Четверта славнозвісна задача давнини і відшукання її розв'язку

О. М. Кравчук[1], А. Л. Никитюк[1]

[1]*Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна*

olkr57@ukr.net

Анотація

У статті подано дослідження історичного аспекту розв'язання однієї із славнозвісних задач давнини – побудови правильних багатокутників лише за допомогою циркуля та лінійки. Обґрунтовуються деякі історичні міркування відомих вчених–математиків щодо можливості побудови за допомогою циркуля та лінійки правильного семикутника.

Ключові слова: побудова; правильний n–кутник; циркуль; лінійка.

Задачі на побудову зародилися ще в античні часи, при розв'язанні яких використовували циркуль і лінійку, проте як окрема вітка абстрактної математики виокремилися значно пізніше. Теорію розв'язування задач на побудову було розроблено лише у XIX ст., коли точно було визначено клас задач, які розв'язують за допомогою цих інструментів.

Над теорією задач на побудову лише циркулем працював датський математик Георг Мор (1640 — 1697), пізніше – італійський математик Лоренцо Маскероні (1750 – 1800). У 1890 році австрійський математик А.Адлер довів, що будь–яка задача на побудову, яка розв'язується циркулем і лінійкою, може бути розв'язана лише циркулем. Над розв'язанням задач на побудову лише лінійкою працювали Ламберт, Бріаншон і Понсоле. Найповніше розробив геометрію лінійки Штаудт(Нюрберг, 1847 р.)

Протягом багатьох століть математики, а ще більше нематематики , шанувальники цієї науки, цікавилися «трьома славнозвісними задачами давнини»: подвоєнням куба, трисекцією кута, квадратурою круга, які не розв'язані ще донині. Задачі ці внаслідок спокусливої простоти їх формулювання і безрезультатності спроб розв'язати їх циркулем і лінійкою набули широкої популярності. Про спроби розв'язати їх розповідалось сотні разів багатьма мовами світу. Першим серйозним науковим напрацюванням у цьому аспекті є цінна книжка великого французького історика математики Жана Етьєна Монтюкла (1725–1799) «Історія досліджень про квадратуру круга з доповненням огляду про задачі подвоєння куба і трисекцію кута».

Надзвичайна популярність згаданих трьох задач затьмарила існування двох аналогічних задач давнини. Одна з них є не менш, якщо не більш, важливою в історії математики. Це задача про правильний семикутник, що є окремим випадком загальної проблеми про побудову правильних многокутників. Дослідженням цих питань займалися Гаусс, Шуберт, Гермес і Ейлер. Ще з стародавніх часів відомо, що давньогрецький Архімед написав працю «Про семикутник», яка залишилась невідомою. Вона дуже інтригувала істориків математики. Адже з часів Гаусса (з початку XIX ст.) відомо, що правильний семикутник не можна побудувати, користуючись тільки циркулем і лінійкою, як цього вимагала грецька математика.

Можна було б зробити припущення, що Архімед помилявся і вважав задачу побудови семикутника можливою. У цьому випадку ми мали б приклад того, як помилявся Архімед. Лейбніц зауважував, що помилки великих умів можуть бути повчальнішими, ніж їх правильні твердження, повчальнішими з точки зору методології і методики науки.

Можна було б відносно змісту невідомої праці Архімеда зробити друге припущення, а саме, що Архімед доводив неможливість розв'язання задачі на побудову правильного семикутника циркулем і лінійкою. При такому припущенні виходило б, що Архімед випередив досягнення Гаусса, а про Архімеда, якого всі і завжди вважали найвидатнішим математиком усіх часів і всіх народів, ми були б ще вищої думки, ніж тепер. Виявляється, що обидва ці припущення неправильні.

Приступаючи до розв'язання цієї задачі, можна було б міркувати звичайним способом: припускаючи, що задачу розв'язано, почати шукати співвідношення, які існують між шуканими, даними і допоміжними величинами та як, на основі цих співвідношень, виконати побудову. Могли б міркували так.

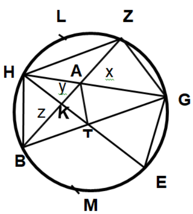

Рис. 1.

Припустимо, що коло (рис. 1) поділено на сім рівних частин точками B, H, L, Z, G, E, M, які будуть вершинами семикутника (для спрощення рисунка сторони семикутника не проведені).

Дуга BH буде сьомою частиною кола, хорда BH – стороною правильного вписаного семикутника . відрізки, що сполучають деякі вершини: HZ, HG, HE, BZ, BG, – це діагоналі семикутника.

Сполучимо ще відрізок AT точки перетину діагоналей BZ та HG і діагоналей BG і HE.

Задача на побудову правильного семикутника буде розв'язана, якщо визначимо розташування точок K і A на діагоналі BZ. Маємо:

1. $\angle BZH = \angle ZHG = \angle AHK = \angle ZBG$, як вписані кути, що спираються на $\frac{1}{7}$ частину кола; позначимо цей кут α; $\alpha = \frac{360°}{2 \cdot 7} = \frac{180°}{7}$; $7\alpha = 180$.

2. ∠BHK = ∠HBZ = 2α, як вписані кути, що спираються на дуги, які дорівнюють $\frac{2}{7}$ кола;

3. ∠KAH = 2α, як зовнішній кут трикутника HAZ;

4. ∠HKA = ∠BKT = 4α, як зовнішній кут трикутника BKH;

5. ∠BKH = ∠AKT = 3α, як кути, суміжні кутам HKA і BKT(п.4);

6. △BHA = △BHT (у них спільна сторона BH і відповідно рівні прилеглі до цієї сторони кути): у трикутнику BHA ∠HBA = 2α, ∠BHA = 3α; у трикутнику BHT ∠BHT=2α, ∠HBT = 3α; отже, HA=BT ; BA=HT;

7. △BTA = △HTA за трьома відповідно рівними сторонами; звідси ∠HTA = ∠BAT = 2α, бо △KTA рівнобедрений і ∠AKT = 3α; отже, KA = KT;

8. △HKA подібний △HKZ (у цих трикутників відповідні кути рівні: ∠HKA – спільний, ∠KHA = ∠HZK = α), звідси HK:KZ=KA:HK, або BK:KZ=KA:BK, або KZ·KA = BK2. Введемо позначення: AZ = AH = x, BK = KH = z, KA = y; тоді маємо: z:(x+y)=y:z, або
$$(x + y)y = z^2 \tag{1}$$

9. △AHK подібний △AHK(∠KHA – спільний за п.3 і 7). З подібності трикутників випливає, що HT:HA=HA:HK, або BA:HA=HA:BK, або BA·BK = HA2, або (z+y):x = x:z, або
$$(x + y)y = z^2 \tag{2}$$

Рівності (1) і (2) виражають умови, які повинні задовольняти відрізки діагоналі BZ, якщо коло поділено точками B, H, L, Z, G, E, M на 7 рівних частин і BH є стороною правильного вписаного семикутника. Якщо ці умови можна здійснити циркулем і лінійкою, то задачу на побудову семикутника можна розв'язати.

Свою працю про семикутник Архімед починає відзразу з побудов відрізків, що задовольняють виведені вище співвідношення (1), (2), ні слова не пояснюючи те , для чого це робиться і до чого приведе або мусить привести . Результат проведених нами міркувань з подивом переконує у тому , що нічим не умотивована побудова несподівано приводить до розв'язання певної задачі.

Але поділ відрізка BZ на подібні для побудови правильного семикутника частин x,y і z приводить до системи рівнянь $\begin{cases}(x+y)y = z^2,\\(y+z)z = x^2.\end{cases}$ яку не можна розв'язати циркулем і лінійкою , тому побудова правильного семикутника циркулем і лінійкою неможлива.

У 1796 р. Гаусс зробив своє перше математичне відкриття: довів, що правильний сімнадцятикутник можна побудувати з допомогою циркуля та лінійки. У 19–річному віці студент зробив вагомий внесок у розв'язання проблеми побудови правильних многокутників, що мала більш як двадцятистолітню історію. Так, ще у VI ст. до н.е. грецький математик Піфагор та його учні розв'язали перші задачі на побудову правильних многокутників. Пізніше, у III ст. до н. е. грецький математик Евклід у своїх «Началах» детальн розглянув способи виконання таких побудов для правильних многокутників, кількість сторін яких дорівнює 3,4,5,6,15. Крім того, античні математики вміли будувати всі ті правильні многокутники, які можна отримати з вже побудованих шляхом подвоєння кількості їх сторін, тобто при $n = 2^k$, $n = 3 \times 2^k$, $n = 1 \times 2^k$ (k=1,2,3...). Виникало питання: чи можна за допомогою циркуля та лінійки побудувати правильний n-кутник для інших значень n? Якщо так, то з будь-якими чи ні? Проте, ні античні математики, ні математики наступних століть не змогли відповісти на це запитання.

Циркулем та лінійкою можна побудувати лише ті залежності між величинами, які мовою алгебри записуються за допомогою квадратних рівнянь або зводяться до них. Гаусс показав , що циркулем та лінійкою можна побудувати правильний n-кутник , якщо n є просте число виду $2^{2k}+1$, де k=1,2,3,... Ця умова, як можна довести, є необхідною і достатньою. Варто зауважити, що задача про побудову правильного n–кутника рівносильна задачі про поділ кола на n рівних частин. Саме в такій постановці розв'язав задачу Гаусс, звівши її до простішого випадку, коли число n–просте.

Архімед не помилявся у своїх міркуваннях і не намагався будувати правильний семикутник циркулем та лінійкою. Він не випередив ідей Гаусса, що, звичайно, мало імовірно. Він додав у своїй відомій праці про семикутник четверту стародавню задачу до трьох давно відомих (про подвоєння куба, трисекцію кута і квадратуру круга), як неможливо розв'язати циркулем та лінійкою. Історія розв'язання задачі про семикутник є однією із найвагоміших і найцікавіших серед стародавніх задач.

Теорія задач на побудову відображає особливості і властивості графічної практики і показує шляхи її удосконалення та розвитку.

Перелік посилань

Костарчук В.М., Хацет Б.І. Про можливе і неможливе в геометрії циркуля і лінійки . К.,1971.204с.

Голованов Я. Світочі науки . Етюди про вчених.К., "Веселка",1970,215с.

Карл Фрідріх Гаусс – Видатні особистості: Електронний ресурс: Режим доступу: $http : //novopetrivske - osoba.edukit.mk.ua/vidatni_matematiki/karl_fridrih_gaus/$