МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 121 «Інженерія програмного забезпечення»,
123 «Комп’ютерна інженерія»,
спеціалізацією «Програмне забезпечення інформаційних управляючих систем
та технологій», *«Комп'ютерні системи та мережі»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Фізичні основи механіки: методичні рекомендації до розв'язування задач для студентів заочної форми навчання [http://ela.kpi.ua]: навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення», 123 «Комп'ютерна інженерія», спеціалізації «Програмне забезпечення інформаційних управляючих систем та технологій», «Комп'ютерні системи та мережі» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.С. Климук, Н.О. Якуніна, О.Г. Данилевич. – Електронні текстові дані (1 файл: 0,497 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 46 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 2 від 01.10.2020 р.)
за поданням Вченої ради факультету (протокол № 3 від 31.08.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

Укладачі: *Климук Олена Сергіївна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Якуніна Наталія Олександрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Данилевич Олександр Геннадійович, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Лінчевський І. В.*, д. фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: *Джежеря Ю. І.*, д. фіз.-мат. наук, проф.

Методичні рекомендації для розв'язування задач призначені для надання методичної допомоги студентам заочної форми навчання у вивченні дисципліни «Фізика» і виконанні індивідуальних практичних завдань з розділу «Фізичні основи механіки», що включає в себе підрозділи «Кінематика поступального та обертального руху», «Динаміка поступального та обертального руху», а також «Робота та енергія. Закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії» і «Релятивістська механіка». Цей навчальний посібник представляє один з розділів програми навчання, який складений у відповідності до вимог кредитно-модульної системи.

Посібник буде корисним також студентам технічних напрямів підготовки, а також викладачам вищих навчальних закладів. Користуючись даним посібником, викладач в залежності від часу, що відводиться на вивчення курсу для різних спеціальностей та специфіки їх, має змогу варіювати об'єм та зміст індивідуальних занять.

ЗМІСТ

ПРОГРАМА КУРСУ

Фізичні основи механіки

Елементи кінематики матеріальної точки. Система відліку, радіус-вектор, траєкторія, шлях, вектор переміщення. Швидкість і прискорення точки як похідні радіуса-вектора за часом. Нормальне і тангенціальне прискорення.

Динаміка матеріальної точки і поступального руху твердого тіла. Закон інерції та інерціальні системи відліку. Маса. Сила. Другий і третій закони Ньютона. Механічні сили (сила тяжіння і вага, сили пружності і тертя). Закон збереження імпульсу. Центр мас.

Робота й енергія. Робота сили, потужність. Кінетична і потенціальна енергії. Зв'язок кінетичної енергії з роботою сил, прикладених до системи. Консервативні сили. Зв'язок між консервативною силою і потенціальною енергією. Закон збереження механічної енергії. Застосування законів збереження до удару абсолютно пружних та абсолютно непружних тіл.

Механіка твердого тіла. Кінематика обертального руху. Кутова швидкість і кутове прискорення. Зв'язок кутових і лінійних швидкостей і прискорень. Момент інерції. Кінетична енергія обертання. Момент сили. Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі. Момент імпульсу і закон його збереження. Кінетична енергія тіла при плоскому русі.

Елементи спеціальної теорії відносності. Перетворення Галілея. Постулати Ейнштейна. Перетворення Лоренца. Наслідки з перетворень Лоренца. Інтервал між подіями. Основний закон релятивістської динаміки. Релятивістський вираз для кінетичної енергії. Взаємозв'язок маси і енергії спокою.

1. Кінематика поступального та обертального руху: основні визначення, закони і формули

1.1. Кінематика матеріальної точки, що рухається поступально

- Поступальний рух – це рух, при якому всі точки тіла рухаються тотожно.

- Матеріальною точкою називається макроскопічне тіло, розміром якого в даній задачі можна знехтувати і вважати, що вся маса тіла зосереджена в одній точці.

- Кінематичне рівняння руху визначає положення тіла у довільний момент часу. Задача буде розв'язаною, коли відомо як координати тіла залежать від часу:

$$x = x(t)\,;\quad y = y(t)\,;\; z = z(t) \text{ або } \vec{r} = \vec{r}(t)\,.$$

- Уявна лінія, яку описує матеріальна точка під час руху, називається траєкторією. Траєкторія руху задається залежністу однієї координати від іншої, наприклад : $y = y(x)$.

- Вектор, переведений із початкового положення матеріальної точки у кінцеве її положення, називають радіус-вектор: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти) системи координат, x, y, z, – координати точок.

- Вектор переміщення $\Delta\vec{r}$ показує зміну положення матеріальної точки за проміжок часу від початку руху t_1 до закінчення t_2:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

- Шлях ΔS - скалярна характеристика механічного руху; яка визначається відстанню, що проходить тіло вздовж траєкторії під час руху за певний проміжок часу:

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt \text{, де } V(t) \text{ – модуль швидкості.}$$

- Швидкістю називають фізичну величину, яка характеризує зміну вектора переміщення за одиницю часу.

Середня швидкість:

$$<\vec{V}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

де $\Delta\vec{r}$ – переміщення матеріальної точки за інтервал часу $\Delta t = t_2 - t_1$.

Модуль середньої шляхової швидкості:

$$<V> = \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ або } <V> = \frac{1}{t_2 - t_1}\cdot\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$$

Миттєва швидкість:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ або } \vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\,.$$

Модуль вектора швидкості:

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}\,.$$

- Фізична величина, яка характеризує зміну швидкості під час руху, називається прискоренням.

Середнє прискорення:

$$<\vec{a}>=\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t},$$

де $\Delta\vec{V}$ – зміна вектора швидкості за проміжок часу Δt.

Миттєве прискорення:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt} \text{ або } \vec{a}=\frac{dV_x}{dt}\vec{i}+\frac{dV_y}{dt}\vec{j}+\frac{dV_z}{dt}\vec{k}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}.$$

- Зв'язок між радіус-вектором і часом при рівномірному прямолінійному русі:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{V}t.$$

- Зв'язок між радіус-вектором і швидкістю руху та прискоренням при рівноприскореному русі:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{V}_0t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2,$$

$$\vec{V}(t)=\vec{V}_0+\vec{a}t,$$

де $\vec{r}_0$, $\vec{V}_0$ – радіус-вектор та швидкість точки в момент початку руху.

1.2. Кінематика криволінійного руху точки

- Якщо траєкторія руху не є пряма лінія, рух називається криволінійним.

- Радіус кривизни визначається як радіус заокруглення ділянки траєкторії поблизу точки що розглядається.

- Криволінійний рух – це завжди рух з прискоренням.

- Тангенціальна складова прискорення $\vec{a}_\tau$ обумовлена зміною модуля вектора швидкості. Вона лежить вздовж дотичної до траєкторії.

- Нормальна складова прискорення $\vec{a}_n$ пов'язана зі зміною напрямку руху. Вона напрямлена вздовж нормалі до дотичної в даній точці траєкторії.

- Означення тангенціальної та нормальної складових прискорення та його модуль:

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_\tau^{\,2}+a_n^{\,2}}=\sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2+\left(\frac{V^2}{R}\right)^2},$$

де R - радіус кривизни траєкторії.

1.3. Кінематика обертального руху матеріальної точки

- Вектором кутового переміщення $\Delta\vec{\varphi}$ називають вектор, для якого його модуль дорівнює куту повороту $\Delta\varphi$, а напрямок задовольняє правилу правого гвинта, за яким вектор кута повороту збігається з напрямком поступального руху гвинта, що обертається в напрямку руху точки по колу.

Кінематичне рівняння обертального руху:

$$\varphi = \varphi(t)$$

- Періодом обертання Т називають фізичну характеристику рівномірного руху тіла по колу, яке дорівнює проміжку часу, за який тіло виконує один повний оберт.

- Частотою обертання називають фізичну характеристику рівномірного руху тіла по колу, яка дорівнює кількості повних обертів, що здійснює тіло за одиницю часу:

$$n = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$$

- Кутовою швидкістю називають фізичну величину, яка характеризує зміну вектора кутового переміщення за одиницю часу.

Миттєва кутова швидкість:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Середня кутова швидкість:

$$<\vec{\omega}> = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}.$$

- Кутове прискорення – фізична величина, яка характеризує зміну кутової швидкості під час руху.

Миттєве кутове прискорення:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Середнє кутове прискорення:

$$<\vec{\beta}> = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

- Зв’язок між кутовою швидкістю та періодом і частотою:

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}.$$

- Зв’язок між лінійними і кутовими величинами

$$\Delta S = \Delta\varphi R$$

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \qquad V = \omega R$$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\beta}, \vec{r}], \qquad a_\tau = \beta R$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}, \qquad a_n = \omega^2 R$$

- Зв’язок між кутом повороту і проміжком часу $\Delta t = t_2 - t_1$ при обертанні навколо осі z з швидкістю $\omega_z(t)$:

$$\Delta\varphi(t) = \int_{t_1}^{t_2} \omega_z(t)dt$$

- Зв’язок між кутом повороту і кутовою швидкістю та їх кутовим прискоренням при рівноприскореному обертанні навколо осі z:

$$\Delta\varphi(t) = \omega_{0z}t + \frac{\beta_z t^2}{2}$$

$$\omega_z(t) = \omega_{0z} + \beta_z t$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1

Точка рухається в площині xOy із положення $x_0 = y_0 = 0$ зі швидкістю $\vec{V} = A\vec{i} + Bx\vec{j}$, де A, B – задані сталі величини. Знайдіть рівняння траєкторії матеріальної точки.

Розв’язання

Швидкість матеріальної точки задана за умови як вектор $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$. Компоненти вектора швидкості є похідні за часом від радіуса – вектора:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$$

Із співвідношення $V_x = \frac{dx}{dt} = A$ інтегруванням знаходимо, що

$$x - x_0 = \int_0^t V_x dt = \int_0^t A dt = At$$

Аналогічно визначається

$$y - y_0 = \int_0^t V_y dt = \int_0^t Bx dt = Bxt$$

Враховуючи умови $x_0 = y_0 = 0$, отримуємо систему $\begin{cases} x = At \\ y = Bxt \end{cases}$, виключаючи з неї t, знаходимо рівняння траєкторії: $\frac{x}{A} = \frac{y}{Bx}$ або

$$y = \frac{Bx^2}{A}.$$

Приклад 2

Протягом часу τ швидкість тіла змінювалася за законом $V = A + Bt + Ct^3$, $0 \le t \le \tau$. Визначити середню швидкість за проміжок часу τ.

Розв'язання

Згідно з визначенням, величина середньої швидкості $<V>=\dfrac{S}{\tau}$, де S – шлях, який тіло пройшло за час τ уздовж прямолінійної траєкторії.

Знайдемо шлях:

$$S = \int_0^\tau Vdt = \int_0^\tau (A + Bt + Ct^3)dt = \int_0^\tau Adt + \int_0^\tau Btdt + \int_0^\tau ct^2dt = A\tau + \frac{B\tau^2}{2} + \frac{c\tau^3}{3}$$

Тоді середня швидкість буде:

$$<V>= \frac{S}{\tau} = A + \frac{B\tau}{2} + \frac{c\tau^2}{3}$$

Приклад 3

Радіус-вектор матеріальної точки змінюється за законом $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$, де $A = 2\,м/c^2$, $B = 5\,м/c$, $C = 3\,м$. Визначити: 1) швидкість точки $\vec{V}$; 2) прискорення точки $\vec{a}$; 3) модуль швидкості та модуль середньої швидкості у момент часу $t = 4c$.

Розв'язання

Згідно з визначенням, миттєва швидкість та миттєве прискорення: $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$.

У нашому випадку $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(At^2\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}) = 2At\vec{i} + B\vec{j}$,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(2At\vec{i} + B\vec{j}) = 2A\vec{i}\ .$$

Модуль швидкості:

$$|\vec{V}| = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2} = \sqrt{(2At)^2 + B^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}(м/c).$$

Середня швидкість показує відношення зміни положення до проміжку часу, за яке ця зміна здійснилась:

$$<\vec{V}>= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1)$$

За умовою задачі початку руху відповідає положення $\vec{r}_0 = \vec{r}(0) = C\vec{k}$ а моменту $t = 4c$ відповідає положення $\vec{r}(t) = \vec{r}(4) = 16A\vec{i} + 4B\vec{j} + 5\vec{k}$, тоді:

$$\Delta\vec{r} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} = 16A\vec{i} + 4B\vec{j}\ .$$

Підставивши ці значення у формулу (1), отримаємо:

$$<\vec{V}>= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{16A}{\Delta t}\vec{i} + \frac{4B}{\Delta t}\vec{j} = 8\vec{i} + 5\vec{j}\ ,$$

$$|<\vec{V}>| = B\sqrt{(4A)^2 + B^2} = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{79}(м/c).$$

Приклад 4

З вежі в горизонтальному напрямку кинули тіло з початковою швидкістю $V_0 = 10\,м/с$. Визначити: 1) швидкість тіла в момент часу $t = 2\,с$ після початку руху; 2) радіус кривизни його траєкторії у цей момент.

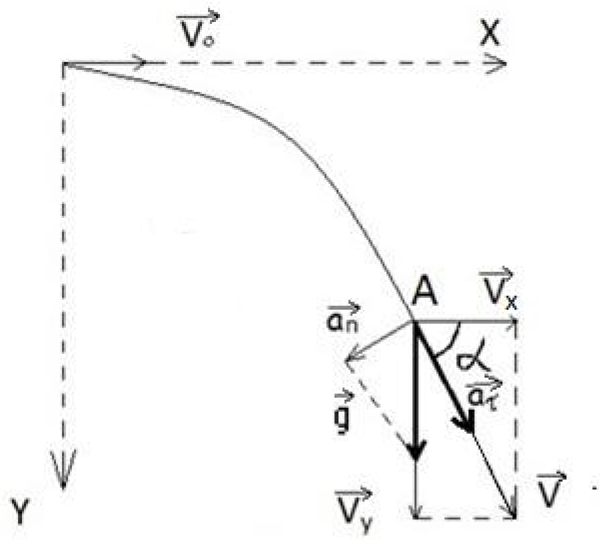

Рис. 1

Розв'язання:

Якщо тіло через $t = 2с$ після початку руху знаходиться в точці A, то вектор миттєвої швидкості спрямований по дотичній до траєкторії руху. Цей вектор розкладемо на горизонтальну $\vec{V}_x$ і вертикальну $\vec{V}_y$ складові (рис.1). Тіло бере участь у двох взаємо перпендикулярних рухах: рівномірному прямолінійному русі уздовж осі *Ox* і вільному падінні уздовж осі *Oy* (швидкість падіння $V_y = gt$). Модуль швидкості в точці A

$$V = \sqrt{V_0^{\,2} + (gt)^2} = 22(м/с),$$

де g - модуль прискорення вільного падіння.

Вектор $\vec{g}$ розкладемо на тангенціальне $\vec{a}_\tau$ та нормальне $\vec{a}_n$ прискорення. Вони перпендикулярні одне до одного. З рисунку бачимо, що:

$$a_n = g \cdot \cos\alpha = \frac{gV_0}{V}.$$

Врахуємо, що нормальне прискорення пов'язане з радіусом кривизни співвідношенням: $a_n = \dfrac{V^2}{R}$, тоді: $R = \dfrac{V^2}{a_n} = \dfrac{V^3}{gV_0} = 108.65(м)$.

Приклад 5

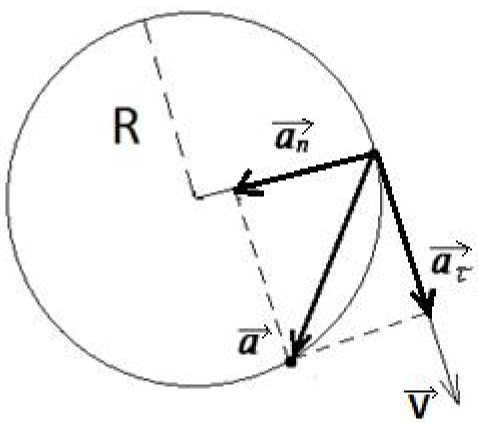

Рис. 2

Тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = Bt + Ct^2$, де $B = 20\,рад/с$ $B = 20\,рад/с$, $C = -2\,рад/с^2$. Визначити: 1) повне прискорення точки, яка знаходиться на відстані $R = 0.1м$ від осі обертання для моменту часу $t = 4с$; 2) середню швидкість обертання тіла з початку руху до зупинки.

Розв'язання

Повне прискорення $\vec{a}$ точки, що рухається по колу, може бути знайдено як векторна сума $\vec{a}_\tau$ та $\vec{a}_n$. З рис. 2 бачимо, що $\vec{a}_\tau$ спрямоване по дотичній, а $\vec{a}_n$ – перпендикулярне до нього і спрямоване до центра кривизни траєкторії.

Тоді $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, по модулю

$$a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2} \ .$$

Лінійні та кутові величини зв'язані між собою

$$a_\tau = \beta R,$$

$$a_n = \omega^2 R,$$

де $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct$ - модуль кутової швидкості,

а $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = 2C$ - модуль кутового прискорення. Тоді:

$$a = \sqrt{(\beta R)^2 + (\omega^2 R)^2} = R\sqrt{(2C)^2 + (B + 2Ct)^4} = 1.65(м/с^2)$$

Рух тіла рівносповільнений. Визначимо час його зупинки. У момент зупинки кутова швидкість дорівнює нулю:

$$\omega \ (t = t_{зуп}) = B + Ct_{зуп} = 0, \text{ звідки } t_{зуп} = 5с \ .$$

Тоді початкова та кінцева кутові координати:

$$\varphi_0 = \varphi(t = 0) = 0 рад,$$

$$\varphi_{зуп} = \varphi(t = t_{зуп}) = Bt_{зуп} + Ct^2{}_{зуп} = 100 - 2 \cdot 25 = 50 рад \ .$$

Отже, тіло повернулося на кут:

$$\Delta\varphi = \varphi_{зуп} - \varphi_0 = 50 рад \ .$$

Тоді середня кутова швидкість за час від початку руху тіла до його зупинки:

$$< \omega > = \frac{\Delta\varphi}{t_з - t_0} = \frac{50}{5} = 10(рад/с) \ .$$

<u>Приклад 6</u>

Матеріальна точка починає рухатися по колу радіусом $R = 0.1м$ з постійним тангенціальним прискоренням $a_\tau = 0,4 \ см/с^2$. Через деякий проміжок часу вектор прискорення $\vec{a}$ створює з вектором швидкості $\vec{V}$ кут $\beta = 60^o$. Визначити, який шлях пройде за цей час рухома точка.

Розв'язання

Згідно з умовою задачі, тангенціальне прискорення точки незмінне:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = const \ .$$

Тоді $dV = a_\tau dt$, звідки $V = \int\limits_0^t a_\tau dt = a_\tau t$.

Вектор $\vec{V}$ спрямований так, як і вектор $\vec{a}_\tau$ – по дотичній до траєкторії. Нормальне прискорення $a_n = \dfrac{V^2}{R}$ з часом зростає (рух точки рівноприскорений). Отже вектор повного прискорення $\vec{a}$ з часом змінюється як за величиною, так і за напрямком. З рис.2 бачимо, що кут α між векторами $\vec{a}$ і $\vec{V}$ залежить від відношення між нормальним та тангенціальним прискоренням:

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{V^2}{Ra_\tau} = \frac{(a_\tau t)^2}{Ra_\tau} = \frac{a_\tau t^2}{R} \ .$$

Звідси:

$$t = \sqrt{\frac{Rtg\alpha}{a_\tau}} = 6{,}6 \ (c)$$

Шлях пройдений точкою за цей час:

$$S = \int_0^t Vdt = \int_0^t a_\tau tdt = \frac{a_\tau t^2}{2} = 0{,}087(м).$$

Задачі для самостійного розв'язання

1.1. Кінематика поступального руху

1.1.1. Радіус-вектор матеріальної точки змінюється з часом за законом $\vec{r} = 4t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 2\vec{k}$ $(м)$. Знайти: 1) вектор швидкості $\vec{V}$; 2) вектор прискорення $\vec{a}$; 3) модуль швидкості в момент часу $t = 2c$.

1.1.2. Залежність від часу t шляху S, що пройшло тіло, має вигляд $S = At - Bt^2 + Ct^3$ ($A = 1м/c$, $B = 4м/c^2$, $C = 6м/c^3$). Визначити: 1) як залежить від часу швидкість $\vec{V}$ та прискорення $\vec{a}$; 2) чому дорівнюють шлях, швидкість та прискорення в момент часу $t = 2c$.

1.1.3. Залежність швидкості тіла від часу задається рівнянням $V = A + Bt + Ct^3$ ($0 \le t \le \tau$). Знайти середню швидкість за проміжок часу τ.

1.1.4. Кінематичні рівняння руху двох матеріальних точок мають вигляд $x_1 = A_1t - B_1t^2 + C_1t^3$ та $x_2 = A_2t - B_2t^2 + C_2t^3$, де $A_1 = 2м/c$, $A_2 = 4м/c$, $B_1 = 4м/c^2$, $B_2 = -2м/c^2$, $C_1 = -3м/c^3$, $C_2 = 1м/c^3$. Визначити: 1) момент часу, для якого швидкості цих точок зрівняються; 2) прискорення точок у цей момент часу.

1.1.5. Координата матеріальної точки під час руху вздовж прямої описується виразом: $x(t) = 5 + 2t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3(м)$, де t – час, визначений у секундах. Знайдіть: 1) початкову швидкість матеріальної точки; 2) моменти часу розвороту; 3) положення точок розвороту та прискорення в них.

1.1.6. Залежність від часу t шляху S, що пройшло тіло, має вигляд: $S = At - Bt^2 + Ct^3$ ($A = 2м/c$, $B = 3м/c^2$, $C = 4м/c^3$). Визначити: 1) через який час з моменту початку руху прискорення тіла буде дорівнювати $2м/c^2$; 2) середнє прискорення $< a >$ за цей проміжок часу.

1.1.7. Прискорення матеріальної точки під час її прямолінійного руху описується виразом $a_x(t) = 5 + 2t - t^2 (м/c^2)$, де t – час, визначений у секундах. Знайдіть залежність від часу для швидкості і координати, за умови, що початкова швидкість дорівнює нулю і початкове положення $x_0 = 0$.

1.1.8. Залежність від часу t шляху S, що пройшло тіло, має вигляд $S = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($A = 6\,м$, $B = 3\,м/с$, $C = 2\,м/с^2$, $D = 1\,м/с^3$). Для проміжку часу від $t_1 = 1с$ до $t_2 = 4с$ визначити: 1) середню швидкість; 2) середнє прискорення.

1.1.9. Матеріальна точка рухається вздовж прямої так, що її прискорення лінійно зростає і за перші 10 секунд досягає значення $5\,м/с^2$. Визначити в кінці десятої секунди руху:
1) швидкість точки; 2) шлях, який пройшла точка.

1.1.10. Кінетичні рівняння руху двох матеріальних точок мають вид $x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$ та $x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3$, де $A_1 = 2\,м/с$, $A_2 = 4\,м/с$, $B_1 = 4\,м/с^2$, $B_2 = -2\,м/с^2$, $C_1 = -3\,м/с^3$, $C_2 = 1\,м/с^3$. Визначити: 1) момент часу, для якого прискорення цих точок зрівняються; 2) швидкості точок в цей момент часу.

1.2. Кінематика криволінійного руху

1.2.1. Нормальне прискорення точки, що рухається по колу радіусом $R = 4\,м$, задається рівнянням $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1\,м/с^2$, $B = 6\,м/с^3$, $C = 4\,м/с^4$). Визначте: 1) тангенціальне прискорення точки; 2) шлях, пройдений точкою за час $t_1 = 5с$ після початку руху; 3) повне прискорення для моменту часу $t_2 = 1с$.

1.2.2. Точка рухається в площині xOy з положення з координатами $x_0 = y_0 = 0$ зі швидкістю $\vec{V} = A\vec{i} + Bx\vec{j}$ ($A = 2\,м/с$, $B = 6с^{-1}$) Визначте: 1) рівняння траєкторії точки $y(x)$; 2) прискорення точки; 3) модуль прискорення в момент $t = 1с$.

1.2.3. Радіус-вектор матеріальної точки змінюється з часом за законом $\vec{r} = t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j}$. Визначте: 1) рівняння траєкторії матеріальної точки $y(x)$; 2) модуль швидкості; 3) модуль прискорення для моменту часу $t = 1с$.

1.2.4. Рух матеріальної точки в площині xOy відбувається відповідно до закону $x = At$, $y = At(1 + Bt)$, де $A = 4\,м/с$, $B = 16\,м/с$. Визначити: 1) рівняння траєкторії матеріальної точки $y(x)$; 2) залежність від часу радіус-вектора $\vec{r}(t)$ матеріальної точки; 3) швидкість $\vec{V}(t)$ матеріальної точки в залежності від часу; 4) прискорення $\vec{a}(t)$ точки в залежності від часу; 5) модулі швидкості та прискорення точки через 1 с після початку руху.

1.2.5. Точка рухається в площині xOy з положення з координатами $x_0 = y_0 = 0$ зі швидкістю $\vec{V} = A\vec{i} + Bx\vec{j}$ ($A = 4\,м/с$, $B = 8с^{-1}$) Визначте: 1) рівняння траєкторії точки $y(x)$; 2) прискорення точки; 3) модулі швидкості та прискорення через 2 с після початку руху.

1.2.6. Рух матеріальної точки задано рівнянням $\vec{r} = (10 - 5t^2)\vec{i} + 10t\vec{j}\,(м)$. Запишіть рівняння траєкторії. Для точки, що лежить на відстани $R = 0{,}3м$ в момент часу $t = 1с$ розрахуйте 1) модуль швидкості; 2) модулі нормального та тангенціального прискорення.

1.2.7. Тіло кинули під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту з початковою швидкістю $V_0 = 30\,м/с$. Знайдіть відношення радіусів кривизни траєкторії точки в початковий момент часу та у верхній точці траекторії.

1.2.8. Точка рухається по дузі кола радіуса R. Її швидкість залежить від дугової координати s за законом $V = k\sqrt{s}$, де k – стала. Знайти кут між векторами повного прискорення і швидкості точки як функцію координати .

1.2.9. Точка рухається по дузі кола радіуса $R = 2\,м$. Рівняння її руху $S = At^3$, де $A = 2\,м/с^2$. У який момент часу нормальне прискорення точки дорівнюватиме тангенціальному? Визначити повне прискорення точки у цей момент часу.

1.2.10. Рух матеріальної точки задано рівнянням $\vec{r}(t) = A(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$, де $A = 0{,}5\,м$, $\omega = 5\,рад/с$. Накреслити траєкторію точки. Визначити модуль швидкості і модуль нормального прискорення.

1.2.11. По дузі кола радіусом $R = 10\,м$ рухається точка. У деякий момент часу нормальне прискорення точки $a_n = 4{,}9\,м/с^2$; у цей момент вектори повного і нормального прискорень утворюють кут $\varphi = 60°$. Знайти швидкість і тангенціальне прискорення точки.

1.2.12. Матеріальна точка рухаеться по колу радіусом $R = 4\,м$. Початкова швидкість точки $V_0 = 3м/с$, а тангенціальне прискорення $a_\tau = 1м/с^2$. Знайдіть шлях і переміщення точки, пройдені за дві секунди.

1.2.13. Матеріальна точка рухається по колу радіусом $R = 2\,м$. Початкова швидкість точки $V_0 = 2м/с$, а тангенціальне прискорення $a_\tau = 2\,м/с^2$. Знайдіть шлях і переміщення точки, пройдені за проміжок часу від $t_1 = 3с$ до $t_2 = 5с$.

1.2.14. Матеріальна точка рухається по колу радіусу $R = 10\,м$. В момент часу τ вектор повного прискорення склав кут $\alpha = 45°$ з нормальним прискоренням, а величина цього нормального прискорення дорівнювала $a_n = 4{,}9\,м/с^2$. Знайдіть цей час τ, якщо тангенціальне прискорення стале, а початкова швидкість дорівнює нулю.

1.3. Кінематика обертального руху

1.3.1. Лінійна швидкість V_1 точки, що знаходиться на ободі обертового диску, в три рази більше, ніж лінійна швидкість V_2 точки, що знаходиться на $6см$ ближче до його осі. Визначте радіус диска.

1.3.2. Залежність кута повороту від часу при обертальному русі твердого тіла навколо фіксованої осі описується рівнянням: $\varphi(t) = At^2 - Bt^4$, де A, B – задані додатні сталі. Знайдіть: 1) вирази для кутової швидкості та кутового прискорення; 2) момент часу зупинки тіла; 3) у скільки разів відрізняються швидкості точок, які лежать на відстані $0{,}2\,м$ та $0{,}6\,м$ від осі обертання.

1.3.3. Тверде тіло обертається навколо фіксованої осі по закону: $\varphi(t) = At - Bt^2$, де A, B – задані сталі. Знайдіть: 1) середнє значення кутової швидкості на проміжку часу від початку руху до зупинки; 2) кутове переміщення, яке зробило тіло за цей час; 3) чому дорівнює швидкість точок, які знаходяться на відстані $0{,}4м$ від осі обертання.

1.3.4. При обертанні колеса ($R = 0{,}5\,м$) залежність кута повороту від часу описується рівнянням: $\varphi(t) = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A = 3\,рад/c$, $B = 2\,рад/c^2$, $C = 1\,рад/c^3$. Знайдіть, яким будуть кутова швидкість та кутове прискорення на другій секунді руху; 2) кутове переміщення, яке зробило тіло за першу секунду свого руху; 3) швидкість точок, що знаходяться на ободі колеса.

1.3.5. Кутове переміщення обертального руху твердого тіла навколо фіксованої осі описується виразом $\varphi(t) = At^2 - Bt^3$, де A, B – задані додатні сталі. Знайти: 1) момент часу зупинки тіла; 2) вираз для залежності кутового прискорення від часу та значення кутового прискорення в момент часу зупинки тіла; 3) швидкість точок, які знаходяться на відстані $0{,}1м$ від осі обертання.

1.3.6. Кут повороту радіус-вектора частинки, що рухається по колу радіуса $R = 0{,}5\,м$, визначається рівнянням $\varphi = At^2 - Bt + C$, де $A = 1\,рад/c^2$, $B = 2\,рад/c$, $C = 3\,рад$. Визначити: 1) залежність кутової швидкості від часу; 2) максимальне значення кутового прискорення; 3) швидкість точок, які знаходяться на відстанях $0{,}1м$ та $0{,}4м$ від осі обертання.

1.3.7. Кут повороту радіус-вектора частинки, що рухається по колу, визначається рівнянням: $\varphi = At^2 - Bt + C$, де $A = 2\,рад/c^2$, $B = 2\,рад/c$, $C = 1\,рад$. Визначити: 1) залежність кутового прискорення від часу; 2) максимальне значення кутової швидкості; 3) у скільки разів відрізняються швидкості точок, які лежать на відстані $0{,}2\,м$ та $0{,}6м$ від осі обертання.

1.3.8. Кут повороту радіус-вектора частинки, що рухається по колу радіусом $R = 0{,}3\,м$, визначається рівнянням: $\varphi(t) = At^2 - B\sin(Ct)$, де $A = 2\,рад/c^2$, $B = 1\,рад$, $C = 2\,рад/c$. Визначити: 1) залежність кутової швидкості і кутового прискорення від часу; 2) обчислити їх значення через час $t_1 = \dfrac{2\pi}{3}$ с.

1.3.9. Тверде тіло обертається навколо фіксованої осі ($R = 1см$) по закону: $\varphi(t) = Ae^{Bt}$, де $A = 10\,рад$, $B = 0{,}1c^{-1}$. Знайдіть: 1) залежність кутової швидкості та кутового прискорення від часу; 2) значення кутової та лінійної швидкості через $20c$ після початку руху.

1.3.10. Вал обертається з кутовим прискоренням $\beta = -1\ рад/c^2$. Його початкова кутова швидкість $\omega_0 = 10\ рад/c$. Обчислити середню кутову швидкість вала за час $t_1 = 30c$ руху.

1.3.11. Вал обертається з кутовим прискоренням $\beta = -1\ рад/c^2$. Знайдіть: 1) скільки обертів зробив вал у разі зменшення частоти обертання від $1440\,хв^{-1}$ до $360\ хв^{-1}$; 2) час, за який відбудеться це зменшення.

1.3.12. Тіло, що обертається, збільшило свою кутову швидкість від значення $2\,рад/c$ до $64{,}8\,рад/c$ за час, протягом якого відбулось $N = 100$ повних обертів. Обчислити кутове прискорення тіла.

2. Динаміка поступального та обертального руху: основні визначення, закони і формули

2.1 Динаміка матеріальної точки і тіла, що рухається поступально

- Системи відліку, в яких тіла рухаються з постійною швидкістю при скомпенсованій дії інших тіл, називають інерціальними.

- Маса – міра інертності тіла, тобто властивість тіла чинити опір змінам свого стану.

- Центром інерції або центром системи називається геометрична точка C, положення якої характеризує розподіл мас в системі. Радіус-вектор центру інерції (мас) системи n тіл:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i ,$$

де m – сумарна маса всіх тіл системи.

- Центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює сумарній масі всієї системи, а діюча сила – геометричній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на тіло.

- Імпульс або кількість руху описує динамічний стан руху. Він дорівнює добутку маси тіла на його швидкість:

$$\vec{p} = m\vec{v} .$$

- Сила – кількісна міра такої взаємодії матеріальної точки з навколишніми тілами, яка може призвести до зміни механічного стану матеріальної точки (координати і швидкості) і механічного стану та властивостей навколишніх тіл.

Сила тяжіння:

$$\vec{F} = m\vec{g} .$$

Гравітаційна сила:

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_{12}\right|^2}\frac{\vec{r}_{12}}{\left|\vec{r}_{12}\right|} .$$

Сила пружності при деформації вздовж осі Ox:

$$F_x = -kx .$$

Величина сили тертя ковзання:

$$F_{тер} = k_{тер}\left|\vec{N}\right|,$$

де $\vec{N}$ – сила нормальної реакції опори.

Сила в'язкого тертя:

$$\vec{F} = -k_1\vec{v} \text{ (при малих швидкостях);}$$

$$\vec{F} = -k_2 v^2 \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|} \text{ (при великих швидкостях).}$$

- Перший закон динаміки (Ньютона): тіло (або матеріальна точка) зберігає стан спокою або прямолінійного рівномірного руху, якщо взаємодії з боку інших тіл не змушують його змінити цей стан.

Перший закон динаміки є незалежним критерієм придатності системи відліку для розгляду рухів і в динамічному, і в кінематичному сенсах.

- Другий закон динаміки (Ньютона): в інерціальній системі відліку швидкість зміни імпульсу матеріальної точки дорівнює рівнодійній силі, що діє на цю матеріальну точку:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} .$$

Динамічне рівняння руху:

$$m\vec{a} = \vec{F} \text{, (інтегральна форма)}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \text{. (диференціальна форма).}$$

- Третій закон динаміки (Ньютона): сили, з якими тіла діють одне на одне в інерціальній системі, рівні за модулем, протилежні за напрямом і спрямовані вздовж прямої, яка сполучає точки, що взаємодіють:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} .$$

За своїм змістом цей закон є вираженням вимоги збереження суми імпульсів тіл, що взаємодіють, якщо немає ніяких інших зовнішніх сил.

- Динамічні рівняння руху механіки Ньютона інваріантні відносно перетворень Галілея, тобто вони не змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

2.2 Динаміка обертального руху твердого тіла

- Момент інерції характеризує інерційні властивості твердого тіла по відношенню до його обертального руху. Кожне тіло, незалежно від того, перебуває воно в обертальному русі чи в стані спокою, має конкретне значення моменту інерції відносно конкретної осі обертання.

- Момент інерції точки (частинки) масою m_i – це скалярна величина, яка дорівнює добутку маси точки на квадрат відстані відносно осі обертання Oz:

$$I_{iz} = m_i r_i^2 ,$$

де r_i – найменша відстань від точки до осі обертання.

- Момент інерції системи тіл (точок) відносно осі обертання є величиною адитивною і дорівнює сумі моментів інерції складових частин системи відносно даної осі. Таким чином:

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{iz} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 ,$$

або для суцільного тіла

$$I_z = \int_m r^2 dm = \int_m r^2 \rho dV ,$$

де ρ – густина маси тіла, V – об'єм тіла.
Момент інерції залежить від розподілу маси тіла відносно осі обертання.

- Теорема Гюйгенса-Штейнера дозволяє обчислити моменти інерції твердого тіла відносно осі, що не проходить черезцентр мас: момент інерції відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції тіла I_O відносно осі, яка паралельна даній і проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла m на квадрат відстані a між осями:

$$I = I_O + ma^2 .$$

- Таблиця 1. Момент інерції деяких однорідних тіл, що мають правильну геометричну форму відносно їх геометричної осі:

Суцільний циліндр, радіуса R	$I_O = \frac{1}{2} mR^2$
Порожній тонкостінний циліндр, радіуса R	$I_O = mR^2$
Порожній товстостінний циліндр, R_1, R_2 – радіуси зовнішньої та внутрішньої циліндричних поверхонь	$I_O = \frac{1}{2} m\left(R_1^2 - R_2^2\right)$
Куля, радіуса R	$I_O = \frac{2}{5} mR^2$
Стрижень відносно перпендикулярної осі, що проходить через середину стрижня, l – довжина стрижня	$I_O = \frac{1}{12} ml^2$

- Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називають осьовий вектор, що дорівнюєвекторному добутку радіус-вектора точки $\vec{r}$, що проведений з точки O до точки прикладання сили, і вектора сили:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right].$$

Модуль вектора моменту сили:

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|\sin\alpha ,$$

де α – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$.

- Вектор моменту сили $\vec{M}$ направлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ та $\vec{F}$. Напрямок вектору $\vec{M}$ визначається векторним добутком (за правилом правого гвинта).

- Момент сили відносно осі – це скаляр, він дорівнює проекції моменту сили відносно будь-якої точки осі, на цю вісь. Тобто, він дорівнює добутку тангенціальної складової сили на найменшу відстань від осі до точки прикладання сили.

- Моментом імпульсу матеріальної точки відносно точки O називають осьовий вектор, що чисельно дорівнює векторному добутку радіус-вектора, який проведений з точки O в точку прикладання імпульсу, і вектора імпульсу:

$$\vec{L} = [\vec{r}\ \vec{p}] = m[\vec{r}\ \vec{v}].$$

Модуль вектора моменту імпульсу точки:

$$|\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}| sin\,\alpha = pl\ ,$$

де $l = |\vec{r}| sin\alpha$ – плече.

- Вектор моменту імпульсу $\vec{L}$ відносно точки O направлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ та $\vec{p}$. Напрямок вектору $\vec{L}$ визначається векторним добутком (за правилом правого гвинта).

- Момент імпульсу відносно осі – це скаляр, він дорівнює проекції моменту імпульсу відносно будь-якої точки осі, на цю вісь. Тобто, він дорівнює добутку тангенціальної складової імпульсу точки на найменшу відстань від осі до точки прикладання сили.

- Момент імпульсу твердого тіла, яке обертається відносно осі Oz:

$$L_Z = I_Z\omega\ ,$$

де ω – кутова швидкість.

- Рівняння обертального руху тіла свідчить, що швидкість зміни моменту імпульсу твердого тіла визначається моментом зовнішніх сил, що діють на тіло.

Основне рівняння обертального руху (рівняння моментів):
відносно нерухомої точки:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt};$$

відносно нерухомої осі Oz:

$$M_Z = \frac{dL_Z}{dt} \text{ або}$$

$$M_Z = I_Z\beta\ ,$$

де β – кутове прискорення тіла.

- Таблиця 2. Величини, які характеризуютьпоступальний рух, аналогічні відповідним величинам та законам, які описують обертальний рух:

Поступальний рух	Обертальний рух
Основні характеристики	
m – маса $\vec{F}$ – сила $\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс	I – момент інерції $\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right]$–момент сили $\vec{L} = \left[\vec{r}\;\vec{p}\right]$–момент імпульсу
Основні закони динаміки	
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{M} = I\vec{\beta}$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1

У ліфті на пружинних терезах знаходиться тіло масою $m = 1\ кг$ (рис.3). Визначити показання терез, якщо ліфт рухається з прискоренням $a = 2\ м/с^2$: а) вертикально вгору; б) вертикально вниз.

Розв'язання

Терези показують силу, з якою тіло діє на опору , тобто вагу тіла. Ця сила, відповідно до третього закону Ньютона, за абсолютним значенням дорівнює силі пружності (силі реакції опори) $\vec{N}$, і протилежна їй за напрямком: $\vec{G} = -\vec{N}$ або $G = N$.

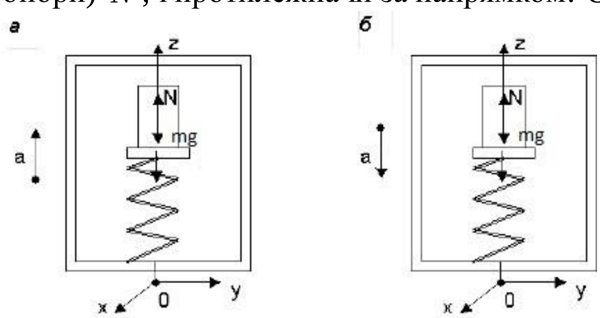

Рис. 3

У інерціальній системі відліку на тіло діють дві сили: сила тяжіння $\vec{P} = m\vec{g}$ та сила $\vec{N}$.

Напишемо рівняння руху у векторному вигляді:

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{P}$$

Проектуючи сили і прискорення на напрямок осі OZ ,переходимо до скалярної форми рівняння руху:

а) якщо ліфт рухається вгору, то:

$$ma = N - mg \text{ або } N = m(g + a) = 12(H);$$

б) якщо ліфт рухається вниз, то:

$$-ma = N - mg \text{ або } N = m(g - a) = 8(H).$$

Приклад 2

На похилій площині знаходиться вантаж $m_1 = 6\ кг$. Коефіцієнт тертя між першим вантажем і площиною $k = 0{,}1$, кут нахилу площини по відношенню до горизонту $\alpha = 45^\circ$. Визначити прискорення вантажів, якщо маса другого вантажу $2\ кг$.

Розв'язання

Якщо прийняти до уваги, що нитка, що зв'язує тіла, нерозтяжна, то прискорення тіл рівні за абсолютною величиною: $a_1 = a_2 = a$.

На тіло маси m_1 діють сила тяжіння $m_1\vec{g}$, сила нормальної реакції площини $\vec{N}$, сила натягу нитки $\vec{T}$ і сила тертя $\vec{F}_{тер}$ (рис.4а).

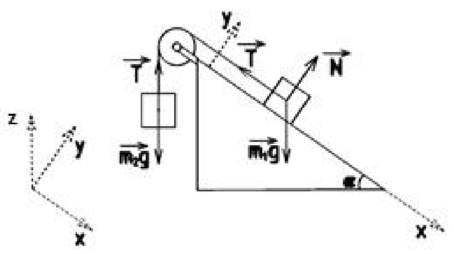

Рис. 4а

Сила тертя має бути направлена в бік, протилежний швидкості тіла. Безпосередньо в умові задачі не вказаний напрямок руху, тому відразу вказати напрямок сили тертя неможливо. Але треба розуміти, що сила тертя не може змінити напрямок руху на протилежний. Це означає, що напрямок руху треба визначати з умови, що рух відбувається за відсутності тертя.

Без врахування сил тертя рівняння руху тіл мають виглядати:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} m_1 a_{1x} = m_1 g \sin\alpha - T \\ m_2 a_{2z} = T - m_2 g \end{cases},$$

де $a_{1x} = a_{2z} = a$.

Розв'язуючи систему цих рівнянь, отримаємо:

$$a = \frac{(m_1 \sin\alpha - m_2)\, g}{m_1 + m_2} = \frac{\left(6\sqrt{2}/2\right)10}{8} > 0.$$

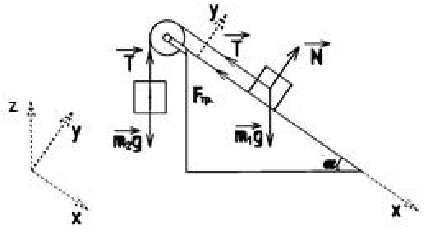

Рис. 4б

Це означає, що проекція вектора $\vec{a}$ на вісь Ox позитивна, тобто тіло m_1 рухається по похилій площині вниз, а сила тертя направлена вгору вздовж похилої площини (рис. 4б).

З урахуванням дії сили тертя рівняння руху тіл приймуть вигляд:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{тер} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} \end{cases}$$

Записуємо ці рівняння у скалярному вигляді для проекцій на відповідні осі, отримуємо:

$$\begin{cases} N = m_1 g \cos\alpha \\ m_1 a - m_1 g \sin\alpha - T - kN = m_1 g \sin\alpha - T - k m_1 g \cos\alpha \\ m_2 a = T - m_2 g \end{cases}.$$

Спільний розв'язок цієї системи дає:

$$a = \frac{\left(\left(\sin\alpha - k\cos\alpha\right)m_1 - m_2\right)g}{m_1 + m_2} = 2{,}27\left(м/с^2\right).$$

<u>Приклад 3</u>

На однорідний суцільний циліндр масою m_0 та радіусом R, щільно намотана легка нитка маси m (рис. 5). В момент $t = 0$ система почала рухатися. Нехтуючи тертям в осі циліндру, знайти залежність від часу модуля кутової швидкості.

Розв'язання

Вантаж здійснює поступальний рух, а блок – обертальний. На вантаж масою m діє сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила натягу нитки $\vec{T}$. Рівняння руху цього тіла:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \text{ або } ma = mg - T,$$

звідки:

$$T = mg - ma. \qquad (1)$$

Відповідно до основного рівняння динаміки обертального руху тіла маси m_0: відносно осі обертання момент $\vec{M}$ всіх зовнішніх сил, прикладених до диска, дорівнює добутку момента інерції диска ($I = m_0 R^2/2$) на його кутове прискорення β:

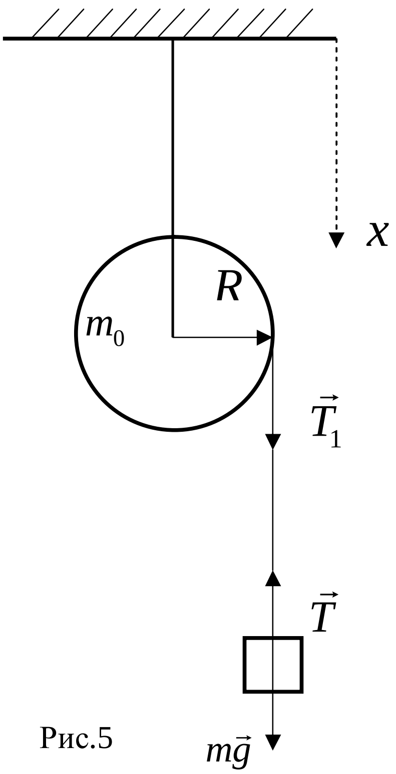

Рис.5

$$M_z = I_z \beta_z = I_z \frac{d\omega_z}{dt} \qquad (2)$$

Визначимо обертальний момент. Сила натягу нитки діє не тільки на вантажі, але і на диск. Згідно з третім законом Ньютона, сили $\vec{T}$ і $\vec{T}_1$ рівні за величинами, але протилежно спрямовані. Під час руху диск прискорено обертається за стрілкою годинника: момент сили $T_1 > 0$ і дорівнює $M = T_1 R$.

Підставивши у формулу (2) вирази для моменту сил та моменту інерції диска, отримаємо:

$$TR = \frac{m_0 R^2}{2}\frac{d\omega}{dt}.$$

Враховуючи (1), маємо:

$$m(g - a)R = \frac{m_0 R^2}{2}\frac{d\omega}{dt},$$

де прискорення $a = \beta R = R\frac{d\omega}{dt} mgR - mR\frac{d\omega}{dt} = \frac{m_0 R^2}{2}\frac{d\omega}{dt}$, Після алгебраїчних перетворень, отримаємо:

$$d\omega = \left(\frac{mg}{m_0/2 + m} \right) \frac{dt}{R}.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$\omega(t) = \frac{mgt}{(m_0/2 + m)R} = \frac{gt}{R(1 + m_0/2m)}$$

<u>Приклад 4</u>

Порожній металевий циліндр та суцільний тефлоновий циліндр мають однакові маси та радіуси. Вони скочуються по похилій площині висотою $h = 0{,}5$ *м* з кутом нахилу $\alpha = 30^\circ$ без проковзування. За який час кожний з циліндрів скотиться з похилої площини?

Розв'язання

Рух кожного з циліндрів зручно представляти сумою поступального руху центра мас, який знаходиться на осі циліндру, з лінійною швидкістю V_C, і обертального руху відносно цієї осі з кутовою швидкістю ω навколо миттєвої осі обертання.

На кожний циліндр діють сили: тяжіння $m\vec{g}$, реакції опори $\vec{N}$, та тертя $\vec{F}_{тер}$ (рис.6). Рівняння поступального руху центра мас циліндра вздовж похилої площини:

$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{F}_{тер}, \text{ або } ma_C = mg\sin\alpha - F_{тер} \qquad (1)$$

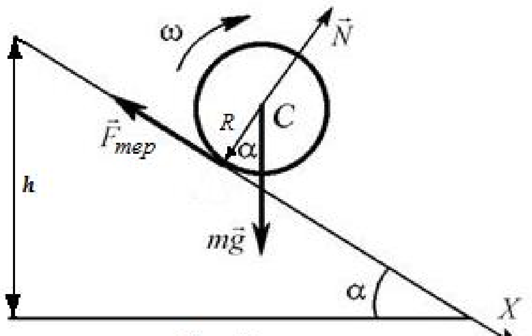

Рис.6

Розглянемо обертальний рух циліндрів. Основне рівняння обертального руху: добуток моменту інерції та кутового прискорення дорівнює сумі моментів зовнішніх сил, що діють на тіло:

$$I\vec{\beta} = \vec{M}_{зов} = \vec{M}_{тер} + \vec{M}_N + \vec{M}_{mg}.$$

Сила реакції опори перпендикулярна до швидкості центру мас циліндру і не впливає на обертальний рух. Тому момент цієї сили відносно осі циліндру відсутній. Момент сили тяжіння дорівнює нулю, бо вона прикладена до центра мас циліндра. Отже, циліндри обертаються виключно під дією сили тертя:

$$I\beta = M_{тер} = F_{тер}R,$$

звідки:

$$\beta = \frac{F_{тер}R}{I}.$$

Тоді:

$$a_C = \beta R = \frac{F_{тер}R^2}{I}.$$

Підставимо ці значення в рівняння руху (1):

$$\frac{mR^2F_{тер}}{I} = mg\sin\alpha - F_{тер},$$

$$F_{тер} = \frac{mg\sin\alpha}{1 + mR^2/I}.$$

Центр мас циліндра рухається вздовж похилої площини рівноприскорено. Відстань S, на яку зміститься центр мас циліндра під час руху t: $S = \frac{at^2}{2}$. Тоді час скочування з похилої площини:

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2}{a}\frac{h}{sin\alpha}} = \frac{1}{sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)}.$$

Моменти інерції суцільного циліндра ($I_1 = \frac{mR^2}{2}$) і порожнистого циліндра ($I_2 = mR^2$) відрізняються. Відповідно до цього час, за який вони скотяться з площини:

$$t_1 = \frac{1}{sin\alpha}\sqrt{\frac{6h}{g}} = 0,27\ (c);$$

$$t_2 = \frac{2}{sin\alpha}\sqrt{\frac{4h}{g}} = 0,22\ (c).$$

Задачі для самостійного розв'язання

2.1. Динаміка поступального руху

2.1.1. На столі стоїть візок масою $m_1 = 4\,кг$. До візка прив'язаний один кінець шнура, перекинутого через блок. З яким прискоренням рухатиметься візок, якщо до іншого кінця шнура прив'язати гирю масою $m_2 = 1\,кг$?

2.1.2. До пружинного динамометра підвішений блок. Через блок перекинуто шнур, до кінців якого прив'язані вантажі масами $m_1 = 1,5\,кг$ та $m_2 = 3\,кг$. Яке буде показання динамометра під час руху вантажів? Масою блоку і шнура знехтувати.

2.1.3. Два бруски масами $m_1 = 1\,кг$ та $m_2 = 4\,кг$, з'єднані шнуром, лежать на столі. З яким прискоренням будуть рухатися бруски, якщо до одного з них прикласти силу $F = 10\,H$, спрямовану горизонтально? Яка буде сила натягу T шнура, що з'єднує бруски, якщо цю силу докласти до першого бруска? До другого бруска? Тертям знехтувати.

2.1.4. На гладкому столі лежить брусок масою $m = 4\,кг$. До бруска прив'язані два шнури, перекинуті через нерухомі блоки, прикріплені до протилежних країв столу. До кінців шнурів підвішені гирі, маси який $m_1 = 1\,кг$ та $m_2 = 2\,кг$. Знайти прискорення, з яким рухається брусок, і силу натягу кожного з шнурів. Масою блоку і тертям знехтувати.

2.1.5. Похила площина, що утворює кут $\alpha = 25°$ з горизонтальною площиною, має довжину $l = 2\,м$. Тіло, рухаючись рівноприскорено, зісковзнуло з цієї площини за час $t = 2\,c$. Визначити коефіцієнт тертя k тіла об площину.

2.1.6. Матеріальна точка масою $m = 2\,кг$ рухається під дією деякої сили F згідно рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 2\,м/c^2$, $D = -0,2\,м/c^3$. Визачити значення цієї сили в моменти часу $t_1 = 2\,c$ та $t_2 = 5\,c$. У який момент часу сила дорівнює нулю?

2.1.7. Молот масою $m = 1$ т падає з висоти $h = 2\,м$ на ковадло. Тривалість удару $\tau = 0{,}01c$. Визначити середнє значення сили $< F >$ удару.

2.1.8. Шайба, яка пущена по поверхні льоду з початковою швидкістю $V_0 = 20\,м/c$, зупинилася через $t = 40c$. Визначити коефіцієнт тертя k шайби об лід.

2.1.9. На горизонтальну вісь насаджені маховик і легкий шків радіусом $R = 5\,см$. На шків намотаний шнур, до якого прив'язаний вантаж масою $m = 0{,}4\,кг$. Опускаючись рівноприскорено, вантаж пройшов шлях $S = 1{,}8\,м$ за час $t = 3c$. Визначити момент інерції маховика. Масу шківа не приймати до уваги.

2.1.10. Через нерухомий блок масою $m = 0{,}2\,кг$ перекинутий шнур, до кінців якого підвісили вантажі масами $m_1 = 0{,}3\,кг$ та $m_2 = 0{,}5\,кг$. Визначити сили натягу T_1 та T_2 шнура по обидві сторони блоку під час руху вантажів, якщо маса блоку рівномірно розподілена по контуру.

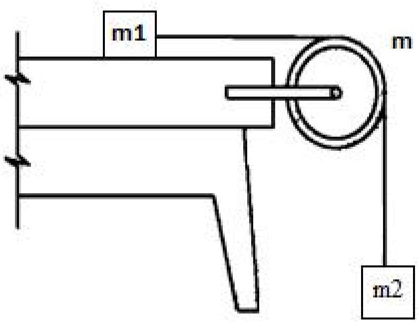

Рис.7

2.1.11. Два тіла масами $m_1 = 0{,}25\,кг$ та $m_2 = 0{,}15\,кг$ пов'язані тонкою ниткою, перекинутою через блок (рис.7). Блок укріплений на краю горизонтального столу, по поверхні якого ковзає тіло масою m_1. З яким прискоренням рухаються тіла? Чому дорівнюють сили T_1 та T_2 натягу нитки по обидві сторони від блоку? Коефіцієнт тертя тіла об поверхню столу дорівнює $0{,}2$. Маса блоку дорівнює $m = 0{,}1\,кг$ і її можна вважати рівномірно розподіленою по ободу блоку. Масою нитки та тертям в осі блоку можна знехтувати.

<u>2.2. Динаміка обертального руху</u>

2.2.1. Тонкий стержень, довжина якого $l = 1\,м$ і маса $m = 0{,}6\,кг$, може обертатися без тертя в вертикальній площині, яка знаходиться від центру стержня на відстані $d = 0{,}1\,м$. Стрижень приводиться в горизонтальне положення і відпускається без поштовху з нульовою початковою швидкістю. Визначити: а) кутове прискорення стрижня β_0 і силу тиску F_0 на вісь в початковий момент часу; б) кутову швидкість ω і силу тиску F на вісь в момент проходження стержнем положення рівноваги.

2.2.2. Однорідна кулька лежить на похилій площині, що утворює кут $\alpha = 30°$ з горизонтом. При яких значеннях коефіцієнта тертя кулька буде скочуватися з площини без ковзання?

2.2.3. Блок радіусом R може обертатися навколо осі з тертям, яке характеризується моментом сил тертя , якій не залежить від швидкості обертання блоку. На блок намотана і прикріплена до нього одним кінцем практично невагома нерозтяжна нитка, до іншого кінця якої підвішений вантаж масою m. Вантаж відпускають без поштовху, і він починає опускатися, розкручуючи блок. Знайти момент імпульсу $L(t)$ цієї системи тіл відносно осі блоку.

2.2.4. Драбина довжиною $l = 5\,м$ і масою $m = 11{,}2\,кг$ притулена до гладкої стіни під кутом $\alpha = 70^\circ$ до підлоги. Коефіцієнт тертя між драбиною і підлогою $k = 0{,}29$. Знайти: а) силу F_1, з якою сходи тиснуть на драбину; б) граничне значення кута α_0, при якому драбина починає ковзати.

2.2.5. Однорідна куля радіусом R і масою m обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через її центр. Знайти момент імпульсу $L(t)$ кулі щодо довільної точки O.

2.2.6. На горизонтальній поверхні лежать два бруски, які можуть ковзати по поверхні без тертя. Бруски пов'язані невагомою нерозтяжною ниткою. Така ж нитка, перекинута через блок, пов'язує бруски з вантажем маси $m = 0{,}5\,кг$. Блок являє собою однорідний суцільний циліндр. Маса брусків і блоку однакова і дорівнює $M = 1\,кг$. Вважаючи, що блок обертається без тертя, а нитка не прослизає по блоку, знайти прискорення брусків, натяг T_1 нитки, що зв'язує обидва бруска, натяг нитки T_2 на ділянці від брусків до блоку, натяг нитки T_3 на ділянці від блоку до вантажу m.

2.2.7. Вал масою $m = 100\,кг$ і радіусом $R = 5\,см$ обертався з частотою $\nu = 8\,c^{-1}$. До циліндричної поверхні валу притиснули гальмівну колодку з силою $F = 40\,H$, під дією якої вал зупинився через $t = 10\,c$. Визначити коефіцієнт тертя.

2.2.8. На циліндр намотана тонка гнучка нерозтяжна стрічка, масою якої в порівнянні з масою циліндра можна знехтувати. Вільний кінець стрічки прикріпили до кронштейна і надали можливість циліндру опускатися під дією сили тяжіння. Визначте лінійне прискорення осі циліндра, якщо циліндр: 1) суцільний; 2) порожнистий тонкостінний.

2.2.9. Через блок, що має форму диска, перекинуто шнур. До кінців шнура прив'язали тягарці масою $m_1 = 100\,г$ та $m_2 = 110\,г$. З яким прискоренням будуть рухатися тягарці, якщо маса блоку дорівнює $m = 400\,г$? Тертя при обертанні блоку мізерно мало.

2.2.10. Куля масою $m = 10\,кг$ і радіусом $R = 20\,см$ обертається навколо осі, що проходить через його центр. Рівняння обертання кулі має вид $\varphi(t) = A + Bt^2 + Ct^3$, де $A = 3\,рад$, $B = 4\,рад/c^2$, $C = -1\,рад/c^3$. Знайти закон зміни моменту сил, що діють на кулю. Визначити момент сил в момент часу $t = 2\,c$.

3. Робота та енергія. Закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії: основні визначення, закони і формули.

- Механічна робота, що виконується силою $\vec{F}$ на малому переміщенні $d\vec{r}$, визначається скалярним добутком:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ або } dA = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cdot cos\alpha \quad ,$$

де α – кут між вектором сили $\vec{F}$ і переміщенням $d\vec{r}$.
Механічна робота, що виконується силою за інтервал часу $\left[t_1, t_2\right]$ при переміщенні:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \; A = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} \; .$$

- Елементарна робота моменту сили $\vec{M}$, при якій система здійснює кутове переміщення $d\vec{\varphi}$ $dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$.

- Потужністю N називають фізичну величину, яка характеризує швидкість виконання механічної роботи:

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Середня потужність:

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Миттєва потужність:

$$N = \frac{dA}{dt} = Fv\cos\alpha, \; N = M_z\varphi.$$

- Енергія кількісно характеризує рух з урахуванням можливості його переходу з однієї форми в іншу. В механіці розглядають кінетичну та потенціальну енергії.

- Кінетична енергія – це частина механічної енергії тіла, що рухається.

Кінетична енергія точки (тіла), що рухається поступально:

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

де v і p – відповідно модулі швидкості та імпульсу тіла масою m.
Кінетична енергія тіла, що обертається:

$$W = \frac{I_O\omega^2}{2},$$

де I_O – момент інерції тіла відносно осі обертання, ω – кутова швидкість обертання.
Кінетична енергія тіла, що котиться по поверхні:

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_O\omega^2}{2} \; ,$$

де v – швидкість центру мас тіла, I_O – момент інерції тіла, ω – кутова швидкість.

- Енергія кількісно характеризує рух з урахуванням можливості його переходу з однієї форми в іншу. В механіці розглядають кінетичну та потенціальну енергії.

- Зміна кінетичної енергії тіла під дією сили визначається роботою, яку виконала ця сила:

тіло рухається поступально:

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{m{v_0}^2}{2},$$

де v_0 – початкова швидкість тіла , v – швидкість, що набута завдяки роботі;

тіло обертається навколо фіксованої осі:

$$A = \frac{I_O\omega^2}{2} - \frac{I_O{\omega_0}^2}{2}.$$

- Потенціальна енергія U – це частина механічної енергії системи, яка визначається взаємними положеннями матеріальних точок (конфігурацією системи) і характером взаємодії між ними.

- Потенціальна енергія:

деформованого тіла з коефіцієнтом жорсткості k:

$$U = \frac{1}{2}k\left(x - x_0\right)^2,$$

де x та x_0 – відповідно довжина деформованого та недеформованого тіла;

гравітаційної взаємодії точкових тіл (або куль) з масами m_1 та m_2 відповідно, що знаходяться на відстані r одне від одного:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r},$$

де G – гравітаційна стала;

тіла, що знаходяться в однорідному полі сил тяжіння:

$$U = -mgh,$$

де h – висота підйому тіла відносно рівня, який вважається за нульовий для потенціальної енергії.

- Консервативна сила пропорційна градієнту потенціальної енергії:

$$\vec{F} = -gradU \text{ або } \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right),$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори (орти) системи координат.

Знак «–» мінус вказує на те, що сила в довільній точці поля має такий напрям, в якому потенціальна енергія зменшується.

- Робота, яку виконують потенціальні сили, пов’язана зі зміною потенціальної енергії:

$$A = -(U_2 - U_1) = -\Delta U,$$

де U_1, U_2 – значення потенціальної енергії початкового та кінцевого стану.

- Повна механічна енергія системи складається з кінетичної енергії W та потенціальної енергії U тіл, які входять у дану систему:

$$E = W + U.$$

- Закон збереження механічної енергії: повна механічна енергія системи, на яку діють лише консервативні сили, не змінюється з часом, тобто зберігається:

$$E_1 = E_2 \text{ або } \left(W_1 + U_1\right) = \left(W_2 + U_2\right).$$

- Повним імпульсом системи тіл називають суму імпульсів тіл, що входять до системи:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i v_i .$$

- Величина повного імпульсу системи тіл, як і імпульс кожного з них, залежить від вибору системи відліку.

- Закон збереження імпульсу:

в замкненій системі тіл повний імпульс системи є незмінною величиною:

$$\vec{p} = const;$$

якщо система незамкнена, але проекція результуючої зовнішніх сил на деякий напрямок дорівнює нулю ($F_x = 0$), то буде зберігатися проекція вектора імпульсу на цей напрям:

$$p_x = const .$$

- Застосування законів збереження енергії та імпульсу до прямого центрального зіткнення тіл дозволяє знайти швидкості цих тіл після зіткнення:

непружне зіткнення:

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2};$$

пружне зіткнення:

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2\vec{v}_2 + \left(m_1 - m_2\right)\vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \quad \vec{u}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1 + \left(m_2 - m_1\right)\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

- Закон збереження моменту імпульсу:

в замкненій системі тіл повний момент імпульсу є незмінним в часі:

$$\vec{L} = const \text{ (відносно точки);}$$

в незамкненій системі проекція вектора моменту імпульсу буде незмінною, якщо проекція моменту відносно деякої нерухомої точки осі дорівнює нулю.

$$L_z = I_z\omega \text{ (відносно осі } OZ\text{).}$$

- Таблиця 3. Величини які характеризують поступальний рух, і формули, які описують цей рух, аналогічні відповідним величинам і формулам обертального руху:

Поступальний рух	Обертальний рух
Робота та потужність	
$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $N = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$ $N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
Кінетична енергія	
$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$	$W = \frac{m\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}$
Закони збереження	
$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = const$	$\sum_{i=1}^{n} I_{iz} \vec{\omega} = const$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1

Камінь масою m кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Знайти: 1) потужність сили тяжіння через t секунд після початку руху, 2) роботу цієї сили за той самий період.

Розв'язання

Рух каменю вздовж траєкторії складається з рівномірного поступального руху по горизонталі зі швидкістю $v_2 = v_0 \cos\alpha$ та рівнозмінного руху по вертикалі зі швидкістю $v_1 = gt$. Тоді через t секунд швидкість каменю:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{g}t .$$

Потужність, яку розвиває сила тяжіння $m\vec{g}$ в момент t:

$$N = m\vec{g}\vec{v} = m\left(gv_0 + g^2 t\right).$$

В даному випадку $\vec{g}\vec{v}_0 = gv_0 \cos\alpha = -gv_0 \sin\alpha$. Тоді:

$$N = mg\left(gt - v_0 \sin\alpha\right).$$

Якщо t_0 – час підйому до найвищої точки траєкторії, то отриманий результат вказує, що коли $t < t_0$ то потужність $N < 0$, а у випадку $t > t_0$ потужність $N > 0$.

Робота та потужність зв'язані співвідношенням $N = \frac{dA}{dt}$. Звідси отримуємо, що робота сили тяжіння за перші t секунд: $A = \int_0^t N dt = mgt\left(\frac{gt}{2} - v_0 \cos\alpha\right)$.

Приклад 2

Тіло маси m піднімається без початкової швидкості з поверхні землі під дією двох сил: сили $\vec{F}$, яка змінюється з висотою підйому за законом $\vec{F} = -2m\vec{g}(1-ay)$, де $a > 0$ – стала величина, і сили тяжіння – $m\vec{g}$. Знайти: 1) роботу сили на першій половині підйому; 2) відповідний приріст потенціальної енергії тіла в однорідному полі тяжіння Землі.

Розв'язання

За умовою задачі, швидкість тіла на початку і в кінці руху дорівнює нулю. Таким чином, приросту кінетичної енергії не відбувається ($\Delta W = 0$), а це автоматично означає, що робота за весь час руху також дорівнює нулю: $A = 0$.

Знайдемо, чому дорівнює висота підйому тіла. Якщо взяти за додатній напрям осі Oy вгору, то робота підйому на висоту h:

$$A = \int_0^h \left(F_y - mg\right)dy = mg\int_0^h (1-2ay)dy = mgh(1-ah) = 0 .$$

Оскільки $A = 0$, то це означає, що $(1-ah) = 0$. Звідси $h = 1/a$.

У відповідності з визначенням роботи сили на першій половині шляху підйому:

$$A = \int_0^{h/2} F_y dy = 2mg\int_0^{1/2a} (1-ay)dy = \frac{3mg}{4a} .$$

Приріст потенціальної енергії на першій половині шляху підйому: $\Delta U = \frac{mgh}{2} = \frac{mg}{2a}$.

Приклад 3

Потенціальна енергія частинки у центральному силовому полі задано функцією $U(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$, де $A = 6\cdot 10^{-6}\,\text{Дж}\cdot\text{м}^2$, $B = 3\cdot 10^{-4}\,\text{м}$, r – відстань від центру поля до частинки. Знайти: 1) при яких значеннях r потенціальна енергія і сила, яка діє на частинку, будуть мати екстремальні значення; 2) числові значення екстремальних значень сили $F_{\max}$ і потенціальної енергії $U_{\min}$.

Розв'язання

Для визначення екстремального значення потенціальної енергії U потрібно знайти значення першої похідної $\frac{\partial U}{\partial r}$:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{2A}{r^3} + \frac{B}{r^2} = \frac{1}{r^3}\left(-2A + Br\right).$$

Екстремальному значенню потенціальної енергії відповідає $r = r_1$, при якому перша похідна $\frac{\partial U}{\partial r}$ обертається в нуль. Тоді $r = r_1 = \frac{2A}{B} = 0,04\,\text{м}$;

Підстановка значення r_1 у вихідну формулу для $U(r)$ дає нам значення потенціальної енергії в даній точці поля:

$$U_{\min} = \frac{A}{r_1^2} - \frac{B}{r_1} = \frac{AB^2}{4A^2} - \frac{B^2}{2A} = -\frac{B^2}{4A} = -3,75\,(\text{мДж})$$

Проекцію сили на напрям радіус-вектора можна знайти за формулою $F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$. У цьому випадку: $F(r) = \frac{2A}{r^3} - \frac{B}{r^2}$.

Для визначення екстремальних значень $F_{\max}(r)$ потрібно знайти значення r, при яких $\frac{\partial F(r)}{\partial r}$ обертається в нуль:

$$\frac{\partial F(r)}{\partial r}=-\frac{6A}{r^4}+\frac{2B}{r^3}=\frac{2}{r^4}\left(-3A+Br\right),$$

$$\frac{2}{r^4}\left(-3A+Br\right)=0,$$

$$r=r_2=\frac{3A}{B}=0,06(м).$$

Тоді $F_{\max}=0,028(H)$.

<u>Приклад 4</u>

Автомобіль починає рухатись по горизонтальній площині рівноприскорено і набуває швидкості v. Чи однакову роботу виконає двигун автомобіля при розгоні від початку руху до швидкості $\frac{v}{2}$ і від швидкості $\frac{v}{2}$ до v?

Розв'язання

Вважаємо, що робота, яку виконує двигун, йде тільки на збільшення енергії автомобіля:

$$A=\Delta W$$

На першій ділянці розгону двигун виконає роботу:

$$A_1=\Delta W_1=\frac{m\left(v/2\right)^2}{2}-0=\frac{mv^2}{8}.$$

На другій ділянці робота двигуна:

$$A_2=\Delta W_2=\frac{mv^2}{2}-\frac{m\left(v/2\right)^2}{2}=\frac{3}{8}mv^2.$$

Тоді відношення робіт на вказаних ділянках розгону: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{1}{3}$.

Таким чином, чим більше швидкість, тим більшу роботу виконує двигун для підтримання рівноприскореного руху.

<u>Приклад 5</u>

На горизонтальних рейках стоїть платформа з піском. Їх загальна маса $m_1=5\cdot10^3\,кг$. В пісок влучає снаряд масою $m_2=5\,кг$, який летів уздовж рейок. В момент попадання швидкість снаряду $v=400\,м/с$ і напрямлена згори донизу під кутом $\alpha=47^\circ$ до горизонту. Знайти швидкість платформи, якщо снаряд застряг у піску.

Розв'язання

Платформа набуває швидкості $\vec{v}$ в результаті взаємодії зі снарядом. Але закони зміни сили взаємодії і часу взаємодії невідомі. Це означає, що розв'язання задачі безпосередньо за допомогою законів Ньютона неможливе.

Якщо ж розглядати систему тіл «платформа-снаряд», то ця невідома сила буде внутрішньою силою і вона не змінить імпульс системи. Якщо знехтувати дією сили тертя на платформу до удару, то, оскільки сили тяжіння та нормальної реакції рейок спрямовані вертикально, то можна вважати, що проекція вектора імпульсу системи на горизонтальний напрям залишається незмінною:

$$p_{x(до\,удару)} = p_{x(після\,удару)}$$

Якщо ввести вісь x (рис.8), отримаємо, що до удару імпульс системи визначається лише рухомим снарядом:

$$p_{x(до\,удару)} = m_2 v\, cos\alpha\,.$$

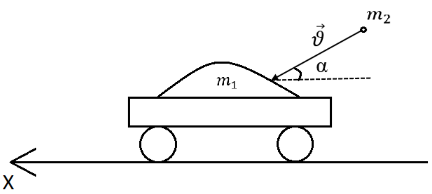

Рис.8

Після попадання снаряду у пісок вся система рухається зі швидкістю $\vec{v}$ і імпульс системи:

$$p_{x(після\,удару)} = \left(m_1 + m_2\right) v\,.$$

Тоді, у відповідності з законом збереження імпульсу:

$$m_2 v\, cos\alpha = \left(m_1 + m_2\right) v\,.$$

Звідси отримаємо:

$$v = \frac{m_2 v\, cos\alpha}{\left(m_1 + m_2\right)} = 0{,}32\, м/с.$$

<u>Приклад 6</u>

Частинка з масою m_1 та імпульсом p_1 пружно зіштовхнулася з частинкою з масою m_2, яка знаходилася в стані спокою. Знайти імпульс першої частинки після удару, якщо в результаті удару вона розсіялася під кутом φ до початкового напряму руху.

Розв’язання

Для замкнутої системи двох частинок, в першу чергу, розглянемо закон збереження імпульсу (рис.9) .

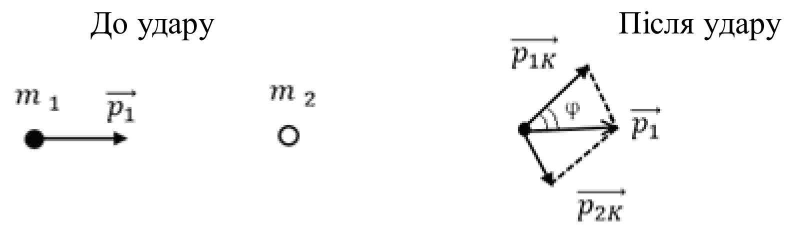

Рис.9

З рисунку видно, що імпульс частинки масою m_2, яка до удару знаходилася в стані спокою, після удару дорівнює:

$$p_{2k}^2 = p_1^2 + p_{1k}^2 - 2\,p_1 p_{1k}\cos\varphi. \qquad (1)$$

Далі скористаємось законом збереження енергії: кінетична енергія W_1 частинки з масою m_1, що налітає, до удару дорівнює сумі кінетичних енергій обох частинок після удару:

$$W_1 = W_{1k} + W_{2k}\,,$$

де W_{1k} і W_{2k} – відповідно кінетична енергія першої та другої частинки після удару.

Ця рівність зводиться до вигляду:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_{1k}^2}{2m_1} + \frac{p_{2k}^2}{2m_2}$$

$$p_{2k}^2 = \left(p_1^2 - p_{1k}^2 \right) \frac{m_1}{m_2} \qquad (2)$$

Розв'язавши (1) і (2), отримаємо:

$$p_{1k} = \frac{p_1 \left(\cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi + \frac{m_2^2}{m_1^2} - 1} \right)}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

Оскільки за умовою $m_2 > m_1$, то фізичний зміст має лише знак «+» перед коренем: лише в цьому випадку значення імпульсу p_{1k} буде додатнім.

<u>Приклад 7</u>

Стержень довжиною $l = 1,5\,м$ та масою $m = 1\,кг$ підвішений за один з його кінців. Він може вільно обертатись навколо горизонтальної осі. У нижній кінець стержня влучає куля, застрягнувши в ньому. Маса кулі $m_1 = 10\,г$, а швидкість $v_1 = 50\,м/с$. Визначити: 1) кутову швидкість ω, з якою стержень почне обертальний рух; 2) швидкість кінця стержня v у цей момент.

Розв'язання

Зіткнення кулі та стержня слід розглядати як непружне: куля застряє у стержні. Таке зіткнення описує закон збереження імпульсу:

$$m_1 v_1 = \left(m + m_1 \right) v.$$

Тоді $v = \frac{m_1 v_1}{m + m_1}$ – це швидкість системи «стержень-куля» після зіткнення.

В момент удару лінії дії сили тяжіння як стержня, так і кулі, проходять через точку підвісу. Це означає, що моменти цих сил відносно осі обертання дорівнюють нулю, і виконуються умови для застосування закону збереження моменту імпульсу.

До удару момент імпульсу кулі відносно осі обертання:

$$L_0 = m_1 v_1 l.$$

Після зіткнення момент імпульсу системи можна записати через момент інерції системи та її кутову швидкість ω:

$$L_k = I \cdot \omega = \left(I_{0m} + I_{0m_1} \right) \omega = \left(\frac{ml^2}{2} + m_1 l^2 \right) \frac{v}{l} = \left(\frac{ml + 2m_1 l}{2} \right) v.$$

За законом збереження моменту імпульсу: $L_0 = L_k$, тобто:

$$m_1 v_1 l = \left(\frac{ml + 2m_1 l}{2} \right) v.$$

Тоді швидкість кінця стержня одразу після влучення кулі: $v = \frac{2m_1 v_1 l}{ml + 2m_1 l} = \frac{2m_1 v_1}{m + 2m_1}.$

Приклад 8

Платформа у вигляді суцільного диска радіусом $R = 1,5\,м$ і масою $m_1 = 240\,кг$ обертається навколо вертикальної осі з частотою $n_0 = 10\,хв^{-1}$. У центрі платформи стоїть людина масою $m_2 = 60\,кг$. Знайти: 1) З якою частотою почне обертальний рух платформа, якщо людина перейде на її край? 2) Яку роботу при цьому виконає людина? Тертям знехтувати, людину вважати за точкову масу.

Розв'язання

Момент зовнішніх сил відносно вертикальної осі обертання збігається з геометричною віссю платформи, і його можна вважати рівним нулю. За цієї умови до системи «людина + платформа» можна застосувати закон збереження моменту імпульсу:

$$L_z = I_z\omega = const,$$

де I_z – момент інерції платформи з людиною відносно вертикальної осі, $\omega = 2\pi n$ – кутова швидкість. Тоді:

$$L_{z0} = L_{z1}, \text{ або } I_0\omega_0 = I_1\omega_1,\ I_0 2\pi n_0 = I_1 2\pi n_1.$$

Момент інерції системи дорівнює сумі моментів інерції тіл системи. Тоді в початковому стані:

$$I_0 = I_{10} + I_{20} = \frac{1}{2}m_1R^2 + 0 = \frac{m_1R^2}{2}.$$

У кінцевому стані (людина стоїть на краю платформи) момент інерції системи:

$$I_1 = I_{10} + I_2 = \frac{1}{2}m_1R^2 + m_2R^2.$$

Підставивши отримані вирази моментів інерції і кутових швидкостей обертання в закон збереження імпульсу, маємо:

$$\frac{m_1R^2}{2}2\pi n_0 = \left(\frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2\right)2\pi n_1.$$

Звідси:

$$n_1 = \frac{n_0 m_1}{m_1 + m_2} = 6,67\,хв^{-1}.$$

Кінетична енергія початкового і кінцевого стану відрізняється. Їх різниця дорівнює роботі, яку виконала людина:

$$A = W_1 - W_0 = \frac{I_1\omega_1^2}{2} - \frac{I_0\omega_0^2}{2} = 2\pi^2R^2\left(\frac{m_1\left(n_1^2 - n_0^2\right)}{2} - m_2n_1^2\right) = -51,4(Дж).$$

Приклад 9

Куля масою m_1 яка рухається зі швидкістю v_1, абсолютно пружно зіштовхується з нерухомою кулею масою m_2. Визначити, яку частину своєї кінетичної енергії перша куля передасть другій.

Розв'язання

Позначимо швидкість куль до удару v_1 і v_2, та після удару V_1 і V_2 відповідно. Згідно з законом збереження енергії, енергія, що була витрачена першою кулею, дорівнює енергії, яку отримала друга куля:

$$\Delta W_1 = W_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2}.$$

Тоді шукане відношення:

$$n = \frac{\Delta W_1}{W_1} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{m_2 V_2^2}{2} \cdot \frac{2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2 V_2^2}{m_1 v_1^2}. \qquad (1)$$

Оскільки кулі зазнали пружного зіткнення, то їх швидкості можна знайти, розв'язавши систему рівнянь (закон збереження імпульсу та закон збереження енергії):

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} = \dfrac{m_1 V_1^2}{2} + \dfrac{m_2 V_2^2}{2} \end{cases}.$$

Розв'язавши, одержуємо:

$$V_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Тоді, з урахуванням (1), маємо:

$$n = \frac{m_2 V_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

3.1. Робота і потужність

3.1.1. Під дією постійної сили F вагонетка пройшла шлях $S = 5\,м$ та набула швидкість $v = 2\,м/с$. Визначити роботу A сили, якщо маса m вагонетки дорівнює $400\,кг$ і коефіцієнт тертя $k = 0{,}01$.

3.1.2. Обчислити роботу A, що здійснюється при рівноприскореному підйомі вантажу масою $m = 100\,кг$ на висоту $h = 4\,м$ за час $t = 2\,с$.

3.1.3. Під дією постійної сили $F = 400\,Н$, яка спрямована вертикально вгору, вантаж масою $m = 20\,кг$ був піднятий на висоту $h = 15\,м$. Якої потенціальної енергії U набуде вантаж? Яку роботу A здійснить сила F?

3.1.4. Тіло масою $m = 1кг$, що кинули з вежі в горизонтальному напрямку зі швидкістю $v_0 = 20\,м/с$, через $t = 3с$ впало на землю. Знайти кінетичну енергію W, якої набуло тіло в момент удару о землю. Опором повітря знехтувати.

3.1.5. Камінь кинули вгору під кутом $\varphi = 60^\circ$ до горизонту. Кінетична енергія W_0 каменю в початковий момент часу дорівнює $20\,Дж$. Визначити кінетичну W і потенціальну U енергію каменю у вищій точці його траєкторії. Опором повітря знехтувати.

3.1.6. Матеріальна точка масою $m = 2\,кг$ рухається під дією деякої сили, спрямованої вздовж осі Ox згідно з рівнянням $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $A = 10\,м$, $B = -2\,м/с$, $C = 1\,м/с^2$, $D = -0{,}2\,м/с^3$. Знайти потужність N, яка витрачена на рух точки в моменти часу $t_1 = 2\,с$ та $t_2 = 5\,с$.

3.1.7. Ковзаняр, який стоїть на льоду, кинув вперед гирю масою $m_1 = 5\,кг$ і внаслідок віддачі почав рухатись назад із швидкістю $v_2 = 1\,м/с$. Маса ковзаняра $m_2 = 60\,кг$. Визначити роботу A, виконану ковзанярем при киданні гирі.

3.1.8. Визначити роботу A підйому вантажу по похилій площині довжиною $l = 2\,м$, якщо маса вантажу $m = 100\,кг$, кут нахилу похилої площини $\varphi = 30^\circ$, коефіцієнт тертя $k = 0{,}1$, вантаж рухається з прискоренням $a = 1\,м/с^2$.

3.1.9. Яку роботу треба виконати для того, щоб витягти тіло масою $m = 2\,кг$ на гірку з довжиною основи $l = 1\,м$ і висотою $h = 0{,}5\,м$, якщо коефіцієнт тертя $k = 0{,}2$? Кут нахилу поверхні гірки до горизонту може змінюватись, але знак його залишається сталим.

3.1.10. Обчислити роботу, що виконується на шляху $S = 10\,м$ силою, що рівномірно зростає, якщо на початку руху $F_1 = 10\,Н$, а наприкінці руху $F_2 = 40\,Н$.

3.1.11. Автомобіль масою $m = 1000\,кг$ починає рухатися по колу радіуса $R = 100\,м$ з тангенціальним прискоренням $a_\tau = 1\,м/с^2$. Обчислити роботу двигуна, яку він виконує за один оберт автомобіля по колу. Коефіцієнт опору $k = 0{,}1$.

3.2. Потенціальна енергія та сила

3.2.1. Потенціальна енергія частинки має вигляд: $U = a\left(x/y - y/z\right)$, де a – константа. Знайти: а) силу F, яка діє на частинку, б) роботу A, яку здійснюють над частинкою сили поля при переході з точки (1, 1, 1) в точку (2, 2, 3).

3.2.2. Потенціальна енергія частинки має вигляд: $U = a/r$, де r – модуль радіус-вектора $\vec{r}$; a – константа. Знайти силу F, яка діє на частинку, і роботу A, яку здійснюють над частинкою сили поля при переході з точки (1, 2, 3) в точку (2, 3, 4).

3.2.3. Потенціальна енергія частинки має вигляд $U = kr^2/2$, де r – модуль радіус-вектора $\vec{r}$ частинки; k – константа ($k > 0$). Знайти силу F, яка діє на частинку, і роботу A, яку здійснюють над частинкою сили поля при переході з точки (1, 2, 3) в точку (2, 3, 4).

3.2.4. Потенціальна енергія частинки визначається рівнянням $U = a\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, де a – додатна константа. Частинка починає рух з точки з координатами (3,00; 3,00; 3,00) (м). Знайти її кінетичну енергію W в момент, коли частинка знаходиться в точці з координатами (1,00; 1,00; 1,00) (м).

3.2.5. Потенціальна енергія частинки в деякому силовому полі визначається рівнянням $U = 1,00x + 2,00y^2 + 3,00z^3$ *Дж* (координати в *м*). Знайти роботу A, яку здійснюють над частинкою сили поля при переході з точки (1,00; 1,00; 1,00) в точку з координатами (2,00; 2,00; 2,00).

3.2.6. Перебуваючи під дією постійної сили з компонентами (3, 10, 8) (*Н*), частинка перемістилася з точки 1 з координатами (1, 2, 3) (*м*) в точку 2 з координатами (3, 2, 1) (*м*). а) Яка робота A при цьому здійснюється? б) Як змінилася кінетична енергія системи?

3.2.7. Частинка, перебуваючи у стані спокою, під дією сили $\vec{F} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ (*Н*), перемістилася з точки (2, 4, 6) (*м*) в точку (3, 6, 9) (*м*). Знайти кінетичну енергію W частинки в кінцевій точці.

3.2.8. Тіло масою m починає рух під дією сили $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$. Знайти потужність $N(t)$, яку набуває тіло в момент часу t.

3.2.9. Сила, яка діє на частинку, має вигляд $\vec{F} = -a\vec{i}$ *(Н)*, де a – константа. Знайти роботу A, яку здійснює над частинкою ця сила на шляху від точки з координатами (1, 2, 3) (*м*) до точки з координатами (7, 8, 9) (*м*).

3.2.10. Тіло, маса якого m, здійснює одновимірний рух. Потенційна енергія тіла описується виразом: $U(x) = kx^2$, де k – додатна стала, а x – координата. Знайдіть залежність прискорення тіла від його координати та визначте залежність його швидкості від координати, якщо в точці з координатою $x_0 = 0$ швидкість дорівнює v_0.

3.2.11. Тіло, маса якого m, рухається у двомірному потенціальному полі з енергією: $U(x, y) = a\left(x^2 + y^2\right)$, де a – задана стала, x, y – координати тіла. Інших сил, крім сили поля, немає. Знайдіть залежність від координати для швидкості тіла, якщо в точці $x = y = 0$ її модуль $\left|\vec{v}_0\right| = v_0$. Розрахуйте також залежність від координат для потужності сили, з якою поле діє на тіло, коли воно рухається вздовж осі X.

3.2.12. Вираз потенційної енергії частинки має вигляд: а) $U = 2x^2 + 3y^3 + 5z$; б) $U = 8xyz$. Визначити силу $\vec{F}$, що діє на частинку.

3.2.13. Вираз потенційної енергії частинки в деякому полі має вигляд $U(r) = \frac{3}{r} - \frac{2}{r^2}$, де r – відстань від центра поля до частинки. При якому r на частинку не діятиме сила з боку поля?

3.2.14. Вираз потенційної енергії частинки має вигляд $U = 2x^2 - 3y + 4z^3$. Визначити: а) силу, що діє на частинку; б) роботу A, що виконує поле при переміщенні частинки з точки B_1 (-2; 3; 1) в точку B_2 (2; 2; 2); в) збільшення кінетичної енергії частинки при цьому процесі.

3.3. Закони збереження (обертальний рух)

3.3.1. Обруч і суцільний циліндр масою $m = 2\,кг$ кожен, котяться без ковзання з однаковою швидкістю $v = 5\,м/с$. Визначити, у скільки разів відрізняються їх кінетичні енергії.

3.3.2. Кінетична енергія W диска, що котиться по горизонтальній поверхні, дорівнює 24 Дж. Визначити кінетичну енергію W_1 поступального і W_2 обертального руху диска.

3.3.3. Куля і суцільний циліндр однакової маси, виготовлені з того самого матеріалу, котяться без ковзання з однаковою швидкістю. Визначити, у скільки разів кінетична енергія кулі менша за кінетичну енергію суцільного циліндра.

3.3.4. Суцільний циліндр масою $m = 4\,кг$ котиться по горизонтальній поверхні. Лінійна швидкість центру мас циліндра $v = 1\,м/с$. Визначити кінетичну енергію W .

3.3.5. Стовп висоти $h = 3,00\,м$ і масою $m = 50\,кг$ падає на землю з вертикального положення. Визначити модуль моменту імпульсу M стовпа відносно точки опори і швидкість v_C центру тяжіння в момент його удару об землю.

3.3.6. Однорідному циліндру надали початковий імпульс, в результаті чого він почав котитись без ковзання вверх по похилій площині зі швидкістю $v_0 = 3,00\,м/с$. Площина утворює кут з горизонтом $\alpha = 20^\circ$. На яку висоту h підніметься циліндр?

3.3.7. Однорідний суцільний циліндр маси $m = 1,00\,кг$ висить у горизонтальному положенні на двох намотаних на нього невагомих нитках. Циліндр відпускають без поштовху. Знайти: а) за який час t циліндр опуститься на відстань $h = 50,0\,см$? б) якого натягу F зазнає при опусканні циліндра кожна з ниток?

3.3.8. Є два однорідних диска. Один з них може обертатись без тертя навколо вертикальної фіксованої осі. Цей диск знаходився в нерухомому стані. Другий диск починають розкручувати з початковою швидкістю ω_0, опускаючи його на другий диск так, що край одного з дисків співпадає з центром іншого. Стикаючись, диски моментально склеюються. Знайти: а) кутову швидкість,з якою буде обертатись отримана система, б) як зміниться кінетична енергія дисків.

3.3.9. Горизонтально розташований дерев'яний стержень масою $m = 0,800\,кг$ і довжиною $l = 1,80\,м$ може обертатись навколо вертикальної осі, яка проходить через його середину. В кінець стержня попадає і застрягає в ньому куля масою $m' = 3,00\,г$, яка летіла перпендикулярно до осі і до стержня зі швидкістю $v = 50,0\,м/с$. Визначити кутову швидкість ω, з якою починає обертатись стержень.

3.3.10. Горизонтальний диск маси m і радіуса R може обертатись навколо вертикальної осі, що проходить через його центр. На краю диска стоїть людина масою m'. Спочатку диск і людина нерухомі. Людина починає йти по краю диска зі швидкістю v' відносно диску. З якою швидкістю ω обертається при цьому диск відносно нерухомої точки відліку? Розмірами людини відносно R можна знехтувати.

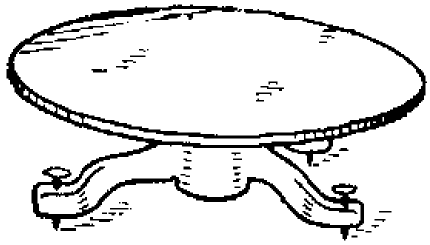

Рис. 10

3.3.11. Людина стоїть на лавці Жуковського (рис. 10) і ловить рукою м'яч масою $m = 0,4\,кг$, що летить в горизонтальному напрямку зі швидкістю $v = 20\,м/с$. Траєкторія м'яча проходить на відстані $r = 0,8\,м$ від вертикальної осі обертання лавки. З якою кутовою швидкістю ω почне обертатися лавка Жуковського з людиною, що зловила м'яч? Вважати, що сумарний момент інерції людини і лавки $I = 6\,кг \cdot м^2$.

3.3.12. На краю горизонтальної платформи, що має форму диска радіусом $R = 2\,м$, стоїть людина масою $m_1 = 80\,кг$. Маса платформи дорівнює $m_2 = 240\,кг$. Платформа може обертатися навколо вертикальної осі, що проходить через її центр. Нехтуючи тертям, знайти, з якою кутовою швидкістю ω обертатиметься платформа, якщо людина буде йти вздовж її краю зі швидкістю $v = 2\,м/с$ відносно платформи.

3.3.13. Платформа у формі диска може обертатись навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина маси $m_1 = 60\,кг$. На який кут повернеться платформа, якщо людина пройде вздовж краю платформи, і обійшовши її, повернеться у вихідну точку на платформі. Маса платформи дорівнює $m_2 = 240\,кг$. Момент інерції людини I обраховувати як для матеріальної точки.

3.3.14. Платформа у вигляді диска радіусом $R = 1\,м$ обертається за інерцією з частотою $n_1 = 6\ об/хв$. На краю платформи стоїть людина, маса якої $m = 80\,кг$. З якою частотою буде обертатися платформа, якщо людина перейде в її центр? Момент інерції платформи $I = 120\,кг \cdot м^2$. Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки.

3.3.15. У центрі лавки Жуковського (рис. 10) стоїть людина і тримає в руках стрижень довжиною $l = 2,4\,м$ і масою $m = 8\,кг$, розташований вертикально, вздовж осі обертання лавки. Лавка з людиною обертається з частотою $n_1 = 1\,с^{-1}$. З якою частотою n_2 обертатиметься лавка з людиною, якщо вона поверне стрижень в горизонтальне положення? Сумарний момент інерції I людини і лави дорівнює $6\,кг \cdot м^2$.

4. Релятивістська механіка.

В усіх задачах вважається, що система відліку K' рухається зі швидкістю ϑ у додатному напрямку осі Ox системи K, причому осі Ox' і Ox збігаються, а осі Oy' і Oy, а також Oz' і Oz є паралельними.

- Перетворення Лоренца:

$$x' = \frac{x - \vartheta t}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}}, \; y' = y, \; z' = z, \; t' = \frac{t - x\vartheta/c^2}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}}.$$

- Релятивістський закон додавання швидкостей (у випадку, коли тіло рухається паралельно осі Ox):

$$v'_x = \frac{v_x - \vartheta}{1 - v_x\,\vartheta/c^2}, \; v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}}{1 - v_x\,\vartheta/c^2}, \; v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}}{1 - v_x\,\vartheta/c^2},$$

де v' – швидкість тіла відносно системи K'; ϑ – швидкість системи K' відносно K, v – швидкість тіла відносно системи K.

- Релятивістське скорочення довжини стрижня:

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}$$

де ℓ_0 – довжина стрижня в системі координат, відносно якої стрижень знаходиться у стані спокою, ℓ – довжина стрижня в системі координат, відносно якої він рухається зі швидкістю ϑ.

- Релятивістське сповільнення ходу годинника:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}}$$

де Δt_0 – інтервал часу між двома подіями, що відбуваються в одній точці системи K', виміряний по годиннику цієї системи (що рухається разом з тілом), Δt – інтервал часу між двома подіями, виміряний по годиннику системи K, відносно якої тіло рухається зі швидкістю ϑ.

- Релятивістська маса і релятивістський імпульс:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}},$$

$$p = m\vartheta = \frac{m_0\vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}}$$

де m_0 – маса спокою.

- Повна E та кінетична T енергії релятивістської частинки:

$$T = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta^2/c^2}} - 1\right),$$

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + T.$$

- Зв'язок між енергією й імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2,$$

$$p^2 c^2 = T(T + 2m_0 c^2).$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1.

Довести, що при малих швидкостях релятивістська формула кінетичної енергії переходить у класичну.

Розв'язання.

Релятивістська формула кінетичної енергії:

$$E_k = m_0 c^2 \left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Розкладемо вираз $(1-\beta^2)^{-1/2}$ по формулі бінома Ньютона

$$(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots$$

і відкинемо члени більш високого ступеня у силу їхньої малості ($\vartheta << c$). Тоді

$$E_k \approx m_0 c^2 \left[1 + \frac{\vartheta^2}{2c^2} - 1 \right] = \frac{m_0 \vartheta^2}{2}$$

Приклад 2.

Мезони космічних променів досягають поверхні Землі із самими різними швидкостями. Знайти релятивістське скорочення розмірів мезона ($\delta = \frac{V_0 - V}{V_0} 100\%$), швидкість якого дорівнює 95% швидкості світла.

Розв'язання.

Оскільки поперечні розміри тіла при його русі не міняються, зміна об'єму тіла визначається лоренцевим скороченням подовжнього розміру, що виражається формулою

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \vartheta^2 / c^2}$$

Отже, об'єм тіла скорочується по аналогічній формулі

$$V = V_0 \sqrt{1 - \vartheta^2 / c^2}$$

Підставляючи числові дані, одержимо $V = 0{,}312 V_0$. Тоді відносна зміна об'єму:

$$\delta = \frac{V_0 - V}{V_0} 100\% = 68{,}8\%$$

Приклад 3.

Сонце випромінює потік енергії $P = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт. За який час τ маса Сонця зменшиться в 2 рази? Випромінювання Сонця вважати постійним. Маса Сонця $m_0 = 1{,}989 \cdot 10^{30}\ кг$.

Розв'язання.

Потік енергії , випромінюваний Сонцем , визначається співвідношенням:

$$P = \frac{\Delta W_k}{\tau} \qquad (1)$$

Зміна енергії Сонця в процесі випромінювання:

$$\Delta W_k = \Delta m c^2 \qquad (2)$$

За умовою задачі зменшення маси:

$$\Delta m = \frac{1}{2} m_0 , \qquad (3)$$

Підставляючи (2) у (1), з урахуванням (3), одержуємо:

$$P = \frac{m_0 c^2}{2\tau},$$

Тоді, час, за який маса Сонця зменшиться в 2 рази, дорівнює:

$$\tau = \frac{m_0 c^2}{2P}.$$

Підставивши числові дані й обчислюючи, одержимо:

$$\tau = \frac{1{,}989 \cdot 10^{30} (3 \cdot 10^8)^2}{2 \cdot 3{,}9 \cdot 10^{26}} = 2{,}3 \cdot 10^{20} (c) = 7{,}2 \cdot 10^{12} (\text{років})$$

Приклад 4.

В атмосфері Землі під дією космічного випромінювання утворюються нестабільні частинки – мюони. Час життя τ_0 мюона, що покоїться, дорівнює 2,2 мкс. Від місця народження у верхніх шарах атмосфери до детектора, що реєструє його розпад, мюон пролетів відстань $l = 6\ км$. З якою швидкістю ϑ (у частках швидкості світла) летів мюон?

Розв'язання.

За умовою задачі τ_0 - це власний час життя мюона, тобто час, виміряний за годинником, що рухається разом з мюоном. Час, відрахований за годинником експериментатора у лабораторній системі відліку, пов'язаний з Землею, буде більшим:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \vartheta^2 / c^2}}.$$

За цей час мюон долає відстань:

$$l = \vartheta \tau = \frac{\vartheta \tau_0}{\sqrt{1 - \vartheta^2 / c^2}}$$

Звідки визначимо:

$$\frac{\vartheta}{c} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + (c\tau_0)^2}}$$

Величина $l_0 = c\tau_0 = 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} = 660\,м$ є значно меншою, ніж $l = 6\,км$. Тоді за формулою наближених обчислень:

$$\frac{\vartheta}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + (l_0/l)^2}} \approx 1 - \frac{l_0^2}{2l^2} = 1 - \frac{660^2}{2 \cdot (6 \cdot 10^3)^2} = 0{,}994$$

Отже, швидкість мюона: $\vartheta = 0{,}994 \cdot c$.

Задачі для самостійного розв'язання

4.1.1. З якою максимальною швидкістю vмає рухатися стрижень, щоб відносна похибка, яка допускається при вимірюванні його довжини без врахування руху, не перевищувала б 0,01 %?

4.1.2. У системі відліку K міститься нерухомий стрижень, довжина якого $\ell_0 = 1м$, орієнтований під кутом $\alpha = 60°$ до осі Ox. Визначити його довжину ℓ і відповідний кут α' у системі K', що рухається відносно системи K зі швидкістю $\vartheta = c/2$ вздовж осі Ox.

4.1.3. Ребра куба орієнтовані паралельно осям координат. З якою швидкістю ϑ куб має рухатися вздовж однієї з осей, для того щоб перетворитися на паралелепіпед із об'ємом втричі меншим ніж об'єм куба?

4.1.4. Дві частинки рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = 0{,}8 \cdot c$ і $v_2 = 0{,}9 \cdot c$ відносно лабораторної системи відліку. Визначити відносну швидкість частинок.

4.1.5. Дві частинки рухаються назустріч одна одній з однаковими швидкостями ϑ відносно нерухомого спостерігача. Відносна швидкість частинок. Визначити швидкість частинок відносно спостерігача.

4.1.6. При якій швидкості v тіла відносно Землі його маса m у цій системі відліку буде вдвічі більшою за масу спокою m_0?

4.1.7. Галактика, маса спокою якої $m_0 = 10^{41}\,кг$, рухається відносно Землі зі швидкістю $v_0 = 0{,}8 \cdot c$. Чому дорівнює різниця Δm між масою Галактики в системі відліку, що пов'язана із Землею, та її масою спокою?

4.1.8. При якій швидкості ϑ кінетична енергія T частинки дорівнює її енергії спокою $m_0 c^2$?

4.1.9. Визначити імпульс частинки, кінетична енергія якої $T = 900\,МеВ$, а швидкість $v = 0{,}8 \cdot c$.

4.1.10. У скільки разів період коливань T маятника годинника в лабораторії більший за його період коливань T_0 в системі відліку, зв'язаній з протоном, повна енергія якого $E = 10\,ГеВ$?

4.1.11. Внаслідок пружної деформації сталевий стрижень, об'єм якого $V = 1$, здобув відносне подовження $\varepsilon = 0{,}001$. На яке значення Δm відрізняється масадеформованого стрижня від маси недеформованого?

4.1.12. На яке значення Δm зміниться маса одного моля льоду при його повному перетворенні у воду за нормальних умов?

Перелік літератури

1. Кучерук І.М., Горбачук І.І., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Механіка, молекулярна фізика і термодинаміка. – К: Техніка, 1999.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.
3. Савельев И.В. Курс физики. – М. : Наука, 1989, т.т.1,2.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: Наука, 1977–1986, т.т. 1,3.
5. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика в примерах и задачах. М.: Наука, 1989.- 464с.
6. Методичні вказівки та розв'язки задач з фізики. Розділ «Механіка»/ Укладачі О. М. Бродін, М. М. Панченко. – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 92 с.

Інформаційні ресурси

1. http://ela.kpi.ua
2. http://zitf.kpi.ua
3. http://campus.kpi.ua/tutor/index.php