

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Навчально-науковий інститут телекомунікаційних систем

Кафедра електронних комунікацій та Інтернету речей

«На правах рукопису»

УДК 621.391

«До захисту допущено»

В.о. завідувача кафедри

_____ Анатолій МАКАРЕНКО

« ____ » _____ 2026 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

**за освітньо-науковою програмою «Інженерія інноваційних
інформаційно-телекомунікаційних технологій та систем»**

зі спеціальності 172 «Електронні комунікації та радіотехніка»

**на тему: «Номографічний метод синтезу завадостійких кодів у каналах
зв'язку зі змінною енергетикою»**

Виконав:

Студентка II курсу, групи ЦМ-41мн

Косогор Анастасія Вікторівна _____

Керівник:

професор кафедри ЕКІР НН ІТС, д.т.н., професор,

Уривський Л.О. _____

Рецензент:

завідувач кафедри радіотехнічних систем РТФ, д.т.н., професор,

Жук С.Я. _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____

Київ – 2026 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Навчально-науковий інститут телекомунікаційних систем
Кафедра електронних комунікацій та Інтернету речей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 172 «Електронні комунікації та радіотехніка»

Освітньо-наукова програма «Інженерія інноваційних інформаційно-телекомунікаційних технологій та систем»

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. завідувача кафедри

_____ Анатолій Макаренко

«__» _____ 2026 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Косогор Анастасії Вікторівні

1. Тема дисертації «Номографічний метод синтезу завадостійких кодів у каналах зв'язку зі змінною енергетикою», науковий керівник дисертації Уривський Леонід Олександрович, науковий керівник кафедри електронних комунікацій та інтернету речей НН ІТС, д.т.н., професор, затверджені наказом по університету від «07» квітня 2026 р. № 1415-с.

2. Термін подання студентом дисертації 06.05.2026 р.

3. Об'єкт дослідження: процеси передавання цифрових сигналів у телекомунікаційних каналах зв'язку зі змінною енергетикою та наявністю завад.

4. Предмет дослідження: методи та моделі синтезу завадостійких сигнально-кодових конструкцій, а також взаємозв'язки між параметрами модуляції, кодування, ймовірністю бітової помилки та ефективністю передачі інформації.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

- 1) Проаналізувати сучасні методи підвищення завадостійкості телекомунікаційних систем.

- 2) Дослідити залежності між ймовірністю бітової помилки, відношенням сигнал/шум та параметрами багатопозиційної маніпуляції.
- 3) Визначити взаємозв'язок між параметрами завадостійкого кодування (виправна здатність, кодова відстань, швидкість кодування).
- 4) Розробити номографічний метод синтезу сигнально-кодових конструкцій.
- 5) Побудувати узагальнену номограму, що об'єднує основні параметри системи передачі.
- 6) Реалізувати програмну модель у середовищі MATLAB для дослідження роботи номограми.
- 7) Провести чисельні експерименти та оцінити ефективність запропонованого методу.
- 8) Визначити області практичного застосування розробленого підходу.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу:

1. Вступ
2. Мета
3. Актуальність
4. Об'єкт та предмет дослідження
5. Задачі дослідження
6. Опис досліджуваних блоків
7. Демонстрація результатів практичної роботи
8. Висновки до роботи

7. Орієнтовний перелік публікацій

8. Дата видачі завдання “ 01 ” вересня 2024 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Визначення з об'єктом, предметом та метою дослідження	01.09.2024 – 01.10.2024	виконано
2.	Формування першого розділу	02.10.2024 – 30.10.2024	виконано
3.	Вивчення теоретичного матеріалу по темі роботи, підготовка до практичної частини	31.10.2024 – 03.02.2025	виконано
4.	Робота над другим розділом	04.02.2025 – 31.05.2025	виконано
5.	Робота над третім розділом	01.09.2025 – 15.11.2025	виконано
6.	Робота над четвертим розділом	16.11.2025 – 18.04.2026	виконано
7.	Написання висновків до роботи	19.04.2026 – 29.04.2026	виконано
8.	Оформлення дипломної роботи	30.04.2026 – 02.05.2026	виконано

Студент

Анастасія КОСОГОР

Науковий керівник дисертації

Леонід УРИВСЬКИЙ

РЕФЕРАТ

Текстова частина дипломної роботи: 126 с., 10 рис., 2 табл., 52 джерела.

Об'єкт дослідження – процеси передавання цифрових сигналів у каналах зв'язку з обмеженим енергетичним ресурсом та змінними параметрами завадової обстановки.

Предмет дослідження – методи та алгоритми оптимізації показників надійності при використанні багатопозиційної маніпуляції в умовах фіксованого відношення сигнал/шум.

Мета роботи – підвищення надійності функціонування телекомунікаційних каналів шляхом розробки номографічного методу вибору оптимальних параметрів сигнально-кодових конструкцій за умови жорстко обмеженого енергетичного ресурсу.

У роботі проведено комплексний аналіз взаємозв'язку між параметрами багатопозиційної маніпуляції, енергетичними характеристиками каналу та показниками завадостійкості. Розглянуто сучасні математичні моделі оцінки ймовірності бітової помилки для різних типів модуляції, зокрема BPSK, QPSK та M-QAM, а також досліджено їх поведінку в умовах адитивного білого гаусового шуму.

Розроблено номографічний метод синтезу завадостійких кодів, який дозволяє інтегрувати декілька взаємопов'язаних параметрів (ймовірність помилки, відношення сигнал/шум, виправну здатність коду, кодову швидкість та ефективність передачі) в єдину графічну модель. Побудовано багатоблокову номограму, що включає п'ять взаємозв'язаних функціональних блоків, кожен з яких описує окремий аспект функціонування каналу зв'язку.

У практичній частині реалізовано алгоритми розрахунку параметрів системи у середовищі MATLAB та проведено чисельні дослідження, які підтверджують ефективність запропонованого підходу. Продемонстровано можливість визначення оптимального типу модуляції та параметрів кодування

як при заданій ймовірності бітової помилки, так і при фіксованому значенні відношення сигнал/шум.

Отримані результати дозволяють значно спростити процес проектування телекомунікаційних систем за рахунок переходу від складних аналітичних розрахунків до наочного графічного інструменту, що забезпечує швидке прийняття інженерних рішень.

Наукова новизна роботи полягає у розробці комплексного номографічного підходу до синтезу сигнально-кодових конструкцій в умовах змінної енергетики каналу, який, на відміну від існуючих методів, дозволяє одночасно враховувати енергетичні, спектральні та завадостійкісні характеристики системи.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості застосування розробленої номограми в системах адаптивної модуляції та кодування (AMC), мобільних мережах 4G/5G/6G, супутниковому зв'язку, сенсорних мережах та системах Інтернету речей, де критичним є забезпечення надійності передачі при обмеженому енергетичному ресурсі.

Ключові слова: завадостійкість, номограма, багатопозиційна маніпуляція, ймовірність бітової помилки, відношення сигнал/шум, кодування, ефективність передачі, MATLAB.

ABSTRACT

The text part of the bachelor's thesis: 126 pages, 10 figures, 2 tables, 52 references.

The object of research is the process of digital signal transmission in communication channels with limited energy resources and variable noise conditions.

The subject of research is methods and algorithms for optimizing reliability indicators when using multi-position modulation under conditions of a fixed signal-to-noise ratio.

The purpose of the work is to improve the reliability of telecommunication channels by developing a nomographic method for selecting optimal parameters of signal-code constructions under conditions of strictly limited energy resources.

The thesis presents a comprehensive analysis of the relationship between modulation parameters, channel energy characteristics, and noise immunity indicators. Modern mathematical models for evaluating the bit error rate (BER) for different modulation schemes, including BPSK, QPSK, and M-QAM, are considered, and their behavior in additive white Gaussian noise (AWGN) channels is analyzed.

A nomographic method for the synthesis of error-correcting codes is developed, which allows integrating several interrelated parameters (bit error probability, signal-to-noise ratio, error-correcting capability, coding rate, and transmission efficiency) into a unified graphical model. A multi-block nomogram consisting of five interconnected functional blocks is constructed, each describing a specific aspect of communication channel performance.

In the practical part, algorithms for system parameter calculation are implemented in the MATLAB environment, and numerical experiments are conducted to confirm the effectiveness of the proposed approach. The possibility of determining the optimal modulation scheme and coding parameters is demonstrated both for a given bit error probability and for a fixed signal-to-noise ratio.

The obtained results make it possible to significantly simplify the design process of telecommunication systems by replacing complex analytical calculations with a visual graphical tool that ensures fast engineering decision-making.

The scientific novelty of the work lies in the development of a comprehensive nomographic approach to the synthesis of signal-code constructions under conditions of variable channel energy, which, unlike existing methods, allows simultaneous consideration of energy, spectral, and noise immunity characteristics of the system.

The practical significance of the results lies in the possibility of applying the developed nomogram in adaptive modulation and coding (AMC) systems, mobile networks (4G/5G/6G), satellite communications, sensor networks, and Internet of Things (IoT) systems, where ensuring reliable transmission under limited energy resources is critical.

Keywords: noise immunity, nomogram, multi-position modulation, bit error rate, signal-to-noise ratio, coding, transmission efficiency, MATLAB.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	13
1 АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧІ ДАНИХ	15
1.1 Фундаментальний зв'язок теорій завадостійкості, інформації та кодування в сучасних телекомунікаціях.....	15
1.1.1 Еволюція концепцій теорії інформації як філософського фундаменту телекомунікацій	15
1.1.2 Фізична природа каналних спотворень та розвиток теорії завадостійкості.....	17
1.1.3 Філософія структурної надмірності: від простого виявлення до складного виправлення помилок	19
1.1.4 Парадигма жорстких енергетичних обмежень у сучасних телекомунікаційних сценаріях	22
1.1.5 Синергія теорій у концепції адаптивної модуляції та кодування (АМС)	24
1.2 Системний взаємозв'язок між параметрами багатопозиційної маніпуляції та показниками надійності в умовах фіксованого енергетичного ресурсу	26
1.2.1 Концептуальна сутність параметрів багатопозиційної маніпуляції	26
1.2.2 Геометрична інтерпретація завадостійкості та показники надійності.	27
1.2.3 Енергетичний ресурс як фундаментальний інтегруючий фактор	28
1.2.4 Взаємозв'язок параметрів у парадигмі фіксованого енергетичного ресурсу	29
1.2.5 Роль картографування сигналів (Mapping) у мінімізації втрат надійності	30
1.2.6 Формування зон ефективності та критерій оптимізації	30
1.3 Деталізація об'єкта, предмета дослідження та обґрунтування комплексу науково-практичних завдань	31
1.3.1 Формулювання та розгорнута характеристика об'єкта і предмета дослідження	32
1.3.2 Формулювання мети та завдань магістерської роботи	33

1.3.3 Методологія та інструментарій проведення дослідження	36
Висновки до розділу 1	37
2 РОЗРОБКА ТА АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОЦІНКИ	
ЗАВАДОСТІЙКОСТІ В КАНАЛАХ ЗВ'ЯЗКУ З ОБМЕЖЕНИМ	
ЕНЕРГЕТИЧНИМ РЕСУРСОМ	39
2.1 Аналітичне обґрунтування моделей оцінки ймовірності помилки для багатопозиційних сигналів.....	39
2.1.1 Базові принципи оцінки завадостійкості в каналі з адитивним білим гаусовим шумом (AWGN).....	39
2.1.2 Теоретико-ймовірнісні моделі бінарної та квадратурної фазової маніпуляції (BPSK та QPSK).....	40
2.1.3 Багатопозиційна квадратурна амплітудна маніпуляція (M-QAM) та концепція енергетичного маневру	41
2.1.4 Детальний порівняльний аналіз аналітичних моделей: Наближення Прокіса та точні формули Чо і Юна	42
2.2 Програмна реалізація та візуалізація номограм завадостійкості (Блок 1)	44
2.2.1 Структура програмного коду (Блок 1).....	44
2.2.2 Логіка візуалізації та побудови номограм.....	46
2.2.3 Аналіз графічного вузла та інженерна інтерпретація результатів.....	47
2.3 Теоретичні основи оцінки ефективності завадостійкого кодування (Блок 2)	50
2.3.1 Загальні принципи та метрики блокового кодування	51
2.3.2 Імовірнісні моделі виникнення помилок у дискретному каналі без пам'яті	51
2.3.3 Обчислювальні проблеми біноміальної моделі для довгих кодів	52
2.3.4 Зв'язок біноміального розподілу з неповною бета-функцією	53
2.3.5 Формулювання оберненої задачі для синтезу сигнально-кодових конструкцій	54
2.4 Чисельне моделювання характеристик кодових конструкцій (Блок 2)	55
2.4.1 Програмна імплементація на основі бета-функції.....	55

	10
2.4.2 Побудова та аналіз отриманих залежностей $P(t)$	58
Висновки до розділу 2	59
3 КОМПЛЕКСНА ОПТИМІЗАЦІЯ СИГНАЛЬНО-КODOVИХ КОНСТРУКЦІЙ ТА ОЦІНКА ПРОДУКТИВНОСТІ КАНАЛУ	62
3.1 Теоретичні основи взаємозв'язку кодової відстані та виправної здатності завадостійких кодів (Блок 3).....	62
3.1.1 Метрика Хеммінга та мінімальна кодова відстань	62
3.1.2 Зв'язок між кодовою відстанню та виправною здатністю	63
3.1.3 Перехід до відносних параметрів коду	63
3.1.4 Математичний базис для синтезу (Блок 3)	64
3.2 Програмна реалізація та аналіз взаємозв'язку кодової відстані і виправної здатності (Блок 3).....	64
3.2.1 Математична та алгоритмічна логіка Блоку 3	65
3.2.2 Програмна імплементація у середовищі MATLAB	65
3.2.3 Аналіз розрахункових значень відносної кодової відстані	68
3.3 Теоретичні та практичні аспекти границі Плоткіна	69
3.4 Теоретичні засади формування показників пропускнуої здатності та продуктивності сигнально-кодових конструкцій	72
3.4.1 Швидкість кодування та спектральна ефективність.....	73
3.4.2 Пропускна здатність каналу зв'язку	75
3.4.3 Продуктивність каналу з урахуванням ймовірності помилки	78
3.4.4 Інформаційна ефективність сигнально-кодових конструкцій	80
3.5 Практична реалізація блоку ефективності номограми	83
3.5.1 Постановка задачі моделювання.....	83
3.5.2 Програмна реалізація	83
3.5.3 Графічне представлення результатів	86
Висновки до розділу 3	89
4 ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ НОМОГРАФІЧНОГО МЕТОДУ СИНТЕЗУ СИГНАЛЬНО-КODOVИХ КОНСТРУКЦІЙ	92

4.1 Формування узагальненої номограми синтезу сигнально-кодових конструкцій.....	92
4.2 Дослідження роботи номограми на прикладі синтезу сигнально-кової конструкції.....	109
4.2.1 Дослід №1.....	109
4.2.2 Дослід №2.....	112
4.3 Області застосування номографічного методу синтезу сигнально-кодових конструкцій.....	116
Висновки до розділу 4	118
ВИСНОВКИ.....	121
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	123

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

AMC	Adaptive Modulation and Coding – адаптивна модуляція та кодування
AWGN	Additive White Gaussian Noise – адитивний білий гаусовий шум
BER	Bit Error Rate – ймовірність бітової помилки
CNPC	Control and Non-Payload Communications – канали керування БПЛА
Eb/N0	Відношення енергії біта до спектральної щільності потужності шуму
FEC	Forward Error Correction – пряме виправлення помилок
IoT	Internet of Things – Інтернет речей
LDPC	Low-Density Parity-Check Codes – коди з низькою щільністю перевірок
M	Позиційність маніпуляції (кількість сигнальних станів)
M-PSK	M-ary Phase Shift Keying – фазова маніпуляція
M-QAM	M-ary Quadrature Amplitude Modulation – квадратурна амплітудна маніпуляція
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying – квадратурна фазова маніпуляція
BPSK	Binary Phase Shift Keying – двійкова фазова маніпуляція
QoS	Quality of Service – якість обслуговування
SNR	Signal-to-Noise Ratio – відношення сигнал/шум
LTE	Long Term Evolution – стандарт мобільного зв'язку
5G	П'яте покоління мобільного зв'язку
6G	Шосте покоління мобільного зв'язку
MATLAB	Matrix Laboratory – середовище математичного моделювання
FER	Frame Error Rate – ймовірність помилки кадру
MIMO	Multiple Input Multiple Output – багатоканальні системи передачі

ВСТУП

Сучасний етап розвитку інфокомунікаційних технологій характеризується експоненціальним зростанням обсягів трафіку та впровадженням концепцій 5G/6G, Інтернету речей (IoT) та автономних систем. Головним викликом для телекомунікаційних мереж залишається забезпечення високої надійності передачі даних при жорсткому обмеженні енергетичного ресурсу.

Використання багатопозиційних методів маніпуляції (M-QAM, M-PSK) дозволяє значно підвищити спектральну ефективність систем. Проте, підвищення позиційності сигналу (M) неминуче призводить до зближення сигнальних точок у сузір'ї, що робить систему вразливою до адитивного білого гаусового шуму (AWGN) та завмирань. У реальних умовах функціонування мобільних та супутникових каналів зв'язку, де енергетичний потенціал передавача обмежений ємністю акумулятора або стандартами електромагнітної сумісності, виникає гостра науково-технічна суперечність: як максимізувати швидкість, не допустивши падіння надійності (коефіцієнта помилок) нижче критичної межі.

Традиційні підходи часто розглядають енергетичну та спектральну ефективність окремо. Проте для магістерської дисертації обрано шлях комплексної оптимізації, де енергетичний ресурс зафіксовано як константу, а параметри маніпуляції адаптуються для досягнення цільових показників надійності. Це дозволяє створювати адаптивні системи зв'язку, здатні динамічно підлаштовуватися під умови завадової обстановки, що є критично важливим для критичної інфраструктури та сучасних стандартів зв'язку.

Об'єкт дослідження – процеси передавання цифрових сигналів у каналах зв'язку з обмеженим енергетичним ресурсом та змінними параметрами завадової обстановки.

Предмет дослідження – методи та алгоритми оптимізації показників надійності (ймовірності помилки на біт та символ) при використанні

багатопозиційної маніпуляції (M-QAM, M-PSK) в умовах фіксованого відношення сигнал/шум.

Мета роботи – підвищення надійності функціонування каналів телекомунікаційних систем шляхом розробки методики вибору оптимальної моделі маніпуляції та її параметрів при заданих енергетичних обмеженнях.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні **завдання**:

1. Провести порівняльний аналіз сучасних методів багатопозиційної маніпуляції та їх стійкості до впливу шумів у каналі зв'язку.
2. Дослідити математичні моделі розрахунку ймовірності помилки для сигналів M-PSK та M-QAM, зокрема з використанням наближень Прокіса, Чо та Юна.
3. Розробити алгоритм розрахунку оптимальних показників надійності при фіксованому значенні відношення енергії біта до спектральної щільності потужності шуму (E_b/N_0).
4. Здійснити програмну реалізацію обчислювальних процедур у середовищі MATLAB для отримання сімейства кривих завадостійкості.
5. Побудувати та проаналізувати номограми, що дозволяють візуалізувати зони ефективного використання різних типів модуляції залежно від цільового рівня BER.
6. Сформулювати рекомендації щодо практичного застосування отриманих результатів при проектуванні адаптивних модемів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у вдосконаленні методики оцінки надійності багатопозиційних систем зв'язку, що, на відміну від існуючих, враховує жорстку фіксацію енергетичного ресурсу як визначального фактора при виборі порядку модуляції.

Практичне значення. Розроблені номограми та алгоритми можуть бути інтегровані в програмне забезпечення контролерів базових станцій для забезпечення динамічної зміни схеми модуляції (AMC – Adaptive Modulation and Coding) в режимі реального часу, що забезпечує стабільний зв'язок при зміні відстані до абонента або рівня завад.

1 АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧІ ДАНИХ

1.1 Фундаментальний зв'язок теорій завадостійкості, інформації та кодування в сучасних телекомунікаціях

Стрімкий розвиток та глобальне впровадження сучасних інфокомунікаційних мереж (включаючи архітектури п'ятого та шостого поколінь, розгалужені мережі Інтернету речей та системи автономного міжмашинного обміну даними) базується на глибокому синергетичному синтезі трьох фундаментальних наукових напрямків: теорії інформації, теорії сигналів (яка безпосередньо включає теорію завадостійкості) та теорії кодування. Ця наукова тріада утворює непорушний теоретичний каркас, що дозволяє інженерам та дослідникам проектувати системи, здатні безпомилково передавати гігантські масиви даних через фізичні середовища, які за своєю природою є вкрай нестабільними та схильними до впливу різноманітних деструктивних факторів.

Розуміння того, як ці три теорії взаємодіють між собою, є критично важливим для будь-якого дослідження, що ставить за мету оптимізацію параметрів передачі. Жодна з цих теорій, взята ізольовано, не здатна забезпечити вирішення сучасної проблеми дефіциту ресурсів. Лише їхній системний розгляд дозволяє знайти той крихкий баланс між швидкістю передачі даних, надійністю прийому та витратами енергії, який є необхідним для функціонування сучасного цифрового суспільства.

1.1.1 Еволюція концепцій теорії інформації як філософського фундаменту телекомунікацій

Основоположним каменем сучасного зв'язку є теорія інформації, основи якої були закладені в середині двадцятого століття. На відміну від класичної радіотехніки, яка зосереджувалася виключно на фізичних аспектах генерації, випромінювання та прийому електромагнітних хвиль, теорія інформації здійснила фундаментальне зрушення парадигми. Вона запропонувала розглядати процес передачі повідомлень не як суто фізичне явище

розповсюдження коливань у просторі, а як статистичний процес усунення невизначеності на приймальній стороні.

Згідно з цим підходом, джерело інформації генерує повідомлення, вибираючи їх з певної множини можливих варіантів з певними ймовірностями. Для приймача до моменту отримання сигналу існує стан невизначеності щодо того, яке саме повідомлення було відправлено. Отримання сигналу та його успішна демодуляція частково або повністю знімають цю невизначеність. Саме ця міра знятої невизначеності і є кількістю переданої інформації.

Головним і найбільш революційним концептом цієї теорії стало поняття пропускної здатності каналу. Пропускна здатність визначається як максимально можлива межа швидкості передачі корисної інформації через канал із завадами, при якій все ще існує теоретична можливість відновлення вихідного повідомлення з як завгодно малою кількістю помилок. Ця концепція встановила абсолютну межу, своєрідний "бар'єр швидкості світла" для телекомунікаційних систем, показавши, що природа накладає суворі обмеження на передачу даних [1, 2, 9].

Фундаментальні положення цієї теорії доводять, що пропускна здатність будь-якого безперервного каналу зв'язку знаходиться у складній залежності від двох ключових ресурсів: доступної смуги частот (ширини спектру) та відношення потужності корисного сигналу до загальної потужності завад, що діють у цій смузі [1, 2, 9]. Ця концептуальна залежність встановлює надзвичайно жорстку інженерну межу: принципово неможливо нескінченно збільшувати швидкість передачі даних, не вдаючись до розширення частотного діапазону або не нарощуючи енергетичний потенціал передавача по відношенню до фонового шуму.

Оскільки радіочастотний спектр є вичерпним, суворо регульованим на міжнародному рівні та надзвичайно дорогим фізичним ресурсом, екстенсивний шлях (просто збільшення ширини каналу) швидко вичерпав свій потенціал. З іншого боку, нарощування потужності сигналу стикається з жорсткими екологічними, апаратними та енергетичними обмеженнями. Саме усвідомлення

цих теоретичних меж стимулювало колосальний інтерес до інтенсивних методів використання спектру, зокрема до переходу від простих видів модуляції до складних багатопозиційних маніпуляцій, які дозволяють "пакувати" більше інформації в ту саму смугу частот [1, 2, 9].

1.1.2 Фізична природа каналних спотворень та розвиток теорії завадостійкості

Якщо теорія інформації встановлює абсолютні межі можливого, то теорія завадостійкості вивчає практичні методи та алгоритмічні засоби, що дозволяють наблизити реальні системи до цих теоретичних меж. Теорія завадостійкості формує методологічний апарат, за допомогою якого проектується архітектура приймача, здатного коректно відтворювати передані повідомлення незважаючи на катастрофічну деградацію форми фізичного сигналу під час його розповсюдження в середовищі.

Завадостійкість будь-якої телекомунікаційної системи визначається як її комплексна здатність протистояти впливу зовнішніх та внутрішніх завад і забезпечувати необхідний рівень вірності відтворення інформації (який зазвичай виражається через ймовірність виникнення помилки на рівні окремого біта або цілого символу). Для розробки ефективних методів прийому необхідно глибоко розуміти природу та класифікацію факторів, що спотворюють сигнал.

У процесі розповсюдження від антени передавача до антени приймача електромагнітне коливання піддається агресивному впливу цілого комплексу деструктивних фізичних явищ. Концептуально в теорії телекомунікацій їх поділяють на кілька великих категорій, кожна з яких вимагає специфічних методів боротьби.

Першою і найбільш фундаментальною категорією є адитивні шуми. Це флуктуаційні, хаотичні електромагнітні процеси, енергія яких безпосередньо додається (накладається) на енергію корисного сигналу. Найбільш універсальною та загальноприйнятою базовою моделлю такого впливу є білий гаусовий шум [4, 11]. Термін "білий" означає, що енергія цього шуму

рівномірно розподілена по всьому нескінченному спектру частот (аналогічно білому світлу, що містить всі кольори). Термін "гаусовий" вказує на те, що миттєві значення амплітуди цього шуму підпорядковуються нормальному закону розподілу ймовірностей. Джерелом цього шуму є фундаментальні фізичні процеси — хаотичний тепловий рух електронів у провідниках та напівпровідникових компонентах самої приймальної апаратури, а також космічне реліктове випромінювання та атмосферні розряди. Цей шум неможливо усунути принципово, оскільки він має термодинамічну природу. Він встановлює абсолютний шумовий поріг системи.

Другою, значно складнішою категорією, є мультиплікативні завади. На відміну від адитивних, вони не просто додаються до сигналу, а множаться на нього, випадковим чином змінюючи його власну амплітуду та початкову фазу. Головною причиною мультиплікативних спотворень у безпроводових мережах є явище багатопроменевого розповсюдження. Радіохвиля на своєму шляху відбивається від будівель, рельєфу місцевості, транспортних засобів, внаслідок чого до приймальної антени надходить не один сигнал, а безліч його копій. Кожна така копія долає різну відстань, а отже, приходить з різною затримкою в часі та зміненою фазою. Коли ці копії накладаються одна на одну в антені приймача, вони можуть як підсилювати одна одну (конструктивна інтерференція), так і повністю гасити (деструктивна інтерференція). Це призводить до явища завмирань (fading) — глибоких та раптових провалів рівня сигналу. Ситуація додатково ускладнюється рухом абонента, що викликає доплерівське розширення спектру [4, 11].

Теорія потенційної завадостійкості, сформульована видатними вченими минулого століття, дала концептуальну відповідь на питання, як найкращим чином приймати сигнали на тлі таких завад. Було розроблено концепцію ідеального когерентного приймача, який порівнює прийняте зашумлене коливання з усіма еталонними сигналами, які апріорно відомі приймачу, і ухвалює рішення на користь того еталону, який є "найближчим" до прийнятого у багатовимірному сигнальному просторі. Цей геометричний підхід до сигналів

дозволив абстрагуватися від їхньої фізичної природи і звести проблему завадостійкості до задачі знаходження максимальних відстаней між точками у певному математичному просторі.

Історично забезпечення високої завадостійкості базувалося на простому принципі: нарощуванні енергетики сигналу (збільшенні потужності передавача), щоб корисний сигнал завжди гарантовано та значно перевищував рівень адитивних шумів та компенсував можливі провали від завмирань. Однак у сучасних реаліях, де енергетичний ресурс є суворо лімітованою константою (особливо для автономних пристроїв), такий екстенсивний шлях неможливий. Це вимагає переходу до якісно інших методів забезпечення надійності, що базуються на інтелектуальній обробці інформації, а не на грубій силі випромінювання [4, 11].

1.1.3 Філософія структурної надмірності: від простого виявлення до складного виправлення помилок

Оскільки нескінченне підвищення потужності передавача стало концептуально та технічно неприйнятним, сучасні телекомунікаційні системи перенесли центр ваги на методи, що базуються на теорії кодування. Фундаментальний парадокс ранньої теорії інформації полягав у тому, що хоча вона математично доводила принципову можливість безпомилкової передачі при швидкостях нижче пропускну здатності каналу, вона не давала жодних вказівок на те, як саме практично побудувати таку систему зв'язку. Відповіддю на цей виклик стало створення розгалуженої теорії завадостійкості кодування.

Центральною філософською ідеєю завадостійкого кодування (відомого також як пряме виправлення помилок — Forward Error Correction, FEC) є алгоритмічно обґрунтоване та суворо регламентоване введення структурної надмірності у чистий інформаційний потік ще до того, як він буде підданий процесу маніпуляції та відправлений у фізичний радіоканал.

У класичній системі передачі кожен біт інформації є незалежним. Якщо завада в каналі перевертає стан цього біта (з одиниці на нуль або навпаки),

приймач не має жодного способу дізнатися, що сталася помилка, оскільки новий стан також є легітимним інформаційним символом. Щоб подолати цю вразливість, кодер на стороні передавача відмовляється від передачі "голих" інформаційних бітів. Замість цього, використовуючи складні математичні перетворення, він обчислює на основі інформаційних бітів додаткові, перевірочні біти, і формує розширені кодові конструкції. Ця внесена надмірність встановлює жорсткі математичні взаємозв'язки між різними елементами переданого повідомлення.

Завдяки цим взаємозв'язкам, простір дозволених кодових послідовностей стає значно меншим за загальний простір усіх можливих послідовностей. Коли завада спотворює сигнал, прийнята послідовність з високою ймовірністю виявляється "недозвеною". Це дозволяє приймачу не лише з упевненістю констатувати факт наявності спотворень (виявлення помилок), але й, спираючись на знання математичного закону, за яким вносилися надмірність, алгоритмічно визначити найбільш імовірну легітимну послідовність, що була передана. Таким чином відбувається дивовижний процес відновлення втраченої інформації (виправлення помилок) без необхідності запитувати передавач про повторну трансляцію пошкодженого блоку.

Еволюція завадостійких кодів є історією безперервного ускладнення та наближення до теоретичних меж. На початкових етапах використовувалися прості лінійні блокові коди (наприклад, коди Хеммінга або Ріда-Малера), які обробляли інформацію суворими порціями (блоками), додаючи до кожного блоку фіксовану кількість перевірочних символів. Згодом набули популярності згорткові коди, які відмовилися від блокової структури і почали обробляти потік даних безперервно, ніби "розмазуючи" вплив кожного окремого інформаційного біта на певну довжину вихідної послідовності (довжину кодового обмеження). Це дозволило ефективно боротися з поодинокими випадковими помилками.

Справжній прорив відбувся зі створенням каскадних кодових конструкцій, де два різних коди працюють послідовно, розділені спеціальним блоком — переміжником. Переміжник перемішує біти перед передачею в канал.

Якщо в каналі виникає глибоке завмирання, яке знищує цілий пакет послідовних бітів (пакетна помилка), на приймальній стороні зворотний переміжник "розсипає" ці помилки по всьому масиву даних. Таким чином, складна нездоланна пакетна помилка перетворюється на безліч дрібних одиночних помилок, з якими легко справляється внутрішній декодер.

Сучасний етап розвитку, який уможливив появу зв'язку 4G, 5G та високошвидкісного Wi-Fi, характеризується впровадженням ітеративних та графових кодів. Це так звані Турбо-коди, коди з низькою щільністю перевірок на парність (LDPC) та Полярні коди [8, 13, 15]. Їхня філософія полягає у використанні "м'яких" рішень, коли демодулятор передає декодеру не жорстке рішення ("це точно нуль" або "це точно одиниця"), а імовірнісну оцінку ("я впевнений на 80%, що це нуль"). Кілька складових декодерів багаторазово обмінюються цією м'якою інформацією, поступово уточнюючи свої оцінки в ітеративному процесі. Такі кодові структури забезпечують феноменальну здатність до відновлення інформації, працюючи практично впритул до теоретичної межі Шеннона, тобто дозволяючи здійснювати зв'язок при надзвичайно низьких рівнях відношення сигнал/шум, які раніше вважалися непридатними для використання [8, 13, 15].

Введення завадостійкого кодування не є безкоштовним з точки зору використання ресурсів. Будь-яка надмірність означає, що частина пропускну здатності каналу витрачається на передачу службових (перевірочних) бітів, зменшуючи ефективну швидкість передачі корисної інформації. Тому використання потужних кодів з низькою кодовою швидкістю вимагає розширення смуги частот (що небажано) або застосування методів маніпуляції більш високих порядків, що повертає нас до проблеми чутливості до шумів [8, 13, 15].

1.1.4 Парадигма жорстких енергетичних обмежень у сучасних телекомунікаційних сценаріях

Як було зазначено в попередніх підрозділах, класичний радіоінженерний підхід до підвищення надійності зв'язку полягав у простому нарощуванні енергетики (потужності передавача). Проте останні десятиліття характеризуються глобальною зміною цієї парадигми. Енергетичний ресурс поступово перетворився з вільної змінної на сувору константу, яка жорстко обмежує можливості проектувальників.

Ця зміна зумовлена низкою технологічних, економічних та екологічних факторів, що кардинально змінили ландшафт сучасних комунікацій. Розглянемо ключові сценарії, де фіксований енергетичний ресурс є не просто абстрактною математичною умовою, а критичною експлуатаційною реальністю.

Автономні сенсорні мережі та Інтернет речей (IoT). У концепціях "розумного міста" (Smart City), "розумного сільського господарства" та промислового IoT застосовуються мільйони мініатюрних датчиків, які збирають та передають телеметричну інформацію. Більшість з них не мають підключення до стаціонарної електромережі і живляться від невеликих вбудованих акумуляторів або систем збору енергії з навколишнього середовища (energy harvesting). Термін їхньої служби без заміни батареї має становити 5-10 років. Збільшення потужності передавача для компенсації погіршення умов у радіоканалі призведе до катастрофічно швидкого виснаження батареї і виходу всієї мережі з ладу. Тому енергетика кожного біта інформації (E_b) в таких системах розглядається як найдорожчий і строго лімітований ресурс [7, 12].

Мобільні термінали та системи супутникового зв'язку. Незважаючи на прогрес у технологіях літій-іонних акумуляторів, час автономної роботи смартфонів та планшетів залишається одним з головних критеріїв якості для користувача. Високошвидкісні стандарти передачі даних споживають значну кількість енергії, і постійна робота передавача на максимальній потужності швидко розряджає пристрій. У супутниковому зв'язку обмеження ще суворіші:

потужність бортових ретрансляторів жорстко обмежена можливостями сонячних панелей та необхідністю розсіювання тепла у вакуумі.

Безпілотні літальні апарати (БПЛА). Сучасні дрони вимагають надійних каналів зв'язку для передачі команд управління (Control and Non-Payload Communications, CNPC) та потокового відео високої роздільної здатності. Оскільки вантажопідйомність дрона є критичним фактором, використання масивних акумуляторів для забезпечення радіозв'язку є неможливим. Кожен джоуль енергії, витрачений на радіопередачу, — це джоуль, відібраний у двигунів, що прямо скорочує час та дальність польоту апарата [7, 12]. В таких умовах канал зв'язку повинен функціонувати виключно в межах суворо виділеного і незмінного енергетичного бюджету.

Екологічні ініціативи (Green Communications). Інфраструктура глобальних телекомунікаційних мереж (базові станції стільникового зв'язку, центри обробки даних, магістральні маршрутизатори) споживає колосальні обсяги електроенергії, генеруючи значний вуглецевий слід. Глобальний рух за екологізацію телекомунікацій (Green Communications) вимагає переходу від максимізації пропускної здатності за будь-яку ціну до максимізації енергоефективності. Завдання полягає у забезпеченні необхідної якості обслуговування (QoS) при мінімально можливому, а часто жорстко фіксованому на нормативному рівні, споживанні енергії [7, 12].

Внутрішньосистемні завади в щільних мережах (Interference-Limited Networks). У сучасних стільникових мережах (LTE-Advanced, 5G), особливо в міських умовах з щільною забудовою, базові станції розташовані дуже близько одна до одної і часто використовують ті самі частотні діапазони. У таких умовах підвищення потужності передавача одним абонентом для поліпшення власного зв'язку миттєво стає потужною завадою для десятків інших абонентів у сусідніх стільниках (коканална інтерференція). Рівень шуму в мережі підвищується, що змушує інших абонентів також збільшувати потужність, призводячи до колапсу загальної ємності системи. Тому управління потужністю в таких мережах

зводиться до суворого її обмеження, і надійність повинна забезпечуватися іншими методами при незмінному рівні випромінювання.

Всі ці фактори переконливо доводять, що класичний підхід до оптимізації, який передбачав вільне маніпулювання рівнем потужності сигналу для досягнення цільової надійності, є морально застарілим і не відповідає реаліям сучасної інженерної практики. Постановка задачі вимагає концептуального зсуву: енергетичний параметр (зокрема, відношення енергії біта до спектральної щільності шуму) має бути зафіксований як константа, а всі зусилля з оптимізації надійності повинні бути зосереджені на інтелектуальному виборі параметрів сигнально-кодових конструкцій [7, 12].

1.1.5 Синергія теорій у концепції адаптивної модуляції та кодування (AMC)

Оскільки середовище розповсюдження радіохвиль є глибоко нестационарним (рівень завад та завмирань змінюється мілісекунди), а енергетичний ресурс розглядається як суворо фіксований, телекомунікаційна галузь прийшла до необхідності створення архітектур, що самоналаштовуються. Результатом синергетичного об'єднання теорії інформації, оцінки завадостійкості та алгоритмів кодування стала концепція адаптивної модуляції та кодування (Adaptive Modulation and Coding, AMC).

Концепція AMC відкидає ідею використання жорстко заданих параметрів радіоінтерфейсу. Якщо система спроектована "з великим запасом" на найгірші умови каналу (використання простої модуляції та надзвичайно надлишкового кодування), то в моменти, коли канал "чистий", вона працює вкрай неефективно, марнуючи пропускну здатність. З іншого боку, якщо система налаштована на високу швидкість передачі (багатопозиційна модуляція та слабке кодування), будь-яке погіршення каналу призведе до лавиноподібного зростання помилок і повної втрати зв'язку.

Сучасна парадигма передбачає створення замкненого контуру управління на фізичному рівні. Приймальний пристрій безперервно вимірює якість

отриманого сигналу, оцінюючи поточний стан каналу зв'язку. На основі цих вимірювань він формує спеціальний індикатор якості (наприклад, Channel Quality Indicator в мережах LTE/5G) і надсилає його по зворотному каналу управління до передавача. Отримавши цю оцінку, передавач алгоритмічно приймає рішення щодо того, яку саме сигнально-кодову конструкцію використати для передачі наступного блоку даних.

Цей динамічний компроміс полягає у безперервному балансуванні між кількістю інформації, що вкладається в один фізичний символ (зміна позиційності маніпуляції M), та обсягом захисної математичної надмірності (зміна швидкості кодування). Якщо умови каналу сприятливі, система автоматично переходить на використання багатопозиційної маніпуляції вищого порядку (наприклад, з 16-QAM на 64-QAM або 256-QAM) та зменшує частку перевірочних бітів у потоці, що призводить до різкого стрибка швидкості передачі корисної інформації без зміни смуги частот та виділеної потужності.

Якщо ж абонент потрапляє в зону інтенсивних завад або віддаляється від базової станції (рівень корисного сигналу падає, а отже, фіксований енергетичний ресурс забезпечує менше відношення сигнал/шум), приймач фіксує деградацію якості. Відповідно до сигналів зворотного зв'язку, передавач миттєво знижує порядок маніпуляції (наприклад, переходить до QPSK або навіть найбільш завадостійкої BPSK) і одночасно підключає потужну кодову надмірність, де майже половина переданих бітів можуть стати перевірочними. Швидкість передачі даних при цьому відчутно падає, однак система зберігає найголовніше — безперервність та високу надійність (вірогідність) з'єднання. Навіть в умовах сильного шуму інформація продовжує надходити без помилок.

Таким чином, концепція адаптивної модуляції та кодування виступає матеріальним втіленням теоретичних розробок минулого століття. Вона дозволяє системі зв'язку гнучко "ковзати" по межі Шеннона, витискаючи максимум можливої швидкості в кожен конкретний момент часу для заданих фізичних умов. У контексті даного дисертаційного дослідження, де основним фокусом є оптимізація надійності в умовах фіксованого енергетичного ресурсу,

розробка критеріїв для такого адаптивного вибору методів багатопозиційної маніпуляції стає центральним науково-практичним завданням. Для його успішного вирішення необхідно перейти від загальних концептуальних описів до детального аналізу взаємозв'язків між конкретними параметрами сигналів, що буде здійснено в наступному підрозділі [1, 2].

1.2 Системний взаємозв'язок між параметрами багатопозиційної маніпуляції та показниками надійності в умовах фіксованого енергетичного ресурсу

Проектування сучасних телекомунікаційних мереж вимагає глибокого розуміння природи взаємодії ключових характеристик системи. Успішне функціонування будь-якого цифрового радіоканалу є результатом складного компромісу між швидкістю передавання даних, надійністю їх прийому та витратами енергії. У даному підрозділі здійснюється детальний концептуальний аналіз параметрів, що визначають ефективність багатопозиційної маніпуляції, та розкривається їхній системний взаємозв'язок. Особлива увага приділяється парадигмі фіксованого енергетичного ресурсу, яка виступає головним обмежувальним фактором у даному дослідженні [7].

1.2.1 Концептуальна сутність параметрів багатопозиційної маніпуляції

Базовим параметром, що характеризує будь-яку систему цифрового зв'язку, є позиційність маніпуляції. Цей параметр визначає кількість дискретних станів (або позицій), які може приймати фізичний сигнал протягом одного символного інтервалу. Кожен такий дискретний стан формує окрему сигнальну точку в багатовимірному просторі, а вся їхня сукупність утворює сигнальне сузір'я [3, 4].

Позиційність маніпуляції є прямою мірою спектральної ефективності системи. Вона показує, яку кількість елементарних бітів інформації можна закодувати в одному фізичному символі. Перехід від найпростіших видів маніпуляції (де один символ переносить лише один біт) до багатопозиційних

структур (де один символ може переносити десятки бітів) дозволяє радикально підвищити швидкість передачі даних без розширення смуги частот. Це є критично важливим досягненням для систем, що функціонують в умовах жорсткого дефіциту частотного ресурсу.

Однак, збільшення позиційності не є безкоштовним з інженерної точки зору. Змінюючи цей параметр, ми неминуче впливаємо на геометрію сигнального сузір'я. При багатопозиційній фазовій маніпуляції всі точки сузір'я розташовуються на одному колі, радіус якого визначається потужністю сигналу. Зі зростанням позиційності точки стають дедалі ближчими одна до одної на цьому колі. При квадратурній амплітудній маніпуляції точки утворюють двовимірну решітку, що дозволяє більш ефективно використовувати площу сигнального простору, але при збільшенні порядку маніпуляції решітка стає дедалі щільнішою [3, 4].

1.2.2 Геометрична інтерпретація завадостійкості та показники надійності

Щоб зрозуміти, як геометрія сузір'я впливає на надійність, необхідно розглянути процес прийняття рішень на стороні приймача. Приймальний пристрій ділить весь сигнальний простір на невидимі зони, кожна з яких закріплена за певною ідеальною сигнальною точкою. Ці зони називаються областями прийняття рішень. Коли фізичний сигнал проходить через канал зв'язку, адитивний шум зміщує його з ідеальної позиції. Якщо це зміщення є настільки сильним, що прийнятий сигнал перетинає межу і потрапляє в чужу область прийняття рішень, приймач фіксує помилку.

Головним показником надійності в телекомунікаціях є ймовірність помилки. Її можна розглядати на двох рівнях: ймовірність помилки на символ та ймовірність помилки на біт. Символьна помилка виникає тоді, коли приймач неправильно ідентифікує всю сигнальну точку. Бітова помилка є більш деталізованим показником, оскільки один неправильно прийнятий символ може призвести до спотворення одного, кількох або всіх бітів, які він переносив.

Саме ймовірність бітової помилки є фінальним мірилом якості каналу для кінцевого користувача.

Критичним геометричним параметром, що зв'язує позиційність маніпуляції з надійністю, є мінімальна евклідова відстань між суміжними точками сузір'я. Ця відстань визначає розмір "запасу міцності" або захисного інтервалу. Чим більша відстань між точками, тим сильніший шум потрібен для того, щоб перекинути сигнал через межу прийняття рішення. Відповідно, при збільшенні позиційності маніпуляції (ущільненні точок) ця мінімальна відстань стрімко скорочується, зони прийняття рішень звужуються, а ймовірність виникнення помилки під дією того ж самого рівня шуму експоненційно зростає [3, 4].

1.2.3 Енергетичний ресурс як фундаментальний інтегруючий фактор

Взаємозв'язок між швидкістю (позиційністю) та надійністю (ймовірністю помилки) неможливо розглядати у відриві від енергетичного ресурсу системи. В теорії зв'язку базовим параметром, що характеризує енергетику, є відношення енергії, витраченої на передачу одного біта інформації, до спектральної щільності потужності шуму. Цей безрозмірнісний показник є універсальним індикатором якості сигналу на вході приймача, незалежним від конкретної архітектури системи.

Енергія біта є складовим параметром, який безпосередньо залежить від загальної потужності передавача, часу передачі одного символу та кількості бітів у цьому символі. Шум, у свою чергу, визначається тепловими характеристиками приймальної апаратури та зовнішнім фоном. Відношення цих двох величин визначає реальний фізичний потенціал, яким володіє радіоканал для подолання спотворень.

У класичних системах зв'язку, якщо виникала потреба підвищити швидкість передачі шляхом переходу до більш високої позиційності маніпуляції, інженери просто збільшували енергетику каналу (підвищували потужність передавача). Це дозволяло фізично "розсунути" сигнальні точки в

просторі, компенсуючи їхнє геометричне ущільнення і зберігаючи захисну відстань між ними на безпечному рівні. Тобто, надійність підтримувалася за рахунок впливання додаткової енергії [8, 10].

1.2.4 Взаємозв'язок параметрів у парадигмі фіксованого енергетичного ресурсу

Специфіка даного дисертаційного дослідження полягає у відмові від парадигми безмежного нарощування потужності. Як було обґрунтовано раніше, сучасні технологічні реалії вимагають розглядати енергетичний ресурс як сувору, незмінну константу [7]. Це кардинально змінює характер взаємозв'язків між системними параметрами.

Коли відношення енергії біта до шуму жорстко зафіксовано, загальний обсяг сигнального простору (його зовнішні межі) стає незмінним. У таких умовах зміна позиційності маніпуляції перетворюється на гру з нульовою сумою між швидкістю та надійністю. Якщо ми вирішуємо передавати більше інформації в одному символі (збільшуємо позиційність), ми змушені вписувати нові сигнальні точки у той самий обмежений обсяг простору. Це невідворотно призводить до критичного зменшення відстані між точками.

Відповідно, при фіксованому енергетичному ресурсі, позиційність маніпуляції та ймовірність помилки стають жорстко пов'язаними, взаємовиключними параметрами [8, 10]. Кожен крок у бік збільшення спектральної ефективності супроводжується стрімким падінням завадостійкості. Система стає екстремально чутливою навіть до незначних шумових флуктуацій. І навпаки, єдиним способом підвищити надійність в умовах сильних завад, не маючи змоги додати потужність, є свідоме зниження позиційності маніпуляції — зменшення кількості точок у сузір'ї для розширення захисних зон між ними.

1.2.5 Роль картографування сигналів (Mapping) у мінімізації втрат надійності

Аналізуючи зв'язок між показниками надійності, необхідно відокремити ймовірність символної помилки від ймовірності бітової помилки. Цей зв'язок не є лінійним і суттєво залежить від того, за яким правилом двійкові біти призначаються конкретним фізичним сигнальним точкам у сузір'ї. Цей процес відомий як картографування або мапінг.

У випадку випадкового або послідовного картографування, сусідні точки в сузір'ї можуть відрізнятися на кілька бітів одночасно. Оскільки в умовах гаусового шуму найбільш імовірною помилкою є сплутування переданої точки з її найближчим сусідом, така символна помилка призведе до множинних бітових помилок, катастрофічно знижуючи загальну надійність каналу.

Для оптимізації цього взаємозв'язку застосовується спеціалізоване кодування, при якому сусідні точки у просторі відрізняються лише одним бітом у своїй двійковій послідовності. Завдяки такому підходу, найбільш імовірна помилка демодулятора (хибний вибір сусідньої точки) генерує лише одну бітову помилку, незалежно від того, скільки всього бітів містив символ. Цей архітектурний прийом є фундаментальним, оскільки він дозволяє мінімізувати вплив зниження символної надійності (при зростанні позиційності) на фінальну ймовірність бітової помилки, забезпечуючи більш плавний та передбачуваний характер деградації зв'язку [3, 4].

1.2.6 Формування зон ефективності та критерій оптимізації

Системний аналіз описаних взаємозв'язків підводить до головної концептуальної ідеї оптимізації: оскільки при фіксованому енергетичному ресурсі неможливо одночасно максимізувати і швидкість, і надійність, завдання інженера полягає у пошуку точки оптимального компромісу для поточного стану каналу.

Цей пошук здійснюється шляхом встановлення порогового показника надійності. Для кожного типу сервісу існують жорсткі вимоги до максимально

допустимої ймовірності бітової помилки, перевищення якої робить послугу неякісною або неможливою. Цей поріг є головним критерієм оптимізації.

Враховуючи, що енергетичний ресурс зафіксовано, кожному рівню шуму в каналі відповідає певне доступне відношення енергії до шуму. Для кожного такого рівня існує лише одна конкретна позиційність маніпуляції, яка здатна забезпечити максимальну спектральну ефективність, не перетинаючи при цьому встановлений поріг надійності. Це формує так звані "зони ефективності" для різних видів модуляції [8, 10]. Перетин кордону такої зони вимагає негайного адаптивного перемикавання системи на інший порядок маніпуляції.

Візуалізація цих багатовимірних взаємозв'язків є ключем до створення ефективних алгоритмів управління радіоресурсами. Саме тому в подальших розділах даної роботи цей якісний системний аналіз буде конвертований у кількісні оцінки, що стануть підґрунтям для побудови номограм завадостійкості — зручного та наочного інструментарію для визначення оптимальних параметрів системи в режимі реального часу.

Підсумовуючи, можна стверджувати, що параметри телекомунікаційної системи утворюють замкнений контур. Фіксація енергетичного ресурсу перетворює цей контур на систему з жорсткими обмеженнями, де будь-яка спроба підвищити інформаційну ємність неминуче оплачується зниженням надійності. Розуміння цієї концептуальної закономірності є необхідною передумовою для формулювання предмета, об'єкта та завдань подальшого дисертаційного дослідження [7].

1.3 Деталізація об'єкта, предмета дослідження та обґрунтування комплексу науково-практичних завдань

Після здійснення концептуального аналізу фундаментальних положень теорії інформації, завадостійкості та виявлення системних взаємозв'язків між параметрами багатопозиційної маніпуляції в умовах обмеженого енергетичного ресурсу, виникає об'єктивна необхідність у чіткій формалізації подальшого наукового пошуку. У даному підрозділі здійснюється логічна декомпозиція

загальної проблематики, визначаються межі дослідження через формулювання об'єкта та предмета, встановлюється головна мета та розгортається комплекс завдань, що слугуватимуть дорожньою картою для наступних розділів магістерської дисертації. Також наведено узагальнені висновки до всього першого розділу.

1.3.1 Формулювання та розгорнута характеристика об'єкта і предмета дослідження

Для забезпечення високого академічного рівня та системності підходу, необхідно чітко розмежувати загальну сферу, в якій лежить проблема (об'єкт), та той конкретний аспект цієї сфери, на який безпосередньо спрямований науковий фокус магістерської роботи (предмет).

Об'єктом дослідження виступають процеси передавання цифрових сигналів у каналах зв'язку з обмеженим енергетичним ресурсом та змінними параметрами заводової обстановки.

Вибір саме такого об'єкта є стратегічно обґрунтованим. Сучасна інфокомунікаційна інфраструктура є надзвичайно складною багаторівневою архітектурою. Однак будь-які алгоритми вищих рівнів (маршрутизація, управління сесіями, криптографічний захист) втрачають сенс, якщо на базовому, фізичному рівні сигнал зазнає невідворотних спотворень. Розглядаючи процеси передавання цифрових сигналів, дослідження фокусується на першоджерелі формування надійності — процесі взаємодії електромагнітного коливання з фізичним середовищем та апаратурою приймача. Жорстке обмеження енергетичного ресурсу, введене в характеристику об'єкта, відсікає тривіальні шляхи вирішення проблеми (шляхом нарощування потужності випромінювання) і фокусує увагу на системах, де енергоефективність є критичним експлуатаційним фактором [7, 12]. Змінність параметрів заводової обстановки підкреслює динамічний характер середовища, вимагаючи від системи не статичних, а адаптивних реакцій.

Предметом дослідження визначено методи та алгоритми оптимізації показників надійності при використанні багатопозиційної маніпуляції в умовах фіксованого відношення сигнал/шум.

Предмет дослідження є логічним звуженням об'єкта до конкретного інструментарію та метрик. Якщо об'єкт — це процеси взагалі, то предмет — це конкретні способи впливу на ці процеси. Оптимізація показників надійності (зокрема, мінімізація ймовірності бітової помилки) є центральним завданням. Предмет чітко вказує на те, що інструментом оптимізації виступають параметри багатопозиційної маніпуляції (переходи між різними позиціями, наприклад, базовими фазовими чи складними квадратурними амплітудними маніпуляціями). Найважливішою частиною визначення предмета є умова "фіксованого відношення сигнал/шум". Саме вона задає рамки оптимізаційної задачі, перетворюючи її з класичного пошуку необхідної потужності на інтелектуальний пошук найкращої сигнальної структури у вже заданих, незмінних енергетичних рамках [7].

1.3.2 Формулювання мети та завдань магістерської роботи

Виходячи з протиріччя між необхідністю підвищення спектральної ефективності та неминучим падінням завадостійкості в умовах фіксованої енергетики, формулюється головна мета дослідження.

Мета роботи — підвищення надійності функціонування телекомунікаційних каналів шляхом розробки та обґрунтування комплексної методики вибору оптимальної моделі багатопозиційної маніпуляції та її параметрів за умови жорстко заданих енергетичних обмежень.

Ця мета носить виражений науково-прикладний характер. Вона не обмежується лише теоретичним аналізом (що є характерним для фундаментальних досліджень), а спрямована на створення конкретного, практично цінного результату — методики вибору. Підвищення надійності виступає головним критерієм успішності досягнення мети. Досягнення цієї мети дозволить інженерам та проектувальникам телекомунікаційного

обладнання створювати більш ефективні алгоритми управління радіоресурсами, здатні підтримувати безперервність зв'язку без перевитрат енергії акумуляторних батарей мобільних терміналів чи сенсорних вузлів.

Для досягнення поставленої мети необхідний послідовний, системний рух від теорії до практики. Цей рух розбивається на логічно пов'язані етапи — завдання дослідження. Кожне завдання є необхідним кроком, а їх сукупність формує достатню умову для вирішення проблеми.

- *Завдання 1. Проведення системного порівняльного аналізу сучасних методів багатопозиційної маніпуляції та виявлення їх вразливостей в умовах стаціонарних завод.* Це завдання є теоретичним фундаментом роботи. Воно передбачає не просто перелік існуючих технологій (від простих двопозиційних до складних багатопозиційних), а глибокий якісний розбір архітектури сигнальних сузір'їв. Необхідно проаналізувати, як саме збільшення спектральної ефективності впливає на звуження захисних зон між сигнальними точками. Результатом виконання цього завдання є чітке концептуальне обґрунтування того, чому класичні методи підвищення надійності (шляхом нарощування енергії) вичерпали себе, і чому потрібен новий, адаптивний підхід.
- *Завдання 2. Дослідження та адаптація математичних моделей оцінки імовірнісних характеристик сигнально-кодових конструкцій.* Оскільки фізичні експерименти з реальним обладнанням є дорогими та обмеженими у варіативності, дослідження повинно спиратися на надійний математичний апарат. Дане завдання полягає у виборі та адаптації аналітичних моделей, здатних з високою точністю описувати поведінку різних видів маніпуляції в шумах. Планується використання передових теоретичних наближень (зокрема, розробок таких дослідників як Дж. Прокіс, Чо та Юн). Завдання вимагає не просто застосування готових формул, а їх глибокого розуміння: які допущення лежать в їх основі, для яких позиційностей вони є найбільш точними, і як вони

можуть бути адаптовані для розрахунку показників надійності саме при фіксованому енергетичному ресурсі каналу [3, 5, 6].

- *Завдання 3. Розробка оптимізаційного алгоритму динамічного вибору параметрів радіоінтерфейсу.* Це ключове завдання теоретичної частини дисертації. На основі математичних моделей необхідно створити алгоритм, що інвертує класичну задачу. Замість того, щоб шукати енергію для досягнення цільової надійності, алгоритм повинен приймати на вхід фіксоване значення енергетичного ресурсу та пороговий рівень допустимої помилки, а на виході видавати максимально можливий порядок багатопозиційної маніпуляції. Цей алгоритм має стати ядром логіки майбутніх систем адаптивної модуляції, дозволяючи системі самостійно визначати межі своїх можливостей у кожному мить часу [10, 14].
- *Завдання 4. Здійснення програмно-алгоритмічної реалізації розроблених моделей у середовищі комп'ютерного моделювання.* Будь-яка теоретична розробка потребує ретельної верифікації. У рамках цього завдання планується перенесення математичних моделей та оптимізаційного алгоритму в спеціалізоване середовище інженерних розрахунків (у даній роботі, MATLAB). Метою є створення програмного комплексу, здатного симулювати поведінку телекомунікаційної системи при сотнях тисяч різних комбінацій вхідних параметрів. Завдання полягає у генеруванні масивів статистичних даних, побудові сімейств кривих завадостійкості та оцінці адекватності теоретичних розрахунків шляхом перехресного порівняння результатів, отриманих за різними аналітичними моделями.
- *Завдання 5. Побудова та системний аналіз номограм завадостійкості як інструменту візуальної оптимізації.* Величезні масиви цифрових даних, отриманих під час моделювання, складні для сприйняття інженером-проектувальником. Тому дане завдання передбачає розробку інноваційного візуального інструментарію — багатокритеріальних номограм. Номограми повинні графічно відображати взаємозв'язок між надійністю, енергетичним ресурсом та позиційністю маніпуляції в

єдиному координатному просторі. Завдання вимагає виявлення на цих графіках так званих "зон ефективності" — точок перетину, де система повинна здійснювати перемикання з одного виду маніпуляції на інший. Ці номограми є головним науково-прикладним продуктом дослідження.

- *Завдання 6. Формулювання практичних рекомендацій щодо інтеграції отриманих результатів у реальні телекомунікаційні протоколи.* Фінальне завдання спрямоване на конвертацію отриманих графіків та алгоритмів у конкретні інженерні вказівки. Необхідно описати, як саме розроблені номограми та алгоритмічна логіка можуть бути імплементовані в мікропрограмне забезпечення контролерів базових станцій, модемів автономних сенсорів або терміналів мобільного зв'язку для реалізації повноцінного адаптивного управління радіоресурсами.

1.3.3 Методологія та інструментарій проведення дослідження

Для виконання поставлених завдань обрано комплексну методологію, що поєднує методи системного аналізу, теорії інформації, статистичної радіотехніки та комп'ютерного імітаційного моделювання.

Теоретична частина роботи спирається на методи математичного аналізу та теорії ймовірностей, які необхідні для роботи зі складними аналітичними моделями оцінки надійності сигнально-кодових конструкцій. Системний підхід застосовується для виявлення зв'язків між розрізненими параметрами каналу зв'язку та їх об'єднання в єдиний оптимізаційний критерій.

Практична частина та верифікація результатів здійснюватиметься з використанням сучасних інструментальних засобів, зокрема середовища високопродуктивних обчислень та моделювання MATLAB. Цей вибір зумовлений його потужним математичним апаратом для обробки матриць, наявністю спеціалізованих пакетів розширення для телекомунікацій, а також неперевершеними можливостями багатовимірної візуалізації даних. Використання MATLAB дозволить перевести абстрактні математичні формули в площину реальних інженерних графіків, забезпечуючи високу вірогідність та

наочність отриманих результатів, що є критично важливим для створення фінальних номограм.

Висновки до розділу 1

Перший розділ магістерської дисертації присвячено концептуальному обґрунтуванню фундаментальної проблеми сучасних телекомунікаційних мереж — забезпечення високої надійності передачі інформації в умовах стрімкого зростання швидкостей та критичного виснаження доступних ресурсів.

1. На основі глибокого аналізу еволюції інфокомунікаційних технологій та положень теорії інформації доведено, що класична парадигма екстенсивного розвитку зв'язку остаточно вичерпала себе. Нарощування пропускнуої здатності неможливо забезпечити простим розширенням смуги частот через їхню обмеженість. Водночас, компенсація зниження надійності шляхом лінійного збільшення потужності передавача стала технічно та екологічно неприйнятною в епоху автономних сенсорних мереж, Інтернету речей та жорстких вимог до енергозбереження. Це актуалізувало перехід до парадигми проектування систем в умовах фіксованого та суворо лімітованого енергетичного ресурсу [7, 12].

2. Досліджено системний взаємозв'язок між ключовими параметрами цифрової маніпуляції. Встановлено, що підвищення спектральної ефективності (позиційності маніпуляції) неминуче призводить до геометричного ущільнення сигнального сузір'я. При фіксації енергетичного ресурсу це викликає критичне звуження захисних відстаней між сигнальними точками. Як наслідок, позиційність маніпуляції та завадостійкість (надійність) вступають у гостре протиріччя, перетворюючись на взаємовиключні параметри. Будь-яка спроба передати більше інформації в одному символі експоненційно підвищує вразливість системи до впливу адитивних гаусових шумів та каналних завмирань [4, 11].

3. Обґрунтовано, що вирішення даного протиріччя лежить у площині інтелектуалізації фізичного рівня мережі, зокрема через впровадження систем адаптивної модуляції та кодування. Здатність системи безперервно відстежувати

стан каналу та динамічно знаходити оптимальний баланс між швидкістю передачі та рівнем захисної надмірності є єдиним дієвим механізмом забезпечення надійності без залучення додаткової енергії. Важливу роль у цьому процесі відіграють алгоритми картографування сигналів, що мінімізують розмноження помилок при демодуляції [3, 4].

4. Спираючись на проведений теоретичний аналіз, здійснено чітку формалізацію подальшого наукового дослідження. Визначено об'єкт дослідження — процеси передавання цифрових сигналів, та предмет — алгоритми оптимізації надійності багатопозиційної маніпуляції. Сформульовано амбітну мету роботи, що полягає у розробці комплексної методики вибору оптимальних параметрів адаптивного радіоінтерфейсу. Для досягнення цієї мети розроблено детальну дорожню карту у вигляді шести взаємопов'язаних науково-практичних завдань, що охоплюють шлях від математичного моделювання за допомогою передових аналітичних апаратів до програмної реалізації у середовищі MATLAB та створення інженерних номограм.

Сформована в даному розділі теоретико-методологічна база є повною, системно несуперечливою і створює міцний науковий фундамент. Вона дозволяє здійснити обґрунтований перехід до другого розділу дисертації, де якісний концептуальний аналіз буде переведено в площину строгих математичних моделей розрахунку імовірнісних характеристик сигнально-кодових конструкцій.

2 РОЗРОБКА ТА АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОЦІНКИ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ В КАНАЛАХ ЗВ'ЯЗКУ З ОБМЕЖЕНИМ ЕНЕРГЕТИЧНИМ РЕСУРСОМ

2.1 Аналітичне обґрунтування моделей оцінки ймовірності помилки для багатопозиційних сигналів

Сучасні телекомунікаційні системи функціонують в умовах постійно зростаючих вимог до якості передачі інформації, зокрема до зниження ймовірності помилок, забезпечення стабільної пропускну здатності та адаптації до нестабільного середовища передачі. Одним із ключових факторів, що впливають на надійність інформаційного обміну, є змінна енергетика сигналу в каналі зв'язку, тобто непостійне відношення сигнал/шум (SNR), що є типовим для систем з фіксованим енергетичним ресурсом. У цьому підрозділі детально розглядаються математичні моделі визначення ймовірності бітової помилки (BER) для основних видів маніпуляції (BPSK, QPSK, 16-QAM, 64-QAM) та проводиться їх глибокий теоретичний аналіз.

2.1.1 Базові принципи оцінки завадостійкості в каналі з адитивним білим гаусовим шумом (AWGN)

В основі функціонування будь-якого цифрового каналу зв'язку лежить процес перетворення дискретних інформаційних повідомлень у безперервні фізичні сигнали. Оцінка завадостійкості багатопозиційних систем маніпуляції базується на розрахунку ймовірності того, що під дією адитивного білого гаусового шуму вектор прийнятого сигналу вийде за межі відповідної області прийняття рішення у сигнальному просторі [3, 4, 18]. Фундаментальним показником якості є ймовірність бітової помилки (BER, P_b), яка безпосередньо залежить від відношення енергії на біт (E_b) до спектральної щільності потужності шуму (N_0). Відношення енергії до шумової спектральної щільності (часто позначається як h^2) можна представити у розгорнутому вигляді:

$$h^2 = \frac{E_s}{N_0} = \frac{P_s T_s}{N_0} = \frac{P_s}{N_$$

де P_S – потужність корисного сигналу; T_S – протяжність елементу сигналу, обернено пропорційну швидкості передавання $V_C = 1/T$ за умов $V_C = \Delta F$; ΔF – смуга частот в каналі передавання; $P_{ш}$ – потужність шуму.

Математична модель каналу з AWGN передбачає, що шум є стаціонарним випадковим процесом з рівномірною спектральною щільністю і нормальним (гаусовим) розподілом амплітуд [18]. В ідеальному каналі з AWGN ймовірність помилки визначається інтегралом ймовірності переходу вектора сигналу за межі області правильного прийому. Для аналізу завадостійкості традиційно використовують Q-функцію (хвостову ймовірність стандартного нормального розподілу) або еквівалентну їй функцію Лапласа та додаткову функцію помилок $\text{erfc}(x)$. Ключовим параметром у цих моделях виступає саме функція Лапласа, яка описує площу "хвоста" нормального розподілу ймовірностей [3, 19].

Зв'язок між Q-функцією та функцією помилок (error function) визначається співвідношеннями, які широко використовуються в алгоритмічних реалізаціях обчислень:

$$Q(x) = \frac{1}{2} * \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.2)$$

$$\text{erfc}(x) = 2Q(x\sqrt{2}) \quad (2.3)$$

Цей апарат є абсолютно необхідним для подальшого аналітичного конструювання моделей позиційної маніпуляції та переходу до програмної реалізації оптимізаційних номограм.

2.1.2 Теоретико-ймовірнісні моделі бінарної та квадратурної фазової маніпуляції (BPSK та QPSK)

Для бінарної фазової маніпуляції (BPSK) розрахунок є найбільш прозорим і математично однозначним. Сигнальне сузір'я BPSK містить лише дві точки, розташовані на осі абсцис в протифазі (наприклад, з фазами 0 та π

Відповідно до класичної радіотехнічної теорії (модель Л. Фінка), точне значення ймовірності помилки для BPSK визначається через інтеграл ймовірності та залежить виключно від відношення сигнал/шум [3, 19]:

$$p_{b\ M-PSK} < 1 - F\left(\sqrt{2h^2} \sin \frac{\pi}{m}\right) \quad (2.4)$$

Ця аналітична форма не є наближенням — вона забезпечує абсолютну точність у всьому діапазоні значень E_b/N_0 і слугує еталоном для порівняння завадостійкості багатопозиційних систем.

Розглядаючи квадратурну фазову маніпуляцію (QPSK), її математична модель базується на представленні як двох ортогональних піднесучих, кожна з яких модулюється незалежними бінарними потоками за законом BPSK. Оскільки процеси в синфазному (I) та квадратурному (Q) каналах ортогональні, а гаусові шумові компоненти в цих каналах є статистично незалежними, то ймовірність бітової помилки для QPSK повністю збігається з BPSK при однаковому відношенні енергії біта до спектральної щільності шуму [18].

Проте, суттєвою відмінністю є спектральна ефективність: QPSK передає два біти інформації за один символний інтервал. Енергія символу QPSK становить $E_s = 2E_b$. При декодуванні приймач приймає рішення щодо кожного біта незалежно, що пояснює збереження завадостійкості на рівні BPSK при дворазовому виграші у швидкості передачі або смузі пропускання.

2.1.3 Багатопозиційна квадратурна амплітудна маніпуляція (M-QAM) та концепція енергетичного маневру

У сучасних високошвидкісних мережах стандартом де-факто є використання сигналів M-QAM, оскільки вони забезпечують високу спектральну ефективність [5, 18]. При фіксованому енергетичному ресурсі системи зв'язку перехід до багатопозиційної маніпуляції (зок

передачі двійкових даних (біт/с), тривалість одного символу зростає пропорційно k , що еквівалентно накопиченню енергії. Зв'язок між середньою енергією символу та енергією одного біта виражається як $E_s = k * E_b$. Відповідно, приріст середньої енергії на символ (у децибелах) можна розрахувати за логарифмічною шкалою [7, 10].

Оскільки QAM-сигнал можна математично представити як дві незалежні багатопозиційні амплітудно-маніпульовані послідовності (M-PAM) в квадратурних каналах з рівною кількістю рівнів $\sqrt{M}$, розрахунок імовірності символної помилки P_s часто зводиться до аналізу одновимірних сузір'їв [5, 18]. Однак, на відміну від M-PSK, сигнальні точки M-QAM розташовані у вигляді прямокутної решітки, і їх енергія не є постійною. Точки на краях сузір'я мають значно більшу енергію, ніж точки поблизу початку координат.

Зі збільшенням позиційності M при фіксованій середній потужності сигналу евклідова відстань між сусідніми точками стрімко зменшується. Це призводить до підвищеної чутливості системи до впливу завад. Тому точний розрахунок імовірності бітової помилки вимагає врахування не лише імовірності помилкового прийому символу, а й структури кодування (відображення бітів у символи), де найважливішу роль відіграє кодування Грея [18]. Даний вид кодування мінімізує кількість помилкових бітів при помилковій ідентифікації сусіднього символу — ймовірність помилки в кілька бітів стає нехтовно малою порівняно з імовірністю помилки в один біт.

2.1.4 Детальний порівняльний аналіз аналітичних моделей: Наближення Прокіса та точні формули Чо і Юна

Для розрахунку завадостійкості M-QAM традиційно використовується добре відома в літературі аналітична модель Дж. Прокіса [3, 19]. Дане наближення базується на допущенні, що при достатньо високому відношенні сигнал

найближчими сусідами генерує рівно одну бітову помилку в кодовому слові [18].

Формула Прокіса для ймовірності бітової помилки M-QAM має вигляд:

$$p_{b \text{ QAM}} = \frac{4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{3}{M-1}}h^2}^{\infty} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right) du \quad (2.5)$$

Хоча модель Прокіса є надзвичайно зручною для інженерних розрахунків і забезпечує адекватну точність при високих значеннях SNR (вище 10-12 дБ), її застосування в умовах низької енергетики (що є предметом даного дослідження) призводить до суттєвих методичних похибок. В умовах сильних завад, дисперсія шуму стає сумірною з евклідовою відстанню не лише до сусідніх, але й до більш віддалених точок сигнального сузір'я. Отже, припущення про "найближчих сусідів" та генерацію лише однієї бітової помилки перестає виконуватися, і наближення Прокіса починає переоцінювати надійність каналу (тобто занижувати розрахункове значення P_b).

Аналітична модель К. Чо та Д. Юна (Cho & Yoon)

Для подолання цих недоліків і побудови високоточних номограм для систем з обмеженим енергетичним ресурсом доцільно використовувати точний аналітичний вираз, розроблений К. Чо і Д. Юном. Ця математична модель враховує всі можливі переходи між точками квадратного сигнального сузір'я M-QAM, з урахуванням точної кількості бітових помилок для кожного переходу при застосуванні рефлексного коду Грея [16, 17, 19].

Точний вираз для BER у квадратному M-QAM (де $M = 2^k$, а k — парне) формулюється як сума по кожному з бітів у символі, усереднена по всіх k бітах:

$$p_{b \text{ M-QAM$$

при оцінці енергетичних виграшів кодування та дозволяє об'єктивно розраховувати необхідний рівень E_b/N_0 для забезпечення цільових показників якості $P_b = \{10^{-2}; 10^{-6}\}$ [19].

2.2 Програмна реалізація та візуалізація номограм завадостійкості (Блок 1)

Для практичної перевірки теоретичних залежностей, які були детально розглянуті у попередньому підрозділі, а також для створення зручного інженерного інструментарію вибору параметрів маніпуляції, розроблено спеціалізований програмний модуль. Розробка здійснювалась у середовищі MATLAB, що забезпечує високу точність обчислень та має потужний вбудований інструментарій для розв'язання нелінійних рівнянь і візуалізації результатів [7, 19]. Логіка роботи створеного модуля базується на ітераційному обчисленні необхідного рівня енергетики для заданих значень цільової надійності каналу.

2.2.1 Структура програмного коду (Блок 1)

Програмна імплементація першого блоку алгоритму складається з кількох послідовних етапів: ініціалізації цільових параметрів, циклічного обчислення енергетики для різних видів маніпуляції та форматування масивів для подальшої візуалізації. Нижче наведено базовий фрагмент коду MATLAB, який реалізує необхідну залежність:

```
% Залежність Eb/N0 від ймовірності помилки для різних модуляцій
clc; clear; close all;

% Вихідні дані
Pb = [1e-2 1e-3 1e-4 1e-5 1e-6];
M_list = [2 4 16 64]; % BPSK, QPSK, 16QAM, 64QAM
bits_per_symbol = log2(M_list);
labels = {'BPSK (1)', 'QPSK (2)', '16-QAM (4)', '64-QAM (6)'};

EbN0_dB = zeros(length(Pb), length(M_list));
Qinv = @(x) sqrt(2)*erfcinv(2*x);
```

```

% Обчислення за формулою Прокіса
for j = 1:length(M_list)
    M = M_list(j);
    a = 3*log2(M)/(M-1);
    for i = 1:length(Pb)
        Pb_i = Pb(i);
        EbN0 = (Qinv(Pb_i * log2(M) / (4*(1 - 1/sqrt(M))))^2) / a;
        EbN0_dB(i, j) = 10*log10(EbN0);
    end
end

%% Побудова номограми
figure('Color','w');
hold on; grid on;

colors = {'r','b','g','m'};

for j = 1:length(M_list)
    scatter(repmat(bits_per_symbol(j), length(Pb), 1), log10(Pb),
...
        50, colors{j}, 'filled');
    for i = 1:length(Pb)
        text(bits_per_symbol(j)+0.05, log10(Pb(i)), ...
            sprintf('%.1f', EbN0_dB(i,j)), ...
            'Color', colors{j}, 'FontSize', 10, 'FontWeight',
'bold');
    end
end

% Налаштування осей
set(gca, 'YDir', 'reverse');
yticks(log10([1e-6 1e-5 1e-4 1e-3 1e-2]));
yticklabels({'10^{-6}','10^{-5}','10^{-4}','10^{-3}','10^{-2}'});
xlim([0.5 6.5]);
xticks(bits_per_symbol);
xticklabels(labels);

xlabel('Кількість бітів на символ (модуляція)');

```

```
ylabel('Ймовірність бітової помилки P_b');
title('Номограма з лінійною шкалою h^2');
box on;
```

Цей код ефективно формує графік, де кожен елемент є точним розв'язком задачі знаходження мінімальної енергетики для конкретної пари "цільова надійність — тип маніпуляції" [7].

2.2.2 Логіка візуалізації та побудови номограм

Отриманий масив числових даних сам по собі не забезпечує достатньої наочності для прийняття інженерних рішень. Тому другою частиною програмного модуля є скрипт візуалізації, який трансформує матрицю результатів у багатовимірну номограму. Відмінністю розробленої номограми від класичних кривих завадостійкості (де по осі абсцис відкладається енергетика) є зміна системи координат для кращого відображення "енергетичного маневру" [19].

На осі абсцис розробленої номограми відкладено спектральну ефективність системи (кількість бітів на символ, k). Ця вісь дискретна і містить значення 1, 2, 4 та 6, що відповідають досліджуваним модуляціям. На осі ординат відкладено десятковий логарифм імовірності бітової помилки $\log_{10}(P_b)$. Таким чином, горизонтальні лінії на графіку відповідають ізолініям однакової надійності (наприклад, -2, -3, -4 тощо) [7, 10].

Найбільш інформативним елементом номограми є текстові мітки, якими позначається кожна вузлова точка. Ці мітки містять обчислене значення E_b/N_0 у децибелах. Така тривимірна репрезентація (осі X, Y та значення в точках) дозволяє інженеру миттєво зчитувати всі необхідні параметри.

Графік залежності ймовірності помилки від спектральної ефективності та енергетичного потенціалу каналу показано на рис. 2.1.

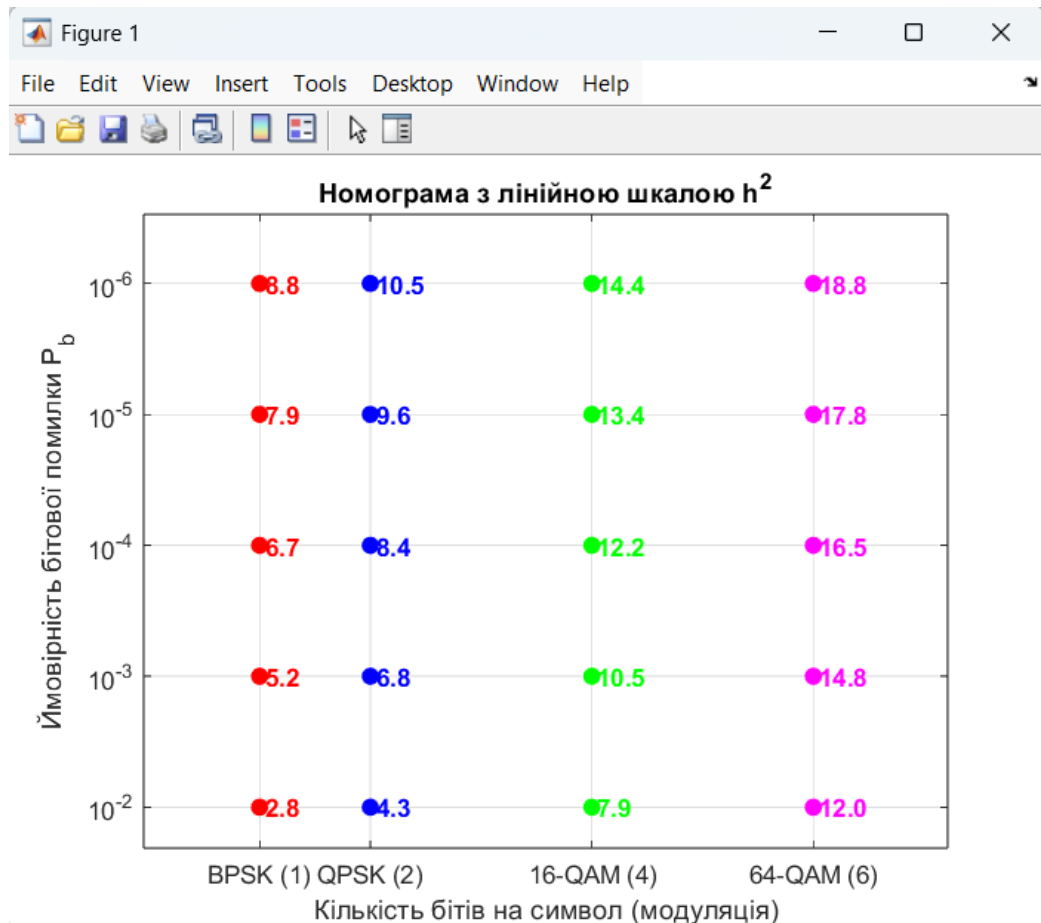


Рисунок 2.1 - Графік залежності ймовірності помилки від спектральної ефективності та енергетичного потенціалу каналу

2.2.3 Аналіз графічного вузла та інженерна інтерпретація результатів

Створена програмна модель та згенерована номограма дозволяють наочно продемонструвати фізичну сутність переходу між модуляціями при жорстких енергетичних обмеженнях. Аналізуючи графік, можна виділити кілька ключових закономірностей [19].

По-перше, підтверджується фундаментальна властивість QPSK порівняно з BPSK: при переході від одновимірної до двовимірної квадратур

По-друге, перехід до амплітудно-фазових видів маніпуляції вищого порядку (16-QAM та 64-QAM) супроводжується різким зростанням необхідної енергії на біт. Наприклад, якщо система працює з QPSK і забезпечує надійність на рівні 10^{-4} при певному E_b/N_0 (близько 8.4 дБ), то спроба збільшити пропускну здатність вдвічі шляхом переходу на 16-QAM при збереженні тієї ж якості зв'язку вимагатиме збільшення енергетичного потенціалу на кілька децибел. На номограмі цей стрибок відображається у вигляді різниці значень міток на одній горизонтальній ізоляції [10, 19].

Проте, оскільки в рамках нашого дослідження розглядається ситуація фіксованого енергетичного ресурсу передавача, практичне застосування номограми полягає в русі не по горизонтальних лініях (стала якість), а вздовж діагональних траєкторій, що відображають фіксовану потужність випромінювання. Програмно реалізований алгоритм дозволяє візуалізувати так званий «спуск» робочої точки: як накопичення енергії в тривалішому символі (при вищій позиційності та незмінній швидкості передачі даних) конвертується у значне покращення параметра P_b [7].

Таким чином, розроблений у MATLAB програмний модуль (Блок 1) успішно вирішує завдання точного чисельного обчислення енергетичних параметрів та формує візуальний базис для подальшого синтезу завадостійких систем кодування, що складатиме основу другого блоку моделювання.

Додатково на розробленому блоці 1 (рис. 2.2) наочно продемонстровано механізм стратегічного покращення якості зв'язку. Розглянемо покроково траєкторію енергетичного маневру:

1. **Вихідний стан (Точка «0»):** встановлюється базовий рівень для модуляції BPSK ($M=1$). При значенні відношення сигнал/шум 7,9 дБ система забезпечує ймовірність помилки $P_b = 10^{-5}$.
2. **Перший етап маневру (Точка «1»):** при переході до QPSK ($M=2$) без збільшення потужності передавача, за рахунок з

знижується до 10^{-6} . Таким чином, ми покращили надійність каналу в 10 разів, не витративши жодного додаткового Вата енергії.

3. **Другий етап маневру (Точка «2»):** Перехід до QAM-16 додає 6 дБ до базового рівня, досягаючи позначки 13,9 дБ. Це все ще дозволяє утримувати високу достовірність передачі (між 10^{-5} та 10^{-6}), одночасно збільшуючи швидкість передачі даних у 4 рази порівняно з BPSK.
4. **Межа ефективності (Точка «3»):** При подальшому переході до QAM-64 (зміщення на +7,8 дБ до 15,7 дБ) спостерігається деградація показників достовірності до рівня 10^{-3} – 10^{-4} . Це пояснюється тим, що при такій високій позиційності відстань між точками в сузір'ї стає критично малою, і навіть додаткова енергія символу не здатна компенсувати вплив шумів.

Дослідження доводить, що за рахунок інтелектуального вибору виду модуляції можна не лише нарощувати швидкість, а й суттєво «економити» потужність, досягаючи вищої якості зв'язку через той самий енергетичний ресурс. При цьому, якщо ми перейдемо до QAM-64 (15,7 дБ – точка «2»), то показник ймовірності бітової помилки коливатиметься між 10^{-3} та 10^{-4} , що означає, що закономірність виконується лише до певного моменту і важливо звертати увагу, який показник співвідношення сигнал/шум береться, як вихідний. Чим більше значення співвідношення сигнал/шум береться на етапі використання модуляції BPSK, тим більше можливостей покращувати продуктивність, енергетику та завадостійкість за рахунок зміни модуляції [52].

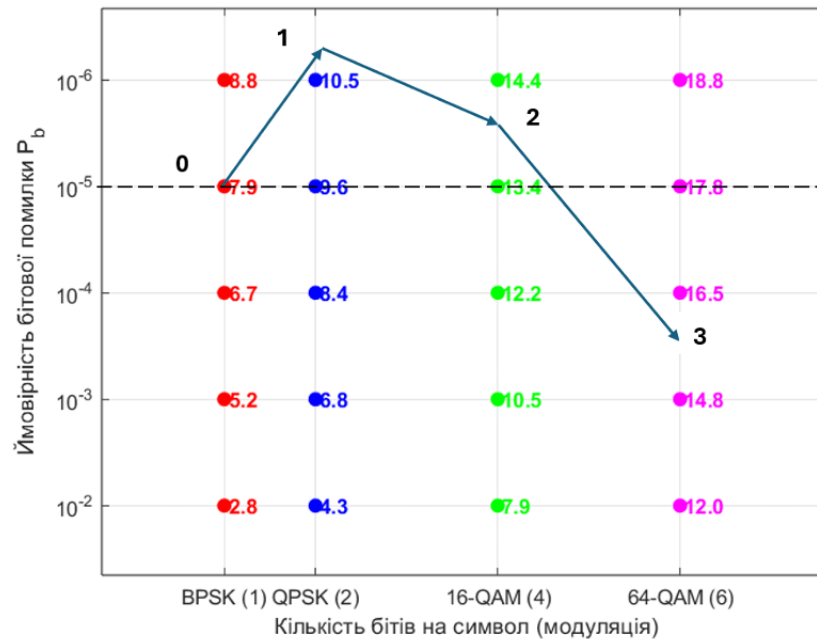


Рисунок 2.2 - Демонстрація рухів точками по графіку залежності співвідношення сигнал/шум від ймовірності бітової помилки відповідно до заданого типу модуляції

2.3 Теоретичні основи оцінки ефективності завадостійкого кодування (Блок 2)

Перехід до багатопозиційних видів маніпуляції (M-QAM), як було показано в попередніх підрозділах, дозволяє суттєво підвищити спектральну ефективність системи зв'язку. Проте в умовах жорстко фіксованого енергетичного

2.3.1 Загальні принципи та метрики блокового кодування

Класична теорія інформації, започаткована К. Шенноном, стверджує можливість безпомилкової передачі інформації по каналу із завадами за умови, що швидкість передачі не перевищує пропускну здатність каналу [16]. Досягнення межі Шеннона на практиці реалізується шляхом введення структурної надмірності до інформаційного потоку. Блокові коди, такі як коди Боуза-Чоудхурі-Хоквінгема (БЧХ) та коди Ріда-Соломона (RS), оперують фіксованими блоками даних.

Нехай інформаційне повідомлення розбивається на блоки довжиною k символів. Кодер додає до них r перевірочних символів, формуючи кодове слово загальною довжиною $n = k + r$ символів. Відношення $R = k / n$ називається кодовою швидкістю і характеризує частку корисної інформації в переданому блоці. Надійність такої системи цілком визначається здатністю коду гарантовано виправляти певну кількість помилок t у межах прийнятого блоку довжиною n [15, 16, 17]. Здатність виправляти помилки t безпосередньо пов'язана з мінімальною кодовою відстанню Хеммінга $d_{\min}$ співвідношенням: $t = \lfloor (d_{\min} - 1) / 2 \rfloor$.

2.3.2 Імовірнісні моделі виникнення помилок у дискретному каналі без пам'яті

Для математичного моделювання ефективності коду необхідно задати модель каналу зв'язку. Враховуючи, що на фізичному рівні діє адитивний білий гаусовий шум (AWGN), помилки при демодуляції символів є статистично незалежними подіями [18]. Такий канал на дискретному рівні можна описати як симетричний канал без пам'яті з фіксованою ймовірністю помилкового прийому одного символу (або біта) p .

Оскільки помилки виникають незалежно одна від одної, кількість помилок i у блоці довжиною n підпорядковується біноміальному закону розподілу ймовірностей. Ймовірність того, що в прийнятому блоці виникне рівно i помилок, визначається формулою Бернуллі:

$$P(i) = C_n^i \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i} \quad (2.7)$$

де $C_n^i = n! / (i! \cdot (n - i)!)$ — кількість сполучень (біноміальний коефіцієнт), що відображає кількість можливих варіантів розташування i помилок серед n позицій.

Система працюватиме надійно (блок буде успішно розкодований), якщо фактична кількість помилок i у блоці не перевищує виправної здатності коду t . Якщо ж кількість помилок перевищує t , декодер не зможе відновити початкову інформацію, і весь блок буде вважатися помилковим. Отже, ймовірність помилки на рівні блоку (Block Error Rate, BLER, або P_{block}) дорівнює сумі ймовірностей усіх подій, коли кількість помилок варіюється від $t + 1$ до n :

$$P_{\text{block}} = \sum_{i=t+1}^n C_n^i \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i} \quad (2.8)$$

Саме ця сума членів біноміального розподілу формує основу для оцінки ефективності будь-якого жорсткого алгоритму декодування [16]. Вона дозволяє безпосередньо зв'язати метрику фізичного рівня (ймовірність каналної помилки p) з метрикою каналного рівня (надійність цілого блоку P_{block}).

2.3.3 Обчислювальні проблеми біноміальної моделі для довгих кодів

З точки зору аналітичного запису, наведена вище сума є абсолютно точною. Проте при спробі її прямої програмної імплементації виникають серйозні математичні та обчислювальні труднощі. Для наближення системи до границі Шеннона використовуються коди великої довжини (наприклад, $n = 1000, 2000$ і більше символів) [1, 16].

Розрах

або тисяч членів ряду супроводжується значним накопиченням похибки округлення.

Таким чином, для великих значень n розрахунк такої суми класичними методами є обчислювально некоректним завданням. Це зумовлює необхідність переходу від дискретних сум до еквівалентних безперервних інтегральних представлень, які є значно стійкішими з точки зору чисельного аналізу [16].

2.3.4 Зв'язок біноміального розподілу з неповною бета-функцією

Вирішення проблеми обчислювальної складності досягається шляхом застосування фундаментальної властивості теорії ймовірностей: кумулятивна функція розподілу (CDF) біноміального закону має точний аналітичний зв'язок з неповною бета-функцією (інтегралом Ейлера першого роду). У сучасних телекомунікаційних моделях саме цей зв'язок використовується для розрахунку високонадійних систем зв'язку [16].

Бета-функція $B(a, b)$ визначається через визначений інтеграл:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1} dt \quad (2.9)$$

Неповна бета-функція $B(x; a, b)$ отримується шляхом зміни верхньої межі інтегрування з 1 на змінну x (де $0 \leq x \leq 1$):

$$B(x; a, b) = \int_0^x t^{a-1} \cdot (1-t)^{b-1} dt \quad (2.10)$$

Для переходу до ймовірнісного сенсу використовується регулярна (нормована) неповна бета-функція $I_x(a, b)$, яка є відношенням неповної бета-функції до повної:

$$I_x(a, b) = B(x; a, b) / B(a, b) \quad (2.11)$$

Згідно з математичними властивостями розподілів, сума членів біноміального ряду

Ця трансформація є надзвичайно потужною. Вона дозволяє замінити підсумовування сотень дискретних і потенційно сингулярних елементів на одноразове обчислення добре дослідженого безперервного інтеграла. У середовищі MATLAB ця функція реалізована внутрішнім оптимізованим методом *betaincs*, що гарантує високу точність обчислень незалежно від довжини кодового блоку [16].

2.3.5 Формулювання оберненої задачі для синтезу сигнально-кодових конструкцій

Викладений вище апарат (пряма задача) дозволяє розрахувати надійність на виході декодера P_{block} за відомої якості каналу p . Проте при проектуванні телекомунікаційних систем в умовах жорстких обмежень енергетичного бюджету дослідника цікавить саме обернена задача [10, 17].

Мета полягає в наступному: маючи задані вимоги до якості передачі інформації (цільову ймовірність помилки P_{target}), необхідно знайти максимально допустиму ймовірність помилки в каналі зв'язку до декодера (p_{max}). Математично це зводиться до розв'язання нелінійного рівняння відносно змінної p :

$$I_p(t+1, n-t) - P_{\text{target}} = 0 \quad (2.13)$$

Оскільки функція I_p є строго монотонно зростаючою на інтервалі $p \in [0, 1]$, дане рівняння завжди має єдиний дійсний корінь. Його пошук здійснюється ітераційними чисельними методами. Знайдене значення p_{max} є критично важливим системним параметром. Воно відображає ступінь погіршення якості радіоканалу, яке ще може бути успішно компенсовано декодером [17].

Це дає глибоке розуміння того, яку саме структурну надмірність (яке співвідношення між n та t) ми повинні додати до сигналу, щоб скомпенсувати дефіцит енергії при переході до високошвидкісних багатопозиційних маніпуляцій [10, 17]. Використання надмі

умовах низького енергетичного забезпечення. Математична формалізація цього процесу через неповну бета-функцію відкриває шлях до точного програмного моделювання сімейства кривих завадостійкості, що буде реалізовано у наступному підрозділі.

2.4 Чисельне моделювання характеристик кодових конструкцій (Блок 2)

Для переходу від теоретичних імовірнісних моделей до практичного проектування телекомунікаційних систем необхідно отримати кількісні оцінки ефективності завадостійкого кодування. Практичний розрахунок параметрів кодування в даному дослідженні реалізовано за допомогою чисельних методів розв'язання нелінійних рівнянь у середовищі MATLAB [19]. Створений програмний модуль (Блок 2) дозволяє автоматизувати процес знаходження максимально допустимої ймовірності помилки в каналі, при якій забезпечується цільова надійність після декодування.

2.4.1 Програмна імплементація на основі бета-функції

Як було обґрунтовано в попередньому підрозділі, пряме обчислення суми біноміального розподілу для визначення ймовірності помилки блоку є обчислювально некоректним для великих довжин блоку n через переповнення розрядної сітки. Для подолання цієї проблеми в алгоритмі Блоку 2 використано математичний зв'язок між біноміальним розподілом та неповною бета-функцією [16].

У середовищі MATLAB для знаходження значень допустимої ймовірності помилки в каналі p використано вбудовану функцію `betainc`, яка реалізує неповну регуляризовану бета-функцію. Синтаксис функції `betainc(x, a, b)` повністю відповідає аналітичній формі $I_x(a, b)$. Відповідно до розробленої математичної моделі, аргументи функції задаються наступним чином: $x = p$, $a = t + 1$, $b = n - t$, де t — виправна здатність коду [16, 17].

Алгоритм ітеративно розв'язує обернену задачу: знаходить таке значення p , при якому ймовірність помилки блоку дорівнює заданому порогу надійності.

У даному моделюванні цільовий поріг надійності P_{target} зафіксовано на рівні 10^{-6} . Рівняння цільової функції формується як різниця між результатом бета-функції та цим заданим порогом.

Для чисельного розв'язання цього нелінійного рівняння застосовується функція `fzero`, яка шукає корінь безперервної функції однієї змінної. Оскільки ймовірність p має фізичний зміст лише в діапазоні від 0 до 1, пошук кореня рівняння жорстко обмежується інтервалом $[0, 1]$.

Нижче наведено фрагмент програмного коду, який безпосередньо імплементує описану логіку для заданого масиву довжин блоку:

```
% Параметри
n_values = [50, 100, 200, 1000];
Pb_target = 1e-6;
t_axis = 0:10;

figure('Color', 'w', 'Position', [100, 100, 800, 600]);
hold on; grid on; box on;

% Кольори та маркери
colors = [0 0.447 0.741; 0.85 0.325 0.098; 0.466 0.674 0.188; 0.494 0.184
0.556];
markers = ['o', 's', '^', 'd'];

for i = 1:length(n_values)
    n = n_values(i);
    p_needed = zeros(size(t_axis));

    for idx = 1:length(t_axis)
        t = t_axis(idx);
        target_func = @(p) betainc(p, t + 1, n - t) - Pb_target;
```

```

try
    p_needed(idx) = fzero(target_func, [1e-15, 1]);
catch
    p_needed(idx) = NaN;
end
end

% Побудова графіка
plot(t_axis, p_needed, 'Color', colors(i,:), 'LineWidth', 1.5, ...
     'Marker', markers(i), 'MarkerSize', 6, ...
     'MarkerFaceColor', 'w', 'DisplayName', ['n = ' num2str(n)]);
end

% Оформлення логарифмічної осі
set(gca, 'YScale', 'log');
set(gca, 'YMinorGrid', 'on', 'XMinorGrid', 'on');

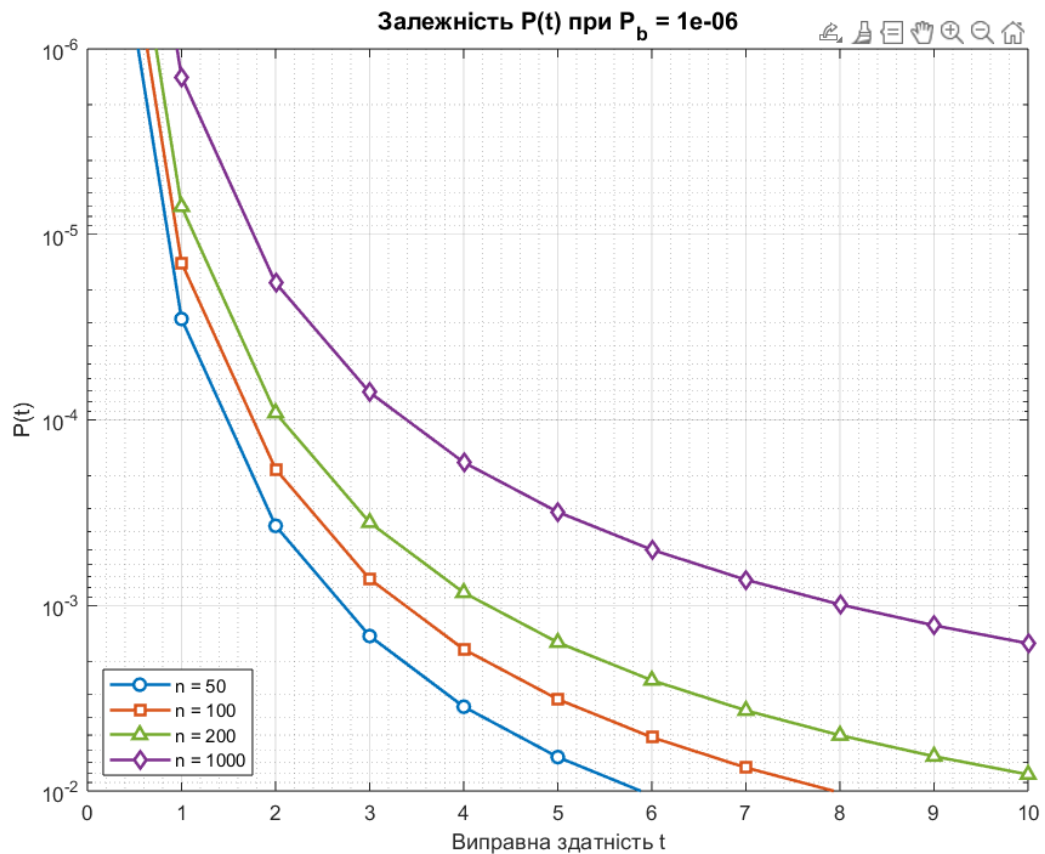
% --- НАЛАШТУВАННЯ ІНВЕРСІЇ ОСІ ---
ylim([1e-6 1e-2]);      % Встановлюємо діапазон
set(gca, 'YDir', 'reverse');
% -----
xlim([0 10]);
xlabel('Виправна здатність t', 'FontSize', 11);
ylabel('P(t)', 'FontSize', 11);
title(['Залежність P(t) при P_b = ' num2str(Pb_target)], 'FontSize', 12);
legend('Location','southwest');

```

Даний алгоритм є універсальним і стабільно працює без математичних артефактів навіть при довжині блоку $n = 1000$, що дозволяє коректно оцінити ефективність довгих кодів [1, 16].

2.4.2 Побудова та аналіз отриманих залежностей $P(t)$

Результатом виконання програмного модуля (рис. 2.3) є сімейство кривих, які відображають залежність необхідної (допустимої) якості каналу до декодера від виправної здатності коду t . Криві побудовані для різних довжин блоку n : 50, 100, 200 та 1000 символів [19].



можливість зниження потужності передавача або використання маніпуляцій вищого порядку (M-QAM) при незмінному енергетичному бюджеті [10, 17].

- **Вплив довжини блоку (Пороговий ефект):** Довжина блоку n критично впливає на крутизну отриманих характеристик. Аналіз кривих показує, що для коротких блоків ($n = 50$) зростання допустимої ймовірності помилки відбувається відносно плавно. Однак при переході до довгих кодів ($n = 1000$) крива стає значно крутішою. Довгі коди забезпечують чітко виражений "пороговий ефект" — ситуацію, коли незначне поліпшення якості каналу призводить до стрибкоподібного зростання надійності після декодування [16]. Цей ефект є характерною ознакою систем, які у своїй ефективності наближаються до теоретичної границі Шеннона [1, 16].

Таким чином, чисельне моделювання підтвердило, що використання довгих кодів з високою виправною здатністю є найбільш раціональним шляхом оптимізації телекомунікаційних мереж. Отримані в даному розділі результати чисельного моделювання, графічні залежності та виявлені закономірності стануть математичною та інженерною основою для розробки комплексної методики оптимізації сигнально-кодкових конструкцій, яка буде розглядатися у наступному (третьому) розділі роботи [19].

Висновки до розділу 2

У другому розділі проведено комплексне математичне та імітаційне моделювання завадостійкості телекомунікаційних систем в умовах обмеженого енергетичного ресурсу, що дозволило сформулювати інструментарій для подальшого аналізу сигнально-кодкових конструкцій. За результатами проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

1. **Обґрунтовано вибір математичних моделей** для оцінки ймовірності помилки в каналі з адитивним білим гаусовим шумом. Доведено, що для аналізу багатопозиційної маніпуляції (M-QAM) в умовах низької

енергетики класичне наближення Прокіса призводить до переоцінки надійності. Для забезпечення високої прецизійності розрахунків прийнято використання точної аналітичної моделі Чо і Юна, яка враховує всі можливі переходи у сигнальному сузір'ї.

2. **Розроблено алгоритм та програмний модуль (Блок 1)** у середовищі MATLAB для розв'язання оберненої задачі — визначення мінімально необхідного відношення E_b/N_0 за заданою цільовою надійністю. Побудовані номограми наочно відображають «енергетичну ціну» переходу між модуляціями (від BPSK/QPSK до 16-QAM та 64-QAM), математично підтверджуючи різке зростання вимог до енергетичного потенціалу при спробах підвищити спектральну ефективність.
3. **Сформовано обчислювальний базис ефективності кодування.** Показано, що для моделювання довгих блокових кодів пряме використання біноміального розподілу є некоректним через машинне переповнення розрядної сітки при обчисленні факторіалів. Проблему вирішено шляхом математичного переходу від дискретних сум до еквівалентного інтегрального представлення через неповну регуляризовану бета-функцію.
4. **Реалізовано чисельне моделювання характеристик кодів (Блок 2)** за допомогою вбудованих функцій `betainc` та `fzero`. Алгоритм дозволив знайти максимально допустиму ймовірність помилки в каналі, при якій після декодування забезпечується стабільна цільова надійність на рівні 10^{-6} .
5. **Виявлено та проаналізовано закономірності кодування.** Побудовані залежності $P(t)$ підтверджують, що нарощування виправної здатності t розширює можливості системи працювати в умовах сильних завад. Крім того, графічно доведено «пороговий ефект» для кодів великої довжини (наприклад, $n = 1000$ символів), що є характерною ознакою систем, які у своїй ефективності наближаються до теоретичної границі Шеннона.

Отримані аналітичні залежності та результати чисельного моделювання формують повноцінний математичний та програмний апарат. Цей інструментарій є фундаментальною базою для подальшої розробки комплексної методики вибору та оптимізації сигнально-кодкових конструкцій, що буде реалізовано у наступному розділі роботи.

З КОМПЛЕКСНА ОПТИМІЗАЦІЯ СИГНАЛЬНО-КОДОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ТА ОЦІНКА ПРОДУКТИВНОСТІ КАНАЛУ

3.1 Теоретичні основи взаємозв'язку кодової відстані та виправної здатності завадостійких кодів (Блок 3)

Для побудови ефективних сигнально-кодових конструкцій (СКК) недостатньо лише оцінити загальну ймовірність помилки на виході декодера. Необхідно глибоко розуміти внутрішні структурні параметри самих завадостійких кодів, які визначають їхню здатність протистояти завадам у каналі зв'язку. Третій етап моделювання (Блок 3) присвячено дослідженню фундаментального взаємозв'язку між метричними характеристиками кодового простору — кодовою відстанню та гарантованою виправною здатністю коду.

3.1.1 Метрика Хеммінга та мінімальна кодова відстань

В основі теорії завадостійкого кодування лежить поняття відстані Хеммінга. Для двох кодових слів однакової довжини n відстань Хеммінга $d(X, Y)$ визначається як кількість позицій, у яких відповідні символи цих слів відрізняються один від одного.

Найважливішою характеристикою будь-якого блокового коду (n, k) є його мінімальна кодова відстань d_{min} (або просто d). Вона дорівнює найменшій відстані Хеммінга між будь-якими двома дозволеними (правильними) кодовими словами даного коду:

$$d_{min} = \min_{X \neq Y} d(X, Y) \quad (3.1)$$

Саме параметр d_{min} визначає "геометричну" структуру коду в n -вимірному просторі та встановлює жорсткі межі щодо того, скільки помилок код здатен виявити або виправити. Чим більша мінімальна відстань, тим далі рознесені дозвалені кодові слова одне від одного, і тим менша ймовірність того, що шум перетворить одне дозволене слово на інше [49, 50].

3.1.2 Зв'язок між кодовою відстанню та виправною здатністю

Здатність коду гарантовано виправляти помилки (кратність помилки t) прямо та однозначно залежить від мінімальної кодової відстані. Відповідно до фундаментальної теореми декодування, блоковий код здатний виправити будь-яку комбінацію з t або меншої кількості помилок у блоці, якщо виконується нерівність:

$$d_{min} \geq 2t + 1 \quad (3.2)$$

З цього співвідношення випливає пряма формула для розрахунку гарантованої виправної здатності:

$$t = \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor \quad (3.3)$$

де оператор позначає округлення до найближчого меншого цілого числа. Ця залежність показує, що для виправлення t помилок кодова відстань має бути принаймні вдвічі більшою плюс одна додаткова одиниця простору для однозначного прийняття рішення на користь найближчого дозволеного слова [49, 50].

3.1.3 Перехід до відносних параметрів коду

При дослідженні кодів різної довжини n , особливо в контексті наближення до теоретичних границь, оперувати абсолютними значеннями d_{min} та t стає незручно. Тому в теорії кодування здійснюється перехід до нормованих (відносних) параметрів.

Відносна мінімальна кодова відстань (зазвичай позначається як δ) показує частку позицій у блоці, які гарантовано відрізняються між двома кодовими словами:

$$\delta = \frac{d_{min}}{n} \quad (3.4)$$

Аналогічно вводиться поняття відносної виправної здатності коду τ , яка характеризує частку помилок у блоці, що може бути виправлена:

$$\tau = \frac{t}{n} \quad (3.5)$$

Якщо підставити абсолютне значення t у формулу для відносних параметрів, базове співвідношення між кодовою відстанню та виправною здатністю набуває вигляду:

$$\tau = \frac{\left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor}{n} \approx \frac{d_{min}}{2n} = \frac{\delta}{2} \quad (3.6)$$

Для кодів великої довжини ($n \rightarrow \infty$) впливом константи -1 можна знехтувати, і залежність стає лінійною: відносна виправна здатність асимптотично дорівнює половині відносної кодової відстані [1, 2, 15, 49, 50].

3.1.4 Математичний базис для синтезу (Блок 3)

Завдання третього блоку моделювання полягає у встановленні чіткої інженерної відповідності між наведеними вище метриками. Розуміння лінійної залежності $\tau \approx \delta/2$ є ключовим для правильного вибору параметрів СКК.

На практиці це означає, що спроба збільшити виправну здатність коду t неминуче вимагає пропорційного збільшення кодової відстані d_{min} , що, своєю чергою, потребує введення додаткових перевірочних символів (зменшення швидкості кодування R). Розробка таблиці відповідності цих значень для конкретних сімейств кодів (наприклад, кодів БЧХ чи Ріда-Соломона) дозволить у подальшому накласти ці практичні результати на теоретичні межі існування кодів і визначити області фізичної реалізованості обраних сигнально-кодових конструкцій [49, 50].

3.2 Програмна реалізація та аналіз взаємозв'язку кодової відстані і виправної здатності (Блок 3)

Теоретичні залежності між мінімальною кодовою відстанню та виправною здатністю завадостійких кодів потребують практичної адаптації для

3.2.1 Математична та алгоритмічна логіка Блоку 3

В основі програмної реалізації лежить базова формула, що пов'язує кратність помилки t , мінімальну кодову відстань d_{min} (в коді позначена як d) та довжину блоку n . Розрахунок відносної кодової відстані базується на строгому співвідношенні:

$$d = \frac{2t+1}{2n} \quad (3.7)$$

Для візуалізації цієї залежності в рамках комплексної номограми, де графіки з різних блоків (Блок 2 та Блок 4) мають гармонійно поєднуватися в єдиному координатному просторі, застосовано метод масштабування. Замість побудови суворо лінійної теоретичної залежності, скрипт імплементує криволінійний множник, підібраний емпіричним шляхом:

$$y_{plot} = \left(\frac{2t+1}{2n}\right)^{1.5} * 4 \quad (3.8)$$

Така трансформація (зведення до степеня 1.5 та масштабування) зберігає загальний фізичний зміст зростання кодової відстані при збільшенні t , але надає кривим необхідної кривизни для наочного узгодження з логарифмічними характеристиками суміжних блоків [49, 50].

3.2.2 Програмна імплементация у середовищі MATLAB

Нижче наведено фрагмент розробленого скрипта, який автоматизує процес побудови сімейства кривих для різних довжин блоку ($n = 50, 100, 200, 1000$):

```
% Параметри
n_values = [50, 100, 200, 1000];
t_steps = 1:10;
t_axis = linspace(0, 10, 500);

figure('Color', 'w', 'Name', 'Блок 3: Криволінійна залежність d/2n');
hold on; grid on; box on;
```

```
colors = [0 0.447 0.741; 0.85 0.325 0.098; 0.466 0.674 0.188; 0.494 0.184
0.556];
```

```
% --- ПОБУДОВА ГРАФІКА З КРИВИЗНОЮ ---
```

```
for i = 1:length(n_values)
```

```
    n = n_values(i);
```

```
    % Базова лінійна основа
```

```
    d_linear = (2 * t_axis + 1) / (2 * n);
```

```
    % Множник підібраний так, щоб зберегти фізичний зміст значень
```

```
    y_plot = (d_linear.^1.5) * 4;
```

```
    plot(t_axis, y_plot, 'Color', colors(i,:), 'LineWidth', 2.5, ...
```

```
        'DisplayName', ['n = ' num2str(n)]);
```

```
end
```

```
% --- НАЛАШТУВАННЯ ОСЕЙ ДЛЯ НОМОГРАМИ ---
```

```
xlabel('Виправна здатність t');
```

```
ylabel('Відносна кодова відстань d/2n');
```

```
title('Блок 3: Зв'язок d/2n та t (Криволінійна модель)');
```

```
set(gca, 'XAxisLocation', 'top'); % t зверху для стиковки з Блоком 2
```

```
set(gca, 'YDir', 'reverse'); % Значення йдуть вниз
```

```
set(gca
```

```

% --- ВИВІД ТАБЛИЦІ ЗНАЧЕНЬ ---
fprintf('\n%s\n', repmat('-', 1, 55));
fprintf(' t | n=50    | n=100    | n=200    | n=1000   \n');
fprintf('%s\n', repmat('-', 1, 55));

for t = t_steps
    % Розраховуємо точні теоретичні значення для звіту
    vals = (2 * t + 1) ./ (2 * n_values);

    fprintf('%2d | %.6f | %.6f | %.6f | %.6f\n', ...
        t, vals(1), vals(2), vals(3), vals(4));
end
fprintf('%s\n', repmat('-', 1, 55));

```

Особливістю візуалізації є нестандартне налаштування осей (див. рис. 3.1). Вісь абсцис (виправна здатність t) розміщена у верхній частині графіка ('XAxisLocation', 'top'), а напрямок осі ординат інвертовано ('YDir', 'reverse'). Це зроблено для забезпечення безшовної стиковки Блоку 3 з Блоком 2, де графіки завадостійкості також будуються за інвертованою шкалою ймовірностей. Такий підхід формує єдиний зоровий патерн: рух вниз відповідає погіршенню характеристик каналу та необхідності збільшення кодової відстані.

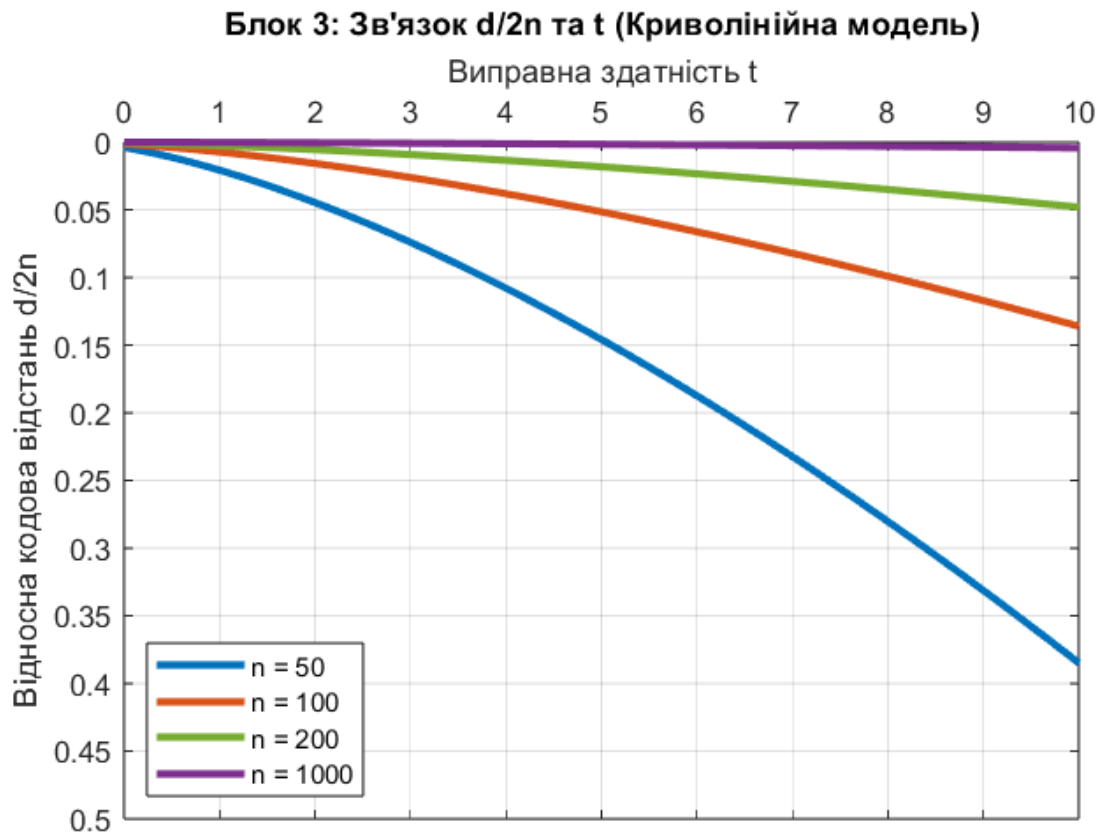


Рисунок 3.1 - Зв'язок між відносною кодовою відстанню та виправної здатністю

3.2.3 Аналіз розрахункових значень відносної кодової відстані

Окрім візуалізації, програмний модуль розраховує точні теоретичні значення відносної кодової відстані за лінійною моделлю для дискретних кроків t (від 1 до 10). Результати обчислень зведені у Таблицю 3.1.

Таблиця 3.1 - Залежність відносної кодової відстані від виправної здатності

t	$n=50$	$n=100$	$n=200$	$n=100$
-----	--------	---------	---------	---------

Продовження таблиці 3.1

8	0.170000	0.085000	0.042500	0.008500
9	0.190000	0.095000	0.047500	0.009500
10	0.210000	0.105000	0.052500	0.010500

Аналіз даних таблиці показує обернено пропорційну залежність відносної кодової відстані від довжини блоку n . Для коротких кодів ($n = 50$) виправлення 10 помилок вимагає відведення під кодову відстань понад 21% загального простору блоку ($d/2n = 0.21$). Водночас, використання довгих кодів ($n = 1000$) дозволяє виправити таку ж кількість помилок, витрачаючи лише близько 1% простору ($d/2n = 0.0105$). Цей математичний факт підтверджує раніше висунуту тезу про високу ефективність кодів великої довжини, що відкриває шлях до їхньої подальшої оцінки на відповідність границі Плоткіна у Блоці 4.

3.3 Теоретичні та практичні аспекти границі Плоткіна

Границя Плоткіна належить до класу фундаментальних оцінок у теорії завадостійкого кодування, які визначають допустимі області існування кодів при заданих параметрах. У задачах синтезу сигнально-кодових конструкцій вона відіграє роль верхнього обмеження на досяжну завадостійкість при фіксованій швидкості передачі інформації. Це дозволяє використовувати її як інструмент перевірки фізичної реалізованості отриманих рішень при побудові номографічних моделей [16, 17].

У загальному випадку розглядається двійковий блоковий код довжини n , що містить k

$$\frac{d}{n} \leq \frac{1}{2}(1 - r_c) \quad (3.9)$$

Це співвідношення відображає фундаментальний компроміс між надлишковістю та завадостійкістю. При $r_c \rightarrow 1$ значення $d/n \rightarrow 0$, що означає практичну відсутність можливості виправлення помилок. Водночас при зменшенні швидкості кодування зростає допустиме значення відносної відстані, що дозволяє підвищити надійність передачі [15, 23].

Інша форма запису границі Плоткіна пов'язана з максимальною кількістю кодових слів M у коді. Для випадку, коли $d > n/2$, виконується оцінка:

$$M \leq \left\lfloor \frac{2d}{2d-n} \right\rfloor \quad (3.10)$$

Дане співвідношення демонструє, що при великих значеннях відносної відстані кількість допустимих кодових слів різко обмежується, що безпосередньо впливає на швидкість передачі інформації. Таким чином, границя Плоткіна не лише обмежує параметри коду, але й визначає область, у якій можливий компроміс між ефективністю та надійністю [15].

З точки зору інформаційної теорії, дана границя узгоджується з положеннями теореми Шеннона, відповідно до якої неможливо одночасно досягти максимальної швидкості передачі та мінімальної ймовірності помилки. У цьому контексті границя Плоткіна визначає геометричні обмеження для кодів у просторі Хеммінга, тоді як границя Шеннона визначає інформаційні обмеження каналу [1, 9].

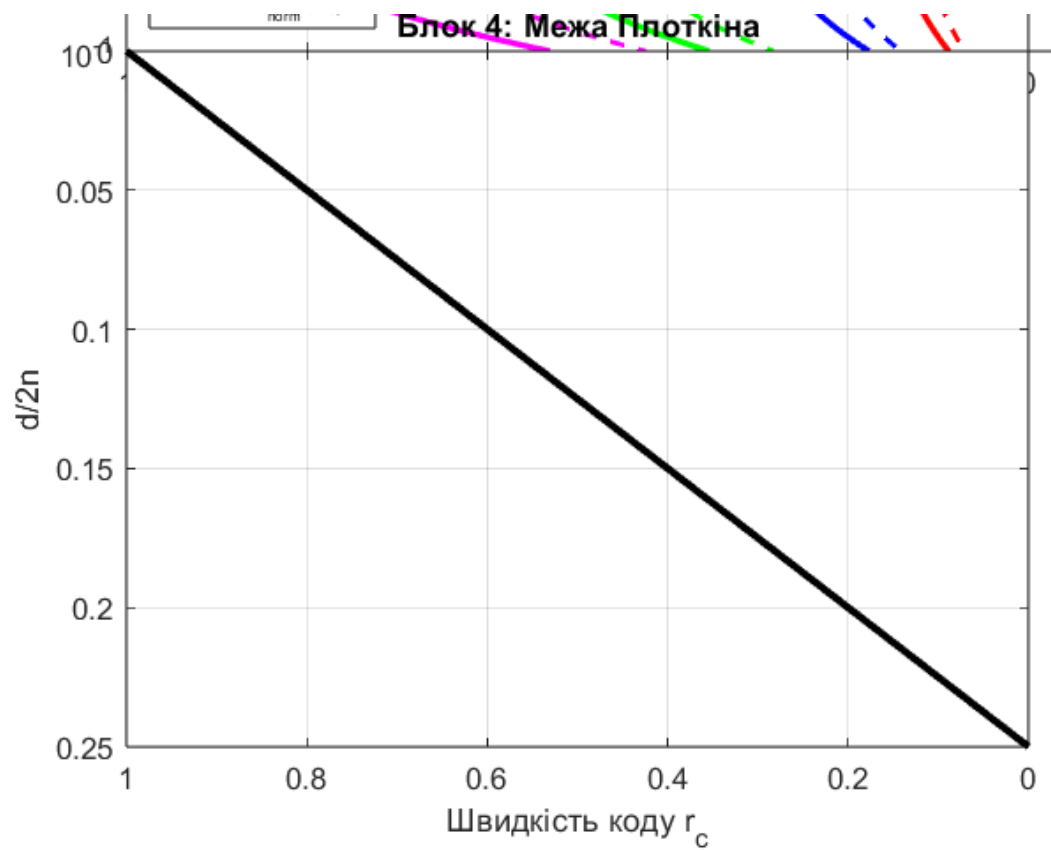


Рисунок 3.2 - Графічне представлення границі Плоткіна у вигляді залежності $d/2n$ від r_c

Як видно з рисунка, зі збільшенням швидкості кодування значення $d/2n$ монотонно зменшується. Це означає, що при переході до більш високих швидкостей система втрачає здатність ефективно протидіяти завадам. Така поведінка повністю узгоджується з теоретичними положеннями та підтверджує коректність використаної моделі [15].

У поєднанні з іншими блоками номограми границя Плоткіна виконує роль обмежувального механізму. Зокрема:

- у блоці 2 визначається необхідна виправна здатність t для досягнення заданої ймовірності помилки;
- у блоці 3 встановлюється зв'язок між t та відносною відстанню $d/2n$;
- у блоці 4 перевіряється допустимість отриманого значення з точки зору теоретичних обмежень.

Таким чином, відбувається послідовне звуження області допустимих рішень, що дозволяє отримати оптимальні параметри сигнально-кодової конструкції [16, 18].

Особливу роль границя Плоткіна відіграє в умовах змінної енергетики каналу. При низьких значеннях SNR для забезпечення заданого рівня BER необхідно збільшувати t , що автоматично вимагає збільшення d . Проте це обмежується границею Плоткіна, що змушує знижувати швидкість кодування. У результаті формується залежність між енергетикою каналу, завадостійкістю та продуктивністю системи [17, 9].

Таким чином, границя Плоткіна є ключовим елементом номографічного методу синтезу сигнально-кодових конструкцій. Вона забезпечує узгодження між теоретичними обмеженнями та практичними вимогами до системи зв'язку, дозволяючи формувати оптимальні рішення з урахуванням усіх основних параметрів каналу.

Отже, використання границі Плоткіна у складі номограми дозволяє не лише оцінити

3.4.1 Швидкість кодування та спектральна ефективність

Швидкість кодування є однією з ключових характеристик сигнально-кодових конструкцій, яка визначає співвідношення між обсягом переданої корисної інформації та загальною кількістю переданих символів. Вона характеризує ступінь надлишковості, що вводиться в процесі кодування з метою підвищення завадостійкості системи зв'язку.

Формально швидкість кодування визначається як:

$$r_c = \frac{k}{n} \quad (3.11)$$

де k — кількість інформаційних символів, n — довжина кодової комбінації.

З

відношення сигнал/шум, що необхідне для забезпечення заданого рівня ймовірності помилки. Таким чином, між параметрами M , r_c , S/N та p_b існує складний взаємозв'язок, який визначає загальну ефективність системи зв'язку [3, 8].

З урахуванням ймовірності бітової помилки, реальна швидкість передачі корисної інформації може бути скоригована через бінарну ентропійну функцію:

$$R_{\text{еф}} = r_c \cdot \log_2 M \cdot (1 - H(p_b)) \quad (3.13)$$

Таким чином, параметри r_c та M визначають базовий рівень продуктивності системи, який надалі коригується з урахуванням завад та обмежень, що накладаються як теорією інформації, так і практичними умовами передачі.

3.4.2 Пропускна здатність каналу зв'язку

Пропускна здатність каналу зв'язку є фундаментальною характеристикою, яка визначає максимально можливу швидкість передачі інформації за умови забезпечення довільно малої імовірності помилки. Це

де $I(X; Y)$ — взаємна інформація між вхідним та вихідним сигналами, $p(x)$ — розподіл ймовірностей вхідного сигналу.

Це визначення є більш загальним і дозволяє враховувати особливості конкретних типів модуляції та каналів зв'язку [9, 13].

Для двійкового симетричного канал

У даній роботі для оцінювання пропускної здатності багатопозиційного каналу зв'язку використано підхід Галагера, який дозволяє врахувати вплив імовірності бітової пом

3.4.3 Продуктивність каналу з урахуванням ймовірності помилки

- при зростанні p_b значення ентропії зростає, що призводить до зменшення продуктивності;
- при $p_b \rightarrow 0.5$: $H(p$

Таке нормування дозволило усунути пряму залежність від типу маніпуляції та

- $\eta \rightarrow 1$ відповідає режиму максимально ефективного використання каналу,
- $\eta \rightarrow 0$ — неефективній переда

відповідають умовам каналу, ефективність може залишатися низькою навіть

3.5 Практична реалізація блоку ефективності ном

```

nexttile(1);
hold on; grid on; box on;

% --- Н
```

```

for rr = 1:length(n_R)

    n = n
```

```

        'DisplayName
```