УДК 519. 21

О.А. Тимошенко

ТОЧНИЙ ПОРЯДОК ЗРОСТАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗНАКОЗМІННИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ЗСУВУ

Вступ

У працях Й.І. Гіхмана і А.В. Скорохода [1], Г. Келлера та ін. [2], а також у [3–6] досліджувався точний порядок зростання розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь та було знайдено умови, за яких цей порядок визначається невипадковою функцією, яка є розв'язком відповідного звичайного диференціального рівняння. У статті [7] розглядалась подібна задача для стохастичного диференціального рівняння з коефіцієнтом зсуву та дифузії, які залежать від часу, а саме $g(t,x) = \varphi(t)g(x)$, $\sigma(t,x) = \theta(t)\sigma(x)$. Припускалось, що g, φ та σ — неперервні додатні функції; θ — неперервна функція.

Постановка задачі

Наша мета полягає в узагальненні результатів статті [7] на той випадок, коли функція φ є знакозмінною.

Дослідження стохастичних рівнянь із знакозмінним коефіцієнтом зсуву

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = g(\eta(t))\varphi(t)\,dt + \sigma(\eta(t))\theta(t)\,dw(t),\quad t \ge 0, \tag{1}$$

$$\eta(0) \equiv b,\ b > 0,$$

де w — стандартний вінерів процес; b — невипадкова додатна стала; θ і φ — неперервні функції; g і σ — неперервні додатні функції, такі, що (1) має неперервний розв'язок η. Будемо шукати умови, за яких рівняння (1) має розв'язок:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ майже напевно (м.н.)}$$

$$\text{на множині } \{\lim_{t\to\infty}\xi(t) = \infty\},$$

де μ — розв'язок звичайного диференціального рівняння, яке відповідає стохастичному диференціальному рівнянню (1) при $\sigma = 0$, тобто

$$d\mu(t) = g(\mu(t))\varphi(t)\,dt,\ t \ge 0,\qquad \mu(0) = b,\ b > 0. \tag{2}$$

Позначимо

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)\,du,\ t \ge 0,\ \text{і}\ \Phi_+(t) = \int_0^t |\varphi(u)|\,du,\ t \ge 0,$$

та припустимо, що

$$\Phi(t) > 0,\ t > 0,\ \text{і}\ \lim_{t\to\infty}\Phi(t) = \infty, \tag{3}$$

а також

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\Phi_+(t)}{\Phi(t)} < \infty. \tag{4}$$

Зауважимо, що для додатних φ умова (4) виконується. Прикладом знакозмінної функції φ, для якої виконуються умови (3) і (4), є функція

$$\varphi(t) = a + \cos t,\ t \ge 0,\ a \in \left(\frac{2}{3\pi};1\right).$$

Покладемо

$$G(x) = \int_b^x \frac{ds}{g(s)},\ x \ge b.$$

Тоді отримаємо

$$G(\mu(t)) = \Phi(t),\ t \ge 0,$$

і розв'язок рівняння (2) матиме вигляд

$$\mu(t) = G^{-1}(\Phi(t)),\ t \ge 0, \tag{5}$$

де G^{-1} — функція, обернена до функції G.

Основні результати

Розглянемо основні твердження даної статті про асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь виду (1). Має місце таке твердження.

Теорема 1. Нехай θ і φ — неперервні функції, g і σ — неперервні додатні функції, такі, що (1) має неперервний розв’язок η. Нехай виконуються умови (3), (4) і, крім того:

а) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)\,ds}{\Phi_+^2(2^k)} < \infty$;

б) функція $\frac{\sigma}{g}$ є обмеженою;

в) існує похідна $g'(t)$, $t > 0$, і

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left|\int_0^t g'(\eta(s))\,\theta^2(s)\,ds\right|}{\Phi_+(t)} = 0 \text{ м.н. на множині}$$

$$\{\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\}. \qquad (6)$$

Тоді матимемо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1 \text{ м.н. на множині } \{\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\}.$$

Зауваження **1.** При перевірці умови (6) доцільно використовувати такі умови, які не містять обмежень на розв’язок η:

$$g'(x) \to 0,\ x \to \infty, \text{ і } \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\int_0^t \theta^2(s)\,ds}{\Phi_+(t)} < \infty,$$

або

$$\sup_x |g'(x)| < \infty \text{ і } \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \theta^2(s)\,ds}{\Phi_+(t)} = 0.$$

У наступній теоремі знайдено умови, за яких точним порядком зростання розв’язку стохастичного диференціального рівняння (1) є розв’язок звичайного диференціального рівняння (2).

Теорема 2. Нехай виконуються всі умови теореми 1, а також:

г) $\lim_{t\to\infty} G(t) = \infty$;

д) $\underline{\lim_{t\to\infty}} \int_t^{ct} \frac{du}{g(u)G(u)} > 0$ для всіх $c > 1$.

Тоді матимемо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м.н. на множині } \{\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\},$$

де η — розв’язок рівняння (1) і μ — розв’язок рівняння (2) (див.(5)).

Зауваження **2.** Якщо $\varphi(t) = \theta(t) = 1$, $t \ge 0$, з теорем 1 і 2 випливають відповідні результати праць [1—6].

Якщо функція φ набуває лише додатних значень, то умови теореми 2 зміняться таким чином (див. [7]).

Твердження 1. Нехай θ — неперервна функція, g, φ і σ — неперервні додатні функції, такі, що (1) має неперервний розв’язок η. Нехай виконуються умови (3) і, крім того:

а) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)\,ds}{\Phi^2(2^k)} < \infty$;

б) функція $\frac{\sigma}{g}$ є обмеженою;

в) існує похідна $g'(t)$, $t > 0$, і

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g'(\eta(t))\theta^2(t)}{\varphi(t)} = 0 \text{ м.н. на множині}$$

$$\{\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\}; \qquad (7)$$

г) $\lim_{t\to\infty} G(t) = \infty$;

д) $\underline{\lim_{t\to\infty}} \int_t^{ct} \frac{du}{g(u)G(u)} > 0$ для всіх $c > 1$.

Тоді матимемо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м.н. на множині } \{\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty\}.$$

Оскільки умова (7) залежить від розв’язку стохастичного диференціального рівняння, то доцільно використовувати такі співвідношення:

$$g'(x) \to 0, x \to \infty, \text{ та } \sup_t \frac{\theta^2(t)}{\varphi(t)} < \infty$$

або

$$\sup_x |g'(x)| < \infty \text{ і } \lim_{t\to\infty} \frac{\theta^2(t)}{\varphi(t)} = 0.$$

Нагадаємо умови, за яких виконується умова д) теореми 2 (див. [3]).

Твердження 2. Нехай g — додатна неперервна функція, така, що виконується умова г) теореми 2 і, крім того:
або

1) $\limsup_{x\to\infty} \frac{g(x)G(x)}{x} < \infty$;

або

2) g не зростає при великих x;

або

3) існує таке $\alpha < 1$, що $0 < \inf_{x\geq 1} g(x)x^{-\alpha}$, $\sup_{x\geq 1} g(x)x^{-\alpha} < \infty$;

або

4) $g^*(c) < c$ для всіх $c > 1$, де $g^*(c) = \lim_{x\to\infty} \sup \frac{g(cx)}{g(x)}$;

або

5) g є функцією правильної зміни з індексом $\alpha < 1$ (див. [8]).

Тоді виконується умова д) теореми 2.

Допоміжні твердження

Для доведення основних результатів необхідні деякі допоміжні твердження.

У першому з них будемо розглядати стохастичне диференціальне рівняння, яке на відміну від (1) має новий доданок у правій частині:

$$d\zeta(t) = (\tilde{g}(\zeta(t))\varphi(t) + \tilde{g}_1(\zeta(t))\theta^2(t))dt + \tilde{\sigma}(\zeta(t))\theta(t)dw(t),\ t \geq 0, \quad (8)$$

$$\zeta(0) \equiv b,\ b > 0,$$

де w — стандартний вінерів процес; b — невипадкова додатна стала; ζ — розв'язок рівняння (8); $\tilde{g}_1$, φ і θ — неперервні функції; $\tilde{g}$ і $\tilde{\sigma}$ — неперервні додатні функції, такі, що (8) має неперервний розв'язок ζ і виконуються умови (3) і (4).

Має місце така лема.

Лема 1. Нехай ζ є розв'язком рівняння (8) і нехай виконуються такі умови:

А) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi_+^2(2^k)} < \infty$;

Б) $\lim_{x\to\infty} \tilde{g}(x) = K$;

В) функція $\tilde{\sigma}$ є обмеженою;

Г) $\lim_{t\to\infty} \frac{\left|\int_0^t \tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s)ds\right|}{\Phi_+(t)} = 0$ м.н. на множині $\{\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = \infty\}$.

Тоді матимемо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\zeta(t)}{\Phi(t)} = K \text{ м.н. на множині } \{\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = \infty\}.$$

Доведення. Оскільки

$$\zeta(t) = \zeta(0) + \int_0^t \tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s)ds + \int_0^t \tilde{g}_1(\zeta(s))\theta^2(s)ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s),$$

то, врахувавши умови (4) та Г), для доведення леми покажемо, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Phi(t)} \int_0^t \tilde{g}(\zeta(s))\varphi(s)ds = K \text{ м.н. на множині } \{\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = \infty\} \quad (9)$$

і

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Phi_+(t)} \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) = 0 \text{ м.н.} \quad (10)$$

Доведемо рівність (9). За умови Б) леми для будь-яких $\omega \in \{\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = \infty\}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $s_\varepsilon = s_\varepsilon(\omega) > 0$, що $|\tilde{g}(\zeta(s)) - K| < \varepsilon$ при $s \geq s_\varepsilon$. Тому для будь-якого $t > s_\varepsilon$ маємо

$$\frac{\left|\int_{s_\varepsilon}^t (\tilde{g}(\zeta(s)) - K)\varphi(s)ds\right|}{\Phi(t)} < \frac{\varepsilon \int_{s_\varepsilon}^t |\varphi(s)|ds}{\Phi(t)}$$

і, зважаючи на умову (3), отримуємо

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\left|\int_0^t (\tilde{g}(\zeta(s)) - K)\varphi(s)ds\right|}{\Phi(t)} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\left|\int_{s_\varepsilon}^t (\tilde{g}(\zeta(s)) - K)\varphi(s)ds\right|}{\Phi(t)} < \varepsilon \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\int_{s_\varepsilon}^t |\varphi(s)|ds}{\Phi(t)} < \infty.$$

Звідси та з (4) і довільності $\varepsilon > 0$ випливає (9).

Доведемо (10). Для цього при фіксованому $k \geq 0$ та довільному $\varepsilon > 0$ розглянемо події

$$B_k = \left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\},$$

$$C_k = \left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi_+(2^k)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\}.$$

Функція Φ_+ монотонно зростає, тому $B_k \subset C_k$. Звідси та за теоремою 1, §3 [1] має місце оцінка

$$P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi_+(2^k)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \frac{4}{\Phi_+^2(2^k)\varepsilon^2} \int_{2^k}^{2^{k+1}} E|\tilde{\sigma}(\zeta(s))|^2 \theta^2(s)ds \le$$

$$\le \frac{4M^2 \left(\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds \right)}{\Phi_+^2(2^k)\varepsilon^2},$$

де $M = \sup_x \tilde{\sigma}(x) < \infty$.

Отже, маємо

$$P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \frac{4M^2 \left(\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds \right)}{\Phi_+^2(2^k)\varepsilon^2}. \tag{11}$$

Тепер для довільних $\varepsilon > 0$ і $m \ge 1$ розглянемо подію

$$\tilde{B}_m = \left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\},$$

і подамо її у вигляді

$$\tilde{B}_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} B_k .$$

Тоді за формулою (11) матимемо

$$P\left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \sum_{k=m}^{\infty} P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le \Xi_m,$$

де

$$\Xi_m = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi_+^2(2^k)}, \quad m \ge 1.$$

Зауважимо, що за умовою А) леми $\Xi_m \to 0$ при $m \to \infty$. Отже, маємо

$$P\left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le \frac{4\Xi_m M^2}{\varepsilon^2}. \tag{12}$$

Якщо $\varepsilon \to \infty$, то для будь-яких $m \ge 1$ матимемо

$$\frac{4\Xi_m M^2}{\varepsilon^2} \to 0 .$$

Звідси випливає, що для будь-яких $m \ge 1$

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} P\left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} = 0,$$

тобто

$$P\left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s) \right| < \infty \right\} = 1.$$

Тому за співвідношенням (12) та умовою А) леми маємо

$$P\left\{ \lim_{m \to \infty} \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} =$$

$$= \lim_{m \to \infty} P\left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \lim_{m \to \infty} \frac{4\Xi_m M^2}{\varepsilon^2} = 0$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$. Отже, отримуємо

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{\Phi_+(t)} \left| \int_0^t \tilde{\sigma}(\zeta(s))\,\theta(s)dw(s) \right| = 0 \text{ м.н.}$$

і формулу (10) доведено.

Із співвідношень (9), (10) і (3) випливає

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\zeta(t)}{\Phi(t)}=K \text{ м.н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\zeta(t)=\infty\}.$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. Нехай θ і φ — неперервні функції, g і σ — неперервні додатні функції, такі, що (1) має єдиний та майже напевно неперервний розв'язок η. Нехай виконуються умови (3), (4) і, крім того, мають місце умови:

а) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\int_{2^k}^{2^{k+1}}\theta^2(s)ds}{\Phi_+^2(2^k)}<\infty$;

б) існує зростаюча двічі неперервно диференційована функція f, для якої $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)g(x)=C>0$ і $f'\sigma$ є обмеженою функцією;

в) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\left|\int_0^t f''(\eta(s))\sigma^2(\eta(s))\theta^2(s)ds\right|}{\Phi_+(t)}=0$ м.н. на множині $\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}$;

Тоді матимемо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(\eta(t))}{\Phi(t)}=C \text{ м.н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}.$$

Доведення. Нехай f^{-1} є обернена до f функція. Покладемо $\zeta(t)=f(\eta(t))$. Тоді маємо $\eta(t)=f^{-1}(\zeta(t))$. Із $\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty$ випливає, що $\lim_{t\to\infty}\zeta(t)=\infty$.

Застосовуючи формулу Іто, отримаємо

$$d\zeta(t)=\left[f'_x(\eta(t))g(\eta(t))\varphi(t)+\frac{1}{2}f''_{xx}(\eta(t))\times\right.$$
$$\left.\times\sigma^2(\eta(t))\theta^2(t)\right]dt+f'_x(\eta(t))\sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t)=$$
$$=\left[f'_x(f^{-1}(\zeta(t))g(f^{-1}(\zeta(t)))\varphi(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}f''_{xx}(f^{-1}(\zeta(t)))\sigma^2(f^{-1}(\zeta(t))\theta^2(t)\right]dt+$$
$$+f'_x(f^{-1}(\zeta(t))\sigma(f^{-1}(\zeta(t)))\theta(t)dw(t).$$

Таким чином, процес ζ буде розв'язком рівняння

$$d\zeta(t)=(\tilde g(\zeta(t))\varphi(t)+\tilde g_1(\zeta(t))\theta^2(t))dt+$$
$$+\tilde\sigma(\zeta(t))\theta(t)dw(t),$$

де

$$\tilde g(x)=f'_x(f^{-1}(x))g(f^{-1}(x));$$

$$\tilde g_1(x)=\frac{1}{2}f''_{xx}(f^{-1}(x))\sigma^2(f^{-1}(x));$$

$$\tilde\sigma(x)=f'_x(f^{-1}(x))\sigma(f^{-1}(x)).$$

Зауважимо, що це рівняння має вигляд (8).

Оскільки за умовою б) $\lim_{x\to\infty}f'(x)g(x)==C>0$, то $\lim_{x\to\infty}\tilde g(x)=C>0$, і оскільки виконується умова в), то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\left|\int_0^t\tilde g_1(\zeta(s))\theta^2(s)ds\right|}{\Phi_+(t)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\left|\int_0^t f''_{xx}(\eta(s))\sigma^2(\eta(s))\theta^2(s)ds\right|}{\Phi_+(t)}=0 \text{ м.н.}$$

на множині $\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}$.

За умовою б) леми функція $f'\sigma$ є обмеженою, тому $\tilde\sigma$ також обмежена функція. Отже, виконуються всі умови леми 1 і тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\zeta(t)}{\Phi(t)}=C \text{ м.н.}$$

Оскільки $\zeta(t)=f(\eta(t))$, то з останнього співвідношення випливає доведення леми. Отже, маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(\eta(t))}{\Phi(t)}=C \text{ м.н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}.$$

Лему 2 доведено.

Доведення основних результатів

Тепер перейдемо до доведення теореми 1.

Доведення теореми 1. Нехай $f'=\frac{1}{g}$. Тоді маємо

$$C=\lim_{x\to\infty}f'(x)g(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)\frac{1}{g(x)}=1.$$

Оскільки за умовою б) теореми 1 функція $\frac{\sigma}{g}$ є обмеженою та

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\left|\int_0^t g'(\eta(s))\theta^2(s)ds\right|}{\Phi_+(t)}=0 \text{ м.н. на множині}$$

$$\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\},$$

то отримаємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\left|\int_0^t f''_{xx}(\eta(s))\sigma^2(\eta(s))\theta^2(s)ds\right|}{\Phi_+(t)}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left|\int_0^t \frac{\sigma^2(\eta(s))}{g^2(\eta(s))}g'(\eta(s))\theta^2(s)ds\right|}{\Phi_+(t)}\le$$

$$\le\lim_{t\to\infty}\frac{L\left|\int_0^t g'(\eta(s))\theta^2(s)ds\right|}{\Phi_+(t)}=0 \text{ м.н. на множині}$$

$$\{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\},$$

де $L=\sup_x\frac{\sigma^2(x)}{g^2(x)}<\infty$.

За умовою б) теореми 1 функція $\frac{\sigma}{g}$ є обмеженою, тому функція $f'\sigma$ також обмежена. Отже, виконуються всі умови леми 2 і тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)}=1 \text{ м.н. на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}.$$

Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. З умов г), д) теореми 2 і леми 4.3 з [3], де треба покласти $f=G$ і $f'=\frac{1}{g}$, випливає

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{G(ct)}{G(t)}>1 \text{ для будь-якого } c>1.$$

Отже, згідно з теоремою 3.2 [3] функція G^{-1} зберігає еквівалентність функцій, тому маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{G^{-1}(G(\eta(t)))}{G^{-1}(\Phi(t))}=\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\mu(t)}=1 \text{ м.н.}$$

$$\text{на множині } \{\lim_{t\to\infty}\eta(t)=\infty\}.$$

Теорему 2 доведено.

Висновки

Результати статті узагальнюють результати праць [3—7].

За одержаних нами умов розв'язок μ звичайного диференціального рівняння (2) є точним порядком зростання розв'язку η стохастичного диференціального рівняння (1). Ці умови дають можливість розглядати більш загальні форми залежності коефіцієнтів зсуву та дифузії від часу.

Е.А. Тимошенко

ТОЧНЫЙ ПОРЯДОК РОСТА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СДВИГА

Исследуется асимптотическое поведение решений стохастических дифференциальных уравнений с коэффициентом сдвига и диффузии, которые зависят от времени – $d\eta(t)=g(\eta(t))\varphi(t)dt+$ $+\sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t)$, $\eta(0)\equiv b$, где g и σ – положительные непрерывные функции; θ и φ – непрерывные функции. Найдены условия на функции g,φ,σ,θ, при которых точный порядок роста решения η совпадает с решением μ дифференциального уравнения $d\mu(t)=g(\mu(t))\varphi(t)dt$, $\mu(0)\equiv b$.

O.A. Tymoshenko

THE EXACT ORDER OF GROWTH OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION SOLUTIONS WITH TIME DEPENDENT COEFFICIENT OF DRIFT

We consider the behavior of solutions of stochastic differential equations with time dependent coefficient of drift and diffusion – $d\eta(t)=g(\eta(t))\varphi(t)dt+$ $+\sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t)$, $\eta(0)\equiv b$, where g and σ are positive continuous functions and θ and φ are continuous functions. In addition, we determine the conditions on g,φ,σ,θ functions, under which the exact order of increase η agrees with μ solution of the differential equation $d\mu(t)=g(\mu(t))\varphi(t)dt$, $\mu(0)\equiv b$.

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с.
2. *Keller G., Kersting G., Rosler U.* On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations // Z. Wahrsch. Geb. – 1984. – **68**. – P. 163–184.
3. *Булдигін В.В., Клесов О.I., Штайнебах Й.Г.* PRV властивість функцій та асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2004. – № 72. – С. 63–78.
4. *Булдигін В.В., Клесов О.I., Штайнебах Й.Г.* Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. I // Там же. – № 70. – С. 9–25.
5. *Булдигін В.В., Клесов О.I., Штайнебах Й.Г.* Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування. II // Там же. – № 71. – С. 63–78.
6. *Buldygin V.V., Klesov O.I., Steinebach J.G. and Tymoshenko O.A.* On the φ-asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations // Theory of stochastic processes. – 2008. – N 1. – P. 11–30.
7. *Булдигін В.В., Тимошенко О.А.* Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6. – С. 27–32.
8. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
24 червня 2009 року