УДК 517.9

П.О. Касьянов

НЕМОНОТОННИЙ МЕТОД ШТРАФУ ДЛЯ КЛАСУ МУЛЬТИВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ВІДОБРАЖЕННЯМИ ПСЕВДОМОНОТОННОГО ТИПУ

Вступ

При дослідженні нелінійних математичних моделей геофізичних процесів, пов'язаних з односторонньою провідністю границь речовин, в задачах теорії оптимального керування природно виникають такі математичні об'єкти, як варіаційні і, зокрема, мультиваріаційні нерівності в нескінченновимірних просторах [1, 2]. Одним із найпотужніших інструментів для вивчення таких об'єктів є монотонний метод штрафу [3], систематично розроблений для мультиваріаційних нерівностей з λ-псевдомонотонними відображеннями в працях [4–7]. Ідея методу полягає в переході від досліджуваного об'єкта до деякого класу добре вивчених операторних включень, розв'язки яких задовольняють певні властивості, а потім – в переході до границі по малому параметру $\varepsilon \searrow 0$. Монотонність оператора штрафу принципово звужує як клас апроксимаційних задач, так і набір апріорних оцінок для розв'язків вихідної задачі [4].

Постановка задачі

Мета даної статті полягає в розробці немонотонного багатозначного методу штрафу для мультиваріаційних нерівностей у нескінченновимірних просторах з λ_0-псевдомонотонними відображеннями. Ідея цього методу належить В.С. Мельнику.

Класи багатозначних відображень псевдомонотонного типу

Нехай X – рефлексивний банахів простір над полем дійсних чисел, X^* – топологічно спряжений до нього, $\langle\cdot,\cdot\rangle_X : X^*\times X \to R$ – канонічне спарювання, (V,W) – інтерполяційна пара рефлексивних банахових просторів (див. [4, с. 225]). Припустимо, що $X = V\cap W$. Тоді $X^* = V^* + W^*$ і $\langle f,u\rangle_X = \langle f_1,u\rangle_V + \langle f_2,u\rangle_W$, $f = f_1 + f_2$, , $f_1\in V^*$, $f_2 \in W^*$, $u\in X$. Для строгого багатозначного відображення $A : V \to 2^{V^*}$, опуклого напівнеперервного знизу функціонала $\varphi : X \to R$ і непорожньої замкненої в просторі X опуклої множини K, мультиваріаційною нерівністю будемо називати такий об'єкт:

$$[A(y),\xi - y]_+ + \varphi(\xi) - \varphi(y) \ge \langle f,\xi - y\rangle_X \quad \forall\xi\in K, \quad (1)$$

де $f\in X^*$; $[A(y),\xi]_+ = \sup\limits_{d\in A(y)}\langle d,\xi\rangle_X$ – верхня опорна функція множини $A(y)$, y, $\xi\in X$.

Нехай $A : X \to 2^{X^*}$ – строге багатозначне відображення [4, с. 61]. Пов'яжемо з A його верхню $[A(y),\xi]_+ = \sup\limits_{d\in A(y)}\langle d,\xi\rangle_X$ і нижню $[A(y),\xi]_- = \inf\limits_{d\in A(y)}\langle d,\xi\rangle_X$ опорні функції, де $y,\xi\in X$. Нехай також $\|A(y)\|_+ = \sup\limits_{d\in A(y)}\|d\|_{X^*}$, $\|A(y)\|_- = \inf\limits_{d\in A(y)}\|d\|_{X^*}$. Будемо також пов'язувати з A відображення $\mathrm{co}A : X \to 2^{X^*}$ та $\overline{\mathrm{co}}A : X \to 2^{X^*}$, які визначені за правилами $(\mathrm{co}A)(y) = \mathrm{co}(A(y))$ і $(\overline{\mathrm{co}}A(y)) = \overline{\mathrm{co}}(A(y))$, відповідно. Тут через $\overline{\mathrm{co}}(A(y))$ позначено слабке замикання в просторі X^* опуклої оболонки множини $A(y)$. Властивості введених відображень детально вивчені в [4, с. 60–65] і [5].

***Означення* 1**. Строге багатозначне відображення $A : X \to 2^{X^*}$ називається обмеженим, якщо для довільного $L > 0$ існує $l > 0$, таке, що $\|A(y)\|_+ \le l$ як тільки $y\in X$ і $\|y\|_X \le L$.

***Означення* 2**. Строге багатозначне відображення $A : X \to 2^{X^*}$ називається хемінеперервним зверху (хн.зв.), якщо $\forall\xi\in X$ відображення $y \to [A(y),\xi]_+$ є напівнеперервним зверху.

Нехай дійсна функція двох змінних $C : R_+\times R_+ \to R$ належить класу Φ_0 (див. [4, с. 67]), тобто $C(r_1;\cdot) : R_+ \to R$ – неперервна функція при довільному фіксованому $r_1 \ge 0$, причому $\forall r_1, r_2 \ge 0$ $\tau^{-1}C(r_1;\tau r_2) \to 0$ при $\tau \to +0$. Нехай також $\|\cdot\|'_X$ – деяка напівнорма на X, компактна відносно $\|\cdot\|_X$ на X [4, с. 67].

***Означення* 3**. Строге багатозначне відображення $A : X \to 2^{X^*}$ називається оператором з напівобмеженою варіацією X (з н.о.в.), якщо $\forall R \geq 0,\ \ \forall y_1, y_2 \in X:\ \|y_1\|_X \leq R,\ \ \|y_2\|_X \leq R$ виконується нерівність

$$[A(y_1), y_1 - y_2]_- \geq$$
$$\geq [A(y_2), y_1 - y_2]_+ - C(R; \|y_1 - y_2\|'_X).$$

***Означення* 4**. Строге багатозначне відображення $A : X \to 2^{X^*}$ називається λ_0-псевдомонотонним на X, якщо для довільної послідовності $\{y_n\}_{n\geq 0} \subset X$, такої, що $y_n \to y_0$ слабко в X, $d_n \to d_0$ слабко в X^* при $n \to +\infty$, де $d_n \in \in \overline{\text{co}} A(y_n)$ $\forall n \geq 1$, з нерівності $\varlimsup_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X \leq \leq 0$ випливає існування таких підпослідовностей $\{y_{n_k}\}_{k\geq 1}$ з $\{y_n\}_{n\geq 1}$ і $\{d_{n_k}\}_{k\geq 1}$ з $\{d_n\}_{n\geq 1}$, для яких виконується нерівність

$$\varliminf_{k\to\infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w \rangle_X \geq [A(y_0), y_0 - w]_- \quad \forall w \in X.$$

Нехай $\varphi : X \to R$ – опуклий напівнеперервний знизу функціонал.

***Означення* 5**. Субдиференціалом функціонала $\varphi : X \to R$ в точці $y \in X$ називається така непорожня опукла слабкокомпактна в X^* множина [4, с. 98]:

$$\partial\varphi(y) = \{p \in X^* | \langle p, \omega - y \rangle_X \leq \varphi(\omega) - \varphi(y)\ \forall \omega \in X\}.$$

Немонотонний багатозначний метод штрафу

Розв'язки задачі (1) будемо наближати розв'язками таких задач:

$$\overline{\text{co}} A(y) + \partial\varphi(y) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(y) \ni f. \tag{2}$$

Тут $\varepsilon > 0$; $\beta : X \to 2^{W^*}$ – строгий, обмежений, хн.зв. багатозначний оператор штрафу з н.о.в., який відповідає множині K, тобто $K = = \{y \in V \cap W \,|\, \overline{\text{co}}\beta(y) \ni 0\}$. Такий оператор існує завжди (див. [4, с. 434, 435]).

Зауважимо, що внаслідок твердження 3.3.1 з [4] задача (2) еквівалентна такій:

$$[A(y), \xi - y]_+ + \frac{1}{\varepsilon}[\beta(y), \xi - y]_+ + \varphi(\xi) - \varphi(y) \geq$$
$$\geq \langle f, \xi - y \rangle_X \quad \forall\, \xi \in X. \tag{3}$$

Основний результат

Теорема. Нехай K – непорожня замкнена в просторі X опукла множина, $\beta : X \to 2^{W^*}$ – строгий обмежений хн.зв. багатозначний оператор штрафу з н.о.в., який відповідає множині K, $A : V \to 2^{V^*}$ – строге обмежене λ_0-псевдомонотонне відображення, $\varphi : X \to R$ – опуклий напівнеперервний знизу функціонал.

Припустимо, що існують $\varepsilon_0 > 0$, $y_0 \in K$, такі, що

$$\|y\|_X^{-1} \{[A(y), y - y_0]_+ + \frac{1}{\varepsilon_0}[\beta(y), y - y_0]_+\} \to +\infty \tag{4}$$

при $\|y\|_X \to \infty$. Тоді $\forall\, \varepsilon \leq \varepsilon_0$ нерівність (3) розв'язна і з послідовності її розв'язків $\{y_\varepsilon\}$ можна виділити таку підпослідовність $\{y_\tau\}$, що $y_\tau \to y$ слабко в X, $y \in K$ та задовольняє нерівність (1).

Д о в е д е н н я. Для $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ розглянемо операторне включення (2), еквівалентне варіаційній нерівності (3). Покладемо $Z_\varepsilon(y) = \overline{\text{co}} A(y) + + B_\varepsilon(y)$, де $B_\varepsilon(y) = \partial\varphi(y) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(y)$. Для кожного $\varepsilon > 0$ відображення $B_\varepsilon : X \to 2^{W^*}$ є обмеженим хн.зв. оператором з н.о.в. (див. [4, теорема 1.2.6, зауваження 1.2.3 і 1.2.4]). Таким чином, відображення $Z_\varepsilon : X \to 2^{X^*}$ обмежене і λ_0-псевдомонотонне (див. [4, твердження 1.2.26, лема 1.2.11, зауваження 1.2.4]).

Нехай $y_0 \in K$ – елемент з умови (4). Розглянемо відображення $Z_{\varepsilon,0}(y) = Z_\varepsilon(y + y_0)$, яке, очевидно, обмежене і λ_0-псевдомонотонне. Більше того, для довільного $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ одержимо

$$[Z_{\varepsilon,\, y_0}(y), y]_+ = [Z_\varepsilon(y + y_0), y]_+ = [Z_\varepsilon(z), z - y_0]_+ =$$
$$= [A(z), z - y_0]_+ + \frac{1}{\varepsilon}[\beta(z), z - y_0]_+ + [\partial\varphi(z), z - y_0]_+ \geq$$
$$\geq [A(z), z - y_0]_+ + \frac{1}{\varepsilon_0}[\beta(z), z - y_0]_+ +$$

$$+[\partial\varphi(y_0), z-y_0]_- \ge [A(z), z-y_0]_+ +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_0}[\beta(z), z-y_0]_+ - \|\partial\varphi(y_0)\|_- \|z-y_0\|_X,$$

де $z = y + y_0$. Звідси та з умови коерцитивності (4) маємо

$$\|y\|_X^{-1}[Z_{\varepsilon,y_0}(y), y]_+ \to +\infty$$

при $\|y\|_X \to \infty$. Аналогічно зауваженню 3.3.1 з [4] одержуємо

$$[Z_{\varepsilon,y_0}(y) - f, y]_+ \ge 0 \quad \forall y \in \partial B_{r_0},$$

де r_0 не залежить від $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Оскільки відображення $Z_{\varepsilon,y_0} : X \to 2^{X^*}$ задовольняє усі вимоги теореми 2.2.1 з [4], то для кожного $\varepsilon \le \varepsilon_0$ включення

$$Z_\varepsilon(y) \ni f \qquad (5)$$

має розв'язок у кулі $\bar{B}_{r_0}$, тобто $\|y_\varepsilon\|_X \le r_0$.

Нехай y_ε – розв'язок включення (2) при $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $y_\varepsilon \to y$ слабко в X. Відображення $Z = \overline{\mathrm{co}}A + \partial\varphi : X \to 2^{X^*}$ обмежене, λ_0-псевдомонотонне і $\overline{\mathrm{co}}Z = Z$. Зокрема, існує $c > 0$, таке, що $\|Z(y_\varepsilon)\|_+ \le c \quad \forall \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Покажемо, що $y \in K$. Зауважимо, що $\forall v \in X$ і $\varepsilon \le \varepsilon_0$

$$|[\beta(y_\varepsilon), y_\varepsilon]_+| \le (c + \|f\|_{X^*}) r_0 \varepsilon \to 0,$$

$$|[\beta(y_\varepsilon), v]_+| \le (c + \|f\|_{X^*}) \|v\|_X \varepsilon \to 0$$

при $\varepsilon \searrow 0$. Покладемо $R = r_0 + 1$. Оскільки для довільних $v \in X$ $(\|v\|_X \le R)$

$$[\beta(y_\varepsilon), y_\varepsilon - v]_- \ge [\beta(v), y_\varepsilon - v]_+ - C(R; \|y_\varepsilon - v\|'_X),$$

то

$$[\beta(v), y - v]_+ \le C(R; \|y - v\|'_X).$$

Зафіксуємо довільне $w \in X$. Покладемо $v = y - tw$, $0 < t < (\|w\|_X + 1)^{-1}$. Тоді матимемо

$$[\beta(y - tw), w]_+ \le \frac{1}{t} C(R; t\|w\|'_X)$$

і внаслідок хн.зв. β

$$[\beta(y), w]_- \le 0 \quad \forall w \in X.$$

Згідно з твердженням 1.2.1 з [4] остання нерівність еквівалентна включенню $\overline{\mathrm{co}}\beta(y) \ni 0$. Отже, $y \in K$.

Доведемо нерівність

$$\langle f, y - w\rangle_X \ge [Z(y), y - w]_- \quad \forall w \in K,$$

яка внаслідок співвідношення $\varphi(\xi) - \varphi(y) \ge [\partial\varphi(y), \xi - y]_+$ еквівалентна нерівності (1).

Розглянемо $d_\varepsilon \in \overline{\mathrm{co}}Z(y_\varepsilon)$, $b_\varepsilon \in \beta(y_\varepsilon)$, такі, що $d_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b_\varepsilon = f$. Зафіксуємо довільне $\xi \in K$. Покладемо $R = \max\{r_0, \|\xi\|_X\}$. Тоді $\forall w \in K$ і $\|w\|_X \le R$ матимемо

$$\langle d_\varepsilon, w - y_\varepsilon\rangle_V \ge \frac{1}{\varepsilon}[\beta(w) - b_\varepsilon, w - y_\varepsilon]_- + \langle f, w - y_\varepsilon\rangle_X \ge$$

$$\ge \langle f, w - y_\varepsilon\rangle_X - C(R; \|w - y_\varepsilon\|'_X),$$

причому у зв'язку з обмеженістю відображення $Z : X \to 2^{X^*}$ можемо вважати, що $d_\varepsilon \xrightarrow{w} d$ в X^*. З попередньої нерівності випливає, що $\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \langle d_\varepsilon, y_\varepsilon - y\rangle_V \le 0$. Оскільки оператор $Z : X \to 2^{X^*}$ – λ_0-псевдомонотонний, то, переходячи при необхідності до підпослідовності, маємо

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \langle d_\varepsilon, y_\varepsilon - w\rangle_V \ge [Z(y), y - w]_-.$$

Звідси і з нерівності

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \langle d_\varepsilon, y_\varepsilon - w\rangle_V \le \langle f, y - w\rangle_X + C(R; \|w - y\|'_X)$$

одержуємо співвідношення

$$\langle f, y - w\rangle_X \ge [Z(y), y - w]_- - C(R; \|w - y\|'_X).$$

Покладемо $w = y + t(\xi - y)$, $0 < t < 1$. Тоді, поділивши попереднє співвідношення на t і спрямувавши t до нуля, отримаємо нерівність

$$\langle f, y - \xi\rangle_X \ge [Z(y), y - \xi]_- \quad \forall \xi \in K,$$

яка еквівалентна нерівності (1).

Теорема доведена.

Висновки

За допомогою немонотонного багатозначного методу штрафу можна довести розв’язність для класу мультиваріаційних нерівностей у нескінченновимірних просторах з λ_0-псевдомонотонними відображеннями. Враховуючи перспективи одержаних результатів, можна обґрунтовувати конструктивну розв’язність для широкого класу односторонніх граничних задач за допомогою принципово ширшого класу операторних включень із диференціальними операторами псевдомонотонного типу.

П.О. Касьянов

НЕМОНОТОННЫЙ МЕТОД ШТРАФА ДЛЯ КЛАССА МУЛЬТИВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОТОБРАЖЕНИЯМИ ПСЕВДОМОНОТОННОГО ТИПА

Рассматривается класс мультивариационных неравенств в бесконечномерных пространствах с λ_0-псевдомонотонными отображениями. С помощью немонотонного многозначного метода штрафа доказана разрешимость для широкого класса задач. Получены априорные оценки решений.

P.O. Kasyanov

NONMONOTONE PENALTY METHOD FOR A CLASS OF MULTIVARIATION INEQUALITIES WITH PSEUDOMONOTONE TYPE MAPS

We consider the class of multivariation inequalities in the infinitedimensional spaces with λ_0-pseudomonotone maps. Using the nonmonotone multivalued penalty method, we prove the existence of the solution for a wide range of problems. Furthermore, the apriory estimates for solutions are obtained.

1. *Згуровский М.З., Новиков А.Н.* Анализ и управление односторонними физическими процессами. – К.: Наук. думка, 1996. – 328 с.
2. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К.: Наук. думка, 2004. – 590 с.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
4. *Згуровский М.З., Касьянов П.О., Мельник В.С.* Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. – К.: Наук. думка, 2008. – 464 с.
5. *Касьянов П.О., Мельник В.С.* О разрешимости дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств, порожденных отображениями w_{λ_0}-псевдомонотонного типа // Укр. мат. вісник. – 2007. – **4**, № 4. – С. 535–581.
6. *Мельник В.С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса $(S)_+$ // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1513–1523.
7. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями. I // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 4. – С. 57–69.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
“Інститут прикладного системного
аналізу” НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
1 грудня 2008 року