

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ПРАКТИКУМ Частина 1

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня **бакалавра**
за спеціальностями **126 «Інформаційні системи та технології»**,
121 «Інженерія програмного забезпечення»

Укладачі: **О. В. Гавриленко**

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент

*Павлов О.А., д.т.н., професор,
професор кафедри інформатики та програмної інженерії,
факультет інформатики та обчислювальної техніки*

Відповідальний редактор

*Жураковська О.С., к.т.н.,
доцент кафедри інформаційних систем та техніки,
факультет інформатики та обчислювальної техніки*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 27.01.2022 р.)
за поданням Вченої ради факультету/навчально-наукового інституту
(протокол № 4 від 28.12.2021 р.)*

Навчальний посібник призначений для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» кафедри інформаційних систем та технологій та спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» кафедри інформатики та програмної інженерії всіх освітніх програм та всіх форм навчання. У посібнику наведено систематизоване викладення багатьох основних відомостей з теорії ймовірностей, ймовірнісних процесів та математичної статистики з орієнтацією на розв'язання задач з вказаної дисципліни студентами технічних спеціальностей. Метою автора було розвинути навички студентів до розв'язання задач з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для їх застосування в інженерній практиці.

Реєстр. № **НП XX/XX-XXX**. Обсяг **5,8** авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1	6
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №1	8
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2	12
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №2	14
ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ №3-4.....	17
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №3	22
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №4	26
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №5.....	30
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №5	32
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №6.....	39
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №6	43
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7.....	47
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №7	48
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №8.....	53
ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ №9-11.....	53
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №9	66
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №10	74
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №11	82
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №12.....	88
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №12	93
ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ №13-14.....	99
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №13	112
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №14	116
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 15.....	124
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №15	126
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №16.....	131
ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ	134
ДОДАТКИ	136
ЛІТЕРАТУРА	139

ВСТУП

Дисципліна “Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика” має на меті вивчення основ математичної теорії ймовірностей, ймовірнісних процесів, вивчення ймовірнісно-статистичного матеріалу, вміння розв’язувати різноманітні задачі згідно класичної схеми, способи перерахунку елементів скінчених множин, вміння застосовувати набуті знання до розв’язку прикладних задач, які виникають на практиці, вміння будувати математичні моделі реальних процесів.

По закінченню вивчення дисципліни студент набуває такі навички та вміння:

- володіння основною термінологією дисципліни, вміння пояснити зміст базових понять і розділів;
- вміння класифікувати стандартні задачі за ознаками, вміння розв’язувати їх;
- володіння навичками роботи з літературою з дисципліни, знання основних підручників, довідників, таблиць. Вміння знайти у літературі необхідну інформацію (спосіб розв’язання задач);
- знання основних прийомів розв’язання стандартних задач теорії ймовірностей (комбінаторні методи, методи, пов’язані з основними теоремами, метод характеристичних функцій, методи розрахунків характеристик дискретних та неперервних розподілів, вміння користуватися біноміальним розподілом та його граничними випадками, нормальним розподілом, законом великих чисел, центральною граничною теоремою тощо)
- вміння проводити стандартні статистичні розрахунки вручну та з використанням комп’ютерних програм, знання основних статистичних процедур: розрахунків середніх, дисперсій, моментів, коефіцієнтів кореляції.

КОМПЕТЕНТНОСТІ

Загальні компетентності:

- ЗК-1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Спеціальні (фахові, предметні) компетентності
- ФК-13. Здатність проводити обчислювальні експерименти, порівнювати результати експериментальних даних і отриманих рішень.

ПРОГРАМНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

- ПРН-1. Знати лінійну та векторну алгебру, диференціальне та інтегральне числення, теорію функцій багатьох змінних, теорію рядів, диференціальні рівняння для функції однієї та багатьох змінних, операційне числення, теорію ймовірностей та математичну статистику в обсязі, необхідному для розробки та використання інформаційних систем, технологій та інфокомунікацій, сервісів та інфраструктури організації.
- ПРН-2. Застосовувати знання фундаментальних і природничих наук, системного аналізу та технологій моделювання, стандартних алгоритмів та дискретного аналізу при розв’язанні задач проектування і використання інформаційних систем та технологій.

ПРЕРЕКВІЗИТИ ТА ПОСТРЕКВІЗИТИ ДИСЦИПЛІНИ (МІСЦЕ В СТРУКТУРНО-ЛОГІЧНІЙ СХЕМІ НАВЧАННЯ ЗА ВІДПОВІДНОЮ ОСВІТНЬОЮ ПРОГРАМОЮ)

Пререквізити:

- Спеціальні розділи математики.

Постреквізити:

- Ймовірнісні моделі та статистичне оцінювання в інформаційно-управляючих системах.

Навчальний посібник призначений для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» кафедри інформаційних систем та технологій та спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» кафедри інформатики та програмної інженерії всіх освітніх програм та всіх форм навчання.

У посібнику наведено систематизоване викладення багатьох основних відомостей з теорії ймовірностей, ймовірнісних процесів та математичної статистики з орієнтацією на розв'язання задач з вказаної дисципліни студентами технічних спеціальностей. Метою автора було розвинути навички студентів до розв'язання задач з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для їх застосування в інженерній практиці. Даний посібник призначений для використання студентами при виконанні домашніх завдань з теорії ймовірностей. Він структурований по практичним заняттям: для кожного практичного заняття наведено необхідні теоретичні відомості на перелік задач, необхідних для виконання. Також наведено список рекомендованої та використаної літератури, необхідної для успішного засвоєння курсу.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1

КЛАСИЧНЕ ТА СТАТИСТИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

1. Класичне означення ймовірності.

Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ скінченний або зліченний. Припустимо, що всі елементарні події рівноможливі.

Ймовірністю випадкової події A називається відношення m – числа випадків, які сприяють події A до n – числа всіх єдино можливих, рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування :

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.1)$$

Ймовірність будь-якої події A може приймати значення від нуля до одиниці: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Ймовірність достовірної події: $P(U) = 1$.

Ймовірність неможливої події: $P(V) = 0$.

Для подій, що не зводяться до схеми випадків, застосовуються інші методи знаходження їх ймовірностей.

Приклади задач.

1. В урні знаходяться a білих і b чорних куль. З урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла.

Розв'язання.

Розглянемо подію A – з урни взято білу кулю. Цій події сприяють a випадків, бо можна взяти будь-яку білу кулю. Тому $m = a$. Загальне ж число випадків взяти кулю дорівнює числу куль, що знаходяться в урні, тобто $n = a + b$. Тому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{a}{a+b}.$$

2. В урні знаходяться a білих і b чорних куль ($a \geq 2$). З урни беруть одночасно дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.

Розв'язання.

Загальне число випадків – взято 2 кулі з $(a+b)$ куль – дорівнює числу сполучень з $(a+b)$ по 2: $n = C_{a+b}^2 = \frac{(a+b)(a+b-1)}{1 \cdot 2}$.

Число випадків, які сприяють появі події – взято дві білі кулі – дорівнює числу сполучень з a по 2, бо ми можемо взяти 2 білі кулі тільки з a білих куль: $m = C_a^2 = \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}$. Тоді

ймовірність події A :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

3. В урні знаходяться a білих і b чорних куль ($a \geq 2, b \geq 2$). З урни беруть одночасно дві кулі. Знайти ймовірність таких подій: 1) A – кулі одного кольору; 2) B – кулі різного кольору.

Розв'язання.

Загальне число випадків – взято дві кулі з $(a + b)$ куль – нам уже відомо: $n = C_{a+b}^2$.

Число випадків – взято дві кулі одного кольору: $m = C_a^2 + C_b^2$.

$$\text{Тому } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_a^2 + C_b^2}{C_{a+b}^2} = \frac{a(a-1) + b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Число випадків, які сприяють події B , дорівнює добутку C_a^1 і C_b^1 .

$$\text{Звідси: } P(B) = \frac{C_a^1 \cdot C_b^1}{C_{a+b}^2} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

4. Одночасно підкидають дві гральні кістки. Знайти ймовірність таких подій:

- 1) A – сума очок, які випали на обох кістках, дорівнює 8;
- 2) B – добуток очок, які випали на обох кістках, дорівнює 8;
- 3) C – сума очок більша, ніж їх добуток.

Розв'язання.

Загальне число випадків одночасного випадання очок на обох кістках дорівнює: $n = 6 \cdot 6 = 36$.

Події A сприяють такі випадки: 2+6; 3+5; 4+4; 5+3; 6+2; цих випадків п'ять. Тому $P(A) = 5/36$.

Події B сприяють два випадки: $2 \cdot 4, 4 \cdot 2$. Тому $P(B) = 2/36 = 1/18$.

Події C сприяють випадки: $1+1 > 1 \cdot 1, 1+2 > 1 \cdot 2, 1+3 > 1 \cdot 3, 1+4 > 1 \cdot 4, 1+5 > 1 \cdot 5, 1+6 > 1 \cdot 6, 2+1 > 2 \cdot 1, 3+1 > 3 \cdot 1, 4+1 > 4 \cdot 1, 5+1 > 5 \cdot 1, 6+1 > 6 \cdot 1$. Таких випадків 11. Тому $P(C) = 11/36$.

5. Учасник лотереї повинен вгадати 6 чисел з 45. Повний виграш отримає той, хто правильно вгадає всі шість чисел. Виграші отримують і ті, хто вгадає не менше чотирьох чисел. Знайти ймовірності того, що будуть вгадані:

- а) всі шість чисел; б) чотири числа.

Розв'язання.

а) Розглянемо подію A – учасник вгадав всі 6 чисел з 45. Загальне число випадків заповнення карточок лотереї дорівнює: $n = C_{45}^6$. Число випадків, які сприяють появі події A , тільки одне: $m = 1$.

$$\text{Тому } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{C_{45}^6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40} \approx 0,0000001.$$

б) Введемо подію B – учасник вгадав 4 числа з 6 виграшних із 45. Число способів, якими можна вибрати 4 з 6 чисел, є C_6^4 . Крім того, до кожної комбінації з 4 вгаданих чисел з 6

потрібно долучити комбінацію з 2 невигащних чисел з $45-6=39$. Таких комбінацій C_{39}^2 .

Тому $m = C_6^4 \cdot C_{39}^2$.

Таким чином: $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^4 \cdot C_{39}^2}{C_{45}^6} \approx 0,00136$.

2. Статистична ймовірність.

Якщо проведено серію дослідів, в кожному з яких може з'явитись або не з'явитись подія A , то **частотою події A** в даній серії дослідів називають відношення числа дослідів, в яких з'явилась подія A , до загального числа проведених дослідів.

Частоту події називають **статистичною ймовірністю** (на відміну від розглянутої вище «математичної» ймовірності). Частоту події обчислюють за результатами дослідів за формулою:

$$W(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.2)$$

де m – число появ події A , n – загальне число проведених дослідів.

Число навколо групуються значення частоти події A при великій кількості випробувань, називають ймовірністю події A :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(A)$$

Приклади задач.

1. При перевірці продукції було виявлено 7 бракованих одиниць товару з 280 перевірених. Знайти відносну частоту бракованих одиниць товару.

Розв'язання.

Нехай подія A полягає в тому, що виявлено браковану одиницю товару. Тоді відносна частота події A : $W(A) = m/n = 7/280 = 0,025$.

2. При стрільбі по мішені було виявлено, що відносна частота влучень дорівнює 0,95. Проведено 100 пострілів. Скільки пострілів були влучними?

Розв'язання.

Нехай подія A полягає в тому, що постріл був влучним. Тоді з формули відносної частоти події A отримуємо, що кількість влучних пострілів

$$m = n \cdot W(A) = 100 \cdot 0,95 = 95.$$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №1

Варіанти 1-5

1. Складальник має 10 деталей, які мало відрізняються одна від однієї. Є чотири деталі першого виду і по дві деталі другого, третього і четвертого. Яка ймовірність того, що серед шести взятих деталей виявляться три деталі першого виду, дві – другого і одна – третього.
2. В урні знаходяться 20 однакових карточок, на кожній з яких написано одне з чисел 1, 2, 3, ..., 20. Після ретельного перемішування всіх карточок беруть навмання одну карточку. Яка ймовірність того, що на карточці написано число:
а) кратне 3; б) просте; в) складне.

3. Гральну кістку підкидають 1 раз. Знайти ймовірності таких подій:
а) A – випаде парне число очок; б) B – випаде не менше 5 очок; в) C – випаде не більше 5 очок.
4. Гральну кістку підкидають два рази. Знайти ймовірність того, що обидва рази випаде однакове число очок.
5. З шести літер розрізної абетки складено слово «буквар». Дитина, яка не вміє читати, розкидала ці літери, а потім склала їх у довільному порядку. Знайти ймовірність того, що вона знову отримала слово «буквар».
6. З слів «мама» і «дама» навмання взято по одній літері. Яка ймовірність того, що ці літери:
а) одні і ті ж; б) різні?
7. В магазині є 25 телевізорів, причому, 15 з них імпортні. Знайти ймовірність того, що серед 5 проданих протягом дня телевізорів буде не менше 3 імпортних. Ймовірності купівлі телевізорів різних марок однакова.
8. Студент знає 20 з 25 питань програми. Для того, щоб отримати залік, студент повинен відповісти не менш, ніж на 3 з 4 питань білету. Поглянувши на перше питання білета студент зрозумів, що він його знає. Яка ймовірність того, що студент: а) отримає залік; б) не отримає залік?
9. Повну колоду карт (52 карти) навмання поділено на дві рівні частини (по 26 карт). Яка ймовірність того, що: а) в кожній частині буде по 2 тузи; б) в одній з частин тузів не буде; в) в одній з частин буде 1 туз, в іншій – 3.
10. В магазин завезли холодильники трьох марок у кількостях 5, 7 і 13 штук відповідно. Протягом певного періоду було продано 21 холодильник, причому, ймовірність продажу холодильника будь-якої марки була однакова. Знайти ймовірність того, що не продано холодильники: а) однієї марки; б) трьох різних марок.

Варіанти 6-10

11. 20 учнів класу читають твори сучасної української літератури, 10 – українську класику, 5 учнів не читають творів української літератури взагалі. Знайдіть ймовірність, що навмання обраний учень читає твори української класики.
12. До ліфта семиповерхового будинку на першому поверсі зайшли 3 особи. Кожна з них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірності таких подій: а) всі пасажери вийдуть на 6-му поверсі; б) всі пасажери вийдуть одночасно на одному поверсі; в) всі пасажери вийдуть на різних поверхах.
13. Навмання вибрано двозначне число. Яка ймовірність того, що це число є:
а) просте; б) складне; в) кратне 5; г) взаємно просте з 100?
14. Навмання взято кістку доміно з повного набору. Яка ймовірність того, що сума очок на взятій кістці дорівнює 5?
15. Яка ймовірність того, що у довільно вибраному двозначному числі цифри однакові?
16. Навмання вибрано число, що не перевищує 30. Яка ймовірність того, що це число можна поділити на 3?
17. Навмання вибрано число, що не перевищує 24. Яка ймовірність того, що це число є дільник 24?
18. Яка ймовірність того, що вибране навмання двозначне число є просте і сума його цифр дорівнює 5?

19. З множини $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ вибрано навмання число q , після чого складено рівняння $x^2 + 4x + q = 0$. Яка ймовірність того, що коренями цього рівняння будуть: а) дійсні числа; б) цілі раціональні числа; в) дійсні ірраціональні числа?
20. Вибрано навмання просте число, що не перевищує 20. Яка ймовірність того, що воно має вигляд: а) $4x + 1$; б) $4x + 3$; в) $6x + 5$?

Варіанти 11-15

21. В урні 3 білі і 4 чорні кулі. З урни одночасно виймають дві кулі. Яка подія ймовірніша: A – взято кулі одного кольору чи B – взято кулі різного кольору?
22. На п'яти карточках написано числа 1, 2, 3, 4, 5. Дві карточки виймають одну за одною. Знайти ймовірність того, що на другій карточці число буде більше, ніж на першій.
23. У першій урні 5 білих і 3 чорні кулі, у другій – 4 білі і 6 чорних куль. З кожної урни беруть по одній кулі. Яка ймовірність того, що кулі різного кольору?
24. В урні є 5 білих і 4 чорні кулі. З урни одночасно беруть 5 куль. Яка ймовірність того, що серед них буде 2 білі і 3 чорні кулі?
25. З тридцяти студентів десять мають спортивний розряд. Яка ймовірність того, що три вибрані навмання студенти мають спортивний розряд?
26. Гральну кістку підкидають один раз. Яка ймовірність того, що: а) випаде непарне число очок; б) випаде не менше 4 очок; в) випаде не більше 4 очок?
27. Гральну кістку підкидають два рази. Яка ймовірність того, що: а) сума очок, які випадуть, дорівнює 7; б) добуток очок дорівнює 6?
28. Серед 30 деталей є 4 браковані. Для контролю взято 6 деталей. Яка ймовірність того, що серед них буде 2 деталі браковані?
29. У турнірі приймають участь 18 команд, з яких навмання формують дві групи з 9 команд. Серед учасників є 5 команд екстракласу. Яка ймовірність того, що: а) всі команди екстракласу попадуть в одну групу; б) дві команди екстракласу попадуть в одну групу, а три – в іншу.
30. У ліфті 7 пасажирів. Ліфт зупиняється на 10 поверхах. Яка ймовірність того, що жодного разу два пасажери не вийдуть на одному поверсі?

Варіанти 16-20

31. У ящику 10 однакових деталей, що помічені номерами 1, 2, 3,..., 10. Навмання виймають 6 деталей. Знайти ймовірність того, що серед взятих деталей виявиться: а) деталь №1; б) деталі № 1 і №2.
32. У ящику 100 деталей, з них 10 браковані. Навмання взято 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед взятих деталей: а) немає бракованих; б) немає придатних.
33. Підкинуто дві гральні кістки. Знайти ймовірності таких подій: а) сума очок, що випали на гральних кістках дорівнює семи; б) сума очок дорівнює восьми, а різниця – чотирьом; в) сума очок дорівнює п'яти, а добуток – чотирьом.
34. У три вагони заходять дев'ять пасажирів. Яка ймовірність того, що: а) в перший вагон зайдуть три пасажери? б) в кожен вагон зайдуть по три пасажери? в) в один з вагонів зайдуть чотири, в другий – три і в третій – два пасажери?
35. Телефонний номер складається з 5 цифр. Яка ймовірність, що в навмання набраному номері: а) усі цифри різні; б) усі цифри непарні.
36. 25 учнів класу читають твори сучасної української літератури, 15 – українську класику, 10 учнів не читають творів української літератури взагалі. Знайдіть ймовірність, що навмання обраний учень читає твори української літератури.

37. В урні є 4 білих і 6 чорні кулі. З урни одночасно беруть 6 куль. Яка ймовірність того, що серед них буде 2 білі і 4 чорні кулі?
38. Серед натуральних чисел від 1 до 20 учень навмання називає одне. Якою є ймовірність того, що обране число буде дільником числа 20.
39. У турнірі приймають участь 20 команд, з яких навмання формують дві групи з 10 команд. Серед учасників є 6 команд екстракласу. Яка ймовірність того, що: а) всі команди екстракласу попадуть в одну групу; б) три команди екстракласу попадуть в одну групу, а три – в іншу.
40. У ліфті 6 пасажирів. Ліфт зупиняється на 9 поверхах. Яка ймовірність того, що жодного разу два пасажир не вийдуть на одному поверсі?

Варіанти 21-25

41. Партія містить 6 виробів першого сорту, 4 вироби другого і 2 вироби третього сорту. Навмання відбирається 5 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них буде 3 вироби першого сорту.
42. Переможцями конкурсу стали 15 жінок та 10 чоловіків. Організатори випадковим чином обрали 4 особи для вручення суперпризів. Яка ймовірність того, що серед них буде дві жінки і два чоловіка?
43. В ящику є 15 деталей, серед них 10 стандартних. Робітник навмання бере 5 деталей. Знайти ймовірність того, що з них три буде стандартними.
44. Для молодіжної вечірки діджей заготував 20 компакт-дисків, 7 з яких з інструментальною музикою. Знайти ймовірність того, що з чотирьох навмання відібраних компактів три будуть з інструментальною музикою.
45. По цілі проведено 60 пострілів, причому зафіксовано 24 влучення. Знайти відносну частоту невлучення в ціль.
46. В ящику є 30 деталей, серед яких 20 фарбованих, а решта ні. Робітник навмання бере 5 деталей. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть фарбованими.
47. Знайти ймовірність, що навмання вибране двоцифрове число ділиться на 4.
48. 10 літаків, серед яких 2 Ан-140, що прибули в аеропорт, випадковим чином розміщено в одному ряду на 10 стоянках. Знайти ймовірність того, що між літаками Ан-140 розміститься два літаки іншого типу і не лишиться вільних стоянок
49. 10 літаків, серед яких 2 Ан-140, що прибули в аеропорт, випадковим чином розміщено в одному ряду на 15 стоянках. Знайти ймовірність того, що між літаками Ан-140 розміститься два літаки іншого типу і не лишиться вільних стоянок
50. Три мурахи сидять на вершинах рівностороннього трикутника. В якийсь момент кожна мураха починає рухатися по довільній стороні трикутника. Яка ймовірність того, що жодна мураха не зіштовхнеться з іншою?

Варіанти 26-30

51. В магазині є 20 телевізорів, 16 з них зібрані в Україні. За день було куплено 7 телевізорів. Знайти ймовірність того, що 5 з них були зібрані в Україні.
52. В групі є 12 студентів, серед них 8 відмінників. За списком навмання відібрали 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних студентів буде 6 відмінників.
53. В коробці є 7 однакових виробів, причому 5 з них пофарбовані. Навмання взяті 2 вироби. Знайти ймовірність того, що серед відібраних виробів виявиться: а) один фарбований; б) два фарбованих; в) хоча б один фарбований виріб.
54. У партії з 16 деталей чотири нестандартні. Навмання з поверненням беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед них дві деталі будуть стандартними.

55. Для молодіжної вечірки діджей заготував 20 компакт-дисків, 7 з яких з інструментальною музикою. Знайти ймовірність того, що з чотирьох навмання відібраних компактів три будуть з інструментальною музикою.
56. По цілі проведено 30 пострілів, причому зафіксовано 24 влучення. Знайти відносну частоту влучення в ціль.
57. При випробуванні партії приладів відносна частота працюючих виявилася рівною 0,9. Знайти число працюючих приладів, якщо всього було перевірено 400 приладів.
58. Знайти ймовірність того, що при підкиданні трьох гральних кубиків п'ятірка випаде на одному (без різниці, на якому) кубику, якщо на гранях двох інших кубиків випадуть числа очок, що не співпадають між собою і не дорівнюють п'яти.
59. В ящику є 30 деталей, серед яких 20 фарбованих, а решта ні. Робітник навмання бере 5 деталей. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть фарбованими.
60. Протягом зміни приймальник прийняв у ремонт 10 годинників тієї самої марки від 10 різних осіб і перед закінченням зміни навмання розклав їх підряд на круглій полиці. Знайти ймовірність того, що три годинники, які належать певним особам, виявились поруч.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2

ГЕОМЕТРИЧНА ЙМОВІРНІСТЬ

Класичне означення ймовірності передбачає, що кількість елементарних наслідків скінченна. Якщо множина всіх елементарних наслідків нескінченна, застосовують геометричне означення ймовірності.

Нехай простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу на прямій, площині або в просторі, а множину елементарних подій для події A – як частину цього геометричного образу (відрізок, площа, об'єм та ін.), то ймовірність події A визначається як відношення мір цих множин:

$$P(A) = \frac{m(g)}{m(G)} \quad (2.1)$$

Приклади задач.

1. На відрізку довжини 20 см навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує 10 см?

Розв'язання.

Простір елементарних подій $\Omega = \{0 \leq l \leq 20 \text{ см}\}$, тоді $A = \{0 \leq l \leq 10 \text{ см}\}$ ($A \subset \Omega$).

Згідно з (2.1) маємо: $P(A) = \frac{m(g)}{m(G)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

2. Дві подруги Олена і Тетяна домовились зустрітися в певному місці у проміжку часу від 16 до 17 годин, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме на другого протягом 15 хвилин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Розв'язання.

Подія A – «зустріч відбудеться». Позначимо довжину часового проміжку $T=1$ година, а моменти приходу кожної особи – x і y . Тоді подія A відбудеться за умови $|x - y| \leq 1/4$, (різниця між моментами приходу Олени і Тетяни не перевищує 15 хв.), де

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Зобразимо ці умови на площині в системі координат XOY (рис. 2.1).

Скориставшись геометричним означенням імовірності, дістанемо:

$$P(A) = \frac{m(g)}{m(G)} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^2}{1} = \frac{7}{16},$$
 де S_1 – площа шестикутника (заштрихована область на рис.1), а S_2 – площа квадрата, яка відповідає часу $T = 1$ годині.

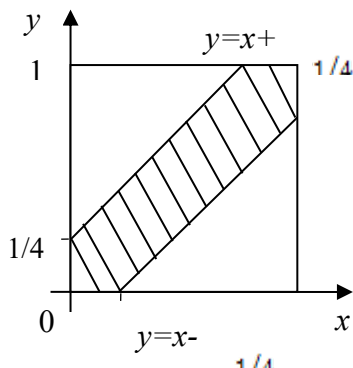


Рис. 2.1

3. Задана множина $\Omega = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$. Яка ймовірність того, що навімання взяті два числа (x, y) утворять координати точки, яка влучить в область $A = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2)$?

Розв'язання.

$$P(A) = \frac{m(g)}{m(G)} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3},$$

де S_1 – площа криволінійної трапеції (заштрихована область на рис.2.2), яка обчислюється

за формулою: $S_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ (од.кв.)}$, а S_2 – площа квадрата, яка дорівнює

$S_2 = 1 \cdot 1 = 1 \text{ (од.кв.)}$.

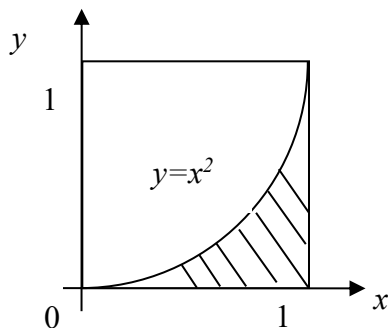


Рис. 2.2

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №2

Варіанти 1-5

1. На двох суміжних сторонах квадрата з довжиною сторони, що дорівнює 1, навмання взято по точці. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками не перевищить 0,5.
2. Навмання взято два додатні числа x і y , кожне з яких не перевищує 2. Знайти ймовірність того, що добуток xy буде більшим від 1, а частка y/x – не більша від 2.
3. Навмання обрано два додатних числа x і y , кожне з яких не перевищує 7. Знайти ймовірність того, що сума їх буде не більша 5, а відношення y/x – не менше 2.
4. Навмання обрано два числа x і y , кожне з яких $-2 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 3$. Яка ймовірність того, що сума їх менша 3, а різниця $y-x$ менша 2.
5. Навмання обрано два додатних числа x і y , кожне з яких не перевищує 6. Знайти ймовірність того, що сума їх буде не більша 5, а відношення y/x – не менше 3.
6. Навмання обрано два додатних числа x і y , кожне з яких не перевищує 10. Знайти ймовірність того, що добуток їх буде більший 4, а різниця $y-x$ – не менше 2.
7. Навмання обрано два числа x і y , кожне з яких $-3 \leq x \leq 2$, $-3 \leq y \leq 2$. Яка ймовірність того, що різниця їх менша 1.
8. Навмання обрано два додатних числа x і y , кожне з яких не перевищує 1. Знайти ймовірність того, що сума їх не перевищує 1, а добуток не перевищує $2/9$.
9. Навмання обрано два числа x і y , кожне з яких $-2 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 3$. Яка ймовірність того, що сума їх більша 1, а добуток менший 1.
10. Навмання обрано два додатних числа x і y таких, що $0 \leq x \leq e$, $0 \leq y \leq 1$. Знайти ймовірність того, що навмання взяті два число (x, y) будуть задовольняти умову $y \leq \ln x$.

Варіанти 6-10

11. Два дійсних числа x і y вибирають навмання так, що $|x| \leq 3$, $|y| \leq 5$. Яка ймовірність того, що дріб x/y додатний.
12. На прямолінійній ділянці газопроводу завдовжки 90 км відбувся розрив. Яка ймовірність того, що розрив віддалений від обох кінців ділянки на відстань, більшу 20 км.
13. Навмання обрано два додатних числа x і y , кожне з яких $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Знайти ймовірність того, що сума їх не менша 1, а їх різниця не більша 0.
14. Навмання взято два додатні числа x і y , кожне з яких не перевищує 2. Знайти ймовірність того, що їх сума не більше від 1, а сума їх квадратів більша 0,25.
15. Відрізок довжини l розбито двома точками на три відрізка випадковим чином. Знайти ймовірність того, що з цих трьох відрізків можна скласти трикутник.
16. На площині проведені паралельні прямі наступним чином: відстань між двома сусідніми по черзі дорівнюють 7 см і 2 см. На площину кинуто монету, радіус якої 3 см. Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодну пряму.
17. Навмання обрано два числа x і y , кожне з яких $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел не більше 1, а модуль їх різниці не менше, ніж 0,5.
18. В крузі радіуса R навмання вибирається хорда. Знайти ймовірність того, що довжина цієї хорди не більше R .
19. Точка навмання кинуто в круг. Яка ймовірність того, що вона попаде в сектор, дуга якого містить α радіан.
20. На площині проведені паралельні прямі, відстань між якими $2a$. На площину навмання кинуто монету, радіус якої r ($r < a$). Яка ймовірність, що монета не перетне жодну з прямих.

Варіанти 11-15

21. Мішень має форму двох концентричних кругів. Як мають співвідноситися радіуси цих кругів, щоб ймовірність попадання у менший круг наближено дорівнювала 0,7?
22. Парабола дотикається нижньої сторони квадрата і проходить через верхні його вершини. Яка ймовірність того, що точка, яка навмання кинута в квадрат, попаде в область, що обмежена параболою і верхньою стороною квадрата.
23. Абонент чекає телефонний дзвінок протягом однієї години. Яка ймовірність того, що йому зателефонують в останні 15 хвилин цієї години?
24. Маємо відрізок AB , довжина якого L . Навмання кинута точку на цей відрізок. Яка ймовірність того, що вона знаходиться на відстані не меншій, ніж l ($l < L$) від точки A .
25. Вздовж прямої розміщені голки на відстань 1 м одна від одної. Під прямим кутом до цієї прямої рухається гумова кулька, діаметром 20 см. Яка ймовірність того, що минувши голки, кулька не лопне.
26. Парабола дотикається півкола і проходить через границі його діаметра. Яка ймовірність того, що точка, яка навмання кинута всередину півкола, попаде в область, що обмежена дугою півкола і параболою?
27. В крузі радіуса R розміщено круг радіуса r . Знайти ймовірність того, що точка, яка кинута в великий круг, попаде також в малий.
28. У прямокутному трикутнику з катетами довжиною 3 і 4 навмання вибрали точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить в круг, вписаний в трикутник?
29. У трапеції з основами 8 і 6 см навмання вибрали точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить в круг радіусом 2 см, який міститься в трапеції і дотикається її основ.
30. У рівнобедреному трикутнику з основою 6 см і бічною стороною 5 см розміщено круг радіусом 1 см. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка трикутника попаде в круг?

Варіанти 16-20

31. В середині прямокутника, обмеженого віссю Ox , прямими $x = \pi/2$, $x = -\pi/2$, $y=1$, навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що точка знаходиться нижче лінії $y = \sin x$.
32. В середині прямокутника, обмеженого віссю Ox , прямими $x = \pi/2$, $x = -\pi/2$, $y=1$, навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що точка знаходиться вище лінії $y = \cos x$.
33. Всередині квадрата, обмеженого осями координат і прямими $x=1$ і $y=1$, навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що точка знаходиться нижче параболи $y=1-x^2$.
34. Навмання взято два додатні числа x і y , кожне з яких не перевищує 4. Знайти ймовірність того, що $yx > 2$, а $y/x \leq 1/2$.
35. В лінійному рівнянні $\alpha x = \beta$ навмання обирається коефіцієнт α , який належить відріzkу $[0;8]$, а вільний член $\beta \in [0;10]$. Знайти ймовірність того, що корінь даного рівняння не менш одиниці.
36. Навмання обрано два додатних числа x і y , кожне з яких не перевищує 5. Знайти ймовірність того, що добуток їх буде більший 3, а різниця $y-x$ – не менше 2.
37. Навмання обрано два числа x і y , кожне з яких $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$. Яка ймовірність того, що різниця їх менша 1.
38. Абонент чекає телефонний дзвінок протягом однієї години. Яка ймовірність того, що йому подзвонять в перші 15 хвилин цієї години?

39. Знайти ймовірність, що з трьох відрізків довжиною не більше L можна побудувати трикутник.

40. Дві особи домовились зустрітися в певному місці у проміжку часу від 10 до 11 годин, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме на другого протягом 15 хвилин. Знайти ймовірність того, що зустріч не відбудеться.

Варіанти 21-25

41. У прямокутному трикутнику з катетами довжиною 6 і 8 навмання вибрали точку. Яка ймовірність того, що вона не потрапить в круг, вписаний в трикутник?

42. Два дійсних числа x і y вибирають навмання так, що $|x| \leq 3$, $|y| \leq 4$. Яка ймовірність того, що дріб x/y від'ємний.

43. Два числа x та y навмання вибираються з відрізка $[0;1]$. Знайти ймовірність того, що сума їх квадратів не перевищує 0,5.

44. Два товариша домовились зустрітися в певному місці у проміжку часу від 8.00 до 9.00 годин, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме на другого протягом 10 хвилин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться не раніше, ніж о 8.55.

45. На площині проведено ряд паралельних прямих, відстань між якими дорівнює 2 см. На площину кинуто монету радіуса 1 см. Знайти ймовірність того, що монета не перетинає жодну з прямих.

46. Двоє друзів домовилися зустрітися між 9-ою і 10-ою годинами у певному місці. Домовились, що чекатимуть один одного не більше 25 хв. Знайти ймовірність того, що вони зустрінуться.

47. В круг вписують квадрат. У круг навмання кидають точку. Знайти ймовірність того, що вона виявиться всередині квадрата.

48. Два судна підійшли до одного причалу. Появи суден є незалежними подіями, рівноможливими протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати біля причалу, якщо час стоянки першого судна 1,5 година, другого - 2 години.

49. На відрізку OA довжини L числової вісі Ox навмання поставлено точку $B(x)$. Знайти ймовірність того, що менший з відрізків OB та BA будуть мати довжину, більшу, ніж $1/3$.

50. Якої товщини повинна бути монетка, щоб ймовірність падіння на ребро дорівнювала $1/3$?

Варіанти 26-30

51. В круг вписано квадрат. У круг навмання кидають точку. Знайти ймовірність того, що вона виявиться всередині квадрата.

52. Два судна повинні підійти до одного причалу. Поява суден – незалежні події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна – 1 год, а другого – 2 год.

53. На площину, на якій зображені паралельні прямі, що розташовані одна від одної на відстані 6 см, навмання кинули круг радіусом 1 см. Знайти ймовірність того, що круг не перетне жодної прямої. По замовчуванню розуміється, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування.

54. Навмання взято два додатних числа x і y , кожне з яких не перевищує одиниці. Знайти ймовірність того, що сума $x+y$ не перевищує одиниці, а добуток $x \cdot y$ не менше 0,09.

55. Двоє осіб домовились зустрітися в певному місці у проміжку часу від t_1 до t_2 годин, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме на другого протягом t годин. Знайти

ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожна особа може прийти в довільний момент часу $t \in [t_1; t_2]$.

56. В лінійному рівнянні $\alpha x = \beta$ навімання обирається коефіцієнт α , який належить відрізьку $[0;5]$, а вільний члені $\beta \in [0;7]$. Знайти ймовірність того, що корінь даного рівняння не менш одиниці.

57. Всередині квадрата, обмеженого осями координат $x=0$ і $y=0$ і прямими $x=3$ і $y=3$, навімання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що точка знаходиться нижче параболи $y=2-x^2$.

58. На двох суміжних сторонах квадрата з довжиною сторони, що дорівнює 1, навімання взято по точці. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками не перевищить 0,7.

59. Навімання взято два додатні числа x і y , кожне з яких не перевищує 4. Знайти ймовірність того, що добуток xy буде більшим від 1, а частка y/x – не більша від 2.

60. Навімання обрано два додатних числа x і y , кожне з яких не перевищує 6. Знайти ймовірність того, що сума їх буде не більша 5, а відношення y/x – не менше 4.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ №3-4

ДІЇ НАД ПОДІЯМИ. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.

Алгебра подій. Теорема додавання і множення ймовірностей.

Сумою двох подій A і B називають подію C , яка полягає в тому, що відбудеться або подія A , або подія B , або обидві разом.

Сумою декількох подій називають подію, яка полягає в тому, що відбудеться хоча б одна з цих подій.

Добутком двох подій A і B називають подію C , яка полягає у сумісній появі події A і події B .

Добутком декількох подій називають подію, яка полягає у сумісній появі всіх цих подій.

1. Теорема додавання ймовірностей сумісних та несумісних подій.

Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Якщо події A і B сумісні, то ймовірність їх суми дорівнює:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

де AB – добуток подій A і B .

Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ несумісні і утворюють повну групу, то сума їх ймовірностей

дорівнює 1:
$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

Протилежними подіями називають дві несумісні події, що утворюють повну групу.

Подію, протилежну події A , позначають так: $\bar{A}$.

Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, P(A) = p, P(\bar{A}) = q, q = 1 - p.$$

2. Теорема про множення ймовірностей залежних та незалежних подій.

Подію A називають **незалежною від події B** , якщо ймовірність події A не залежить від того відбулась подія B чи не відбулась.

Подію A називають **залежною від події B** , якщо ймовірність події A змінюється в залежності від того відбулась подія B чи не відбулась.

Ймовірність події A , обчислену за умови, що мала місце інша подія B , називають **умовною ймовірністю** події A і позначають: $P(A/B)$.

Для незалежних подій: $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$.

Теорема.

Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої події, яку обчислено за умови, що перша подія відбулась:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A), \text{ або } P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (3.1)$$

Для незалежних подій A і B

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (3.2)$$

Випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються **незалежними в сукупності**, якщо

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}), \quad (3.3)$$

для будь-яких $k=2, 3, \dots, n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Якщо ця рівність виконується при $k=2$, то події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються **попарно незалежними**. Попарно незалежні події можуть не бути незалежними в сукупності.

3. Ймовірність появи хоча б однієї події.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких може відбутися подія A_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) з імовірністю $P(A_i) = p_i$ або подія $\bar{A}_i$ ($A_i \cup \bar{A}_i = \Omega$, $A_i \cap \bar{A}_i = \emptyset$) з імовірністю $P(\bar{A}_i) = q_i$, ($p_i + q_i = 1$).

Ймовірність появи принаймні однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних в сукупності, знаходиться за формулою:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n \quad (3.4)$$

Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ мають однакову ймовірність p , то ймовірність настання принаймні однієї з цих подій дорівнює:

Тоді

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (3.5)$$

Приклади задач.

1. Продано 10000 білетів лотереї. На один білет випадає виграш у 5000 грн., на 100 білетів – виграші у 100 грн., на 200 білетів – виграші у 20 грн., на 300 білетів – виграші у 5 грн., інші білети – невиграшні. Дехто купив один білет. Знайти ймовірність того, що він виграє не менше 20 грн.

Розв'язання.

Розглянемо подію A – виграти не менше 20 грн. Це означає, що виграти можна або 20 грн., або 100 грн., або 500 грн. Введемо події:

A_1 – виграти 20 грн., A_2 – виграти 100 грн., A_3 – виграти 500 грн.

Події A_1, A_2, A_3 – несумісні, тобто в наслідок експерименту може статися лише одна з них.

Тоді подію A можна представити у вигляді: $A = A_1 + A_2 + A_3$.

За теоремою про додавання несумісних ймовірностей:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \\ &= \frac{200}{10000} + \frac{100}{10000} + \frac{1}{10000} = \frac{301}{10000} = 0,0301. \end{aligned}$$

2. Кругова мішень має три зони: I, II, III. Ймовірність влучення у першу зону одним пострілом дорівнює 0,3; у другу – 0,5; у третю – 0,1. Знайти ймовірність промаху.

Розв'язання.

Розглянемо події:

A – промах, $\bar{A}$ – влучення у мішень.

Тоді $\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$, де $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ – влучення відповідно у першу, другу і третю зони. Ці події несумісні – поява однієї з них виключає появу інших, бо виконується тільки один постріл.

За теоремою про додавання ймовірностей несумісних подій маємо

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3) = p(\bar{A}_1) + p(\bar{A}_2) + p(\bar{A}_3) = 0,3 + 0,5 + 0,1 = 0,9.$$

Подія A протилежна події $\bar{A}$. Тому $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Таким чином $P(A) = 1 - 0,9 = 0,1$.

3. Виконуються три постріли у одну і ту ж мішень. Ймовірність влучення у мішень першим пострілом дорівнює 0,5; другим – 0,7; третім – 0,8. Знайти ймовірність того, що в результаті трьох пострілів у мішені буде рівно одна пробірка.

Розв'язання.

Розглянемо подію A – рівно одне влучення у мішень. Ця подія може здійснитись декількома способами, тобто вона розпадається на три несумісні варіанти: може бути влучення першим пострілом, промахи другим і третім; або влучення другим пострілом, промахи першим і третім; або влучення третім пострілом, промахи першим і другим.

Введемо події: A_1, A_2, A_3 – влучення у мішень першим, другим і третім пострілом відповідно, $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ – промахи першим, другим і третім пострілами.

Тоді $A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$.

Події $A_1, A_2, A_3, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ – незалежні, а події $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ – несумісні.

Знайдемо $P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,4 = 0,6$; $P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,5 = 0,5$;

$$P(\bar{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

За теореми про додавання і добуток ймовірностей

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + \\ &+ P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \\ &= 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,22. \end{aligned}$$

4. За умов попередньої задачі знайти ймовірність того, що у мішені буде хоча б одна пробоїна.

Розв'язання.

Введемо подію B – хоча б одне влучення у мішень. Ця подія означає, що у мішені може бути або одна пробоїна, або дві пробоїни, або три пробоїни. Тому подію B можна записати:

$$B = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3.$$

Тепер, використовуючи теореми про додавання і добуток ймовірностей, можна знайти ймовірність події B .

Але цю задачу простіше розв'язати, якщо перейти від прямої події B до протилежної події $\bar{B}$ – ні одного влучення.

Очевидно, що $\bar{B} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$. Події $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ – незалежні.

За теоремою про добуток ймовірностей незалежних подій:

$$P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,28$$

$$\text{Звідси } P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0,72.$$

5. В урні 6 червоних і 4 жовтих куль. З урни виймають дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі червоні.

Розв'язання.

Введемо такі події:

A_1 – перша взята куля червона, A_2 – друга взята куля червона.

Тоді подія A – взято дві червоні кулі – можна представити як добуток двох подій A_1 і A_2 , тобто $A = A_1 \cdot A_2$. Але події A_1 і A_2 – залежні події.

За теоремою про добуток ймовірностей залежних подій:

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1).$$

Ймовірність взяти першою червону кулю дорівнює: $P(A_1) = 6/10 = 3/5$.

Тоді ймовірність другою взяти червону кулю, за умови, що перша взята куля була

червоною:
$$P(A_2 / A_1) = \frac{6-1}{6+4-1} = \frac{5}{9}.$$

Таким чином $P(A) = 3/5 \cdot 5/9 = 1/3$.

6. Гральний кубик підкидається чотири рази. Чому дорівнює ймовірність того, що цифра 3 з'явиться при цьому хоча б один раз?

Розв'язання.

Ймовірність того, що при одному підкиданні з'явиться цифра 3, дорівнює $1/6$.

Тоді $q = 1 - p = 1 - 1/6 = 5/6$. Згідно з (3.5) дістанемо:

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}.$$

4. Оцінювання надійності роботи простих схем за допомогою формул теорії ймовірностей.

Якщо елементи системи з'єднані послідовно (рис. 4.1), і при цьому відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i ($i = 1, \dots, n$), то позначивши надійність системи через R , дістанемо

$$R = \prod_{i=1}^n p_i \quad (4.1)$$

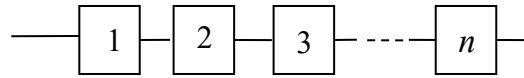


Рис. 4.1

Якщо елементи системи з'єднані за схемою, наведеною на рис. 4.2, і при цьому відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i ($i = 1, \dots, n$), то надійність роботи системи знайдемо за формулою:

$$R = 1 - \prod_{i=1}^n q_i, \quad q_i = 1 - p_i. \quad (4.2)$$

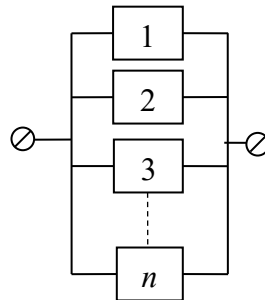


Рис. 4.2

Приклади задач.

1. Електричні елементи з'єднані за схемами, наведеними на рис. 4.3 і 4.4.

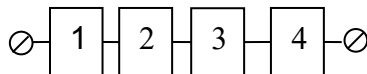


Рис. 4.3

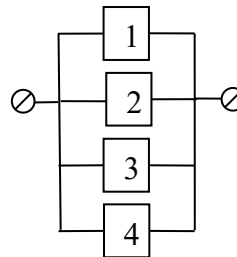


Рис. 4.4

Імовірність того, що електричний елемент буде працювати при ввімкненні в електромережу наведених схем, є величиною сталою і дорівнює $p_i = 0,85$.

Яка ймовірність того, що при ввімкненні в електромережу наведених схем у них буде електрострум?

Розв'язання.

За відомим значенням p_i знаходимо $q_i = 1 - p_i = 1 - 0,85 = 0,15$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$\text{а) } R = R = \prod_{i=1}^4 p_i = (0,85)^4 = 0,522;$$

$$\text{б) } R = 1 - \prod_{i=1}^4 q_i = 1 - (0,15)^4 = 1 - 0,00051 = 0,9995.$$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №3

Варіанти 1-5

1. Мисливець стріляє у мішень. Ймовірність влучення у мішень першим пострілом дорівнює 0,6, другим – 0,4, третім – 0,1. Знайти ймовірності таких подій: а) мисливець промахнеться три рази; б) мисливець влучить у мішень один раз; в) мисливець влучить у мішень хоча б один раз.
2. Ймовірність того, що студент складе перший іспит, дорівнює 0,9; другий – 0,85 і третій – 0,8. Знайти ймовірності того, що студент складе: а) тільки другий іспит; б) тільки один іспит; в) три іспити; г) хоча б два іспити; д) хоча б один іспит.
3. Два гравці по черзі підкидають гральну кістку. Виграє той з гравців, у кого першим випаде «6 очок». Яка ймовірність виграти тому гравцю, що підкидає гральну кістку першим? Другим?
4. З коробки, в якій знаходяться дев'ять тенісних м'ячів, беруть для гри три м'ячі. Після гри їх повертають у коробку. М'ячі, які використовували для гри, не відрізняються від невикористаних. Яка ймовірність того, що після трьох ігор будуть використані всі м'ячі?
5. Ймовірність влучити у мішень одним пострілом для першого стрільця дорівнює x , а для другого – 0,7. Відомо, що ймовірність влучити у мішень рівно один раз обома стрільцями дорівнює 0,38. Чому дорівнює x ?
6. Студент своєчасно виконує контрольні роботи з трьох окремих дисциплін з ймовірностями відповідно 0,6; 0,5; і 0,8. Знайти ймовірність своєчасного виконання студентом контрольних робіт: а) з двох дисциплін; б) хоча б з двох дисциплін.
7. Мисливець стріляє у ціль, що віддаляється, три рази. Ймовірність влучення у неї першим пострілом дорівнює 0,8, а після кожного пострілу вона зменшується на 0,1. Знайти ймовірність того, що він: а) промахнеться 3 рази; б) поцілить у ціль хоча б один раз; в) поцілить у ціль 2 рази.
8. Два стрільці виконали по одному пострілу у мішень. Відомо, що ймовірність влучити у мішень першим стрільцем дорівнює 0,6, а другим – 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) тільки один стрілець влучить у мішень; б) хоча б один стрілець влучить у мішень; в) обидва стрільці влучать у мішень; г) ні один з стрільців не влучить у мішень; д) хоча б один стрілець не влучить у мішень.
9. В урні 3 білі, 4 чорні і 2 червоні кулі. Навмання з урни вийняли 3 кулі. Яка ймовірність того, що вийняли: а) 3 білі кулі; б) три кулі різного кольору; в) дві кулі одного кольору?
10. Ймовірність хоча б одного влучення у мішень з чотирьох пострілів дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення у мішень одним пострілом.

Варіанти 6-10

11. Студент підготував до іспиту 20 питань з 25. Яка ймовірність того, що з трьох навмання вибраних питань він відповість: а) тільки на одне питання; б) на три питання; в) не менше, ніж на 2 питання?
12. У коробці 10 червоних, 3 сині і 7 жовтих олівців. Навмання беруть 3 олівці. Яка ймовірність того, що вони всі: а) одного кольору; б) різних кольорів?

13. Три спортсмени приймають участь у відбіркових змаганнях. Ймовірність попасти до збірної команди першого, другого та третього спортсменів дорівнюють відповідно 0,36; 0,75 і 0,64. Яка ймовірність того, що а) тільки один спортсмен попаде до збірної, б) хоча б один спортсмен попаде до збірної?
14. Ймовірність влучення стрільцем у десятку дорівнює 0,7, а у дев'ятку – 0,3. Знайти ймовірність того, що стрілець виб'є: а) 29 очок за три постріли; б) 30 очок; в) 27 очок.
15. В урні 3 білі і 5 чорних куль. Два гравці по черзі беруть із урни одну кулю не повертаючи її назад. Виграє той, хто раніше візьме білу кулю. Знайти ймовірність того, що виграє перший гравець.
16. Два студенти шукають потрібну їм книгу у букіністичних магазинах. Ймовірність того, що її знайде перший студент, дорівнює 0,6, а другий – 0,7. Яка ймовірність того, що: а) першим знайде книжку перший студент; б) першим знайде книжку другий студент?
17. В урні 7 кульок з номерами від 1 до 7. Навмання по одній виймають 3 кульки. Яка ймовірність того, що послідовно з'являться кульки з номерами 1,3,5?
18. З гармати проведено три постріли у ціль. Ймовірність влучити у ціль першим пострілом дорівнює 0,75; другим - 0,8; а третім - 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) буде три влучення у ціль; б) буде хоча б одне влучення у ціль.
19. Фірма має у своєму складі 8 аудиторів, з яких 3 – високої кваліфікації, і 5 програмістів, з них 2 – високої кваліфікації. У відрядження потрібно відправити групу з 3 аудиторів і 2 програмістів. Яка ймовірність того, що у цій групі будуть хоча б один аудитор високої кваліфікації і хоча б один програміст високої кваліфікації, якщо кожний спеціаліст має рівні можливості поїхати у відрядження?
20. Три ящики містять по 20 деталей, причому у першому ящику знаходяться 15 стандартних деталей, у другому – 18 і у третьому – 16. З кожного ящика навмання виймають по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед взятих деталей: а) тільки одна стандартна; б) хоча б одна стандартна; в) три стандартні.

Варіанти 11-15

21. Підкинуто три гральні кістки. Знайти ймовірності таких подій: а) на двох гранях випаде одне і те ж число, на третій – інше; б) хоча б на двох гранях випадуть однакові числа; в) на всіх гранях випадуть різні числа.
22. Ймовірність того, що потрібна складальнику деталь знаходиться в першому, другому, третьому або четвертому ящиках відповідно дорівнює 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Знайти ймовірність того, що деталь знаходиться: а) не більш ніж у трьох ящиках; б) не менше ніж у двох ящиках.
23. Робітник обслуговує чотири однотипні верстати. Ймовірність того, що будь-який верстат протягом години вимагатиме увагу робітника, дорівнює 0,6. Вважаючи неполадки в роботі верстатів не залежними, обчислити ймовірність того, що протягом години потребують увагу робітника: а) всі чотири верстати; б) ні один верстат; в) хоча б один верстат.
24. Підкинуто три гральні кістки. Знайти ймовірності таких подій: а) на кожній грані випаде 5 очок; б) на всіх гранях випаде однакове число очок.
25. Яка з подій ймовірніша: подія А – „в одночасному підкиданні 4 гральних кісток з'явиться хоча б одна одиниця”, чи подія В – „у 24 підкиданнях двох гральних кісток з'явиться хоча б один раз дві одиниці”.

26. Виконуються три постріли у мішень. Ймовірності влучення першим, другим і третім пострілами дорівнюють відповідно 0,6; 0,5 і 0,7. Знайти ймовірності подій: а) рівно два влучення, б) хоча б два влучення, в) не більше двох влучень.
27. Два баскетболісти виконують по 2 кидки м'ячем у корзину. Ймовірність влучення м'ячем у корзину кожним кидком у першого баскетболіста дорівнює 0,6, а у другого – 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) у обох баскетболістів буде однакова кількість влучень; б) у першого баскетболіста буде більше влучень, ніж у другого.
28. У коробці знаходяться електролампи однакового розміру і форми: по 100Вт – 7 штук, по 75Вт – 13 штук. Навмання взяли 3 лампи. Яка ймовірність того, що: а) ці лампи однієї потужності; б) хоча б дві з них по 100Вт.
29. Контролер ОТК перевіряв якість 20 костюмів і встановив, що 16 костюмів треба віднести до виробів першого сорту, а 4 – до другого. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання з цієї партії трьох костюмів: а) один костюм буде другого сорту; б) хоча б один буде другого сорту; в) три костюми будуть другого сорту.
30. Серед 20 взятих у ремонт годинників 8 потребують загальну чистку механізму. Яка ймовірність того, що серед взятих навмання 8 годинників:
а) тільки один годинник потребує чистку; б) хоча б один потребує чистку.

Варіанти 16-20

31. Експедиція видавництва відправила газету у три поштові відділення. Ймовірність вчасної доставки газет у перше відділення дорівнює 0,95, у друге відділення – 0,9 і у третє – 0,8. Знайти ймовірності таких подій: а) тільки одне відділення отримає вчасно газети; б) хоча б одне відділення отримає газети із запізненням.
32. Серед 15 лампочок є 11 стандартних. Навмання беруть 2 лампочки. Знайти ймовірність того, що: а) одна лампочка нестандартна; б) хоча б одна лампочка нестандартна.
33. У складальника є 10 деталей, які мало відрізняються одна від однієї. З них 4 деталі першого виду і по дві деталі другого, третього і четвертого видів. Яка ймовірність того, що серед 6 взятих навмання деталей три будуть першого виду, дві – другого і одна третього?
34. Серед 25 студентів, з яких 15 дівчат, розігруються чотири білети, причому кожний може виграти тільки один білет. Яка ймовірність того, що серед чотирьох володарів білетів виявляться: а) чотири дівчини; б) чотири юнаки; в) три юнаки і одна дівчина?
35. За межами міста знаходяться 10 ощадбанків з 20. Для перевірки роботи банків навмання відібрано 5 ощадбанків. Яка ймовірність того, що серед відібраних для контролю ощадбанків знаходяться в межах міста:
а) 3 ощадбанки; б) хоча б один ощадбанк?
36. Мисливець стріляє у швидкорухаючу мішень. Ймовірність влучення у мішень першим пострілом дорівнює 0,7, другим – 0,6, третім – 0,4. Знайти ймовірності таких подій: а) мисливець промахнеться два рази; б) мисливець влучить у мішень три рази; в) мисливець влучить у мішень не більше трьох разів.
37. Ймовірність того, що студент складе перший іспит, дорівнює 0,92; другий – 0,87 і третій – 0,85. Знайти ймовірності того, що студент складе: а) тільки перший іспит; б) один іспит; в) хоча б два іспити; г) всі іспити.
38. Виконуються три постріли у мішень. Ймовірності влучення першим, другим і третім пострілами дорівнюють відповідно 0,7; 0,6 і 0,8. Знайти ймовірності подій: а) рівно два влучення, б) хоча б два влучення, в) жодного влучення.

39. Два баскетболісти виконують по 2 кидки м'ячем у корзину. Ймовірність влучення м'ячем у корзину кожним кидком у першого баскетболіста дорівнює 0,7 а у другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) у обох баскетболістів буде однакова кількість влучень; б) у другого баскетболіста буде більше влучень, ніж у першого.

40. Ймовірність влучити у мішень одним пострілом для першого стрільця дорівнює p , а для другого – 0,7. Відомо, що ймовірність влучити у мішень рівно один раз обома стрільцями дорівнює 0,48. Чому дорівнює p ?

Варіанти 21-25

41. При підготовці до заліку перший студент вивчив 20 з 25 питань програми, другий – 15 питань, третій – 10. Для здачі заліку потрібно відповісти на 3 питання програми.

Обчислити ймовірність того, що рівно два студенти склали екзамен.

42. У коробці знаходяться електролампи однакового розміру і форми: по 100Вт – 7 штук, по 75Вт – 13 штук. Навмання взяли 4 лампи. Яка ймовірність того, що: а) ці лампи однієї потужності; б) хоча б три з них по 100Вт.

43. Гральний кубик підкидається чотири рази. Чому дорівнює ймовірність того, що цифра 3 з'явиться при цьому хоча б один раз.

44. В урні 6 червоних і 4 жовтих куль. З урни виймають три кулі. Знайти ймовірність того, що дві кулі жовті.

45. Гральний кубик підкидається три рази. Чому дорівнює ймовірність того, що цифра 6 з'явиться при цьому хоча б два рази?

46. Ймовірність влучити у мішень одним пострілом для першого стрільця дорівнює 0,8, а для другого – p . Відомо, що ймовірність влучити у мішень рівно один раз обома стрільцями дорівнює 0,5. Чому дорівнює p ?

47. Мисливець стріляє у мішень. Ймовірність влучення у мішень першим пострілом дорівнює 0,6, другим – 0,4, третім – 0,5. Знайти ймовірність того, що мисливець влучить три рази.

48. Ймовірність того, що студент складе перший іспит, дорівнює 0,9; другий – 0,7 і третій – 0,8. Знайти ймовірності того, що студент складе тільки перший іспит.

49. Гармата стріляє у ціль, що віддаляється, три рази. Ймовірність влучення у неї першим пострілом дорівнює x , а після кожного пострілу вона зменшується на 0,1. Сума ймовірностей влучання з 1-ї, 2-ї, 3-ї спроб дорівнює 2,1. Знайти ймовірність того, що гармата влучить у ціль 2 рази.

50. В урні є 5 куль пронумеровані від одиниці до п'яти. Навмання по одній беруть три кулі, не повертаючи їх. Знайти ймовірності наступних подій: а) послідовно з'являться кулі з номерами 1, 3, 5; в) взяті кулі будуть мати номери 1; 3; 5, незалежно, в якому порядку вони з'явилися.

Варіанти 26-30

51. Два стрілки стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрілка дорівнює 0,75, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень влучить лише один стрілок.

52. Ймовірність того, що при одному вимірюванні деякої фізичної величини буде припущена помилка, яка перевищує задану точність, дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що при проведених трьох незалежних вимірюваннях, лише в одному допущена помилка перевищить задану точність.

53. Прилад складається з трьох елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірності безвідмовної роботи за деякий час для першого, другого і третього елементів відповідно рівні 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірності того, що за цей час безвідмовно будуть працювати: а) лише один елемент; б) лише два елементи; в) всі три елементи.
54. Ймовірності того, що необхідна робітнику деталь знаходиться у першому, другому, третьому, четвертому ящиках відповідно рівні 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Знайти ймовірності того, що необхідна робітнику деталь міститься: а) не більш, ніж у трьох ящиках, б) не менш, ніж у двох ящиках, в) в усіх чотирьох ящиках.
55. Підкинуті три гральних кубика. Знайти ймовірності наступних подій: на кожній із випавших граней з'явиться шість очок; б) на всіх випавших гранях з'явиться однакова кількість очок.
56. Ймовірність влучення стрілка в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Скільки пострілів повинен виконати стрілок, щоб із ймовірністю, меншою, ніж 0,4, можна було б сподіватися, що не буде жодного промаху?
57. В ящику є 10 деталей, серед них 6 фарбованих. Робітник навмання бере 4 деталі по одній, не повертаючи їх в ящик. Знайти ймовірність того, що всі взяті деталі виявляться фарбованими.
58. Три дослідники, незалежно один від одного, проводять вимірювання деякої фізичної величини. Ймовірність того, перший дослідник допустить помилку при зніманні показів приладу, дорівнює 0,1. Для другого та третього дослідників ці ймовірності, відповідно, дорівнюють 0,15 та 0,2. Знайти ймовірність того, що при одному вимірюванні хоча б один дослідник зробить помилку.
59. Студент знає 45 з 50 екзаменаційних питань. Знайти ймовірність того, що із трьох навмання витягнутих питань він знатиме: а) хоча б одне; б) тільки одне; в) не більш, як одне.
60. Ймовірність хоча б одного влучення стрілкою по цілі при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №4

1. Знайти ймовірність відмови схеми (рис.4.5), якщо відмови кожного з елементів є незалежними, а ймовірність відмови елемента з номером i дорівнює $0,1$ (m – номер варіанту).

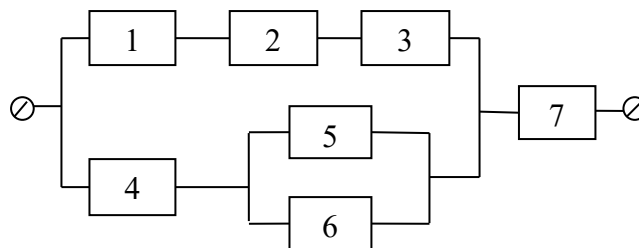


Рис.4.5

2. Електролампочки з'єднані за схемою, зображеною на рис. 4.6.

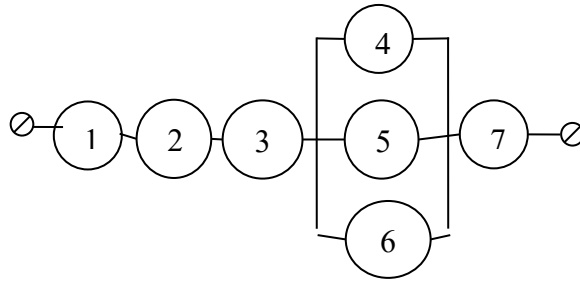


Рис. 4.6

Імовірність того, що електролампочка не вийде з ладу при ввімкненні схеми в електричну мережу, є величиною сталою і дорівнює $0, m$ (m – номер варіанту). Яка ймовірність того, що в електричній схемі, наведеної на рис. 4.6, при ввімкненні її в електричну мережу потече електричний струм?

3. Електролампочки з'єднані за схемою, зображеною на рис. 4.7. Імовірність того, що лампочка не перегорить при ввімкненні в електромережу є величиною сталою і дорівнює $0, m$ (m – номер варіанту). Яка ймовірність того, що в схемі, якщо вона ввімкнено в електромережу, потече електричний струм?

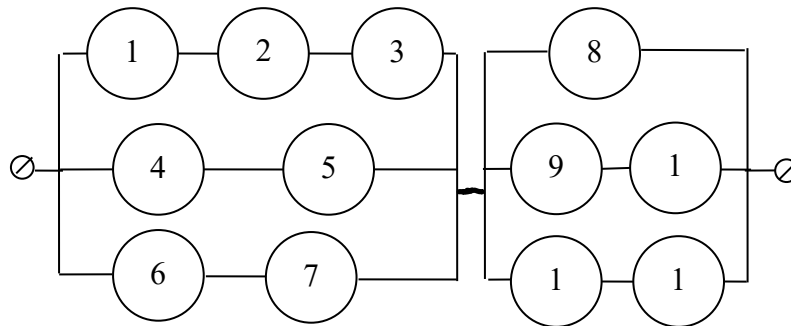


Рис. 4.7

4. Електричний ланцюг між точками M і N , який побудований за схемами а) і б), зображеною на рис. 4.8. Ймовірність безвідмовної роботи елементів A_i ($i=1, \dots, 4$) за час T відповідно дорівнюють $0, m$; $0, 2m$; $0, 3m$; $0, m$ (m – номер варіанту). Визначити надійність роботи схеми за час T , якщо усі елементи схеми можуть вийти з ладу незалежно один від одного.

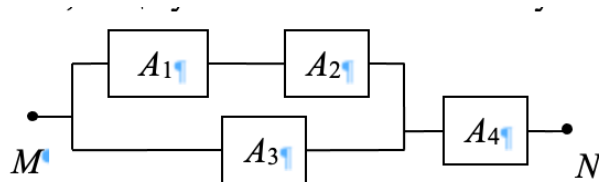


Рис. 4.8

5. Для підвищення надійності роботи приладу він дублюється чотирма такими приладами (рис. 4.9). Надійність кожного приладу дорівнює $p = 0, 7$. Знайти надійність R цієї системи. Скільки необхідно взяти приладів, щоб збільшити надійність до заданого значення $R_1 = 0, 99m$ (m – номер варіанту)?

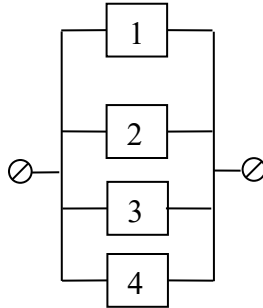


Рис. 4.9

6. Задано систему, елементи якої з'єднані за схемою рис. 4.10. Надійність кожного приладу дорівнює $p = 0,7$. Скільки необхідно взяти елементів, щоб надійність системи дорівнювала $R_1 = 0,9m$ (m – номер варіанту)?

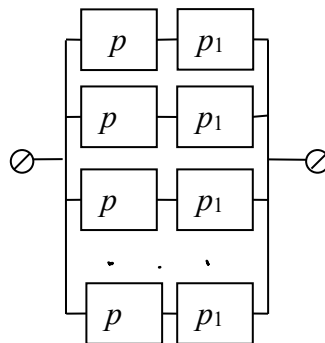


Рис. 4.10

7. Імовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні її в електромережу, є величиною сталою і дорівнює $0,99m$ (m – номер варіанту).

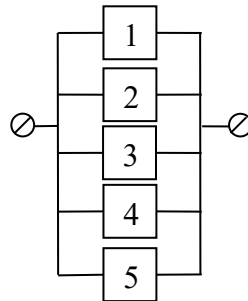


Рис.4.11

Яка ймовірність того, що при ввімкненні в електромережу наведеної схеми (рис.4.11) потече електричний струм?

8. Знайти ймовірність відмови схеми (рис.4.12), якщо відмови кожного з елементів є незалежними, а ймовірність відмови елемента з номером i дорівнює $0,15m$ (m – номер варіанту).

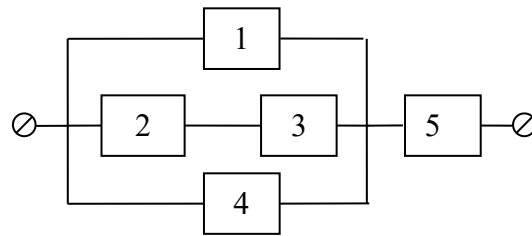


Рис. 4.12

9. Знайти ймовірність відмови схеми (рис.4.13), якщо відмови кожного з елементів є незалежними, а ймовірність відмови елемента з номером i дорівнює $0,3m$ (m – номер варіанту).

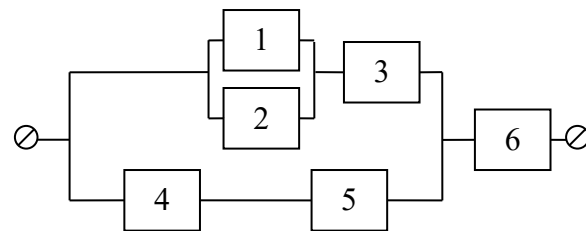


Рис. 4.13

10. Для підвищення надійності p даний прилад дублюється $n-1$ іншими приладами (рис.4.14). Скільки приладів необхідно взяти, щоб збільшити надійність до заданої – $0,9m$ (m – номер варіанту).

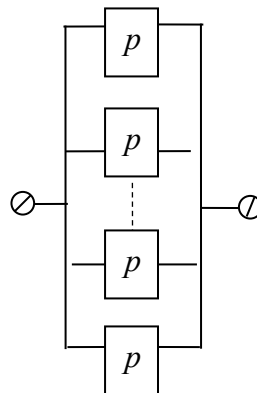


Рис.4.14

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №5

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЄСА

1. Формула повної ймовірності.

Нехай випадкові події $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворюють повну групу подій, якщо $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$,

$H_i \cap H_j = \emptyset, (i \neq j)$, і які будемо називати гіпотезами. Ймовірність деякої події A , яка може відбутись тільки разом з однією із подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, обчислюється за **формулою повної ймовірності**:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i),$$

де $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ – ймовірності гіпотез,

$P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$ – умовні ймовірності події A для цих гіпотез.

2. Формула Байєса.

Якщо до проведення випробування ймовірності гіпотез дорівнювали $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, а в результаті дослідження подія A відбулась, то з урахуванням цієї події «нові», тобто умовні, ймовірності гіпотез обчислюються за **формулою Байєса**:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Формула Байєса дає можливість «переглянути» ймовірності гіпотез з урахуванням того, що подія A відбулась.

Приклади задач.

1. Маємо три урни. В першій урні є 6 білих і 2 чорні кульки, у другій – 3 білі і 4 чорні, в третій 4 білі і 3 чорні. Вибирає навмання будь-яку урну і виймаємо одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька біла.

Розв'язання.

A – подія, що взята кулька білого кольору.

Розглянемо гіпотези:

H_1 – вибір першої урни; H_2 – вибір другої урни; H_3 – вибір третьої урни.

Гіпотези рівноможливі (з умов задачі), маємо: $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Умовні ймовірності події A для цих гіпотез відповідно такі:

$$P(A/H_1) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad P(A/H_2) = \frac{3}{7}, \quad P(A/H_3) = \frac{4}{7}.$$

Таким чином: $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} \approx 0,583$.

2. Два стрільці незалежно один від одного виконали по одному пострілу у мішень. Ймовірність влучення у мішень першим стрільцем дорівнює 0,7; другим – 0,6. Після стрільби у мішені виявлено одну пробоїну. Знайти ймовірність того, що поцілив у мішень другий стрілець.

Розв'язання.

Подія A – у мішені виявлено одну пробоїну.

Спочатку розглянемо можливі результати стрільби кожним стрільцем:

A_1 – перший стрілець поцілив у мішень; $\bar{A}_1$ – перший стрілець не поцілив у мішень;

A_2 – другий стрілець поцілив у мішень; $\bar{A}_2$ – другий стрілець не поцілив у мішень.

До проведення стрільби можливі такі гіпотези:

H_1 – обидва стрільці не поцілили у мішень;

H_2 – перший стрілець поцілив, другий не поцілив у мішень;

H_3 – перший стрілець не поцілив, другий – поцілив у мішень;

H_4 – обидва стрільці поцілили у мішень.

Ймовірність цих подій:

$$P(H_1) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12,$$

$$P(H_2) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28,$$

$$P(H_3) = P(\bar{A}_1 \cdot A_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18,$$

$$P(H_4) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42.$$

Умовні ймовірності події A після проведених пострілів для розглянутих гіпотез такі:

$$P(A/H_1) = 0, P(A/H_2) = 1, P(A/H_3) = 1, P(A/H_4) = 0.$$

Після проведених пострілів гіпотези H_1 і H_4 неможливі, а ймовірність гіпотези H_3 буде

$$\text{обчислюватися за формулою: } P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{\sum_{i=1}^4 P(H_i)P(A/H_i)}.$$

$$\text{Тоді } P(H_3/A) = \frac{0,18 \cdot 1}{0,28 \cdot 1 + 0,18 \cdot 1} = \frac{9}{23}.$$

Таким чином, ймовірність того, що пробоїна належить другому стрільцю дорівнює $9/23$.

3. У магазин для продажу надійшли годинники від трьох постачальників у кількостях 10, 20, і 50 штук. Відомо, що годинники, які надходять від першого, другого і третього постачальників, не потребують ремонту протягом гарантійного строку відповідно у 95%, 94% і 97% випадків.

а) Знайти ймовірність того, що годинник, який надійшов до магазину, не потребує ремонту протягом гарантійного строку.

б) Проданий годинник потребує ремонту протягом гарантійного строку. Від якого постачальника наймовірніше надійшов годинник?

Розв'язання.

1) Розглянемо подію:

A – годинник не потребує ремонту протягом гарантійного строку.

Введемо гіпотези: H_1 – годинник надійшов від першого постачальника,
 H_2 – годинник надійшов від другого постачальника,
 H_3 – годинник надійшов від третього постачальника.

З умови задачі маємо: $P(H_1) = \frac{10}{10+20+50} = 0,125$, $P(A/H_1) = 0,95$,

$$P(H_2) = \frac{20}{10+20+50} = 0,25, \quad P(A/H_2) = 0,94,$$

$$P(H_3) = \frac{50}{10+20+50} = 0,625, \quad P(A/H_3) = 0,97.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = 0,125 \cdot 0,95 + 0,25 \cdot 0,94 + 0,625 \cdot 0,97 = 0,96.$$

2) Подія $\bar{A}$ – годинник потребує ремонту протягом гарантійного строку.

Тоді $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,96 = 0,04$. Крім того,

$$P(\bar{A}/H_1) = 1 - 0,95 = 0,05, \quad P(\bar{A}/H_2) = 1 - 0,94 = 0,06, \quad P(\bar{A}/H_3) = 1 - 0,97 = 0,03.$$

$$\text{Звідси: } P(H_1/\bar{A}) = \frac{0,125 \cdot 0,05}{0,04} = 0,156, \quad P(H_2/\bar{A}) = \frac{0,25 \cdot 0,06}{0,04} = 0,375,$$

$$P(H_3/\bar{A}) = \frac{0,625 \cdot 0,03}{0,04} = 0,469.$$

Таким чином, наймовірніше, що годинник, який потребує ремонту, надійшов від третього постачальника.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №5

Варіанти 1-5

1. Прилад може працювати у двох режимах: 1) нормальному; 2) ненормальному. Нормальний режим роботи відбувається у 80% всіх випадків роботи приладу; ненормальний – у 20%. Ймовірність виходу приладу з ладу за час t у нормальному режимі дорівнює 0,1; у ненормальному – 0,7. Знайти повну ймовірність виходу приладу з ладу за час t .

2. Відомо, що підприємство виготовляє продукцію, яка задовольняє стандарту на 95%. Спрощена схема контролю визнає продукцію придатною для використання з ймовірністю 0,98, якщо вона стандартна, і з ймовірністю 0,06, якщо вона нестандартна. а) Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб пройде спрощений контроль. б) Взятий виріб визнано стандартним. Знайти ймовірність того, що він пройшов спрощений контроль.

3. В першій урні 2 білі і 6 чорних куль, а в другій – 4 білі і 2 чорні кулі. З першої урни навмання переклали 2 кулі у другу і після цього з другої урни взяли навмання одну кулю.

а) Яка ймовірність того, що ця куля біла? б) Кулю, яку взяли з другої урни, біла. Яка ймовірність того, що з першої урни у другу були перекладені 2 білі кулі?

4. Батарея з трьох гармат провела залп, причому два снаряди влучили у ціль. Знайти ймовірність того, що перша гармата влучила у ціль, якщо ймовірності влучень у ціль першою, другою і третьою гарматами відповідно дорівнюють 0,4; 0,3 і 0,5.
5. Три стрільці одночасно вистрілили у ціль і дві кулі влучили у ціль. Знайти ймовірність того, що третій стрілець влучив у ціль, якщо ймовірності влучень у ціль першим, другим і третім стрільцями відповідно дорівнюють: 0,6; 0,5 і 0,4.
6. Два з трьох незалежно працюючих елементів обчислювального пристрою перестали працювати. Знайти ймовірність того, що перестали працювати перший і другий елементи, якщо ймовірності поломки першого, другого і третього елементів відповідно дорівнюють 0,2; 0,4 і 0,3.
7. Дві з чотирьох незалежно працюючих ламп приладу вийшли з ладу. Знайти ймовірність того, що вийшли з ладу перша і друга лампи, якщо ймовірності виходу з ладу першої, другої, третьої і четвертої ламп відповідно дорівнюють: 0,1; 0,2; 0,3 і 0,4.
8. Два підприємства виготовляють будівельну цеглу, причому перше підприємство випускає 70% загальної кількості цегли, а друге – 30%. Продукція першого підприємства містить 80% цегли високої якості, а другого – 90%. Для будівництва використовують продукцію обох підприємств. а) Яка ймовірність того, що для будівництва використовують цеглу тільки високої якості? б) Яка ймовірність того, що завезену цеглу високої якості виготовило перше підприємство?
9. У магазині є для продажу 4 телевізори. Ймовірності того, що телевізори витримають гарантійний строк служби, відповідно дорівнюють 0,8, 0,85, 0,9, 0,95. Знайти ймовірність того, що куплений навмання телевізор витримає гарантійний строк служби.
10. Один шах, якому страшенно наскучив придворний астролог з його брехливими віщуваннями, вирішив стратити його. Але, як людина не жорстока, він вирішив дати астрологу останній шанс. Астролог повинен розподілити по урнах 4 кулі: 2 білі і 2 чорні. Кат вибере навмання одну з урн і з неї витягне кулю. Якщо куля буде чорна, то астрологу відрубать голову, якщо ні – він залишиться живим. Як треба астрологу розподілити кулі в урнах, щоб забезпечити собі максимальну ймовірність залишитись в живих?

Варіанти 6-10

11. Для того, щоб здати іспит, студенти повинні підготувати 30 питань. З 25 студентів 10 підготували всі питання, 8 – 25 питань, 5 – 20 питань і 2 – 15 питань. а) Яка ймовірність того, що викликаний навмання студент відповість на поставлене питання? б) Викликаний студент відповів на питання? Яка ймовірність того, що цей студент підготував всі питання; підготував тільки половину питань?
12. Підкидають монету. Якщо випаде герб, то виймають одну кулю з першої урни. Якщо ж випаде цифра, то виймають кулю з другої урни. У першій урні знаходяться 1 біла і 3 червоні кулі. У другій урні є 3 білі і 1 червона кулі. а) Яка ймовірність того, що вийнята куля червона? б) Яка ймовірність того, що кулю вийнято з першої урни, якщо вона виявилась червоною?
13. Страхова компанія поділяє застрахованих на три класи ризику: I клас – малий ризик, II клас – середній ризик і III клас – великий ризик. Серед клієнтів компанії 50% відносяться до першого класу ризику, 30% – до другого і 20% – до третього. Ймовірність того, що компанії прийдеться виплачувати страхове винагородження клієнтам першого класу ризику, дорівнює 0,01; другого – 0,03 і третього – 0,08. Яка ймовірність того, що: а) застрахований отримає грошове винагородження за термін страхування; б) застрахований, що отримав грошове винагородження, відноситься до групи малого ризику?

14. Супермаркет отримує вироби від трьох фірм у відношенні 5:8:7. Серед продукції першої фірми стандартні вироби складають 90%, другої – 85% і третьої – 75%. Знайти ймовірність того, що: а) придбаний покупцем виріб виявиться нестандартним; б) придбаний покупцем виріб виявився стандартним. Яка ймовірність того, що цей виріб виготовлений третьою фірмою?

15. У кожній з трьох урн знаходяться по 6 чорних і 4 білі кулі. З першої кулі навмання вийняли одну кулю і переклали до другої, після чого з другої урни вийняли навмання одну кулю і переклали до третьої. Знайти ймовірність того, що вийнята з третьої урни куля – біла.

16. Прилад складається з двох дублюючих один одного вузлів і може випадково працювати у двох режимах: сприятливому і несприятливому. В сприятливому режимі надійність кожного вузла дорівнює 0,9, а в несприятливому – 0,7. Ймовірність того, що прилад буде працювати у сприятливому режимі, дорівнює 0,6, у несприятливому – 0,4. Знайти повну надійність приладу.

17. Пасажир може купити білет в одній з трьох кас. Ймовірності звернення в кожну касу залежить від їх місцезнаходження і дорівнюють відповідно 0,1; 0,3 і 0,6. Ймовірності того, що білети до приходу пасажирів будуть розпродані, дорівнюють відповідно 0,5, 0,7 і 0,85. Пасажир підійшов до однієї з кас і купив білет. Знайти ймовірність того, що це була перша каса.

18. З першого верстату поступає 40% деталей, з другого – 30%, з третього – 20% і з четвертого – 10%. Серед деталей, які випускає перший верстат, 2% бракованих; другий – 1%, третій – 0,5%, четвертий – 0,2%. а) Знайти ймовірність того, що деталь, виготовлена одним з верстатів, бракована. б) Виявлено, що деталь бракована. З якого верстата вона найімовірніше поступила?

19. У групі з десяти студентів, що прийшли на іспит, 2 підготували двадцять питань з 20, 4 підготували 16 з 20 питань, 3 – 10 з 20 питань і 1 – 5 питань з 20. Викликаний навмання студент відповів на три довільно задані питання. Знайти ймовірність того, що цей студент: а) підготував всі питання; б) підготував 10 питань.

20. Три дочки – Ганна, Марина і Тетяна – мають обов'язок у сім'ї – мити посуд. З-за того, що Ганна найстарша, вона виконує 40% роботи. Решту – 60% роботи – виконують Марина і Тетяна порівну. Якщо миє посуд Ганна, то ймовірність того, що вона розіб'є тарілку, дорівнює 0,02. Для Марини і Тетяни ці ймовірності такі: 0,03 і 0,04. Батьки не знають, хто мив посуд, але вони почули дзвін розбитої тарілки. Яка ймовірність того, що мила посуд Ганна? Марина? Тетяна?

Варіанти 11-15

21. В першій урні знаходяться дев'ять чорних і одна біла кулі, у другій – одна чорна і п'ять білих куль. З кожної урни навмання забрали по одній кулі, а ті, що залишились, висипали у третю (пусту) урну. Знайти ймовірність того, що куля, взята з третьої урни, буде біла.

22. Продукцію, яку виготовляють на підприємстві, перевіряють 2 контролери, причому, перший контролер перевіряє 65% виробів, а другий – 35%. Ймовірність того, що перший контролер недогляне нестандартний виріб, дорівнює 0,015, а другий – 0,02. а) Яка ймовірність того, що взятий навмання виріб буде нестандартним? б) Взятий навмання виріб виявився нестандартним? Яка ймовірність того, що цей виріб перевіряв другий контролер?

23. Число вантажних автомашин, які проїжджають по шосе, де стоїть бензоколонка, відносяться до числа легкових автомашин, що теж проїжджають по шосе, як 3:2. Ймовірність того, що вантажна автомашинка буде заправлятися бензином, дорівнює 0,1; для легкової автомашини ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під'їхала машина. Знайти ймовірність того, що це грузова машина.

24. В першій з двох урн є 3 білі і 4 чорні кулі, а у другій – 2 білі і 3 чорні. З першої урни до другої перекладають навмання 2 кулі, а потім з другої урни виймають одну кулю. Який склад перекладених куль найімовірніший, якщо куля, вийнята з другої урни, виявилась білою?

25. Перший цех випускає 40% всієї продукції заводу, а другий – 60%. В середньому 9 одиниць з 1000 одиниць продукції першого цеху виявляються браком, а другого – 2 одиниці з 500. Яка одиниця продукції, яку вибрали випадково для контролю, виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що її було вироблено другим цехом; першим цехом?

26. В першій урні 5 білих і 3 чорні кулі, у другій – 2 білі і 4 чорні. З першої до другої урни перекладають навмання 2 кулі. Після цього з другої урни беруть 2 кулі. а) Яка ймовірність того, що ці кулі різного кольору? б) З другої урни взято дві кулі різного кольору? Які кулі найімовірніше були перекладені з першої до другої урни?

27. Група студентів складається з чотирьох відмінників, шести, що навчаються добре, і двадцяти, які навчаються як-небудь. Відмінники на іспиті можуть отримати тільки відмінні оцінки; ті, що навчаються добре, можуть отримати відмінні і добрі оцінки, ті, що навчаються як-небудь можуть отримати з однаковою ймовірністю добрі, задовільні і незадовільні оцінки. Для відповіді навмання викликали студента. а) Знайти ймовірність того, що студент отримає відмінну або добру оцінку. б) Викликали студента і він отримав добру оцінку. З якої групи найімовірніше цей студент?

28. В першій бригаді 8 робітників мають третій розряд і 6 – четвертий. В іншій бригаді 5 робітників мають третій розряд і 5 – четвертий. З першої до другої бригади перевели двох робітників. а) Знайти ймовірність того, що два робітники, взяті навмання з другої бригади, мають третій розряд. б) Виявилось, що з другої бригади взяли двох робітників з третім розрядом. Яка ймовірність того, що з першої до другої бригади перевели двох робітників: з четвертим розрядом; з третім розрядом; один четвертого і один третього розрядів?

29. Чотири стрільці незалежно один від одного стріляють у одну і ту ж мішень. Ймовірність влучення для кожного з них відповідно дорівнює: 0,4, 0,6, 0,7, 0,8. Після того, як стрільці вистрілили у мішень по одному разу, виявилась, що у мішені є три пробоїни. Знайти ймовірність того, що не влучив у мішень четвертий стрілець.

30. До спеціалізованої лікарні приймають в середньому 50% хворих на хворобу К, 10% – на хворобу L, 40% – на хворобу М. Ймовірність повного вилікування хвороби К дорівнює 0,7, хвороб L і М ці ймовірності дорівнюють відповідно 0,8 і 0,9. Хворий, що пройшов лікування, виписався здоровим. Знайти ймовірність того, що він хворів хворобою К.

Варіанти 16-20

31. На базу поступили швейні вироби, з яких 20% виготовлено фабрикою №1, 30% – фабрикою №2 і 50% – фабрикою №3. Ймовірність того, що виріб фабрики №1 має перший сорт, дорівнює 0,7; а для фабрик №2 і №3 ймовірності дорівнюють відповідно 0,8 і 0,9. а) Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб буде виробом першого сорту. б) Взятий виріб – першого сорту. З якої фабрики найімовірніше поступив цей виріб?

32. Робітник обслуговує три верстати, на яких обробляють однотипні деталі. Ймовірність браку для першого верстату дорівнює 0,02; для другого – 0,03; для третього – 0,04. Оброблені деталі складають в один ящик. Продуктивність праці першого верстата у три рази вища, ніж другого, а третього – у два рази менша, ніж другого. а) Знайти ймовірність того, що навмання взята з ящика деталь бракована. б) Деталь, яку взяли з ящика, виявилась бракованою. Знайти ймовірності того, що деталь оброблено на першому, другому і третьому верстатах.

33. У рибалки є три улюблені місця для лову риби, які він відвідує з однаковою ймовірністю. Якщо він закидає вудку на першому місці, то риба клює з ймовірністю 0,7; на другому місці – з ймовірністю 0,65; на третьому місці – з ймовірністю 0,75. Відомо, що рибалка, вийшовши на лов риби, три рази закинув вудку і риба клюнула тільки один раз. Знайти ймовірність того, що він ловив рибу на першому місці.

34. Агентство з страхування автомашин поділяє водіїв на 3 класи: клас H_1 (мало ризикує), H_2 (ризикує посередньо), клас H_3 (дуже ризикує). Агентство вважає, що з усіх водіїв, що застрахували автомашини, 30% належать до класу H_1 , 50% – до класу H_2 і 20% – до класу H_3 . Ймовірність того, що протягом року водій класу H_1 попаде хоча б один раз в аварію, дорівнює 0,01. Для водія класу H_2 ця ймовірність дорівнює 0,02; а для водія класу H_3 – 0,08. Водій А застрахував свою машину і протягом року попав в аварію. Яка ймовірність того, що він відноситься до класу H_1 , класу H_2 , класу H_3 ?

35. Для переливання крові необхідно враховувати групу крові донора і хворого. Людині, яка має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи; людині, що має другу або третю групу крові, можна переливати кров або тієї ж групи, або першої; людині з першою групою крові можна переливати тільки кров першої групи. Серед населення 33,7% людей мають першу, 37,5% – другу; 20,9% – третю і 7,9% – четверту групу крові. Знайти ймовірність того, що випадково вибраному хворому можна перелити кров випадкового взятого донора.

36. В першій урни знаходяться 10 чорних і 4 білі кулі, у другій – 5 чорних і 5 білих куль. З кожної урни навмання забрали по одній кулі, а ті, що залишилися, висипали у третю (пусту) урну. Знайти ймовірність того, що куля, взята з третьої урни, буде чорна.

37. Для того, щоб здати іспит, студенти повинні підготувати 40 питань. З 35 студентів 10 підготували всі питання, 12 – 30 питань, 5 – 20 питань і 8 – 20 питань. а) Яка ймовірність того, що викликаний навмання студент відповість на поставлене питання? б) Викликаний студент відповів на питання? Яка ймовірність того, що цей студент підготував всі питання; підготував тільки 30 питань?

38. В двох груп по 25 студентів. Серед них: в першій групі 10 відмінників, 10 хорошистів і 5 трійчників; в другій групі 6 відмінників, 13 хорошистів і 6 трійчників. З першої обох груп навмання беруть по 2 студенти. Яка ймовірність, що серед них не буде трійчників?

39. Перший цех випускає 30% всієї продукції заводу, а другий – 70%. В середньому 8 одиниць з 1000 одиниць продукції першого цеху виявляються браком, а другого – 3 одиниці з 500. Якась одиниця продукції, яку вибрали випадково для контролю, виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що її було вироблено другим цехом; першим цехом?

40. Маємо дві партії однакових виробів. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 18 стандартних і 5 нестандартних виробів. Із навмання вибраної партії взято один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що другий навмання взятий виріб також буде стандартним.

Варіанти 21-25

41. В піраміді є п'ять гвинтівок, три з яких мають оптичний приціл. Ймовірність того, що стрілок влучить в ціль при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що стрілок влучить в ціль із навмання взятої гвинтівки.

42. В ящику є 12 деталей, виготовлених на першому станку; 20 - на другому; 18 - на третьому. Ймовірність того, що деталь, виготовлена на першому станку буде стандартною, дорівнює 0,9, для деталей, виготовлених на другому та третьому станках, ці ймовірності, відповідно, дорівнюють 0,7 та 0,8. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь буде стандартною.

43. В першій урні є 10 куль, з них 8 білих; в другій урні 20 куль, з них 4 білих. З кожної урни навмання взяли по одній кулі, а потім з цих двох куль навмання взяли одну. Знайти ймовірність того, що взята куля виявиться білою.

44. В кожній з трьох урн є по 6 чорних та 4 білих куль. Із першої урни навмання взяли одну кулю і переклали її в другу урну, після чого із другої урни навмання взяли одну кулю і переклали в третю. Знайти ймовірність того, що взята навмання куля з третьої урни виявиться білою.

45. На конвеєр надходять деталі від трьох автоматів. Перший дає 90 %, другий — 93 %, а третій — 95 % придатної продукції. Протягом зміни від першого автомата надходить 60, від другого — 50, від третього — 40 деталей. Знайти ймовірність потрапляння на конвеєр: 1) нестандартної деталі; 2) стандартної деталі.

46. У піраміді 10 гвинтівків, з яких 4 забезпечені оптичним прицілом. Імовірність того, що стрілець вразить мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,8. Стрілець вразив мішень з навмання взятої гвинтівки. Що ймовірніше: стрілець стріляв з гвинтівки з оптичним прицілом чи без нього?

47. Число вантажних автомашин, що проїжджають по шосе, на якому стоїть бензоколонка, відноситься до числа легкових машин, що проїжджають по тому ж шосе як 3:2. Імовірність того, що буде заправлятися вантажна машина, дорівнює 0,1; для легкової машини ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під'їхала для заправки машина. Знайти ймовірність того, що це вантажна машина.

48. У спеціалізовану лікарню надходять в середньому 50% хворих з захворюванням K , 30% - з захворюванням L , 20% - з захворюванням M . Вірогідність повного лікування хвороби K дорівнює 0,7; для хвороб L і M ці ймовірності відповідно рівні 0,8 і 0,9. Хворий, що надійшов до лікарні, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що цей хворий страждав захворюванням K .

49. Виріб перевіряється на стандартність одним з двох товарознавців. Імовірність того, що цей продукт потрапить до першого товарознавця, дорівнює 0,55, а до другого - 0,45. Імовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним першим товарознавцем, дорівнює 0,9, а друга - 0,98. Стандартний виріб при перевірці було визнано стандартним. Знайти ймовірність того, що цей виріб перевіряв другий товарознавець.

50. Батарея з трьох гармат справила залп, причому два снаряди влучили в ціль. Знайти ймовірність того, що перший снаряд дав попадання, якщо ймовірності попадання в ціль першого, другого і третього снарядів, відповідно, рівні $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,5$.

Варіанти 26-30

51. Два з трьох незалежно працюючих елементів деякого приладу відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили перший і другий елементи, якщо ймовірність відмови першого, другого і третього елементів відповідно дорівнюють 0,2, 0,4 та 0,3.

52. Продукція перевіряється на стандартність одним з двох контролерів, продуктивність праці яких 0,6 та 0,4 відповідно. Ймовірність того, що перевірена продукція була визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,95, а другим – 0,9. Перевірена продукція була визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що продукцію перевірів другий контролер.
53. В групі 20 студентів, серед них: 4 – відмінники, 8 – хорошистів, 6 – трієчників та 2 двієчники. До іспиту запропоновано вивчити 25 питань. Студент-відмінник вивчив всі питання, хорошист – 20 питань, трієчник – 15, а двієчник – 5 питань. Викликаний навмання студент відповів на три поставлені питання. Знайти ймовірність того, що це: а) хорошист; б) трієчник.
54. Курс долара підвищується протягом місяця з ймовірністю 0,8 і падає з ймовірністю 0,2. При підвищенні курсу долара компанія розраховує отримати прибуток з ймовірністю 0,75, а при пониженні – з ймовірністю 0,45. Знайти ймовірність того, що компанія отримає прибуток.
55. Три стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу, причому двоє з них влучили в мішень. Ймовірності влучення в мішень для першого, другого та третього стрільців відповідно дорівнюють 0,2, 0,4 і 0,3. Знайти ймовірність того, що влучив перший стрілець.
56. В міську лікарню на протязі місяця потрапляє в середньому 50% хворих на грип, 40% хворих на ангіну та 10% хворих на запалення легень. Ймовірність одужати при захворюванні на грип 0,9, при ангіні – 0,8, при запаленні легень – 0,7. Хворий, який потрапив до лікарні, одужав. Знайти ймовірність того, що він був хворий на ангіну.
57. В селищі Іванівка працюють дві будівельні компанії А та В, які пропонують свої послуги. Ймовірність укладання клієнтом договору з компанією А становить 0,4, а з компанією В – 0,6. Ймовірність якісного виконання робіт компанією А – 0,7, а компанії В – 0,5. При укладанні договору з однією з компаній клієнт не отримав якісного виконання запланованих ним робіт. Знайти ймовірність того, що договір був укладений з компанією А.
58. В першій урні 2 білі і 4 чорні кулі, а в другій урні 3 білі і 1 чорна куля. З першої урни переклали в другу 2 кулі. Знайти ймовірність того, що куля винята із другої урни після перекладання буде білою.
59. В урну, що містить 2 кулі, поклали білу кулю, після цього, з неї навмання вилучили 1 кулю. Знайти ймовірність того, що винята куля виявиться білою.
60. Дві з чотирьох незалежно працюючих ламп приладу вийшли з ладу. Знайти ймовірність того, що вийшли з ладу перша і друга лампи, якщо ймовірності виходу з ладу першої, другої, третьої і четвертої ламп відповідно дорівнюють: 0,3; 0,2; 0,4 і 0,2.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №6

ФОРМУЛА БЕРНУЛІ. ФОРМУЛА ПУАССОНА. ЛОКАЛЬНА ТА ІНТЕГРАЛЬНА ТЕОРЕМИ МУАВРА-ЛАПЛАСА. НАЙБІЛЬШ ЙМОВІРНЕ ЧИСЛО.

Повторні незалежні випробування.

1. Формула Бернуллі. Найймовірніша кількість успіхів.

Випробування називають **незалежними**, якщо ймовірність будь-якого результату випробування не залежить від того, які наслідки мали інші випробування.

Якщо n незалежних випробувань відбуваються в однакових умовах, причому, в кожному з них з ймовірністю p з'являється подія A ($0 < p < 1$), то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A відбудеться в цих n випробуваннях рівно m разів, визначається за формулою

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (6.1)$$

де $q = 1 - p$.

Настання події A будемо називати «успіхом»

Найймовірніше число m_0 появ події A в n випробуваннях визначається з нерівностей:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \quad (6.2)$$

З-за того, що $np + p - (np - q) = p + q = 1$, число m_0 завжди існує, причому, якщо $np + q$ – ціле число, то найймовірніших чисел буде два: $m_0 = np - q$ і $m_0 = np + p$.

Якщо ймовірність появи події A в кожному з n випробувань дорівнює p , то кількість випробувань, які необхідно здійснити, щоб з ймовірністю P можна було стверджувати, що подія A відбудеться хоча б один раз, обчислюється за формулою:

$$n > \frac{\ln(1 - p)}{\ln(1 - P)}. \quad (6.3)$$

Обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі при великих значеннях n і m пов'язане з певними труднощами. Щоб уникнути їх, застосовують локальну та інтегральну теореми Муавра – Лапласа.

Приклади задач.

1. На аукціонах продають в середньому 15% пакетів акцій за початковою ціною. Яка ймовірність того, що серед 6 пакетів акцій в результаті торгів за початковою ціною буде продано: а) 2 пакети акцій; б) не більше 2 пакетів акцій; в) не менше 3 пакетів акцій? Знайти найймовірніше число пакетів акцій, що продаються на аукціоні.

Розв'язання.

Ймовірність продажу одного пакету акцій дорівнює $p = 0,15$.

Звідси $q = 1 - 0,15 = 0,85$.

а) Ймовірність продажу 2 пакетів акцій знайдемо за формулою Бернуллі:

$$P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^4 \approx 0,176.$$

б) $P_6(0 \leq m \leq 2) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = C_6^0 \cdot p^0 \cdot q^6 + C_6^1 \cdot p^1 \cdot q^5 +$

$$+ C_6^2 \cdot p^2 \cdot q^4 = 0,85^6 + \frac{6}{1} \cdot 0,15 \cdot 0,85^5 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^4 \approx 0,953$$

в)

$$P_6(3 \leq m \leq 6) = P_6(3) + \dots + P_6(6) = 1 - (P_6(0) + P_6(1) + P_6(2)) = 1 - 0,953 = 0,047.$$

Найімовірніше число пакетів акцій, що продаються на аукціоні, знайдемо з нерівностей $np - q \leq m_0 \leq np + p$.

Маємо $6 \cdot 0,15 - 0,85 \leq m_0 \leq 6 \cdot 0,15 + 0,15$. Звідси $0,05 \leq m_0 \leq 1,05$, тобто $m_0 = 1$.

Ймовірність цієї події $P_6(1) = 6 \cdot 0,15 \cdot 0,85^5 \approx 0,399$.

2. Ймовірність відмовлення кожного приладу при його випробуванні складає 0,2. Скільки приладів потрібно випробувати, щоб з ймовірністю не менше 0,9 отримати хоча б один прилад, який відмовить.

Розв'язання.

Нехай A – подія, що при n випробувань хоча б один прилад відмовить.

Тоді $P(A)=0,2$; $p=0,9$. Одержимо за формулою (6.3): $n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,8} \approx 11,5$; $n \geq 12$.

Отже, необхідно не менш 12 приладів випробувати.

2. Локальна формула Муавра – Лапласа.

Якщо ймовірність p появи події A у кожному випробуванні стала і відмінна від 0 і 1, то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A відбудеться m разів в n випробуваннях для достатньо великих значень n , наближено дорівнює

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad (6.4)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гауса, таблиця значень якої наведено в додатку1, де

$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Чим більше n , тим точніше формула (6.4). Вона дає невелику похибку, якщо

$$npq \geq 10.$$

Функція $\varphi(x)$ парна: $\varphi(x) = \varphi(-x)$; практично можна вважати, що для $x > 4$: $\varphi(x) \approx 0$.

3. Інтегральна формула Муавра – Лапласа.

Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і відмінна від 0 і 1, то ймовірність того, що число m появ події A в n незалежних випробуваннях буде міститись у границях від m_1 до m_2 (включно), для достатньо великих n наближено дорівнює:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (6.5)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа, таблиця значень якої наведена в додаку2, де

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція Лапласа $\Phi(x)$ непарна ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$) і $\Phi(x) \rightarrow 0,5$ для $x \rightarrow \infty$ (для $x > 5$ можна вважати, що $\Phi(x) = 0,5$). Формула (6.5) дає невелику похибку для $npq \geq 10$.

Приклади задач.

1. Перевірки податкової інспекції показали, що кожне друге мале підприємство порушує фінансову дисципліну. 1) Знайти ймовірність того, що серед 800 малих підприємств району порушили фінансову дисципліну: а) 380 підприємств; б) не менше 380 підприємств; в) від 380 до 420 підприємств. 2) Яке найімовірніше число малих підприємств, що порушили фінансову дисципліну?

Розв'язання.

1. а) За умовою $p = 0,5$. Число малих підприємств достатньо велике $n = 800$, тому застосуємо локальну формулу Муавра–Лапласа, крім того $npq = 800 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,5) = 200$.

$$\text{Для цього знайдемо } x = \frac{380 - 800 \cdot 0,5}{\sqrt{800 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1,414.$$

За формулою (4) знайдемо: $P_{800}(380) = \frac{\varphi(-1,414)}{\sqrt{800 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{\varphi(1,414)}{\sqrt{200}} = \frac{0,1468}{10\sqrt{2}} \approx 0,0106$.

б) Щоб знайти $P_{800}(m \geq 380)$, використаємо інтегральну формулу Муавра – Лапласа (5).

$$x_1 = \frac{380 - 800 \cdot 0,5}{\sqrt{800 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1,414, \quad x_2 = \frac{800 - 800 \cdot 0,5}{\sqrt{800 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 68,284$$

Маємо

$$\begin{aligned} P_{800}(380 \leq m \leq 800) &= \Phi(68,284) - \Phi(-1,414) = \\ &= \Phi(68,284) + \Phi(1,414) = 0,5 + 0,4214 = 0,9214. \end{aligned}$$

в) Ймовірність $P_{800}(380 \leq m \leq 420)$ також можна знайти за формулою Муавра – Лапласа. Але ми використаємо формулу (6.5), враховуючи те, що границі інтервалу (380; 420) симетричні відносно значення $np = 800 \cdot 0,5 = 400$:

$$\begin{aligned} P_{800}(380 \leq m \leq 420) &= P_{1000}(|m - 400| \leq 20) \approx \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{200}}\right) = \\ &= \Phi(1,414) = 0,4214. \end{aligned}$$

2. Тепер знайдемо найімовірніше число малих підприємств, що порушили фінансову дисципліну.

Маємо: $800 \cdot 0,5 - 0,5 \leq m_0 \leq 800 \cdot 0,5 + 0,5$, тобто $399,5 \leq m_0 \leq 400,5$. Звідси $m_0 = 400$.

Ймовірність цієї події, з-за того, що $x = 400 - 800 \cdot 0,5 = 0$, дорівнює

$$P_{800}(400) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{200}} = \frac{0,3989}{10\sqrt{2}} = 0,0282.$$

4. Формула Пуассона.

Якщо ймовірність p появи події A у кожному випробуванні прямує до 0 ($p \rightarrow 0$) з одночасним необмеженим зростанням числа n випробувань ($n \rightarrow \infty$), то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A відбудеться m разів в n незалежних випробувань, обчислюється за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad (6.6)$$

де $\lambda = np \leq 10$.

Формулу Пуассона застосовують для подій, що рідко трапляються, таблиця значень якої наведена в додатку 3.

Приклади задач.

1. База отримує 10000 стандартних виробів. Транспортування цих виробів приводить до пошкодження у середньому 0,02% виробів. Знайти ймовірність того, що з 10000 виробів: 1) буде пошкоджено: а) 3 вироби; б) хоча б 3 вироби; 2) не буде пошкоджено: а) 9997 виробів; б) хоча б 9997 виробів.

Розв'язання.

1. а) Ймовірність того, що транспортування пошкодить виріб, дорівнює 0,0002. З-за того, що p – мале, n – велике і $\lambda = np = 10000 \cdot 0,0002 = 2 \leq 10$, ми можемо застосувати

формулу Пуассона: $P_{10000}(3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!}$. Використовуючи таблицю 3 додатку, отримаємо:

$$P_{10000}(3) = 0,18045.$$

б) Ймовірність $P_{10000}(m \geq 3)$ знайдемо так:

$$\begin{aligned} P_{10000}(m \geq 3) &= 1 - P_{10000}(m < 3) = 1 - (P_{10000}(0) + P_{10000}(1) + P_{10000}(2)) = \\ &= 1 - (0,3534 + 0,27067 + 0,27067) = 0,32332. \end{aligned}$$

2. а) У даному випадку $p = 1 - 0,0002 = 0,9998$. Потрібно знайти $P_{10000}(9997)$.

З-за того, що ймовірність p велика, ми не можемо застосувати формулу Пуассона. Крім того, $npq \approx 2 < 20$, так що ми не можемо скористатись інтегральною формулою Муавра – Лапласа. Але подія «не пошкоджено 9997 виробів з 10000» рівносильна події «пошкоджено 3 вироби з 10000», ймовірність якої ми вже знайшли. Тому $P_{10000}(9997) = 0,18045$.

б) Подія «не пошкоджено хоча б 9997 з 10000 виробів» рівносильна події «пошкоджено не більше, ніж 3 вироби з 10000», для якої $p = 0,0002$.

Тому

$$P_{10000}(m \leq 3) = P_{10000}(0) + P_{10000}(1) + P_{10000}(2) + P_{10000}(3) = \\ = 0,13534 + 0,27067 + 0,27067 + 0,18045 = 0,85713.$$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №6

Варіанти 1-5

1. Проведено п'ять одночасних підкидань двох монет. Знайти ймовірність того, що рівно у трьох підкиданнях з'явилось по два герба.
2. Ймовірність влучення у мішень одним пострілом дорівнює 0,6. Яке найімовірніше число влучень у мішень і ймовірність такої події, якщо проведено 10 пострілів?
3. Проведено десять пострілів у ціль. Ймовірність влучення у ціль кожним пострілом дорівнює 0,2. Знайти найімовірніше число влучень у ціль, і ймовірність такого результату.
4. Монету підкидають десять разів. Знайти ймовірність того, що герб з'явиться не менше чотирьох разів і не більше 7 разів. Яке найімовірніше число появ герба?
5. Ймовірність появи події A в кожному незалежному з 900 випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться: а) 750 разів; б) 710 разів; в) від 710 до 740 разів.
6. Ймовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успішними будуть: а) рівно 75 випробувань? б) рівно 85 випробувань?
7. Ймовірність народження хлопчика прийемо рівною 0,5. Знайти ймовірність того, що серед двохсот новонароджених дітей будуть: а) 100 хлопчиків; б) менше 90 хлопчиків; в) від 90 до 110 хлопчиків.
8. Радіоприймач складається з 1000 мікроелементів. Ймовірність відмови кожного з елементів протягом суток дорівнює 0,001 і не залежить від стану інших елементів. Знайти ймовірність відмови а) 2 елементів; б) не менше 2 елементів за добу.
9. Шульги складають у середньому 1% студентів. Яка ймовірність того, що серед 200 студентів знайдуться: а) рівно 4 шульги; б) не менше, ніж 4 шульги.
10. Телефонна станція обслуговує 400 абонентів. Для кожного абонента ймовірність того, що протягом однієї години він зателефонує на станцію, дорівнює 0,01. Знайти ймовірності таких подій: а) протягом однієї години 5 абонентів зателефонують на станцію; б) протягом однієї години не більше 4 абонентів зателефонують на станцію; в) протягом години не менше 3 абонентів зателефонують на станцію.

Варіанти 6-10

11. Дослід полягає у підкиданнях трьох гральних кісток. Знайти ймовірність того, що у п'яти незалежних підкиданнях рівно три рази випадуть числа 3.
12. Знайти ймовірність того, що у восьми незалежних експериментах подія A з'явиться: а) чотири рази; б) не менше чотирьох разів, якщо ймовірність появи A в кожному експерименті дорівнює 0,8.
13. Контрольне завдання містить п'ять питань, на кожне з яких є чотири варіанти відповідей, причому, одна відповідь вірна, а три – не вірні. Знайти ймовірність того, що студент, який не знає ні одного питання, дасть: а) три вірних відповіді; б) не менше трьох вірних відповідей.

14. Робітник обслуговує двадцять однотипних верстатів. Ймовірність того, що йому прийдеться ремонтувати протягом години один з верстатів, дорівнює $1/2$. Знайти: а) ймовірність того, що протягом однієї години робітнику потрібно буде ремонтувати чотири верстати; б) найімовірніше число верстатів, які потрібно буде ремонтувати протягом години.
15. Ймовірність того, що покупцю потрібне взуття 43-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 100 покупців забажають купити взуття 43-го розміру: а) 25 покупців; б) від 10 до 30 покупців; в) не більше 30 покупців; г) не менше 35 покупців.
16. Сто верстатів працюють незалежно один від одного, причому ймовірність безперебійної роботи кожного з них протягом робочого дня дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що протягом робочого дня безперебійно будуть працювати: а) 85 верстатів; б) від 75 до 85 верстатів.
17. За час t конденсатор виходить із ладу з ймовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, за час t з 100 незалежно працюючих конденсаторів вийдуть з ладу: а) не менше 20; б) менше, ніж 28; в) від 14 до 26 конденсаторів.
18. Ймовірність появи події A у кожному з 1500 незалежних випробувань дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що число появ події A міститься між: а) 570 і 630; б) 600 і 660.
19. Надруковано 10000 підручників. Ймовірність того, що екземпляр підручника має вади, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має рівно п'ять бракованих підручників.
20. Ймовірність зробити помилку на сторінці книги дорівнює 0,002. Перевіряється книга, що має 500 сторінок. Знайти ймовірність того, що з помилками виявляться: а) 5 сторінок; б) від 3 до 5 сторінок.

Варіанти 11-15

21. Проводяться десять пострілів у мішень. Ймовірність влучення у мішень одним пострілом дорівнює 0,15. Знайти ймовірність: а) трьох влучень у мішень; б) не менше трьох влучень у мішень.
22. Прилад вийде з ладу, якщо перегорять не менше п'яти ламп першого типу, або не менше двох ламп другого типу. Знайти ймовірність виходу приладу з ладу, якщо відомо, що перегоріло п'ять ламп, а ймовірність перегорання ламп першого і другого типів дорівнюють відповідно 0,7 і 0,3.
23. З партії виробів вибирають вироби вищого ґатунку. Ймовірність того, що навмання вибраний виріб - вищого ґатунку, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з п'яти вибраних виробів будемо мати: а) два вироби вищого ґатунку; б) не менше двох виробів вищого ґатунку.
24. Схожість злаків оцінюється ймовірністю 0,85. Знайти ймовірність того, що з 500 посіяних злаків зійдуть: а) 425 злаків; б) 400 злаків; в) від 425 до 450 злаків.
25. Знайти ймовірність того, що серед 1000 новонароджених буде: а) 480 дівчаток, б) не менше 600 дівчаток, в) яке найімовірніше число новонароджених будуть дівчинки, якщо ймовірність народження хлопців дорівнює 0,515.
26. Будівельна компанія, яка виготовляє і встановлює літні будинки, розсилає рекламні листи у поштові скриньки. Досвід роботи компанії показав, що приблизно в одному випадку з двох тисяч поступає замовлення. Знайти ймовірність того, що розіславши 100 тисяч листівок, компанія отримає: а) рівно 48 замовлень; б) від 45 до 55 замовлень.

27. Середній брак при виробництві продукції на підприємстві становить 0,1%. Перевіряється партія з 1000 деталей. Яка ймовірність того, що бракованими буде: а) від 2 до 4 деталей? б) 1 деталь? в) не більше 3 деталей?
28. Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайти ймовірність двох і більше влучень, якщо було зроблено 5000 пострілів.
29. По каналу зв'язку передається 1000 знаків. Кожен знак може бути викривлений з ймовірністю 0,0004. Знайти ймовірність того, що буде викривлено не більше 3 знаків.
30. Ймовірність виробництва бракованого виробу дорівнює 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що з 10000 вибраних навмання виробів бракованих буде не більше 60?

Варіанти 16-20

31. Яка з подій ймовірніша: а) поява хоча б однієї шістки при підкиданнях шести гральних кісток; б) поява хоча б двох шісток при підкиданнях двадцяти гральних кісток; в) поява хоча б трьох шісток при підкиданні вісімдесяти гральних кісток?
32. Гральну кістку підкидають шість разів. Знайти ймовірність того, що в результаті підкидань на верхній грані з'являться числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 по одному разу.
33. Ймовірність того, що покупцю потрібно взуття 42-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що з п'яти перших покупців взуття цього розміру знадобиться: а) одному; б) не менше, ніж одному.
34. Знайти ймовірність того, що номер першого зустрічного автомобіля не має: а) цифри 5; б) двох і більше цифр 5; в) двох цифр 5. (Номер має чотири цифри).
35. За результатами перевірок податковими інспекціями встановлено, що в середньому кожне друге мале підприємство даного району має порушення фінансової дисципліни. Знайти ймовірність того, що з 1000 зареєстрованих малих підприємств в районі порушують фінансову дисципліну: а) 400 підприємств; б) не менше 480; в) від 480 до 520.
36. В деякій місцевості з кожних 100 сімей 80 сімей мають холодильники. Яка ймовірність того, що з 400 сімей: а) 300 сімей мають холодильники; б) від 300 до 360 сімей мають холодильники?
37. Аудиторну роботу з теорії ймовірностей за першим разом успішно виконують 50% студентів. Знайти ймовірність того, що з 400 студентів роботу успішно виконають: а) 180 студентів; б) не менше 180 студентів.
38. Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що внаслідок перевезення пляшка розіб'ється, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин отримає: а) 2 розбиті пляшки; б) менше двох розбитих пляшок; в) більше двох розбитих пляшок; г) хоча б одну розбиту пляшку.
39. Брак у виробництві продукції на підприємстві у середньому становить 0,3%. Перевіряється партія з 2000 деталей. Яка ймовірність того, що браковані будуть: а) від 5 до 7 деталей; б) 3 деталі; в) не більше 2-х деталей?
40. Ймовірність промаху у ціль кожним пострілом дорівнює 0,002. Знайти ймовірність трьох і більше промахів, якщо було зроблено 2000 пострілів.

Варіанти 21-25

41. Автобаза має 9 автобусів. Ймовірність виходу на лінію кожного з них дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автобази у найближчий день, якщо для цього потрібно мати на лінії не менше 8 автобусів.
42. Ймовірність банкрутства малого підприємства за період роботи t дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що з шести малих підприємств за цей час t не збанкрутують а) два; б) більше двох.

43. Ймовірність влучення у мішень одним пострілом для даного стрільця дорівнює 0,6 і не залежить від інших пострілів. Яка ймовірність того, що з п'яти пострілів стрілець влучить у мішень: а) рівно 2 рази; б) від 2 до 4 раз?
44. Що ймовірніше: виграти у рівного суперника: 1) три партії з чотирьох, чи п'ять партій з восьми; 2) не менше трьох партій з чотирьох, чи не менше п'яти партій з восьми?
45. Обслідування статутних фондів банків показало, що п'ята частина банків мають статутний фонд більше 100 млн. гривень. Знайти ймовірність того, що серед 1800 банків мають статутний фонд більше 100 млн. гривень: а) не менше 300; б) від 300 до 400.
46. Ймовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Чому дорівнює ймовірність того, що з 300 випробувань успішними будуть: а) рівно 75 випробувань; б) рівно 85 випробувань?
47. Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що за час t зі 100 приладів вийдуть з ладу:
а) не менше 20; б) менше 15; в) від 6 до 18 приладів?
48. В банк відправлено 4000 пакетів грошових знаків. Ймовірність того, що пакет містить недостатнє або надлишкове число грошових знаків, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що перевірка пакетів виявить: а) три помилково укомплектовані пакети; б) не більше трьох пакетів.
49. У процесі виробництва ймовірність дефектів у кожній партії продукції становить 0,01. Яка ймовірність того, що з 25 партій дефекти матимуть: а) менше двох партій; б) не більше 5 партій?
50. Ймовірність того, що пасажир запізниться на поїзд, дорівнює 0,002. Знайти найімовірніше число пасажирів, які запізняться, і ймовірність такої події, якщо білети взяли 800 пасажирів.

Варіанти 26-30

51. Монету кидають п'ять раз. Знайти ймовірність того, що «герб» випаде: а) менше двох разів; б) не менше двох разів.
52. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться не менше трьох раз в чотирьох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в одному випробуванні рівна 0,4;
а) подія B з'явиться у випадку, якщо подія A відбудеться не менше чотирьох раз. Знайти ймовірність настання події B , якщо буде проведено п'ять незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події $A = 0,8$.
53. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться рівно 70 разів в 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні рівна 0,25.
54. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться 1400 разів в 2400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні рівна 0,6.
55. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі рівна 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена рівно 75 разів.
56. Ймовірність народження хлопчика рівна 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться 50 хлопчиків.
57. Монета кинута $2N$ разів (N велике!). Знайти ймовірність того, що «герб» випаде рівно N разів.

58. Ймовірність появи події в кожному з 100 незалежних випробувань стала і рівна $p = 0,8$. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) не менше 75 раз і не більше 90 разів
59. Ймовірність появи події в кожному з 2100 незалежних випробувань рівна 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) не менше 1470 і не більше 1500 разів; б) не менше 1470 разів; у) не більше 1469 разів.
60. Ймовірність появи події в кожному з 21 незалежних випробувань рівна 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться в більшості випробувань.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7

ВІДХИЛЕННЯ ВІДНОСНОЇ ЧАСТОТИ ВІД ПОСТІЙНОЇ ІМОВІРНОСТІ В НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАННЯХ.

Наслідки формули Муавра – Лапласа. Відхилення відносної частоти від ймовірності.

Якщо ймовірність появи події A у кожному випробуванні стала і відмінна від 0 і 1, то для достатньо великого числа n незалежних випробувань ймовірність того, що:

а) відносна частота m/n події A відрізняється від її ймовірності p не більше, ніж на величину $\delta > 0$ (за абсолютною величиною), наближено дорівнює

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) \quad (7.1)$$

б) число m появ події A відрізняється від добутку np не більше, ніж на величину $\varepsilon > 0$ (за абсолютною величиною), наближено дорівнює:

$$P(|m - np| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) \quad (7.2)$$

в) частота $W(A) = \frac{m}{n}$ події A лежить в границях від α до β , наближено дорівнює

$$P_n(\alpha \leq W \leq \beta) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (7.3)$$

де $x_1 = \frac{\alpha - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}, x_2 = \frac{\beta - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}.$

Приклади задач.

1. Ймовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,9. Навмання беруть 200 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з імовірністю 0,96.

Розв'язання.

За умовою задачі: $n = 200$; $p = 0,9$; $P = 0,96$. Підставивши ці значення в (7.1), дістанемо:

$$P(|W(A) - 0,9| < \delta) \approx 2 P\left(\delta \sqrt{\frac{200}{0,1 \cdot 0,9}}\right) \approx 0,96.$$

$$2 P\left(\delta \sqrt{\frac{200}{0,1 \cdot 0,9}}\right) = 2 P(47,14 \cdot \delta) = 0,96,$$

$$P(47,14 \cdot \delta) = 0,48; \quad 47,14 \cdot \delta = 2,06; \quad \delta = 0,044.$$

Тоді

$$\begin{aligned} &|W(A) - 0,9| < 0,0044; \\ &-0,044 < W(A) - 0,9 < 0,044; \\ &-0,044 + 0,9 < W(A) < 0,044 + 0,9; \\ &0,856 < W(A) < 0,944. \end{aligned}$$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №7

Варіанти 1-5

1. Ймовірність появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює 0,9. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,98 можна стверджувати, що не менше 150 випробувань дадуть позитивний результат.
2. Ймовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що для 100 проведених випробувань частота появи цієї події відхилиться від ймовірності $p = 0,4$ не більше, ніж на 0,5.
3. Проводиться 60 підкидань гральної кістки. Потрібно оцінити ймовірність того, що частота випадань шістки відхилиться від ймовірності випадання шістки в одному підкиданні менша, ніж: а) на 0,01; б) на 0,02.
4. Ймовірність появи події A у кожному незалежному випробуванні дорівнює 0,9. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,98 можна було очікувати, що не менше 150 випробувань дадуть позитивний результат.
5. За статистичними даними 87% народжених доживають до 50 років. Знайти ймовірність того, що з 1000 новонароджених доля (частота), які дожили до 50 років буде: а) знаходиться в границях від 0,9 до 0,95; б) відрізнятись від ймовірності цієї події не більше, ніж на 0,04 (за абсолютною величиною).
6. Два стрілки стріляють по мішені. Ймовірність промаху при одному пострілі для першого стрілка рівна 0,3, а для другого - 0,6. На скільки відносна частота невлучання в мішень відхиляється від ймовірності невлучання, якщо стрілки проведуть 30 залпів та m – найймовірніше число настання цієї події (за абсолютною величиною)?
7. Ймовірність того, що дилер, який торгує цінними паперами, продасть їх, дорівнює 0,7. Скільки повинно бути цінних паперів, щоб можна було стверджувати з ймовірністю 0,996, що доля проданих серед цих паперів відрізнятиметься від 0,7 не більше, ніж на 0,04?
8. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,9. Знайти: а) з ймовірністю 0,9545 межі числа стандартних деталей серед перевірених 900 деталей; б) ймовірність того, що доля стандартних деталей серед них знаходиться в межах від 0,08 до 0,11.

9. В результаті перевірки якості підготовленого до сівби насіння гороха встановлено, що в середньому 90% дають добру схожість. Скільки потрібно посіяти насіння, щоб з ймовірністю 0,991 можна було сподіватись, що доля насіння, що зійшла, відрізнятиметься від ймовірності зійти кожній насінини не більша, ніж на 0,03?

10. Під час випуску інструментів для ремонту автомобілів буває в середньому 2% браку. Із партії навання взяли 500 інструментів. Знайти з ймовірністю 0,9421 межі, в яких буде число інструментів, які відповідають стандартам.

Варіанти 6-10

11. Контролер перевіряє 175 пакетів на стандартність. Ймовірність того, що пакет цвяхів нестандартний, дорівнює 0,05. Знайти з ймовірністю 0,995 межі, в яких буде число нестандартних пакетів цвяхів із перевірених.

12. Лінією заводу фасується крейда. Ймовірність того, що під час фасування пакет буде пошкодженим, дорівнює 0,02. Із партії фасованої крейди взяли навання 60 пакетів. Знайти з ймовірністю 0,97 межі, в яких буде число кондиційних пакетів крейди.

13. З конвеєру відпускається у середньому 85% виробів першого гатунку. Скільки виробів потрібно взяти, щоб з ймовірністю 0,996 відхилення відносної частоти виробів першого гатунку від ймовірності 0,85 появи цих виробів за модулем не перевищувало 0,01.

14. Ймовірність появи події в кожному із n незалежних випробувань дорівнює 0,7. Для якого n з ймовірністю 0,896 можна очікувати, що модуль відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності не перевищує 0,01.

15. Відділом технічного контролю перевіряється якість 750 виробів. Ймовірність того, що виріб бракований, дорівнює 0,025. Знайти з ймовірністю 0,99 межі, в яких міститься число бракованих виробів серед перевірених.

16. Ймовірність того, деталь, яка виготовлена заводом, буде бракованою, дорівнює 0,03. Для контролю відібрано навання 500 деталей. Знайти ймовірність того, що відносна частота бракованих деталей у вибірці відрізняється від ймовірності 0,03, за абсолютною величиною, не більше, ніж на 0,01.

17. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з ймовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з ймовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від ймовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

18. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,8. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,95 можна було очікувати відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності за абсолютною величиною не більш як на 0,03?

19. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 10000 незалежних випробувань дорівнює 0,85. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю 0,98 за абсолютною величиною, відхилення відносної частоти появи події від ймовірності 0,85, не перевищувала ε .

20. Під час випуску інструментів для ремонту автомобілів буває в середньому 3% браку. Із партії навання взяли 400 інструментів. Знайти з ймовірністю 0,95 межі, в яких буде число інструментів, які відповідають стандартам.

Варіанти 11-15

21. Ймовірність успіху в кожному з 400 незалежних випробувань дорівнює 0,65. Знайти ймовірність того, що відносна частота настання успіху відхиляється за абсолютною величиною від його ймовірності не більше ніж на 0,04.
22. Ймовірність появи випадкової події в кожній зі 500 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,8. Знайти число випробувань, при якому з ймовірністю 0,989 можна очікувати, що відносна частота появи події відхилиться від $p=0,8$ за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01.
23. Ймовірність появи випадкової події в кожній зі 600 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,6. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю 0,97 за абсолютною величиною, відхилення відносної частоти появи події від ймовірності 0,6, не перевищувала ε .
24. Ймовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,85. Навмання беруть 700 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з ймовірністю 0,999.
25. Ймовірність появи випадкової події в кожній зі 900 незалежних випробувань дорівнює 0,75. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю 0,797 за абсолютною величиною, відхилення відносної частоти появи події від ймовірності 0,75, не перевищувала ε .
26. Відділом технічного контролю перевіряється якість 475 виробів. Ймовірність того, що виріб бракований, дорівнює 0,02. Знайти з ймовірністю 0,95 межі, в яких міститься число m бракованих виробів серед перевірених.
27. Скільки разів необхідно підкинути гральну кість, щоб ймовірність нерівності $|m/n - 1/6| \leq 0,01$ була не менше, ніж ймовірності протилежної нерівності, де m – число появи одного очка в n підкиданнях гральної кісті.
28. З конвеєру відпускається у середньому 75% виробів вищого гатунку. Скільки виробів потрібно взяти, щоб з ймовірністю 0,94 відхилення відносної частоти виробів вищого гатунку від ймовірності 0,75 появи цих виробів за модулем не перевищувало 0,02.
29. Ймовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,77. Навмання беруть 455 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з ймовірністю 0,95.
30. Ймовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює 0,56. Знайти ймовірність того, що для 500 проведених випробувань частота появи цієї події відхилиться від ймовірності $p = 0,56$ не більше, ніж на 0,02.

Варіанти 16-20

31. Проводиться 70 підкидань гральної кістки. Потрібно оцінити ймовірність того, що частота випадань трійки відхилиться від ймовірності випадання трійки в одному підкиданні менша, ніж на 0,01.
32. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,7. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,965 можна було очікувати відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності за абсолютною величиною не більш як на 0,001?
33. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 300 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,6. З якою ймовірністю можна стверджувати, що відносна частота появи випадкової події при цих спробах міститься в межах $[1,6; 1,8]$?

34. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 575 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,4. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю 0,93 за абсолютною величиною, відхилення відносної частоти появи події від ймовірності 0,4, не перевищувала ε .
35. Монету підкидають 50 раз. Знайти з ймовірністю 0,98 межі, в яких буде знаходитися число m випадення «герба».
36. Ймовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,95. Навмання беруть 250 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з ймовірністю 0,97.
37. Ймовірність появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює 0,92. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,99 можна стверджувати, що не менше 160 випробувань дадуть позитивний результат.
38. Ймовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює 0,45. Знайти ймовірність того, що для 100 проведених випробувань частота появи цієї події відхилиться від ймовірності $p=0,45$ не більше, ніж на 0,55.
39. Проводиться 70 підкидань гральної кістки. Потрібно оцінити ймовірність того, що частота випадань шістки відхилиться від ймовірності випадання шістки в двох підкиданнях менша, ніж на 0,015.
40. Ймовірність появи події A у кожному незалежному випробуванні дорівнює 0,95. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,99 можна було очікувати, що не менше 170 випробувань дадуть позитивний результат.

Варіанти 21-25

41. Проводиться 75 підкидань гральної кістки. Яка ймовірність того, що частота випадань двійки відхилиться від ймовірності випадання двійки в одному підкиданні менша, ніж на 0,05?
42. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,8. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,985 можна було очікувати відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності за абсолютною величиною не більш як на 0,001?
43. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 400 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,6. З якою ймовірністю можна стверджувати, що відносна частота появи випадкової події при цих спробах міститься в межах $[1,4; 1,8]$?
44. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 600 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,6. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю 0,95 за абсолютною величиною, відхилення відносної частоти появи події від ймовірності 0,6, не перевищувала ε .
45. Монету підкидають 100 раз. Знайти з ймовірністю 0,98 межі, в яких буде знаходитися число m випадення «герба».
46. Ймовірність того, деталь, яка виготовлена заводом, буде бракованою, дорівнює 0,02. Для контролю відібрано навмання 400 деталей. Знайти ймовірність того, що відносна частота бракованих деталей у вибірці відрізняється від ймовірності 0,02, за абсолютною величиною, не більше, ніж на 0,02.

47. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з ймовірністю 0,91. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з ймовірністю 0,9993 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від ймовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,003? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

48. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,84. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,945 можна було очікувати відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності за абсолютною величиною не більш як на 0,01?

49. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 10000 незалежних випробувань дорівнює 0,85. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю 0,948 за абсолютною величиною, відхилення відносної частоти появи події від ймовірності 0,85, не перевищувала ε .

50. З конвеєру відпускається у середньому 70% виробів вищого гатунку. Скільки виробів потрібно взяти, щоб з ймовірністю 0,95 відхилення відносної частоти виробів вищого гатунку від ймовірності 0,75 появи цих виробів за модулем не перевищувало 0,025.

Варіанти 26-30

51. Ймовірність появи події в кожному з 625 незалежних випробувань рівна 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності по модулю не більше, ніж на 0,04.

52. Ймовірність появи події в кожному з 900 незалежних випробувань рівна 0,5. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02.

53. Ймовірність появи події в кожному з 10 000 незалежних випробувань рівна 0,75. Знайти ймовірності того, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,01.

54. Французький вчений Бюффон (XVIII ст.) кинув монету 4040 разів, причому «герб» з'явився 2048 разів. Знайти ймовірність того, що при повторенні досліду Бюффона відносна частота появи «герба» відхилиться від ймовірності появи «герба» за абсолютною величиною не більше, ніж в досліді Бюффона.

55. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань рівна 0,5. Знайти число випробувань n , при якому з ймовірністю 0,7698 можна очікувати, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02.

56. Скільки разів потрібно кинути гральну кістку, щоб ймовірність нерівності $\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{6} \right| \leq 0,01$ була не менше, ніж ймовірність протилежної нерівності, де m -число появи одного очка в n підкиданнях гральної кістки?

57. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань рівна 0,2. Знайти найменше число випробувань n , при якому з ймовірністю 0,99 можна очікувати, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,04.

58. Випробовується кожний з 15 елементів певного пристрою. Ймовірність того, що елемент витримає випробування, рівна 0,9. Знайти найімовірніше число елементів, які витримують випробування.

59. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна рівна 0,75. На скільки відносна частота нестандартних деталей відхиляється від ймовірності, яка відповідає найімовірнішому числу настання цієї події (за абсолютною величиною)?

60. Два стрілки стріляють по мішені. Ймовірність влучання при одному пострілі для першого стрілка рівна 0,7, а для другого - 0,6. На скільки відносна частота невлучання в мішень відхиляється від ймовірності невлучання, якщо стрілки проведуть 40 залпів та m – найімовірніше число настання цієї події (за абсолютною величиною)?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №8

МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА №1

Зразок завдань до модульної контрольної

1. В урні 5 білих і 7 чорних куль. Два гравці по черзі беруть із урни одну кулю не повертаючи її назад. Виграє той, хто раніше візьме білу кулю. Знайти ймовірність того, що виграє другий гравець.
2. З двох гармат зроблено по одному пострілу по цілі. Ймовірність тільки одного влучення при цьому дорівнює 0,25. Відомо, що ймовірність влучення у ціль для другої гармати g дорівнює 0,85. Знайдіть ймовірність влучення для першої гармати.
3. В партії із семи виробів рівноможлива будь-яка кількість бракованих. Навмання із партії взято один виріб. 1) Знайдіть ймовірність того, що він бракований. 2) Навмання взятий виріб виявився бракованим. Яка ймовірність того, що у партії було 3 бракованих виробу?
4. Якість одного виробу перевіряють незалежно один від одного 3 контролери. Ймовірність прийомки виробу кожним контролером рівна 0,9. 1) Знайдіть найбільш ймовірне число контролерів, які прийняли виріб, і обчисліть цю найбільшу ймовірність; 2) Знайдіть ймовірність того, що принаймні один контролер прийняв виріб.
5. Знайти ймовірність того, що в кожному з 1400 незалежних, рівноймовірнісних випробуваннях відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності щонайбільше на 0,025.
6. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 12 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна рівна 0,75. Знайти найімовірніше число деталей, які будуть визнані стандартними.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ №9-11

НЕПЕРЕРВНІ ТА ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ОСНОВНІ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Глава 1. Дискретні та неперервні випадкові величини.

Випадковою величиною називають величину, яка в результаті випробувань може прийняти те або інше значення, заздалегідь невідомо, яке саме.

Дискретною випадковою величиною називають випадкову величину, що приймає окремі, відділені одне від одного, значення, які можна перерахувати.

Неперервною випадковою величиною називають випадкову величину, можливі значення якої заповнюють деякий проміжок неперервним чином.

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями. Закон розподілу може мати різні форми.

Рядом розподілу дискретної випадкової величини X називають таблицю, в якій перераховані можливі (різні) значення цієї випадкової величини $x_1, x_2, \dots, x_n$ з відповідними їм ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$.

x_i	x_1	x_2		x_n
p_i	p_1	p_2		p_n

$$p_i = P(X = x_i), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

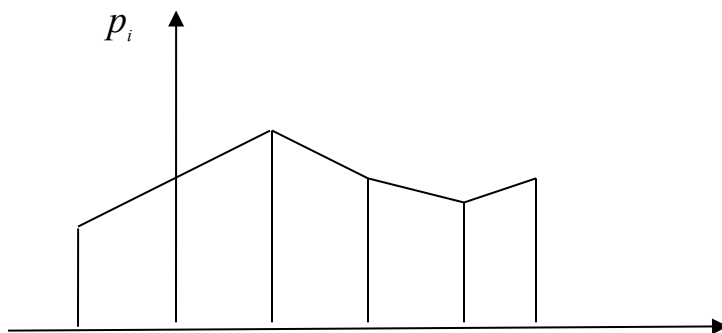


Рис. 9.1

Графічне зображення ряду розподілу дискретної випадкової величини (рис. 1) називають **багатокутником розподілу** або **полігоном розподілу** ймовірностей.

Функцією розподілу (іноді називають **інтегральною функцією розподілу**) випадкової величини X називають функцію $F(x)$, яка визначає ймовірність того, що X прийме значення менше, ніж x :

$$F(x) = P(X < x) \quad (9.1)$$

Функція $F(x)$ – неспадна функція; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Для дискретних випадкових величин функція розподілу $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$ є розривна,

ступінчаста, неперервна зліва функція. Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[\alpha, \beta)$ дорівнює:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (9.2)$$

Якщо випадкова величина неперервна, то $F(x)$ – неперервна і диференційована, імовірність попадання випадкової величини в інтервал не залежить від того, відкритий чи закритий цей інтервал ($P(X = \alpha) = 0$) і

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (9.3)$$

Щільністю розподілу ймовірностей (або густиною) неперервної величини X називають функцію $f(x) = F'(x)$. Функцію $f(x)$ називають **диференціальною функцією розподілу**.

Щільність розподілу ймовірностей будь-якої випадкової величини невід'ємна, тобто

$$f(x) \geq 0, \text{ і має властивість } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Графік щільності розподілу ймовірностей називають **кривою розподілу**.

Елементом ймовірності для випадкової величини X називають величину $f(x)dx$, що наближено визначає ймовірність попадання точки X в елементарний відрізок dx , який прилягає до точки x .

Функцію розподілу $F(x)$ визначають через щільність розподілу ймовірностей за допомогою інтегралу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (9.4)$$

Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал $[\alpha, \beta]$ дорівнює

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \quad (9.5)$$

Глава 2. Основні закони розподілу дискретної випадкової величини.

1. Біноміальний розподіл.

Закон справджується для схеми незалежних повторних випробувань, у кожному з яких подія A настає з імовірністю p ($0 < p < 1$). Випадкова величина X – число настання події A .

Числові характеристики розподілу: $M(X) = np$, $D(X) = npq$, де $q = 1 - p$.

Ймовірності в цьому законі визначаються за формулою :

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

2. Геометричний розподіл.

Закон справджується для схеми незалежних повторних випробувань, якщо вони проводяться до першого настання події. Геометричний закон розподілу застосовується у задачах статистичного контролю якості теорії надійності. Числові характеристики

розподілу: $M(X) = \frac{1}{p}$, $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Ймовірності в цьому законі обчислюються за формулою:

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

3. Гіпергеометричний розподіл.

Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність настання k успішних результатів у n випробуваннях, якщо значення n мале порівняно з обсягом сукупності N :

$$P(X = k) = \frac{C_r^k \cdot C_{N-r}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n; \quad r \geq n.$$

Наприклад, ймовірність того, що з n деталей, які випадково вибрано з партії обсягом N , k виявляться дефектними, має гіпергеометричний закон розподілу (r —кількість дефектних деталей у партії). Цей закон розподілу застосовується в задачах статистичного контролю якості та в суміжних галузях. Числові характеристики розподілу:

$$M(\tilde{O}) = \frac{r \cdot n}{N}, \quad D(X) = \frac{n \cdot r(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

4. Розподіл Пуассона.

Якщо у схемі незалежних повторних випробувань n велике, а ймовірність p настання події A (або $q=1-p$) прямує до нуля, то біноміальний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, коли $\lambda = np$. Випадкова величина X —число настання події A набуває зліченної множини значень ($k = 0, 1, 2, \dots$) з ймовірностями, які обчислюються за формулою:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (\lambda > 0).$$

Цей розподіл описує кількість подій, які настають в однакові проміжки часу за умови, що ці події відбуваються незалежно одна від одної зі сталою інтенсивністю. Розподіл застосовується в задачах статистичного контролю якості, у теорії надійності, теорії масового обслуговування.

Числові характеристики розподілу: $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$.

Для цього розподілу складено таблиці щодо різних значень λ (0,1—20). У таблицях для відповідних значень λ наведено ймовірності $P(X = m)$ і $P(X \geq m)$.

Глава 3. Основні закони розподілу неперервної випадкової величини.

1. Рівномірний закон розподілу.

Якщо ймовірність потрапляння випадкової величини на інтервал пропорційна до довжини інтервалу і не залежить від розташування інтервалу на осі, то вона має рівномірний закон розподілу.

Щільність рівномірного закону розподілу має вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b. \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Функція розподілу рівномірного закону розподілу має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Математичне сподівання та дисперсія рівномірного закону розподілу дорівнюють:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Показниковий закон розподілу.

Щільність розподілу випадкової величини, розподіленої за показниковим законом, задається формулою:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ ae^{-ax}, & x > 0. \end{cases}$$

Функція розподілу показникового закону розподілу задається формулою:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-ax}, & x > 0. \end{cases}$$

Математичне сподівання та дисперсія величини X , розподіленої за показниковим законом розподілу можна знайти за формулами:

$$M(X) = 1/a, D(X) = 1/a^2.$$

Графік показникового розподілу зображено на рис. 9.1, а, б.

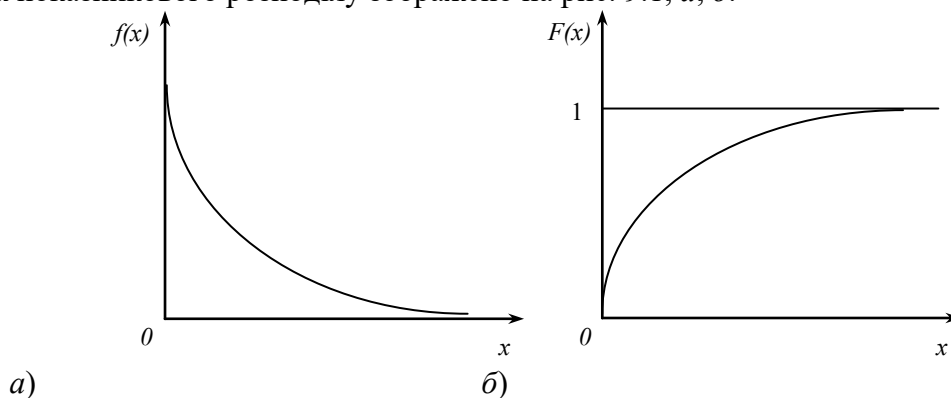


Рис. 9.1

3. Нормальний закон розподілу.

Нормальний закон розподілу задається щільністю $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Параметри a і σ , які входять до виразу щільності розподілу, є відповідно математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини. Функція

розподілу нормально розподіленої випадкової величини X має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Графіки функцій розподілу і щільності ймовірності наведено відповідно на рис. 9.2 і 9.3.

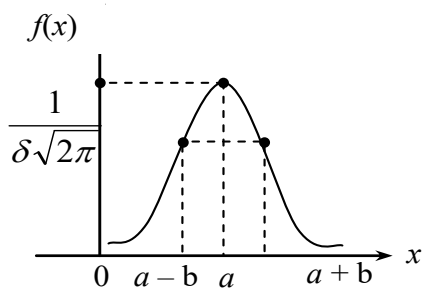


Рис. 9.2

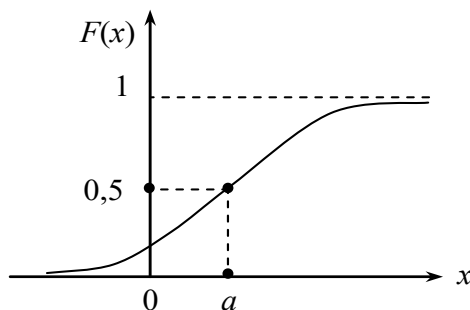


Рис. 9.3

Нормальний закон розподілу широко застосовується в математичній статистиці. Головна особливість нормального закону полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу за типових умов.

Для обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини, розподіленої нормально, на

проміжок використовується функція Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Часто застосовується також формула: $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Коли $\delta = 3\sigma$, то згідно з останньою формулою маємо:

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973.$$

Ця подія при одному експерименті здійсниться, а тому її вважають практично вірогідною. Останню рівність формулюють у вигляді «правила трьох сигм»: практично достовірно, що нормально розподілена випадкова величина може відхилитись від свого математичного сподівання не більше, ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення.

Глава 4. Числові характеристики випадкових величин.

Математичним сподіванням випадкової величини X називають її середнє значення, яке обчислюється за формулами:

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i \text{ — для дискретної випадкової величини;} \quad (9.6)$$

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \text{ — для неперервної випадкової величини.} \quad (9.7)$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини X належать відрітку $[a, b]$, то

$$M[X] = \int_a^b xf(x)dx. \quad (9.8)$$

Властивості математичного сподівання.

1. $M(C) = C$, де $C - \text{const}$.
2. $M(CX) = CM(X)$.
3. $M(AX + B) = AM(X) + B$, де A і $B - \text{const}$.
4. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$, де $X, Y - \text{випадкові величини}$.
5. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, де $X, Y - \text{випадкові величини}$.

Дисперсією дискретної випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2], \quad (9.9)$$

$$\text{або } D[X] = M[X^2] - (M[X])^2. \quad (9.10)$$

Дисперсія дискретної випадкової величини X обчислюється за формулою:

$$D[X] = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - M[X])^2, \quad (9.11)$$

Дисперсія неперервної випадкової величини X з щільністю ймовірностей обчислюється за формулою:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx. \quad (9.12)$$

Дисперсія характеризує **розсіювання** значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Властивості дисперсії.

1. $D(C) = 0$, де $C - \text{const}$.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$, де $C - \text{const}$.
3. $D(AX + B) = A^2 D(X)$, де A і $B - \text{const}$.
4. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, де $X, Y - \text{випадкові величини}$.

Дисперсія часто приймається за міру різку в економічних дослідженнях тому, що вона характеризує розсіювання величини прибутку при тій чи іншій стратегії.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний з дисперсії:

$$\sigma = \sqrt{D[X]}. \quad (9.13)$$

Початковим моментом порядку k ($k - \text{натуральне число}$) випадкової величини X називається математичне сподівання величини X^k :

$$\nu_k = M(X^k). \quad (9.14)$$

Зокрема, $v_1 = M(X)$, $v_2 = M(X^2)$. Тоді формулу для обчислення дисперсії $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$ можна записати так:

$$D(X) = v_2 - v_1^2. \quad (9.15)$$

Центральним моментом порядку k випадкової величини X називається математичне сподівання величини $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k. \quad (9.16)$$

Зокрема,

$$\mu_1 = M(X - M(X)) = 0,$$

$$\mu_2 = M(X - M(X))^2 = D(X). \quad (9.17)$$

Прирівнюючи (9.15) і (9.17), одержимо: $\mu_2 = v_2 - v_1^2$.

Користуючись властивостями математичного сподівання, можна одержати формули:

$$\mu_3 = v_3 - 3v_2v_1 + 2v_1^3, \quad (9.19)$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4. \quad (9.20)$$

Для симетричного розподілу (крива такого розподілу симетрична відносно прямої $x=M(X)$) кожний центральний момент непарного порядку дорівнює нулю. Тому кожний відмінний від нуля центральний момент непарного порядку степінь асиметрії розподілу.

Найпростішою з таких характеристик є μ_3 , але для зручності замість цієї величини беруть безрозмірну величину, яку називають **асиметрією** розподілу:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (9.21)$$

Для оцінки плосковершинності, або гостровершинності щільності ймовірності $f(x)$ користуються характеристикою, яка називається **ексцесом**. Обчислюється ексцес за допомогою центрального моменту четвертого порядку:

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (9.22)$$

Зауважимо, що число 3 віднімається ось чому. Для нормального закону, виконується

рівність: $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$. Отже, $Es = 0$.

Квантилем порядку p (або p -квантилем) випадкової величини X називається таке її значення x_p , при якому функція розподілу $F(x)$ набуває значення, що дорівнює p :

$$F(x_p) = P(X < x_p) = p. \quad (9.23)$$

Модою M_0 дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

Модою M_0 для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності.

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл ймовірностей називають **одномодальним**; якщо розподіл має дві моди – **двомодальним** і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають **антимодальними**.

Медіаною Me неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконуються рівність ймовірностей подій:

$$P(-\infty < X < Me) = P(Me < X < \infty),$$

$$F(Me) - F(-\infty) = F(\infty) - F(Me),$$

$$F(Me) = 1 - F(Me),$$

$$2F(Me) = 1,$$

$$F(Me) = 0,5. \quad (9.24)$$

Отже, медіану визначають із рівняння (9.24).

Можна також **медіаною Me** неперервної випадкової величини X називати можливе значення x , при якому ордината $f(x)$ ділить навпіл площу, обмежену кривою розподілу і віссю Ox .

Якщо випадкова величина X має дискретний розподіл, то медіана **Me** визначається неоднозначно. Наприклад, якщо X – кількість очок, які випали на гральному кубіку, то як медіану **Me** можна взяти довільне число з інтервалу (3;4).

Приклади задач.

1. Проводяться чотири незалежні досліди, в кожному з яких подія A може з'явитись з ймовірністю 0,4. Розглядається випадкова величина X – число появ події A у чотирьох дослідах. Записати ряд розподілу, побудувати багатокутник розподілу, знайти функцію розподілу випадкової величини X . Обчислити її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання.

У чотирьох дослідах подія A може не з'явитись, може з'явитись 1 раз, 2 рази, 3 рази або 4 рази. Це означає, що випадкова величина X може приймати значення 0; 1; 2; 3; 4.

Ймовірності цих значень обчислимо за формулою Бернуллі:

$$p_0 = P(X = 0) = C_4^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^4 = 0,1296,$$

$$p_1 = P(X = 1) = C_4^1 \cdot 0,4 \cdot 0,6^3 = 0,3456,$$

$$p_2 = P(X = 2) = C_4^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^2 = 0,3456,$$

$$p_3 = P(X = 3) = C_4^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^1 = 0,1536,$$

$$p_4 = P(X = 4) = C_4^4 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^0 = 0,0256$$

Закон розподілу величини X буде такий:

x	0	1	2	3	4
P	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

Багатокутник розподілу має вигляд, який зображено на рис. 4.

Знайдемо тепер функцію розподілу $F(x)$. Згідно з (1):

1. Якщо $x \leq 0$, $F(x) = F(0) = P(x < 0) = 0$;

2. Якщо $0 < x \leq 1$, $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0,1296$;

3. Якщо $1 < x \leq 2$,

$$F(x) = P(x < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,1296 + 0,3456 = 0,4752.$$

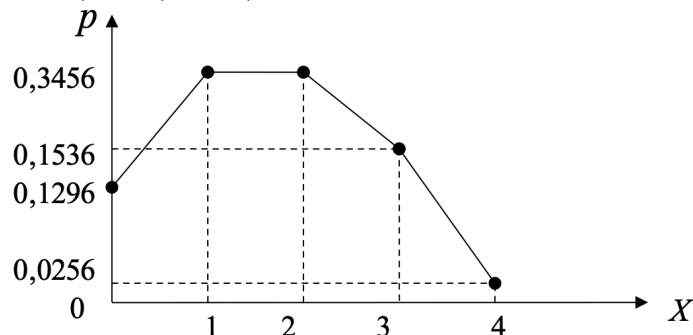


Рис. 9.4

4. Якщо $2 < x \leq 3$ (наприклад, $x=3$), тоді

$$F(x) = P(x < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,4752 + 0,3456 = 0,8208;$$

5. Якщо $3 < x \leq 4$,

$$F(x) = P(x < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,8208 + 0,1536 = 0,9744;$$

6. Якщо $x > 4$,

$$F(+\infty) = P(x < +\infty) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,9744 + 0,0256 = 1.$$

Знайдемо математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

$$M(X) = 0 \cdot 0,1296 + 1 \cdot 0,3456 + 2 \cdot 0,3456 + 3 \cdot 0,1536 + 4 \cdot 0,0256 = 1,6;$$

$$D(X) = (0 - 1,6)^2 \cdot 0,1296 + (1 - 1,6)^2 \cdot 0,3456 + (2 - 1,6)^2 \cdot 0,3456 + (3 - 1,6)^2 \cdot 0,1536 + (4 - 1,6)^2 \cdot 0,0256 = 0,96;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0,98.$$

Графік функції розподілу наведено нижче (рис. 5):

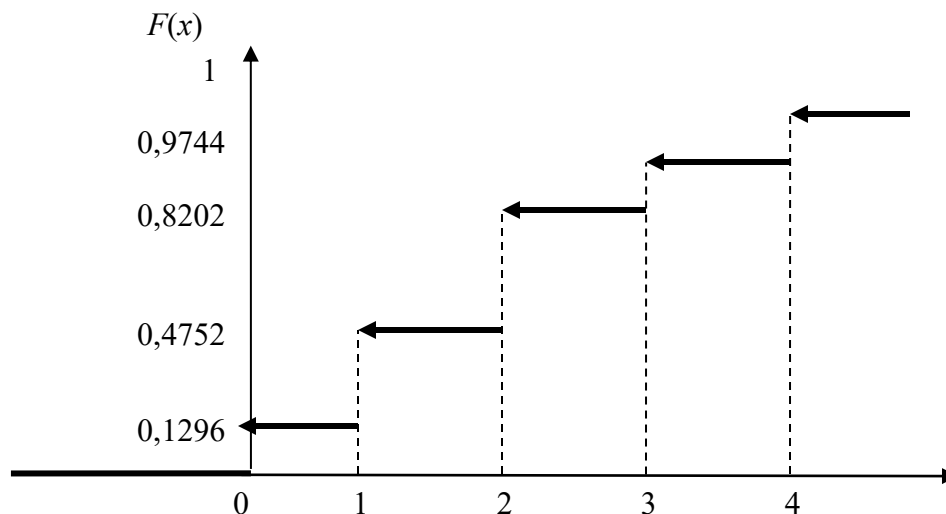


Рис. 9.5

2. Випадкову величину X задано функцією розподілу :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ 1 + \sin x, & -\pi/2 \leq x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Показати, що ця функція неперервна. Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$ і ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(-\pi/4, -\pi/8)$.

Розв'язання.

У точках $x = -\pi/2$ і $x = 0$ лівосторонні і правосторонні граничні значення функції $F(x)$ співпадають. Це означає, що функція $F(x)$ неперервна всюди. Тому щільність розподілу ймовірності $f(x)$ існує.

Таким чином, оскільки $f(x) = F'(x)$, маємо:

Ймовірність попадання випадкової величини X у заданий інтервал $(-\pi/2, -\pi/8)$ можна знайти за допомогою формули (9.2):

$$\begin{aligned} P(-\pi/4 \leq x < -\pi/8) &= F(-\pi/8) - F(-\pi/4) = (1 - \sin \pi/8) - (1 - \sin \pi/4) = \\ &= \sin \pi/4 - \sin \pi/8 \approx 0,324, \end{aligned}$$

або за допомогою формули (9.5):

$$\begin{aligned} P(-\pi/4 \leq x < -\pi/8) &= \int_{-\pi/4}^{-\pi/8} \cos x dx = \sin(-\pi/8) - \sin(-\pi/4) = \\ &= \sin \pi/4 - \sin \pi/8 \approx 0,324. \end{aligned}$$

Графіки $F(x)$ (рис. 9.6) і $f(x)$ (рис. 9.7) наведено нижче:

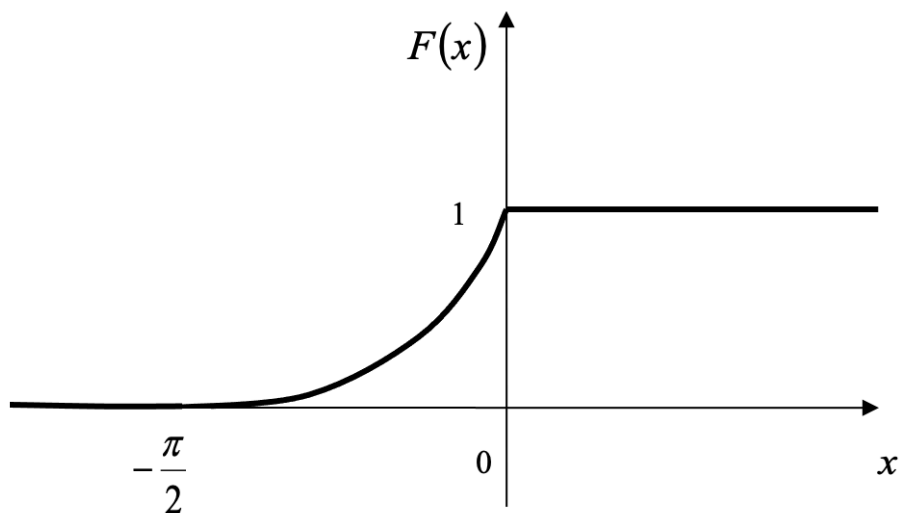


Рис. 9.6

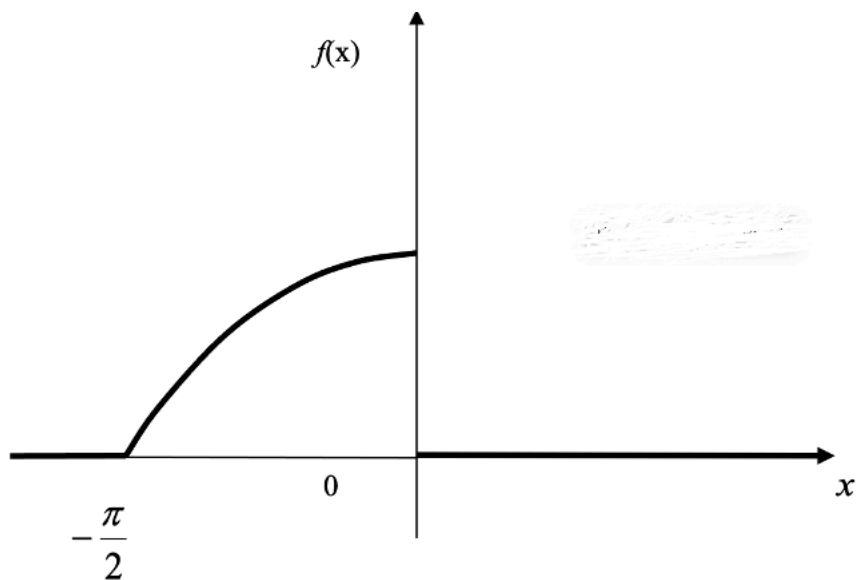


Рис. 9.7

3. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X задано у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Потрібно знайти:

- значення сталої a ;
- функцію розподілу $F(x)$ і ймовірність події $-2 \leq x < 1/2$;
- математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

Розв'язання.

а) Для знаходження сталої a використаємо властивість $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Отримаємо:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\infty} f(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^1 ax^2 dx + \int_1^{\infty} 0 \cdot dx = a \int_0^1 x^2 dx = a \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{a}{3} = 1.\end{aligned}$$

Звідси $a = 3$.

Таким чином,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 ; x > 1, \\ 3x^2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

б) Функцію розподілу $F(x)$ знайдемо, застосовуючи формулу (4): $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$.

Якщо $x < 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0$.

Якщо $0 \leq x < 1$, то $F(x) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^x f(x)dx = 0 + \int_0^x 3x^2 dx = x^3$.

Якщо $x > 1$, то

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\infty} f(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^{\infty} 0 \cdot dx = 0 + 1 + 0 = 1.\end{aligned}$$

Звідси $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(-2, 1/2)$ дорівнює:

$$P(-2 < x < 1/2) = F(1/2) - F(-2) = 1/8 - 0 = 1/8.$$

в) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення знайдемо за формулами (9.8), (9.12), (9.13):

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_0^1 3 \cdot x^3 dx = \frac{3x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4} = 0,75.$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - (M(X))^2 = \int_0^1 3 \cdot x^4 dx - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 - \frac{9}{16} = \frac{3}{80} = 0,0375.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,0375} \approx 0,1936.$$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №9

Варіанти 1-5

1. Проводяться три незалежні випробування, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю 0,4. Випадкова величина X – число появ події A у трьох випробуваннях. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу випадкової величини X . Знайти її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду.
2. Дискретна випадкова величина X – число хлопчиків у сім'ях з 5 дітьми. Вважаючи, що ймовірність народження хлопчика і дівчинки однакова: а) знайти закон розподілу X ; б) побудувати багатокутник розподілу; в) знайти функцію розподілу величини X ; г) знайти ймовірності подій: A – “у сім'ї не менше 2 і не більше 3 хлопчиків”; B – “не більше трьох хлопчиків”; C – “більше одного хлопчика”. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду випадкової величини X .
3. Ймовірність влучення у мішень одним пострілом дорівнює 0,7. Проведено 4 постріли. Дискретна випадкова величина X – число влучень у мішень. Знайти: а) закон розподілу X ; б) функцію розподілу X ; в) ймовірність події $X < 2$, $X \leq 3$, $1 < X \leq 3$; г) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду випадкової величини X .
4. Підкидається гральний кубик до першої появи шістки, але не більше чотирьох раз. Випадкова величина X – число підкидань кубика. Знайти закон розподілу і функцію розподілу X , ймовірність події $X \leq 3$, а також математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .
5. Два стрільці виконують по одному пострілу в одну мішень. Ймовірність влучення у мішень першим стрільцем дорівнює 0,5; другим – 0,4. Дискретна випадкова величина X – число влучень у мішень.
а) Знайти закон розподілу і функцію розподілу величини X ; б) Побудувати багатокутник розподілу; в) Знайти ймовірність події $X \geq 1$; г) Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду випадкової величини X .
6. В коробці є 7 олівців, з яких 4 червоні. З коробки навмання беруть 3 олівці.
а) Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює числу червоних олівців, взятих з коробки; б) Побудувати багатокутник розподілу X ; в) Знайти ймовірність події $0 < X \leq 2$; г) Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення величини X .
7. З двадцяти п'яти контрольних робіт, серед яких п'ять мають оцінку «відмінно», навмання беруть 3 роботи. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює числу оцінених на «відмінно» робіт серед вибраних. Чому дорівнює ймовірність події $X > 0$? Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

8. Замок можна відкрити тільки одним з п'яти ключів. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює числу спроб відкривання замка, якщо використаний ключ у подальших спробах не приймає участі. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

9. Гральний кубик підкидають два рази. Випадкова величина X дорівнює різниці між числом очок у першому підкиданні і числом очок у другому підкиданні. Знайти закон розподілу і функцію розподілу величини X , ймовірність події $2 \leq X \leq 4$. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

10. В партії з 10 деталей 8 стандартних. З цієї партії навмання беруть 2 деталі. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює числу взятих стандартних деталей. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

Варіанти 6-10

11. Два стрільці виконують постріли в одну мішень, причому кожний з них робить 2 постріли незалежно один від одного. Ймовірність влучення у мішень першим стрільцем становить 0,5; другим – 0,6. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює загальному числу влучень у мішень. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

12. Робітник обслуговує 4 незалежно працюючі агрегати. Ймовірність того, що протягом однієї години агрегату не знадобиться увага робітника, дорівнює для першого агрегату 0,7; для другого – 0,75; для третього – 0,8; для четвертого – 0,9. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює числу агрегатів, які не потребують уваги робітника.

13. Автомашина проїжджає 6 світлофорів, кожний з яких дозволяє або не дозволяє подальший рух з ймовірністю 0,5. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює числу світлофорів, пройдених автомашиною до першої зупинки. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

14. Ймовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,1. З партії деталей контролер бере одну деталь і перевіряє її стандартність. Якщо деталь виявляється нестандартною, то подальша перевірка закінчується, а вся партія затримується. Якщо ж деталь стандартна, то контролер бере наступну деталь і т.д. Всього він перевіряє 5 деталей. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює числу перевірених деталей. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

15. В ящику лежать 5 виробів, один з яких нестандартний. З ящика беруть вироби один за другим до тих пір, поки не візьмуть нестандартний виріб. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює числу взятих виробів. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду випадкової величини X .

16. Ймовірність влучення стрільцем у мішень кожним пострілом дорівнює 0,4. Маючи 4 набої, стрілець веде стрільбу до першого влучення або до повного використання всіх набоїв. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює числу використаних набоїв. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду випадкової величини X .

17. Мішень складено з круга №1 і двох концентричних кілець №2 і №3. Влучення у круг №1 дає 10 очок, в кільце №2 – 5 очок, в кільце №3 – 1 очко. Ймовірності влучень у круг №1 і кільця №2 і №3 відповідно становлять 0,5; 0,3; 0,2. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює сумі очок в результаті трьох влучень у мішень. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

18. Монету підкидають 6 разів. Випадкова величина X – число появ герба. Знайти ряд розподілу і функцію розподілу цієї випадкової величини, а також математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду, початковий і центральний моменти третього порядків випадкової величини X .

19. Проводяться 6 незалежних випробувань, у кожному з яких може з'явитись подія A з ймовірністю 0,6. Випадкова величина X – частота появи події A у 6 випробуваннях, тобто відношення числа появ події A в 6 випробуваннях до загального числа проведених випробувань. Написати закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X ; знайти її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

20. Два стрільці стріляють кожний у свою мішень, виконуючи незалежно один від одного по одному пострілу. Ймовірність влучення у мішень першим стрільцем дорівнює 0,7; другим – 0,6. Випадкова величина X – число, що дорівнює різниці влучень першим і другим стрільцями. Знайти ряд розподілу і функцію розподілу величини X , її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Варіанти 11-15

21. Радист викликає кореспондента, причому кожний наступний виклик відбувається лише в тому випадку, коли попередній виклик не був прийнятий. Ймовірність того, що кореспондент прийме виклик, дорівнює 0,4. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа викликів, функцію розподілу і обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду цієї випадкової величини, якщо число викликів не більше п'яти.

22. Серед десяти виготовлених приладів три мають дефект. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – числа приладів з дефектами серед взятих навмання чотирьох приладів. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

23. Ймовірність ураження вірусним захворюванням куща суниці дорівнює 0,2. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа кущів суниці, які можуть бути уражені вірусом, з чотирьох висаджених кущів. Записати функцію розподілу цієї випадкової величини і обчислити її математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду, початковий і центральний моменти третього порядків випадкової величини X .

24. Стрілець веде стрільбу у ціль з ймовірністю влучення кожним пострілом 0,2. За кожне влучення він отримує 5 очок, а за промах йому очок не нараховують. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – числа очок, отриманих стрільцем

за 3 постріли. Обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду, початковий і центральний моменти другого порядку випадкової величини X .

25. Клієнти банку, які не мають між собою ніяких зв'язків, не повертають кредити в строк з ймовірністю 0,1. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – числа повернутих у строк кредитів з п'яти виданих. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

26. Торговельна фірма для реклами свого товару вкладає у кожен десяту одиницю товару грошовий виграш у сумі 1000 грн. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – розміру виграшу для п'яти покупок, знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

27. Контрольна робота має три питання. На кожне питання є чотири відповіді, причому тільки одна відповідь правильна. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – числа правильних відповідей у випадку, коли виконавець контрольної роботи не знає матеріалу і може тільки вгадати відповідь. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

28. У середньому за 10% договорів страхова компанія виплачує страхові суми у зв'язку з настанням страхового випадку. Знайти закон розподілу і функцію розподілу числа таких договорів серед навмання вибраних чотирьох договорів. Обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду, початковий і центральний моменти другого порядків випадкової величини X .

29. У білеті є три задачі. Ймовірність вірного розв'язання першої задачі дорівнює 0,9; другої – 0,8 і третьої – 0,7. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – числа вірно розв'язаних задач у білеті і обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

30. Ймовірність влучення у ціль першим пострілом дорівнює 0,8. З кожним наступним пострілом ймовірність зменшується на 0,1. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – числа влучень у ціль, якщо зроблено три постріли. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

Варіанти 16-20

31. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – числа пакетів трьох акцій, за якими власник отримає прибуток, якщо ймовірність отримання прибутку для кожної акції дорівнює відповідно 0,5; 0,6; 0,7. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

32. В магазині є у продажу 5 вітчизняних і 3 імпортні телевізори. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа імпортних з навмання вибраних чотирьох телевізорів. Обчислити функцію розподілу цієї випадкової величини, а також її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

33. Викладач задає студенту питання до тих пір, поки той дає правильні відповіді. Як тільки число правильних відповідей досягає чотирьох, або студент відповідає невірно, викладач перестає задавати питання. Ймовірність правильної відповіді на одне питання дорівнює $2/3$. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа заданих студенту питань. Обчислити функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

34. Ймовірність того, що у бібліотеці є потрібна студентів книга, дорівнює 0,3. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа бібліотек, які відвідає студент у пошуках книги, якщо в місті є чотири бібліотеки. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію As , ексцес Es цієї випадкової величини.

35. Серед п'ятнадцяти зібраних агрегатів шість агрегатів потребують додаткове обслуговування. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа агрегатів, які потребують додаткове обслуговування, серед п'яти навмання вибраних із загального числа агрегатів. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію As , ексцес Es цієї випадкової величини.

36. Проводяться три незалежні випробування, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю 0,6. Випадкова величина X – число появ події A у трьох випробуваннях. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу випадкової величини X . Знайти її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду.

37. Дискретна випадкова величина X – число хлопчиків у сім'ях з 6 дітьми. Вважаючи, що ймовірність народження хлопчика і дівчинки однакова: а) знайти закон розподілу X ; б) побудувати багатокутник розподілу; в) знайти функцію розподілу величини X ; г) знайти ймовірності подій: A – “у сім'ї не менше 2 і не більше 3 хлопчиків”; B – “не більше трьох хлопчиків”; C – “більше одного хлопчика”. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду випадкової величини X .

38. Ймовірність влучення у мішень одним пострілом дорівнює 0,75. Проведено 5 пострілів. Дискретна випадкова величина X – число влучень у мішень.

Знайти: а) закон розподілу X ; б) функцію розподілу X ; в) ймовірність події $X < 2$, $X \leq 3$, $1 < X \leq 3$; в) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду випадкової величини X .

39. Підкидається гральний кубик до першої появи шістки, але не більше п'яти разів. Випадкова величина X – число підкидань кубика. Знайти закон розподілу і функцію розподілу X , ймовірність події $X \leq 3$, а також математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

40. Два стрільці виконують по одному пострілу в одну мішень. Ймовірність влучення у мішень першим стрільцем дорівнює 0,55; другим – 0,45. Дискретна випадкова величина X – число влучень у мішень. Знайти закон розподілу і функцію розподілу а також математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

Варіанти 21-25

41. Дано закон розподілу випадкової величини X у вигляді таблиці (у першому рядку вказано можливі значення випадкової величини, у другому - ймовірності цих значень).

x	110	120	130	140	150
p	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

- а) математичне сподівання $M(X)$;
- б) дисперсію $D(X)$;
- в) середнє квадратичне відхилення
- г) коефіцієнт асиметрії та ексцес.

Побудувати багатокутний розподіл і показати на ньому математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

42. Знайти ряд розподілу і функцію розподілу дискретної випадкової величини X , яка має тільки два можливі значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(x)$ і дисперсія $D(x)$ і ймовірність p_1 можливого значення x_1 задані: $p_1 = 0,2$, $M(x) = 3,8$, $D(x) = 0,16$. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини X

x	-2	0	1	3	6
p	0,4	0,2	0,15	0,15	0,1

знайти:

- 1) математичне сподівання;
- 2) дисперсію;
- 3) середньоквадратичне відхилення
- 4) квантиль порядку 0,75.

43. За рядом розподілу випадкової величини X знайти функцію $F(x)$ розподілу та побудувати її графік. Обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$. Випадкова величина X - зниження викидів парникових газів транспортом (відсоток у порівнянні з рівнем 1990р.) різними країнами до 2008-2012 років.

Країни	Країни, що розвиваються	Японія	США	Країни ЄС
x	52	60	70	80
p	0,2	0,33	0,2	0,27

44. Випадкову величину X задано рядом розподілу

x	1	3	4	9
p	0,1	0,3	0,45	0,15

Обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду випадкової величини X .

45. Гральний кубик підкидають два рази. Випадкова величина X дорівнює різниці між числом очок у першому підкиданні і числом очок у другому підкиданні. Знайти закон розподілу і функцію розподілу величини X , ймовірність події $2 \leq X \leq 4$. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

46. У певний день продавець кольорової капусти сподівається на такий рівень продаж (кг)

продаж (кг)	50	100	200	300
ймовірність	0,1	0,4	0,4	0,1

Продавець купляє капусту по 1,5 грн., продає по 3 грн. У кінці дня залишок товару продає по 0,7 грн. перекупнику. Потрібно:– побудувати розподіл випадкової величини X {прибуток від продажу капусти}, якщо вранці продавець закупив 130 кг – підрахувати очікуваний середній прибуток – математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і стандартне відхилення $\sigma(X)$.

47. Довготривалими спостереженнями встановлено в лікарню швидкої допомоги за 10 хв. може надійти не більше двох викликів. При цьому на протязі 153 спостережень виклики не надходять 30 раз, один виклик надходить 103 раз, два – 20 разів. Скласти закон розподілу числа викликів, що надходять в лікарню швидкої допомоги за 10 хв. Обчислити середнє число викликів, що надходять в лікарню швидкої допомоги за 10 хв. Обчислити ймовірність, що відносна частота викликів за 10 хв буде знаходитися в інтервалі $[10/51; 20/51]$

48. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу.

x_i	1	4	5	8	11	14
p_i	0,10	0,10	0,25		0,10	0,05

Необхідно:

1. Записати пропущену ймовірність.
2. Підрахувати ймовірності попадань в указані інтервали: $P(X=11)$; $P(X=0)$; $P(X<10)$; $P(X>4)$; $P(5<X<13)$; $P(3<X<30)$.
3. Записати значення функції розподілу $F(x)$ в указаних точках: $F(-5)$; $F(6)$; $F(11)$; $F(90)$.
4. Записати функцію розподілу при будь-яких значеннях аргумента, побудувати її графік.
5. Обчислити числові характеристики випадкової величини: m_x , m_o , D_x , σ_x .

49. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу.

x_i	3	4	5	6	7
p_i	p_1	0,15	0,25	p_4	0,35

- а) Знайти невідомі ймовірності p_1 і p_4 ($p_4 = 4p_1$).
 - б) Побудувати багатокутник розподілу.
 - в) Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .
 - г) Записати функцію розподілу при будь-яких значеннях аргумента, побудувати її графік.
 - д) Знайти ймовірність попадання в інтервал в інтервал $(4, 7)$: $P(4 < X < 7)$.
50. Три стрільці виконують по одному пострілу в одну мішень. Ймовірність влучення у мішень першим стрільцем дорівнює 0,55; другим – 0,45, третім – 0,52. Дискретна випадкова величина X – число влучень у мішень. Знайти закон розподілу і функцію розподілу а також математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

Варіанти 26-30

51. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

X	3	4	7	10
P	0.2	0.1	0.4	0.3

Знайти функцію розподілу і побудувати її графік.

52. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

X	1	3	6	7
P	0.2	0.15	0.35	0.3

Знайти її моду та медіану, коефіцієнт асиметрії, ексцес.

53. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

X	1	2	3	4
P	0.1	0.1	0.5	0.3

Знайти її математичне сподівання, дисперсію та середньо квадратичне відхилення.

54. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

X	X_1	3	X_3	5
P	0.2	X_2	0.3	0.3

Знайти x_1 , x_2 та x_3 , якщо $M(X)=2$, $D(X)=0,5$.

55. Ймовірність того, що у бібліотеці є потрібна студентів книга, дорівнює 0,4. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа бібліотек, які відвідає студент у пошуках книги, якщо в місті є чотири бібліотеки. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію As , ексцес Es цієї випадкової величини.

56. Серед п'ятнадцяти зібраних агрегатів сім агрегатів потребують додаткове обслуговування. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа агрегатів, які потребують додаткове обслуговування, серед шести навмання вибраних із загального числа агрегатів. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію As , ексцес Es цієї випадкової величини.

57. Стрілець веде стрільбу у ціль з ймовірністю влучення кожним пострілом 0,25. За кожне влучення він отримує 5 очок, а за промах йому очок не нараховують. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – числа очок, отриманих стрільцем за 4 постріли. Обчислити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду, початковий і центральний моменти другого порядку випадкової величини X .

58. Клієнти банку, які не мають між собою ніяких зв'язків, не повертають кредити в строк з ймовірністю 0,2. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – числа повернутих у строк кредитів з чотирьох виданих. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

59. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

X	4	6	8	10
P	0.2	0.25	0.15	0.4

Знайти її моду та медіану, математичне сподівання, дисперсію та середньо квадратичне відхилення.

60. В ящику лежать 6 виробів, два з яких нестандартні. З ящика беруть вироби один за другим до тих пір, поки не візьмуть нестандартний виріб. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X , що дорівнює числу взятих виробів. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду випадкової величини X .

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №10

Варіанти 1-5

1. Випадкову величину X задано функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення величини X , квантиль порядку 0,75.

2. Задано функцію розподілу неперервної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, а також математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , квантиль порядку 0,5.

3. Задано функцію розподілу неперервної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , квантиль порядку 0,25.

4. Задано функцію розподілу неперервної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin 2x, & 0 < x \leq \pi/4, \\ 1, & x > \pi/4. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , моду та медіану.

5. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду, медіану випадкової величини X .

6. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 1/2, & 2 < x \leq 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду, медіану, початковий і центральний моменти другого порядку випадкової величини X .

7. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\pi/2, \\ 0,5 \cos x, & -\pi/2 < x \leq \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , квантиль порядку 0,25.

8. Нехай вага пійманої риби є неперервною нормально розподіленою випадковою величиною X з параметрами $a = 375$ г, $\sigma = 25$ г. Знайти ймовірність того, що вага однієї пійманої риби буде: а) від 300 до 425 г; б) не більше 450 г; в) більше 30 г.

9. Нехай діаметр виготовленої в цеху деталі є неперервною випадковою величиною X , яка розподілена за нормальним законом, з параметрами $a = 5$ см, $D(X) = 0,81$ см². Знайти ймовірність того, що діаметр обраної навмання деталі :

а) знаходиться в межах від 4 до 7 см.; б) відрізняється від математичного сподівання не більше ніж на 2 см; в) вказати межі, в яких з ймовірністю 0,95 варто очікувати значення випадкової величини.

10. Нехай отримана в результаті фізичного експерименту випадкова величина X має нормальне розподілення з числовими характеристиками $a=2$, $\sigma=1$. Написати формулу для знаходження щільності розподілу ймовірностей X , а також вказати проміжок, в котрий X потрапить із ймовірністю 0,9973 (тобто практично напевне).

Варіанти 6-10

11. Коробка з мармеладом пакується автоматично. В середньому маса однієї коробки становить 1,06 кг. Знайти середнє квадратичне відхилення, якщо 5% коробок мають масу менше 1 кг. (Вважається, що ваги коробок розподілені за нормальним законом).

12. Випадкова помилка X показань вольтметра має нормальне розподілення з параметрами $a = 0$, $\sigma = 20$ мВ. Знайти ймовірність того, що при трьох незалежних вимірюваннях за допомогою вольтметра, помилка хоча б одного з них не перевищувала за абсолютною величиною 4 мВ.

13. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X , що розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), рівним 50 мм. Фактично довжина

виготовлених деталей варіюється від 38 до 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина взятої навмання деталі:

а) більше 55 мм; б) менше 40 мм.

14. Відбувається зважування готової продукції без системних помилок. Випадкові помилки зважування підлягають нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 20$ г. Знайти ймовірність того, що зважування буде виконано з помилкою, котра не перевищує за абсолютною величиною 10 г.

15. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду, медіану, початковий і центральний моменти другого порядку, випадкової величини X .

16. Задано функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Cxe^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Для якого значення величини C ця функція буде щільністю розподілу ймовірностей у деякої неперервної випадкової величини X ? Знайти функцію розподілу, математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

17. Випадкову величину X задано щільністю розподілу ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2 \cdot \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу цієї величини, а також її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, квантиль порядку 0,75.

18. Випадкову величину X в інтервалі $(-c, c)$ задано щільністю розподілу ймовірностей

$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$; поза цього інтервалу $f(x) = 0$. Знайти функцію розподілу

величини X , її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

19. Задано функцію розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ (x+1)/2, & -1 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(0; 0,5)$, квантиль порядку 0,5.

20. Випадкову величину X задано функцією розподілу $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\pi/2, \\ (\sin x + 1)/2, & -\pi/2 < x \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , квантиль порядку 0,75.

Варіанти 11-15

21. Випадкову величину задано функцією розподілу $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ (x^3 - 1)/7, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , квантиль порядку 0,75.

22. Задано функцію розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ (x^4 - 1)/15, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей величини X , її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, квантиль порядку 0,5.

23. Задано функцію розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^4, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей величини X , її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, квантиль порядку 0,25.

24. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , якщо щільність її розподілу задано у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

25. Задано щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу величини X , її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

26. Задано щільність розподілу ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \pi/6, \\ 3 \sin 3x, & \pi/6 < x \leq \pi/3, \\ 0, & x > \pi/3. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу випадкової величини X , її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

27. Вищий гатунок має виріб, який має відхилення розмірів від номіналу не більше за абсолютною величиною 3,45 мм. Випадкові відхилення розміру виробу від номіналу підлягає нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням, що дорівнює 3 мм. Припускаючи відсутність систематичних відхилень, визначити середнє число виробів вищого гатунку серед чотирьох виготовлених.

28. Ребро l куба виміряне приблизно, причому $a \leq l \leq b$. Розглядаючи довжину ребра куба як неперервну випадкову величину X , розподілену рівномірно в $(a; b)$, знайти математичне сподівання і дисперсію об'єму куба.

29. Автобуси їздять з інтервалом 5 хв. Припускаючи, що час X очікування автобуса на зупинці є рівномірно розподіленою неперервною випадковою величиною, знайти: а) щільність розподілення ймовірностей X ; б) імовірність того, що час очікування автобуса не буде перевищувати двох хвилин. Побудувати графік функції $f(x)$.

30. Можна вважати, що час роботи електричної лампи до перегорання є неперервна випадкова величина X , яка розподілена за показниковим законом. Припускаючи, що з імовірністю p лампа може перегоріти при включенні, знайти середній час роботи електричної лампи (лампа включається лише один раз).

Варіанти 16-20

31. Задано функцію розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ (x^3 + x^2)/2, & -1 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірності випадкової величини X , її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, квантиль порядку 0,25.

32. Неперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл із $M(X) = 8$ та $D(X) = 1/3$.

Знайти щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X .

33. Неперервна випадкова величина X підлягає нормальному закону розподілу з параметрами $a=0$ і $\sigma=2$. Вказати відкритий проміжок виду $(-\alpha; \alpha)$, в якому X прийматиме свої можливі значення з імовірністю 0,61.

34. Максимальне значення щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X , яка розподілена за нормальним законом розподілу, дорівнює $1/(4\sqrt{\pi})$. Обчислити $D(X)$.

35. Ціна поділу шкали амперметра дорівнює 0,1А. Показання округляють до найближчого цілого значення. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена помилка, яка перевищує 0,02А.

36. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення дорівнюють 30 і 10. Знайти ймовірність того, що X матиме значення, яке належить інтервалу (10;50).

37. Задано щільність розподілу ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ x - 1/2, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу випадкової величини X , її математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію As , ексцес Es .

38. Задано щільність розподілу ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > 1, \\ \frac{3}{4}(x^2 + 2x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу випадкової величини X , її математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(1/6; 1/4)$.

39. Задано щільність розподілу ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > 1, \\ 2 \cdot (x + 1)/3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу величини X , її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

40. Задано функцію розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2/4, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X , її моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Варіанти 21-25

41. Задано щільність розподілу ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \ x > 1, \\ 4x^3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу X , її математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію As , ексцес Es .

42. Задано функцію розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ (x+2)^2/16, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X , її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, квантиль порядку 0,75.

43. Задано функцію розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ (x^3 + 1)/2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X , її моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

44. Задано функцію розподілу випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x - x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X , її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, квантиль порядку 0,25.

45. Задано щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 3/2 x^2 + x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X , її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, квантиль порядку 0,25.

46. Задано щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \ x > 2, \\ 2(x-1), & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу величини X , її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, моду, медіану.

47. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 10 і 2. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина матимемо значення з інтервалу (12;14).

48. Нехай діаметр виготовленої в цеху деталі є неперервною випадковою величиною X , яка розподілена за нормальним законом, з параметрами $a = 4,5$ см, $\sigma = 0,05$ см. Знайти ймовірність того, що розмір діаметра навмання взятої деталі відрізняється від математичного сподівання не більше ніж на 1 мм.

49. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення дорівнюють 20 і 10. Знайти ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання за абсолютною величиною буде менше 3.

50. Випадкові похибки вимірювання підлягають нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 20$ мм і математичним сподіванням $a = 0$. Знайти ймовірність того, що з трьох незалежних вимірів похибка хоча б одного не перевищить за абсолютною величиною 4 мм.

Варіанти 26-30

51. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{якщо } x \leq -2 \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\pi}\right) \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) & , \text{якщо } -2 < x \leq 2 \\ 1 & , \text{якщо } x > 2 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X набуде значення, яке міститься в інтервалі (0,1/3).

52. Задана щільністю розподілу неперервної випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{якщо } x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 3 \sin 3x & , \text{якщо } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0 & , \text{якщо } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

а) Знайти коефіцієнт асиметрії, б) ексцес.

53. Випадкова величина X в інтервалі (3, 5) задана щільністю розподілу

$$f(x) = -(3/4)x^2 + 6x - 45/4;$$

зовні цього інтервалу - нуль. Знайти моду, математичне сподівання і медіану X .

54. Випадкова величина X задана щільністю розподілу;

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{якщо } x \leq 0, \\ \cos x & , \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & , \text{якщо } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти: а) функцію розподілу, б) моду; в) медіану X .

55. Випадкова величина X в задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{якщо } x \leq 1, \\ x - \frac{1}{2} & , \text{якщо } 1 < x \leq 2, \\ 0 & , \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення випадкової величини X .

56. Випадкова величина X в інтервалі $(-3, 3)$ задана щільністю розподілу

$f(x) = 1/(\pi\sqrt{9-x^2})$, зовні цього інтервалу - нуль. а) Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X ; б) яка подія ймовірніша $X < 1$ чи $X > 1$?

57. Випадкова величина X в інтервалі $(0, \pi)$ задана густиною розподілу

$$f(x) = (1/2) \sin x,$$

зовні цього інтервалу - нуль. Знайти квантілі порядків 0,25; 0,5; 1.

58. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 10 і 4. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина матимемо значення з інтервалу $(10; 15)$.

59. Нехай діаметр виготовленої в цеху деталі є неперервною випадковою величиною X , яка розподілена за нормальним законом, з параметрами $a = 5,5$ см, $\sigma = 0,15$ см. Знайти ймовірність того, що розмір діаметра навання взятої деталі відрізняється від математичного сподівання не більше ніж на 1 мм.

60. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення дорівнюють 25 і 15. Знайти ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання за абсолютною величиною буде менше 5.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №11

Варіанти 1-5

1. По мішені проведено три постріли. Ймовірності влучання у мішень першим, другим та третім пострілами відносяться один до одного, як 1:2:3. Їх сума дорівнює 1,2. Побудувати ряд розподілу кількості невлучань при трьох пострілах. Побудувати графік функції розподілу даної випадкової величини.

2. Серед 10 виробів є один бракований. Щоб його знайти беруть навання один виріб за іншим і кожен взятий виріб перевіряють. Побудувати ряд розподілу кількості перевірених приладів. Обчислити основні числові характеристики даної випадкової величини.

3. По мішені проведено чотири незалежні постріли. Ймовірності влучання у мішень з одного пострілу є сталою і дорівнює 0,7. Побудувати ряд розподілу кількості невлучань при трьох пострілах. Знайти найймовірніше число влучень та його ймовірність.

4. Монету кидають 6 разів. Скласти ряд розподілу і побудувати функцію розподілу відношення частоти появ герба до частоти появ решітки.

5. На шляху руху автомобіля 5 світлофорів, кожен з яких дозволяє чи забороняє рух з ймовірністю 0,5. Скласти ряд розподілу і побудувати функцію розподілу кількості світлофорів, які автомобіль проїде без зупинки. Обчислити основні числові характеристики даної випадкової величини.

6. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a=10$. Ймовірність попадання X в інтервал $(10;20)$ дорівнює 0,3. Чому дорівнює ймовірність попадання X в $(0;10)$.
7. Середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка розподілена за нормальним законом, дорівнює 2 см, а математичне сподівання дорівнює 16 см. Знайти межі, у яких з ймовірністю 0,9 варто очікувати значення випадкової величини.
8. Автомат виготовлює кульки. Кулька вважається придатною, якщо відхилення X діаметра кульки від проектного розміру за абсолютною величиною менше 0,7мм. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена за нормальним законом із середнім квадратичним відхиленням $\sigma=0,4$ мм, знайти, скільки в середньому буде придатних кульок серед 100 виготовлених.
9. Випадкова величина X розподілена рівномірно. Щільність ймовірностей її $f(x)=C$ при $0 \leq X \leq 10$ і $f(x)=0$ при всіх інших значеннях X . Знайти її математичне сподівання, дисперсію.
10. Деталь, виготовлена автоматом, вважається придатною, якщо відхилення розміру, що контролюється, від проектного не більше 10 см. Випадкові відхилення розміру, що контролюється, від проектного мають нормальний закон розподілу з математичним сподіванням $a=0$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=5$ мм. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат.

Варіанти 6-10

11. Проекція X радіус-вектора випадкової точки кола радіуса a на діаметр має щільність ймовірності

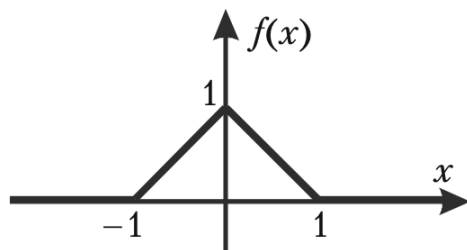
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & \text{при } |x| < a; \\ 0, & \text{при } |x| \geq a. \end{cases}$$

Визначити математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини.

12. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $a=10$, $\sigma=5$. Знайти довжину інтервалу, симетричного відносно математичного сподівання, в який з ймовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.
13. X записати функцію щільності та функцію розподілу, а також знайти $P(\alpha < X < \beta)$, якщо $a=2$, $\sigma=2$, $\alpha=1$, $\beta=6$.
14. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення відповідно дорівнюють 25 і 7. Знайти ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання за абсолютною величиною буде менше 5.
15. Похибка спостереження X при вимірюванні довжини розподілена нормально з $\alpha = 5$ мм і $\sigma = 4$ мм. Знайти ймовірність того, що виміряне значення відхилиться від істинного більш ніж на 10 мм.
16. Деталь, виготовлена автоматом, вважається придатною, якщо відхилення розміру, що контролюється, від проектного не більше 5 мм. Випадкові відхилення розміру, що контролюється, від проектного мають нормальний закон розподілу з математичним сподіванням $a=0$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=3$ мм. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат.

17. По мішені проведено три постріли. Ймовірності влучання у мішень першим, другим та третім пострілами відносяться один до одного, як 1:2:3. Їх сума дорівнює 1,8. Побудувати ряд розподілу кількості влучань при трьох пострілах. Визначити математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини.

18. Графік функції щільності випадкової величини X (закон Сімпсона) зображено на малюнку.



Записати функцію щільності, функцію розподілу та обчислити математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини.

19. Задана функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Показати, що вона буде функцією щільності розподілу деякої випадкової величини та обчислити її математичне сподівання та дисперсію.

20. Щільність ймовірності випадкових амплітуд бокової хитамиці човна має вигляд (закон Реллея)

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad x \geq 0.$$

Записати функцію розподілу та визначити математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини.

Варіанти 11-15

21. Середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка розподілена за нормальним законом, дорівнює 1 см, а математичне сподівання дорівнює 9 см. Знайти межі, у яких з ймовірністю 0,91 варто очікувати значення випадкової величини.

22. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподівання $a=8$. Ймовірність попадання X в інтервал $(5;15)$ дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність попадання X в $(3,10)$.

23. Нехай отримана в результаті фізичного експерименту випадкова величина X має нормальне розподілення з числовими характеристиками $a=3$, $\sigma=2$. Написати формулу для знаходження щільності розподілу ймовірностей X , а також вказати проміжок, в котрий X потрапить із ймовірністю 0,99 (тобто практично напевне).

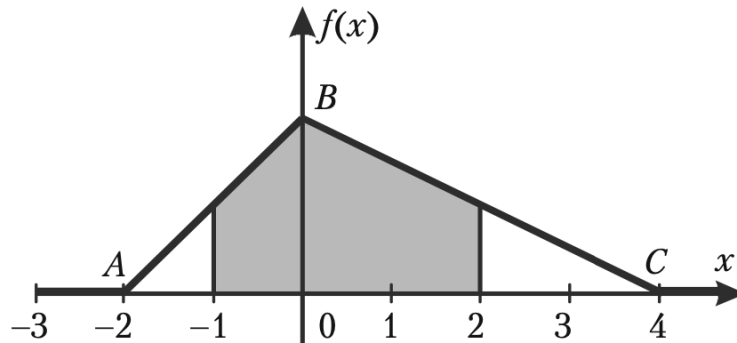
24. Диференціальна функція розподілу прибутку X підприємства відома

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x, & x \in (0, 5); \\ 0, & x \notin (0, 5). \end{cases}$$

Визначити математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини та ймовірність отримання прибутку від 3 до 4 млн. грн.

25. Для нормально розподіленої випадкової величини X записати функцію щільності та функцію розподілу, а також знайти $P(\alpha < X < \beta)$, якщо $a=7$, $\sigma=3$, $\alpha=1$, $\beta=5$.

26. Графік функції щільності випадкової величини X зображено на малюнку.



Записати функцію розподілу та визначити математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини, а також обчислити ймовірність $P(-1 \leq X \leq 2)$.

27. Випадкова величина задана рівномірно на проміжку $[-3; 7]$. Записати функцію щільності, функцію розподілу та обчислити математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини. Обчислити моду та медіану випадкової величини.

28. Побудувати функцію розподілу, обчислити математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини, яка розподілена біноміально з параметрами $n=5$, $p=0,4$, а також обчислити ймовірність $P(1 \leq X \leq 3)$.

29. Нормально розподілена випадкова величина має $M(X)=3$, $D(X)=4$. Записати функцію щільності та функцію розподілу даної випадкової величини. Визначити моду та медіану, та квантиль порядку 0,75.

30. По мішені проведено три постріли. Ймовірності влучання у мішень першим, другим та третім пострілами відносяться один до одного, як 2:3:5. Їх сума дорівнює 1,6. Побудувати ряд розподілу кількості влучань при трьох пострілах. Побудувати графік функції розподілу даної випадкової величини. Визначити математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини

Варіанти 16-20

31. Випадкова величина задана рівномірно на проміжку $[1; 5]$. Записати функцію щільності, функцію розподілу та обчислити математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини. Обчислити моду та медіану випадкової величини.

32. Побудувати функцію розподілу, обчислити математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини, яка розподілена біноміально з параметрами $n=6$, $p=0,7$, а також обчислити ймовірність $P(2 \leq X < 5)$.

33. Нормально розподілена випадкова величина має $M(X)=-1$, $D(X)=9$. Записати функцію щільності та функцію розподілу даної випадкової величини. Визначити моду та медіану, та квантиль порядку 0,75.
34. Побудувати криву та інтегральну криву нормального розподілу з математичним сподіванням a , середньоквадратичним відхиленням σ . Зобразити криву на сегменті $a-3\sigma < X < a+3\sigma$. Заштрихувати на малюнку кривої нормального розподілу область, що відповідає відрізку $a-b_1 < X < a+b_2$, якщо $a=40$, $\sigma=4$, $b_1=1,2$, $b_2=2,8$.
35. Задано математичне сподівання $m=11$ та середнє квадратне відхилення $\sigma=2$ випадкової величини X з нормальним розподілом. Знайти ймовірність того, що: - x набуде значення, яке належить інтервалу $(9, 12)$; - абсолютна величина відхилення $X(m)$ буде меншою за $\delta=2$.
36. Серед 8 виробів є один бракований. Щоб його знайти беруть навмання один виріб за іншим і кожен взятий виріб перевіряють. Побудувати ряд розподілу кількості перевірених приладів. Обчислити основні числові характеристики даної випадкової величини.
37. По мішені проведено 6 незалежних пострілів. Ймовірності влучання у мішень з одного пострілу є сталою і дорівнює 0,7. Побудувати ряд розподілу кількості невлучань при трьох пострілах. Знайти найімовірніше число влучень та його ймовірність.
38. Монету кидають 6 разів. Скласти ряд розподілу і побудувати функцію розподілу відношення частоти появ герба до частоти появ решітки.
39. На шляху руху автомобіля 6 світлофорів, кожен з яких дозволяє чи забороняє рух з ймовірністю 0,5. Скласти ряд розподілу і побудувати функцію розподілу кількості світлофорів, які автомобіль проїде без зупинки. Обчислити основні числові характеристики даної випадкової величини.
40. Численними вимірами встановлено, що напруга в електричній мережі в 220 В не відхиляється від свого номіналу більше, ніж на ± 27 В. Записати щільність розподілу нормального закону, який має напруга. Яка ймовірність нормальної роботи телевізора, якщо стандартний діапазон напруги становить від 205 до 235 В?

Варіанти 21-25

41. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $a=10$, $\sigma=4$. Знайти довжину інтервалу, симетричного відносно математичного сподівання, в який з ймовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.
42. Випадкова величина X розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = 3$. Обчислити основні числові характеристики даної випадкової величини.
43. Серед 10 кульок у урні 6 білих. Навмання беруть 4 кульки. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості білих кульок серед відібраних. Обчислити основні числові характеристики даної випадкової величини.
44. Випадкова величина X задана своєю щільністю

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x/\beta} \quad (\alpha > -1, \beta > 0)$$

при $x \geq 0$ та $f(x) = 0$, при $x < 0$ (Гамма розподіл). Знайти математичне сподівання та дисперсію даної випадкової величини при $\alpha = 4$, $\beta = 5$.

45. Студент складає іспит з теорії ймовірностей. Викладач задає йому питання до першої неправильної відповіді, але має право задати не більше 5 питань. Ймовірність правильно відповісти на поставлене питання є сталою і дорівнює 0,6. Скласти ряд розподілу величини X – кількості поставлених питань. Обчислити основні числові характеристики даної випадкової величини.

46. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a=10$. Ймовірність попадання X в інтервал $(10;20)$ дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність попадання X в $(0;10)$.
47. Середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка розподілена за нормальним законом, дорівнює 3 см, а математичне сподівання дорівнює 16 см. Знайти межі, у яких з ймовірністю 0,95 варто очікувати значення випадкової величини.
48. Автомат виготовлює кульки. Кулька вважається придатною, якщо відхилення X діаметра кульки від проектного розміру за абсолютною величиною менше 0,75 мм. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена за нормальним законом із середнім квадратичним відхиленням $\sigma=0,45$ мм, знайти, скільки в середньому буде придатних кульок серед 100 виготовлених.
49. Випадкова величина X розподілена рівномірно. Щільність ймовірностей її $f(x)=C$ при $0 \leq X \leq 15$ і $f(x)=0$ при всіх інших значеннях X . Знайти її математичне сподівання, дисперсію.
50. Деталь, виготовлена автоматом, вважається придатною, якщо відхилення розміру, що контролюється, від проектного не більше 5 мм. Випадкові відхилення розміру, що контролюється, від проектного мають нормальний закон розподілу з математичним сподіванням $a=0$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=3$ мм. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат.

Варіанти 26-30

51. Ціна поділки шкали вимірювального приладу рівна 0,2. Покази приладу заокруглюють до найближчого цілого значення. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена помилка: а) менша 0,04; б) більша 0,05.
52. Автобуси деякого маршруту йдуть строго за розкладом. Інтервал руху 5 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме наступний автобус менше 3 хвилини.
53. Хвилинна стрілка електричного годинника переміщується стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від дійсного не більше ніж на 20 секунд.
54. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , розподіленої рівномірно в інтервалі $(2, 8)$.
55. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно рівні 20 і 5. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення з інтервалу $(15, 25)$.
56. Знайти моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення показникового розподілу, заданого густиною ймовірності $f(x)=10e^{-10x}$ ($x \geq 0$).
57. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X , яка розподілена нормально з математичним сподіванням (проектною довжиною), рівним 50 мм. Фактично довжина виготовлених деталей не менше 32 мм і не більше 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі: а) більше 55 мм; б) менше 40 мм.
58. Проводиться вимірювання діаметра валу без систематичних (одного знаку) помилок. Випадкові помилки вимірювання X підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $\sigma=10$ мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде проведене з помилкою, яка не перевершує по абсолютній величині 15 мм.

59. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, заданим при $x \geq 0$ густиною розподілу $f(x) = 0,04e^{-0,04x}$; при $x < 0$ функції $f(x)=0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X потрапляє в інтервал $(1;2)$.

60. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, заданим функцією розподілу $F(x)=1-e^{-0,6x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ $F(x)=0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X потрапить в інтервал $(2, 5)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №12

ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ

1. Функції одного випадкового аргументу. Числові характеристики функції випадкового аргументу.

Якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y , то Y називають функцією випадкового аргументу X : $Y = \varphi(X)$.

1. Нехай X – дискретна випадкова величина. Якщо різним можливим значенням випадкової величини X відповідають різні значення функції Y , то ймовірність відповідних значень X і Y рівні між собою. Якщо різним можливим значенням випадкової величини X відповідають значення Y , серед яких є рівні між собою, то ймовірності рівних значень Y додаються.

Нехай дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Нехай $Y = \varphi(X)$.

Тоді справедливі формули:

$$M(\varphi(X)) = \sum_k \varphi(x_k) p_k, \quad (12.1)$$

$$D(\varphi(X)) = \sum_k \varphi^2(x_k) p_k - (M(\varphi(X)))^2. \quad (12.2)$$

2. Нехай X неперервна випадкова величина з щільністю розподілу $f(x)$, а $Y = \varphi(x)$. Якщо $y = \varphi(x)$ – диференційована строго зростаюча або строго спадна функція, обернена до якої $x = \psi(y)$, то щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини Y знаходиться з рівності

$$g(y) = f(\psi(y)) * |\psi'(y)|. \quad (12.3)$$

Якщо функція $y = \varphi(x)$ в інтервалі можливих значень X не монотонна, то потрібно розбити цей інтервал на такі інтервали, на яких $\varphi(x)$ монотонна, знайти щільності розподілів $g_i(y)$ для кожного з інтервалів монотонності, а потім подати $g(y)$ у вигляді суми:

$$g(y) = \sum g_i(y). \quad (12.4)$$

Числові характеристики випадкової величини Y знаходяться за формулами:

$$M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx, \quad (12.5)$$

$$D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - (M(\varphi(X)))^2. \quad (12.6)$$

Зокрема, якщо можливі значення X належать інтервалу (a, b) , то

$$M(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx, \quad (12.7)$$

$$D(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - (M(\varphi(X)))^2. \quad (12.8)$$

Приклади задач.

1. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
p	0,1	0,5	0,4

Знайти розподіл функції $Y = \sin X$, $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

Розв'язання.

Знайдемо можливі значення Y : $y_1 = \sin 0 = 0$, $y_2 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_3 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Одержимо ряд розподілу Y :

y	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
p	0,1	0,5	0,4

$$M(Y) = 0 \cdot 0,1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,4 = 0,755; \quad M(Y^2) = 0 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,4 = 0,65,$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 0,65 - (0,755)^2 = 0,08, \quad \sigma(Y) = 0,28.$$

2. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

x	-1	1	2
p	0,1	0,5	0,4

Знайти розподіл функції $Y = X^2$.

Розв'язання.

Можливі значення Y : $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 4$. Значення $y_1 = y_2$ рівні між собою.

Ймовірність цього значення $p_1 = 0,1 + 0,5 = 0,6$. Одержимо розподіл Y :

y	1	4
p	0,6	0,4

3. Дана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X , можливі значення якої належать інтервалу (a, b) . Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = AX + B$.

Розв'язання.

Функція $y = Ax + B$ монотонна в інтервалі (a, b) , отже, має обернену функцію $x = \frac{y - B}{A}$,

звідки $x' = \frac{1}{A}$. За формулою (12.3)

$$g(y) = \frac{1}{|A|} f\left(\frac{y - B}{A}\right), \quad y \in (Aa + B, Ab + B).$$

4. Дана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X , можливі значення якої належать інтервалу $(-\infty, +\infty)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

Розв'язання.

Функція $y = x^2$ спадна в інтервалі $(-\infty, 0)$ і в цьому інтервалі має обернену функцію $x = -\sqrt{y}$, звідки $x' = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$. За формулою (12.3): $g_1(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f(-\sqrt{y})$. Функція

$y = x^2$ зростаюча в інтервалі $(0, +\infty)$ і в цьому інтервалі має обернену функцію $x = \sqrt{y}$, звідки $x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, отже $g_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f(\sqrt{y})$. За формулою (12.4)

$g(y) = g_1(y) + g_2(y)$, тобто

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y})), \quad y \in (0, +\infty).$$

5. Випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1/2 x, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases} \quad Y = X^2. \text{ Знайти } M(Y), D(Y).$$

Розв'язання.

За формулами (12.7), (12.8) одержимо:

$$M(Y) = \int_0^2 x^2 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 = 2,$$

$$M(Y^2) = \int_0^2 x^4 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^5 dx = \frac{x^6}{12} \Big|_0^2 = \frac{16}{3},$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 16/3 - (2)^2 = 4/3.$$

2. Функції двох випадкових аргументів.

Якщо кожній парі можливих значень випадкових величин X і Y відповідає одне можливе значення випадкової величини Z , то Z називають функцією двох випадкових величин X і Y : $Z = \varphi(X, Y)$.

Далі розглянемо як знайти розподіл суми $Z=X+Y$ за відомими розподілами доданків.

1. Нехай X і Y – дискретні незалежні випадкові величини. Можливі значення $Z=X+Y$ дорівнюють сумах кожного можливого значення X з кожним можливим значенням Y ; ймовірності можливих значень дорівнюють добуткам ймовірностей доданків.

2. Нехай X і Y – неперервні незалежні випадкові величини з щільностями розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$, то щільність розподілу $g(z)$ суми $Z=X+Y$ за умови, що щільність розподілу хоча б одного з аргументів задана в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ одною формулою, можна знайти за формулою:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx \quad (12.9)$$

або за формулою:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y) f_2(y) dy \quad (12.10)$$

Функція $g(z)$ утворена з функцій $f_1(x)$ і $f_2(y)$ за формулою (12.9) або (12.10) називається згортою або композицією цих функцій.

Якщо можливі значення аргументів невід'ємні, то щільність розподілу $Z=X+Y$ знаходиться за формулою:

$$g(x) = \int_0^z f_1(x) f_2(z-x) dx \quad (12.11)$$

або за рівносильною формулою:

$$g(x) = \int_0^z f_1(z-y) f_2(y) dy \quad (12.12)$$

Композиція незалежних нормально розподілених випадкових величин також має нормальний розподіл. Математичне сподівання і дисперсія цієї композиції відповідно дорівнюють сумах математичних сподівань і дисперсій доданків.

Приклади задач.

1. Дискретні випадкові величини X і Y задані розподілами:

x	8	10	12
p	0,4	0,1	0,5

y	1	2
p	0,2	0,8

Знайти розподіл випадкової величини $Z=X+Y$.

Розв'язання.

Знайдемо можливі значення Z :

$$Z_1=8+1=9, Z_2=8+2=10, Z_3=10+1=11, Z_4=10+2=12, Z_5=12+1=13, Z_6=12+2=14.$$

Оскільки випадкові величини X і Y незалежні, то події $X=10$ і $Y=1$ також незалежні, тому ймовірність їх одночасного настання (тобто ймовірність події $Z=9$) за теоремою множення дорівнює $0,4 \times 0,2 = 0,08$, так само знаходимо:

$$P\{Z = 8 + 2 = 10\} = 0,4 \times 0,08 = 0,32; P\{Z = 10 + 1 = 11\} = 0,1 \times 0,2 = 0,02;$$

$$P\{Z = 10 + 2 = 12\} = 0,1 \times 0,8 = 0,08; P\{Z = 12 + 1 = 13\} = 0,5 \times 0,2 = 0,10$$

$$P\{Z = 12 + 2 = 14\} = 0,5 \times 0,8 = 0,40.$$

Одержимо ряд розподілу випадкової величини Z :

z	9	10	11	12	13	14
p	0,08	0,32	0,02	0,08	0,10	0,40

Контроль: $0,08 + 0,32 + 0,02 + 0,08 + 0,10 + 0,40 = 1$

54. Незалежні випадкові величини X і Y задані щільностями розподілів:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \quad (0 \leq x < \infty), \quad f_2(y) = \frac{1}{7} e^{-\frac{y}{7}} \quad (0 \leq y < \infty)$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язання.

За формулою (12.9)

$$g(z) = \int_0^z \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{7} e^{-\frac{(z-x)}{7}} dx = \frac{1}{14} e^{-\frac{z}{7}} \int_0^z e^{\frac{5}{14}x} dx = \frac{1}{14} e^{-\frac{z}{7}} \left(-\frac{14}{5} e^{-\frac{5x}{14}} \right) \Big|_0^z = \frac{1}{5} e^{-\frac{z}{7}} \left(1 - e^{-\frac{5}{14}z} \right).$$

Оскільки можливі значення X і Y невід'ємні, то $z > 0$, отже:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{z}{7}} \left(1 - e^{-\frac{5}{14}z} \right), & 0 \leq z < \infty \\ 0, & -\infty < z < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Перевірка: } \int_0^\infty \left(\frac{1}{5} e^{-\frac{z}{7}} - \frac{1}{5} e^{-\frac{z}{2}} \right) dz = 7/5 - 2/5 = 1.$$

3. Задані щільності розподілу незалежних випадкових величин X і Y :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 2y, & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язання.

Якщо $z < 0$, то $z - x < 0$, тому $f_2(z - x) = 0$, отже $g(z) = 0$.

Якщо $z > 2$, то $z - x > z - 1 > 1$, тому $f_2(z - x) = 0$, отже $g(z) = 0$.

Нехай $0 \leq z \leq 2$. Підінтегральна функція $f_2(z - x)$ відмінна від нуля тільки при тих значеннях X , які задовольняють нерівності $0 < z - x \leq 1$, звідки $z - 1 \leq x < z$.

Нехай $0 \leq z \leq 1$. Тоді $g(z) = \int_0^z 2(z-x)dx = (2zx - x^2)\Big|_0^z = 2z^2 - z^2 = z^2$.

Нехай $1 < z \leq 2$. Тоді $z-1 > 0$

і $g(z) = \int_{z-1}^1 2(z-x)dx = (2zx - x^2)\Big|_{z-1}^1 = 2z - 1 - 2z(z-1) + (z-1)^2 = 2z - z^2$.

Об'єднуючи ці результати дістанемо: $g(z) = \begin{cases} 0, z \leq 0 \\ z^2, 0 < z \leq 1 \\ 2z - z^2, 1 < z \leq 2 \\ 0, z > 2 \end{cases}$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №12

Варіанти 1-5

1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	1	3	5
p	0,4	0,1	0,5

Знайти розподіл випадкової величини $Y=3X$, $M(Y)$, $D(Y)$.

2. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p	0,2	0,7	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $Y=\sin X$, $M(Y)$, $D(Y)$.

3. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $Y=X^2+1$, $M(Y)$, $D(Y)$.

4. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	-5	-3	0	3	5
p	0,1	0,3	0,4	0,15	0,05

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y=1-X$, $M(Y)$, $D(Y)$.

5. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	1	2	3	4	5
p	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^3 - 9X^2 + 23X + 15$, $M(Y)$, $D(Y)$.

6. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відріжку $[-2; 2]$. Знайти функцію розподілу, щільність ймовірності випадкової величини $Y = X + 1$, $M(Y)$, $D(Y)$.

7. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-\pi/4; \pi/4]$. Знайти функцію розподілу, щільність ймовірності випадкової величини $Y = 2X$ та $M(Y), D(Y)$.
8. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$. Знайти функцію розподілу, щільність ймовірності випадкової величини $Y = X^2$, $M(Y), D(Y)$.
9. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=0$ і $\sigma=1$. Знайти щільність ймовірності величини $Y = kx$.
10. Випадкова величина X має показниковий розподіл з щільністю ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ae^{-ax}, & x > 0 \end{cases} \quad (a>0)$$

Знайти щільність ймовірності випадкової величини $Y = \sqrt{X}$, $M(Y), D(Y)$.

Варіанти 6-10

11. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	0	1	2	3	4
p	0,05	0,4	0,25	0,2	0,1

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^2 + 3X + 1$, $M(Y), D(Y)$.

12. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	0	1	2	3
p	0,3	0,4	0,2	0,1

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = \cos^2(\pi/2)X$, $M(Y), D(Y)$.

13. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	-2	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,25	0,1	0,05

Знайти розподіл випадкової величини $Y = 2X^2 - 3$, $M(Y), \sigma(Y)$.

14. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	-2	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,15	0,3	0,25	0,1	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $Y = \sqrt{2X + 4}$, $M(Y), \sigma(Y)$.

15. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	0	1	2	3
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = \sin(\pi/2)X + 1$, $M(Y), \sigma(Y)$.

16. Задана щільність ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 10/7 x^{3/7}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad Y = 2X^2. \text{ Знайти } f(y), F(y), M(Y), D(Y).$$

17. Ребро куба x виміряне наближено, причому $1 \leq x \leq 2$. Розглядаючи ребро куба як випадкову величину X , яка розподілена рівномірно в інтервалі $(1,2)$. Знайти математичне сподівання і дисперсію куба.

18. Дана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X , можливі значення якої знаходяться в інтервалі $(0;+\infty)$. Знайти щільність розподілу $g(x)$ випадкової величини $Y = e^{-x}$.

19. Задана щільність ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1/5, & 0 < x \leq 5 \\ 0, & x > 5 \end{cases} \quad Y = e^{X^2 - 4x}.$$

Знайти $f(y)$, $F(y)$, $M(Y)$, $D(Y)$.

20. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-\pi/4; \pi/4]$. Знайти функцію розподілу, щільність ймовірності випадкової величини $Y=3X$ та $M(Y)$, $D(Y)$.

Варіанти 11-15

21. Задана щільність ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0,5, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad Y = |X| + 1. \text{ Знайти } M(Y), D(Y).$$

22. Задана щільність ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0,5 \\ 1, & 0,5 < x \leq 1,5 \\ 0, & x > 1,5 \end{cases} \quad Y = X^2 - 1. \text{ Знайти } M(Y), D(Y).$$

23. Задана щільність ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases} \quad Y = \sin x. \text{ Знайти } M(Y), D(Y).$$

24. Задана щільність ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1/x, & 1 < x \leq e \\ 0, & x > e \end{cases} \quad Y = \ln X. \text{ Знайти } M(Y), D(Y).$$

25. Задана щільність ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 1, & -1 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad Y = X|X|. \quad \text{Знайти } M(Y), D(Y).$$

26. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	0	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,25	0,2	0,25

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^2 + 3X + 1$, $M(Y), D(Y)$.

27. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	0	1	2	3
p	0,4	0,4	0,1	0,1

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = \cos^2(\pi/2)X$, $M(Y), D(Y)$.

28. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	-2	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,25	0,1	0,05

Знайти розподіл випадкової величини $Y = 2X^2 - 5$, $M(Y)$, $\sigma(Y)$.

29. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	-2	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,15	0,3	0,25	0,1	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $Y = \sqrt{X + 4}$, $M(Y)$, $\sigma(Y)$.

30. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	0	1	2	3
p	0,15	0,35	0,35	0,15

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = \sin(\pi/2)X + 1$, $M(Y)$, $\sigma(Y)$.

Варіанти 16-20

31. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з щільністю ймовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x < 1, x > 2 \end{cases}$$

Знайти щільність ймовірності випадкової величини $Y = X^2$, $M(Y), D(Y)$.

32. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-1; 1]$.

Знайти: а) $M(2X + 3)$; б) $M(X^2 + 1)$.

33. Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі $[0; \pi]$. Знайти щільність розподілу та математичне сподівання випадкової величини $Y = \cos X$.

34. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[0; 4]$. Знайти функцію розподілу, щільність ймовірності випадкової величини $Y = e^x$, $M(Y), D(Y)$.

35. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізок $[-\pi/4; \pi/4]$. Знайти функцію розподілу, щільність ймовірності випадкової величини $Y = X|X|$ та $M(Y), D(Y)$.

36. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-1	0	1	4	5
p	0,15	0,3	0,25	0,2	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $Y = \sqrt[3]{X} + 1$, $M(Y)$, $\sigma(Y)$.

37. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	1	3	5
p	0,4	0,1	0,5

Знайти розподіл випадкової величини $Y = 3X$, $M(Y)$, $D(Y)$.

38. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p	0,2	0,7	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $Y = \sin X$, $M(Y)$, $D(Y)$.

39. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $Y = X^2 + 1$, $M(Y)$, $D(Y)$.

40. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	-5	-3	0	3	5
p	0,1	0,3	0,4	0,15	0,05

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = 1 - X$, $M(Y)$, $D(Y)$.

Варіанти 21-25

41. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізок $[-\pi/3; \pi/3]$. Знайти функцію розподілу, щільність ймовірності випадкової величини $Y = X^3$, $M(Y)$, $D(Y)$.

42. Задана щільність ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 10/7 x^{3/7}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad Y = 2X^2.$$

Знайти $f(y)$, $F(y)$, $M(Y)$, $D(Y)$.

43. Ребро куба x виміряне наближено, причому $1 \leq x \leq 2$. Розглядаючи ребро куба як випадкову величину X , яка розподілена рівномірно в інтервалі (1,2). Знайти математичне сподівання і дисперсію куба.

44. Дана щільність розподілу $f(x) = \ln x$ випадкової величини X , можливі значення якої знаходяться в інтервалі (1;5). Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = e^{-x}$.

45. Задана щільність ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1/5, & 0 < x \leq 5 \\ 0, & x > 5 \end{cases} \quad Y = e^{X^2 + 4x}.$$

Знайти $f(y)$, $F(y)$, $M(Y)$, $D(Y)$.

46. Дана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X , можливі значення якої знаходяться в інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Знайти щільність розподілу $g(x)$ випадкової величини $Y = |X|$.

47. Задана щільність ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 5, & 0 < x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases} \quad Y = X^2 - X + 1.$$

Знайти $M(Y)$, $D(Y)$.

48. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-2	0	1	2	3
p	0,15	0,3	0,25	0,2	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $Y = \sqrt{X} + 3$, $M(Y)$, $\sigma(Y)$.

49. Незалежні нормально розподілені випадкові величини X і Y задані щільностями

розподілу: $f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/8}$, $f_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/8}$.

Довести, що композиція цих законів також є нормальний закон.

50. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	2	4	8	16	32
p	0,15	0,3	0,25	0,2	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $Y = \log_2 X$, $M(Y)$, $\sigma(Y)$.

Варіанти 26-30

51. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	1	2	3
p	0,4	0,3	0,3

Знайти розподіл випадкової величини $Y = 3X + 1$, $M(Y)$, $D(Y)$.

52. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p	0,3	0,4	0,3

Знайти розподіл випадкової величини $Y = 2 \sin X$, $M(Y)$, $D(Y)$.

53. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	-2	-1	0	1	2
p	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1

Знайти розподіл випадкової величини $Y=3X^2+1$, $M(Y)$, $D(Y)$.

54. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	-5	-3	0	3	5
p	0,1	0,3	0,4	0,15	0,05

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y=1-3X$, $M(Y)$, $D(Y)$.

55. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	1	2	3	4	5
p	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^3 - 9X^2 + 23X + 15$, $M(Y)$, $D(Y)$.

56. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-2; 2]$. Знайти функцію розподілу, щільність ймовірності випадкової величини $Y=2X+1$, $M(Y)$, $D(Y)$.

57. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-\pi/4; \pi/4]$. Знайти функцію розподілу, щільність ймовірності випадкової величини $Y=5X$ та $M(Y)$, $D(Y)$.

58. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[0; 1]$. Знайти функцію розподілу, щільність ймовірності випадкової величини $Y = X^2$, $M(Y)$, $D(Y)$.

59. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=0$ і $\sigma = 1$. Знайти щільність ймовірності величини $Y=4X+2$.

60. Випадкова величина X має показниковий розподіл з щільністю ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 8e^{-8x}, & x > 0 \end{cases}$$

Знайти щільність ймовірності випадкової величини $Y = \sqrt{X} + 4$, $M(Y)$, $D(Y)$.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ №13-14

СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Упорядкований набір $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ випадкових величин $X_i (i = 1, \dots, n)$, які задані на одному й тому самому просторі елементарних подій Ω , називається **системою n випадкових величин** або **n -вимірним випадковим вектором**.

На багатовимірні випадкові величини поширюються майже без змін основні означення, які були розглянуті для одновимірної випадкової величини.

Розглянемо систему двох випадкових величин.

1. Двовимірні випадкові величини.

Пара випадкових величин X і Y утворює двовимірну випадкову величину (вектор) (X, Y) . Розподіл двовимірної випадкової величини задається функцією двох змінних:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}. \quad (13.1)$$

Геометрично рівність (1) можна тлумачити так: $F(x, y)$ – це ймовірність того, що випадкова точка (X, Y) попаде в нескінченний квадрат з вершиною (x, y) , розміщений лівіше і нижче цієї вершини (рис. 13.1).

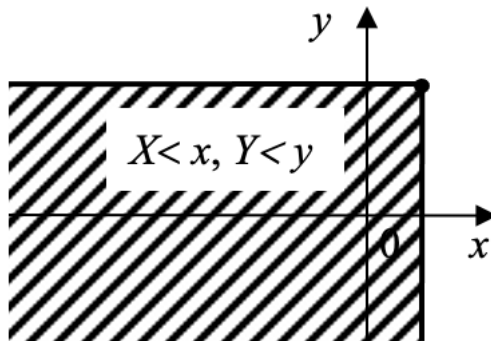


Рис. 13.1

Властивості функції розподілу.

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.

2. Функція розподілу неперервна зліва по кожному аргументу:

$$\lim_{x \rightarrow x_1 \rightarrow 0} F(x, y) = F(x_1, y); \quad \lim_{y \rightarrow y_1 \rightarrow 0} F(x, y) = F(x, y_1).$$

3. Функція $F(x, y)$ неспадна по кожному аргументу :

$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y), \text{ якщо } x_1 < x_2; \quad F(x, y_1) \leq F(x, y_2), \text{ якщо } y_1 < y_2.$$

4. $F(x, +\infty) = F_1(x)$ – функція розподілу компоненти X ,

$$F(+\infty, y) = F_2(y) \text{ – функція розподілу компоненти } Y.$$

$$5. F(-\infty, y) = 0; F(x, -\infty) = 0; F(-\infty, -\infty) = 0; F(+\infty, +\infty) = 1.$$

Двовимірну випадкову величину (X, Y) називають **дискретною**, якщо множина значень, які вона може набути, є скінченною або зліченною. Для завдання дискретної двовимірної величини досить задати її можливі значення (x_i, y_j) і ймовірності кожного значення

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}.$$

Закон розподілу такої випадкової величини задається таблицею:

Y	X				
	x_1	x_2	...	x_m	Σ
y_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	q_1
y_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	q_2
...	...	...	...	...	...
y_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}	q_n
Σ	p^1	p^2	...	p^m	1

$$q_1 = \sum_{i=1}^m p_{i1}, q_2 = \sum_{i=1}^m p_{i2}, \dots, q_n = \sum_{i=1}^m p_{in}; p_1 = \sum_{i=1}^n p_{1i}, p_2 = \sum_{i=1}^n p_{2i}, \dots,$$

$$p_m = \sum_{i=1}^n p_{mi}.$$

Сума всіх ймовірностей, що знаходяться в таблиці, дорівнює одиниці. Додаючи ймовірності стовпців і рядків, одержимо закони розподілу компонент X і Y .

Закони розподілу випадкових величин X і Y можна записати:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m
p	p_1	p_2	$\dots$	p_m

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n
q	q_1	q_2	$\dots$	q_n

Двовимірну випадкову величину (X, Y) називають **неперервною**, якщо її функція розподілу $F(x, y)$ має неперервну мішану похідну другого порядку: $F''_{xy} = F''_{yx}$.

Щільність ймовірностей $f(x, y)$ неперервної випадкової величини (X, Y) визначається формулою:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (13.2)$$

Тоді $F(x, y)$ можна подати у вигляді:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy. \quad (13.3)$$

Властивості щільності розподілу:

1. $f(x, y) \geq 0$ при всіх (x, y) .

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (13.4)$$

3. Якщо D - довільна область у площині Oxy , то

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (13.5)$$

Знаючи щільність розподілу $f(x, y)$ двовимірної випадкової величини (X, Y) , можна знайти щільність розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$ для її компонент X і Y .

Функції розподілу одновимірних випадкових величин X і Y дорівнюють:

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy, F_2(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

Диференціюючи функції розподілу $F_1(x)$ і $F_2(y)$ відповідно по аргументам x і y , одержимо:

$$f_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Приклади задач.

1. Задано дискретна двовимірна випадкова величина:

Y	X			
	1	2	3	Σ
0	0,1	0	0,1	0,2
2	0	0,3	0,3	0,6
5	0,2	0	0	0,2
Σ	0,30	0,30	0,40	1

Знайти закони розподілу компонент X і Y .

Розв'язання.

Додаючи стовпці і рядки таблиці ймовірностей, дістанемо закони розподілу випадкових величин X і Y відповідно:

X	1	2	3
p	0,3	0,3	0,4

Y	0	2	5
q	0,2	0,6	0,2

2. Задано функція розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) :

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-3x})(1 - e^{-5y}), & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x,y)$.

Розв'язання.

Знаходимо

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \begin{cases} 3e^{-3x}(1 - e^{-5y}), & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$
$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} 15e^{-3x}e^{-5y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Отже, за формулою (13.2):

$$f(x, y) = \begin{cases} 15e^{-3x}e^{-5y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

2. Умовні закони розподілу.

Умовним законом розподілу називається розподіл однієї випадкової величини, знайдений за умови, що інша випадкова величина системи набула деякого фіксованого значення.

а) Нехай (X,Y) - дискретна двовимірна випадкова величина.

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини X при фіксованому значенні $Y = y_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини $X=x_i$ та відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні $Y = y_i$.

У табличній формі запису умовний закон $X/Y=y_i$ має такий вигляд:

X	x_1	x_2	...	x_m
$P(x_i/y_j)$	$P(x_1/y_j)$	$P(x_2/y_j)$	...	$P(x_m/y_j)$

Умовні ймовірності $P(x_i/y_j)$ знаходяться за формулою:

$$p(x_i | y_j) = \frac{p_{ij}}{g_j} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k).$$

де ймовірності g_j вибираються з ряду розподілу складової Y .

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини Y при фіксованому значенні $X=x_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини $Y=y_i$ та відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні $X=x_i$.

У табличній формі запису умовний закон $Y/X=x_i$ має такий вигляд:

Y	y_1	y_2	...	y_n
$P(y_j / x_i)$	$P(y_1 / x_i)$	$P(y_2 / x_i)$	...	$P(y_n / x_i)$

Умовні ймовірності $P(y_j / x_i)$ знаходяться за формулою:

$$p(y_j | x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i} \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

де ймовірності p_i вибираються з ряду розподілу складової X

б) Нехай (X, Y) – неперервна двовимірна випадкова величина.

Умовною щільністю $f(x/y)$ розподілу компоненти X при заданому значенні $Y=y$ називається відношення щільності розподілу двовимірної випадкової величини $f(x, y)$ до щільності розподілу $f(y)$ компоненти Y :

$$f(x / y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}.$$

Умовною щільністю $f(y/x)$ розподілу компоненти Y при заданому значенні $X=x$ називається відношення щільності розподілу двовимірної випадкової величини $f(x, y)$ до щільності розподілу $f(x)$ компоненти X :

$$f(y / x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}.$$

Приклади задач.

1. Задано двовимірний закон розподілу дискретних випадкових величин:

Y	X			
	1	2	3	Σ
3	0,15	0,20	0,25	0,60
4	0,10	0,10	0,20	0,40
Σ	0,25	0,30	0,45	1

Знайти: а) умовний закон розподілу випадкової величини X при $Y=3$;

б) умовний закон розподілу випадкової величини Y при $X=2$.

Розв'язання.

а) Знаходимо:

$$P(X_1/Y_1) = \frac{0,15}{0,60} = \frac{1}{4}, P(X_2/Y_1) = \frac{0,20}{0,60} = \frac{1}{3}, P(X_3/Y_1) = \frac{0,25}{0,60} = \frac{5}{12}.$$

X	1	2	3
$P(X/Y_1)$	1/4	1/3	5/12

б) Знаходимо

$$P(Y_1/X_2) = \frac{0,20}{0,30} = \frac{2}{3}, P(Y_2/X_2) = \frac{0,10}{0,30} = \frac{1}{3}.$$

Y	3	4
$P(Y/X_2)$	2/3	1/3

2. Двовимірна випадкова величина задана щільністю розподілу:

$$f(x, y) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} e^{-9x^2 - 2xy - y^2}. \quad \text{Знайти умовні закони розподілу компонент.}$$

Розв'язання.

Знайдемо умовні щільності розподілу компонент:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-9x^2 - 2xy - y^2} dy = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} e^{-8x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+y)^2} d(x+y) = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} e^{-8x^2}, \text{ враховуючи, що інтеграл Пуассона } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-9x^2 - 2xy - y^2} dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} e^{-y^2} \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{9}y^2} \cdot e^{-(3x+\frac{1}{3}y)^2} d(3x+\frac{1}{3}y) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} e^{-\frac{8}{9}y^2}.$$

$$\text{Одержимо: } f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} e^{-(3x+\frac{1}{3}y)^2},$$

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+y)^2}.$$

3. Залежні і незалежні випадкові величини.

Дві випадкові величини X і Y називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла друга величина, і коли функція розподілу пари (X,Y) дорівнює добутку функцій розподілу компонент:

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \quad (13.6)$$

В протилежному випадку, при невиконанні рівності (13.1), випадкові величини X і Y називаються **залежними**.

Диференціюючи двічі рівність (13.1) по аргументам x і y , одержимо:

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (13.7)$$

Приклади задач.

1. Дана функція розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) :

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & x < 0, \text{ або } y < 0 \end{cases}$$

Знайти функції розподілів компонент. Перевірити незалежність випадкових величин.

Розв'язання.

За властивістю функції розподілу $F(x,y)$ маємо:

$$F(x) = F(x,\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}) = 1 - 3^{-x}, x \geq 0.$$

$$\text{Отже, } F(x) = \begin{cases} 1 - 3^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

$$F(y) = F(\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}) = 1 - 3^{-y}, y \geq 0$$

$$\text{Отже, } F(y) = \begin{cases} 1 - 3^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

$$F(x) \cdot F(y) = (1 - 3^{-x})(1 - 3^{-y}) = 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y} = F(x,y), \text{ якщо } x \geq 0 \text{ та } y \geq 0. \text{ Таким чином, випадкові величини } X \text{ і } Y \text{ незалежні.}$$

2. Двовимірна випадкова величина (X,Y) задана щільністю розподілу:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}, \quad x, y \in R. \text{ Довести, що } X \text{ і } Y \text{ незалежні.}$$

Розв'язання.

Маємо

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \operatorname{arctg} y \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\&= \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; \\f(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{dx}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2(1+y^2)} \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\&= \frac{1}{\pi^2(1+y^2)} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.\end{aligned}$$

Тому що $f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$, то

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi(1+x^2)\pi(1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Отже X і Y незалежні.

Залежність між випадковими величинами X і Y називається **ймовірнісною (стохастичною або статистичною)**, якщо залежність між випадковими величинами означає аналітичну залежність щільності умовного розподілу однієї з них від значень, яких набуває друга величини. Виявляється вона не лише у зміні умовних законів розподілу, а й у зміні умовних числових характеристик.

4. Нормальний закон розподілу двовимірної випадкової величини.

Двовимірна випадкова величина (X, Y) має нормальний закон розподілу, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-p^2}} e^{\frac{1}{2(1-p^2)} \left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2p \frac{(x-a_1)(y-a_2)(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right)}$$

Нормальний закон на площині визначається п'ятьма параметрами. Можна довести, що a_1 , a_2 – математичні сподівання, σ_1 , σ_2 – середні квадратичні відхилення, $r(X, Y)$ – коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y . Якщо X і Y некорельовані, то і незалежні. Справді, при $r(X, Y)=0$ одержимо

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\left(\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2} \right)} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} = \\&= f_1(x)f_2(y).\end{aligned}$$

Отже, X і Y – незалежні.

5. Числові характеристики двовимірної випадкової величини.

Коефіцієнт кореляції та його властивості. Регресія.

Нехай (X, Y) – дискретна двовимірна випадкова величина.

Математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення визначаються формулами:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_j p_{ij} = \sum_{j=1}^m x_j p_{x_j}. \quad (13.8)$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_j^2 p_{ij} - M^2(X) = \sum_{j=1}^m x_j^2 p_{x_j} - M^2(X). \quad (13.9)$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}. \quad (13.10)$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i p_{ij} = \sum_{i=1}^n y_i p_{y_i}. \quad (13.11)$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i^2 p_{ij} - M^2(Y) = \sum_{i=1}^n y_i^2 p_{y_i} - M^2(Y). \quad (13.12)$$

$$\sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}. \quad (13.13)$$

Нехай (X, Y) – неперервна двовимірна випадкова величина з щільністю розподілу $f(x, y)$. Якщо $f(x)$, $f(y)$ – щільності розподілу її компонент X і Y , то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy. \quad (13.14)$$

Якщо $f(x, y)$ приймає значення в деякій області D площини Oxy , то $M(X) = \int_D \int x f(x, y) dx dy$, $M(Y) = \int_D \int y f(x, y) dx dy$.

Аналогічно для дисперсії:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy - (M(X))^2, \quad (13.15)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M(Y))^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y) dx dy - (M(Y))^2. \quad \text{Якщо}$$

$f(x, y)$ приймає значення в деякій області D площини Oxy то

$$D(X) = \int_D \int (x - M(X))^2 f(x, y) dx dy = \int_D \int x^2 f(x, y) dx dy - (M(X))^2,$$

$$D(Y) = \int_D \int (y - M(Y))^2 f(x, y) dx dy = \int_D \int y^2 f(x, y) dx dy - (M(Y))^2 \quad (13.16)$$

Точка $(M(X), M(Y))$ називається центром розсіювання двовимірної випадкової величини. Дисперсія випадкової величини (X, Y) характеризує розсіювання випадкової точки (X, Y) навколо точки $(M(X), M(Y))$ в напрямі Ox і Oy на площині Oxy .

Для з'ясування наявності зв'язку та рівня залежності між випадковими величинами X і Y застосовують такі числові характеристики, як коваріацію та коефіцієнт кореляції.

Коваріацією (кореляційним моментом) випадкових величин X і Y називається число:

$$K(X, Y) = \text{cov}(X, Y) = M((X - M(X))(Y - M(Y))) = M(XY) - M(X)M(Y). \quad (13.17)$$

Нехай (X, Y) – дискретна двовимірна випадкова величина. Тоді

$$K(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j p_{ij} - \sum_{i=1}^n x_i p_i \sum_{j=1}^n y_j q_j \quad (13.19)$$

Для неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y)

$$K(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy - \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) dx dy \quad (13.20)$$

Якщо $f(x, y)$ приймає значення в деякій області D площини Oxy , то

$$K(X, Y) = \iint_D xyf(x, y) dx dy - \iint_D xf(x, y) dx dy \iint_D yf(x, y) dx dy. \quad (13.21)$$

Коефіцієнтом кореляції між випадковими величинами X і Y називається число

$$r(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \quad (13.22)$$

Для будь-яких випадкових величин $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$.

Шкала Чеддока виявлення сили зв'язку за значенням парного коефіцієнта кореляції

Значення коефіцієнта кореляції (за модулем)	0,1 - 0,3	0,3 - 0,5	0,5 - 0,7	0,7 - 0,9	0,9 - 0,99
Характеристика сили зв'язку	слабкий	помірний	помітний	сильний	дуже сильний

Коефіцієнт кореляції між випадковими величинами X і Y дорівнює ± 1 тоді і тільки тоді, коли X і Y зв'язані лінійною залежністю $Y = aX + b$, причому $r(X, Y) = 1$ при $a > 0$, $r(X, Y) = -1$ при $a < 0$.

Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $r(X, Y) = 0$. Якщо $r(X, Y) \neq 0$, то X і Y залежні випадкові величини.

Випадкові величини X і Y , для яких $r(X, Y) = 0$, називаються **некорельованими**.

Випадкові величини X і Y , для яких $r(X, Y) \neq 0$ називаються **корельованими**. З некорельованості двох випадкових величин, взагалі кажучи, не випливає їх незалежність. Для нормально розподілених випадкових величин некорельованість рівносильна незалежності.

Коефіцієнт кореляції служить для оцінки тісноти лінійного зв'язку між випадковими величинами X і Y : чим ближче модуль коефіцієнта кореляції до одиниці, тим зв'язок сильніший, чим ближче модуль коефіцієнта кореляції до нуля, тим зв'язок слабший.

Умовне математичне сподівання випадкової величини Y при $X=x$, тобто $M(Y/X)(x)$ називається **функцією регресії** випадкової величини Y відносно X , або регресією Y по X .

Аналогічно $M(X / Y) = \varphi(y)$ називається **функцією регресії X відносно Y** , або регресією X по Y .

Регресія Y по X показує, як змінюється в середньому величина Y при зміні величини X .

Якщо обидві функції $\varphi(x)$ і $\varphi(y)$ лінійні, то X і Y зв'язані лінійною кореляційною залежністю.

Функція регресії може бути використана для прогнозування однієї з випадкових величин, якщо відоме значення іншої.

Приклади задач.

1. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y)

$X = x_j \backslash Y = y_i$	5	6	7	Σ
2	0,1	0,1	0,2	0,4
4	0,01	0,02	0,17	0,2
6	0,3	0,05	0,05	0,4
Σ	0,41	0,17	0,42	1

Обчислити $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $M(Y)$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$; $K(X, Y)$; $r(X, Y)$;
 $P(2 \leq Y < 6; \quad 5 < X \leq 7)$.

Розв'язання.

Числові характеристики обчислюємо за формулами:

$$M(X) = \sum_{j=1}^3 x_j p_{x_j} = 5 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,2 = 1,5 + 3 + 1,4 = 5,9;$$

$$M(X^2) = \sum_{j=1}^3 x_j^2 p_{x_j} = (5)^2 0,3 + (6)^2 0,5 + (7)^2 0,2 = 7,5 + 18 + 9,8 = 35,3;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 35,3 - 34,81 = 0,49;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0,7;$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^3 y_i p_{y_i} = 2 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,4 = 0,8 + 0,8 + 2,4 = 4;$$

$$M(Y^2) = \sum_{i=1}^3 y_i^2 p_{y_i} = (2)^2 0,4 + (4)^2 0,2 + (6)^2 0,4 = 1,6 + 3,2 + 14,4 = 19,2;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 19,2 - (4)^2 = 19,2 - 16 = 3,2;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 1,79;$$

$$\begin{aligned} M(XY) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_i x_j p_{ij} = 2 \cdot 5 \cdot 0,1 + 2 \cdot 6 \cdot 0,1 + 2 \cdot 7 \cdot 0,2 + 4 \cdot 5 \cdot 0,01 + 4 \cdot 6 \cdot 0,02 + \\ &\quad + 4 \cdot 7 \cdot 0,17 + 6 \cdot 5 \cdot 0,3 + 6 \cdot 6 \cdot 0,05 + 6 \cdot 7 \cdot 0,05 = \\ &= 1 + 1,2 + 2,8 + 0,2 + 0,48 + 4,76 + 9 + 1,8 + 2,1 = 23,16; \end{aligned}$$

$$K(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = 23,16 - 5,9 \cdot 4 = 23,16 - 23,6 = -0,44.$$

Для вимірювання тісноти кореляційного зв'язку обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{-0,44}{0,7 \cdot 1,79} \approx -0,35.$$

Випадкові величини X і Y залежні.

Знайдемо $P(2 \leq Y < 6; \quad 5 < X \leq 7) = 0,1 + 0,02 + 0,2 + 0,17 = 0,49$.

2. Неперервна двовимірна випадкова величина (X, Y) задана щільністю розподілу

$$f(x, y) = \begin{cases} Axy, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases} \quad \text{де область } D - \text{трикутник, обмежений прямими}$$

$$x + y - 1 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Знайти число A , $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

Розв'язання.

Оскільки $f(x, y)$ приймає значення в області D , то $\iint_D f(x, y) dx dy = 1$.

Одержимо:

$$\begin{aligned} \iint_D Axy dx dy &= A \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy = A \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = \frac{A}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{A}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \\ &= \frac{A}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{A}{24} = 1. \end{aligned}$$

Звідси $A = 24$.

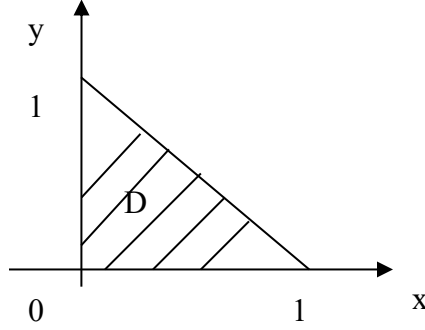


Рис. 13.2

Отже, $f(x, y) = \begin{cases} 24xy, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$

$$\begin{aligned} M(X) &= \iint_D xf(x, y) dx dy = 24 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y dy = 24 \int_0^1 x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = 12 \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx = \\ &= 12 \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = 12 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5}; \end{aligned}$$

$$M(Y) = \iint_D yf(x, y) dx dy = 24 \int_0^1 y^2 dy \int_0^{1-y} x dx = \frac{2}{5};$$

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \iint_D x^2 f(x, y) dx dy = 24 \int_0^1 x^3 dx \int_0^{1-x} y dy = 24 \int_0^1 x^3 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = 12 \int_0^1 x^3 (1-x)^2 dx = \\ &= 12 \int_0^1 (x^3 - 2x^4 + x^5) dx = 12 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5}; \end{aligned}$$

$$M(Y^2) = \iint_D y^2 f(x, y) dx dy = 24 \int_0^1 y^3 dy \int_0^{1-y} x dx = \frac{1}{5};$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{5};$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}; \quad \sigma(Y) = \frac{1}{5};$$

$$\begin{aligned} M(XY) &= \iint_D xyf(x, y) dx dy = 24 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y^2 dy = 24 \int_0^1 x^2 \frac{y^3}{3} \Big|_0^{1-x} dx = 8 \int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx = \\ &= 8 \int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5) dx = 8 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}; \end{aligned}$$

$$K(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = \frac{2}{15} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{2}{75};$$

$$r(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = -\frac{2}{3}.$$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №13

Варіанти 1-5

1. Задано двовимірний закон розподілу дискретних випадкових величин:

Y	X			
	1	2	3	Σ
3	0,35	0,20	0,25	0,80
4	0,10	0,05	0,05	0,20
Σ	0,45	0,25	0,30	1

Знайти:

- а) ряди розподілу для компонент X та Y ;
 - б) математичні сподівання та дисперсії обох компонент;
 - в) функцію розподілу $F(x, y)$;
 - г) ймовірність події $P(X < 3; Y < 4)$;
 - д) умовний закон розподілу випадкової величини X при $Y=3$;
 - е) умовний закон розподілу випадкової величини Y при $X=2$;
 - ж) перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними.
2. Двовимірна випадкова величина задана функцією розподілу розподілу:

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-3x})(1 - e^{-5y}), & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Знайти:

- а) щільність розподілу $f(x, y)$;
- б) умовні закони розподілу компонент;
- в) перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними;
- г) математичні сподівання та дисперсії обох компонент;
- д) ймовірність події $P(0 < X < \ln 2; 0 < Y < \ln 3)$.

Варіанти 6-10

3.Задано двовимірний закон розподілу дискретних випадкових величин:

Y	X			
	1	2	3	Σ
5	0,35	0,20	0,15	0,70
6	0,10	0,05	0,15	0,30
Σ	0,45	0,25	0,30	1

Знайти:

- ряди розподілу для компонент X та Y ;
 - математичні сподівання та дисперсії обох компонент;
 - функцію розподілу $F(X,Y)$;
 - ймовірність події $P(X<3; Y<6)$;
 - умовний закон розподілу випадкової величини X при $Y=6$;
 - умовний закон розподілу випадкової величини Y при $X=3$;
 - перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними.
4. Двовимірна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\pi} \arctg y + \frac{1}{2}\right), x \in R, y \in R.$$

Знайти:

- щільність розподілу $f(x,y)$;
- умовні закони розподілу компонент;
- перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними;
- математичні сподівання та дисперсії обох компонент;
- ймовірність події $P(\pi/4 < X < 3\pi/4; \pi/4 < Y < 3\pi/4)$.

Варіанти 11-15

3.Задано двовимірний закон розподілу дискретних випадкових величин:

Y	X			
	3	4	5	Σ
5	0,35	0,20	0,15	0,70
6	0,10	0,05	0,15	0,30
Σ	0,45	0,25	0,30	1

Знайти:

- ряди розподілу для компонент X та Y ;
- математичні сподівання та дисперсії обох компонент;

в) функцію розподілу $F(X, Y)$;

г) ймовірність події $P(X < 4; Y < 6)$;

д) умовний закон розподілу випадкової величини X при $Y=5$;

е) умовний закон розподілу випадкової величини Y при $X=5$;

ж) перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними.

4. Двовимірна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x, y) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y})$$

при $x \geq 0, y \geq 0$.

Знайти:

а) щільність розподілу $f(x, y)$;

б) умовні закони розподілу компонент;

в) перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними,

г) математичні сподівання та дисперсії обох компонент;

д) ймовірність події $P(0 < X < \ln 2; 0 < Y < \ln 3)$.

Варіанти 16-20

5. Задано двовимірний закон розподілу дискретних випадкових величин:

Y	X		
	0	1	2
0	0,0009	0,042	0,0049
1	0,0162	0,0756	0,0882
2	0,0729	0,3402	0,3591

Знайти:

а) ряди розподілу для компонент X та Y ;

б) математичні сподівання та дисперсії обох компонент;

в) функцію розподілу $F(X, Y)$;

г) ймовірність події $P(X < 2; Y < 1)$;

д) умовний закон розподілу випадкової величини X при $Y=2$;

е) умовний закон розподілу випадкової величини Y при $X=1$;

ж) перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними.

6. Двовимірна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x, y) = \sin x \cos y$$

при $x \in [0, 2\pi], y \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$,

Знайти:

а) щільність розподілу $f(x, y)$;

б) умовні закони розподілу компонент;

в) перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними,

- г) математичні сподівання та дисперсії обох компонент;
 д) ймовірність події $P(\pi/4 < X < 3\pi/4; \pi/4 < Y < 3\pi/4)$

Варіанти 21-25

7. Задано двовимірний закон розподілу дискретних випадкових величин:

Y	X		
	0	1	2
0	0,0004	0,0032	0,0064
1	0,0072	0,0576	0,1152
2	0,0324	0,2592	0,5184

Знайти:

- а) ряди розподілу для компонент X та Y ;
 б) математичні сподівання та дисперсії обох компонент;
 в) функцію розподілу $F(X, Y)$;
 г) ймовірність події $P(X < 2; Y < 1)$;
 д) умовний закон розподілу випадкової величини X при $Y=1$;
 е) умовний закон розподілу випадкової величини Y при $X=2$;
 ж) перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними.
 8. Двовимірна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x, y) = \ln x \ln y$$

при $x \in [1, e]$, $y \in [1, e]$.

Знайти:

- а) щільність розподілу $f(x, y)$;
 б) умовні закони розподілу компонент;
 в) перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними;
 г) математичні сподівання та дисперсії обох компонент;
 д) ймовірність події $P(1 < X < \sqrt{e}; 1 < Y < e)$.

Варіанти 26-30

9. Двовимірна неперервна випадкова величина (X, Y) задана густиною розподілу:

$$f(x, y) = \begin{cases} a = \text{const}, & (x, y) \in Q; \\ 0, & (x, y) \notin Q, \end{cases}$$

де $Q = \{(x, y): -2 < x < 3, 2 < y < 4\}$

- а) підібрати коефіцієнт a ;
 б) умовні закони розподілу компонент;
 в) перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними,
 г) математичні сподівання та дисперсії обох компонент;
 л) ймовірність події $P(1 < X < 2; 2,5 < Y < 3)$.

10. Задано двовимірний закон розподілу дискретних випадкових величин:

Y	X			
	10	20	30	40
-8	0,01	0,03	0,02	0,04
-4	0,07	0,1	0,07	0,06
-2	0,1	0,2	0,1	0,2

Знайти:

- ряди розподілу для компонент X та Y ;
- математичні сподівання та дисперсії обох компонент;
- функцію розподілу $F(x,y)$;
- ймовірність події $P(X < 30; Y < -4)$;
- умовний закон розподілу випадкової величини X при $Y=1$;
- умовний закон розподілу випадкової величини Y при $X=2$;
- перевірити, чи є компоненти X та Y незалежними.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №14

Варіанти 1-5

- Нехай випадкові величини X і Y – відповідно сума та різниця очок, які випали при киданні двох гральних кубиків. Довести, що $r(X, Y) = 0$. Чи будуть X і Y незалежними?
- Двовимірний випадковий вектор має щільність розподілу $f(x, y) = \frac{4-x-y}{8}$ в області $D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2\}$ і $f(x, y) = 0$ по за областю. Знайти $M(X), M(Y), D(X), D(Y), \sigma(X), K(X, Y), r(X, Y)$.
- Двовимірний випадковий вектор задано функцією розподілу $F(x, y) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-1,5y})$ ($x > 0, y > 0$). Знайти $M(X), M(Y), D(X), D(Y), \sigma(X), K(X, Y), r(X, Y)$.
- Двовимірний випадковий вектор має щільність розподілу $f(x, y) = \frac{3}{8\pi} \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ в області $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$ і $f(x, y) = 0$ по за областю. Знайти $f_1(x), f_2(y), \varphi(x|y)$ та $\psi(y|x)$. Визначити залежність, чи незалежність випадкових величин $(X; Y)$, а також їх корельованість.

5. Задано двовимірний закон розподілу дискретних випадкових величин:

Y	X		
	3	8	10
-1	0,17	0,13	0,25
0	0,10	0,30	0,05

Знайти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$, $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

6. Із коробки, в якій є 3 червоних і три зелених олівця, послідовно витягують (без повернення) олівці до першої появи червоного олівця. Нехай X – випадкове число витянутих при цьому олівців. Потім олівці витягують до першої появи зеленого олівця. Нехай Y – випадкове число витянутих олівців другої серії. Скласти закон розподілу системи дискретних випадкових величин (X, Y) , записати закони розподілу X і Y . Знайти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$, $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

7. Ймовірність того, що при перевірці деталей виявиться стандартною, дорівнює 0,9. Перевірці підлягають 2 деталі. Побудувати закон системи двох дискретних випадкових величин X – появи числа бракованих деталей і Y – появи стандартних деталей. Обчислити $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

8. Задано $f(x, y) = x + y$, якщо $(x, y) \in D$; і $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$, де $D = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$. Знайти $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

9. Імовірність появи випадкової події в кожному з трьох незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,8. Розглядаються дві випадкові величини: X – число появи випадкової події в результаті цих експериментів; Y – число експериментів, при яких подія не наставала.

Обчислити: $M(X)$, $M(Y)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

10. Задано $f(x, y) = 1/64$, якщо $(x, y) \in D$, $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$, де $D = \{-6 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 5\}$.

Знайти $K(X, Y)$, $r(X, Y)$, $P(-4 < x < 1, -2 < y < 4)$.

Варіанти 6-10

11. Закон системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) заданий таблицею:

$Y \backslash X$	2	4	6	8
-6	0,1a	0,5a	0,4a	a
-4	0,9a	0,4a	0,5a	0,2a
-2	a	2,1a	1,1a	1,8a

Знайти параметр a , $r(X, Y)$.

12. Щільність ймовірностей системи випадкових величин задана виразом

$$f(x, y) = 1/2 \cdot \cos(x - y), \text{ якщо } (x, y) \in D,$$

$$f(x, y) = 0, \text{ якщо } (x, y) \notin D, \text{ де } D = \{0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}. \text{ Знайти } r(X, Y).$$

13. Щільність ймовірностей двох випадкових величин (X, Y) задано виразом

$$f(x, y) = ae^{-\frac{(x+3)^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

Знайти $a; M(X), M(Y), \sigma(X), \sigma(Y), r(X, Y)$.

14. Виготовлені на заводі циліндри сортуються за відхиленням їх внутрішніх діаметрів від номінального розміру на три групи зі значеннями 0,02; 0,03; 0,03 мм і за овальністю на три групи зі значеннями 0,002; 0,004; 0,006 мм. Спільний розподіл цих відхилень X – діаметра і Y – овальності циліндрів наведено в таблиці:

Y	X		
	0,02	0,03	0,04
0,002	0,01	0,02	0,04
0,004	0,03	0,24	0,15
0,006	0,04	0,39	0,08

Знайти $M(X), M(Y), \sigma(X), \sigma(Y), r(X, Y)$.

15. Чотири прилади випробовують на надійність. Імовірність того, що окремо взятий прилад витримає режим випробування, дорівнює 0,9. Нехай X – число приладів, які витримують випробування, а Y – число приладів, які не витримують їх. Побудувати закон спільного розподілу X і Y і знайти $K(X, Y), r(X, Y)$.

16. У трьох посудинах містяться однотипні вироби. У першій посудині міститься 6 стандартних і 4 браковані вироби; у другій – 8 стандартних і 2 браковані, а у третій – 9 стандартних і 1 бракований виріб. Із кожної посудини навмання беруть по одному виробу. Нехай X – поява числа стандартних виробів серед трьох навмання взятих, а Y – поява відповідного числа бракованих. Побудувати закон розподілу X і Y і обчислити $K(X, Y), r(X, Y)$.

17. Брак продукції заводу внаслідок дефекту A становить 2%, а внаслідок дефекту B – 3%. Стандартна продукція становить 95%. Знайти кореляційний момент і коефіцієнт кореляції між дефектами A і B .

18. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x, y) = (1 - e^{-4x})(1 - e^{-5y}), \quad x \geq 0, y \geq 0. \text{ Знайти } f(x, y), r(X, Y).$$

19. За заданою функцією розподілу ймовірностей системи (X, Y) маємо:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq -6, y \leq 2; \\ (x+6)/8, & -6 < x \leq 2, y > 4; \\ (x+6)(y+2)/48, & -6 < x \leq 2, -2 < y \leq 4; \\ (y+2)/6, & x > 2, -2 < y \leq 4; \\ 1, & x > 2, y > 4. \end{cases}$$

Знайти $K(X, Y), r(X, Y), P(-2 < x < 1, -1 < y < 3)$.

20. Дискретну двовірну випадкову величину (X, Y) задано законом розподілу:

$X \setminus Y$	-2	-1	0	2
1	0,03	0,07	0,25	0,08
2	0,025	0,2	0,1	0,15
4	0,02	0,01	0,03	0,035

Знайти: 1) закони розподілу випадкових величин X і Y ; 2) функцію розподілу $F(x, y)$; 3) функції розподілу $F_1(x)$ і $F_2(y)$; 4) $P(X < 1, Y < 3)$; 5) $r(X, Y)$.

Варіанти 11-15

21. Дискретну двовірну випадкову величину (X, Y) задано законом розподілу:

$X \setminus Y$	-2	-1	0	2
1	0,01	0,06	$5a$	0,11
2	0,07	a	0,09	0,14
4	0,03	0,13	0,02	0,04

Знайти: 1) параметр a ; 2) $M(X), M(Y)$; 3) $D(X), D(Y)$; 4) $r(X, Y)$; 5) $M(Y|X=0)$.

22. Двовірна випадкова величина (X, Y) має щільність розподілу:

$$f(x, y) = \frac{a}{(3 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Знайти: 1) параметр a ; 2) функцію розподілу $F(x, y)$; 3) імовірність потрапити в квадрат, обмежений прямими $x=0, y=0, x=1, y=1$.

23. Двовірна випадкова величина (X, Y) має щільність розподілу $f(x, y) = axu$ в області D і $f(x, y) = 0$ поза областю. Область D – трикутник, обмежений прямими $x+y=1, x=0, y=0$.

Знайти: 1) параметр a ; 2) $M(X), M(Y)$; 3) $D(X), D(Y)$; 4) $r(X, Y)$.

24. Систему двох дискретних випадкових величин задано таблицею:

$Y \backslash X$	-2	-1	0	x_4	3
21	0,04	a	0,03	0,04	0,1
y_2	0,05	0,12	0,02	0,12	0,01
35	a	0,03	0,05	0,14	0,01

Знайти: 1) параметр a ; 2) x_4 та y_2 , якщо $M(X) = 0,36$, а $M(Y) = 28,14$; 3) $r(X, Y)$.

25. Знайти $P(X < 1/2, Y < 1/3)$, якщо відома функція розподілу системи

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} \arctg 2x + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \arctg 3y + \frac{1}{2} \right).$$

26. Двовимірна випадкова величина задана функцією розподілу $F(x, y) = \sin \frac{x}{2} \sin y$

$\left(0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right)$. Знайти умовні щільності розподілу складових системи та

ймовірність того, що випадкова точка $(X; Y)$ потрапить в область $D = \{ \pi/3 \leq x \leq \pi/2; \pi/4 \leq y \leq \pi/2 \}$.

27. Систему двох дискретних випадкових величин задано таблицею:

$Y \backslash X$	-1	0	1
-3	0,13	0,07	0,18
0	0,06	0,08	0,11
1	0,04	0,02	0,03
2	0,05	0,12	0,02
4	0,01	0,03	0,05

Знайти: 1) функції розподілу $F_1(x)$ та $F_2(y)$; 2) $M(X)$ та $M(Y)$;

3) $P(-3 < X < 0,52; -2,1 < Y < 2,7)$; 4) $M(X|Y = 2)$, 5) коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$.

28. Систему двох дискретних випадкових величин задано таблицею

$Y \backslash X$	1,3	1,6	2,2	2,8
-1,5	0,03	$4a$	0,02	0,1
-0,6	0,06	0,09	0,02	0,01
0,8	a	0,15	0,05	0

Знайти: 1) параметр a ; 2) коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$.

29. Двовимірний випадковий величина має щільність розподілу $f(x, y) = C \sin(x + y)$ в області $D = \{0 \leq x \leq \pi/2; 0 \leq y \leq \pi/2\}$ і $f(x, y) = 0$ по за областю.

Знайти: 1) параметр C ; 2) функцію розподілу системи; 3) $M(X)$ та $M(Y)$.

30. Двовимірний випадковий величина має щільність розподілу $f(x, y) = cx + 3y$ в області $D = \{0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 0\}$ і $f(x, y) = 0$ по за областю.

Знайти: 1) параметр c ; 2) $f_1(x)$ та $f_2(y)$.

Варіанти 16-20

31. Двовимірний випадковий величина має щільність розподілу $f(x, y) = c(x + y)$ в області $D = \{x = 1; y = 2; x = 0; y = 0\}$ і $f(x, y) = 0$ по за областю.

Знайти: 1) параметр c ; 2) $M(X)$ та $M(Y)$.

32. Двовимірний випадковий величина має щільність розподілу $f(x, y) = cxy$ в області $D = \{2x + y = -1; y = 2; x \geq 0; y \geq 0\}$ і $f(x, y) = 0$ по за областю.

Знайти: 1) параметр c ; 2) $M(X)$ та $M(Y)$; 3) $D(X)$ та $D(Y)$; 4) $r(X, Y)$.

33. Система випадкових величин $(X; Y)$ розподілена зі сталою щільністю всередині області $D = \{3 \leq x \leq 7; 1 \leq y \leq 16\}$ і $f(x, y) = 0$ по за областю.

Знайти: 1) $f(x, y)$; 2) $F(x, y)$; 3) $f_1(x)$, $f_2(y)$.

34. Випадковий величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням рівним 0 та дисперсією $D = 1/2$. Випадковий величина Y розподілена рівномірно на інтервалі $(0; 3)$. Знайти щільність розподілу $f(x, y)$ та функцію розподілу $F(x, y)$ системи випадкових величин $(X; Y)$.

35. Випадковий двовимірний величина $(X; Y)$ має щільність розподілу

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{8}(2x^2 + y^2 + 12x - 4y + 22)}$$

. Знайти коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$.

36. Задано двовимірний закон розподілу дискретних випадкових величин:

Y	X		
	0	1	2
0	0,01	0,02	0,04
1	0,03	0,24	0,15
2	0,04	0,39	0,08

Знайти коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$.

37. Двовимірний випадковий величина задана функцією розподілу: $F(x, y) = \ln x \ln y$ при $x \in [1, e]$, $y \in [1, e]$. Знайти коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$.

38. Три прилади випробовують на надійність. Імовірність того, що окремо взятий прилад витримає режим випробування, дорівнює 0,8. Нехай X – число приладів, які витримують випробування, а Y – число приладів, які не витримують їх. Побудувати закон спільного розподілу X і Y і знайти $K(X, Y), r(X, Y)$.

39. У трьох посудинах містяться однотипні вироби. У першій посудині міститься 7 стандартних і 3 браковані вироби; у другій – 6 стандартних і 4 браковані, а у третій – 8 стандартних і 2 браковані вироби. Із кожної посудини навмання беруть по одному виробу. Нехай X – поява числа стандартних виробів серед трьох навмання взятих, а Y – поява відповідного числа бракованих. Побудувати закон розподілу X і Y і обчислити $K(X, Y), r(X, Y)$.

40. Задано $f(x, y) = \frac{1}{4}(x - 3y)$, якщо $(x, y) \in D$; і $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$, де $D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2\}$. Знайти $K(X, Y), r(X, Y)$.

Варіанти 20-25

41. Складові X та Y дискретної випадкової величини $Z = (X, Y)$, яка задана своїм законом розподілу (див. табл), характеризують якість виробленої продукції. Знайти $K(X, Y), r(X, Y)$.

$X \backslash Y$	-2	0	1	2
0	0,15	0,1	0,05	0
1	0	0,2	0,1	0,1
2	0,05	0	0,15	0,1

42. За законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини $Z = (X, Y)$

$X \backslash Y$	1	2	4	5
-1	0,1	0,15	0	0,05
1	0	0,25	0,15	0,1
3	0	0	0,15	0,05

43. Чотири прилади випробовують на надійність. Імовірність того, що окремо взятий прилад витримає режим випробування, дорівнює 0,8. Нехай X – число приладів, які витримують випробування, а Y – число приладів, які не витримують їх. Побудувати закон спільного розподілу X і Y і знайти $K(X, Y), r(X, Y)$.

44. У трьох посудинах містяться однотипні вироби. У першій посудині міститься 7 стандартних і 3 браковані вироби; у другій – 8 стандартних і 2 браковані, а у третій – 6 стандартних і 4 бракований виріб. Із кожної посудини навмання беруть по одному виробу. Нехай X – поява числа стандартних виробів серед трьох навмання взятих, а Y – поява відповідного числа бракованих. Побудувати закон розподілу X і Y і обчислити $K(X, Y), r(X, Y)$.

45. Брак продукції заводу внаслідок дефекту A становить 2%, а внаслідок дефекту B – 3%. Стандартна продукція становить 90%. Знайти кореляційний момент і коефіцієнт кореляції між дефектами A і B .

46. Неперервна двовимірна випадкова величина $Z = (X, Y)$ задана своєю щільністю розподілу

$$p(x, y) = \frac{C}{(1 + x^2)(4 + y^2)}.$$

Обчислити сталу C та знайти $K(X, Y), r(X, Y)$.

47. Із коробки, в якій є 4 червоних і 4 зелених олівців, послідовно витягують (без повернення) олівці до першої появи червоного олівця. Нехай X – випадкове число витянутих при цьому олівців. Потім олівці витягують до першої появи зеленого олівця. Нехай Y – випадкове число витянутих олівців другої серії. Скласти закон розподілу системи дискретних випадкових величин (X, Y) , записати закони розподілу X і Y . Знайти $M(X), M(Y), D(X), D(Y), \sigma(X), K(X, Y), r(X, Y)$.

48. Ймовірність того, що при перевірці деталей виявиться стандартною, дорівнює 0,95. Перевірці підлягають 3 деталі. Побудувати закон системи двох дискретних випадкових величин X – появи числа бракованих деталей і Y – появи стандартних деталей. Обчислити $K(X, Y), r(X, Y)$.

49. Задано $f(x, y) = \frac{1}{8}(x+y)$, якщо $(x, y) \in D$; і $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$, де $D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2\}$. Знайти $K(X, Y), r(X, Y)$.

50. П'ять приладів випробовують на надійність. Ймовірність того, що окремо взятий прилад витримає режим випробування, дорівнює 0,7. Нехай X – число приладів, які витримують випробування, а Y – число приладів, які не витримують їх. Побудувати закон спільного розподілу X і Y і знайти $K(X, Y), r(X, Y)$.

Варіанти 26-30

51. Нехай випадкові величини X і Y – відповідно сума та різниця очок, які випали при киданні двох гральних кубиків. Довести, що $r(X, Y) = 0$. Чи будуть X і Y незалежними?

52. . Задано $f(x, y) = \frac{1}{8}(4-x-y)$, якщо $(x, y) \in D$; і $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$, де $D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2\}$. Знайти $K(X, Y), r(X, Y)$. Знайти $M(X), M(Y), D(X), D(Y), \sigma(X), K(X, Y), r(X, Y)$.

53. Двовимірну випадкову величину задано функцією розподілу $F(x, y) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-1,5y})$ ($x > 0, y > 0$). Знайти $M(X), M(Y), D(X), D(Y), \sigma(X), K(X, Y), r(X, Y)$.

54. Двовимірна випадкова величина має щільність розподілу $f(x, y) = \frac{3}{8\pi} \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ в області $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$ і $f(x, y) = 0$ по за областю. Знайти $f_1(x)$, $f_2(y)$, $\varphi(x|y)$ та $\psi(y|x)$. Визначити залежність, чи незалежність випадкових величин $(X; Y)$, а також їх корельованість.
55. Задано двовимірний закон розподілу дискретних випадкових величин:

$X \backslash Y$	1	2	4	5
5	0,1	0,15	0,05	0,05
6	0	0,05	0,1	0,1
7	0	0,2	0,15	0,05

Знайти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$, $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

56. Із коробки, в якій є 3 червоних і три зелених олівця, послідовно витягують (без повернення) олівці до першої появи червоного олівця. Нехай X – випадкове число витянутих при цьому олівців. Потім олівці витягують до першої появи зеленого олівця. Нехай Y – випадкове число витянутих олівців другої серії. Скласти закон розподілу системи дискретних випадкових величин (X, Y) , записати закони розподілу X і Y . Знайти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$, $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

57. Ймовірність того, що при перевірці деталь виявиться стандартною, дорівнює 0,9. Перевірці підлягають 2 деталі. Побудувати закон системи двох дискретних випадкових величин X – появи числа бракованих деталей і Y – появи стандартних деталей. Обчислити $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

58. Задано $f(x, y) = 2(x + y) - 1$, якщо $(x, y) \in D$; і $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$, де $D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$. Знайти $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

59. Імовірність появи випадкової події в кожному з трьох незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,8. Розглядаються дві випадкові величини: X – число появи випадкової події в результаті цих експериментів; Y – число експериментів, при яких подія не наставала. Обчислити: $M(X)$, $M(Y)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

60. Задано $f(x, y) = 1/64$, якщо $(x, y) \in D$, $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$, де $D = \{-6 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 5\}$. Знайти $K(X, Y)$, $r(X, Y)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 15

ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Граничні теореми теорії ймовірностей умовно поділяють на дві групи. Перша група теорем, яку називають **законом великих чисел**, встановлює стійкість середніх значень, тобто при

великої кількості експериментів їх середній результат перестає бути випадковим і може бути передбаченим з достатньою точністю. Друга група теорем, яку називають **центральною граничною теоремою**, встановлює умови, при яких закон розподілу суми великого числа випадкових величин необмежено наближається до нормального.

1. Нерівність Чебишова.

Нехай випадкова величина X має скінченне математичне сподівання $M(X)$ і скінченну дисперсію $D(X)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність:

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (15.1)$$

Послідовність випадкових величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається **збіжною за ймовірністю** до числа γ , якщо для довільного $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - \gamma| < \varepsilon\} = 1 \quad (15.2)$$

Позначимо збіжність за ймовірністю так:

$$X_n \xrightarrow{p} \gamma, n \rightarrow \infty \quad (15.3)$$

2. Теорема Чебишова (закон великих чисел).

Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з скінченим математичним сподіванням $M(X_i) = a_i < \infty$ і дисперсіями обмеженими однією і тією ж сталою $D(X_i) \leq C$

$$\text{Тоді: } \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \xrightarrow{p} 0, n \rightarrow \infty \quad (15.4)$$

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ - послідовність попарно незалежних випадкових величин з однаковими математичними сподіванням $M(X_i) = a < \infty$ і дисперсіями обмеженими однією і тією ж сталою $D(X_i) \leq C$.

$$\text{Тоді: } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - a \xrightarrow{p} 0, n \rightarrow \infty \quad (15.5)$$

Це твердження дає змогу обґрунтувати правило середнього арифметичного, тобто при достатньо великій кількості випробувань середнє арифметичне спостерігаємих значень випадкової величини збігається, за ймовірністю, до її математичного сподівання.

3. Теорема Бернуллі.

Нехай m – число настання події A , при n послідовних незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність настання події A дорівнює p .

$$\text{Тоді: } \frac{m}{n} \xrightarrow{p} p, n \rightarrow \infty \quad (15.6)$$

Дана теорема теоретично обґрунтовує властивість стійкості відносної частоти (при необмеженому збільшенні числа випробувань частота випадкової події збігається, за ймовірністю, до ймовірності події, якщо ймовірність події від випробування до випробування не змінюється і дорівнює p).

4. Теорема Маркова.

Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ – послідовність випадкових величин з скінченним математичним сподіванням $M(X_i) = a_i < \infty$ для яких виконується умова:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(x_1 + x_2 + \dots x_n)}{n^2} = 0.$$

$$\text{Тоді: } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \xrightarrow{p} 0, n \rightarrow \infty \quad (15.7)$$

5. Теорема Ляпунова (центральна гранична теорема). Якщо для послідовності попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ можна знайти таке число $\sigma > 0$, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n M|X_k - M(X_k)|^{2+\sigma}}{\left(\sqrt{\sum_{k=1}^n D(X_k)}\right)^{2+\sigma}} = 0.$$

$$\text{То } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n M(X_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n D(X_k)}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (15.8)$$

Центральна гранична теорема пояснює поширення нормального закону розподілу, тобто, якщо випадкова величина формується під впливом багатьох незалежних факторів, кожен з яких здійснює на неї незначний вплив, то розподіл цієї величини близький до нормального.

Приклади задач.

1. Знайти ймовірність того, що частота появи шістки в 10000 незалежних підкиданнях грального кубика відхиляється від ймовірності появи шістки за абсолютною величиною менше ніж на 0,01.

Розв'язання.

За умовою $n=10000$, $p=1/6$, $q=5/6$.

З формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq 0,01\right) = P\left(\left|\frac{m}{10000} - \frac{1}{6}\right| < 0,01\right) \geq 1 - \frac{1/6 \cdot 5/6}{10000 \cdot 0,01^2} \approx 0,86.$$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ №15

Варіанти 1-5

1. Ймовірність виготовити стандартну деталь робітником дорівнює 0,95. Контролю підлягає 400 деталей. Оцінити ймовірність відхиленні відносної частоти появи стандартної деталі від ймовірності 0,95 не більше ніж на величину 0,02.

2. Скільки необхідно провести експериментів n , щоб ймовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події від ймовірності 0,85, взяте за абсолютною величиною, на 0,001, була б не меншою за 0,99.

3. Електростанція обслуговує мережу з 1600 електроламп, ймовірність включення кожної з яких у вечірню пору складає 0,9. Оцінити за допомогою нерівності Чебишова ймовірність того, що число ламп, включених до мережі ввечері, відмінна від свого математичного сподівання не більше, ніж на 100 (за абсолютною величиною).
4. Ймовірність того, що передані на депозит акції будуть мати попит, складає 0,08. Оцінити за допомогою нерівності Чебишова ймовірність того, що серед 1000 клієнтів від 70 до 90 осіб зажадають повернути свої акції.
5. Середнє значення довжини деталі 50 см, а дисперсія – 0,1. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що випадково обрана деталь за довжиною буде не менше 49,5 і не більше 50,5 см. Уточнити ймовірність тієї ж події, якщо відомо, що довжина випадково обраної деталі має нормальний закон розподілу.
6. Оцінити ймовірність того, що відхилення будь-якої випадкової величини від її математичного сподівання буде не більше двох середніх квадратичних відхилень (за абсолютною величиною).
7. Із плином часу t експлуатується 500 пристроїв. Кожен пристрій має надійність 0,98 і виходить з ладу незалежно від інших. Оцінити за допомогою нерівності Чебишова ймовірність того, що доля надійності пристроїв відмінна від 0,98 не більше ніж на 0,1 (за абсолютною величиною).
8. Ймовірність вчасної здачі всіх іспитів студентом факультету дорівнює 0,7. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що з 2000 студентів частка тих, які склали всі іспити, покладена в границях від 0,66 до 0,74.
9. Бензоколонка N обслуговує легкові і вантажні автомобілі. Легкове авто, що проїжджає повз, під'їде на автозаправку з ймовірністю 0,3. За допомогою нерівності Чебишова знайти границі, в яких, з ймовірністю не менше 0,79, знаходиться частка легкових автомобілів, що були заправлені за 2 год, якщо за цей час було обслуговано 100 автомобілів.
10. В середньому 10% працездатного населення певного регіону – безробітні. Оцінити за допомогою нерівності Чебишова ймовірність того, що рівень безробіття серед 10 000 опитаних працездатних жителів міста буде в межах від 9 до 11% включно.

Варіанти 6-10

11. Вихід курчат в інкубаторі складає в середньому 70% від числа закладених яєць. Скільки потрібно закласти яєць, щоб з ймовірністю не менше 0,95 очікувати, що відхилення числа вилуплених курчат від математичного сподівання не перевищувало 50 (за абсолютною величиною)? Розв'язати задачу за допомогою нерівності Чебишова.
12. Досвід роботи страхової компанії показує, що на кожен п'ятий договір випадає страховий випадок. Оцінити за допомогою нерівності Чебишева необхідну кількість договорів, котрі слід укласти, щоб з ймовірністю 0,9 можна було стверджувати, що частка страхових відхилиться від математичного сподівання не більше, ніж на 0,02 (за абсолютною величиною).
13. З метою контролю із партії в 100 ящиків взяли по одній деталі з кожного і виміряли їх довжину. Необхідно оцінити ймовірність того, що обчислена за даними вибірки середня довжина деталі відмінна від середньої довжини деталі всієї партії не більше, ніж на 0,3 мм, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення не перевищує 0,8 мм.

14. Скільки необхідно зробити обчислень, щоб з імовірністю, яка дорівнює 0,9973, стверджувати, що погрішність середньої арифметичної результатів цих обчислень не перевищить 0,01, якщо обчислення характеризується середнім квадратичним відхиленням, що дорівнює 0,03?

15. Імовірність настання події в кожному випробуванні дорівнює $1/4$. Використовуючи нерівність Чебишова оцінити ймовірність того, що число X настання події міститься в межах від 150 до 250, якщо буде проведено 800 випробувань.

16. Імовірність появи випадкової події в одному експерименті є величиною сталою і дорівнює 0,3. Із якою імовірністю можна стверджувати, що відносна частота цієї події при 100 експериментах буде знаходитись у межах $[0,2; 0,4]$.

17. Яке повинна мати значення величина ε у нерівності Чебишова, щоб $P(|X - a| < \varepsilon) \approx 0,99$, коли відомо, що $D(X)=4$.

18. Із якою надійністю середнє арифметичне вимірів певної величини відповідає істинному виміру цієї величини, якщо було здійснено 500 вимірювань із точністю 0,1 і при цьому дисперсії випадкових величин – результатів вимірювання – не перевищують 0,3.

19. Скільки необхідно провести вимірів діаметра втулки, щоб середнє арифметичне цих вимірів відрізнялося від істинного розміру діаметра втулки не більше як 0,05 із надійністю 90%, якщо дисперсії випадкових величин (результатів вимірів) не перевищують 0,2.

20. Здійснюється вибіркве обстеження партії електроламп для визначення тривалості їх горіння. Скільки необхідно перевірити електролампочок, щоб із імовірністю не меншою за 0,9876 можна було стверджувати, що середня тривалість горіння лампочки для всіх n штук перевірених відхилилось від її середньої величини не більше ніж на 10 годин, якщо середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампочок дорівнює 80 годин.

Варіанти 11-15

21. Випадкова величина X – середнє арифметичне 10000 незалежних випадкових величин, що мають один і той самий закон розподілу, і середнє квадратичне відхилення кожної із них дорівнює 2. Яке максимальне відхилення величини X від його математичного сподівання можна очікувати із імовірністю 0,9544?

22. Верстат із програмним управлінням виготовляє за робочу зміну 900 виробів, із яких в середньому 1% складає брак. Знайти наближено ймовірність того, що за зміну буде виготовлено не менше 810 доброякісних виробів, якщо вони виявляються доброякісними незалежно один від одного.

23. Середнє споживання електроенергії протягом травня у місті дорівнює 360 000 кВт. год.
а) Оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії у травні поточного року перевищить 1 000 000 кВт. год. б) Оцінити ту саму ймовірність за умови, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 40 000 кВт. год.

24. Імовірність настання події A в кожному випробуванні $p = 1/3$. Яку найменшу кількість випробувань потрібно виконати, щоб з імовірністю не менш як 0,99 можна було стверджувати, що частість настання події A відхилилась за абсолютною величиною від її ймовірності не більш ніж на 0,01? Для розв'язування скористатися нерівністю Чебишова.

25. При анонімному тестуванні виявилось, що 10% працівників підприємства зовсім не вживають спиртного. Випадкова величина X – кількість людей, які зовсім не вживають спиртного у випадковій вибірці з 900 робітників. Визначити межі, у які потрапляє випадкова величина X з ймовірністю 0,9.

26. Відомо, що $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0,9$ і $D(X)=0,001$. Скориставшись нерівністю Чебишова, знайти ε .

27. Дисперсія кожної із 2500 незалежних випадкових величин не перевищує 5. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середнього арифметичного їхніх математичних сподівань не перевищує 0,4.

28. Відомо, що цех виготовляє 80 % продукції вищого гатунку. Оцінити ймовірність того, що відносна частота виробів вищого гатунку серед 20000 виготовлених відрізнятиметься від ймовірності виготовлення виробу вищого гатунку не більше ніж на 0,02.

29. Відомо, що дисперсія кожної із незалежних випадкових величин не перевищує чотирьох. Знайти число відповідних величин, при якому ймовірність відхилення середньої арифметичної випадкової величини від середньої арифметичної їх математичних сподівань не більше ніж на 0,25 перевищить 0,99.

30. Скільки необхідно провести незалежних вимірів будь-якої величини, щоб з ймовірністю не менше ніж 0,98, можна було б стверджувати, що середнє арифметичне результатів вимірів відрізнялося від істинного значення за абсолютною величиною менше ніж на 0,01. Якщо дисперсія окремого результату виміру не перевищує 1.

Варіанти 16-20

31. Відомо, що $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0,87$ і $D(X)=0,002$. Скориставшись нерівністю Чебишова, знайти ε .

32. Відомо, що цех виготовляє 75 % продукції вищого гатунку. Оцінити ймовірність того, що відносна частота виробів вищого гатунку серед 3000 виготовлених відрізнятиметься від ймовірності виготовлення виробу вищого гатунку не більше ніж на 0,03.

33. Скільки необхідно зробити обчислень, щоб з ймовірністю, яка дорівнює 0,988, стверджувати, що погіршеність середньої арифметичної результатів цих обчислень не перевищить 0,005, якщо обчислення характеризується середнім квадратичним відхиленням, що дорівнює 0,04?

34. Ймовірність настання події в кожному випробуванні дорівнює 1/5. Використовуючи нерівність Чебишова оцінити ймовірність того, що число X настання події міститься в межах від 100 до 200, якщо буде проведено 400 випробувань.

35. При відливанні відливок, із яких потім виготовляють на верстатах деталі, одержують у середньому 20% браку. Скільки необхідно запланувати відливок, щоб із ймовірністю не меншою за 0,95 була забезпечена програма випуску деталей, для виготовлення яких необхідно 50 бездефектних відливок.

36. Вихід курчат в інкубаторі складає в середньому 80% від числа закладених яєць. Скільки потрібно закласти яєць, щоб з ймовірністю не менше 0,95 очікувати, що відхилення числа вилуплених курчат від математичного сподівання не перевищувало 40 (за абсолютною величиною)? Розв'язати задачу за допомогою нерівності Чебишова.

37. Досвід роботи страхової компанії показує, що на кожен четвертий договір випадає страховий випадок. Оцінити за допомогою нерівності Чебишева необхідну кількість договорів, котрі слід укласти, щоб з ймовірністю 0,95 можна було стверджувати, що частка страхових випадків відхилиться від математичного сподівання не більше, ніж на 0,01 (за абсолютною величиною).

38. З метою контролю із партії в 150 ящиків взяли по одній деталі з кожного і виміряли їх довжину. Необхідно оцінити ймовірність того, що обчислена за даними вибірки середня довжина деталі відмінна від середньої довжини деталі всієї партії не більше, ніж на 0,3 мм, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення не перевищує 0,9 мм.

39. Скільки необхідно зробити обчислень, щоб з імовірністю, яка дорівнює 0,997, стверджувати, що погрішність середньої арифметичної результатів цих обчислень не перевищить 0,01, якщо обчислення характеризується середнім квадратичним відхиленням, що дорівнює 0,05?

40. Імовірність настання події в кожному випробуванні дорівнює $1/4$. Використовуючи нерівність Чебишова оцінити ймовірність того, що число X настання події міститься в межах від 200 до 300, якщо буде проведено 1000 випробувань.

Варіанти 21-25

41. У освітлювальну мережу паралельно підключено 20 ламп. Ймовірність того, що за час T лампа буде включена, рівна 0,8. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом включених ламп і середнім числом (математичним сподіванням) включених ламп за час T виявиться: а) менше трьох; б) не менше трьох.

42. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні рівна $1/4$. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що число X появ події A міститься в межах від 40 до 60, якщо буде проведено 200 незалежних випробувань.

43. Ймовірність появи події в кожному випробуванні рівна $1/4$. Використовуючи інтегральну теорему Муавра-Лапласа, оцінити ймовірність того, що число X появ події міститься в межах від 150 до 250, якщо буде проведено 800 випробувань.

44. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X 0,4 0,8

p 0,2 0,8

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,1$.

45. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X 0,1 0,3 0,5

p 0,2 0,3 0,5

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,04$.

46. Скільки необхідно провести незалежних вимірів будь-якої величини, щоб з імовірністю не менше ніж 0,95, можна було б стверджувати, що середнє арифметичне результатів вимірів відрізнялося від істинного значення за абсолютною величиною менше ніж на 0,015. Якщо дисперсія окремого результату виміру не перевищує 1.

47. Яке повинна мати значення величина ε у нерівності Чебишова, щоб $P(|X - a| < \varepsilon) \approx 0,99$, коли відомо, що $D(X) = 5$.

48. Із якою надійністю середнє арифметичне вимірів певної величини відповідає істинному виміру цієї величини, якщо було здійснено 600 вимірювань із точністю 0,1 і при цьому дисперсії випадкових величин – результатів вимірювання – не перевищують 0,4.

49. Скільки необхідно провести вимірів діаметра втулки, щоб середнє арифметичне цих вимірів відрізнялося від істинного розміру діаметра втулки не більше як 0,04 із надійністю 95%, якщо дисперсії випадкових величин (результатів вимірів) не перевищують 0,2.

50. Здійснюється вибіркове обстеження партії електроламп для визначення тривалості їх горіння. Скільки необхідно перевірити електролампочок, щоб із імовірністю не меншою за 0,98 можна було стверджувати, що середня тривалість горіння лампочки для всіх n штук перевірених відхилялось від її середньої величини не більше ніж на 10 годин, якщо середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампочок дорівнює 80 годин.

Варіанти 26-30

51. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання менш ніж на три середніх квадратичних відхилення.

52. Використовуючи нерівність Чебишева у формі $P(|X-M(X)| \geq \varepsilon) \leq D(X)/\varepsilon^2$, оцінити ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання не менше ніж на два середніх квадратичних відхилення.

53. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X-M(X)| < 0,2$, якщо $D(X)=0,004$.

54. Дано: $P(|X-M(X)| < \varepsilon) \geq 0,9$ і $D(X)=0,009$. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ε знизу.

55. Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента за час T рівна 0,05. За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили, і середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час T виявиться: а) менше двох; б) не менше двох.

56. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні рівна $1/2$. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що число X появ події A міститься в межах від 40 до 60, якщо буде проведено 100 незалежних випробувань.

57. Ймовірність появи події в кожному випробуванні рівна $3/4$. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити кількість експериментів, які необхідно провести, щоб з ймовірністю 0,99 випадкова величина відхилялася від математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,004.

58. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

$$\begin{array}{c} X \ 0,3 \ 0,6 \\ p \ 0,2 \ 0,8 \end{array}$$

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X-M(X)| < 0,2$.

59. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

$$\begin{array}{c} X \ 0,1 \ 0,4 \ 0,6 \\ p \ 0,2 \ 0,3 \ 0,5 \end{array}$$

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X-M(X)| < 0,1$.

60. Скільки необхідно провести незалежних вимірів будь-якої величини, щоб з ймовірністю не менше ніж 0,92, можна було б стверджувати, що середнє арифметичне результатів вимірів відрізнялося від істинного значення за абсолютною величиною менше ніж на 0,015. Якщо дисперсія окремого результату виміру не перевищує 1.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №16

МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2

Зразок завдань до модульної контрольної

1. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

X	x_1	0,2	x_3	0,5
P	0,5	0,3	0,1	p_4

Знайдіть x_1, x_3 і p_4 , якщо $x_1 < x_3$ і відомі математичне сподівання $M(X)=0,2$ і дисперсія $D(X)=0,018$.

2. Студент складає іспит з теорії ймовірностей. Викладач задає йому питання до першої неправильної відповіді, але має право задати не більше 5 питань. Ймовірність правильно відповісти на поставлене питання є сталою і дорівнює 0,6. Скласти ряд розподілу величини X – кількості поставлених питань. Обчислити основні числові характеристики даної випадкової величини.

3. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3 \\ A\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{x}{3}\right), & -3 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Знайдіть: а) параметр A ; б) функцію розподілу $F(x)$; в) $M(X), D(X), \sigma(X)$; г) ймовірність того, що X прийме можливе значення з інтервалу $(0; 1,5)$.

4. Система дискретних випадкових величин $(X; Y)$ має закон розподілу:

Y	1	3	5	7
X				
0	0,01	0,11	0,02	0,17
4	0,21	0,05	0,20	0,07
6	0,02	0,09	0,02	0,03

Знайдіть коефіцієнт кореляції r_{xy} системи.

5. Здійснюється вибіркве обстеження партії електроламп для визначення тривалості їх горіння. Скільки необхідно перевірити електролампочок, щоб із імовірністю не меншою за 0,98 можна було стверджувати, що середня тривалість горіння лампочки для всіх n штук перевірених відхилялось від її середньої величини не більше ніж на 10 годин, якщо середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампочок дорівнює 80 годин.

6. За заданою функцією розподілу ймовірностей системи (X, Y) маємо:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq -6, y \leq 2; \\ (x+6)/8, & -6 < x \leq 2, y > 4; \\ (x+6)(y+2)/48, & -6 < x \leq 2, -2 < y \leq 4; \\ (y+2)/6, & x > 2, -2 < y \leq 4; \\ 1, & x > 2, y > 4. \end{cases}$$

Знайти $K(X, Y)$, $r(X, Y)$, $P(-2 < x < 1, -1 < y < 3)$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Випробування, події,
2. Класичне означення ймовірності,
3. Частість настання подій.
4. Геометричне означення ймовірності,
5. Операції над подіями,
6. Класифікація подій,
7. Умовні ймовірності,
8. Теореми додавання та множення ймовірностей,
9. Формула повної ймовірності,
10. Формула Байєса,
11. Формула Бернуллі,
12. Найбільш ймовірне число,
13. Формула Пуассона,
14. Локальна теорема Муавра-Лаласа,
15. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа,
16. Випадкова величина. Класифікація.
17. Засоби представлення випадкової величини. Дискретна і неперервна випадкова величини,
18. Функція розподілу випадкової величини,
19. Функція щільності випадкової величини,
20. Мода, медіана випадкової величини,
21. Математичне сподівання, дисперсія,
22. Початкові моменти,
23. Центральні моменти,
24. Коефіцієнт асиметрії, ексцес,
25. Твірна функція,
26. Біноміальний розподіл,
27. Геометричний розподіл,
28. Пуассонівський розподіл,
29. Гіпергеометричний розподіл,
30. Рівномірний розподіл,
31. Експоненційний розподіл,
32. Нормальний розподіл,
33. Логнормальний розподіл,
34. Розподіл "Хі квадрат",
35. Розподіл Стюдента,
36. Розподіл Фішера-Снедекора,
37. Функція від випадкової величини,
38. Композиція двох випадкових величин,
39. Система двох випадкових величин,
40. Умови незалежності компонент системи двох випадкових величин,
41. Умовні закони розподілу системи двох випадкових величин,
42. Кореляційний момент (коваріація),
43. Коефіцієнт кореляції,

- 44. Нерівність Маркова,
- 45. Нерівність Чебишева,
- 46. Теорема Чебишева,
- 47. Теорема Ляпунова,
- 48. Наслідки із інтегральної теореми Муавра-Лапласа.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Таблиця значень функції Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2. Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,52	0,1985	1,04	0,3508	1,56	0,4406	2,16	0,4846
0,01	0,0040	0,53	0,2019	1,05	0,3531	1,57	0,4418	2,18	0,4854
0,02	0,0080	0,54	0,2054	1,06	0,3554	1,58	0,4429	2,20	0,4861
0,03	0,0120	0,55	0,2088	1,07	0,3577	1,59	0,4441	2,22	0,4868
0,04	0,0160	0,56	0,2123	1,08	0,3599	1,60	0,4452	2,24	0,4875
0,05	0,0199	0,57	0,2157	1,09	0,3621	1,61	0,4463	2,26	0,4881
0,06	0,0239	0,58	0,2190	1,10	0,3643	1,62	0,4474	2,28	0,4887
0,07	0,0279	0,59	0,2224	1,11	0,3665	1,63	0,4484	2,30	0,4893
0,08	0,0319	0,60	0,2257	1,12	0,3686	1,64	0,4495	2,32	0,4898
0,09	0,0359	0,61	0,2291	1,13	0,3708	1,65	0,4505	2,34	0,4904
0,10	0,0398	0,62	0,2324	1,14	0,3729	1,66	0,4515	2,36	0,4909
0,11	0,0438	0,63	0,2357	1,15	0,3749	1,67	0,4525	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,64	0,2389	1,16	0,3770	1,68	0,4535	2,40	0,4918
0,13	0,0517	0,65	0,2422	1,17	0,3790	1,69	0,4545	2,42	0,4922
0,14	0,0557	0,66	0,2454	1,18	0,3810	1,70	0,4554	2,44	0,4927
0,15	0,0596	0,67	0,2486	1,19	0,3830	1,71	0,4564	2,46	0,4931
0,16	0,0636	0,68	0,2517	1,20	0,3849	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,17	0,0675	0,69	0,2549	1,21	0,3869	1,73	0,4582	2,50	0,4938
0,18	0,0714	0,70	0,2580	1,22	0,3883	1,74	0,4591	2,52	0,4941
0,19	0,0753	0,71	0,2611	1,23	0,3907	1,75	0,4599	2,54	0,4945
0,20	0,0793	0,72	0,2642	1,24	0,3925	1,76	0,4608	2,56	0,4948
0,21	0,0832	0,73	0,2673	1,25	0,3944	1,77	0,4616	2,58	0,4951
0,22	0,0871	0,74	0,2703	1,26	0,3962	1,78	0,4625	2,60	0,4953
0,23	0,0910	0,75	0,2734	1,27	0,3980	1,79	0,4633	2,62	0,4956
0,24	0,0948	0,76	0,2764	1,28	0,3997	1,80	0,4641	2,64	0,4959
0,25	0,0987	0,77	0,2794	1,29	0,4015	1,81	0,4649	2,66	0,4961
0,26	0,1026	0,78	0,2823	1,30	0,4032	1,82	0,4656	2,68	0,4963
0,27	0,1064	0,79	0,2852	1,31	0,4049	1,83	0,4664	2,70	0,4965
0,28	0,1103	0,80	0,2881	1,32	0,4066	1,84	0,4671	2,72	0,4967
0,29	0,1141	0,81	0,2910	1,33	0,4082	1,85	0,4678	2,74	0,4969
0,30	0,1179	0,82	0,2939	1,34	0,4099	1,86	0,4686	2,76	0,4971
0,31	0,1217	0,83	0,2967	1,35	0,4115	1,87	0,4693	2,78	0,4973
0,32	0,1255	0,84	0,2965	1,36	0,4131	1,88	0,4699	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,85	0,3023	1,37	0,4147	1,89	0,4706	2,82	0,4976
0,34	0,1331	0,86	0,3051	1,38	0,4162	1,90	0,4713	2,84	0,4977
0,35	0,1368	0,87	0,3078	1,39	0,4177	1,91	0,4719	2,86	0,4979
0,36	0,1406	0,88	0,3106	1,40	0,4192	1,92	0,4726	2,88	0,4980
0,37	0,1443	0,89	0,3133	1,41	0,4207	1,93	0,4732	2,90	0,4981
0,38	0,1480	0,90	0,3159	1,42	0,4222	1,94	0,4738	2,92	0,4982
0,39	0,1517	0,91	0,3186	1,43	0,4236	1,95	0,4744	2,94	0,4984
0,40	0,1554	0,92	0,3212	1,44	0,4251	1,96	0,4750	2,96	0,4985
0,41	0,1591	0,93	0,3238	1,45	0,4265	1,97	0,4756	2,98	0,4986
0,42	0,1628	0,94	0,3264	1,46	0,4279	1,98	0,4761	3,00	0,4986
0,43	0,1664	0,95	0,3289	1,47	0,4292	1,99	0,4767	3,20	0,4993
0,44	0,1700	0,96	0,3315	1,48	0,4306	2,00	0,4772	3,40	0,4996
0,45	0,1736	0,97	0,3340	1,49	0,4319	2,02	0,4783	3,60	0,4998
0,46	0,1772	0,98	0,3365	1,50	0,4332	2,04	0,4793	3,80	0,4999
0,47	0,1808	0,99	0,3389	1,51	0,4345	2,06	0,4803	4,00	0,4999
0,48	0,1844	1,00	0,3413	1,52	0,4357	2,08	0,4812	4,50	0,4999
0,49	0,1879	1,01	0,3438	1,53	0,4370	2,10	0,4821	5,00	0,4999
0,50	0,1915	1,02	0,3461	1,54	0,4382	2,12	0,4830		
0,51	0,1950	1,03	0,3185	1,55	0,4994	2,14	0,4838		

$$p(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Додаток 3. Таблиця значень функції Пуассона

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
2	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913
3	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661
4	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343	0,049398

k	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
5	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115
6		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000695	0,001227	0,002001
7			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035	0,000081	0,000164	0,000300
8					0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039
								0,000002	0,000004

k	λ								
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,367879	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,183940	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,061313	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,015328	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,003066	0,036089	0,100819	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,000511	0,012030	0,050409	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,000073	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,000009	0,000859	0,008101	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,000001	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124007	0,131756
10		0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11		0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12		0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13			0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14			0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15			0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16				0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17				0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18					0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19					0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20						0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21						0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22							0,000003	0,000022	0,000108
23							0,000001	0,000008	0,000042
24								0,000003	0,000016
25								0,000001	0,000006
26									0,000002
27									0,000001

ЛІТЕРАТУРА

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Барковський В.В. та ін. Математика для економістів. Теорій ймовірностей та математична статистика. – К.:Національна академія управління, 1999.
2. Вентцель Е. С., Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерное приложение. – М.:Наука, 1988.
4. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика, Киев, Вища школа, 1979.
- 5 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.:Высшая школа, 2001.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб.пособ. – 12-е изд. - М.: Высш. образование., 2007. – 479 с.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.:Наука,1988.
- 8.Дороговцев А. Я, Сільвестров Д. С., Скорохол А. В., Ядренко М. Й. Теорія ймовірностей (збірник задач), Київ, Вища школа, 1977.
9. Денисюк В.П., Бобков В.М., Погребецька Т.А., Репета В.К. Вища математика. Ч4. Теорій ймовірностей і математична статистика: К: вид-во «НАУ-друк», 2009. – 256 с.
10. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей та математична статистика Ч.1. Теорія ймовірностей. – К.:КНЕУ, 2000.
11. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей та математична статистика Ч.2. Математична статистика – К.:КНЕУ, 2000.
12. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика: Посібник. – К: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008.
13. Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей, Киев, Высшая школа, 1990
- Колемаев В.А., Староверова О.В., Турундуевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991.
14. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. 3 издание – М. Юнити дата, 2010, 551 с.
15. Листопад В.В., Островська О.В. Практикум з теорії ймовірностей із застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій [Електронний ресурс]:навчальний посібник – К.: НУХТ, 2016. – 103 с.
16. Медведєв, М.Г. Теорія ймовірностей та математична статистика : підруч. / М.Г. Медведєв, І.О. Пащенко – К.: «Ліра-К».
17. Павлов О.А., Гавриленко О.В., Рибачук Л.В Навчальний посібник з дисципліни «Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика». Курс лекцій. Частина 1 для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» [Електронний ресурс]:навчальний посібник. – Київ: КІП, 2021. – 154 с.

18. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука, 1985. – 320с.
19. Свешников А.А. Сборник задач по теории вероятностей. Математической статистике и теории случайных функций . – М.: Наука, 1968. – 632 с.
20. Смирнов Н.В., Дунин – Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1965. – 512с.
21. Теорія ймовірностей. Збірник задач. Під ред. Скорохода А.В. – К.:Вища школа, 1975.
22. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 1, М., Мир, 1984
- Худсон Д. Статистика для физиков. – М.: Мир, 1967. – 242с.
23. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. –К.:Вища школа, 1994.

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

1. Moodle <https://do.ipk.kpi.ua/course/view.php?id=5461>
2. «Електронний Кампус КПП» <https://ecampus.kpi.ua>
3. Google classroom:
<https://classroom.google.com/u/0/c/MTY0MzQ1Nzg0MjM4/a/MTkwOTQ5MTY3MDUw/submissions/by-status/and-sort-last-name/returned>