

ВИЯВЛЕННЯ ТА АНАЛІЗ ПРИХОВАНОГО КЕРУВАННЯ СУКУПНІСТЮ ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ

А. О. Міснік^{1,а}, І. І. Ніщенко¹

¹ Навчально-науковий Фізико-технічний інститут

Анотація

Цю статтю присвячено застосуванню теорії ланцюгів Маркова для виявлення та аналізу прихованого керування складних систем. У роботі побудовано приховану марковську модель, яка описує еволюцію пари частинок, характер взаємодії яких залежить від стану деякого неспостережуваного ланцюга Маркова. Використовуючи алгоритм навчання Баума-Велша та алгоритм декодування Вітербі було оцінено істинні параметри моделі та відновлено послідовність станів прихованого ланцюга.

Ключові слова: ланцюги Маркова, прихована марковська модель, функція правдоподібності, приховане керування

Вступ

Багато сфер людської діяльності пов'язані з обробкою великих обсягів даних. Приховані марковські моделі можуть бути застосовані в різних галузях, де важливо аналізувати послідовності подій і передбачати їхню майбутню поведінку. Прикладами можуть слугувати фінансові ринки, на яких за допомогою ланцюгів Маркова можна прогнозувати зміни та виявляти приховані схеми керування цим ринком, інформаційні мережі, де приховані марковські моделі можуть бути використані для виявлення аномальної поведінки чи шкідливих дій, біологічні системи, у яких необхідно дослідити динаміку популяції тварин чи рослин, тощо.

1. Опис задачі

Нехай $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ і $Y = \{Y_n\}_{n \geq 0}$ – симетричні випадкові блукання на прямій. Досліджується керування парою $(X_n, Y_n)_{n \geq 0}$ таке, що:

- Керування має два режими:
1 – послідовності X і Y незалежні,
2 – послідовності X і Y залежні.
- Перемикання між режимами 1 і 2 відбуваються у випадкові моменти часу і керуються деяким ланцюгом Маркова. Процес керування не є доступним для спостережень.
- Кожна з послідовностей залишається симетричним випадковим блуканням, незалежно від режиму керування.

Задача: за спостереженнями за еволюцією пари $((X_n, Y_n))_{n \geq 0}$ зробити висновок про спосіб керування: з'ясувати, коли відбувається зміна режиму і характер взаємодії у цей момент.

Для розв'язування задачі використовується математичний апарат прихованих марковських моделей, короткому огляду якого присвячено наступний параграф.

2. Прихована марковська модель

Нехай $\{X_n\}_{n \geq 0}$ – послідовність випадкових величин на скінченній множині $E = \{x_1, \dots, x_N\}$. Нехай $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ – послідовність випадкових величин на скінченній множині станів $F = \{y_1, \dots, y_M\}$.

Послідовність $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 0}$ називається прихованою марковською моделлю (ПММ), якщо:

1. Послідовність $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 0}$ є ланцюгом Маркова на $E \times F$.
2. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ є ланцюгом Маркова з деяким початковим розподілом μ і матрицею перехідних ймовірностей A .
3. Для довільного $n \geq 1$ випадкові величини $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ є умовно незалежними при заданих $X_0, X_1, \dots, X_n$, тобто: $\forall n \geq 1 \forall y_0, \dots, y_n \in F$ і $\forall x_0, \dots, x_n \in E$:

$$P(Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=0}^n P(Y_i = y_i | X_i = x_i).$$

Скінченновимірні розподіли послідовності $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 0}$ мають такий вигляд:

$$P(Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mu_{x_0} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} A_{x_i x_{i+1}} \cdot \prod_{j=0}^n B_{x_j y_j},$$

^аalimis-ipt23@lil.kpi.ua

де

$$\begin{aligned} B_{xy} &= P(Y_k = y | X_k = x), \\ A_{x_i x_j} &= P(X_k = x_j | X_{k-1} = x_i), \\ \mu &= (P(X_0 = x_1), \dots, P(X_0 = x_N)). \end{aligned}$$

Трійку $\lambda = (\mu, A, B)$ використовують для позначення ПММ.

При дослідженні прихованих марковських моделей виникають наступні задачі:

1. **Задача оцінювання.** За заданою моделлю $\lambda = (\mu, A, B)$ і заданою послідовністю спостережень $y = (y_0, \dots, y_T)$ визначити ймовірність $P_\lambda(Y = y)$, де $Y = (Y_0, \dots, Y_T)$.
2. **Задача декодування.** За заданою моделлю $\lambda = (\mu, A, B)$ і заданою послідовністю спостережень $y = (y_0, \dots, y_T)$ визначити найбільш ймовірну послідовність станів $x = (x_0, \dots, x_T)$ для прихованого ланцюга Маркова.
3. **Задача навчання.** За заданою послідовністю спостережень $y = (y_0, \dots, y_T)$ визначити модель $\lambda = (\mu, A, B)$, яка максимізує ймовірність $P_\lambda(Y = y)$ спостереженої послідовності [1].

Розв'язання задачі оцінювання базується на алгоритмі прямого та зворотного ходу, який дозволяє обчислити ймовірність $P_\lambda(Y = y)$, в термінах змінних α, β , які задаються рекурентно співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \alpha_0(x) &= \mu_x \cdot B_{xy_0}, \\ \alpha_{t+1}(x) &= \sum_{x'} \alpha_t(x') \cdot A_{x'x} \cdot B_{xy_{t+1}}, \\ \beta_T(x_T) &= 1, \\ \beta_t(x) &= \sum_{x'} A_{xx'} \cdot B_{x'y_{t+1}} \cdot \beta_{t+1}(x'). \end{aligned}$$

Задача декодування розв'язується за алгоритмом Вітербі, який полягає у знаходженні оптимального ланцюжка прихованих станів шляхом відстеження аргумента, при якому досягається максимум ймовірності

$$P_\lambda(X_0^{t-1} = x_0^{t-1}, X_t = x_t, Y_0^t = y_0^t),$$

де $X_0^t = (X_0, \dots, X_t)$, $Y_0^t = (Y_0, \dots, Y_t)$ для кожного t та x_t .

Задача навчання розв'язується з використанням ітераційного алгоритму Баума-Велша. Задавши деяке початкове наближення $\lambda^{(0)}$ моделі, наступні наближення знаходять як

$$\lambda^{(m+1)} = \arg \max_{\lambda} Q(\lambda^{(m)}, \lambda),$$

де $Q(\lambda, \lambda^*)$ є квазі-логарифмічною функцією правдоподібності:

$$Q(\lambda, \lambda^*) = \sum_{k=(k_1, \dots, k_n)} H_{\lambda, k} \cdot \log H_{\lambda^*, k},$$

а $H_{\lambda, k} = P(Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n, X_0 = k_0, \dots, X_n = k_n)$ – функція повної правдоподібності.

Відомо ([2]), що така ітераційна процедура є збі-

жною і дозволяє отримати оцінку максимальної правдоподібності

$$\lambda^* = \arg \max_{\lambda} L_{\lambda}(y_1, \dots, y_n),$$

де $L_{\lambda}(y_1, \dots, y_n) = P_{\lambda}(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n)$ – функція правдоподібності спостережень $(y_1, \dots, y_n)$ при моделі λ .

3. Опис взаємодії в системі

Нехай $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ – ланцюг Маркова на множині $E = \{1, 2\}$, який задається початковим розподілом $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ і матрицею перехідних ймовірностей A .

Нехай $\{(\alpha_n^1, \beta_n^1)\}_{n \geq 1}$, $\{(\alpha_n^2, \beta_n^2)\}_{n \geq 1}$ – незалежні від $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ і незалежні між собою послідовності незалежних випадкових величин зі значеннями $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, розподіл яких задається наступним чином:

$$\forall n : P((\alpha_n^1, \beta_n^1) = (i, j)) = \frac{1}{4}, \quad i = \pm 1, \quad j = \pm 1$$

$$\forall n : P((\alpha_n^2, \beta_n^2) = (i, j)) = \begin{cases} \frac{1}{4} - p, & i \cdot j > 0 \\ \frac{1}{4} + p, & i \cdot j < 0 \end{cases}, \quad i = \pm 1, \quad j = \pm 1$$

де $p \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \setminus 0$ – параметр керування.

Покладемо для довільного $n \geq 1$

$$(\alpha_n, \beta_n) = (\alpha_n^{z_n}, \beta_n^{z_n}) = \begin{cases} (\alpha_n^1, \beta_n^1), & z_n = 1, \\ (\alpha_n^2, \beta_n^2), & z_n = 2. \end{cases}$$

Визначимо послідовність $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 0}$ наступним чином:

$$(X_0, Y_0) = (a, b),$$

де a, b – деякі константи, а для $n \geq 0$ покладемо

$$(X_{n+1}, Y_{n+1}) = (X_n, Y_n) + (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}).$$

Далі будемо використовувати позначення

$$O_n = (\alpha_n, \beta_n) = (O_n^1, O_n^2).$$

Справедливі наступні твердження.

Твердження 1.

$\{X_n\}_{n \geq 1}$ і $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ є симетричними випадковими блуканнями на $\mathbb{Z}$.

З цього твердження випливає, що керування не змінює ймовірнісного закону еволюції кожної компоненти пари. А це означає, що за спостереженнями за однією з них було б неможливо виявити керування парою, чи навіть запідозрити його наявність.

Твердження 2.

Послідовність $(Z_n, O_n)_{n \geq 1}$ утворює приховану марковську модель $\lambda = (\mu, A, B)$, де

$$B_{i, (O^1, O^2)} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & i = 1, \\ \begin{cases} \frac{1}{4} - p, & O^1 \cdot O^2 > 0 \\ \frac{1}{4} + p, & O^1 \cdot O^2 < 0 \end{cases}, & i = 2 \end{cases},$$

де $(O^1, O^2) \in \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$.

Доведене твердження дозволяє застосувати для знаходження невідомого параметра керування p та характеристик прихованого ланцюга $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ математичний апарат прихованих марковських моделей.

4. Знаходження оцінок параметрів прихованої марковської моделі

Як було зазначено в попередньому пункті, оптимальну модель λ^* шукаємо як оцінку максимальної правдоподібності:

$$\lambda^* = \arg \max_{\lambda} L_{\lambda}(o_1, \dots, o_n),$$

де $L_{\lambda}(o_1, \dots, o_n) = P_{\lambda}(O_1 = o_1, \dots, O_n = o_n)$.

Для фіксованого $k = (k_1, \dots, k_n)$ отримуємо:

$$\begin{aligned} H_{\lambda,k} &= L_{\lambda}(o_1, \dots, o_n, k_1, \dots, k_n) = \\ &= P(O_1 = o_1, \dots, O_n = o_n, Z_1 = k_1, \dots, Z_n = k_n) = \\ &= \mu_1^{\mathbb{1}(k_1=1)} \cdot \mu_2^{\mathbb{1}(k_2=2)} \cdot A_{11}^{\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}(k_i=1, k_{i+1}=1)} \times \\ &\times A_{12}^{\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}(k_i=1, k_{i+1}=2)} \cdot A_{21}^{\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}(k_i=2, k_{i+1}=1)} \times \\ &\times A_{22}^{\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}(k_i=2, k_{i+1}=2)} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}(k_i=1)} \times \\ &\times \left(\frac{1}{4} - p\right)^{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}(k_i=2, o_i^1 o_i^2 > 0)} \cdot \left(\frac{1}{4} + p\right)^{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}(k_i=2, o_i^1 o_i^2 < 0)}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} Q(\lambda^{(m)}, \lambda) &= \sum_{i=1}^2 \log \mu_i \cdot \sum_k H_{\lambda^{(m)},k} \cdot \mathbb{1}(k_1 = i) + \sum_{i,j=1}^2 \log A_{ij} \times \\ &\times \sum_{t=1}^{n-1} \sum_k H_{\lambda^{(m)},k} \cdot \mathbb{1}(k_t = i, k_{t+1} = j) + \log\left(\frac{1}{4} - p\right) \times \\ &\times \sum_k \sum_{t=1}^n H_{\lambda^{(m)},k} \cdot \mathbb{1}(k_t = 2, o_t^1 o_t^2 > 0) + \log\left(\frac{1}{4} + p\right) \times \\ &\times \sum_k \sum_{t=1}^n H_{\lambda^{(m)},k} \cdot \mathbb{1}(k_t = 2, o_t^1 o_t^2 < 0). \end{aligned}$$

Максимізуючи функцію $Q(\lambda^{(m)}, \lambda)$ по другому аргументу, отримали такі оцінки параметрів моделі для довільного $m > 0$:

$$\begin{aligned} \mu_i^{(m+1)} &= \frac{\alpha_1^{(m)}(i) \cdot \beta_1^{(m)}(i)}{\alpha_1^{(m)}(1) \cdot \beta_1^{(m)}(1) + \alpha_1^{(m)}(2) \cdot \beta_1^{(m)}(2)}, \\ A_{ij}^{(m+1)} &= \frac{\sum_{t=1}^{n-1} \alpha_t^{(m)}(i) \cdot A_{ij}^{(m)} \cdot B_{j o_{t+1}}^{(m)} \cdot \beta_{t+1}^{(m)}(j)}{\sum_{t=1}^{n-1} \alpha_t^{(m)}(i) \cdot \beta_t^{(m)}(i)}, \\ p^{(m+1)} &= \frac{\sum_{t=1}^n \alpha_t^{(m)}(2) \beta_t^{(m)}(2) \cdot \mathbb{1}(o_t^1 o_t^2 < 0) - \sum_{t=1}^n \alpha_t^{(m)}(2) \beta_t^{(m)}(2) \cdot \mathbb{1}(o_t^1 o_t^2 > 0)}{4 \sum_{t=1}^n \alpha_t^{(m)}(2) \beta_t^{(m)}(2)}. \end{aligned}$$

Покращені оцінки були знайдені за допомогою ітераційної процедури максимізації функції правдоподібності, а отже, згідно з теоретичними відомостями, збігаються до аргументу локального максимуму функції правдоподібності [2].

5. Аналіз отриманих результатів

За допомогою мови програмування Python було змодельовано сукупність випадкових блукань на прямій (рис. 1), згенеровано ланцюги Маркова і спостереження, після чого були застосовані алгоритми прямого і зворотного ходу, Баума-Велша і Вітербі [3].

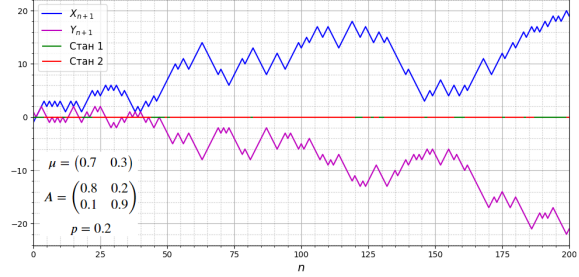


Рис. 1. Пара випадкових блукань на прямій

Таблиця 1. Знайдені параметри ПММ

Довжина ланцюга	μ	A	p
200	(0.67648 0.32352)	$\begin{pmatrix} 0.82732 & 0.17268 \\ 0.09923 & 0.90077 \end{pmatrix}$	0.20685
400	(0.64677 0.35323)	$\begin{pmatrix} 0.82868 & 0.17132 \\ 0.08492 & 0.91508 \end{pmatrix}$	0.19893
600	(0.67746 0.32254)	$\begin{pmatrix} 0.81999 & 0.18001 \\ 0.09997 & 0.90003 \end{pmatrix}$	0.20535
800	(0.69525 0.30475)	$\begin{pmatrix} 0.80558 & 0.19442 \\ 0.10531 & 0.89469 \end{pmatrix}$	0.20757
1000	(0.70779 0.29221)	$\begin{pmatrix} 0.79292 & 0.20708 \\ 0.11622 & 0.88378 \end{pmatrix}$	0.20963
Вихідні параметри	(0.7 0.3)	$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$	0.2

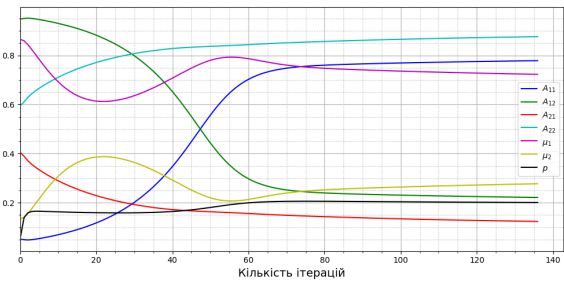


Рис. 2. Зміна параметрів моделі по ітераціям

У таблиці 1 наведено отримані в ході алгоритмів параметри моделі для різної довжини ланцюга. На основі отриманих даних було побудовано графік процесу збіжності параметрів в алгоритмі Баума-Велша (рис. 2), а також наочно продемонстровано порівняння істинного ланцюга Z з ланцюгом $\hat{Z}$, знайденим за допомогою алгоритму Вітербі (рис. 3). Для набору зі ста ланцюгів $Z^1, \dots, Z^{100}$ довжиною 1000 станів кожний було виявлено стани, які не співпали у кожному ланцюзі і обчислено усереднену частоту неспівпадінь за формулою:

$$q = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \sum_{t=1}^{1000} \frac{\mathbb{1}(Z_t^i \neq \hat{Z}_t^i)}{1000}.$$

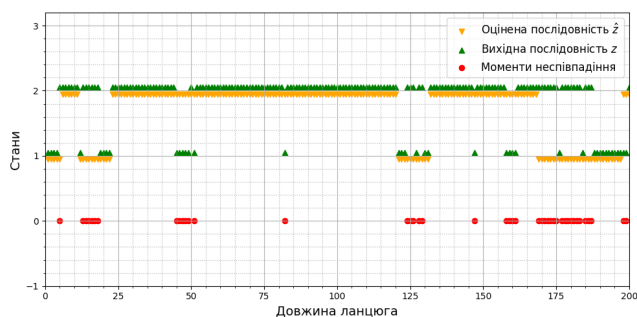


Рис. 3. Приклад отриманого ланцюга у порівнянні з відомим

Отримали

$$q = 0,2075.$$

Візьмемо тепер інші початкові параметри для генерації спостережень, щоб показати як зміниться характер еволюції блукання (рис. 4). З графіка видно, що перехід з одного стану в інший тепер відбувається частіше, а параметр керування p має менший вплив на поведінку послідовності, оскільки він став ближчим до 0, ніж у попередньому випадку. Результати для такої послідовності спостережень наведені у таблиці 2.

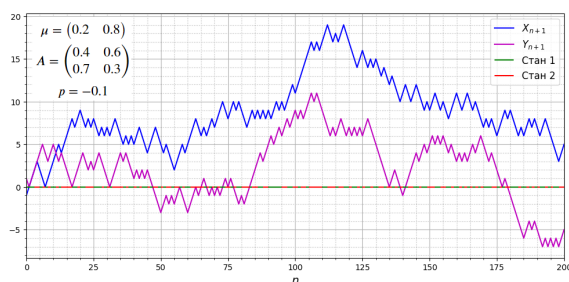


Рис. 4. Пара випадкових блукань на прямій

Порівнявши таблицю 1 і таблицю 2, можна побачити, що при частій зміні станів ланцюга параметри моделі оцінюються менш точно при однаковій кількості ітерацій, проте близькі до істинних.

Таблиця 2. Знайдені параметри ПММ

Довжина ланцюга	μ	A	p
200	(0.1798 0.8202)	$\begin{pmatrix} 0.3544 & 0.6456 \\ 0.7859 & 0.2141 \end{pmatrix}$	-0.1301
400	(0.1736 0.8264)	$\begin{pmatrix} 0.3478 & 0.6522 \\ 0.8007 & 0.1993 \end{pmatrix}$	-0.1217
600	(0.1644 0.8356)	$\begin{pmatrix} 0.3656 & 0.6344 \\ 0.7568 & 0.2432 \end{pmatrix}$	-0.1234
800	(0.1724 0.8276)	$\begin{pmatrix} 0.3887 & 0.6113 \\ 0.7509 & 0.2491 \end{pmatrix}$	-0.1132
1000	(0.1845 0.8155)	$\begin{pmatrix} 0.3903 & 0.6097 \\ 0.7414 & 0.2586 \end{pmatrix}$	-0.1024
Вихідні параметри	(0.2 0.8)	$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$	-0.1

Висновки

У роботі було розв'язано задачу виявлення прихованого керування системою двох випадкових блукань. Систему було задано прихованою марковською моделлю, в якій стани прихованого ланцюга Маркова визначають характер взаємодії пари випадкових блукань. Використовуючи алгоритм навчання Баума-Велша, було знайдено оцінки параметрів цієї моделі – початкового розподілу, матриці перехідних ймовірностей прихованого ланцюга та параметра керування. Результати чисельного експерименту продемонстрували високу точність отриманих оцінок. Застосування алгоритму декодування Вітербі дозволило достатньо добре відтворити послідовність станів прихованого ланцюга і виявити, як відбувалася зміна характеру взаємодії випадкових блукань.

Перелік використаних джерел

1. Barbu V. S., Limnios N. Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models Toward Applications. Т. 1. — 2008.
2. Koski T. Hidden Markov models for bioinformatics. Т. 2. — Springer Science & Business Media, 2001.
3. Nilsson M. First Order Hidden Markov Model: Theory and Implementation Issues. — 2005. — (Blekinge Institute of Technology Research report).