

УДК 519.21

В.В. Булдігін, І.П. Блажієвська

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КОРЕЛОГРАМНИХ ОЦІНОК ІМПУЛЬСНИХ ПЕРЕХІДНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ**Вступ**

У статті розглядається задача оцінювання імпульсної перехідної функції $H = (H(\tau), \tau \in \mathbb{R})$ лінійної однорідної системи по спостереженнях за реакцією системи на вхідні сигнали. Для розв'язання цієї задачі поряд із детермінованими методами широко застосовуються статистичні підходи, які ґрунтуються на збуренні системи випадковими процесами та подальшому вивченні спільних характеристик вхідного та вихідного процесів [1–3].

Якщо система стійка, тобто $H \in L_1(\mathbb{R})$, то вихідний процес має спектральну щільність і оцінювання можна здійснювати за допомогою методу періодограм [4, 5]. Для нестійких систем використовуються інші підходи, зокрема корелограмний метод. Суть цього методу полягає в побудові сумісної корелограми між вхідним випадковим процесом, близьким до гауссівського білого шуму, та відгуком системи [6, 7], тобто розглядається модель, коли на вхід системи подається сім'я стаціонарних центрованих гауссівських процесів, залежних від параметра $\Delta > 0$, і таких, що їх спектральні щільності прямують до сталої при $\Delta \rightarrow \infty$. Як оцінка для H береться сумісна корелограма між вхідним та вихідним процесами [8–10].

У статті [11] розглядався корелограмний метод оцінювання функції H за умови $H \in L_2(\mathbb{R})$ та досліджувалась асимптотична поведінка кореляційної функції корелограмної оцінки інтегрального типу. В нашій статті використовуються результати [11] і продовжуються дослідження цих результатів.

Постановка задачі

У даній статті розглядається корелограмний метод оцінювання імпульсної перехідної функції H за умови $H \in L_2(\mathbb{R})$. Припускається, що систему збурює сім'я стаціонарних цен-

трованих гауссівських процесів, спектральні щільності яких збігаються до сталої в кожній точці. Метою статті є вивчення умов асимптотичної нормальності корелограмних оцінок інтегрального типу, а також похибки оцінювання у розумінні збіжності як скінченновимірних розподілів, так і відповідних розподілів у просторі неперервних функцій.

Необхідні означення та попередні відомості

Нехай $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$, – простір комплекснозначних функцій $\varphi = (\varphi(t), t \in \mathbb{R})$, інтегрованих у p -му степені за Лебегом, з нормою
$$\|\varphi\|_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^p dt \right]^{1/p},$$
 та $L_\infty(\mathbb{R})$ – простір обмежених комплекснозначних функцій $\varphi = (\varphi(t), t \in \mathbb{R})$ з нормою $\|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|$.

Розглянемо *фізично здійсниму однорідну лінійну систему з імпульсною перехідною функцією* $H(s), s \in \mathbb{R}$. Це означає, що дійснозначна функція H задовольняє умову $H(s) = 0, s < 0$, а реакція системи на вхідний сигнал $x(t), t \in \mathbb{R}$, має вигляд

$$y(t) = \int_0^\infty H(s)x(t-s)ds = \int_{-\infty}^\infty H(s)x(t-s)ds. \quad (1)$$

Нехай система (1) збурюється стаціонарними гауссівськими центрованими процесами $X_\Delta = (X_\Delta(t), t \in \mathbb{R})$, $\Delta > 0$, які мають неперервні спектральні щільності $f_\Delta = (f_\Delta(\lambda), \lambda \in \mathbb{R})$, $\Delta > 0$. Припустимо, що функції f_Δ задовольняють умови:

$$f_\Delta(\lambda) = f_\Delta(-\lambda), \lambda \in \mathbb{R}; \quad (2a)$$

$$\sup_{\Delta > 0} \|f_\Delta\|_\infty < \infty; \quad (2б)$$

$$f_\Delta \in L_1(\mathbb{R}); \quad (2в)$$

існує таке $c > 0$, що для будь-якого $a > 0$ маємо

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{-a \leq \lambda \leq a} \left| f_\Delta(\lambda) - \frac{c}{2\pi} \right| = 0; \quad (2г)$$

$$K_\Delta \in L_1(\mathbb{R}), \quad (2д)$$

де $K_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_{\Delta}(\lambda) d\lambda$, $t \in \mathbb{R}$, — кореляційна функція процесу X_{Δ} .

Зазначимо, що умови (2а)–(2д) задовольняє, наприклад, сім'я функцій

$$f_{\Delta}(\lambda) = \frac{c}{2\pi} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{\Delta}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \Delta > 0. \quad (3)$$

Згідно з (1) відгуком системи на вхідний сигнал X_{Δ} є випадковий процес

$$Y_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s) X_{\Delta}(t-s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що тут і далі всі інтеграли від значень процесів слід розуміти як середньоквадратичні інтеграли Рімана [12]. Зокрема, з умов (2в), (2д) та нерівності Юнга для згорток [13] випливає, що процеси X_{Δ} і Y_{Δ} є неперервними в середньому квадратичному.

Оцінку для H шукатимемо у вигляді сумісної емпіричної корелограми

$$\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) = \frac{1}{cT} \int_0^T Y_{\Delta}(t+\tau) X_{\Delta}(t) dt, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

де c — стала з умови (2г); T — довжина інтервалу усереднення $[0, T]$.

Розглянемо похибку оцінювання у формі

$$\widehat{W}_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T} [\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)], \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Для вивчення асимптотичних властивостей похибки (5) її зручно записати у вигляді суми:

$$\widehat{W}_{T,\Delta}(\tau) = \widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau) + \widehat{V}_{T,\Delta}(\tau), \quad (6)$$

де

$$\widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T} [\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) - E\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau)]; \quad (7)$$

$$\widehat{V}_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T} [E\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)]; \quad (8)$$

$$E\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\Delta}(\tau-s) H(s) ds. \quad (9)$$

Згідно з (6) дослідження асимптотичних властивостей процесу $\widehat{W}_{T,\Delta} = (\widehat{W}_{T,\Delta}(\tau), \tau \in \mathbb{R})$ зводиться до дослідження властивостей випад-

кового процесу $\widehat{Z}_{T,\Delta} = (\widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau), \tau \in \mathbb{R})$ та функції $\widehat{V}_{T,\Delta} = (\widehat{V}_{T,\Delta}(\tau), \tau \in \mathbb{R})$ при $T, \Delta \rightarrow \infty$.

У статті [8] показано, що за умови $H \in L_2(\mathbb{R})$ кореляційну функцію процесу $\widehat{Z}_{T,\Delta}$ при всіх $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ можна записати в такій формі:

$$\begin{aligned} E\widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)\widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2) = \\ = \frac{2\pi}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2} |H^*(\lambda_2)|^2 + \\ + e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)} H^*(\lambda_1)H^*(\lambda_2)] \times \\ \times \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) f_{\Delta}(\lambda_1) f_{\Delta}(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \end{aligned} \quad (10)$$

де Φ_T — ядро Фейєра:

$$\Phi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{\sin(T\lambda/2)}{\lambda/2} \right)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

H^* — перетворення Фур'є–Планшереля функції H у просторі $L_2(\mathbb{R})$; c — стала з умови (2г).

При цьому границя $C_{\infty}(\tau_1, \tau_2)$ кореляційної функції з формули (10) при $T, \Delta \rightarrow \infty$ має вигляд (див. [11])

$$\begin{aligned} C_{\infty}(\tau_1, \tau_2) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow \infty}} E\widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)\widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda} |H^*(\lambda)|^2 + \\ + e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda} (H^*(\lambda))^2] d\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

Із співвідношення (9) випливає, що, взагалі кажучи,

$$E\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) \neq H(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

тобто оцінка $\widehat{H}_{T,\Delta} = (\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau), \tau \in \mathbb{R})$ є зсуненою. Розглянемо умови, при яких ця оцінка стає асимптотично незсуненою.

Нехай $\alpha \in (0, 1]$. Будемо говорити, що $H \in \text{Lip}_{\alpha}(\mathbb{R})$, якщо функція H рівномірно на $\mathbb{R}$ задовольняє умову Ліпшиця з показником α , тобто існують такі сталі $A > 0$ і $\delta > 0$, що $|H(\tau) - H(s)| \leq A|\tau - s|^{\alpha}$ як тільки $|\tau - s| < \delta$, де $\tau, s \in \mathbb{R}$.

Припустимо, що для заданого $\alpha \in (0, 1]$ параметри T і Δ прямують до нескінченності ($T \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow \infty$) так, що задовольняються умови:

1) має місце

$$\sqrt{T} \left(1 - \frac{2\pi f_{\Delta}(0)}{c} \right) \rightarrow 0; \quad (12a)$$

2) для будь-якого $\delta > 0$

$$\sqrt{T} \int_{\delta}^{\infty} K_{\Delta}(t) dt \rightarrow 0; \quad (12б)$$

3) для будь-якого $\delta > 0$

$$T \int_{\delta}^{\infty} K_{\Delta}^2(t) dt \rightarrow 0; \quad (12в)$$

4) існує $\delta > 0$, таке, що

$$\sqrt{T} \int_{-\delta}^{\delta} |K_{\Delta}(t)| |t|^{\alpha} dt \rightarrow 0. \quad (12г)$$

Справедливе таке твердження про асимптотичну незсуненість оцінки $\hat{H}_{T,\Delta}$ (див. [8]).

Лема 1. Нехай $\alpha \in (0, 1]$ і $H \in L_2(\mathbb{R}) \cap \text{Lip}_{\alpha}(\mathbb{R})$. Якщо $T \rightarrow \infty$ і $\Delta \rightarrow \infty$ так, що виконуються умови (12a)–(12г), то:

I) для всіх $\tau \in \mathbb{R}$ $\hat{V}_{T,\Delta}(\tau) \rightarrow 0$;

II) для будь-якого $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $\sup_{\tau \in [a, b]} |\hat{V}_{T,\Delta}(\tau)| \rightarrow 0$.

Зазначимо, що функції, визначені формулою (3), задовольняють умови (12a)–(12г) при деякому $\alpha \in (0, 1]$, якщо виконується *балансне співвідношення*

$$T\Delta^{-\alpha} \rightarrow 0. \quad (13)$$

Основні результати

Розглянемо дійснозначний центрований гауссівський процес $Z = (Z(\tau), \tau \in \mathbb{R})$ з кореляційною функцією C_{∞} (див. (11)), тобто

$$EZ(\tau_1)Z(\tau_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\tau_1 - \tau_2)\lambda} |H^*(\lambda)|^2 + e^{i(\tau_1 + \tau_2)\lambda} (H^*(\lambda))^2] d\lambda, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}.$$

Далі вважаємо, що процеси $\hat{Z}_{T,\Delta}$, визначені формулою (7), і Z є сепарабельними процесами, заданими на спільному повному ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$.

Мають місце такі теореми про *асимптотичну нормальність* процесів $\hat{Z}_{T,\Delta}$ і $\hat{W}_{T,\Delta}$.

Теорема 1. Нехай $H \in L_2(\mathbb{R})$. Тоді для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}$ маємо

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow \infty}} E \left[\prod_{j=1}^m \hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_j) \right] = E \left[\prod_{j=1}^m Z(\tau_j) \right]. \quad (14)$$

Зокрема, всі скінченновимірні розподіли процесу $\hat{Z}_{T,\Delta}$ прямують при $T, \Delta \rightarrow \infty$ до відповідних скінченновимірних розподілів процесу Z .

Теорема 2. Нехай $H \in L_2(\mathbb{R})$. Якщо $T \rightarrow \infty$ і $\Delta \rightarrow \infty$ так, що $\hat{V}_{T,\Delta} \rightarrow 0$, то для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}$ маємо

$$E \left[\prod_{j=1}^m \hat{W}_{T,\Delta}(\tau_j) \right] \rightarrow E \left[\prod_{j=1}^m Z(\tau_j) \right].$$

Зокрема, при вказаному характері прямування параметрів T і Δ до нескінченності має місце збіжність всіх скінченновимірних розподілів процесу $\hat{W}_{T,\Delta}$ до відповідних скінченновимірних розподілів процесу Z .

З теореми 2 та умов асимптотичної незсуненості оцінки $\hat{H}_{T,\Delta}$ випливає таке твердження.

Теорема 3. Нехай $\alpha \in (0, 1]$ і $H \in L_2(\mathbb{R}) \cap \text{Lip}_{\alpha}(\mathbb{R})$. Якщо $T \rightarrow \infty$ і $\Delta \rightarrow \infty$ так, що виконуються умови (12a)–(12г), то для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}$ маємо

$$E \left[\prod_{j=1}^m \hat{W}_{T,\Delta}(\tau_j) \right] \rightarrow E \left[\prod_{j=1}^m Z(\tau_j) \right].$$

Зокрема, при заданому характері прямування параметрів T і Δ до нескінченності має місце збіжність всіх скінченновимірних розподілів процесу $\hat{W}_{T,\Delta}$ до відповідних скінченновимірних розподілів процесу Z .

Зазначимо, що теореми 1–3 покращують відповідні твердження статті [8].

Наслідок 1. Нехай $\alpha \in (0, 1]$, $H \in L_2(\mathbb{R}) \cap \text{Lip}_{\alpha}(\mathbb{R})$ і спектральні щільності процесів

X_Δ мають вигляд $f_\Delta = \left(\frac{c}{2\pi} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{\Delta}\right), \lambda \in \mathbb{R} \right)$,

$\Delta > 0$ (див. (3)). Якщо $T \rightarrow \infty$ і $\Delta \rightarrow \infty$ так, що виконується балансне співвідношення (13), то має місце твердження теореми 3.

Після встановлення збіжності скінченно-вимірних розподілів природно виникає питання про асимптотичну нормальність оцінки (4) у функціональних просторах, зокрема в просторі неперервних функцій. Подібні питання розглядалися, наприклад, у працях [7–10].

Позначимо $C[a, b]$ простір дійснозначних неперервних функцій, визначених на $[a, b] \subset \mathbb{R}$, з рівномірною нормою.

Далі запис $Y_{T,\Delta} \xRightarrow{C[a,b]} Z$ означає слабку збіжність процесу $Y_{T,\Delta}$ до процесу Z в просторі $C[a, b]$ (при заданому характері прямування параметрів T і Δ до нескінченності).

Згідно із статтею [8] розглянемо функцію

$$g_H(\tau) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \sin^2 \frac{\lambda \tau}{2} d\lambda \right]^{1/2}, \quad \tau \geq 0. \quad (15)$$

Оскільки $H \in L_2(\mathbb{R})$, то ця функція визначена і задає псевдометрики

$$\sigma(\tau_1, \tau_2) = g_H(|\tau_1 - \tau_2|)$$

і

$$\sqrt{\sigma}(\tau_1, \tau_2) = \sqrt{g_H(|\tau_1 - \tau_2|)}, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}.$$

Зазначимо, що якщо $H^*(\lambda) \neq 0$ на множині додатної міри Лебега, то σ і $\sqrt{\sigma}$ — метрики.

Покладемо

$$\mathcal{H}_\sigma(\varepsilon) = \mathcal{H}_\sigma([0, 1], \varepsilon), \quad \mathcal{H}_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon) = \mathcal{H}_{\sqrt{\sigma}}([0, 1], \varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

де $\mathcal{H}_\sigma([0, 1], \cdot)$ і $\mathcal{H}_{\sqrt{\sigma}}([0, 1], \cdot)$ — метричні ентропії відрізка $[0, 1]$ відносно псевдометрик σ і $\sqrt{\sigma}$, відповідно. Оскільки σ і $\sqrt{\sigma}$ залежать лише від $|\tau_1 - \tau_2|$, то для будь-якого $[a, b] \subset \mathbb{R}$ маємо

$$\int_{0+} \mathcal{H}_\sigma(\varepsilon) d\varepsilon < \infty \Leftrightarrow \int_{0+} \mathcal{H}_\sigma([a, b], \varepsilon) d\varepsilon < \infty,$$

$$\int_{0+} \mathcal{H}_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty \Leftrightarrow \int_{0+} \mathcal{H}_{\sqrt{\sigma}}([a, b], \varepsilon) d\varepsilon < \infty.$$

(Запис $\int_{0+} \mathcal{H}_\rho(\varepsilon) d\varepsilon < \infty$ означає, що для всіх

$u > 0$ має місце нерівність $\int_0^u \mathcal{H}_\rho(\varepsilon) d\varepsilon < \infty$.)

У наступній теоремі наводяться достатні умови для неперервності майже напевно процесів $\widehat{Z}_{T,\Delta}$ і Z , а також слабкої збіжності $\widehat{Z}_{T,\Delta}$ до Z при $T, \Delta \rightarrow \infty$ у просторі неперервних функцій.

Теорема 4. Нехай $H \in L_2(\mathbb{R})$ і виконується нерівність

$$\int_{0+} \mathcal{H}_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty. \quad (16)$$

Тоді для будь-якого $[a, b] \subset \mathbb{R}$ мають місце такі твердження:

I) $Z \in C[a, b]$ майже напевно;

II) $\widehat{Z}_{T,\Delta} \in C[a, b]$ майже напевно, $T > 0$, $\Delta > 0$;

III) $\widehat{Z}_{T,\Delta} \xRightarrow{C[a,b]} Z$ при $T, \Delta \rightarrow \infty$.

Зокрема, для будь-яких $x > 0$ і $[a, b] \subset \mathbb{R}$ маємо

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow \infty}} P \left\{ \sup_{\tau \in [a, b]} |\widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau)| > x \right\} = P \left\{ \sup_{\tau \in [a, b]} |Z(\tau)| > x \right\}.$$

Зауваження 1. З теореми Дадлі (див. [15]) випливає, що твердження I теореми 4 виконується і при слабших умовах, ніж (16), а саме при умові

$$\int_{0+} \mathcal{H}_\sigma^{1/2}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty.$$

Ця умова має місце, якщо існує таке $\beta > 0$, що

$$\int_0^\infty |H^*(\lambda)|^2 \log^{1+\beta}(1+\lambda) d\lambda < \infty$$

(див. [8]).

Зауваження 2. Умова (16) виконується, якщо існує таке $\beta > 0$, що

$$\int_0^\infty |H^*(\lambda)|^2 \log^{4+\beta}(1+\lambda) d\lambda < \infty$$

(див. [11]).

Тепер розглянемо асимптотичну поведінку похибки оцінювання $\widehat{W}_{T,\Delta}$ у просторі неперервних функцій при прямуванні параметрів T і Δ до нескінченності.

Відповідно до теорем 2–4 має місце таке твердження.

Теорема 5. Нехай $H \in L_2(\mathbb{R})$ і виконується нерівність (16). Тоді для будь-якого $[a, b] \subset \mathbb{R}$ мають місце такі твердження:

I) $Z \in C[a, b]$ майже напевно;

II) $\widehat{W}_{T,\Delta} \in C[a, b]$ майже напевно, $T > 0$, $\Delta > 0$.

Крім того, якщо при деякому $\alpha \in (0, 1]$ функція $H \in Lip_\alpha(\mathbb{R})$ і параметри $T \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow \infty$ так, що виконуються умови (12а)–(12г), то матимемо:

III) $\widehat{W}_{T,\Delta} \xrightarrow{C[a,b]} Z$.

Зокрема, для будь-яких $x > 0$ і $[a, b] \subset \mathbb{R}$ отримаємо

$$P \left\{ \sqrt{T} \sup_{\tau \in [a,b]} |\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)| > x \right\} \rightarrow \\ \rightarrow P \left\{ \sup_{\tau \in [a,b]} |Z(\tau)| > x \right\}$$

при вказаному вище характері прямування параметрів T і Δ до нескінченності.

Зазначимо, що теореми 4, 5 покращують відповідні твердження статті [8].

Доведення основних результатів

Доведення теореми 1 буде спиратись на формули зв'язку моментів та кумулянтів (див. [1, 12]) і таку допоміжну лему.

Лема 2. Нехай $H \in L_2(\mathbb{R})$. Тоді для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}$ маємо

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow \infty}} \text{cum}_{\widehat{Z}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m) = \begin{cases} 0, & m = 1, \\ C_\infty(\tau_1, \tau_2), & m = 2, \\ 0, & m \geq 3, \end{cases} \quad (17)$$

де $\text{cum}_{\widehat{Z}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m)$ – простий сумісний кумулянт набору випадкових величин $\widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1), \dots, \widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau_m)$ (див. відповідне означення, наприклад, в [1]).

Доведення. Якщо $m \in \{1, 2\}$, то формула (17) виконується у зв'язку з тим, що

$\widehat{Z}_{T,\Delta}$ – центрований процес і має місце рівність (11).

Доведення формули (17) у випадку $m \geq 3$ проведемо в два етапи. На першому етапі покажемо, що кумулянт $\text{cum}_{\widehat{Z}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m)$ можна

подати у вигляді скінченної суми інтегралів із циклічним зачепленням ядер. На другому етапі перевіряються умови теореми 5.3 (part B) [10], згідно з якою кожен доданок у знайдений сумі прямує до нуля при $T, \Delta \rightarrow \infty$. Для встановлення цих фактів будемо використовувати діаграмно-кумулянтний метод [1] та підходи, запропоновані в [10] і [15].

Розглянемо перший етап доведення. З властивостей лінійності кумулянтів та їх інваріантності відносно зсувів, а також з означень процесу $\widehat{Z}_{T,\Delta}$ і оцінки $\widehat{H}_{T,\Delta}$ (див. (7) і (4), відповідно) випливає, що

$$\text{cum}_{\widehat{Z}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m) = \left(\frac{1}{c^2 T} \right)^{\frac{m}{2}} \times \\ \times \int_0^T \dots \int_0^T \text{cum}(Y_\Delta(t_j + \tau_j) X_\Delta(t_j), j = 1, \dots, m) \times \\ \times dt_1 \dots dt_m, \quad (18)$$

де $\text{cum}(Y_\Delta(t_j + \tau_j) X_\Delta(t_j), j = 1, \dots, m)$ – простий сумісний кумулянт набору випадкових величин $Y_\Delta(t_1 + \tau_1) X_\Delta(t_1), \dots, Y_\Delta(t_m + \tau_m) X_\Delta(t_m)$.

Застосовуючи теорему 2.3.2 з [1] до кумулянта, що стоїть під знаком інтеграла у (18), дістаємо

$$\text{cum}(Y_\Delta(t_j + \tau_j) X_\Delta(t_j), j = 1, \dots, m) = \\ = \sum \prod_{p=1}^l \text{cum}(D_p^{(k_p)}),$$

де сума береться по всіх можливих неупорядкованих нерозкладних розбиттях $\{D_1^{(k_1)}, \dots, D_l^{(k_l)}\}$, $l = 1, \dots, 2m$, двостовпцевої таблиці

$$D_{m \times 2} = \begin{bmatrix} Y_\Delta(t_1 + \tau_1) & X_\Delta(t_1) \\ Y_\Delta(t_2 + \tau_2) & X_\Delta(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ Y_\Delta(t_m + \tau_m) & X_\Delta(t_m) \end{bmatrix},$$

k_p – кількість елементів множини $D_p^{(k_p)}$, $p = 1, \dots, l$, а $\text{cum}(D_p^{(k_p)})$ – простий сумісний куму-

лянт набору випадкових величин, що належать множині $D_p^{(k_p)}$. Зрозуміло, що $\sum_{p=1}^l k_p = 2m$.

Нагадаємо [1], що сім'я $\{D_1^{(k_1)}, \dots, D_l^{(k_l)}\}$ називається нерозкладним розбиттям таблиці $D_{m \times 2}$, якщо виконуються такі умови: (i) $D_p^{(k_p)} \neq \emptyset$, $p = 1, \dots, l$; (ii) $D_p^{(k_p)} \cap D_q^{(k_q)} = \emptyset$ для $p \neq q$; (iii) $D_1^{(k_1)} \cup \dots \cup D_l^{(k_l)} = D_{m \times 2}$; (iv) для будь-яких p і q з множини $\{1, \dots, l\}$ існує така послідовність $D_{p_1} = D_p, D_{p_2}, \dots, D_{p_v} = D_q$ з розбиття, що D_{p_j} та $D_{p_{j+1}}$ зачіплюються для всіх $j = 1, \dots, v-1$. Останнє означає, що для будь-якого $j = 1, \dots, v-1$ існує рядок $\tilde{r}_j$ таблиці $D_{m \times 2}$, такий, що $\tilde{r}_j \not\subset D_{p_j}$ і $\tilde{r}_j \not\subset D_{p_{j+1}}$, проте $\tilde{r}_j \subset D_{p_j} \cup D_{p_{j+1}}$.

Оскільки X_Δ і Y_Δ є сумісно гауссівськими центрованими процесами, то $\text{cum}(D_p^{(k_p)}) = 0$ для $k_p \neq 2$. Тому має місце такий запис:

$$\begin{aligned} \text{cum}(Y_\Delta(t_j + \tau_j)X_\Delta(t_j), j = 1, \dots, m) = \\ = \sum \prod_{p=1}^m \text{cum}(D_p^{(2)}), \end{aligned} \quad (19)$$

де сума береться по всіх можливих невпорядкованих нерозкладних розбиттях таблиці $D_{m \times 2}$ на пари $\{D_1^{(2)}, \dots, D_m^{(2)}\}$.

Оскільки порядок елементів у $\{D_1^{(2)}, \dots, D_m^{(2)}\}$ не має значення, можна завжди припускати, що розбиття задовольняє умови: (i) $D_p^{(2)} \cap D_q^{(2)} = \emptyset$ для $p \neq q$; (ii) $D_1^{(2)} \cup \dots \cup D_m^{(2)} = D_{m \times 2}$; (iii) якщо $m \geq 2$, тоді для будь-якого $p \in \{1, 2, \dots, m\}$ множина $D_p^{(2)}$ не збігається з жодним із рядків $r_1, \dots, r_m$ таблиці $D_{m \times 2}$; більше того, для будь-якого $1 \leq v < m$ об'єднання довільної кількості елементів з розбиття $\{D_1^{(2)}, \dots, D_m^{(2)}\}$ не повинно збігатися з об'єднанням будь-яких v рядків таблиці $D_{m \times 2}$; (iv) для будь-якого $p = 1, \dots, m-1$ існує єдиний рядок $\tilde{r}_p$ таблиці $D_{m \times 2}$, такий, що $\tilde{r}_p \subset D_p^{(2)} \cup D_{p+1}^{(2)}$; (v) $r_1 \subset D_1^{(2)} \cup D_m^{(2)}$.

Зауважимо, що сформульовані вище умови роблять елементи в розбитті $\{D_1^{(2)}, \dots, D_m^{(2)}\}$ такими, які послідовно зачіплюються один за одний; $D_m^{(2)}$ зачіплюється за $D_1^{(2)}$.

Далі для певного $D_p^{(2)}$ запишемо $D_p^{(2)} = D_{j, \tilde{j}}^{(2)}$,

де j і $\tilde{j}$ — номери тих двох рядків таблиці $D_{m \times 2}$, в яких містяться елементи множини $D_p^{(2)}$. Таким чином, довільне невпорядковане нерозкладне розбиття $\{D_1^{(2)}, \dots, D_m^{(2)}\}$ може бути записане як

$$\bar{D}^{(2)} = \{D_{j_1, j_2}^{(2)}, D_{j_2, j_3}^{(2)}, \dots, D_{j_{m-1}, j_m}^{(2)}, D_{j_m, j_1}^{(2)}\},$$

де $j_1 = 1$ і $(j_2, \dots, j_m)$ — перестановка чисел $\{2, \dots, m\}$.

Дослідження структури $\bar{D}^{(2)}$ показує, що в цьому розбитті можна виділити три різні класи елементів. До першого класу належать невпорядковані множини

$$D_{j, \tilde{j}}^{(2)} = \{X_\Delta(t_j), X_\Delta(t_{\tilde{j}})\}, \quad j \neq \tilde{j}.$$

Другий клас утворюють невпорядковані множини

$$D_{j, \tilde{j}}^{(2)} = \{Y_\Delta(t_j + \tau_j), Y_\Delta(t_{\tilde{j}} + \tau_{\tilde{j}})\}, \quad j \neq \tilde{j}.$$

І, нарешті, третій клас містить невпорядковані множини

$$D_{j, \tilde{j}}^{(2)} = \{Y_\Delta(t_j + \tau_j), X_\Delta(t_{\tilde{j}})\}, \quad j \neq \tilde{j}.$$

Позначимо $G_1(\bar{D}^{(2)})$, $G_2(\bar{D}^{(2)})$ і $G_3(\bar{D}^{(2)})$ кожний із цих класів, а $m_1(\bar{D}^{(2)})$, $m_2(\bar{D}^{(2)})$ і $m_3(\bar{D}^{(2)})$ — відповідно число їх елементів. Тоді для будь-якого $\bar{D}^{(2)}$ виконуються співвідношення

$$m_1(\bar{D}^{(2)}) = m_2(\bar{D}^{(2)}) \quad \text{і} \quad (20)$$

$$m_1(\bar{D}^{(2)}) + m_2(\bar{D}^{(2)}) + m_3(\bar{D}^{(2)}) = m.$$

Тепер знайдемо кумулянти від наборів величин, що належать кожному з класів. Якщо $D_{j, \tilde{j}}^{(2)} \in G_1(\bar{D}^{(2)})$, то матимемо

$$\text{cum}(D_{j,j}^{(2)}) = K_{X_\Delta}(t_j - t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_j - t_j)\lambda_j} f_\Delta(\lambda_j) d\lambda_j;$$

якщо $D_{j,j}^{(2)} \in G_2(\bar{D}^{(2)})$, то отримаємо

$$\begin{aligned} \text{cum}(D_{j,j}^{(2)}) &= E Y_\Delta(t_j + \tau_j) Y_\Delta(t_j + \tau_j) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_j - t_j)\lambda_j} e^{i(\tau_j - \tau_j)\lambda_j} |H^*(\lambda_j)|^2 f_\Delta(\lambda_j) d\lambda_j; \end{aligned}$$

якщо $D_{j,j}^{(2)} \in G_3(\bar{D}^{(2)})$, то матимемо

$$\begin{aligned} \text{cum}(D_{j,j}^{(2)}) &= E Y_\Delta(t_j + \tau_j) X_\Delta(t_j) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_j - t_j)\lambda_j} e^{i\tau_j\lambda_j} H^*(\lambda_j) f_\Delta(\lambda_j) d\lambda_j. \end{aligned}$$

З останніх формул для добутку кумулянтів із розбиття $\{D_1^{(2)}, \dots, D_m^{(2)}\}$ дістанемо

$$\prod_{p=1}^m \text{cum}(D_p^{(2)}) = \prod_{k=1}^m \text{cum}(D_{j_k, j_{k+1}}^{(2)}), \quad j_{m+1} = j_1,$$

тобто

$$\begin{aligned} \prod_{p=1}^m \text{cum}(D_p^{(2)}) &= \\ &= \int \dots \int_{\mathbb{R}^m} \left(\prod_{k=1}^m e^{i(t_{j_k} - t_{j_{k+1}})\lambda_{j_k}} \right) \varphi_0(\bar{\lambda}, \bar{\tau}, \bar{D}^{(2)}) \times \\ &\times \left(\prod_{k=1}^m \varphi_{j_k}(\lambda_{j_{k+1}}, \Delta, \bar{D}^{(2)}) \right) d\lambda_{j_1} \dots d\lambda_{j_m}, \quad (21) \end{aligned}$$

де $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$; $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$; $j_{m+1} = j_1 = 1$ і $(j_2, \dots, j_m)$ – перестановка чисел $\{2, \dots, m\}$. Для кожного розбиття $\bar{D}^{(2)}$ функція $\varphi_0(\cdot, \bar{D}^{(2)})$ є добутком деяких функцій виду $e^{i(\tau_{j_k} - \tau_{j_{k+1}})\lambda_{j_k}}$, $e^{i\tau_{j_k}\lambda_{j_k}}$ та індикаторних функцій $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(\lambda_{j_k})$, $k = 1, \dots, m$, тому

$$\sup_{\bar{D}^{(2)}} \sup_{\bar{\lambda}, \bar{\tau}} |\varphi_0(\bar{\lambda}, \bar{\tau}, \bar{D}^{(2)})| = 1. \quad (22)$$

Для будь-яких Δ та розбиття $\bar{D}^{(2)}$ кожна функція з множини

$$\mathcal{F}(\Delta, \bar{D}^{(2)}) = \{\varphi_1(\cdot, \Delta, \bar{D}^{(2)}), \dots, \varphi_m(\cdot, \Delta, \bar{D}^{(2)})\}$$

може збігатися лише з однією з таких функцій: f_Δ , $|H^*|^2 f_\Delta$ або $H^* f_\Delta$. Крім того, маємо

$$\begin{aligned} \text{card}\{\varphi \in \mathcal{F}(\Delta, \bar{D}^{(2)}) : \varphi = f_\Delta\} &= m_1(\bar{D}^{(2)}), \\ \text{card}\{\varphi \in \mathcal{F}(\Delta, \bar{D}^{(2)}) : \varphi = |H^*|^2 f_\Delta\} &= m_2(\bar{D}^{(2)}), \quad (23) \\ \text{card}\{\varphi \in \mathcal{F}(\Delta, \bar{D}^{(2)}) : \varphi = H^* f_\Delta\} &= m_3(\bar{D}^{(2)}). \end{aligned}$$

Перетворимо вираз $\prod_{k=1}^m e^{i(t_{j_k} - t_{j_{k+1}})\lambda_{j_k}} = \prod_{k=1}^m e^{it_{j_{k+1}}(\lambda_{j_{k+1}} - \lambda_{j_k})}$, де $\lambda_{m+1} = \lambda_1$, і розглянемо m -кратний інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^T \dots \int_0^T \left(\prod_{k=1}^m e^{it_{j_{k+1}}(\lambda_{j_{k+1}} - \lambda_{j_k})} \right) dt_{j_1} \dots dt_{j_m} = \\ = \prod_{k=1}^m \left(\int_0^T e^{it_{j_{k+1}}(\lambda_{j_{k+1}} - \lambda_{j_k})} dt_{j_{k+1}} \right) = \prod_{k=1}^m \hat{\Phi}_T(\lambda_{j_{k+1}} - \lambda_{j_k}), \end{aligned}$$

де $\hat{\Phi}_T(x) = \int_0^T e^{itx} dt = \frac{1}{ix} [e^{ixT} - 1]$, $x \in \mathbb{R}$. Оскільки

$$|\hat{\Phi}_T(x)| = \left| \frac{e^{ixT} - 1}{ix} \right| = \left| \frac{\sin(xT/2)}{(x/2)} \right|, \quad x \in \mathbb{R},$$

то, врахувавши формули (18)–(21), одержимо

$$\begin{aligned} \text{cum}_{\hat{Z}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m) &= \left(\frac{2\pi}{c^2} \right)^{\frac{m}{2}} \times \\ &\times \sum_{\bar{D}^{(2)}} \int \dots \int_{\mathbb{R}^m} \left(\prod_{k=1}^m \hat{\Phi}^{(T)}(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \right) \varphi_0(\bar{\lambda}, \bar{\tau}, \bar{D}^{(2)}) \times \\ &\times \left(\prod_{k=1}^m \varphi_k(\lambda_k, \Delta, \bar{D}^{(2)}) \right) d\lambda_1 \dots d\lambda_m, \quad (24) \end{aligned}$$

де $\lambda_{m+1} = \lambda_1$, а також

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}^{(T)}(\lambda) &= \left(\frac{1}{2\pi T} \right)^{1/2} \hat{\Phi}_T(\lambda) = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi T} \right)^{1/2} \frac{e^{iT\lambda} - 1}{i\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (25) \end{aligned}$$

Формула (24) показує, що кумулянт $\text{cum}_{\hat{Z}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m)$ зображається у вигляді скінченної суми інтегралів, кожний з яких містить циклічний добуток ядер $\hat{\Phi}^{(T)}$. (Дійсно, в добутку

відповідні ядра послідовно залежать від різниці аргументів $(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$, $k = 1, \dots, m$, та має місце умова $\lambda_{m+1} = \lambda_1$.) Виключаючи функцію φ_0 та залежність функцій $\varphi_k(\cdot, \Delta, \bar{D}^{(2)})$, $k = 1, \dots, m$, від параметра Δ (див. (22), (23) і (26)), отримаємо таку нерівність для всіх цілих $m \geq 3$ і довільного набору $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$:

$$\left| \text{cum}_{\bar{Z}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m) \right| \leq \left(\frac{2\pi}{c^2} \right)^2 \left(\sup_{\Delta > 0} \|f_\Delta\|_\infty \right)^m \times \\ \times \sum_{\bar{D}^{(2)}} \int \dots \int_{\mathbb{R}^m} \left| \prod_{k=1}^m \hat{\Phi}^{(T)}(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \bar{\varphi}_k(\lambda_k, \bar{D}^{(2)}) \right| \times \\ \times d\lambda_1 \dots d\lambda_m, \quad (26)$$

де $\lambda_{m+1} = \lambda_1$, а також для будь-якого розбиття $\bar{D}^{(2)}$ матимемо

$$\bar{\varphi}_k = \begin{cases} \mathbf{1}_{\mathbb{R}}, & \text{якщо } \varphi_k(\cdot, \Delta, \bar{D}^{(2)}) = f_\Delta, \\ |H^*|^2, & \text{якщо } \varphi_k(\cdot, \Delta, \bar{D}^{(2)}) = |H^*|^2 f_\Delta, \\ |H^*|, & \text{якщо } \varphi_k(\cdot, \Delta, \bar{D}^{(2)}) = |H^*| f_\Delta. \end{cases} \quad (27)$$

Оцінкою (26) для кумулянта $\text{cum}_{\bar{Z}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m)$ завершується перший етап доведення.

Перейдемо до другого етапу доведення. Зафіксуємо $\bar{D}^{(2)}$ і розглянемо інтеграл з циклічним зачепленням ядер, що фігурує у формулі (26):

$$\mathbf{I}^{(T)}(\bar{D}^{(2)}) = \int \dots \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{k=1}^m |\hat{\Phi}^{(T)}(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \times \\ \times \bar{\varphi}_k(\lambda_k, \bar{D}^{(2)})| d\lambda_1 \dots d\lambda_m,$$

де $\lambda_{m+1} = \lambda_1$. Зазначимо, що цей інтеграл залежить лише від параметра $T > 0$.

Для вказаного розбиття $\bar{D}^{(2)}$ множина функцій

$$\bar{\mathcal{F}}(\bar{D}^{(2)}) = \{\bar{\varphi}_1(\cdot, \bar{D}^{(2)}), \dots, \bar{\varphi}_m(\cdot, \bar{D}^{(2)})\}$$

розбивається на три класи:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\infty(\bar{D}^{(2)}) &= \{\bar{\varphi} \in \bar{\mathcal{F}}(\bar{D}^{(2)}) : \bar{\varphi} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}\}, \\ \mathcal{M}_1(\bar{D}^{(2)}) &= \{\bar{\varphi} \in \bar{\mathcal{F}}(\bar{D}^{(2)}) : \bar{\varphi} = |H^*|^2\}, \\ \mathcal{M}_2(\bar{D}^{(2)}) &= \{\bar{\varphi} \in \bar{\mathcal{F}}(\bar{D}^{(2)}) : \bar{\varphi} = |H^*|\}. \end{aligned} \quad (28)$$

З формул (20), (23), (27) і (28) випливає, що для будь-якого розбиття $\bar{D}^{(2)}$

$$\begin{aligned} \text{card}[\mathcal{M}_1(\bar{D}^{(2)})] &= \text{card}[\mathcal{M}_\infty(\bar{D}^{(2)})], \\ \text{card}[\mathcal{M}_1(\bar{D}^{(2)})] + \text{card}[\mathcal{M}_2(\bar{D}^{(2)})] + \\ &+ \text{card}[\mathcal{M}_\infty(\bar{D}^{(2)})] = m. \end{aligned} \quad (29)$$

Оскільки $H \in L_2(\mathbb{R})$, то мають місце включення

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\infty(\bar{D}^{(2)}) &\subset L_\infty(\mathbb{R}), \quad \mathcal{M}_1(\bar{D}^{(2)}) \subset L_1(\mathbb{R}), \\ \mathcal{M}_2(\bar{D}^{(2)}) &\subset L_2(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (30)$$

Для m -кратного інтеграла з циклічним зачепленням ядер $\mathbf{I}^{(T)}(\bar{D}^{(2)})$, залежного від параметра $T > 0$, при $m \geq 3$ виконуються умови:

(i) ядра $\hat{\Phi}^{(T)}$ (див. (25)) при всіх $p \in (1, \infty]$ задовольняють умову

$$\|\hat{\Phi}^{(T)}\|_p = T^{1/2-1/p} C(p),$$

де $C(p) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right|^p dx \right]^{1/p}$ – додатна стала, що не залежить від T ;

(ii) серед функцій $\bar{\varphi}_k$, $k = 1, \dots, m$, є представники трьох класів: $\mathcal{M}_\infty(\bar{D}^{(2)})$, $\mathcal{M}_1(\bar{D}^{(2)})$ і $\mathcal{M}_2(\bar{D}^{(2)})$ (див. (28)), для яких виконуються співвідношення (29), (30).

Таким чином, справджуються всі умови теореми 5.3 (part B) [10], згідно з якою

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{I}^{(T)}(\bar{D}^{(2)}) = 0. \quad (31)$$

Оскільки в сумі з формули (26) виключена залежність від параметра $\Delta > 0$ й для кожного її доданка виконується рівність (31), то

$$\text{cum}_{\bar{Z}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T, \Delta \rightarrow \infty.$$

Остання рівність завершує другий етап доведення леми 2.

Тепер перейдемо до доведення теореми 1.

Доведення теореми 1. За умовою теореми, Z є гауссівським процесом з нульовим середнім та кореляційною функцією C_∞ (див. (11)). Тому для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$\text{cum}_Z(\tau_1, \dots, \tau_m) = \begin{cases} 0, & m \neq 2, \\ C_\infty(\tau_1, \tau_2), & m = 2, \end{cases}$$

де $\text{cum}_Z(\tau_1, \dots, \tau_m)$ — простий сумісний кумулянт набору випадкових величин $Z(\tau_1), \dots, Z(\tau_m)$.

З цього факту і формули (17) випливає, що всі кумулянти процесу $\hat{Z}_{T,\Delta}$ збігаються до відповідних кумулянтів гауссівського процесу Z при $T, \Delta \rightarrow \infty$.

Збіжність відповідних моментів (14) випливає із зображення моментів вектора $(\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_j), j = 1, \dots, m)$ за допомогою кумулянтів:

$$E \prod_{k=1}^m \hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_k) = \sum \prod_{p=1}^q \text{cum}_{\hat{Z}_{T,\Delta}}(\tau_j | j \in \nu_p),$$

де сума береться по всіх можливих розбиттях $\{\nu_1, \dots, \nu_q\}$, $q = 1, \dots, m$, множини чисел $\{1, \dots, m\}$ (див. [13]), граничного співвідношення (17) та формули Іссерліса.

Оскільки багатовимірний гауссівський розподіл однозначно визначається своїми моментними функціями, то з (14) та теореми Маркова [16] випливає, що всі скінченновимірні розподіли процесу $\hat{Z}_{T,\Delta}$ прямують до відповідних скінченновимірних розподілів гауссівського процесу Z при $T, \Delta \rightarrow \infty$.

Таким чином, теорема 1 доведена повністю.

Доведення теореми 2. Як і в попередній теоремі, використаємо кумулянтний метод аналізу розподілу випадкового процесу $\hat{W}_{T,\Delta}$ (див. [16]). Для $\tau_1, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}$ розглянемо простий сумісний кумулянт порядку $m \in \mathbb{N}$

$$\text{cum}_{\hat{W}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m) = \text{cum}(\hat{W}_{T,\Delta}(\tau_1), \dots, \hat{W}_{T,\Delta}(\tau_m)).$$

Нехай $m = 1$. Тоді для всіх $\tau \in \mathbb{R}$ за формулою (6) та у зв'язку з тим, що $E\hat{Z}_{T,\Delta} = 0$, маємо

$$\text{cum}_{\hat{W}_{T,\Delta}}(\tau) = E\hat{W}_{T,\Delta}(\tau) = \hat{V}_{T,\Delta}(\tau).$$

Оскільки $T \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow \infty$ так, що $\hat{V}_{T,\Delta}(\tau) \rightarrow 0$, то теорема 2 справджується для $m = 1$.

Нехай $m \geq 2$. Із формули (6), де $\hat{V}_{T,\Delta}$ — дійснозначна не випадкова функція (див. (8)), за властивістю інваріантності кумулянтів вищих порядків відносно зсувів маємо для всіх $\tau_1, \dots, \tau_m \in \mathbb{R}$

$$\text{cum}_{\hat{W}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m) = \text{cum}_{\hat{Z}_{T,\Delta}}(\tau_1, \dots, \tau_m).$$

Таким чином, при $m \geq 2$ доведення теореми 2 випливає з леми 2 та теореми 1.

Доведення теореми 3. Доведення випливає з леми 1 (твердження I) та теореми 2.

При доведенні теорем 4, 5 будемо використовувати підходи, запропоновані в працях [7] і [10].

Перш ніж довести теорему 4, встановимо зв'язок між псевдометриками σ і $\sqrt{\sigma}$, а також між їх ентропійними інтегралами. Оскільки для всіх $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ маємо

$$\begin{aligned} \sigma(\tau_1, \tau_2) &\leq \left[\max_{\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}} \sigma(\tau_1, \tau_2) \right]^{1/2} \sqrt{\sigma}(\tau_1, \tau_2) \leq \\ &\leq \|H^*\|_2^{1/2} \sqrt{\sigma}(\tau_1, \tau_2), \end{aligned} \quad (32)$$

то з умови $\int_{0+} \mathcal{H}_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty$ (див. (16)) випливає

$$\int_{0+} \mathcal{H}_{\sigma}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty, \text{ з якої отримуємо}$$

$$\int_{0+} \mathcal{H}_{\sigma}^{1/2}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty. \quad (33)$$

При всіх $T > 0$, $\Delta > 0$ розглянемо сім'ю псевдометрик

$$\rho_{T,\Delta}(\tau_1, \tau_2) = (E |\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2) - \hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)|^2)^{1/2}, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $H \in L_2(\mathbb{R})$, то має місце нерівність

$$\begin{aligned} \rho_{T,\Delta}(\tau_1, \tau_2) &\leq \frac{4\sqrt{\pi}}{c} \times \\ &\times \left(\sup_{\Delta > 0} \|f_{\Delta}\|_{\infty} \right) \|H^*\|_2^{1/2} \sqrt{\sigma}(\tau_1, \tau_2), \\ &\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (34)$$

Крім того, псевдометрика $\rho_{T,\Delta}$ неперервна відносно псевдометрики σ .

Справді, з формули (5) згідно з нерівністю Коші–Буняковського і нерівністю Юнга для згортки [13] маємо

$$\begin{aligned} E |\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2) - \hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)|^2 &\leq \\ &\leq \frac{8\pi \left(\sup_{\Delta > 0} \|f_{\Delta}\|_{\infty} \right)^2 \|H^*\|_2}{c^2} \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \sin^2 \frac{\lambda(\tau_2 - \tau_1)}{2} d\lambda \right]^{1/2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8\pi \left(\sup_{\Delta > 0} \|f_{\Delta}\|_{\infty} \right)^2 \|H^*\|_2}{c^2} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \times \right. \\
& \left. \times \sin^2 \frac{\lambda(\tau_2 - \tau_1)}{2} d\lambda \right]^{1/2} \|\Phi_T^* \|H^*\|_2 \leq \\
& \leq \frac{16\pi \left(\sup_{\Delta > 0} \|f_{\Delta}\|_{\infty} \right)^2 \|H^*\|_2}{c^2} \sigma(\tau_1, \tau_2).
\end{aligned}$$

Взявши квадратний корінь з останньої нерівності, отримаємо формулу (34).

Доведення теореми 4. Згідно з теоремою Дадлі про неперервність гауссівських процесів [14] твердження I теореми має місце, якщо для будь-якого $[a, b] \subset \mathbb{R}$ маємо

$$\int_{0+} \mathcal{H}_{d_Z}^{1/2}([a, b], \varepsilon) d\varepsilon < \infty, \quad (35)$$

де $d_Z(\tau_1, \tau_2) = (E |Z(\tau_1) - Z(\tau_2)|^2)^{1/2}$.

Згідно із зображенням кореляційної функції процесу Z (див. (11)), для всіх $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення

$$\begin{aligned}
d_Z^2(\tau_1, \tau_2) &= E |Z(\tau_1) - Z(\tau_2)|^2 \leq \\
&\leq \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H^*(\lambda) \sin \frac{\lambda(\tau_1 - \tau_2)}{2} \right|^2 d\lambda = \frac{4}{\pi} \sigma^2(\tau_1, \tau_2).
\end{aligned}$$

Таким чином, нерівність (35) має місце, якщо $\int_{0+} \mathcal{H}_{\sigma}^{1/2}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty$. Згідно з (33), останнє співвідношення впливає з умови (16). Твердження I теореми доведене.

Оскільки $\hat{Z}_{T,\Delta}$ — неперервний у середньому квадратичному гауссівський процес, то з теореми 6.2.2 [7] випливає, що

$$\begin{aligned}
& \sup_{T, \Delta > 0} \sup_{\tau_1, \tau_2 \in [a, b]} E \exp \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \right. \\
& \left. \times \frac{|\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1) - \hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2)|}{\rho_{T,\Delta}(\tau_1, \tau_2)} \right\} < \infty. \quad (36)
\end{aligned}$$

З теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що псевдометрика $\sqrt{\sigma}$ неперервна відносно метрики $d(\tau_1, \tau_2) = |\tau_1 - \tau_2|$. Тому з нерівності (34) дістаємо, що псевдометрика

$$\rho_{\infty}(\tau_1, \tau_2) = \sup_{T, \Delta > 0} \rho_{T,\Delta}(\tau_1, \tau_2), \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R},$$

неперервна відносно метрики d .

З умови (16) та нерівності (34) випливає, що для будь-якого $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\limsup_{u \downarrow 0} \sup_{T, \Delta > 0} \int_0^u \mathcal{H}_{\rho_{T,\Delta}}([a, b], \varepsilon) d\varepsilon = 0. \quad (37)$$

Співвідношення (36) і (37) показують, що виконуються умови леми 4.2.1 [7], згідно з якою має місце твердження II теореми. Зокрема, для будь-якого $h > 0$ отримуємо

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \sup_{T, \Delta > 0} P \left\{ \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in [a, b] \\ |\tau_1 - \tau_2| < \delta}} |\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1) - \hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2)| > h \right\} = 0. \quad (38)$$

У теоремі 1 встановлено, що за умови $H \in L_2(\mathbb{R})$ всі скінченновимірні розподіли процесу $\hat{Z}_{T,\Delta}$ прямують при $T, \Delta \rightarrow \infty$ до відповідних скінченновимірних розподілів процесу Z . Із врахуванням співвідношення (38) з цієї теореми і теореми Прохорова про слабку збіжність випадкових процесів у просторі неперервних функцій (див. [16]) випливає твердження III теореми.

Таким чином, теорема 4 доведена повністю.

Доведення теореми 5. Доведення безпосередньо впливає з теорем 3, 4, леми 1 (твердження II) та критерію слабкої збіжності процесів у просторі неперервних функцій (див., наприклад, [17]).

Висновки

У статті знайдено умови асимптотичної нормальності корелограмої оцінки інтегрального типу та похибки оцінювання для імпульсної перехідної функції $H \in L_2(\mathbb{R})$ лінійної системи. Доведення основних фактів (збіжність скінченновимірних розподілів та слабка збіжність відповідних розподілів у просторі неперервних функцій) ґрунтувались на застосуванні діаграмно-кумулянтного методу, властивостей інтегралів із циклічним зачепленням ядер та класичних теорем про слабку збіжність випадкових процесів у просторі неперервних функцій.

Отримані результати будуть використовуватись при розв'язанні більш загальної задачі, коли до відгуку системи на вхідний сигнал домішується внутрішній шум самої системи.

В.В. Булдыгин, И.П. Блажиевская

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОРРЕЛОГРАММНЫХ ОЦЕНОК ИМПУЛЬСНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрены коррелограммные оценки импульсных переходных функций линейных систем. Предполагалось, что на вход системы подается семья стационарных гауссовских процессов, близких к белому шуму. При условии, что переходная функция принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$, исследована асимптотическая нормальность оценки в смысле сходимости конечномерных распределений, а также в смысле слабой сходимости соответствующих распределений в пространстве непрерывных функций.

V.V. Buldygin, I.P. Blazhievskaya

ON ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE CROSS-CORRELOGRAM ESTIMATORS OF IMPULSE RESPONSE FUNCTIONS IN LINEAR SYSTEMS

In this paper, we consider the cross-correlogram estimators of impulse response functions in linear systems. We hypothesize that the system is disturbed by a family of Gaussian processes close to white noise. We study the asymptotic normality of finite-dimensional distributions of estimators and their asymptotic normality in the space of continuous functions given that the impulse response function belongs to $L_2(\mathbb{R})$.

1. Бриллинджер Д.Р. Временные ряды. Обработка данных и теория. — М.: Мир, 1980. — 536 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционно-го и спектрального анализа. — М.: Мир, 1983. — 312 с.
3. Cariolaro G.L., Di Masi G.B. Second-order analysis of the input of a discrete-time Volterra system driven by white noise // IEEE Trans. Inform. Theory. — 1980. — 26. — P. 175–184.
4. Akaike H. On the statistical estimation of the frequency response function of a system having multiple input // Ann. Inst. Statist. Math. — 1965. — 17. — P. 185–210.
5. Бенткус Р. Об асимптотической нормальности оценки спектральной функции // Литовский мат. сб. — 1972. — 12, № 3. — С. 3–17.
6. Булдыгин В.В. О свойствах эмпирической коррелограммы гауссовского процесса с интегрируемой в квадрате спектральной плотностью // Укр. мат. журн. — 1995. — 7, № 47. — С. 876–889.
7. Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. — К.: ТВ і МС, 1998. — 290 с.
8. Buldygin V.V. and Fu Li. On asymptotical normality of an estimation of unit impulse responses of linear systems. I, II // Theor. Probability and Math. Statist. — 1997. — 54. — P. 3–17; 55. — P. 30–37.
9. Buldygin V.V. and Kurotschka V.G. On cross-correlogram estimators of the response function in continuous linear systems from discrete observations // Random Oper. and Stoch. Equ. — 1999. — 7, N 1. — P. 71–90.
10. Buldygin V., Utzet F. and Zaiats V. Asymptotic normality of cross-correlogram estimates of the response function // Statistical Inference for Stochastic Processes. — 2004. — 7. — P. 1–34.
11. Булдыгин В.В., Блажиевська І.П. Про кореляційні властивості корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2009. — № 5. — С. 120–128.
12. Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980. — 576 с.
13. Edwards R.E. Functional analysis: theory and applications. — New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.
14. Dudley R. Sample functions of the Gaussian process // Annals of Probability. — 1973. — 1, N 1. — P. 66–103.
15. Buldygin V., Utzet F., Zaiats V. A note on the application of integrals involving cyclic products of kernels // QUESTIO. — 2002. — 26, N 1-2. — P. 3–14.
16. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука, 1987. — 398 с.
17. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с.