випадку має місце **сигнальна** ідентифікація: чим оперативніше визначається з умови мінімуму I вектор $\hat{\beta}$ параметрів оператора \hat{W} і \hat{W}_1 і чим повніше вони (ширше базис апроксимуючих ΔY функцій), тим ближче $\Delta \hat{Y}$ до ΔY . При цьому побічно (за рахунок оперативного підстроювання $\hat{\beta}$) компенсується вплив неконтрольованих повільних збурень $N_2(t)$. У асимптотиці система володіє інваріантністю [9] до зміни параметрів об'єкту, контрольованих ΔF і неконтрольованих низькочастотних збурень. Високочастотна складова N_2 збурень, як правило, згладжується природою об'єкта, та робить вплив на мінімальний час ідентифікації моделі (6.12). Складність структури моделі (6.12) може адаптуватися до темпу нестационарності характеристик випадкового процесу $N(t)$. Тут доцільно застосовувати ортогональний базис або ноніусний підхід [35] для адаптації розмірності базису до нестационарності. Теоретично крайніми у ряді складності є проста нестационарна модель, де $\hat{\beta}(t)$ змінюється в темпі процесів, забезпечуючи близькість $\Delta \hat{Y}$ до ΔY об'єкту (параметричний зворотний зв'язок) і гіпотетична складна стаціонарна модель (6.1). Реально це квазістаціонарні моделі (6.12), ускладнення яких повинне сприяти підвищенню точності в сенсі показника (6.13) і квазістаціонарності вектора $\hat{\beta}$ їх параметрів і, як наслідок, ступені оптимальності управління об'єктом. При цьому облік фізичних процесів в об'єкті не обов'язковий, оцінка $\hat{\beta}$ може не мати фізичного сенсу, строга опуклість і унімадальність показника (6.13), як функції, не обов'язкова.

6.3. Стратегія параметричної ідентифікації і (приклад оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів $\hat{\beta}$ літального апарату ЛА другого підходу)

Тут необхідно максимально врахувати «фізику» процесів в ЛА при виборі структури не лінійності в моделі (6.12), матриць A , B у моделі (6.13) або оператора W в моделі (6.14). Моделі (6.13) і (6.14) є лінеаризацією моделі (6.12). Лінеаризація допустима через гладкість нелінійності f (у природі, внаслідок потужності систем, ідеальні скачки відсутні). Для однозначності і об'єктивності оцінки $\hat{\beta}$ фізичних параметрів β об'єкту, наприклад ЛА, необхідно спеціальним плануванням натурального експерименту забезпечити строгу випуклість по $\hat{\beta}$ показника (6.13) і, по можливості, автономність до неврахованої підмножини $(X_\infty - X)$ змінних. Бажано також, щоб оцінка $\hat{\beta}$

лінійно входила до виразу помилки (6.18), а n її компонентів були коефіцієнтами при лінійно незалежних функціях чутливості помилки (6.8) по $\hat{\beta}_i$. Для цього замість мінімізації показника (6.13) у вигляді різниці виходів об'єкту і моделі може братися мінімум лівої і правої частин незв'язності кожного рядка рівняння (6.13). Тоді оцінювання $\hat{\beta}$ зводиться до однокрокового вирішення задачі мінімізації n строго випуклих квадратичних показників. Оцінка єдина, а при відповідних підходах [35] статистично незміщена і ефективна.

Але все таки залишається її зсув унаслідок наближеності моделей (6.12), (6.13), (6.14). Наближеність прямує до нуля, якщо область G зміни змінних стягується в точку (X_0, U_0, t_0) . Проте із зменшенням $\Delta X, \Delta U$ зростає співвідношення «шум – сигнал $\Delta X(t)$ ». Це приводить до втрати ефективності оцінки $\hat{\beta}$. У роботі [37] запропоновано метод, що дозволяє отримати незміщену і достатньо точну оцінку $\hat{\beta}$ в точці (X_0, U_0, t_0) . Для цього виконується послідовний ряд однотипних (але різних за амплітудою відхилень ΔX) активних експериментів на об'єкті, кожний з яких забезпечує опуклість показника (6.13) для лінійного базису моделі. Знаходяться зміщені внаслідок неврахування не лінійності але достатньо ефективні оцінки $\hat{\beta}$. Незміщена оцінка визначається по регресійній залежності, побудованій для кожного $\hat{\beta}_i$ на множині амплітуд $\|\Delta X\|$ і взята в точці, де $\|\Delta X\|$ рівна нулю.

Тестовий приклад. Точна нелінійна модель

$$y(k) = \sum_{j=1}^3 x_j(k) + \sum_{j,q=1, j \geq q}^3 x_j(k)x_q(k) \quad (6.14)$$

з одиничними коефіцієнтами для чотирьох вибірок різної амплітуди X_{\max} апроксимувалася її лінійною частиною для таких сигналів

$$x_1(k) = x_{\max}(l) \sin\left(\pi \frac{k-1}{M-1}\right), \quad x_2(k) = x_{\max}(l) \sin\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right), \quad x_3(k) = x_{\max}(l) \cos\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right), \\ k = \overline{1, M}, l = \overline{1, 4}. \quad (6.15)$$

Оцінки $\hat{\beta}_j$ ($j=1, 2, 3$) обчислювалися методом найменших квадратів (МНК). При цьому показник (6.13) помилки апроксимації $y(k)$ лінійною моделлю $y(k) = \hat{\beta}_1 x_1(k) + \hat{\beta}_2 x_2(k) + \hat{\beta}_3 x_3(k)$ був на 2 порядки менше аналогічної норми $\|\Delta y\|$. Тобто задача апроксимації вирішується достатньо якісно в сенсі (6.13). Але коефіцієнти $\hat{\beta}_i$ істотно зміщені (рис. 6.1).

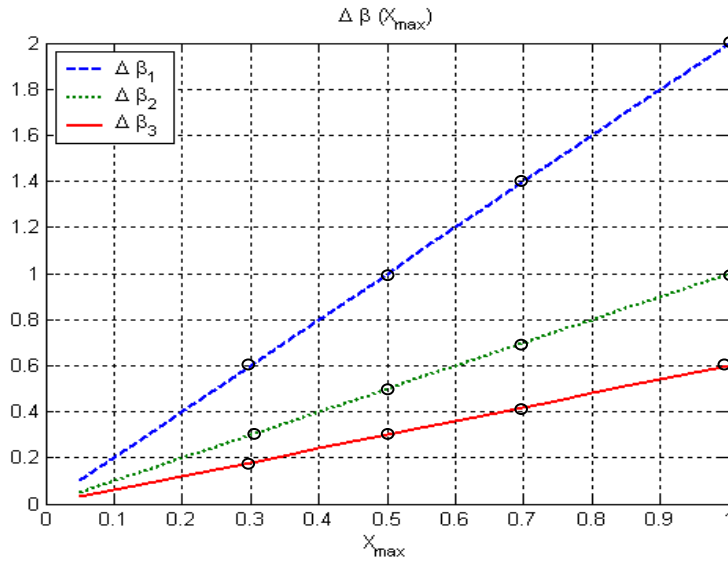


Рис.

6.1. Залежність $\Delta\beta(x_{\max})$.

Лінійні регресійні залежності зсувів $\Delta\beta_j$ ($j = 1,2,3$) від $x_{\max}(l)$, ($l = 1,2,3,4$), збігаються при нульовій амплітуді x_{\max} до нуля; відповідно оцінки $\hat{\beta}_j$ збігаються до істинних $\beta_j=1$.

Якщо бралася повна модель (6.14), то з регуляризацією по Тихонову (показник (6.16) МНК-оцінювання коефіцієнтів повної моделі (6.14) (через не строгу випуклість показника (6.13), як функцію $\hat{\beta}$) дало практично нульове значення показника (6.13).

Регуляризований показник:

$$I(\hat{\beta}, \alpha) = \|\Delta Y(y) - \Delta \hat{Y}(\hat{\beta}, t)\| + \alpha \|\hat{\beta} - \beta_{apr}\| \quad (6.16)$$

де α - параметр регуляризації, β_{apr} - апріорі заданий вектор параметрів. При цьому практично нульове значення показника (6.13) досягається при самих різних значеннях β_{apr} . При цьому оцінка $\hat{\beta}$ близька до β_{apr} , а не до дійсної, рівної одиниці.

Для більшої наочності розглянемо двовимірну задачу, коли модель і об'єкт ізоморфні:

$$y(k) = \beta_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k), \quad (6.17)$$

Тут $x_1(k)$ і $x_2(k)$ сильно корельовано. Тому функціонал (6.13) (пунктирні лінії на рис. 6.2) як функція $\hat{\beta}$, сильно випуклий для першого і третього квадранта площини (β_1, β_2) і слабо-випуклий («рівчак») для другого і четвертого квадрантів.

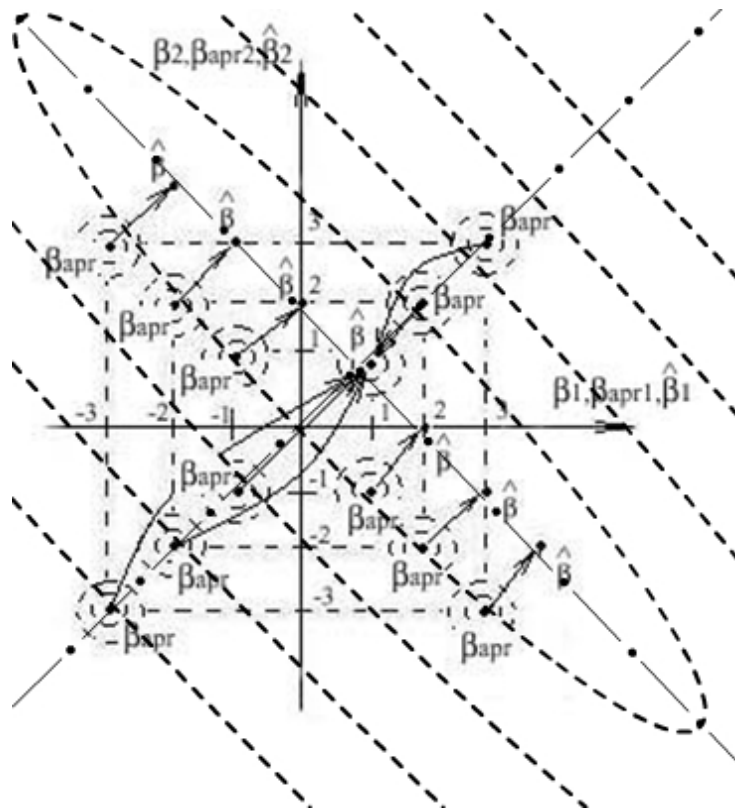


Рис. 6.2. Точне значення в і її оцінка $\hat{\beta}$, отримана з умови мінімуму функціонала (6.16) для різних апіорних значень β_{apr}

Регуляризуюча десятивідсотковий додаток $\alpha \|\hat{\beta} - \beta_{apr}\|$ функціонала (6.16) (круги на рис. 6.2) строго випукла і, відповідно, робить випуклим функціонал (6.16). Стрілками показано процес мінімізації функціонала (6.16), в результаті якого з апіорної оцінки β_{apr} отримана апостеріорна оцінка $\hat{\beta}$ (табл. □ 6.3).

Таблиця 6.3.

β_{apr1}	$\hat{\beta}_1$	β_{apr2}	$\hat{\beta}_2$	$\frac{\ \Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(t)\ }{\ \Delta Y(t)\ }$
1	1	1	1	0
-1	0.904	-1	0.904	0.0091
-2	0.857	-2	0.857	0.0091
-3	0.809	-3	0.809	0.036
2	1.048	2	1.048	0.0023
3	1.095	3	1.095	0.0091
1	1.9	-1	0.0015	0.0045
2	2.85	-2	-0.95	0.011
3	3.8	-3	-1.9	0.0226
-1	0.0015	1	1.9	0.0045
-2	-0.95	2	2.85	0.011
-3	-1.9	3	3.8	0.0226

Як впливає з таблиці 6.3 і рис. 6.2, оцінки $\hat{\beta}$ збігаються в область близьку до дійсного значення, коли β_{apr} лежить в першому і третьому квадранті (ближче

або далі від β залежно від віддалення β_{apr} від β). Якщо ж β_{apr} лежить в другому і четвертому квадрантах, оцінки, в результаті мінімізації регуляризованого функціонала (6.16), не відходять далеко від апріорних, знаходячи точку компромісу між зростаючою добавкою $\alpha \|\hat{\beta} - \beta_{apr}\|$ і убиваючим значенням норми $\|\Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(\beta, t)\|$. При цьому відношення цієї норми до аналогічної норми $\|\Delta Y(t)\|$ не перевищує 2.26%. Тобто якість (6.13) сигнальної ідентифікації достатня високе, тоді як параметрична ідентифікація взагалі не коректна: у другому квадранті $\hat{\beta}_2$ навіть йде від β_{apr2} в протилежну від $\hat{\beta}_2$ сторону, аналогічно в четвертому квадранті $\hat{\beta}_1$. У загальному випадку, для n змінних, функція $I(\beta)$ (6.13) може мати декілька «рівчаків» мінімальної або навіть нульової крутизни, що ще більше ускладнює завдання.

Реальний приклад. На рис. 6.3 наведено фотографію семи режимів зміни руля висоти, кута атаки $\alpha(t)$ і кутової швидкості $\omega_z(t)$ літака М-17 в короткоперіодичному подовжньому русі. Це забезпечує автономність до неврахованої безлічі змінних (боковий рух відсутній, швидкість, висота, конфігурація ЛА і інші змінні практично постійні).

Повна модель залежності $\dot{\omega}_z(t)$ від $\delta_B(t)$, $\alpha(t)$ і $\omega_z(t)$ подібна до моделі (6.14). У кожному з семи режимів визначалися зміщені внаслідок наближеності моделі, оцінки коефіцієнтів $\hat{\beta}_j$, $j=1,2,3$. По ним розраховувався конкретний фізичний параметр: нормована по середній аеродинамічній хорді крила відстань між центром мас і аеродинамічним фокусом літака, тобто запас $\hat{\sigma}_n$ аперіодичної стійкості по вертикальному перевантаженню [39].

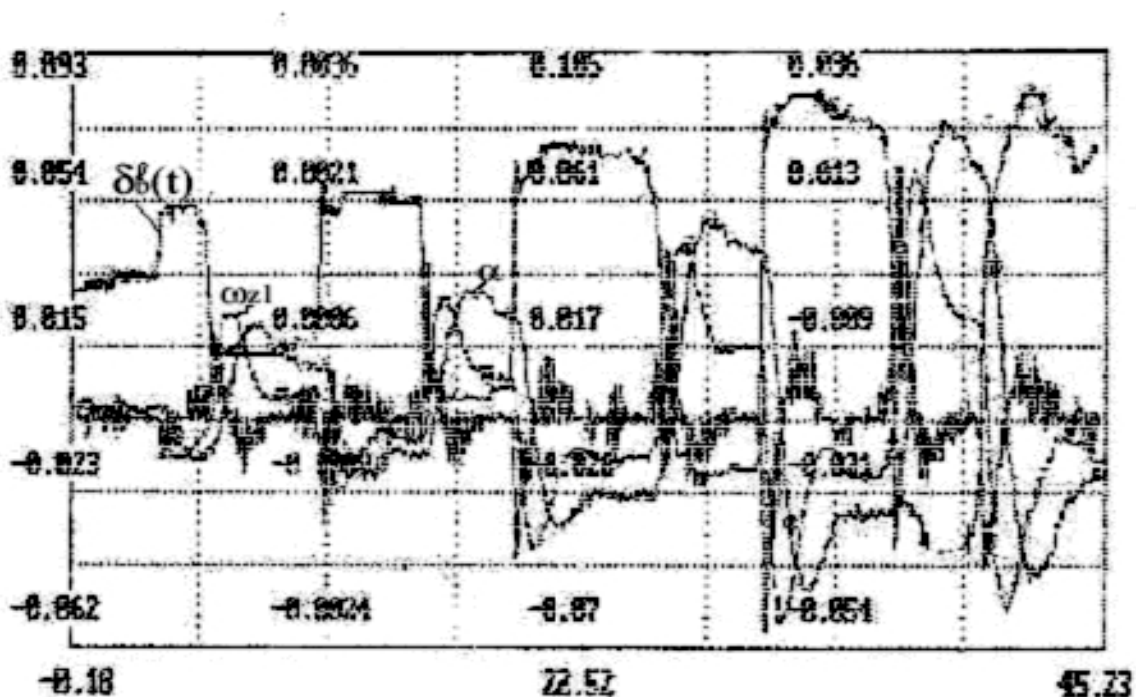


Рис. 6.3. Осцилограми режимів зміни керма висоти, кута атаки і кутової швидкості.

Далі запас апроксимувався лінійною залежністю у функції $\|\Delta\alpha\|$ (рис. 6.4):

$$\hat{\sigma}(\|\Delta\alpha\|) = 0,22 - 0,075\|\Delta\alpha\|. \quad (6.17)$$

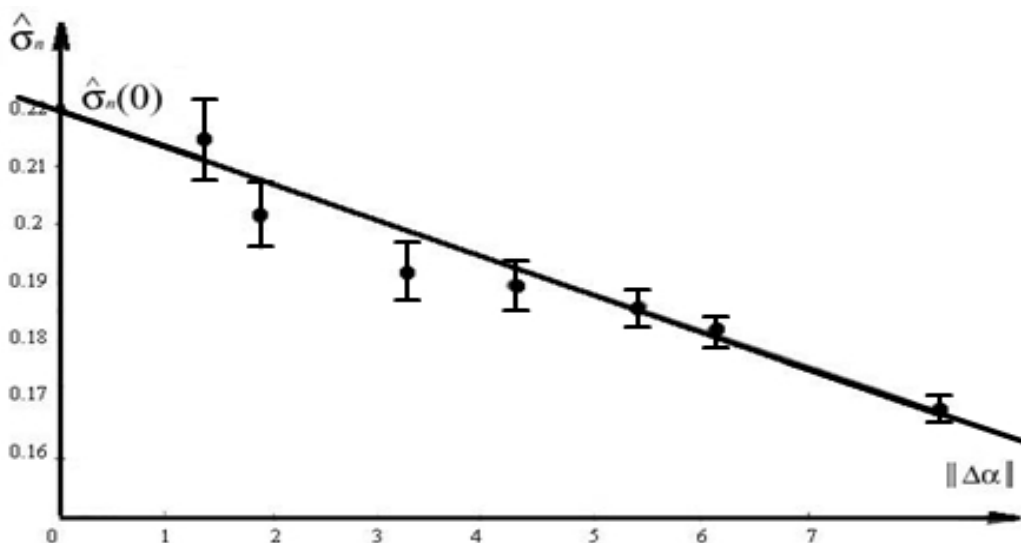


Рис. 6.4. Залежність оцінки $\hat{\sigma}_n$ від $\|\alpha\|$

Прогнозне в $\|\Delta\alpha\|=0$ значення $\hat{\sigma}_n(0)$ лежить в області дійсних значень σ_n . Незміщена оцінка $\hat{\sigma}_n = 0.22$ отримана шляхом лінійної апроксимації залежності (6.17) і розрахунку її значення в точці нульових відхилень. Просте усереднювання результатів дасть істотно зміщену (занижену) оцінку $\hat{\sigma}_n = 0,188$. Подальше уточнення $\hat{\sigma}_n$ може бути досягнуте шляхом апроксимації оцінок $\hat{\sigma}_n(0)$ гладкою регресійною залежністю від інших параметрів польоту (швидкості, висоти і т.д.). Так в таблиці 6.4 приведені лінійні регресійні залежності аеродинамічних коефіцієнтів (АДК) від початкового значення кута атаки α і його похідної, що визначає темп виконання динамічних режимів в коротко-періодичному подовжньому русі літака. У першому стовпчику таблиці подано відповідні АДК, далі a_1, a_2, a_3 - коефіцієнти регресії, далі середньоквадратична помилка (СКО) апроксимації відповідного АДК, далі середнє значення АДК і його середньоквадратичне відхилення. Як бачимо, урахування тільки α і $\dot{\alpha}$ дозволило в середньому в 2 рази підвищити точність.

Таблиця 6.4

Залежність оцінок АДК від α і $\dot{\alpha}$

АДК	a_1	a_2	a_3	СКО апр.	Середнє	СКО сер.
$m_z^{\bar{\omega}_z}$	-8.54	-0.2289	-0.0112	0.01	-10.61	0.02
m_z^α	-0.0092	0	0	0.007	-0.0091	0.007
$m_z^{\delta_\alpha}$	-0.0161	-0.0012	0	0.003	-0.02	0.009
$m_z^{C_y}$	-0.0873	-0.0029	0	0.004	-0.0928	0.006
C_y^α	0.1068	-0.003	0	0.001	0.0979	0.003
$C_y^{\delta_\alpha}$	-0.01	0.0012	0.0001	0.431	0.0028	0.923
σ_n	-0.2301	0.0071	0.0001	0.001	-0.2119	0.002

У таблиці 6.5 приведені узагальнені для різних типів літаків дані, підтверджуючі ефективність уточнення, зокрема, запасу стійкості σ_n . шляхом апроксимації лінійною регресивною залежністю від різних параметрів ΔX польоту. Для різних ЛА розмірність ΔX мінялася від 2 до 6 і число режимів від 15 до 190.

Таблиця 6.5

Порівняння простого усереднювання з регресивною апроксимацією σ_n від параметрів польоту

№ п/п	Тип літака	СКО %		Розмірність ΔX	Число режимів
		Моделі	Середнє		
1	АН-72	5	102	6	190
2	ИЛ-86	7	31	2	25
3	Ту-154	4	13	4	70
4	Миг-29	7	50	4	50
5	М-17	0.5	1.5	2	15

Висновки. Для коректності постановки задачі ідентифікації слід строго розрізняти сигнальний і параметричний підходи. Спільність їх полягає в мінімізації помилки (6.18); відмінність – в моделях (абстрактною і «фізично» адекватною) і вимогам до функціонала (6.13), як функції оцінки $\hat{\beta}$ (відповідно нестрога і строга випуклість). На жаль, в практиці льотних випробувань ЛА іноді користуються для оцінювання параметрів сигнальною ідентифікацією, закладаючи в модель вигляду (6.13) апріорі не об'єктивно точні (за розрахунком або результатами продувань в аеродинамічній трубі) коефіцієнти з подальшим підстроюванням їх з умови мінімуму функціонала (6.16). При цьому досягається удавана адекватність моделі (6.13) об'єкту: помилка (6.18) достатньо мала, оцінки $\hat{\beta}$ близькі до апріорних. Але останні можуть істотно відрізнятися від дійсних фізичних параметрів, що згодом може привести до зниження безпеки польотів із-за невірної оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів ЛА, що визначають їх стійкість і керованість.

Глава 7. Комплексування методів і моделей

Стійкість динамічних систем є однією з найбільш важливих характеристик, особливо, якщо вони нестационарні, не повністю відомі і схильні до випадкових перешкод у вимірювальних каналах змінних стану. До таких систем, зокрема, відносяться літак, зокрема його стійкість у поздовжньому короткоперіодичному русі [41]. Для малих відхилень змінних від режиму балансування (постійна висота, швидкість руху у вертикальній площині) цей рух описується щодо змінних (кута атаки, кутової швидкості і руля висоти) системою рівнянь першого порядку:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}u, \\ \dot{x}_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}u \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

де \dot{x}_1, \dot{x}_2 – похідні за часом від x_1 і x_2 ; β_{ij} , ($i=1,2$; $j=1,2,3$) – аеродинамічні коефіцієнти. Системі (2.7.1) еквівалентні передавальні функції, що відображають вхідний сигнал u у виходи x_{1M} або x_{2M} , наприклад u в x_{2M} :

$$W_u^{x_2}(p) = \frac{\beta_{23}p - (\beta_{23}\beta_{11} - \beta_{13}\beta_{22})}{p^2 - (\beta_{11} + \beta_{22})p + (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})}. \quad (7.2)$$

Коефіцієнти $(\beta_{11} + \beta_{22}) = -a_1$ і $\langle (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) = a_0 \rangle$ знаменника визначають відповідно коливальний і аперіодичний запас стійкості. Помноживши ці коефіцієнти на $\frac{J_{z_1}}{qSb_a\beta_{11}}$, (де J_{z_1} - момент інерції, q - швидкісний напір, S - площа крила, b_a - середня аеродинамічна хорда крила), отримаємо відповідний запас стійкості в частках від b_a . Коефіцієнти $\beta_{13}\beta_{23}$ визначають ефективність керма висоти; $\beta_{12}\beta_{22}$ - демпфіруючі сили і моменти. Оцінювання коефіцієнтів β_{ij} літальних апаратів (ЛА), за якими визначається стійкість і керованість ЛА, є актуальним завданням льотних випробувань (ЛВ).

7.1. Постановка завдання.

Обмежені вартістю натурного експерименту і нестационарність часу експерименту і нелінійністю – діапазон зміни змінних не дозволяють з досить високою точністю одержати оцінки $\hat{\beta}_{ij}$ з зашумлених перешкодами вимірювань \hat{x}_i, \hat{u} . З цих причин практика ЛВ обмежується досить наближеними оцінками стійкості і керованості ЛА [41]. Підвищити точність оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів (АДК) без збільшення часу ЛВ можна, скориставшись методом статистичного моделювання перешкод. Для цього, з огляду на апріорну інформацію про рознесені спектри сигналів і перешкод (перешкоди більш високочастотні), достатньо для кожного сигналу виконати фільтрацію перешкод і, як різниця відфільтрованого і вихідного сигналу, отримати наближену реалізацію перешкоди. Далі визначити статистичні характеристики цих реалізацій і згенерувати m статистично подібних реалізацій перешкод для кожної змінної x_i, u . Склавши ці реалізації з відповідними відфільтрованими сигналами, отримаємо m псевдовиборок даних ЛВ. Маючи в наявності m статистично ідентичних вибірок, p методів ідентифікації і q моделей ЛА, можна скористатися їх надмірністю з метою отримання більш точних оцінок АДК [29].

7.2. Методика дослідження.

Стосовно до задачі визначення АДК ЛА в поздовжньому короткоперіодичному русі розглянемо три моделі ($q=3$): моделі (7.1), (7.2) і модель, що впливає з двох перших:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= (\beta_{11} + \beta_{22})\dot{x}_2 - (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})x_2 + \beta_{23}\dot{u} - \\ &- (\beta_{23}\beta_{11} - \beta_{13}\beta_{22})u = -a_1\dot{x}_2 - a_0x_2 + a_2\dot{u} + a_3u. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Число p методів визначення АДК визначається кількістю функціоналів близькості в просторі L_2 [6] змінних ЛА і його моделей (7.1), (7.2), (7.3). З умови мінімуму цих функціоналів визначаються оптимальні оцінки $\hat{\beta}$ АДК:

$$\{\beta_{ij}^*\} = \arg \min_{\beta_{ij}} \left\| \hat{x}_i - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \hat{x}_j - \beta_{i3} \hat{U} \right\|^2, \quad (7.4)$$

де $i=1,2$; $j=1,2$; \hat{x}_i , \hat{x}_j , \hat{U} – згладжені фільтром змінні.

$$\{a_i^*\} = \arg \min_{a_i} \|x_2 - x_{2M}\|^2, \quad (7.5)$$

$$\{a_i^*\} = \arg \min_{a_i} \left\| \hat{x}_2 + a_1 \hat{x}_2 + a_0 \hat{x}_2 - a_2 \hat{U} - a_3 U \right\|^2. \quad (7.6)$$

Згладжування всіх змінних здійснюється одним і тим же фільтром, щоб не внести методичну помилку в лінійні рівняння (7.1), (7.3) ЛА. Можливо також застосування інших методів ідентифікації [35], що дають незміщені оцінки АДК в умовах перешкод.

Далі, для кожного з алгоритмів (7.3), (7.4), (7.5) на множині із m реалізацій, для кожної реалізації визначаються оптимальні значення $\{\beta_{ij}^*\}$, $\{a_i^*\}$, їх середні значення за m реалізаціям $\{\bar{\beta}_{ij}^*\}$, $\{\bar{a}_i^*\}$, оцінки власних $\hat{\sigma}_{\beta_{ij}^*(k)}^2$, $\hat{\sigma}_{a_i^*(k)}^2$, і взаємних $\hat{\sigma}_{\beta_{ij}^*(k)\beta_{ij}^*(l)}^2$, $\hat{\sigma}_{a_i^*(k)a_i^*(l)}^2$, дисперсій, де $k=1,2,3$; $p=3$; $l=1,2,3$; $k \neq l$. Для стислості запису елементи множин $\{\beta_{ij}^*\}$, $\{a_i^*\}$, позначимо через $\{\alpha_i\}$. Тоді будемо шукати найкращу на множині з трьох методів - моделей оцінку α_i^* у вигляді:

$$\alpha_i^* = \sum_{k=1}^3 C_k \alpha_i(k), \quad \sum_{k=1}^3 C_k = 1. \quad (7.7)$$

Коефіцієнти C_k визначимо з умови:

$$C_1 = 1 - C_2 - C_3; \quad \frac{\partial \hat{\sigma}_{a_i^*}^2}{\partial C_k} = 0, \quad k=2,3, \quad (7.8)$$

де

$$\partial \hat{\sigma}_{a_i^*}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^3 C_k (\alpha_i(k,j) - \bar{\alpha}_i(k,j)) \right)^2 = \sum_{k=1}^3 C_k^2 \hat{\sigma}_{\alpha_i(k)}^2 + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 C_k C_l \hat{\sigma}_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)}^2 = C^T A C.$$

Для стислості позначимо $\hat{\sigma}_{\alpha_i(k)}^2 = \hat{\sigma}_k^2$, $\hat{\sigma}_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)}^2 = \hat{\sigma}_{kl}^2$, тоді $C^T = [C_2, C_3]$,

$$A = \begin{bmatrix} (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{\sigma}_{12}^2) & (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{23}^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 - \hat{\sigma}_{12}^2) \\ (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{23}^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 - \hat{\sigma}_{12}^2) & (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_3^2 - 2\hat{\sigma}_{13}^2) \end{bmatrix}.$$

Тепер умова (7.8) еквівалентна системі

$$A C = B, \quad (7.9)$$

де

$$B = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{12}^2 \\ \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}.$$

Рішення $C = A^{-1}B$ системи (7.9) єдино, якщо матриця A позитивно визначена. Чим менше корельовано похибки в оцінюванні α_i різними методами (7.7), (7.8), (7.9), тим ближче матриця A до діагональної. Так як норми близькості (7.4), (7.5), (7.6) взяті в просторі змінних x , \dot{x} , \ddot{x} , то можна чекати слабку кореляцію в погрішності оцінок α_i різними методами - моделями (7.4), (7.5), (7.6). Підставивши знайдені з системи (7.9) оптимальні значення C_2 , C_3 , а також $C_1 = 1 - C_2 - C_3$, в рівняння (7.7), отримуємо оптимально зважену оцінку α_i^* коефіцієнта α_i (за умови гарної обумовленості матриці A і невеликий похибки оцінок $\hat{\sigma}_i^2$, $\hat{\sigma}_{ij}^2$, дисперсій σ_i^2 , σ_{ij}^2). В іншому випадку для гарантії не погіршення результату зважування оцінок α_i слід скористатися мінімакним підходом. Оцінки $\hat{\sigma}_i^2$, $\hat{\sigma}_{ij}^2$, обчислені за m генерованими вибірками даних, мають похибки с χ^2 - розподілом, якщо припустити, що похибки оцінок $\alpha_i(k)$ розподілені за нормальним законом. Істинні значення σ_i^2 , σ_{ij}^2 для заданого рівня достовірності знаходяться в інтервалі $(1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_i^2$, $(1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_{ij}^2$, або приблизно $(1 \pm \gamma)^{-1} \sigma_i^2$, $(1 \pm \gamma)^{-1} \sigma_{ij}^2$, де γ - квантиль $\chi^2(p, m)$ розподілу, $\gamma \ll 1$.

Нехай $\sigma_i^2 = \hat{\sigma}_i^2(1 + \gamma)$, для $i \in I = \{\overline{1, n_1}\}$, $\sigma_j^2 = \hat{\sigma}_j^2(1 + \gamma)$, для $j \in J = \{\overline{n_1 + 1, n}\}$. Тоді $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2(1 + \gamma)$, для $i, j \in I$; $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2(1 - \gamma)$, для $i, j \in J$; $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1 - \gamma^2)}$, для $i \in I, j \in J$ або $i \in J, j \in I$. Оцінка дисперсії зваженої оцінки α_r^* r -го АДК:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\alpha_r^*}^2 = & \sum_{i \in I} C_i^2 \hat{\sigma}_i^2 (1 + \gamma) + \sum_{j \in J} C_j^2 \hat{\sigma}_j^2 (1 - \gamma) + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \in I}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 (1 + \gamma) + \\ & + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \in J}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 (1 - \gamma) + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1 - \gamma^2)} + \sum_{\substack{i \in J \\ j \in I}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1 - \gamma^2)}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Вираз (7.10) береться L раз для всіх можливих комбінацій $\hat{\sigma}_{ij}^2(1 \pm \gamma)$, $i = \overline{1, 3}$. Для кожного j -го поєднання з умови (7.8) отримуємо систему, аналогічну (7.9), вирішуючи яку, знаходимо оптимальний ξ -й вектор $C^*(\xi)$:

$$C^*(\xi) = [C_1^*(\xi), C_2^*(\xi), C_3^*(\xi)]^T, \quad \xi = \overline{1, L} \quad (7.11)$$

і обчислюємо все $\sigma_{\alpha_r^*}^2(S, C^*(\xi))$, $\xi = \overline{1, L}$; $S = \overline{1, L}$.

Мінімаксна оцінка C^* визначається із умови

$$C^* = \arg \min_{\xi \in \{1, L\}} \max_{S \in \{1, L\}} \hat{\sigma}_{\alpha_r^*}^2(S, C^*(\xi)). \quad (7.12)$$

Тобто кожен вектор (7.11) підставляють в кожний варіант дисперсії (7.10) і як C^* приймається той, найбільше значення якого по всіх варіантів (7.10) мінімально серед найбільших значень інших векторів (7.11).

Приклад. Для наочності розглянемо двовимірний випадок ($p = 2$). Нехай $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 9$; $\sigma_{12}^2 = 2,8$, $\gamma = 0,1$. Можливі поєднання наведено в табл. □ 7.1:

Таблиця 7.1.

Множники можливих відхилень оцінок дисперсій

№ варіанта	Множники для		
	σ_1^2	σ_2^2	σ_{12}^2
1	$1+\gamma$	$1+\gamma$	$1+\gamma$
2	$1-\gamma$	$1-\gamma$	$1-\gamma$
3	$1+\gamma$	$1-\gamma$	$\sqrt{(1-\gamma^2)}$
4	$1-\gamma$	$1+\gamma$	$\sqrt{(1-\gamma^2)}$

Оцінка (7.7):

$$\alpha_i^* = C\alpha_i(1) + (1-C)\alpha_i(2). \quad (7.13)$$

Дисперсія (7.10):

$$\sigma_{\alpha_r}^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2)C^2 + 2(\sigma_{12}^2 - \sigma_1^2)C + \sigma_2^2. \quad (7.14)$$

Підставивши замість дисперсій чотири варіанти їх оцінки з табл. □7.1 і виконавши операції (7.8), (7.9), отримаємо набір (7.11) для 4 варіантів (7.14):

$$C^*(1) = C^*(2) = \frac{\hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{12}^2}{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{\sigma}_{12}^2} = 1,41;$$

$$C^*(3) = \frac{\hat{\sigma}_2^2(1-\gamma) - \hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1+\gamma) + \hat{\sigma}_2^2(1-\gamma) - 2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}} = 1,465;$$

$$C^*(4) = \frac{\hat{\sigma}_2^2(1+\gamma) - \hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1-\gamma) + \hat{\sigma}_2^2(1+\gamma) - 2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}} = 1,361.$$

Значення $\sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$ зведено в табл. □7.2.

Таблиця 7.2

Оптимальні значення дисперсій

$\sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$				
$S \backslash \xi$	1	2	3	4
1	0,290	0,290	0,304	0,300
2	0,236	0,236	0,249	0,245
3	0,327	0,327	0,316	0,354
4	0,232	0,232	0,275	0,218

У табл. □7.2 жирною рамкою виділені варіанти с $\max \sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$, подвійною рамкою - з двома $\min_{\xi \in \{1,4\}} \max_{S \in \{1,4\}} \sigma_{\alpha_r}^2 = \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2(3, C^*(3)) = 0,316$, з її аргументом $C^* = 1,465$, $(1-C^*) = -0,465$. Якщо взяти $\sigma_1^2 = 1$; $\sigma_2^2 = 9$; $\sigma_{12}^2 = 2,8$; $\gamma = 0,1$, то $C^*(1) = C^*(2) = 0,756$; $C^*(3) = 0,737$; $C^*(4) = 0,737$. Таблиця 7.3, подібна до табл. □7.2:

Оптимальні значення дисперсій

		$\sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$			
		1	2	3	4
S ξ	1	0,081	0,081	0,089	0,087
	2	0,067	0,067	0,073	0,071
	3	0,082	0,082	0,078	0,099
	4	0,076	0,076	0,094	0,070

Відповідно $\min_{\xi \in \{1,4\}} \max_{S \in \{1,4\}} \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2 = \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi)) = 0,082$, $C^* = 0,756$, $(1 - C^*) = 0,244$. Якщо

припустити, що $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$, то для різних значень коефіцієнта кореляції $r_{12} = \frac{\sigma_{12}^2}{\sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2}}$

та співвідношення $F_{12} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ одержимо сімейство графіків $C^*(r_{12}, F)$ (рис. 7.1).

Для, $F_{12} = 1$, $C^* = 0,5$ для будь-яких r_{12} ; при $F_{12} \rightarrow \infty$, $C^* \rightarrow 1$, $(1 - C^*) \rightarrow 0$, тобто неефективний метод виключається. Характерно, що при однакових $\sigma_1^2, \sigma_2^2, |\sigma_{12}^2|$ величина $\hat{\sigma}_{\alpha_r}^2$ залежить від знаку σ_{12}^2 (0,316 для позитивної і 0,082 - для негативної). Тобто зважування двох методів з негативною σ_{12}^2 дає кращий результат. У даному прикладі для $\sigma_{12}^2 = 0$ дисперсія $\hat{\sigma}_{\alpha_r}^2 = 0,9$. Це набагато більше мінімакських значень дисперсій при $\sigma_{12}^2 = \pm 2,8$ (0,316 і 0,082 відповідно). Тобто взаємна кореляція дозволяє підвищити точність мінімаксної оцінки.

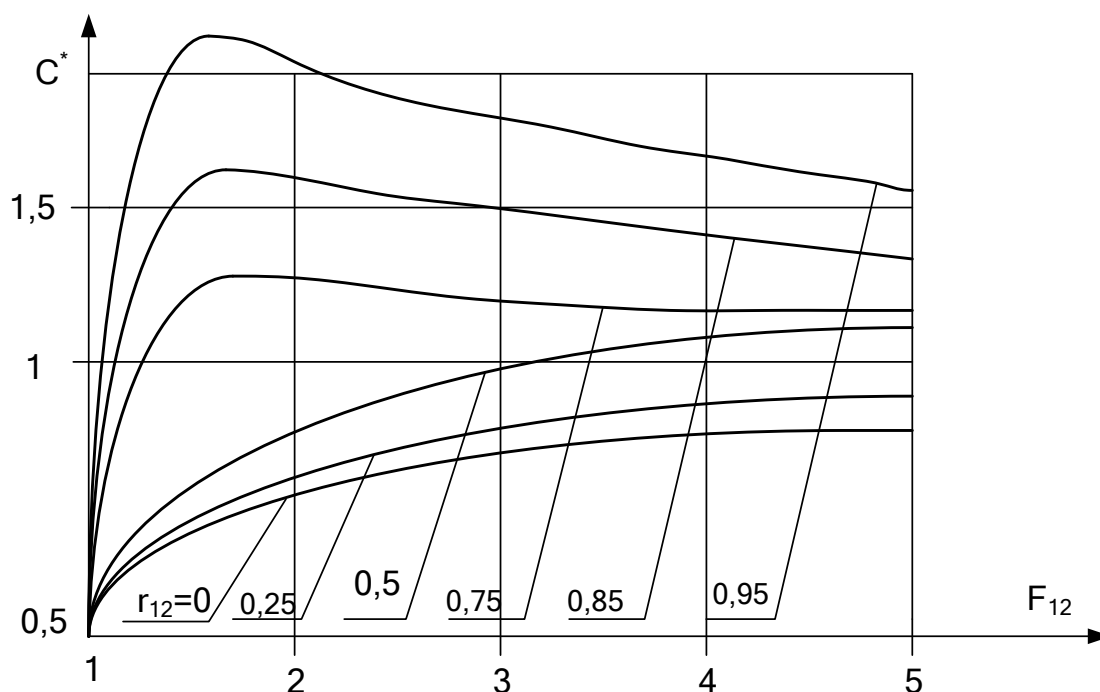


Рис. 7.1. Залежність оптимальної ваги C^* від ступеня кореляції і зашумленості оцінок

Таким чином, використовуючи кілька ізоморфних моделей об'єкта ідентифікації і кілька різних методів їх параметричного оцінювання спільно з технологією статистичного моделювання перешкод, можна істотно підвищити точність оцінок параметрів АДК ЛА без збільшення довжини вибірки даних натурних випробувань. Тим більше, що з огляду на не стаціонарність об'єкта ідентифікації, вибірки не можуть бути як завгодно великими. Як забезпечити незміщену оцінку α_r^* через неврахування реально існуючої нелінійності, розглянуто в роботі [40].

Глава 8. Багаторівневі системи з ідентифікатором об'єкта керування

8.1. Системний підхід

Ще раз повернемося до змісту розділу 1.1.

Системою ідентифікації називається множина $\{\Sigma, \beta, \text{opt}, \alpha, Y, I, T\}$, на якій реалізується релаксаційний (оптимізаційний) процес $\{Q_k\}$ відносно показника F , де $Q_k \in \{\{\Sigma, \beta, \text{opt}, \alpha\}, F \in \{Y, I\}\}$ такий, що $F_{k+1} \leq F_k, k=1, 2, \dots$

Розкриємо зміст складових системи:

$\{\Sigma\}$ – множина структур моделей,

$\{\beta\}$ – множина векторів параметрів моделей,

$\{\text{Opt}\}$ – множина методів оцінювання параметрів β ,

$\{\alpha\}$ – множина параметрів методів Opt ,

$\{Y\}$ – функціонал якості ідентифікації, за умови екстремуму якого знаходяться елементи (Σ, β) моделі та (Opt, α) – методів ідентифікації,

$\{I\}$ – функціонал (показник) якості досягнення цілі, за для якої вирішувалась задача ідентифікації.

Залежно від того, які елементи входять до Q_k і F_k розрізняють наступні класи систем ідентифікації (СІ): однорівневі СІ в вузькому значенні (ОСІ), однорівневі СІ в широкому значенні (ОСІ), однорівневі адаптивні в вузькому (ОСІ) і широкому (ОАСІ) значенні, дворівневі адаптивні в вузькому (ДМАСІ) і широкому (ДБАСІ) значенні, трьохрівневі (ТБАСІ).

В таблиці 8.1 подано склад множини Q_k , які оптимізують показники F_k для відповідних систем ідентифікації.

Таблиця 8.1

Класифікація систем ідентифікації

№ п/п	Клас систем	$\{Q_k\}$				$\{F_k\}$		
		β	Σ	α	opt	Y	I	Λ
1	Осі	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma_k\}$	α	opt	Y	0	0
2	ОСІ	$\{\beta_k\}$	Σ	α	opt	Y	0	0
3	досі	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma_k\}$	$\{\alpha_k\}$	opt	Y	0	0
4	ОАСІ	$\{\beta_k\}$	Σ	$\{\alpha_k\}$	opt	Y	0	0
5	дБАСІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma_k\}$	$\{\alpha_k\}$	$\{\text{opt}_k\}$	$\{Y_k\}$	0	0
6	ДБАСІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma_k\}$	$\{\alpha_k\}$	$\{\text{opt}_k\}$	$\{Y_k\}$	0	0
7	ТБАСІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma_k\}$	$\{\alpha_k\}$	$\{\text{opt}_k\}$	$\{Y_k\}$	$\{I_d\}$	Λ

В однорівневих СІ задача ідентифікації полягає в оптимізації внутрішнього критерію J , тобто задачу ідентифікації не замкнено на основний (зовнішній) критерій (ціль) I . В дворівневих СІ відбувається процес пошуку найкращої множини тих і інших елементів по головному критерію I . В трьохрівневих критерій I є підлеглим до цілі ще вищого рівня, яка визначена критерієм Λ . Для пояснення, як приклад, розкриємо зміст найкращої СІ (перший рядок таблиці 1) і найскладнішої, але і найдосконалішої СІ (сьомий рядок табл. □8.1).

Перший рядок: однорівнева система ідентифікації в вузькому смислі (осі) являє собою релаксаційний процес $\{\beta_k\}$ [16] відносно J за умови сталих Σ , opt , α і пустої множини I . Наприклад, рекурентним методом найменших квадратів визначається вектор β рівняння регресії $y=x\beta$, де y – вектор вимірів залежної змінної, x – матриця незалежних змінних, функціонал $J=E^T E$, $E=y-x\beta$, структура Σ моделі задана, параметр α , критерій I і Λ відсутні.

Сьомий ряд: трьохрівнева багато-адаптивна СІ (ТБАСІ) являє собою релаксаційний процес $\{\Sigma_k, \beta_k, opt_k, \alpha_k, Y_k, I_k, T_k\}$ відносно показника Λ третього рівня.

Процес складається з композиції трьох процесів:

- а) $\{\beta_{gk}\}$, $n=1, 2, \dots$ (g і k сталі) відносно J_{gk} до стаціонарної точки $\beta_{gk} = \text{argextr } J_{gk} \{\beta_{gkn}, \Sigma_{gk}, opt_{gk}, \alpha_{gk}\} = \text{arg } J_{gk}^*$;
- б) $\{J_{gk}(\beta_{gkn}, \Sigma_{gk}, opt_{gk}, \alpha_{gk})\}$, $k=1, 2, \dots$ (g -стале) відносно I_g до стаціонарної точки $I_g^* = I_g(\beta_g, \Sigma_g, opt_g, \alpha_g) = \text{argextr } I_g(Y_{gk}^*) = \text{arg } I_g^*$;
- в) $\{I_g^*(Y_g(\beta_g, \Sigma_g, opt_g, \alpha_g))\}$, $g=1, 2, \dots$ відносно показника Λ третього рівня системи до стаціонарної точки $I^* = \text{argextr } \Lambda(I_g^*) = \text{arg } \Lambda$.

Наприклад, задача вдосконалення автоматизованого керування технологічним процесом: Λ -показник якості виробництва; $\{I_g\} = \{I_1, I_2\}$, де I_1 – показник якості стабілізації технологічних параметрів (змінних X процесу), I_2 – показник якості продукції. $\{J_{gk}\}$ – множина показників якості ідентифікації динамічних моделей $\{\Sigma_{g1}, \beta_{g1}\}$ відображення керуючих змінних U в зміні стану $X(k=1)$ та регресійних моделей $\{\Sigma_{g2}, \beta_{g2}\}$ відображення змінних X в показник $I_2(k=2)$. На першому етапі автоматизації ($I_n = I_1$) по J_{1k} визначаються локальні моделі $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$ об'єкта методами $\{opt_{1k}, \alpha_{1k}\}$.

Синтезуються локальні регулятори, які стабілізують змінні X близько до заданих значень x_0 умови екстремуму I_1 . Згідно до пунктів а) і б) визначення ТБАСІ визначається оптимальний по I_1 елемент $\{\beta_1^*, \Sigma_1^*, opt_1^*, \alpha_1^*\}$ далі після стабілізації x навколо x_0 шляхом планування експерименту в відхиленнях $\Delta x = x - x_0$ будують модель $\{\Sigma_2, \beta_2\}$ залежності I_2 від X . По цій моделі уточнюють уставки x_0 робочих режимів: $x_0 \rightarrow x_0^*$. Далі оптимальний (вже по I_2) елемент $\{\Sigma_2^*, \beta_2^*, opt_2^*, \alpha_2^*\}$ визначають в результаті релаксаційного процесу за п. а) і б). Перехід від Σ_1 до Σ_2 приводить до зміни згідно п. в) показника I_1 в I_2 оптимізуючи тим самим показник Λ третього рівня системи, наприклад, ефективність виробництва.

8.2. Узгодження показників якості

Збіжність релаксаційних процесів оптимізації в дво- і трьорівневих системах ідентифікації можна суттєво покращити за умови проведення спеціально спланованого активного експерименту, який би забезпечував подібність варіацій функціоналів суміжних рівнів (J і I або I і Λ) в просторі варіюємих параметрів β .

Очевидно, що якщо I , як показник якості вирішення головної задачі на об'єкті за допомогою моделі, дуже чутливий до похибки в оцінюванні i -ї компоненти β_i вектора β параметрів моделі і мало чутливий до j -ї (β_j), то бажано мати оцінку β_i точнішу, ніж β_j . Зрозуміло також, що екстремальні значення I^* і J^* повинні відповідати одному і тому ж значенню β^* . Враховуючи, що перші варіації J і I в екстремальній точці β^* нульові, отримуємо варіації другого порядку:

$$\delta I(\delta\beta) \cong \delta\beta^T \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial\beta \cdot \partial\beta^T} \Big|_{\beta^*} \cdot \delta\beta, \quad (8.1)$$

$$\delta J(\delta\beta) \cong \delta\beta^T \cdot \frac{\partial^2 J}{\partial\beta \cdot \partial\beta^T} \Big|_{\beta^*} \cdot \delta\beta. \quad (8.2)$$

Умова подібності варіації (8.1), (8.2):

$$\frac{\partial^2 I}{\partial\beta \cdot \partial\beta^T} = K \cdot \frac{\partial^2 J}{\partial\beta \cdot \partial\beta^T} \quad (8.3)$$

Для фіксованих значень δI , δJ подібними будуть еліпсоїди розсіювання $\delta\beta$, тобто поверхні рівного значення варіації δI , δJ . Коефіцієнт K в (8.3) залежить від інформативності експерименту. Для ергодинічних процесів чим більший час експерименту, тим точніші оцінки β і, як наслідок, менше K . Позначимо

$$\frac{\partial^2 I}{\partial\beta \cdot \partial\beta^T} = K \cdot \frac{\partial^2 J}{\partial\beta \cdot \partial\beta^T} \Big|_{\beta^*} = a_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

Коефіцієнти a_{ij} будуть функціоналами від векторів тестуючи впливів $\delta U(t)$ і параметрів α , які оптимізуються за наступної умови:

$$(\delta U(t), \alpha^*) = \arg \min_{\delta U, \alpha} \|\Delta a_{ij}\|, \quad (8.4)$$

$$\text{де } \Delta a_{ij} = K \cdot a_{ij}(\delta U(t), \alpha) - a_{ij}^*.$$

Наприклад, хай модель динаміки об'єкта є зваженою сумою операторів $W_i(p, \alpha)$, що відображають вхідний текстовий вплив $\delta U(t)$ в вихідний сигнал $y(t)$:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot W_i(p, \alpha_i) \cdot \delta U(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i x_j(t). \quad (8.5)$$

$$\text{де } p = \frac{d}{dt},$$

$$\delta U(t) = \sum_{k=1}^m \gamma_k \varphi_k(t), \quad (8.6)$$

де $\varphi_k(t)$ - система ортогональних функцій.

$$\text{Якщо } J = \int_0^T \varepsilon^2(t) dt, \text{ де } \varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t), \text{ то } \frac{\partial^2 J}{\partial\beta \cdot \partial\beta^T} = [a_{ij}] \text{ і } j = \overline{1, n}, \text{ де}$$

$$a_{ij} = \int_0^T [W_i(p, \alpha_i) \cdot \delta U(t)] \cdot [W_j(p, \alpha_j) \cdot \delta U(t)] dt$$

Або, з урахуванням (8.5) і (8.6),

$$a_{ij} = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^m \gamma_k x_{ik}(t) \right) \left(\sum_{k=1}^m \gamma_k x_{jk}(t) \right) dt = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \gamma_k \gamma_q \int_0^T x_{ik}(t) \cdot x_{jq}(t) dt = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \gamma_k \gamma_q \cdot X_{ij}^{kq}, \quad (8.7)$$

де $X_{ij}^{kq} = \int_0^T x_{ij}(t) \cdot x_{ik}(t) dt$ - обчислюємо окремо.

Визначено вираз (8.4) з точністю до коефіцієнтів γ_k, γ_q , які підбираються за умови мінімуму норми $\|[\Delta a_{ij}(\gamma_k, \gamma_q)]\|$ $i, j = \overline{1, n}$ з обмеженнями, щоб δU (8.6), як функція γ_k не виходила за зону допустимих значень. Чим більше час T , тим менше K в (8.3), тим точніше оцінки $\hat{\beta}$ і, як наслідок, менше варіація (8.1) головного показника I .

Покажемо справедливість умови подібності функціоналів I і J , а значить і їх варіацій (8.1), (8.2) для конкретних випадків.

Функціонал I -унімодална функція від скляра β . Допустима його варіація $\Delta I = I - I^* = C$ утворена відхиленням оцінки $\hat{\beta}$ від β , $I^* = \inf_{\beta} I(\beta)$, β – скляр. Оцінка $\hat{\beta}$ з заданою ймовірністю знаходиться в інтервалі $[\beta_1, \beta_2]$ довжини L : це відстань між точками пересічення $I(\beta)$ і $I = I^* + C$ на вісь $O\beta$, а β_1, β_2 – кінці двовільного інтервалу довжини L . Тоді мають місце два очевидних твердження.

Твердження 1. З усіх інтервалів невизначеності довжини L рівномірно розподіленої оцінки $\hat{\beta}$ $\min_K \max_{\beta_1 \beta_2} \{I(\beta_1), I(\beta_2)\}$ досягається за умови, що $K = K^*$, де $K = (\beta^* - \beta_1) / (\beta_2 - \beta^*)$, $K^* = (\beta^* - \hat{\beta}_1) / (\hat{\beta}_2 - \beta^*)$.

Дійсно, будь-який зсув відрізка $[\beta_1, \beta_2]$ тягне за собою збільшення $\max_{\beta_1 \beta_2} \{I(\beta_1), I(\beta_2)\}$.

Твердження 2. Значення $K = K^*$ забезпечує мінімум втрат, тобто

$$\min_{\beta_1} \int_{\beta_1}^{L+\hat{\beta}_1} I(\beta) d\beta = \int_{\beta_1}^{L+\hat{\beta}_1} I(\beta) d\beta. \quad (8.8)$$

Дійсно, будь-яке зміщення відрізка $[\beta_1, \beta_2]$ відносно $[\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2]$ призводить до збільшення площі, тобто інтеграла $\int_{\beta_1}^{L+\hat{\beta}_1} I(\beta) d\beta$.

Приклад: $I(\beta) = a_2 \beta^2 + a_1 \beta, a_2 > 0$. Знайдемо β^* :

$$\frac{\partial I(\beta)}{\partial \beta} = 0 = 2a_2 \beta^* + a_1, \quad \beta^* = -\frac{a_1}{2a_2}.$$

Вирішуючи рівняння для варіації C , $a_2 \beta^2 + a_1 \beta - C = 0$, знайдемо $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$:

$$\hat{\beta}_{1,2} = -(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2 C}) / 2a_2 \quad (8.9)$$

Звідси, враховуючи, що $\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1 = L$, знайдемо залежність C від L ($C = (a_2^2 L^2 - a_1^2) / 4a_2$) і підставимо її в вираз (8.9):

$$\hat{\beta}_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm L/2 = \beta^* \pm L/2.$$

З твердження 1 витікає, що

$$K^* = (L/2)/(L/2) = 1 \quad (8.10)$$

Використовуючи твердження 2, покажемо, що K^* (2.8.10) оптимальне.

Нехай $\int_{\beta_1}^{L+\beta_1} (a_2\beta^2 + a_1\beta)d\beta = Q(\beta_1) = a_2[(L+\beta_1)^3 - \beta_1^3]/3 + a_1[(L+\beta_1)^2 - \beta_1^2]/2$.

$$\frac{dQ}{d\beta_1} = a_2(L^2 + 2L\beta_1) + a_1L, \quad \frac{d^2Q}{d\beta_1^2} = 2La_2 > 0.$$

З умови $\frac{dQ}{d\beta_1} = 0$ знайдемо $\hat{\beta}_2 = -\frac{a_1}{2a_2} - L/2$.

Тоді $\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_1 + L = -\frac{a_1}{2a_2} + L/2$, а $K^* = (L/2)/(L/2) = 1$, тобто знову отримали

співвідношення (8.10).

Розглянемо двомірний випадок: вектор β має дві складові β_1, β_2 . За тих же допущень про $I(\beta)$ і $\Delta I = C$ знайдемо проекцію $\Delta I = C$ на площину (β_1, β_2) . нехай площа цієї фігури дорівнює S . Нехай це буде еліпс F з параметрами a і b та площею $S = \pi ab$. Нехай оцінка $\hat{\beta}$ з заданою ймовірністю знаходиться в еліпсі розсіювання її з параметрами p і q тієї ж площі πab . Тоді має місце наступне твердження.

Твердження 3. З усіх еліпсів розсіювання F площі πab рівномірно розподіленої оцінки $\hat{\beta} \min_{p,q} \max_{\beta \in F} \{I(\beta)\}$ досягається, якщо $p = a, q = b$, тобто $F = F^*$.

Доведення аналогічне доведенню твердження 1: для будь-якої точки N довільного еліпса, яка лежить зовні еліпса – проекції F^* значення $I(N)$ більше C . тому еліпс, для якого досягається $\min_{p,q} \max_{\beta \in F} \{I(\beta)\}$, не повинен мати точки N , що лежить зовні еліпса – проекції F^* . Так як площі еліпсів F і F^* однакові, то вони повинні співпадати.

Твердження 4. Еліпс – проекція F^* забезпечує мінімум функції втрат, тобто $\min_F \iint_F I(\beta) d\beta_1 d\beta_2 = \iint_{F^*} I(\beta) d\beta_1 d\beta_2$. (8.11)

Доведення аналогічне доведенню твердження 2: функція втрат для двомірного β – це об'єм тіла, обмеженого зверху поверхнею $I(\beta)$, знизу – еліпсом на площині (β_1, β_2) . Еліпс F є утворюючим циліндричного тіла. Співставляючи два об'єму V циліндричних тіл, утворювачами яких є еліпси F і F^* , легко побачити, що

$$\begin{aligned} V(F) &= V_0 + S_1 + I(M_1), \\ V(F^*) &= V_0 + S_1' + I(M_2), \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$S_1' = S - S_0,$$

$$S_1' = S_0 - S_0 = 0,$$

$$I(M_1) > I(M_2),$$

$S_0' = F \cap F^*$ – утворююча циліндричного тіла, яке є спільною частиною обох об'ємів;

M_1 і M_2 – внутрішні точки, такі що $M_2 \in F^*, M_1 \notin F^*, M_1 \in F, M_2 \notin F$.

Тоді $V(F) > V(F^*)$.

Наглядний приклад.

$I(\beta) = (\beta_1^2 + \beta_2^2) / R$. Зрозуміло, що $\min I(\beta)$ буде для $\beta=0$. пересічемо параболоїд $I(\beta)$ площиною $I=R$. Пересіченням буде окружність $\beta_1^2 + \beta_2^2 = R$ радіуса R . Її проекція на площину $(\beta_1^2 + \beta_2^2)$ буде така ж окружність площею πR^2 .

Візьмемо в площині $(\beta_1^2 + \beta_2^2)$ довільний еліпс F :

$\frac{\beta_1^2}{a^2} + \frac{\beta_2^2}{b^2} = 1$ площею πab . Покажемо, що мінімум функції втрат

досягається, якщо $a=b=R$. Для цього обчислимо інтеграл: $\beta_2 = (R^2 / a^2) \sqrt{a^2 - \beta_1^2}$

$$J(a) = \frac{4}{R} \int_a^b d\beta_1 \int_{\beta_2} (\beta_1^2 + \beta_2^2) d\beta_2 = \frac{\pi R^2}{16} (a^2 + \frac{R^4}{a^2}).$$

Умова мінімуму J по a : $\frac{dJ}{da} = \frac{\pi R^2}{16} (2a - 2 \frac{R^4}{a^3}) = 0$ звідси $a=R$. З умови, що $\pi ab = \pi R^2$ знайдемо $b=R^2/a=R$. Таким чином $a=b=R$, що і треба було довести.

Твердження 3 і 4 можна узагальнити на випадок n -мірного вектора β і відповідних до нього n -мірних еліпсоїдів розсіювання.

Твердження 5. З усіх еліпсоїдів розсіювання заданого об'єму $S^{(1)}$ рівномірно або симетрично розподілені оцінки $\hat{\beta}$, мінімум функції втрат, а також $\{I(\beta)\}$ досягається, якщо $F=F^{(1)}$, де $F^{(1)}$ є еліпсоїд об'єму $S^{(1)}$, подібний до еліпса – проекції F^* .

Загальний висновок: З метою узгодженості функціоналів якості багаторівневої системи бажано зберігати їх подібності у просторі оцінюємих параметрів β . Тоді, за умови обмеженості точності обчислення функціоналів, еліпсоїди розсіювання оцінок $\hat{\beta}$ також будуть подібними, тобто похибки $\delta\beta_i$ ($i=\overline{1,n}$) оцінок $\hat{\beta}_i$ складових вектора β розподіляються між собою так, щоб варіація головного показника $\delta I(\delta\beta)$ в дворівневій, або $\delta L(\delta\beta)$ в трьохрівневій системі була мінімальна.

8.3. Рекурентне байєсовське оцінювання вектора β

Найбільш повне і точне в імовірнісному сенсі рішення відносно отримання оцінки $\hat{\beta}$ параметрів β досліджуємого об'єкта дає байєсовський метод, який витікає з рівняння для відповідних щільностей розподілу:

$$P(y/\beta) \cdot P(\beta) = P(y, \beta) = P(\beta/y) \cdot P(y), \quad (8.13)$$

$P(y/\beta)$, $P(\beta)$, $P(\beta/y)$, $P(y)$ - щільності ймовірностей вимірів U , апіорних значень β , апостеріорних значень β (що залежить від $P(\beta)$ і U), вимірів U для всіх можливих β .

З виразу (8.13) визначимо апостеріорну щільність ймовірності невідомого вектора β :

$$P(\beta/y) = \frac{P(y/\beta) \cdot P(\beta)}{P(y)}. \quad (8.14)$$

Задано цілеорієнтовану на основний показник I функцію витрат C :

$$C(\delta\beta) = \delta\beta^T \left. \frac{\partial^2 I}{\partial\beta\partial\beta^T} \right|_{\beta} \cdot \delta\beta, \quad (8.15)$$

де I – головний показник якості системи.

Запишемо вираз для середнього ризику R за умови статистично представницької вибірки $Y=[y(i), \dots, y(m)]$, тобто вектор Y слід розглядати, як детермінований, тоді

$$R = \int c(\delta\beta) \cdot P(\beta/y) \cdot d^n \beta, \quad (8.16)$$

де $P(\beta/y)$ визначається згідно виразу (8.14), в якому апіорна густина $P(\beta)$ є регуляризуючим множником для $P(\beta/y)$. У більшості практичних задач можна вважати $P(\beta)$ і $P(y/\beta)$ нормально розподіленими:

$$P(\beta) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}(\beta - \beta_0)^T P_0^{-1}(\beta - \beta_0)\right), \quad (8.17)$$

$$P(y/\beta) = C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}(Y - X\beta)^T Q^{-1}(Y - X\beta)\right),$$

де C_1, C_2 – нормуючі множники, які забезпечують умову $\int_{-\infty}^{\infty} P(\beta) d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} P(Y/\beta) dY = 1$, саме $C_1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |P_0|^{-\frac{1}{2}}, C_2 = (2\pi)^{\frac{m}{2}} \cdot |Q|^{-\frac{1}{2}}$;

$$Q = M\{\varepsilon\varepsilon^T\} = \begin{bmatrix} M\{\varepsilon^2(1)\} \dots M\{\varepsilon(1)\varepsilon(M)\} \\ \text{-----} \\ M\{\varepsilon(M)\varepsilon(1)\} \dots M\{\varepsilon^2(M)\} \end{bmatrix}$$

$Y - X\beta = \varepsilon$ – нев'язка між Y і його моделлю $X\beta$.

Щільність розподілу $P(y)$ (враховуючи, що $\varepsilon = Y - X\beta$) також буде нормальною з математичним очікуванням $x\beta_0$ і дисперсійною матрицею $P = xP_0x^T + Q$:

$$P(y) = C_3 \exp\left(-\frac{1}{2}(Y - X\beta_0)^T P^{-1}(Y - X\beta_0)\right), \quad (8.18)$$

$$C_3 = (2\pi)^{\frac{m}{2}} |P|^{-\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{m}{2}} [xP_0x^T + Q]^{-\frac{1}{2}}$$

Тоді апостеріорна щільність розподілу оцінки β $P(\beta/y)$ набуває вигляду:

$$P(\beta/y) = C_4 \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta - \beta_0)^T P_0^{-1}(\beta - \beta_0) + (Y - X\beta)^T Q^{-1}(Y - X\beta_0)^T P^{-2}(Y - X\beta_0)\right\}, \quad (8.19)$$

C_n – нормуюча константа.

Після відповідних перетворень вираз (8.19) набуває форми:

$$P(\beta/y) = C_4 \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta - \hat{\beta})^T P^{-1}(\beta - \hat{\beta})\right\}. \quad (8.20)$$

Звідси оцінка $\hat{\beta}$ та її коваріаційна матриця P дорівнює [35]:

$$\hat{\beta} = \beta_0 + PX^T Q^{-1}(Y - X\beta_0), \quad (8.21)$$

$$P = (P_0^{-1} + X^T Q^{-1} X)^{-1}.$$

Для симетричної функції втрат (8.15) мінімум середнього ризику (2.8.16) досягається за умови $\beta = \hat{\beta}$, тобто оцінка (2.8.21) є баєсовською.

З іншого боку, якщо β_0 і P_0 вважати оцінками, отриманими на попередньому (M -ому) кроці, а $\hat{\beta}$ і P , на $M+1$ -ому (шляхом додавання $M+1$ -ого виміру), то формула (8.21) реалізує рекурентний метод баєсовського оцінювання вектора β і його коваріаційної матриці P .

Враховуючи симетричність матриць P_0 і Q вираз (8.21) для P можна спростити:

$$P = P_0 - P_0 X^T [Q + X P_0 X^T]^{-2} X P_0. \quad (8.22)$$

Якщо $\varepsilon(k)$ нестационарний «білий шум», то $Q = \sigma_k^2 \cdot I, k = 1, 2, \dots, M, M + 1, \dots$, то деякі вектори замінюються скалярами:
 $Y = y(M + 1), X^T(M + 1) = [x_1(M + 1), \dots, x_n(M + 1)], Q^{-1}(M + 1) = 1/\sigma_{M+1}^2$.

За таких умов рекурентний баєсовський метод оцінювання β вироджується в рекурентний виважений метод найменших квадратів:

$$\hat{\beta}(M + 1) = \hat{\beta}(M) + x(M) \frac{1}{\sigma_M^2} [y(M) - X^T(M)\beta(M)], \quad (8.23)$$

$$P(M + 1) = P(M) - P(M)X(M)[X^T(M)P(M) + \sigma_M^2]^{-1}X^T(M)P(M);$$

а, за умови стаціонарного білого шуму ($\sigma^2 = const$) вираз (8.23) спрощується до звичайного рекурентного методу найменших квадратів:

$$\hat{\beta}(M + 1) = \hat{\beta}(M) + x(M)[y(M) - X^T(M)\beta(M)] \quad (8.24)$$

$$P(M + 1) = P(M) - P(M)X(M)[X^T(M)P(M) + 1]^{-1}X^T(M)P(M).$$

У випадку, якщо на момент обчислень мається вся вибірка даних $y(k)X(k), k = \overline{1, M}$, оцінки (8.23) (8.24) розраховуються на основі звичайного методу найменших квадратів:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X^T X)^{-1} X^T Y, \\ \text{cov } \hat{\beta} &= \sigma^2 (X^T X)^{-1}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Серію методів незміщеного оцінювання β , коли Y і X вимірюються з похибками розглянуто в [9]. Очевидно, що задача оптимізації головного показника I вирішується тим краще, чим ширше множина елементів $\{J, \sum, \beta, opt, \alpha\}$ і досконаліше алгоритм пошуку оптимального по I елемент.

8.4. Ідентифікація і оптимізація параметрів технологічного процесу

Для того, щоб продукція українського виробника потрапила на світовий ринок і склала конкуренцію зарубіжним зразкам необхідно не просто автоматизувати процес її виробництва, а впровадити самі ефективні принципи керування: це адаптація систем управління до об'єкту керування на основі коректних методів його ідентифікації, адаптація процесу ідентифікації до нестационарності стохастичних процесів, що відбувається в об'єкті керування, адаптація еталонних моделей, оптимізація уставок та процесу стабілізації відповідних змінних об'єкта.

Розглянемо застосування цих принципів на прикладі АСУТП витягування кварцової трубки заданих діаметру $d_{вн.}$ і товщини стінки $\delta_{ст.}$ з склоблоку, що має відповідні зовнішній D_3 і внутрішній $D_{вн.}$ діаметри (Рис. 8.1).

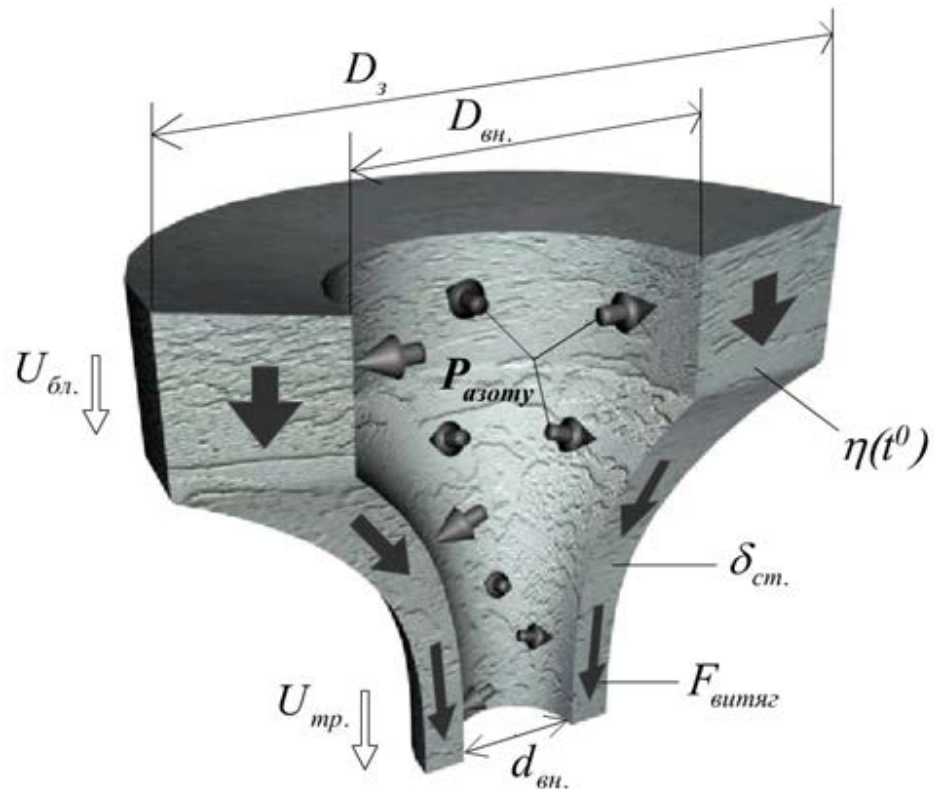


Рис. 8.1. Ділянка блоку, де формується трубка

Блок розігрівають до температури t^0 розм'якшення і під дією зусилля $F_{\text{витяг.}}$ і тиску $P_{\text{азоту.}}$ зсередини він перетягується в трубку. Якщо швидкість подачі блоку - $U_{\text{бл.}}$, а витягування трубки - $U_{\text{тр.}}$, то, за умови незмінності маси, отримаємо співвідношення

$$\frac{D_3^2 - D_{\text{вн.}}^2}{d_{\text{вн.}}^2 - d_{\text{вн.}}^2} = \frac{U_{\text{тр.}}}{U_{\text{бл.}}} \quad (8.26)$$

або через товщину стінки $\delta_{\text{ст.}}$ трубки:

$$\delta_{\text{ст.}}(2d_{\text{вн.}} + \delta_{\text{ст.}}) = \frac{U_{\text{бл.}}}{U_{\text{тр.}}}(D_3^2 - D_{\text{вн.}}^2). \quad (8.27)$$

Формула (8.27) вказує на взаємозв'язок $d_{\text{вн.}}$ і $\delta_{\text{ст.}}$. Тому об'єкт керування слід розглянути як багатомірний з перехресними зв'язками: щоб забезпечити стабільність $d_{\text{вн.}}$ і $\delta_{\text{ст.}}$ необхідно водночас змінювати як тиск $P_{\text{азоту}}$ так і швидкість $U_{\text{тр.}}$ витягування трубки. Окрім того слід за стабілізувати швидкість $U_{\text{бл.}}$ подачі блоку, температуру t^0 його, в'язкість η розігрітої скломаси або зусилля витягування (момент $M(\eta)$).

Фізико – хімічна нестабільність блоку виступає як стохастичне збурення, компенсувати дію якого зобов'язана система автоматичного керування.

8.4.1. Математична модель системи в режимі “Робота”

Для обмежених відхилень від номінального режиму і інтервалу часу нелінійний нестационарний стохастичний процес, що протікає в об'єкті, може бути представлено стаціонарним векторно-матричним диференціальним оператором [2]

$$L(t) \cdot X_B(t) = \tilde{L}(t) \cdot U(t) \quad (8.28)$$

або матричною передаточною функцією $W(s)$, якщо скористуватись перетворенням Лапласу:

$$X_B(s) = W(s) \cdot U(s), \quad (8.29)$$

де X_B - вектор – функція вихідних величин об'єкта, а саме δ_{cm} , $d_{вн}$, $U_{\hat{\alpha}\alpha}$, t^0 , $M(\eta)$; $U(s)$, - вхідних: U_{mp} , $P_{азота}$, $U_{\hat{\alpha}\alpha}^*$, струму I нагрівача блока. На рис. 8.2 розкрито структуру $W(s)$, яка має перехресний зв'язок першого і другого каналів (передаточні функції W_{12} і W_{21}). Вплив інших каналів на ці враховано параметричним збуренням ξ , що діє на W_{ij} , $i, j=1,2$, окрім цього мають місце сигнальні збурення від нестабільності $\delta U_{\hat{\alpha}\alpha}^*$ швидкості $U_{\hat{\alpha}\alpha}$ та вплив t^0 на $M(\eta)$. Для їх компенсації система має ПІ – регулятори по окремим каналам, а для розв'язки першого і другого додатково ввімкнено діаганалізатор $W_g(s)$. Тоді з умови, що

$$W_g(s) \cdot W(s) = \text{diag } W(s) \quad (8.30)$$

визначають оператори W_{ij}^g діаганалізатора:

$$W_{12}^g(s) = -W_{12} \cdot W_{11}^{-1}(s), \quad W_{21}^g(s) = -W_{21} \cdot W_{22}^{-1}(s). \quad (8.31)$$

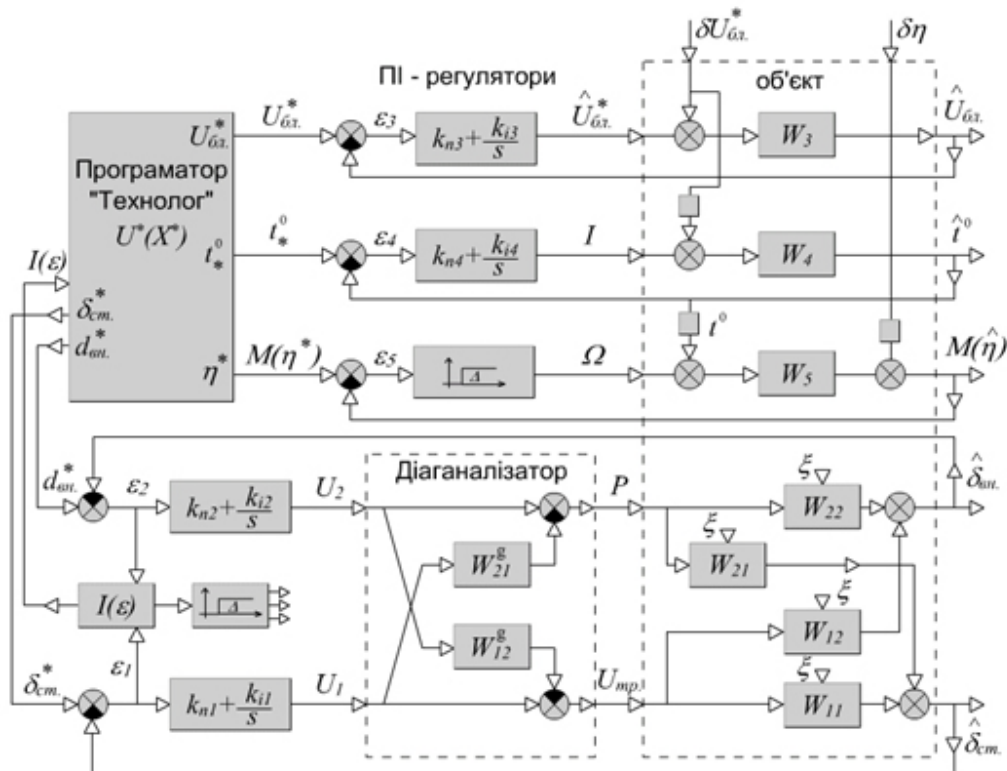


Рис. 8.2. Структурна схема системи керування в режимі “Робота”

Шляхом настройки параметрів k_n і k_i ПІ – регулятора динаміка кожного з каналів наближається до динаміки еталонної моделі (рис. 8.3). Для цього за принципом мінімальної складності апроксимується відповідний канал об'єкта інерційного каналу першого порядку (рис. 8.4). Тоді за умови еквівалентності еталонної моделі (рис. 8.3) і САК і – го каналу, знаходять коефіцієнти ПІ – регулятора:

$$k_n = k_{em} \cdot k_{ii}^{-1} \cdot \tau_{ii}; \quad k_I = k_{em} \cdot k_{kk}^{-1}. \quad (8.32)$$

Блок $I(\varepsilon)$ контролює якість вихідного продукту (відхилення діаметру і товщини трубки) і у випадку зниження якості система переходить в режим “Навчання” (рис. 8.5).

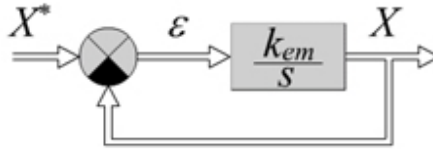


Рис. 8.3. Еталонна модель

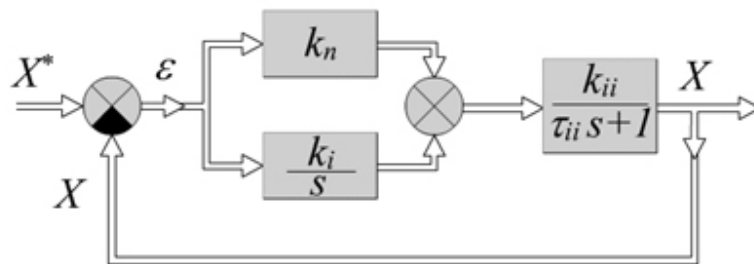


Рис. 8.4. САК з ІІ – регулятором

4.4.2. Математична модель системи в режимі “Навчання”

Перехід з режиму “Робота” в режим “Навчання” здійснюється шляхом розмикання ключа 3 і замикання інших ключів (рис. 8.5). Тоді на об’єкт подається тільки програмний вплив U_0 , а також тестуючий вплив δU . У блоці 7 визначається модель $W_M(s)$ об’єкта і, відповідно до її параметрів, блоками 8, 9 настроюються за алгоритмом (6) діагностувальник $W_g(s)$ і за алгоритмом (7) ІІ – регулятори $W_p(s)$.

Режим “Навчання” обов’язково має місце на початку процесу витягування трубки, а також може виникати в процесі витяжки, якщо $I(\varepsilon) > \Delta$.

Розглянемо, як приклад, процес ідентифікації прямих W_{11} , W_{22} і перехресних W_{12} , W_{21} операторів об’єкта на початку процесу витягування. Залежно від знаку відхилень $d_{ен.}$ і $\delta_{см.}$ від номінальних значень, починаючи з плюс чи мінус, з блоку ідентифікатора подається взаємо незалежна послідовність сходинок ΔP і $\Delta U_{mp.}$, амплітуда яких поступово зменшується (рис. 8.6).

В межах кожної сходинки перехідний процес $\Delta d_{ен.}(t)$ та $\Delta \delta_{см.}(t)$ практично закінчується і описується експонентною. Тоді оцінка коефіцієнта \hat{k}_{ij} , $i=1,2$ визначається, як відношення приросту вихідної змінної j -го каналу Δx_j до

приросту відповідної вхідної ΔU_i , а оцінка сталої $\hat{\tau}_{ij}$ часу – за робастним алгоритмом Тьюкі, як медіана упорядкованого по величині $\tau_{ij}(k)$ ряду:

$$\hat{\tau}_{ij} = Me\{\tau_{ij}(k)\}, \quad (8.33)$$

де

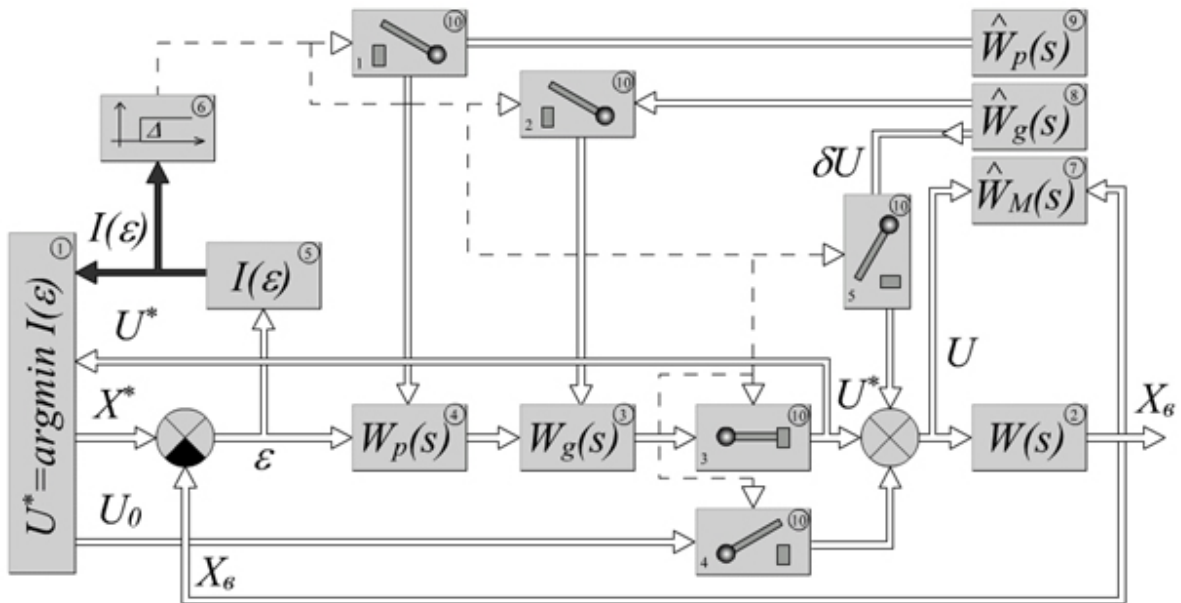


Рис. 8.5. Структурна схема системи

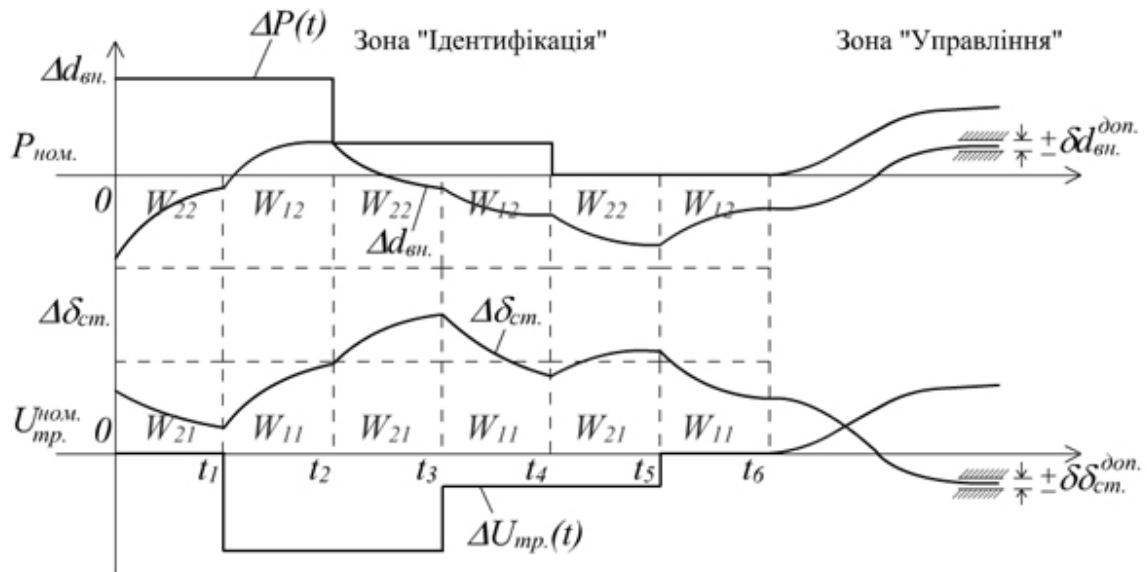


Рис. 8.6. Графіки перехідних процесів по $d_{вн.}$ і $\delta_{см.}$

$$\tau_{ij}(k) = - \frac{t_k}{\ln \left| \frac{\Delta x_j(t_k)}{\Delta x_j(t_n)} - 1 \right|},$$

$k = \overline{0, n}$ - дискретний час конкретної ділянки $[t_\ell, t_{\ell+1}]$, $\ell = \overline{0, 5}$ (див. рис. 8.6).

Подальше уточнення оцінок \hat{k}_{ij} , $\hat{\tau}_{ij}$ досягається лінійною апроксимацією їх у функції амплітуди тестуючого сигналу:

$$\hat{k}_{ij}(\Delta P, \Delta U_{mp.}) = k_{ij}^* + a_1^{ij} \cdot \Delta P + a_2^{ij} \Delta U_{mp.} \quad (8.34)$$

$$\hat{\tau}_{ij}(\Delta P, \Delta \delta_{mp.}) = \tau_{ij}^* + b_1^{ij} \cdot \Delta P + b_2^{ij} \Delta U_{mp.}$$

Шукомими будуть k_{ij}^* і τ_{ij}^* . По визначенню параметрів об'єкта по всім каналам, настраюються параметри діагностатора і регуляторів, ключі 1,2,4,5 розмикаються, а ключ 3 підключає САК до об'єкту, тобто система переходить в режим "Робота".

8.4.3. Робота системи в режимі нонусного уточнення моделі об'єкта і алгоритму керування

Якщо в режимі "Робота" функціонал $I(\varepsilon)$ (рис. 8,5) суттєво менше Δ і керуючі впливи змінюються несуттєво, то в підсистему "Технолог" поступає інформація про U^* , яка уточнює технологічну карту режимів, тобто співвідношення $X_B^*(U^*)$ між номінальними значеннями вхідних і вихідних змінних об'єкта. Далі при цих значеннях U^* комутатор 3 (рис. 8.5) знов розмикається, а замикаються інші і система переходить в режим ноніусного уточнення моделі об'єкта.

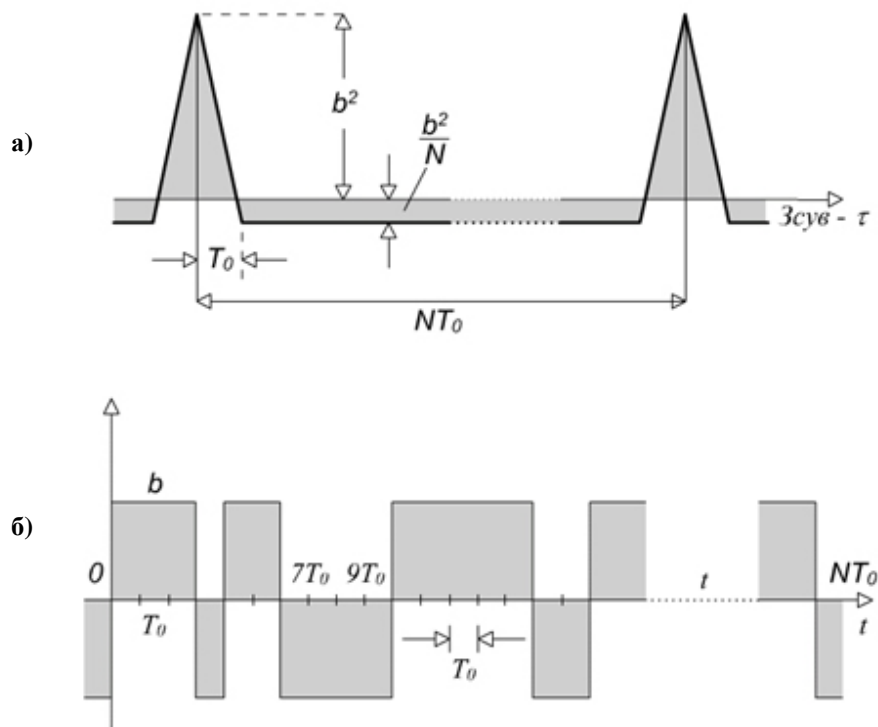


Рис. 8.7. Кореляційна функція (а) сигналу (б)

Для цього з блоку 8 (рис. 8.5) на відповідні канали подаються взаємо – і автонекорельовані псевдо – випадкові бінарні послідовності тестуючих сигналів (рис. 8.7) і за методом найменших квадратів для згладжених даних уточнюються параметри k_{ij} , τ_{ij} базових моделей, визначаються похибка апроксимації об'єкта базовими моделями і далі тим же методом оцінюється параметри уточнюючих операторів W_y ноніусних моделей за умови, що вже відомий – базовий. Наприклад, інертно – диференційний оператор каналу стабілізації температури:

$$W_y(s) = \frac{T_4 s + 1}{\tau_4 s + 1}. \quad (8.35)$$

Тоді ноніусна модель має вид:

$$W_{M4} = \frac{k_4^*}{\tau_4^* s + 1} \cdot \frac{T_4 s + 1}{\tau_4 s + 1}. \quad (8.36)$$

А щоб динаміка відповідала еталонній відповідно коректується алгоритм управління шляхом підключення до ПІ – регулятора компенсуючої оператор $W_y(s)$ ланки $W_y^{-1}(s)$ (рис. 8.8).

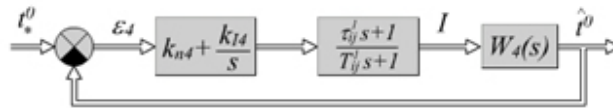


Рис. 8.8. Ноніусна корекція каналу стабілізації t^0

В процесі ноніусної ідентифікації контролюється значення показника $I(\varepsilon)$ і, при наближенні його до Δ , система переходить в режим “Робота” з тою моделлю, яку вдалося визначити. Цим досягається адаптивність до нестационарності збурень: чим стаціонарніше процес, тим точніша модель і менше значення $I(\varepsilon)$. Але і за умови нестационарності система встигає побудувати базову просту модель і забезпечити стійкість і якість процесу керування.

Окрім цього, якщо $I(\varepsilon) \ll \Delta$, система може зменшувати інерційність еталонних моделей і відповідно каналів стабілізації технологічних параметрів.

8.5. Ідентифікація і оптимізація процесу самостійного навчання з електронним тренажером

8.5.1. Вступ

Процес самостійного навчання займає важливе місце у системі електронних навчально-методичних ресурсів навчальної дисципліни (СЕНД) [31]. Одним із засобів самостійного навчання є електронний тренажер. Щоб наблизитись до рівня прямого спілкування „вчитель – учень”, електронний тренажер має забезпечувати оптимальний процес передачі інформації особі, що навчається. Оптимальність процесу передачі інформації розуміється як мінімізація втрат інформації при передачі її від „вчителя” до того, хто навчається (учня, студента тощо), а також засвоєння цієї інформації. Такий електронний тренажер, як складова частина в СЕНД, а також викладач і особа, що навчається створюють дворівневу автоматизовану систему керування процесом навчання [31]. Викладач (верхній рівень) визначає шлях (граф) проходження необхідних розділів відповідної дисципліни, вагу цих розділів у загальній оцінці рівня знань особи, що навчається. Електронний тренажер і особа, що навчається створюють нижній рівень системи, де особа, що навчається, є об’єктом керування, а тренажер – регулятором процесу навчання цього об’єкту. Викладач і особа, що навчається, можуть планувати загальний темп і термін вивчення відповідної дисципліни та бажаний рейтинг (бал) рівня засвоєння навчального матеріалу. Тренажер повинен забезпечити адаптивний

(бажано оптимальний) до параметрів учня керуючий вплив. Керуючими змінними такої системи є:

1. Темп подачі інформації (інтервал часу між заняттями);
2. Траєкторії руху вперед від розділу до розділу i , за необхідністю, повернення назад до вже пройдених модулів курсу на основі інформації з поточного тестування учня;
3. Об'єм мотиваційної інформації.

Повернення до попередніх модулів, як керівний вплив, необхідне при низькому показнику поточного контролю (тобто, розуміння) знань; мотивація – як вплив на якість засвоєння матеріалу.

Таким чином, при достатньому рівні формалізації і можливості контролю поточних параметрів моделі об'єкту навчання, процес навчання на електронному тренажері може (з відповідним ступенем наближення) бути представлений системою автоматичного керування (САК) з ідентифікатором і синтезатором оптимального режиму.

8.5.2. Опис елементів системи автоматичного керування процесом навчання

Навчальний матеріал відповідного предмету поділено на тематично цілісні *блоки*, приблизно однакові за об'ємом – заняття терміном 75 ± 15 хвилин.

Матеріал кожного n -го блоку ($n = \overline{1, N}$) поділено на предметну *інформаційну* $I(n)$ і *мотиваційну* $M(n)$ складові. Передбачено декілька рівнів мотивації залежно від *показника* $k(n)$ успішності учня. Для n -го блоку показник $k(n)$ встановлюється за результатами поточного контролю окремих мікроблоків в межах n -го і остаточного – по всьому n -му блоку. Контроль по мікроблокам здійснюється при поданні матеріалу в режимі співбесіди: 30-ти секундна мовна та відповідна їй екранна інформація, запитання і 3 відповіді: поверхнева, нормальна, поглиблена. Учень, вибравши одну з них, набирає певну кількість балів, а тренажер, отримавши цю інформацію каналом зворотного зв'язку, коригує подальший шлях викладання матеріалу: перехід до наступного мікроблоку чи повернення до вже пройдених мікроблоків, логічно пов'язаних з поточним. По завершенню процесу подачі інформаційної частини $I(n)$ n -го блоку здійснюється підсумковий контроль для n -го блоку за показником $K(n)$ і, залежно від реального і бажаного рівня (заданого програмною траєкторією $KV^*(n)$ накопичення рейтингу) приймається рішення за правилом:

якщо $K(n) \geq K_{\min}(n)$, то, після необхідної паузи, перехід до $n+1$ -го блоку, якщо $K(n) < K_{\min}(n)$, то повтор без паузи n -го блоку зі збільшенням мотиваційної складової $M(n)$.

На початку кожного n -го заняття, учень проходить контроль залишкових знань по $n - 1$ -му блоку-заняттю і отримує рейтинг $KV(n)$, залежно від рівня якого переходить до засвоєння n -го блоку з відповідним до $KV(n)$ рівнем мотивації чи повертається на повторне вивчення $n - 1$ -го блоку. Сумарний

рейтинг $\sum_n KV(n)$ розглядається як функція часу t і коригується системою автоматичного керування зміною пауз T_n між блоками-заняттями. Послідовність дій на одному занятті представлено на рис. 8.9.

Вхідний контроль	Мікромодулі n -ного блоку $(n, i) \ i = \overline{1, m}$									Вихідний контроль		
$KV(n-1)$	$M(n,1)$	$I(n,1)$	$K(n,1)$		$M(n,i)$	$I(n,i)$	$K(n,i)$		$M(n,m)$	$I(n,m)$	$K(n,m)$	$KV(n)$

Рис. 8.9. Складові n -го заняття

Для успішного функціонування системи автоматичного керування слід побудувати структуру моделі особи, що навчається як об'єкта керування та визначити поточні значення її параметрів:

$$K(n) = K_0 + K_M \cdot M(n) + K_r \cdot R(n), \quad (8.37)$$

$$KV(n) = K(n) \cdot \exp\left[-\frac{T_n}{\tau_n}\right] + KV_r \cdot R(n), \quad (8.38)$$

де K_0 , K_M і K_r – коефіцієнти лінійної стохастичної моделі залежності $K(n)$ від рівня мотивації $M(n)$ та випадковості $R(n)$, $R(n)$ – гаусів шум з одиничною дисперсією, τ_n – стала часу експоненціального забування інформації $n - 1$ -го заняття на n -му занятті:

$$\tau_n = \frac{t_n - t_{n-1}}{\ln\left(\frac{K(n)}{KV(n)}\right)}. \quad (8.39)$$

Експоненціальний процес накопичення знань в межах одного заняття подано лінійною моделлю (8.37) внаслідок короткого часу одного заняття, а процес забування інформації в паузі T_n між заняттями взято експоненціальним (8.38).

Бажана оптимальна траєкторія $\sum_{j=1}^n KV^*(t_j)$, $n = \overline{1, n_K}$ накопичення знань у часі t_j задається на основі психологічних аспектів навчання викладачем або учнем, залежно від запланованого рівня знань і резервів часу.

Задача тренажера, як системи автоматичного керування процесом, забезпечити близькість реальної траєкторії $\sum_{j=1}^n KV(t_j)$ до бажаної $\sum_{j=1}^n KV^*(t_j)$, тобто мінімізувати деякий функціонал похибки $\varepsilon(n)$:

$$\varepsilon(n) = KV^*(n) - KV(n), \quad (8.40)$$

$n = \overline{1, n_k}$, де n_k – номер кінцевого заняття. Цю задачу будемо вирішувати за допомогою пропорційно (k_p) - інтегрального (k_I) регулятора [20] інтервалу ΔT_n між n -ми і $m - 1$ -им заняттями:

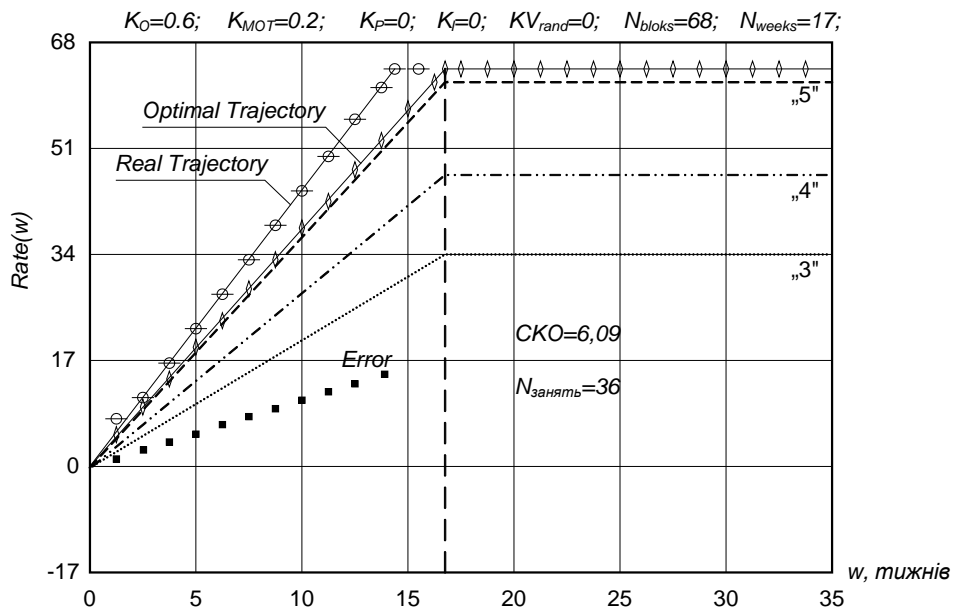


Рис.8.11. Розімкнена система керування ідеальним учнем

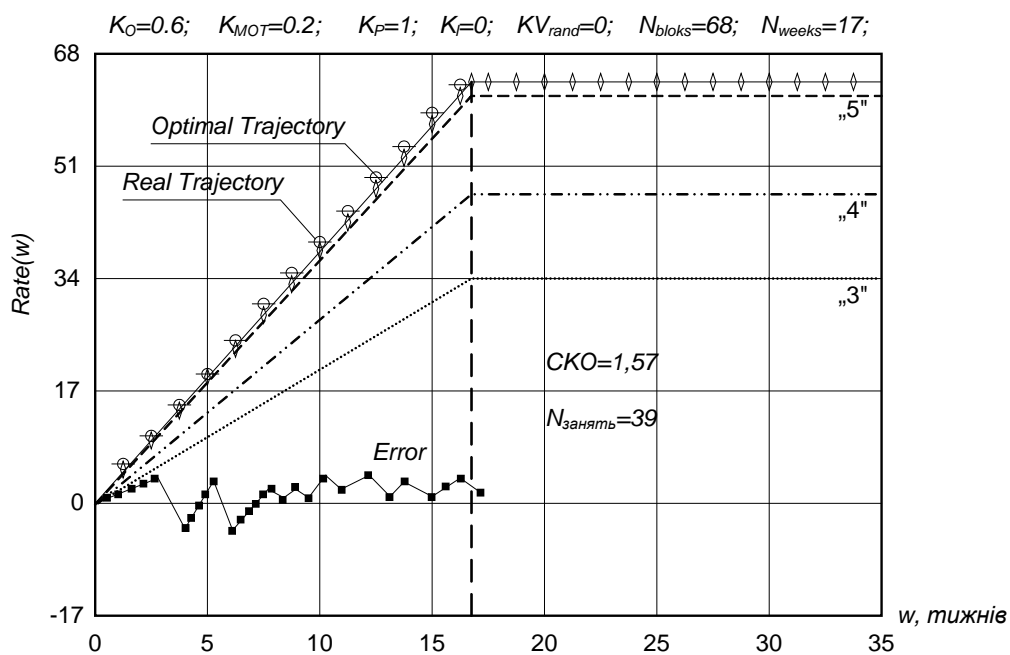


Рис. 8.12. Замкнена система автоматичного керування з пропорційним регулятором (ідеальний учень)

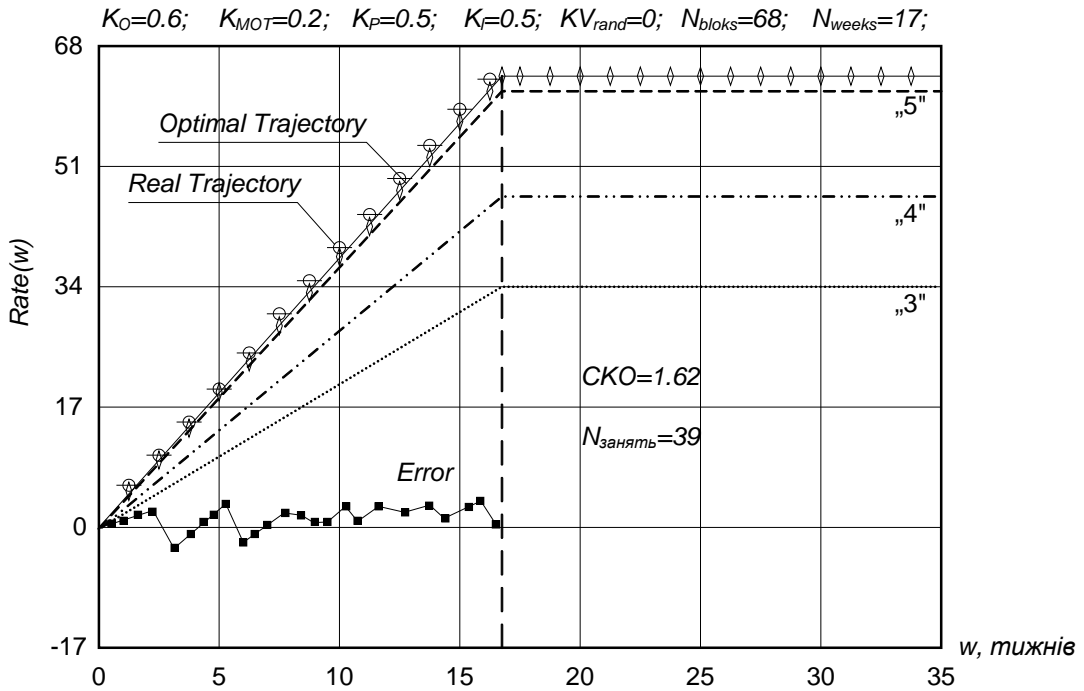


Рис. 8.13. Замкнена система автоматичного керування з інтегро-пропорційним регулятором (ідеальний учень)

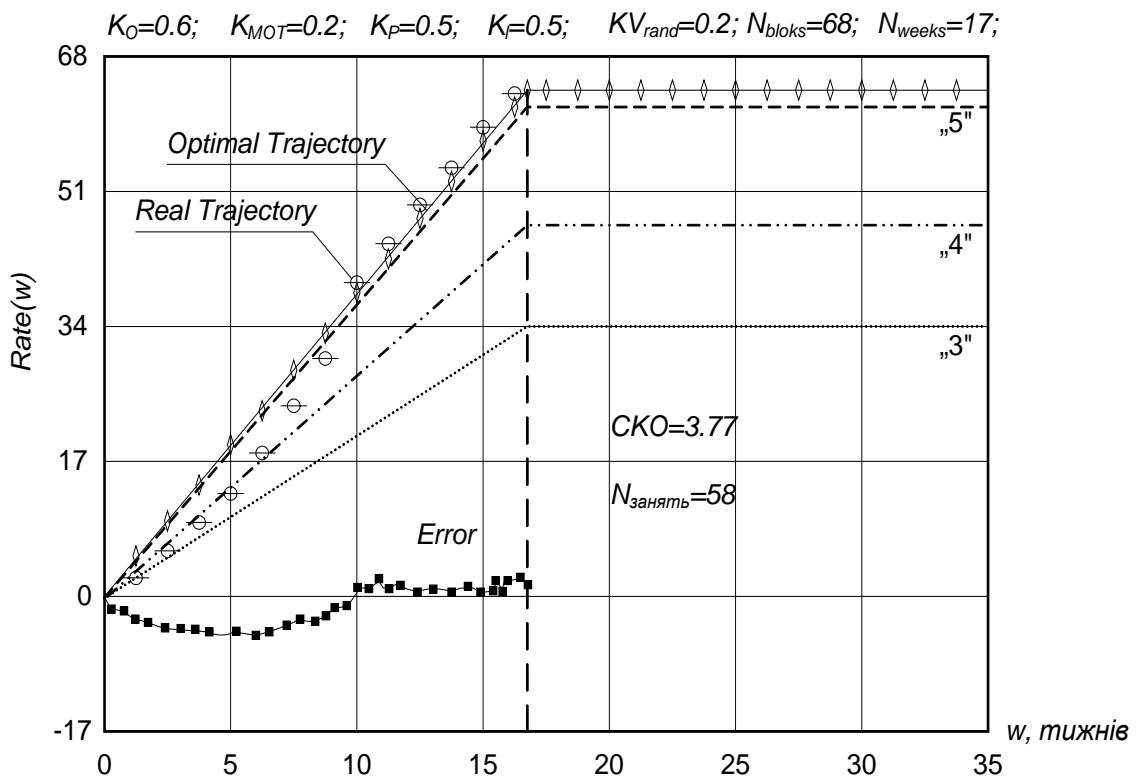


Рис. 8.14. Замкнена система автоматичного керування з інтегро-пропорційним регулятором (реальний учень)

Таким чином стандартні пропорційні і пропорційно-інтегральні закони керування забезпечують відслідковування оптимальної траєкторії з похибкою 1,57 – 3,77 одиниць при сумарному максимальному рейтингу в 68 одиниць, тобто з похибкою 2 – 6 %.

З метою подальшого поліпшення процесу навчання реального учня ($KV_r = 0,2$) розглянемо можливість побудови оптимального адаптивного (до учня) закону керування замість стандартного пропорційного та інтегрального. Хай на кінець n -го заняття (рис. 8.9, момент часу t_{n2}) поточний сумарний рейтинг учня, після виконання вхідного контролю залишкових знань по $n-1$ -о-у заняттю ($KV(n-1)$) складає $\sum_n KV(n)$. Сума оцінок поточного контролю по m мікро блокам n -г- заняття дорівнює $K(n)$. Відоме також оптимальне (бажане) значення сумарного рейтингу

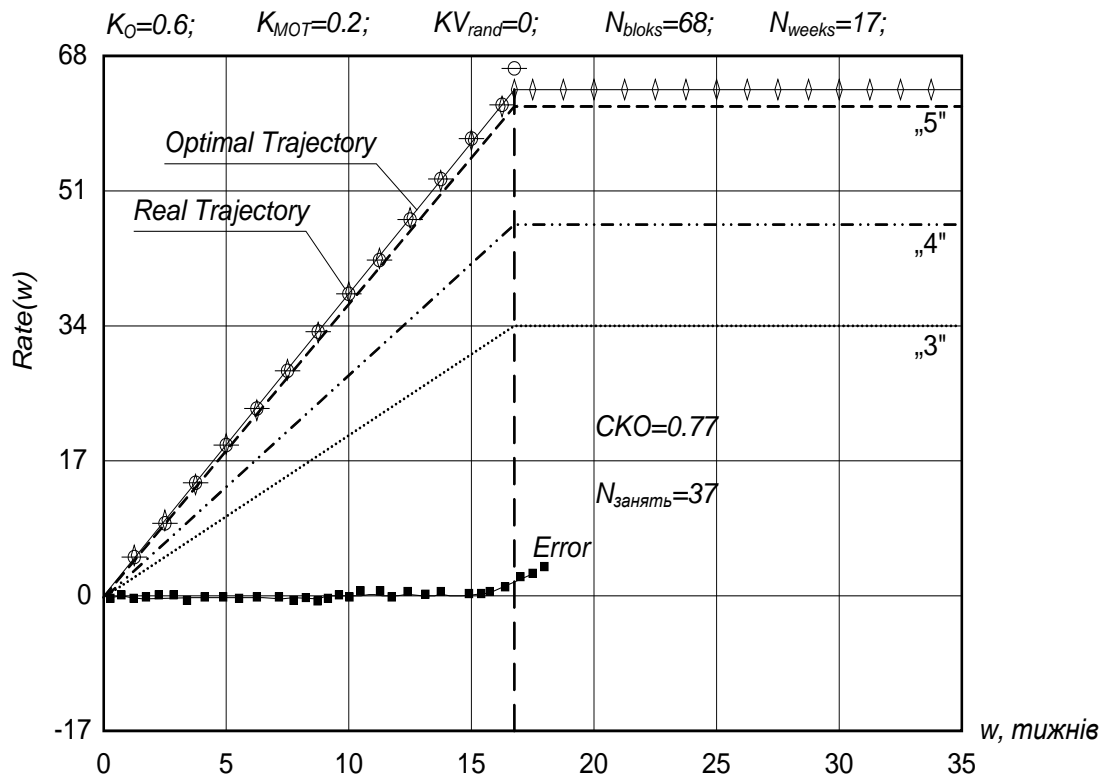


Рис. 8.15. Оптимальна система автоматичного керування процесом навчання (ідеальний учень)

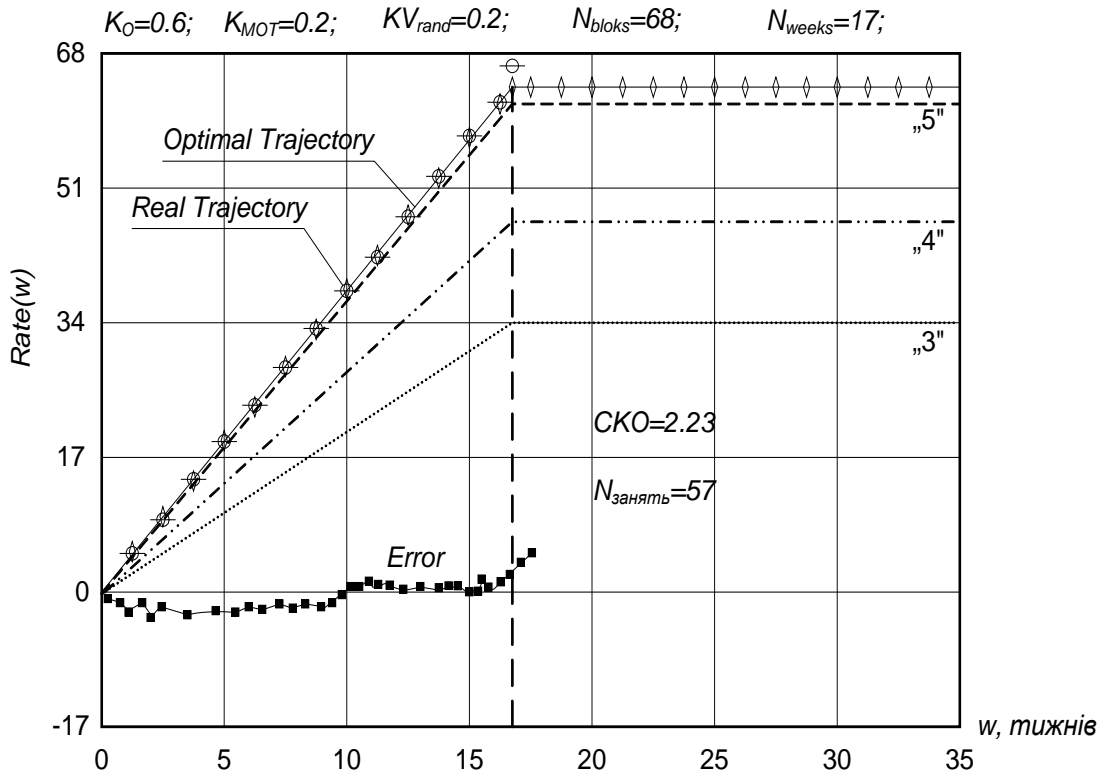


Рис. 8.16. Оптимальна система автоматичного керування процесом навчання (реальний учень)

учня на момент часу t_{n1} , це $\sum_n KV^*(n)$. З урахуванням того, що на момент часу початку $n+1$ -го заняття рівень знань учня експоненціально зменшується (стала часу τ_n), то для моменту $t_{n+1,1}$ прогнозний рейтинг учня визначиться виразом:

$$\sum_n KV(n+1, t_{n+1,1}) = \sum_n KV(n, t_{n,2}) + K(n, t_{n,2}) \cdot \exp\left[\frac{t_{n+1,1} - t_{n,2}}{\tau_n}\right] \quad (8.42)$$

Прирівнявши вираз (8.42) до оптимального рейтингу $\sum_n KV^*(n+1)$, отримаємо вираз для визначення оптимального моменту $t_{n+1,1}$ часу початку $n+1$ -го заняття:

$$\sum_n KV(n, t_{n,2}) + K(n, t_{n,2}) \cdot \exp\left[\frac{t_{n+1,1} - t_{n,2}}{\tau_n}\right] = \sum_n KV^*(n+1). \quad (8.43)$$

Звідси оптимальне значення часу $t_{n+1,1}$ початку $n+1$ -го заняття дорівнюватиме:

$$t_{n+1,1} = t_{n,2} + \tau_n \ln \frac{\sum_n KV^*(n+1) - \sum_n KV(n, t_{n,2})}{K(n, t_{n,2})} \quad (8.44)$$

Як бачимо, на $t_{n+1,1}$ впливають стала часу τ_n та показники сумарного $\sum_n KV(n, t_{n,2})$ та поточного $K(n, t_{n,2})$ рейтингів. У правій частині виразу (8.44) відомі всі складові, окрім сталої часу τ_n . Вона від заняття до заняття може змінюватись залежно від стану і ступеня мотивації учня. Тому для розв'язання рівняння (8.44) слід задати τ_n . Найпростіше це зробити, прийнявши, що

$\tau_n = \tau_{n-1}$, де τ_{n-1} знаходиться із попереднього заняття з виразу (8.42), якщо замість $n+1$ взяти n , а замість n взяти $n-1$:

$$\sum_n KV(n, t_{n,1}) = \sum_n KV(n-1, t_{n-1,2}) + K(n-1, t_{n-1,2}) \cdot \exp\left[\frac{t_{n,1} - t_{n-1,2}}{\tau_{n-1}}\right]; \quad (8.45)$$

звідси

$$\tau_{n-1} = \frac{(t_{n,1} - t_{n-1,2})}{\ln \frac{\sum_n KV(n, t_{n,1}) - \sum_n KV(n-1, t_{n-1,2})}{k(n-1, t_{n-1,2})}}. \quad (8.46)$$

Більш точно прогнозне значення τ_n визначимо (якщо $n > 3$) лінійною апроксимацією $\tau(t)$ і прогнозом на інтервал $t_{n+1,1} - t_{n,2}$:

$$\tau_{n+1} = \tau_n + [t_{n+1,1} - t_{n,2}] \cdot \frac{\tau_n - \tau_{n-1}}{t_{n,1} - t_{n-1,2}}. \quad (8.47)$$

Комп'ютерне моделювання оптимальної САК, засобу СЕНД, проведене за тих же умов, що і САК з пропорційно-інтегральним законом керування: $k_0 = 0,6$; $K_M = 0,2$; число блоків $N = 68$, число тижнів – 17, $K_r = 0,2$ (реальний учень). Результат моделювання оптимального режиму навчання наведено на рис. 8.15, 8.16. Порівнявши САК з регулятором (5) (рис. 8.15) і оптимальним регулятором (8.44) з додатковими обмеженнями на паузу T_n між заняттями ($\max T_n > T_n > \min T_n$), внаслідок того, що $t_{n+1,1}$ за виразом (8.44) коригується обмеженнями на довжину паузи, робимо такий висновок: практично за однакової кількості занять (58 і 57) у разі оптимального регулятора траєкторія накопичення рейтингу учня значно ближча до бажаної (середньоквадратична похибка 2,23).

Таким чином, за відповідної формалізації процесу навчання на основі системного підходу з відповідним ступенем адекватності є можливість автоматизувати і оптимізувати цей процес.

Є думка, що якість навчання значно зросте і наблизиться до рівня безпосереднього спілкування вчитель—учень, якщо матеріал подавати мікроблоками (30 секунд учень не відволікається) з запитаннями наприкінці кожного мікро-блоку і трьома правильними відповідями різної глибини розуміння запитання. Учень серед них вибирає (як кращу) зрозумілу для нього, а вчитель – тренажер змінює зміст наступного мікро-блоку залежно від вибраної учнем відповіді. Такий діалог з початковою і поточною мотивацією та контролем наприкінці заняття може значно поліпшити засвоєння матеріалу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления/ Под ред. Н.Д. Егунова. – М.: Изд-во МГУ им. Н.С. Баумана, 2000, 748 с.
2. Галай В.М., Сильвестров А.М. Нонісна адаптивна система стабілізації стохастичних технологічних процесів. В сб. «Системні дослідження та інформаційні технології», К.: НТ□ип.КПП», ІПСА, 2003, №1, с. 135-142
3. Гроп Д. Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979
4. Ейкхофф П. Основы идентификации систем управления. - -: Мир, 1975.
5. Ивахненко А.Г. Долгострочное прогнозирование и управление сложными системами. – К.: Техніка, 1975. – 312 с.
6. Казаков И.Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний.– М.: Наука, 1975. – 432 с.
7. Калман Р., Фалби П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971, 400 с.
8. Кашин Г.М., Федоренко И. автоматическое управление продольным движением эластичного самолета. М.: Машиностроение, 1974
9. Костюк В.И., Сильвестров А.Н. Принцип многократной адаптивности// достижения и перспективы развития тех. Кибернетики. К.: Изд-во РДИП, 1975. т.1, с.65-69
- 10.Костюк В.И., Сильвестров А.Н. Асимптотическая инвариантность многократно адаптивных систем// Теория инвариантности и ее применение. – К.: Наукова думка, 1979, с. 155-167
- 11.Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн М.: Наука, 1970, – 832 с.
12. Крамер Г. Математические методы статистики. – М. Мир, 1975
- 13.Красовский А.А.. Буков В.Н., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977
- 14.Круг Г.К., Сосулин Ю.А., Фатуев В.А. Планирование эксперимента в идентификации и экстраполяции.М.:Наука 1977.
15. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. – 280 с.
16. Любич Ю.И., Майстровский Г.Д. "О«щая теория релаксаційних процессов.- Успехи математических наук, 1970, №1, с.57-112.
17. Льюнг Л. Идентификация систем: Теория для пользователя. Пер. с англ./ Под ред. Я.З.Цыпкина. - -: Наука, 1991. -432 с.
18. Маркова Е.В., Лысенков В.Н. Комбинированные планы в задачах многофакторного эксперимента. М.: Наука, 1977
19. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М: Наука, 1979.
20. Математические основы теории автоматического управления/ Под ред. Б.К. Чемоданова. М.: высшая школа, 1977, т.1
21. Методи класичної та сучасної ТАУ: Підручник в 3-х т./Під ре□ип.М.Д. Егунова.- М.: Вид-во МГТУ ім□И.П. Баумана, 2000. – 736с.
22. Поляк Б.Т.,Цыпкин Я.З. Помехоустойчивая идентификация //Идентификация и оценка параметров системы // Труды IV Симпозиума ИФАК, препринты ИПУ.М.1976.4.1.с.190-213.

23. Пухов Г.Е., Хатиашвили Ц.С. Модели технологических процессов. Киев: Техника, 1974.- 200 с.
24. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Основы управления технологическими процессами. М.: Наука, 1980
25. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их использование. – М.: Наука, 1968
26. Самсонов В.В., Сильвестров А.Н., Зименков Д.К. Две стратегии идентификации реальных объектов // Сучасні методи, інформаційне, програмне та технічне забезпечення систем управління організаційно-технологічними комплексами. – К.: НУХТ, 2009. – с.93-94.
27. Самсонов В.В., Сильвестров А.М., Скринник О.В. Системний підхід до розробки моделі керування процесом навчання// Наукові праці Національного університету харчових технологій К.: НУХТ.- 2010 р., № 32, с. 104-106
28. Самсонов В.В., Сильвестров А.М. Ідентифікація моделі прогнозу прихованих закономірностей// Тези доповідей “Міжнародна науково-практична конф. “Новітні технології, обладн., безпека та якість харчових продуктів: сьогодення та перспективи” К.: НУХТ. - 2010, с.59-60
29. Самсонов В. В., Сильвестров А.Н. Комплексування методів ідентифікації// Збірник наукових праць «Проблеми транспорту». – К.: НТУ, 2010, с. 155-161
30. Самсонов В.В., Сильвестров А.М. Адаптивна система стабілізації параметрів технологічного процесу// Наукові праці Національного університету харчових технологій К.: НУХТ.- 2011 р., № 37, 38 с. 168-173
31. Самсонов В.В., Поворознюк Н.И., Сильвестров А.М. Моделирование процесса самостоятельного обучения с электронным тренажером// Інформаційні технології в освіті. Виїп. Херсон: ХДУ, 2008. с. 126-133
32. Самсонов В.В., Сильвестров А.М., Костіков М.П. Алгоритм адаптивного навчання в системі електронних навчально-методичних ресурсів дисципліни// Тези доповідей Міжнар. наук.-практ. конф. «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці» - Черкаси: ЧДТУ, 2012. – т.2. – с. 85-86
33. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. - М.: Мир, 1980
34. Сейдж Э.П., Мелса Дж. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974.
35. Сильвестров А.Н., Чинаев П.И. Идентификация и оптимизация автоматических систем. М.: Энергоатомиздат, 1983, 200 с.
36. Сильвестров А.Н., Самсонов В.В. Адаптация системы управления технологическим процессом// XXVI междунар. наук. конф. “Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-24)”, сб. трудов, т.6. – К.: НГТУ “КПИ”, 2011. – с.17-21
37. Сильвестров А.М., Панченко О.М. Многократно адаптивные системы идентификации. К.: "Техника", 1983, 110 с.
38. Синеглазов В.М, Сильвестров А.Н. Идентификация статических и динамических характеристик реальных объектов//Електроніка та системи управління. НАУ. 2005. №4(6), с. 80-87.

39. Сільвестров А.М., Резніченко В.М. Спосіб вимірювання аеродинамічних коефіцієнтів повздовжнього руху літаків. Патент N48566A, Бюл. N8 від 15.08.2002р.
40. Сільвестров А.М., Синеглазов В.М. Ідентифікація статистичних і динамічних характеристик реальних об'єктів// В.сб. «Електроніка та системи управління». К.: НАУ, 2006, №4.
41. Снешко Ю. И. Устойчивость и управляемость самолета. М.: Машиностроение, 1987, – 300 с.
42. Современные методы идентификации систем/ Под ред. П. Ейкхоффа – М.: Мир, 1983 – 440 с.
43. Соловников В.В., Матвеев П.С. Расчет оптимальных систем автоматического управления при наличии помех. М.: Машиностроение, 1973
44. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз. 1963
45. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series//John Wiley, 1949. - –63р.

	Стор.
Вступ	3
Глава 1. Системний погляд на задачу ідентифікації	9
1.1. Визначення системи	9
1.2. Багаторівнева декомпозиція систем.	14
1.3. Принцип узгодженості критеріїв	22
1.4. Композиція підсистем різних рівнів в єдину систему	29
Глава 2. Базова модель реальних процесів та похідні від неї моделі	33
2.1. Базова математична модель реальних процесів	33
2.2. Дискретні у часі математичні моделі, що точно або наближено відповідають базовій неперервній моделі (2.2)	36
2.3. Визначення структури нелінійного оператора f моделі (2.1) шляхом композиції локальних моделей (2.2) в глобальну	39
2.4. Моделювання і прогнозування рішення (2.11) системи (2.1) за умов відсутності інформації про відображення $\mathbf{T} \times \mathbf{T} \times \mathbf{X} \times \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbf{X}$	44
2.5. Моделювання, прогнозування і діагностика рішення (2.11) системи (2.1) за умов наявності інформації про відображення $T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$	50
Глава 3. Аналіз спрощених методів конфлюентного аналізу	56
3.1. Аналіз методу найменших квадратів в ситуації зашумленості як вихідних, так і вхідних сигналів	56
3.2. Узагальнений МНК та його практична реалізація	58
3.3. Аналіз інтегро-кореляційного критерію і метода його мінімізації (інтегрований МНК)	61
3.3.1. Сутність методу	61
3.3.2. Аналіз складових методу	63
3.3.3. Визначення максимального зсуву	66
3.3.4. Оцінка зміщення оцінки $\hat{\beta}$	69
3.3.6. Рекурентна форма обчислень	71
3.4. Метод допоміжної змінної (МДЗ)	74
3.4.1. Сутність методу	74
3.4.2. Зсув оцінок (3.72)	74
3.4.3. Коваріація оцінок (3.72)	75
Глава 4. Підвищення інформативності даних і, як наслідок, точності оцінок параметрів об'єктів, що досліджуються	76
4.1. Підвищення інформативності вибірок даних в умовах пасивного експерименту	76
4.2. Покращення збіжності	80
4.3. Підвищення інформативності вибірок даних в умовах	

активного експерименту	85
4.3.1. Теоретичне обґрунтування доцільності \square покоординатної квазідіагоналізації	85
4.3.2. Синтез тестуючи вхідних впливів на досліджуваний об'єкт	89
4.4. Метод роздільного оцінювання статичної нелінійної і динамічної лінійної складових моделі Гомерштейна	95
Глава 5. Побудова моделей детермінованих процесів, виміри яких збурено випадковими завадами	108
5.1. Моделювання, ідентифікація і прогнозування показників економіки методами спрощеного конфлюентного аналізу	108
5.2. Числове моделювання задачі активної ідентифікації параметрів дискретних динамічних систем	113
Глава 6. Єдність і розбіжність сигнальної та параметричної ідентифікації реальних об'єктів	122
6.1. Постановка задачі	122
6.2. Стратегія сигнальної ідентифікації і інваріантність адаптивного керування (приклад першого підходу)	123
6.3. Стратегія параметричної ідентифікації і (приклад оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів $\hat{\beta}$ літального апарату ЛА другого підходу)	124
Глава 7. Комплексування методів і моделей	130
7.1. Постановка завдання	131
7.2. Методика дослідження	131
Глава 8. Багаторівневі системи з ідентифікатором об'єкта керування . .	136
8.1. Системний підхід	136
8.2. Узгодження показників якості	138
8.3. Рекурентне баєсовське оцінювання вектора β	141
8.4. Ідентифікація і оптимізація параметрів технологічного процесу . .	143
8.4.1. Математична модель системи в режимі “Робота”	144
8.4.2. Математична модель системи в режимі “Навчання”	146
8.4.3. Робота системи в режимі нонусного уточнення моделі об'єкта і алгоритму керування	148
8.5. Ідентифікація і оптимізація процесу самостійного навчання з електронним тренажером	149
8.5.1. Вступ	149
8.5.2. Опис елементів системи автоматичного керування процесом навчання	150
8.5.3. Числове моделювання процесу	152
Література	158

Наукове видання

Самсонов Валерій Васильович
Сільвестров Антон Миколайович

НАРИСИ З ТЕОРІЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

Монографія

Редактор

Комп'ютерна верстка