

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА СКЛАДНИХ СИСТЕМ

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра
за освітньою програмою «Комп'ютерне моделювання фізичних процесів»
спеціальності 104 Фізика та астрономія

Укладач: О.Ю. Горобець

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2024

УДК 537.6 (537)

Г11

Укладач: *Горобець Оксана Юріївна*, д.ф.-м.н., проф. кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів, фізико-математичного факультету, КПІ ім. Ігоря Сікорського

Рецензент: *Куліш Володимир Вікторович*, д.ф.-м.н., професор кафедри загальної фізики, фізико-математичного факультету, КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор: *Савченко Дарина Вікторівна*, д.ф.-м.н., завідувач кафедри кафедри загальної фізики та моделювання фізичних процесів, фізико-математичного факультету, КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 1 від 26.09.2024 р.)
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 10 від 11.09.2024 р.)*

Г11 **Нелінійна динаміка складних систем** : збірник задач [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня магістра за освіт. програмою «Комп'ютерне моделювання фізичних процесів» спец. 104 Фізика та астрономія / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. Ю. Горобець – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 31 с.

В навчальному посібнику викладено вимоги до підготовки до практичних робіт з дисципліни «Нелінійна динаміка складних систем». Подано добірку задач до практичних занять, які призначені для поглибленого вивчення динамічних систем і законів їх еволюції, динамічного хаосу з особливою увагою до чисельних та аналітичних методів дослідження нелінійної динаміки складних систем, а також нелінійної динаміки в реакційно-дифузійних системах.

УДК 004.43 (004)

Реєстр. № НП 24/25-051. Обсяг 0,8 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

Зміст

| | |
|--|----|
| ВСТУП..... | 4 |
| Структура курсу..... | 5 |
| Підбір задач для практичних занять..... | 5 |
| ПРАКТИЧНА РОБОТА 1. Динамічні системи. Приклади динамічних систем. Граничні множини динамічних систем. Стійкість та її лінійний аналіз | 7 |
| Завдання до практичної роботи 1 | 7 |
| Контрольні запитання | 8 |
| ПРАКТИЧНА РОБОТА 2. Біфуркації, катастрофи. Типи біфуркацій. Регулярні атрактори динамічних систем..... | 9 |
| Завдання до практичної роботи 2 | 9 |
| ПРАКТИЧНА РОБОТА 3. Нерегулярні атрактори динамічних систем. Види нерегулярних атракторів. Детермінований хаос. Сценарії переходу до хаосу | 11 |
| Завдання до практичної роботи 3 | 11 |
| ПРАКТИЧНА РОБОТА 4. Генератор квазіперіодичних коливань з двома незалежними частотами. Синхронізація хаотичних автоколивань | 13 |
| Завдання до практичної роботи 4 | 13 |
| ПРАКТИЧНА РОБОТА 5. Стохастичний резонанс. Стохастична синхронізація. Хаос в лінійних та нелінійних одномірних системах..... | 15 |
| Завдання до практичної роботи 5 | 15 |
| ПРАКТИЧНА РОБОТА 6. Нелінійні двовимірні відображення. Нелінійні комплексні відображення..... | 18 |
| Завдання до практичної роботи 6 | 18 |
| Приклади коду на мові програмування python для розв'язання задач практичної роботи 1 | 21 |
| ПРАКТИЧНА РОБОТА 7. Дослідження хаотичного руху за допомогою перерізу Пуанкаре. Аналітичні методи дослідження нелінійної динаміки складних систем. Проблема «швидких» і «повільних» змінних. Метод усереднення. Метод Ван дер Поля | 24 |
| Завдання до практичної роботи 7 | 24 |
| ПРАКТИЧНА РОБОТА 8. Параметричний резонанс. Нелінійна динаміка в реакційно-дифузійних системах. Хвилі та динамічні структури в реакційно-дифузійних системах..... | 27 |
| Завдання до практичної роботи 8 | 27 |
| ПРАКТИЧНА РОБОТА 9. Стійкість однорідного стану в реакційно-дифузійних системах. Структури Тьюрінга. Хвильова нестійкість. Самоорганізація в електрохімічних системах | 30 |

| | |
|---------------------------------------|----|
| Завдання до практичної роботи 9 | 30 |
| РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА | 31 |

ВСТУП

Вибіркова дисципліна «Нелінійна динаміка складних систем» розкриває світ динамічних систем та їх поведінки, особливо зосереджуючись на нелінійній динаміці. Розуміння принципів і поведінки нелінійних систем має вирішальне значення для багатьох галузей науки та техніки, оскільки ці системи часто демонструють складну поведінку, яку неможливо передбачити за допомогою лінійних наближень. Важливість вивчення нелінійної динаміки є наріжним каменем у вивченні складних систем, які поширені в природі та техніці. Ці системи характеризуються взаємодіями, які не є просто адитивними, що призводять до таких явищ, як біфуркації, хаос та формування складних неоднорідних просторово-часових структур. Вивчення нелінійної динаміки є життєво важливим з кількох причин:

- Розуміння природних явищ: багато природних систем, від фізичних до біологічних процесів, демонструють нелінійну поведінку. Вивчаючи ці системи, ми отримуємо уявлення про механізми, що лежать в основі їхньої еволюції, і можемо робити кращі прогнози щодо їхнього майбутнього стану.
- Технологічні застосування: нелінійна динаміка має застосування в різних технологічних сферах, включаючи електроніку, робототехніку та біоінженерію. Інженери та науковці використовують принципи нелінійної динаміки для розробки та оптимізації систем, які є надійними та ефективними.
- Міждисциплінарні ідеї: методи та концепції нелінійної динаміки застосовні в різних дисциплінах, пропонуючи універсальну основу для аналізу складних систем. Цей міждисциплінарний підхід сприяє інноваціям і співпраці між такими галузями, як фізика, біологія, хімія та економіка.

Структура курсу

Цей курс побудований таким чином, щоб забезпечити всебічне розуміння нелінійної динаміки складних систем через теоретичну та практичну підготовку. Ми досліджуватимемо фундаментальні закони, які керують еволюцією динамічних систем, і зануримося в інтригуючий світ динамічного хаосу.

Підбір задач для практичних занять

Щоб закріпити ваше розуміння та отримати практичний досвід, курс містить добірку задач для практичних занять. Ці проблеми ретельно підбрано, щоб висвітлити ключові концепції та методи нелінійної динаміки. Вони розроблені так, щоб бути складними, але доступними, заохочуючи вас застосовувати чисельні та аналітичні методи для їх вирішення, зокрема мову програмування python. Проблеми стосуватимуться ряду тем, зокрема:

- Еволюція динамічних систем: розуміння того, як системи розвиваються з часом за різних умов і обмежень.
- Динамічний хаос: вивчення непередбачуваної, але детермінованої природи хаотичних систем та їхньої чутливості до початкових умов.
- Чисельні методи: впровадження обчислювальних методів для моделювання та аналізу поведінки нелінійних систем.
- Аналітичні методи: використання математичних інструментів для одержання та розв'язання рівнянь, що керують нелінійною динамікою.
- Спеціальні напрямки чисельних та аналітичних методів: курс буде приділяти особливу увагу розвитку навичок як числового моделювання, так і аналітичних підходів. Розуміння сильних сторін і обмежень кожного методу має вирішальне значення для вирішення реальних проблем у нелінійній динаміці.
- Реакційно-дифузійні системи: ми також досліджуватимемо нелінійну динаміку в реакційно-дифузійних системах, які є основоположними для

розуміння таких процесів, як формування складних просторово-часових у біологічних системах і хімічних реакціях.

Цей курс надає вам знання та навички для розуміння та аналізу складної поведінки нелінійних систем. Незалежно від того, чи збираєтеся ви робити кар'єру в науці, інженерії чи будь-якій іншій галузі, де складні системи відіграють важливу роль, знання, отримані під час вивчення нелінійної динаміки, будуть неоціненними. Нехай ця подорож через нелінійну динаміку складних систем буде для вас повчальною та надихаючою.

Підсумовуючи зазначимо, що метою навчальної дисципліни є формування та закріплення у студентів навичок та вмінь щодо теорії та експериментального дослідження динамічних систем і законів їх еволюції, динамічного хаосу з особливою увагою до чисельних та аналітичних методів дослідження нелінійної динаміки складних систем, а також нелінійної динаміки в реакційно-дифузійних системах..

Оцінювання відповідей на практичних роботах відбувається відповідно рейтингової системи оцінювання знань, що надана в силабусі дисципліни «Нелінійна динаміка складних систем».

ПРАКТИЧНА РОБОТА 1. Динамічні системи. Приклади динамічних систем. Граничні множини динамічних систем. Стієкість та її лінійний аналіз

Завдання до практичної роботи 1

1. Знайдіть стаціонарні стани наступних рівнянь.

а) $\frac{dx}{dt} = V - kx$

б) $\frac{dx}{dt} = x^2 - rx + m$

в) $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\beta + \tau x}(x - L)(x - K)$

г) $\frac{dx}{dt} = -2x + 5y$

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y$$

д) $\begin{cases} \dot{x} = \beta y \\ \dot{y} = -\beta x, \beta \neq 0 \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = 2xy, \lambda \neq 0 \end{cases}$

з) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (a - b_1 x_2)x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = (-a_2 + b_2 x_1)x_2 \end{cases}$

2. Дослідіть стійкість стаціонарних станів із завдання 1 методом Ляпунова.

3. Побудуйте фазовий портрет динамічних систем із завдання 1.

4. Вивчіть вплив параметра r (швидкості зростання) на форму кривої росту в моделі Мальтуса:

$$\frac{dx}{dt} = rx$$

Використовуючи програму для чисельного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), побудуйте три графіки зміни

чисельності популяції для різних швидкостей зростання, виходячи з однакової початкової чисельності. Початкова чисельність: $x_0 = 10$. Швидкість зростання: $r = 0.05, 0.1, 0.2$. Масштаб осей: $t_{\min} = 0, t_{\max} = 50$, $x_{\min} = 0, x_{\max} = 100$. Здійснити тестування правильності роботи програми на основі аналітичного розв'язання диференціального рівняння.

5. Вивчіть вплив швидкості зростання на динаміку чисельності популяції в моделі Ферхюльста:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Використовуючи програму для чисельного рішення ЗДР, побудуйте криві зростання трьох різних значень швидкості зростання. Початкова чисельність: $x_0 = 10$. Ємність середовища: $K = 1000$. Швидкість зростання: $r = 0.2, 0.5, 1.0$. Масштаб осей: $t_{\min} = 0, t_{\max} = 50, x_{\min} = 0, x_{\max} = 1500$. Зобразите три графіки на одних координатних осях. Для одного з графіків визначте фази експоненційного, лінійного та стаціонарного зростання. Вкажіть відповідні часові інтервали. Для кожного графіка визначте момент часу, коли швидкість зростання популяції починає зменшуватися.

6. Напишіть код на мові програмування python і розв'яжіть чисельно попередні задачі даної практичної роботи. Здійсніть графічну візуалізацію результатів з застосуванням мови програмування python.

Контрольні запитання

1. Що є фазовим простором одного диференціального рівняння?
2. Як знаходяться стаціонарні стани моделей, що описуються одним диференціальним рівнянням?
3. Чому при дослідженні стійкості стаціонарного стану можна відкинути нелінійні члени у розкладанні в ряд Тейлора за малим відхиленням від стаціонарного стану?
4. Як визначити стійкість (нестійкість) стаціонарного стану методом Ляпунова?

ПРАКТИЧНА РОБОТА 2. Біфуркації, катастрофи. Типи біфуркацій. Регулярні атрактори динамічних систем

Завдання до практичної роботи 2

1. Побудуйте фазовий портрет для системи рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u(v - 1) \\ \dot{v} &= 4 - u^2 - v^2 \end{aligned}$$

2. Побудуйте фазовий портрет для системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2 \end{cases}$$

3. Побудуйте фазовий портрет системи та визначіть біфуркаційні значення параметра, якщо такі існують:

$$\dot{x} = (x^2 - 2x)^2 - (a + 2)(x^2 - 2x) + 3a + 3$$

4. Побудуйте фазовий портрет системи та визначити біфуркаційні значення параметра a :

$$\dot{x} = -x^4 + 2x^2 - 1 + a, \quad a \in R$$

Розв'яжіть задачу двома способами: графічним та аналітичним.

5. Знайдіть біфуркації в системі:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$
$$x, y \in R$$

6. Знайдіть біфуркації в системі:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$
$$x, y \in R$$

7. Знайдіть біфуркації в системі:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$
$$x, y \in R$$

8. Знайдіть атрактори (репелери) в системі:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ y = -x \end{cases}$$

9. Дослідіть стійкість положень рівноваги системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

10. Дослідіть стійкість положень рівноваги системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

11. Напишіть код на мові програмування python і розв'яжіть чисельно попередні задачі даної практичної роботи. Здійсніть графічну візуалізацію результатів з застосуванням мови програмування python.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 3. Нерегулярні атрактори динамічних систем. Види нерегулярних атракторів. Детермінований хаос. Сценарії переходу до хаосу

Завдання до практичної роботи 3

1. Серед фазових кривих автономної системи знайдіть фазові криві всіх трьох типів: точки, замкнуті гладкі криві та гладкі криві без самоперетинів:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

2. Доведіть, що автономна система має стійкий граничний цикл:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

фазові криві навиваються на граничний цикл.

3. Доведіть, що автономна система має нестійкий граничний цикл

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x - y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

фазові криві "відходять" від граничного циклу.

4. Доведіть, що автономна система має напівстійкий граничний цикл:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0.1y - y^3 - x \end{cases}$$

фазові криві "відходять" від граничного циклу.

5. Дослідіть біфуркації в системі:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - \mu_1 x + \mu_2 x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = \mu_1 y + \mu y + \mu_2(x^2 + y^2) \end{cases}$$

6. Дослідіть біфуркації в системі:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2 - \mu) \\ \dot{y} = -x - y(x^2 + y^2 - \mu) \end{cases}$$

7. Дослідіть біфуркації в системі:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x + \mu_2 x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = y + \mu y + \mu_2(x^2 + y^2) \end{cases}$$

8. Знайдіть біфуркацію Андронова-Хопфа у модифікації рівняння ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} - x + \beta x^3 = 0$$

Дослідіть усі можливі нерухомі точки.

9. Знайдіть біфуркації сідло-вузол Андронова-Хопфа та їхню загальну точку (біфуркацію Богданова-Такенса) для автоколивального осцилятора Богданова-Такенса:

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + a - x^2 = 0$$

10. Знайдіть біфуркацію подвоєння періоду у системі трьох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -vx_2 - x_2x_3 - 2x_1x_3 - \mu(1 - x_1^2 - x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = vx_1 + x_1x_3 - 2x_2x_3 - \mu(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2 \\ \dot{x}_3 = 2\mu x_3 - x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{cases}$$

12. Напишіть код на мові програмування python і розв'яжіть чисельно попередні задачі даної практичної роботи. Здійсніть графічну візуалізацію результатів з застосуванням мови програмування python.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 4. Генератор квазіперіодичних коливань з двома незалежними частотами. Синхронізація хаотичних автоколивань

Завдання до практичної роботи 4

1. Дослідіть режими автоколивань у системі двох зв'язаних генераторів Ван дер Поля при значеннях параметрів $m = 0.1$, $\alpha_1 = 1$, $k = 0.02$. Параметр α_2 змінювати в межах $0.98 < \alpha_2 < 1.02$, досліджуючи вплив розладу парціальних частот ($\alpha_2 \neq \alpha_1$) на динаміку системи:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1 + k(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= (m - x_2^2)y_2 - \alpha_2^2 x_2 + k(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

2. Дослідіть реакцію системи на зовнішній періодичний сигнал ($m = 0.1$; $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1.0015$, $k = 0.02$):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= (m - x_1^2)y_1 - \alpha_1^2 x_1 + k(x_2 - x_1) + k_e \sin[(2\pi f_e)t] \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= (m - x_2^2)y_2 - \alpha_2^2 x_2 + k(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

3. Дослідіть точки рівноваги та їх стійкість для рівняння генератора з жорстким збудженням:

$$\ddot{x} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$$

4. Дослідіть точки рівноваги та їх стійкість для рівняння генератора Теодорчика:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx + y - xz \\ \dot{y} &= -x \\ \dot{z} &= -gz + gx^2 \\ m &= \omega_0 S_0 M - \frac{R_0}{\omega_0 L}\end{aligned}$$

$$g = \frac{\gamma}{\omega_0}$$

$$\tau = \omega_0 t$$

5. Дослідіть точки рівноваги та їх стійкість для рівняння генератора Чуа. Зобразіть петлі сепаратриси сідло-фокус для стану рівноваги при $\alpha = 11.092399$, $\beta = 14.286001$ та зобразіть гетероклінічну траєкторію станів рівноваги при $\alpha = 9.83382$, $\beta = 14.286001$. Зобразіть атрактор типу «подвійного завитка» при $\alpha = 9.0$, $\beta = 14.286001$ та зобразіть атрактор більш складного типу при $\alpha = 10.5$, $\beta = 14.286001$.

$$\ddot{z} + \dot{z} + \beta z = -\beta x$$

$$\dot{x} = -\frac{\alpha}{\beta} \dot{z} - \alpha h(x)$$

$$h(x) = \begin{cases} bx + a - b, & x \geq 1 \\ ax, & |x| \leq 1 \\ bx - a + b, & x \leq -1 \end{cases}$$

6. Дослідіть режими динаміки для генератора квазіперіодичних коливань Чуа для фіксованих значень $a = 0.07$, $b = 0.1$:

$$\dot{x} = -\alpha f(y - x)$$

$$\dot{y} = -f(y - x) - z$$

$$\dot{z} = \beta y$$

$$x = \frac{V_{c1}}{E_1}, y = \frac{V_{c2}}{E_1}, z = \frac{i_L}{C_2 E_1}, \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{1}{LC_2}, a = \frac{m_0}{C_2}, b = \frac{m_1}{C_2},$$

$$f(x) = -ax + 0.5(a + b)[|x + 1| - |x - 1|]$$

7. Дослідіть поведінку неавтономного генератора Ван дер Поля в залежності від амплітуди та частоти зовнішнього гармонічного впливу:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = b \sin \omega t$$

8. Розглянути механізми ефектів синхронізації та гасіння коливань на прикладі двох дисипативно зв'язаних осциляторів Ван дер Поля:

$$\ddot{x}_1 - (\varepsilon_1 - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \gamma(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\ddot{x}_2 - (\varepsilon_2 - x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

9. Напишіть код на мові програмування python і розв'яжіть чисельно попередні задачі даної практичної роботи. Здійсніть графічну візуалізацію результатів з застосуванням мови програмування python.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 5. Стохастичний резонанс. Стохастична синхронізація. Хаос в лінійних та нелінійних одномірних системах

Завдання до практичної роботи 5

1. Проілюструйте логістичне відображення $x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$ для параметра $r = 2.9$, $r = 3.2$ та $r = 3.83$, для останнього значення повинен вийти цикл третього порядку, звернути на це увагу. Ітерації повинні бути представлені за допомогою сходів Ламерея, а граничні точки та граничні цикли виділені будь-яким чином. Побудуйте біфуркаційну діаграму в інтервалі зміни параметра $0 < r < 4$. Поспостерігайте, як повторюватиметься картина біфуркаційної діаграми зі збільшенням фрагмента діаграми, збільшуючи біфуркаційну діаграму на окремій ділянці. Таку властивість називають самоподібністю або масштабною інваріантністю, і її поява характерна для фрактальних структур.

Для побудови біфуркаційної діаграми рекомендується слідувати наступному алгоритму:

1.1. Починаючи з якоїсь початкової точки x_0 та обравши якесь r , в результаті

ітерацій виходять значення $x_n = \{x_1, x_2, x_3 \dots\}$. Вибирається кількість ітерацій досить великою (близько тисячі).

1.2. З усього набору x_n залишається кілька останніх, наприклад, 20-100

значень. Ці значення записуються разом із значенням r .

1.3. Те саме робиться і для інших випадкових точок і того ж r .

1.4. Пункти 1 та 2 повторюються для іншого значення r .

1.5. Записані цифри відображаються залежно від r . Тобто на графіку повинні з'явитись всі точки, які були записані при цьому r .

2. Знайти показники Ляпунова для логістичного відображення в залежності від параметра r .

Для одновимірних відображень використати наступну формулу для знаходження показників Ляпунова

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_i^n \ln |f'(x_i)|$$

Для розрахунку показника Ляпунова для одновимірного відображення можна скористатися таким алгоритмом:

2.1. Обчислюється послідовність x_n , для якогось початкового значення. Рекомендується вибирати досить велике n , тому що передбачається, що n прямує до нескінченності.

2.2. Далі береться похідна від функції відображення f та точки з набору x_n відображаються в інший набір $x_{n'}$, за правилом $x_{n'} = f'(x_n)$.

2.3. Проводиться підсумовування за всіма прологарифмованими членами отриманої послідовності, і отримана сума ділиться на n .

3. Проілюструйте відображення вигляду (відображення синус):

$$x_{n+1} = r \sin(\pi x_n)$$

при значенні параметра $r = 0.6$ та $r = 0.8$. Побудуйте сходи Ламерея. Побудуйте біфуркаційну діаграму в інтервалі зміни параметра $0.2 < r < 1$. Побудуйте залежність показника Ляпунова від керуючого параметра в інтервалі $0 < r < 1$. Спробуйте пояснити схожість графіків із графіками, отриманими для логістичного відображення.

4. Відображення задається таким співвідношенням (відображення Гауса):

$$x_{n+1} = \exp(-ax_n^2) + r$$

Як видно, відмінність цієї системи від інших у тому, що в ній є 2 параметри. Як правило, a вважають рівним 4.9. Що стосується r , то цей параметр змінюється у таких межах: $-1 < r < 1$. Для цього відображення, як і для інших, потрібно побудуйте графік, сходи Ламерея, біфуркаційну діаграму та залежність показника Ляпунова від параметра

r . Після побудови перерахованих вище графіків проаналізуйте, як поводить ся біфуркаційна діаграма при зміні a .

5. Двостороннє відображення задається таким співвідношенням:

$$x_{n+1} = \frac{rx_n}{1 + x_n^3}$$

Це відображення досить специфічне, проте досліджувані нами властивості подібні до властивостей попередніх моделей. У ньому, як і в інших відображеннях, зі збільшенням параметра, що управляє, спостерігається каскад біфуркацій з подвоєнням періоду, однак сама біфуркаційна діаграма виглядає дещо нетипово. До того ж межі зміни параметра r дуже широкі. Проаналізуйте, як поводить ся біфуркаційна діаграма, якщо змінювати керуючий параметр до 500.

6. Відображення Планка. Це відображення названо на честь відомого фізика лише тому, що функція відповідного відображення нагадує формулу Планка.

$$x_{n+1} = \frac{rx_n^3}{1 + \exp(x_n)}$$

Відображення необхідно побудувати разом із сходами Ламерея. Далі показати, як виглядає біфуркаційна діаграма. Зрештою, розрахувати показники Ляпунова. При розв'язанні задачі, рекомендується брати область зміни параметра таку: $1 < r < 7$, а аргумент нехай змінюється в інтервалі $0 < x_n < 5$.

7. Напишіть код на мові програмування python і розв'яжіть чисельно попередні задачі даної практичної роботи. Здійсніть графічну візуалізацію результатів з застосуванням мови програмування python.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 6. Нелінійні двовимірні відображення. Нелінійні комплексні відображення

Завдання до практичної роботи 6

1. Для ілюстрації основних методів, за допомогою яких досліджують двовимірні відображення, ми зупинилися на відображенні Ено:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

Це відображення було запропоновано в 1976 як абстрактний приклад динамічної системи французьким математиком і астрономом Мішелем Ено. Зараз відомо, що воно може бути для опису ряду простих фізичних систем, таких як частинка у в'язкому середовищі під дією імпульсних поштовхів. Відображення Ено залежить від параметрів a і b . При різних поєднаннях значень параметрів динаміка відображення може бути різною. Наприклад, за значення параметрів $a = 1.4$ і $b = 0.3$ виникає так званий «атрактор Ено». Як і у разі одновимірних відображень, двовимірні відображення допускають використання методу біфуркаційних діаграм. Однак, оскільки число параметрів, як правило, більше одиниці, то замість біфуркаційних діаграм частіше наочними виглядають карти динамічних режимів.

Для побудови карт динамічних режимів можна наслідувати такий алгоритм:

1.1. Для якоїсь початкової пари значень $(x_0; y_0)$ при якійсь парі значень (a, b) згідно з формулою відображення виходить набір ітераційних значень $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots (x_n; y_n)$.

1.2. Виділяється кілька q останніх точок. Наприклад, 8 або 16 останніх точок, q – це число, яке буде позначати максимальний період, який можна буде визначити за допомогою цього алгоритму. Виділені точки утворюють набір $(x_{n-q+1}; y_{n-q+1}), (x_{n-q+2}; y_{n-q+2}), \dots$

1.3. Працювати з набором точок, які мають 2 координати, у нашому випадку не дуже зручно. Для цього необхідно замінити 2 координати якимось одним числом. Наприклад, замінити квадратом модуля вектора, що відповідає даній координаті. Тобто, скажімо замість точки $(x_i; y_i)$ використовується значення $d_i = x_i^2 + y_i^2$. У результаті виходить набір $d = \{d_1, d_2, \dots, d_q\}$.

Для подальших дій знадобиться, щоб d_i відображало якесь конкретне $(x_i; y_i)$ і не допускало повторень. Але цього не можна досягти, якщо точки утворюють деяку симетричну фігуру, типу кола – відстані до середини центру координат якого будуть однакові. Тому є сенс запровадити деяку асиметрію у вищевикладену операцію. Наприклад, так: $d_i = (x_i + k_1)^2 + (y_i + k_2)^2$.

1.4. Далі йде робота з набором d . Виділяється останній елемент набору та ведеться порівняння цього елемента послідовно з усіма попередніми. Якщо останній, q -ий елемент, збігається з $(q-1)$ -им елементом, то стверджується, що отриманий набір d має період 1, а значить при параметрах (a, b) система має граничну точку. Якщо збіг йде на $(q-2)$ -ому елементі, то вважається, що в системі реалізувався цикл з періодом 2. І так далі, доки період не буде виявлено. Тобто після досягнення ситуації, коли жодне з чисел набору d не збігатиметься з останнім елементом. І тут стверджується присутність хаосу. Хоча насправді це може бути період вищого порядку або система ще не перейшла до тієї поведінки, що встановилася, але можна вибирати з якою точністю розглядається поведінка системи. У ситуації, коли період не було виявлено, доцільно записати його як нульовий. Перерахований вище метод визначення періоду можна назвати методом простого порівняння.

1.5. Далі, необхідно зберегти результат, що вийшов. У заздалегідь створені 3 масиви зберігаються значення за таким правилом: у перший вектор – значення a , у другій – значення b і, нарешті, у третій – значення періоду, що вийшов. Зрозуміло, порядкові номери даних мають збігатися.

1.6. Усі попередні пункти здійснюються за інших значень a і b . Необхідно перебрати всі можливі комбінації (a, b) з інтервалу, перебираючи з якимось кроком.

1.7. Останній етап – це виведення зображення. Точки, що відповідають різним значенням періоду, необхідно виводити з використанням різних кольорів. Для цього можна використати цикли перевірки чи логічні операції.

Побудуйте атрактор Ено для значення параметрів $a = 1.4$ та $b = 0.3$. Побудуйте карту динамічних режимів в інтервалі параметрів: $0 < a < 2$, $-0.5 < b < 0.5$. Рекомендація: як початкову точку вибирайте значення координат, що не виходять за межі інтервалу $[0,1]$.

2. Універсальне двовимірне відображення. Вид відображення такий:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= bx_n - y_n - (\varepsilon y_n^2 + x_n^2) \\y_{n+1} &= ax_n - (y_n^2 + x_n^2) / 5\end{aligned}$$

Як видно, дана система містить параметри a , b і ε . Однак останній зазвичай прирівнюють до 0.35. Два інших є повноцінними керуючими параметрами. Для цієї системи побудуйте фазовий портрет та карту динамічних режимів. Також рекомендується побудувати карту динамічних режимів в області $1 < a < 1.8$ та $-0.7 < b < 0$. У цього відображення багато різних атракторів, які можна поспостерігати. З них можна виділити атрактори, які виходять при наступних поєднаннях параметрів: $a = -0.6$ та $b = -1.5$, $a = 1.2$ та $b = -0.6$, $a=0.1$ та $b = 3$.

3. Кубічне відображення Дуфінга. Відображення задається такими рівняннями:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= (a - 1)x_n - ax_n^3 + y_n \\y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

Нелінійне відображення слід будувати для початкових умов $|(x_0, y_0)| < 0.1$. На керуючі параметри діють такі обмеження: $0 < a < 4$ і $|b| < 1$. Побудуйте карту динамічних режимів та продемонструвати, як

виглядає саме відображення, зокрема при значенні параметрів $a = 2$ та $b = 0.8$.

4. Відображення Богданова:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + ay_n + bx_n(x_n - 1) - x_n y_n \end{cases}$$

Представте вид відображення на фазовій площині, зокрема представте відображення при значенні $a = -0,5$ та $b = 0,6$. Побудуйте карту динамічних режимів для області параметрів $-4 < a < 0$ та $-3 < b < 4$.

5. Модифіковане відображення Гукенхеймер-Холмс.

$$\begin{cases} x_{n+1} = by_n^2 - x_n \\ y_{n+1} = ay_n(1 - x_n) \end{cases}$$

Побудуйте модифіковане відображення Гукенхеймера-Холмса при значеннях $a = 1.2$ і $b = 0.2$. Відображення дуже чутливе до зміни початкових умов, тому при побудові самого відображення або карти рекомендується брати початкові умови в інтервалі $0 < x_0 < 0.1$ та $0 < y_0 < 0.1$. Побудову карти динамічних режимів необхідно зробити за значення параметрів $-2 < a < 2$, $0 < b < 1$.

6. Напишіть коментарі до коду на мові програмування python, наданого нижче в підрозділі «Приклади коду на мові програмування python для розв'язання задач практичної роботи 6». В коментарях до коду відзначте, які рядки коду використовувались для розв'язання кожної з задач практичної роботи 6.

Приклади коду на мові програмування python для розв'язання задач практичної роботи 1

```
import matplotlib.pyplot as plt

#a = 1.017
#b = 0.3
x0 = 0.001
y0 = 0.0005
```

```

n = 26
k1 = 0.1
k2 = -0.3
# 0 < a < 2 , -0.5 < b < 0.5
list_x = [x0]
list_y = [y0]
list_d = [(x0+k1)**2 + (y0+k2)**2]
q = 16
aa = np.linspace(0, 1, 10)
bb = np.linspace(-0.5, 0.5, 10)
a_res = []
b_res = []
tau_res = []
for a in aa:
    for b in bb:
        x0 = 0.001
        y0 = 0.0005
        list_x = [x0]
        list_y = [y0]
        list_d = [(x0 + k1) ** 2 + (y0 + k2) ** 2]
        for i in range(n):

            x = 1 - a * (x0 ** 2) + y0
            y = b * x0
            x0 = x
            y0 = y
            if i > n - q:
                list_x.append(x0)
                list_y.append(y0)
                list_d.append((x0 + k1) ** 2 + (y0 + k2) ** 2)

tau = 0

```

```
for i in range(q - 1):
    if abs(list_d[q - 1] - list_d[q - i - 2]) > 0.0001:
        tau = tau + 1
    else:
        tau = tau + 1
        break
a_res.append(a)
b_res.append(b)
tau_res.append(tau)

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')

# Data for three-dimensional scattered points

ax.scatter3D(a_res, b_res, tau_res, c=tau_res, cmap='jet')
plt.show()
```

ПРАКТИЧНА РОБОТА 7. Дослідження хаотичного руху за допомогою перерізу Пуанкаре. Аналітичні методи дослідження нелінійної динаміки складних систем. Проблема «швидких» і «повільних» змінних. Метод усереднення. Метод Ван дер Поля

Завдання до практичної роботи 7

1. Знайдіть усереднені рівняння

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon f(I, \theta) \\ \dot{\theta} &= \omega(T) + \varepsilon g(I, \theta) \\ \varepsilon &\ll 1 \end{aligned}$$

2. Застосуйте метод усереднення до рівняння Ван дер Поля. Спочатку знайти швидку і повільну частини руху. Дослідіть розв'язок усередненого рівняння.

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} \left(\frac{x^2}{a_0^2} - 1 \right) + \omega^2 x = 0$$

3. Дослідіть рух частинки під впливом швидко осцилюючої сили.

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} + F_0(x) \cos(\omega t)$$

4. Опишіть рух маятника із швидко осцилюючою точкою підвісу (вертикальні коливання з великою частотою ω та амплітудою a).
5. Опишіть вихровий дрейф зарядженої частинки у швидко осцилюючому електричному полі.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{e}{m} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}) \cos \omega t \end{aligned}$$

6. Застосуйте метод усереднення – дрейфове наближення для опису руху зарядженої частинки в магнітному полі.
7. Якщо незбурена система описує рух по кеплерівських еліпсах несаємодіючих планет навколо Сонця, що притягує їх, то інтеграли I_j –

це великі півосі, ексцентриситети, довготи вузлів і перицентрів, фази φ_j - середні аномалії планет. Мале збурення системи призводить до появи малих добавок у рівняннях руху. У змінних I, φ рівняння збуреного руху набудуть вигляду

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon) \\ \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon)\end{aligned}$$

Функції f і g мають по φ період 2π . У рівняннях (2) змінні I називають повільними змінними, а фази φ - швидкими змінними. У прикладних задачах зазвичай основний інтерес представляє поведінка повільних змінних. Принцип усереднення складається у тому, що для наближеного опису зміни на часах порядку $1/\varepsilon$ система збурених рівнянь замінюється на усереднену систему. Запишіть усереднену систему рівнянь і дослідіть усереднений рух.

8. Для системи рівнянь

$$\dot{I} = \varepsilon(a + b \cos \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega$$

запишіть усереднену систему рівнянь.

9. Для системи рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= -\varepsilon \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \dot{I}_2 &= \varepsilon[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_2)] \\ \dot{\varphi}_1 &= 1 + I_1 \\ \dot{\varphi}_2 &= 1\end{aligned}$$

запишіть усереднену систему рівнянь.

10. Задача про стійкість верхнього положення маятника з вібруючою точкою підвісу. Рівняння руху маятника, точка підвісу якого здійснює вертикальні синусоїдальні коливання, за наявності в'язкого тертя має вигляд

$$\ddot{\theta} + \nu \dot{\theta} + (g - a\omega^2 \sin \omega t)l^{-1} \sin \theta = 0$$

Тут θ - кут відхилення маятника від вертикалі, a і ω - амплітуда і частота коливань точки підвісу, l - довжина маятника, g - прискорення вільного падіння, ν - коефіцієнт загасання. Покажіть, що при досить високій частоті та малій амплітуді коливань точки підвісу верхнє положення рівноваги маятника стійке. Позначити

$$\tau = \omega t, \quad K^2 = \frac{g}{\omega^2 a}$$
$$\delta = \nu K \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{a}{l}}$$

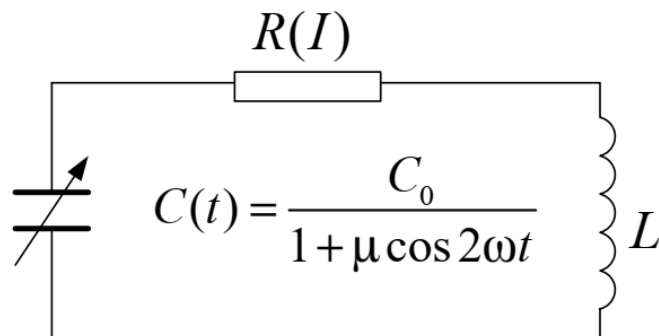
і вважати, що K, δ - величини порядку 1, а ε мале.

**ПРАКТИЧНА РОБОТА 8. Параметричний резонанс.
 Нелінійна динаміка в реакційно-дифузійних системах.
 Хвилі та динамічні структури в реакційно-дифузійних
 системах**

Завдання до практичної роботи 8

1. Проведіть аналіз коливань одноконтурного параметричного генератора з нелінійним затуhanням

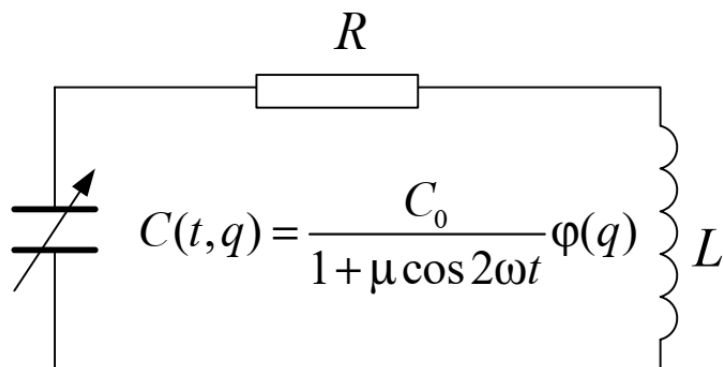
$$L\ddot{q} + Rq + \frac{1}{C_0} (1 + \mu \cos 2\omega t)q = 0$$



$$R = R_0(1 + \alpha_0 I^2)$$

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + \mu \cos 2\omega t}$$

2. Проведіть аналіз коливань одноконтурного параметричного генератора з нелінійним реактивним елементом



$$C(t) = \frac{C_0}{1 + \mu \cos 2\omega t}$$

$$U_c(q, t) = \frac{q}{C(t)} (1 + \gamma q^2)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + U_c(q, t) = 0$$

3. Розгляньте розривні коливання, які при певних умовах можуть здійснюватися в механічній коливальній системі з великим тертям, але при достатньо малій масі. Для конкретності вважайте, що мова йде про систему – пружинний маятник малої маси на рухомій стрічці транспортера. Вважати силу тертя стрічки і тіла функцією відносної швидкості стрічки v_0 і тіла \dot{x} , де $v = v_0 - \dot{x}$. Рух тіла під дією сили тертя $F(v) = F(v_0 - \dot{x})$ і пружної сили $-kx$ визначається рівнянням

$$m\ddot{x} = 1 = (v_0 - \dot{x}) - kx.$$

При достатньо малій масі можна нехтувати доданком $m\ddot{x}$ і тоді останнє рівняння набуває вигляду

$$kx = F(v_0 - \dot{x}).$$

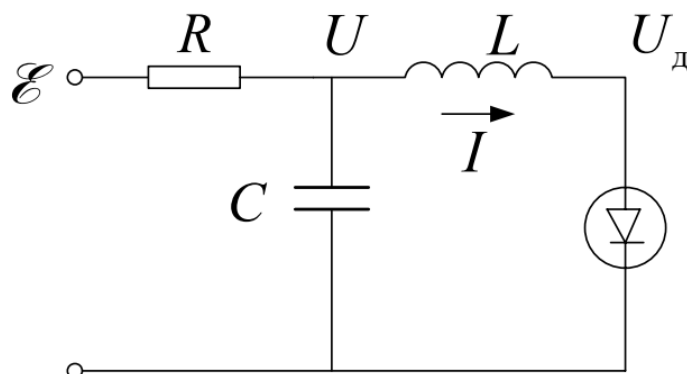
4. Розгляньте загальний підхід до розривних коливань у довільній автономній динамічній системі, що описується рівняннями

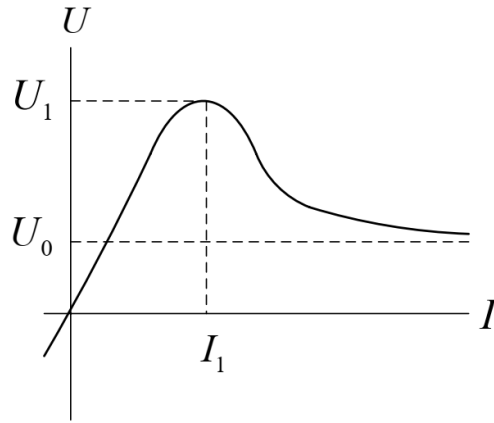
$$\mu \frac{dy}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

де μ – деякий малий параметр ($0 < \mu \ll 1$). Наприклад, для рівняння Ван-дер-Поля

$$f(x, y) = y, \quad F(x, y) = (1 - y^2)y - x.$$

Розгляньте можливі варіанти рухів у такій системі на прикладі схеми з диністором:





$$L \frac{dI}{dt} = U - U_d(I)$$

$$RC \frac{dU}{dt} = \varepsilon - U - RI$$

де U - напруга на конденсаторі, I - струм через індуктивність, ε – ЕРС джерела струму, $U_d(I)$ – ампер-вольтова характеристика диністора, яка у статичному режимі визначається графіком, наведеним на рисунку. При збільшенні струму, починаючи з деяких значень, напруга на диністорі прямує до деякої постійної величини U_0 . Вибравши як малий параметр $\mu = \frac{L}{CR^2} \ll 1$, систему рівнянь можна привести до вигляду:

$$\mu \frac{dI}{dt} = F(I, U) = \frac{U - U_d(I)}{CR^2}$$

$$\frac{dU}{dt} = f(I, U) = \frac{\varepsilon - U - RI}{RC}$$

5. Проведіть аналіз параметричних коливань осцилятора на основі нелінійного диференціального рівняння:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2[1 + h \cos(2\omega t)]x + \beta x^3 = 0$$

де λ – коефіцієнт загасання, h – глибина модуляції, ω_0 – власна частота контуру,

$$0 < h \ll 1, |\omega - \omega_0| \ll 1, |\beta x^2| \ll \omega_0^2.$$

6. Напишіть код на мові програмування python і розв'яжіть чисельно попередні задачі даної практичної роботи. Здійсніть графічну візуалізацію результатів з застосуванням мови програмування python.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 9. Стійкість однорідного стану в реакційно-дифузійних системах. Структури Тьюрінга. Хвильова нестійкість. Самоорганізація в електрохімічних системах

Завдання до практичної роботи 9

1. Напишіть код на мові програмування python, який розв'язує систему рівнянь брюселятора:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a - (b + 1)u + u^2v + D_u \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = bu - u^2v + D_v \nabla^2 v$$

та здійснює графічну візуалізацію у вигляді анімації структур Тьюрінга. При яких параметрах системи спостерігаються структури Тьюрінга?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Хусаїнов, Д. Я., Харченко, І. І., Шатирко, А. В. Введення в моделювання динамічних систем: Навч. посібник: Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2009. 132с.
2. Strogatz, S., Friedman, M., Mallinckrodt, A. J., та ін. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. Computers in Physics. 1994. Vol. 8, No. 5.
3. Thompson, J. M. T., Stewart, H. B. Nonlinear Dynamics and Chaos: Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2002. 457с.
4. Radons, G., Rumpf, B., Schuster, H. G. Nonlinear Dynamics of Nanosystems: Nonlinear Dynamics of Nanosystems. 2010.
5. Gallavotti, G. Nonequilibrium and Irreversibility: Cham: Springer International Publishing, 2014. 261с.
6. Виклюк, Я. І., Камінський, Р. М., Пасічник, В. В. Моделювання складних систем: посібник: Львів: Новий Світ – 2000, 2020. 404с.
7. Лазарєв, Ю. Ф. Моделювання динамічних систем у Matlab: Київ: НТУУ “КПІ,” 2011. 421с.
8. Дербенцев, В. Д., Сердюк, О. А., Соловйов, В. М., та ін. Синергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем: Черкаси: Брама-Україна, 2010. 287с.
9. Zaslavsky, G. M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics: New York: Oxford University Press, 2006. 436с.