

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ІГОР ТА ЕКОНОМІЧНА ПОВЕДІНКА

Практикум

Укладачі: В. О. Капустян, Г. А. Мажара, Ж. Т. Черноусова

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Економічна аналітика»
спеціальності 051 економіка

Електронне мережеве навчальне видання

Київ

КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

2025

УДК 330.46
C00

Автори: *Капустян Володимир Омелянович*, д. ф.-м. н., проф.
Мажара Гліб Анатолійович, д. філос. з економіки, доц.
Черноусова Жанна Трохимівна, к. ф.-м. н., доц.

Рецензент *Пишинограєв, І.О.*, к. ф.-м. н., доц., директор ННЦ «Світовий центр даних з геоінформатики та сталого розвитку»

Відповідальний редактор *Рисцов І.К.*, д. ф.-м. н., доц.

*Гриф надано Методичною радою КПП ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 06.03.2025 р.)
за поданням вченої ради факультету/навчально-наукового інституту
(протокол № 6 від 27.12.2024 р.)*

C00 Теорія ігор та економічна поведінка. [Електронний ресурс] : практикум : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Економічна аналітика» спец. 051 Економіка / КПП ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В. О. Капустян, Г. А. Мажара, Ж. Т. Черноусова. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 136 с.

Практикум охоплює застосування теорії ігор в економічних моделях та аналіз економічної поведінки. Посібник містить практичні завдання з неокласичних моделей, включаючи однокритеріальні та векторні моделі, безкоаліційні та кооперативні ігри. Вивчаються різні аспекти економічної поведінки, включаючи стратегічні взаємодії між економічними агентами, формування та аналіз рівноваг, прийняття рішень в умовах невизначеності та оптимальність стратегій.

Також розглядаються практичні аспекти оптимального керування динамічними системами та синтезу оптимальних керувань, що дозволяє краще розуміти та моделювати економічну поведінку в динамічних середовищах. Практикум включає реальні приклади, розв'язання задач та аналіз кейсів, що сприяє закріпленню теоретичних знань на практиці.

Практикум з дисципліни «Теорія ігор та економічна поведінка» призначений для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 Економіка. Посібник також буде корисним для всіх, хто цікавиться теорією ігор та економічною поведінкою, надаючи їм практичні інструменти для аналізу та прогнозування економічної взаємодії та поведінки агентів.

УДК 330.46

Реєстр. № НП 24/25-229. Обсяг 5,4 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© В. О. Капустян, Г. А. Мажара, Ж. Т. Черноусова 2025
© КПП ім. Ігоря Сікорського

ЗМІСТ

Вступ

Практичні 1. Основні визначення однокритеріальної оптимізації. Класичний метод пошуку точок екстремуму функції багатьох змінних. Диференціальні умови оптимальності у випадку опуклості множини визначення функції. Теорема Ларанжа у випадку функціональних обмежень типу рівності.

Практичні 2. Диференціальні умови оптимальності в задачі математичного програмування (теорема Лагранжа). Субградієнт та субдиференціал опуклої функції. Недиференційовні умови оптимальності.

Практичні 3. Ефективні та слабо ефективні оцінки та розв'язки задач векторної оптимізації.

Практичні 4. Гарантована рівновага, рівновага за Нешем і Бержу.

Практичні 5. Вибір нешівських рівноваг. Змішані стратегії. Знаходження рівноваг у змішаних стратегіях.

Практичні 6. Алгоритми знаходження рівноваг Неша у біматричних іграх.

Практичні 7. Статичні ігри з неповною інформацією: байєсові ігри.

Практичні 8. Стабільні угоди кооперативних ігор.

Практичні 9. C - та N - ядра, вектор Шеплі в кооперативних іграх.

Практичні 10. Оптимальне керування динамічними системами: необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму для задач з фіксованими крайовими умовами і нефіксованим часом.

Практичні 11. Оптимальне керування динамічними системами: необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму для задач з рухомими границями.

Практичні 12. Оптимальний синтез. Оптимальна стабілізація.

Практичні 13. Оптимальна стабілізація з обмеженим керуванням. Ізодромний регулятор.

Практичні 14. Достатні умови оптимальності Кротова.

Практичні 15. Лінійно - квадратичні безкоаліційні ігри.

Вступ.

Посібник по прикличним заняттям з курсу «Теорія ігор та економічна поведінка» містить методичні матеріали і задачі для самостійної роботи по основним розділам теорії ігор як в статичній постановці, так і в динамічній – диференціальні ігри. В навчальному посібнику з єдиних позицій викладено алгоритми і практичні технології дослідження неокласичних конфліктних економічних моделей.

В статичних ігрових моделях у більшості випадків означення розв'язку гри зводиться до деякої комбінації одновимірних екстремальних задач. Для останніх основним аналітичним апаратом дослідження являється теорема Лагранжа про необхідні умови оптимальності. Тому на початку нагадується технологія застосування необхідних і достатніх умов оптимальності при дослідженні однокритеріальних екстремальних задач.

Ігровим стаціонарним моделям передуює розгляд векторних (багатокритеріальних) моделей оптимізації з рівнозначними критеріями. Для таких задач в просторі показників визначаються спеціальні оптимальні розв'язки: за Парето і за Слейтером. Пошук множини цих розв'язків зводиться до пошуку розв'язків спеціальних однокритеріальних багатопараметричних задач для згорток (достатні умови). Розв'язки векторних моделей оптимізації являють собою певну множину, яка характеризується тим, що кожен із таких розв'язків не може бути покращеним. Якщо мова йде про моделювання спільної діяльності декількох підприємств, то потрібен центр (дирекція концерну), який би обирав єдиний оптимальний розв'язок із багатьох і примушував усіх його дотримуватись. Крім того, для векторних моделей характерно те, що вони мають єдине ресурсне джерело.

Якщо ж підприємства на ринку працюють самостійно, то їх діяльність характеризується своїми показниками і кожне із них має своє ресурсне забезпечення, то вони вимушені планувати свою діяльність на ринку, використовуючи засоби некоаліційної теорії ігор. Тоді кожен гравець (підприємство) має свій виграш (значення показника діяльності) і лише свій ресурс (стратегію). Що стосується оптимальності поведінки кожного гравця в теорії некоаліційних ігор, то під нею ми будемо розуміти різні варіанти формалізованого представлення про вигідність, стійкість і справедливість. В силу того, що неможливо дати таке визначення оптимальності, яке б охоплювало одночасно вказані вище три філософські категорії, тому замість оптимальності далі будемо використовувати в якості розв'язку некоаліційної гри поняття рівноваги (вигідності кожного гравця). Припускається, що всі гравці діють раціонально. Якщо всі гравці діють спільно, то ми маємо задачу векторної оптимізації і можемо визначити максимальний їх виграш. Якщо ж кожен гравець буде діяти окремо, вважаючи дії інших гравців недружніми, то в якості розв'язку такої гри обираємо правило максиміну. Такий розв'язок дасть найменші виграші гравців (гарантовані виграші). Як правило, гравці не ставляться вороже один до одного. Тому виникла рівновага за Нешем як розв'язок некоаліційної гри, коли всі гравці, крім виділеного, діють за Нешем. Така рівновага, яка виявилась не гірше гарантованої рівноваги, набула великої популярності при дослідженні конфліктних ситуацій, не зважаючи на багато її недоліків. Навіть у випадку єдиності рівноважної ситуації (вектор стратегій всіх гравців) у

гравців можуть виникнути бажання обрати інші стратегії (між грацями діє необов'язкова домовленість). Ще гірша проблема виникає, коли така рівновага неєдина. У випадку рівноваги Берже гравці ставляться дружньо один до одного. Коли відсутня рівновага у чистих стратегіях, наприклад по Нешу, варто відшукувати рівновагу у змішаних стратегіях. Наводяться відповідні алгоритми пошуку таких стратегій.

Основною проблемою безкоаліційних ігор є створення умов для дотримання гравцями виділених рівноваг при відсутності обміну інформацією між гравцями. У випадку можливості обміну інформацією можна сподіватись на кооперацію в процесі вибору стратегій. Умови кооперації визначаються гравцями під час переговорів, у яких з'ясовуються узгоджені аспекти поведінки гравців. Унаслідок цього гравці приходять до кооперативної домовленості, яка може бути обов'язковою (існує орган, якому підкоряються всі гравці і який контролює виконання умов підписаного сторонами контракту) або необов'язковою (коли такого органу не існує і домовленість схожа з міжнародними договорами, які діють до того часу, поки не вигідно їх порушувати).

Необов'язкові домовленості відносно деякої ситуації слід розглядати з погляду їхньої стабільності, тобто як не вигідність відхилення від неї гравців. Стабільність полягає в наступному. Відхилення деяких гравців від домовленості може примусити інших гравців змінити свої стратегії, які вони спочатку не збиралися змінювати. Ці зміни важко передбачити незалежно від того, чи ми передбачаємо чи ні, що порушення домовленості знищить дух кооперації та призведе до некооперативної поведінки гравців. Тому необов'язкові домовленості будуть складатися із домовленостей про ситуацію, а також із сценарію реагування кожного гравця $i \in I$ на відхилення будь-якої коаліції, що не містить цього гравця. Цей сценарій оголошується наперед і є «сценарієм погроз».

Кооперативна гра характеризується парою: кількістю гравців та набором вигравів (витрат) усіх можливих коаліцій, які можуть бути утвореними гравцями. Розв'язком такої гри є вектор, який задовольняє умовам індивідуальної гарантії – він не менший виграшу відповідної коаліції і умові колективної гарантії – сумарний вигреш співпадає з виграшем відповідної коаліції. Ці розв'язки утворюють певну множину. Визначаються умови вибору певних точок із цієї множини: різні ядра та вектор Шеплі. Всі ігрові положення проілюстровано економічними прикладами.

У другій частині викладено методологію дослідження нескінченновимірних (динамічних) моделей, в яких ефективність діяльності економічної системи виражається у вигляді функціоналів, визначених на траєкторіях її основних ендогенних показників. Цей матеріал є основою для розгляду диференціальних ігор.

Керування діляться на керування, зміна яких здійснюється дослідником, та на фазові змінні, які залежать від керування та задовольняють деякій системі диференціальних рівнянь. Для моделей з одним показником основним математичним апаратом виступає теорія оптимального керування. Тут слід відзначити два принципи керування: програмне, коли керування залежать лише від часу та екзогенних параметрів моделі; за оберненим

зв'язком, коли керування залежать від часу та фазових змінних. У випадку програмного керування умови оптимальності отримуються у вигляді принципу максимума. Детально проаналізовано методологію його застосування для різних класів задач оптимального керування. Відзначимо, що оптимальні програмні керування слід застосовувати для побудови планових (прогнозних) значень траєкторій ендогенних показників економічної системи. Виділено клас динамічних моделей, в яких можливе представлення оптимального керування у вигляді оберненого зв'язку. В цьому випадку в якості умови оптимальності виступає рівняння Беллмана, якому задовольняє оптимальне значення критерію оптимальності. Якщо динаміка показників задовольняє лінійній системі диференціальних рівнянь, а якість роботи системи характеризується квадратичним функціоналом, то знайдені оптимальні керування у вигляді оберненого зв'язку (регулятори), параметри яких задовольняють деяким рівнянням. Якщо динамічна економічна модель розглядається на великому відрізку часу (модель з необмеженим горизонтом), то викладена методологія побудови оптимальних регуляторів, які забезпечують досяжність як оптимальних значень виділеного критерію, так і рівноважних значень фазових змінних (оптимальна стабілізація). Розглянуто випадки як відсутності обмежень на керування, так і їх наявність. Регулятори слід використовувати для побудови «фінансово - економічних радників» при реалізації оптимальних траєкторій ендогенних показників економічної системи.

В умовах конфлікту інтересів економічних агентів (гравців) для раціональної їх поведінки використовується теорія некоаліційних диференціальних ігор у найпростішому варіанті: динаміка зміни показників у часі описується системою лінійних диференціальних рівнянь, функції виграшів – квадратичні функціонали від керувань та фазових змінних. Керування (стратегії) задаються лінійними функціями від фазових змінних. Побудовано алгоритми, які реалізують відомі рівноважні ситуації в таких іграх.

Слід зазначити, що теорія диференціальних ігор може бути розвинена в усіх напрямках теорії оптимального керування.

Для кожного практичного заняття надаються: теоретичні засади, розв'язки типових задач та задачі для домашніх завдань.

Навчальний посібник розраховано на студентів освітньої програми "Економічна аналітика" та інших освітніх програм спеціальності "Економіка". Крім того, він може використовуватись і студентами, які навчаються за освітніми програмами спеціальностей : «Маркетинг», «Менеджмент» та «Прикладна математика».

Практичні 1. Основні визначення однокритеріальної оптимізації. Класичний метод пошуку точок екстремуму функції багатьох змінних. Диференціальні умови оптимальності у випадку опуклості множини визначення функції.

Теоретичні засади.

Основні означення і результати. Нехай $\Omega \subseteq R^n$ – множина n - вимірних векторів; $f: \Omega \rightarrow R^1$ – функція, що визначена на Ω , та приймає на цій множині кінечні значення.

Означення 1.1. Точку $x_* \in \Omega$ будемо називати точкою глобального мінімуму функції $f(x)$ на множині Ω , якщо виконується нерівність

$$f(x) \geq f(x_*) \forall x \in \Omega. \quad (1.1)$$

Визначимо на R^n метрику ρ . Тоді (R^n, ρ) – метричний простір. Позначимо через $O(\epsilon, \bar{x}) = \{x \in R^n: \rho(x, \bar{x}) \leq \epsilon\}$ – ϵ - окіл точки $\bar{x}$.

Означення 1.2. Точку $x_* \in \Omega$ будемо називати точкою локального мінімуму функції $f(x)$ на множині Ω , якщо існує таке число $\epsilon > 0$, що виконується нерівність

$$f(x) \geq f(x_*) \forall x \in O(\epsilon, x_*) \cap \Omega. \quad (1.2)$$

Позначимо $\min_{x \in \Omega} f(x) = f(x_*)$, а через Ω_* – множину точок необмеженою знизу глобальних мінімумів функції $f(x)$.

Означення 1.3. Функція $f(x)$ називається обмеженою знизу на множині Ω , якщо існує таке дійсне число M , що $f(x) \geq M \forall x \in \Omega$. Функція буде, якщо існує послідовність $\{x_k\} \in \Omega$, для якої $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = -\infty$.

У тих випадках, коли $\Omega_* = \emptyset$ природнім узагальненням поняття найменшого значення функції є поняття нижньої грані функції.

Означення 1.4. Нехай функція $f(x)$ – обмежена знизу на множині Ω . Тоді число f_* будемо називати нижньою гранню функції $f(x)$ на Ω , якщо 1) $f(x) \geq f_* \forall x \in \Omega$; 2) для любого скільки завгодно малого числа $\epsilon > 0$ знайдеться точка $x_\epsilon \in \Omega$, для якої $f(x_\epsilon) < f_* + \epsilon$. Якщо функція необмежена знизу на Ω , то в якості нижньої грані приймається $f_* = -\infty$.

Нижню грань функції $f(x)$ на Ω позначають через $\inf_{x \in \Omega} f(x) = f_*$.

Означення 1.5. Послідовність $\{x_k\} \in \Omega$ називається мінімізуючою, якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \inf_{x \in \Omega} f(x) = f_*$.

Із означення 1.5 та існування нижньої грані витікає, що мінімізуюча послідовність існує завжди.

Означення 1.6.. Будемо говорити, що послідовність $\{x_k\}$ збігається до непорожньої множини Ω , якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\rho}(x_k, \Omega) = 0$, де $\hat{\rho}(x, \Omega) = \inf_{z \in \Omega} \rho(x, z)$.

Теорема 1.1. (Вейерштрас). Нехай неперервна функція $f(x)$ задана на компактній (обмеженій і замкнутій) множині Ω , або на замкненій множині Ω такій, що $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty$, де послідовність $\{x_k\} \in \Omega$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$, $\|\cdot\|$ – норма в R^n . Тоді функція $f(x)$ буде обмеженою знизу, $\Omega_* \neq \emptyset$ і є компактною множиною, будь-яка мінімізуюча послідовність збігається до Ω_* .

Зупинимось коротко на задачах максимізації функції $f(x)$, $x \in \Omega$.

Означення 1.7. Точку $x^* \in \Omega$ будемо називати точкою глобального максимуму функції $f(x)$ на множині Ω , якщо виконується нерівність

$$f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.3)$$

Означення 1.8. Точку $x^* \in \Omega$ будемо називати точкою локального максимуму функції $f(x)$ на множині Ω , якщо виконується нерівність

$$f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in O(\epsilon, x^*) \cap \Omega. \quad (1.4)$$

Позначимо $\max_{x \in \Omega} f(x) = f(x^*)$, а через Ω^* – множину точок глобальних максимумів функції $f(x)$.

Означення 1.9. Функція $f(x)$ називається обмеженою зверху на множині Ω , якщо існує таке дійсне число M , що $f(x) \leq M \quad \forall x \in \Omega$. Функція буде необмеженою зверху, якщо існує послідовність $\{x_k\} \in \Omega$, для якої $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty$.

У тих випадках, коли $\Omega^* = \emptyset$ природнім узагальненням поняття найбільшого значення функції є поняття верхньої грані функції.

Означення 1.10. Нехай функція $f(x)$ – обмежена зверху на множині Ω . Тоді число f^* будемо називати верхньою гранню функції $f(x)$ на Ω , якщо 1) $f(x) \leq f^* \quad \forall x \in \Omega$; 2) для кожного скільки завгодно малого числа $\epsilon > 0$ знайдеться точка $x_\epsilon \in \Omega$, для якої $f(x_\epsilon) > f^* - \epsilon$. Якщо функція необмежена зверху на Ω , то в якості верхньої грані приймається $f^* = \infty$.

Верхню грань функції $f(x)$ на Ω позначають через $\sup_{x \in \Omega} f(x) = f^*$.

Означення 1.11. Послідовність $\{x_k\} \in \Omega$ називається максимізуючою, якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \sup_{x \in \Omega} f(x) = f^*$.

Зв'язок між задачами мінімізації та максимізації функції

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) = - \inf_{x \in \Omega} (-f(x)). \quad (1.5)$$

Тому далі будемо вивчати лише задачі мінімізації. Якщо потрібно знайти як точки мінімуму функції $f(x)$, так і точки її максимуму, то будемо говорити про розв'язання задачі на екстремум.

Класичний метод пошуку точок екстремуму функції багатьох змінних. Розглянемо класичний метод пошуку точок екстремуму функції багатьох змінних. Нехай для функції $f(x)$, $x \in R^n$ існує матриця других похідних $f''(x) = \left\{ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1}^n$. Нехай $\hat{x}$ – точка локального екстремуму функції $f(x)$. В околі цієї точки за допомогою формули Тейлора функцію можна записати у вигляді

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + (f'(\hat{x}), h) + 0.5(f''(\hat{x})h, h) + \alpha(\hat{x}, h), \quad (1.6)$$

де $h = x - \hat{x}$, $f'(\hat{x})$ – градієнт функції $f(x)$ в точці $\hat{x}$ (вектор перших частинних похідних), $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток двох векторів в R^n , $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(\hat{x}, h)/\|h\|^2 = 0$ при $\|h\| = (h, h)^{1/2} \rightarrow 0$.

Тут зауважимо, що норма, яка породжена евклідовою метрикою, називається евклідовою.

Із (6) витікають необхідні умови оптимальності, які характеризують точку $\hat{x}$, і будуть мати вигляд

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.7)$$

Не всяка стаціонарна точка $\hat{x}$, як розв'язок системи (1.7), буде точкою локального мінімуму або максимуму. Для того щоб стаціонарна точка $\hat{x}$ була точкою локального мінімуму, згідно (6) достатньо, щоб матриця $f''(\hat{x})$ була додатньо визначеною (квадратична форма $(f''(\hat{x})h, h) > 0 \quad \forall h \neq 0$). Для того щоб стаціонарна точка $\hat{x}$ була точкою локального максимуму достатньо, щоб матриця $f''(\hat{x})$ була від'ємно визначеною (квадратична форма $(f''(\hat{x})h, h) < 0 \quad \forall h \neq 0$).

Знакосталість квадратичної форми для числової матриці A визначається критерієм Сільвестра.

Теорема 1.2. Для того щоб квадратична форма, яка визначається числовою матрицею A , була додатньо визначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$\Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, n},$$

де Δ_i – головні мінори матриці A .

Теорема 1.3. Для того щоб квадратична форма, яка визначається числовою матрицею A , була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$(-1)^i \Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

В тому випадку, коли в стаціонарній точці квадратична форма $(f''(\hat{x})h, h)$ не змінює знаку $\forall h \in R^n$, але може дорівнювати нулю при деяких $h \neq 0$, то для з'ясування поведінки функції в околі точки $\hat{x}$ можна використовувати старші похідні і пов'язані з ними форми більш високого порядку.

Диференціальні умови оптимальності у випадку опуклості множини визначення функції.

Теорема 1.4. Якщо в задачі (2.1) множина Ω опукла, функція $f(x)$ диференційовна в точці $\hat{x}_*$, тоді

1) якщо точка $\hat{x}_*$ – локальний розв'язок задачі (8), то

$$(f'(\hat{x}_*), x - \hat{x}_*) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega; \quad (1.8)$$

2) якщо функція $f(x)$ опукла на Ω і виконується умова (2.4), то $\hat{x}_*$ – глобальний розв'язок задачі (8).

Лема 1.1. Нехай Ω – поліедр, тобто

$$\Omega = \{x \in R^n: a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}, \quad (1.9)$$

де $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty, i = \overline{1, n}$ (якщо $a_i = -\infty$ або $b_i = \infty$, то відповідний знак нерівності в (1.9) слід розуміти як строгий). Тоді умова (1.8) буде еквівалентною умові

$$\frac{\partial f(\hat{x}_*)}{\partial x_i} \begin{cases} = 0, & a_i < \hat{x}_{*,i} < b_i, \\ \geq 0, & \hat{x}_{*,i} = a_i \neq -\infty, \\ \leq 0, & \hat{x}_{*,i} = b_i \neq \infty. \end{cases} \quad (1.10)$$

Лема 1.2. Нехай

$$\Omega = \{x \in R^n: x_i \geq 0, i = \overline{1, s}\},$$

де $0 \leq s \leq n$ ($s = 0$ відповідає випадку $\Omega = R^n$). Тоді умова (1.8) буде еквівалентною сукупності умов

$$\frac{\partial f(\hat{x}_*)}{\partial x_i} \geq 0, \hat{x}_* \frac{\partial f(\hat{x}_*)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, s}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial f(\hat{x}_*)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{s+1, n} \quad \blacksquare$$

Задача 1. Знайти Q_* (множину глобальних мінімумів) для функції $f(x) = \max_{t \in [0,1]} |t^2 - tx|, x \in R^1$ (множина дійсних чисел).

Розв'язок. Особливості задачі: функція, екстремуми якої шукаються, задана алгоритмічно. Для з'ясування основних питань екстремального аналізу (існування

розв'язку, застосування умов оптимальності для пошуку стаціонарних точок та визначення їх екстремальності) потрібно знайти явний вигляд функції $f(x)$.

Позначимо $f_1(t) = t^2 - tx$, де $x \in R^1$ – параметр. Тоді

$$f_1(t) = \left(t - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}.$$

1)

$$|f_1(t)| = \left| \left(t - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} \right|.$$

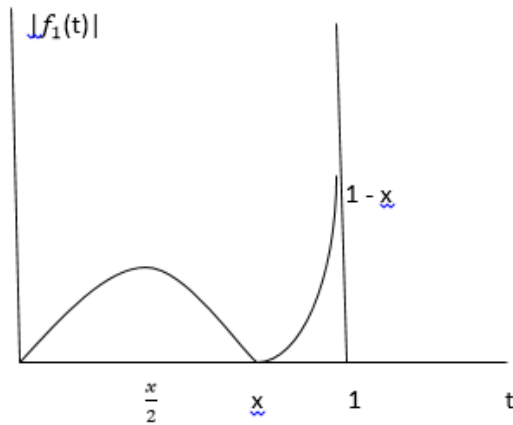


Рис. 1.1.

Якщо $0 \leq x \leq 2(\sqrt{2} - 1)$, то $\frac{x^2}{4} \leq 1 - x \rightarrow f(x) = 1 - x$ (тут $2(1 - \sqrt{2})$ – додатний розв'язок рівняння $\frac{x^2}{4} = 1 - x$).

2)

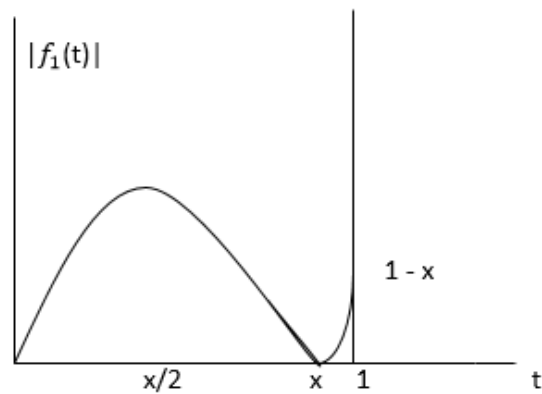


Рис.1.2.

Якщо $2(\sqrt{2} - 1) < x \leq 2$, то $\frac{x^2}{4} > 1 - x \rightarrow f(x) = \frac{x^2}{4}$.

3)

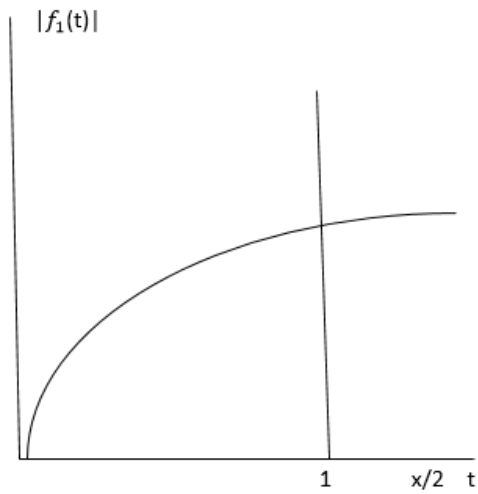
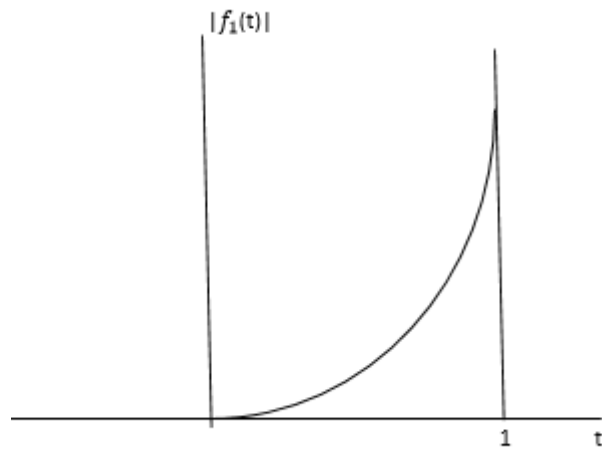


Рис.1.3.

Якщо $x > 2$, $\rightarrow f(x) = |1 - x|$.

4)



4)

Рис.1.4.

Якщо $x < 0$, $\rightarrow f(x) = 1 - x$.

5) Якщо $-\infty < x < \infty$, то

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -\infty < x \leq 2(\sqrt{2} - 1), \\ \frac{x^2}{4}, & 2(\sqrt{2} - 1) < x \leq 2, \\ |1 - x|, & x > 2. \end{cases}$$

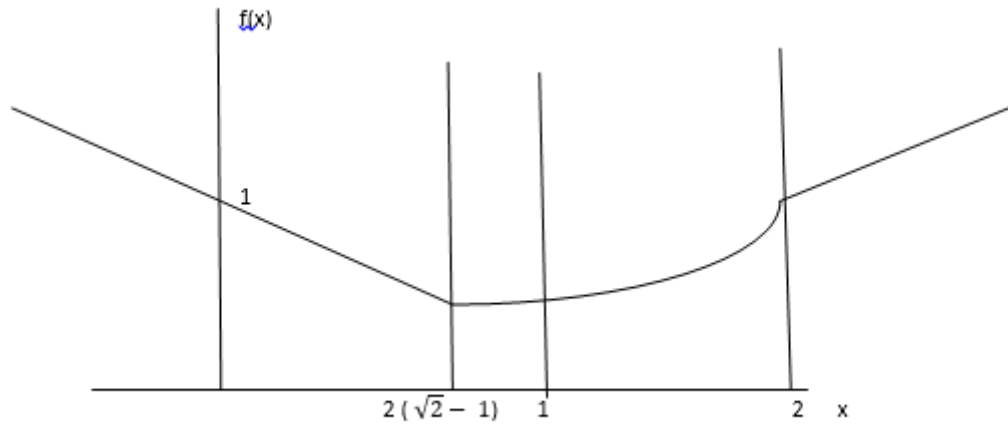


Рис.1.5.

Тоді $Q_* = \{2(\sqrt{2} - 1)\}$ •

Задача 2. Знайти всі розв'язки задачі безумовної (без обмежень) оптимізації:

$$f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2.$$

Розв'язок. Задача особливостей не має. Для розв'язку використовується стандартний метод математичного аналізу: провести дослідження на розв'язність задачі, в позитивному випадку щодо розв'язності застосувати необхідні умови оптимальності – рівність нулеві перших частинних похідних по всім змінним, знайдені таким чином стаціонарні точки аналізуються за допомогою достатніх умов оптимальності – знаковизначеності матриці других похідних.

Згідно теореми Вейерштраса задача має розв'язок. Дійсно, функція $f(x)$ є поліномом 4 – го порядку – має похідні любого порядку, тобто неперервна. Область визначення – R^2 , тобто не є компактом, але замкнута і $\lim_{||x|| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $||\cdot||$ – норма в R^2 .

1) Умови оптимальності першого порядку (правило Ферма) мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 8x_1^3 - 2x_1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 4x_2^3 - 4x_2 = 0. \end{aligned}$$

Маємо 9 стаціонарних точок: $x_1 = 0, \pm 0.5$; $x_2 = 0, \pm 1$.

2) Знаходимо другі похідні

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 24x_1^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 12x_2^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

3) Складаємо матрицю других похідних

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix};$$

згідно критерію Сільвестра, для того щоб в стаціонарній точці функція досягала локального мінімуму достатньо, щоб матриця других похідних в цій точці була додатньо визначеною :

$$\Delta_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0, \quad \Delta_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right) = \det \left| \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right| > 0;$$

для локального максимуму – від'ємно визначеною:

$$\Delta_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right) = < 0, \Delta_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right) = \det \left| \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right| > 0.$$

4) 1. $(x_1, x_2) = (0, 0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, $\Delta_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right) = -2 < 0$, $\Delta_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right) = 8 > 0 \rightarrow$ локальний максимум, $f(0, 0) = 0$;

2-3. $(x_1, x_2) = (\pm 0.5, 0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow$ не являються локальними екстремумами, $f(\pm 0.5, 0) = -\frac{1}{8}$;

4-5. $(x_1, x_2) = (0, \pm 1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow$ не являються локальними екстремумами, $f(0, \pm 1) = -1$;

6-9. $(x_1, x_2) = (\pm 0.5, \pm 1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow$ локальні мінімуми, $f(\pm 0.5, \pm 1) = -\frac{9}{8}$.

5) $Q_* = \{(\pm 0.5, \pm 1)\}$, $Q^* = \{\emptyset\}$.

Задача 3. Розв'язати задачу:

$$f(x) = 4x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 \rightarrow \min, \\ 4 \leq x_1 \leq 8, -1 \leq x_2 \leq 2.$$

Розв'язок. Задача особливостей не має. Відноситься до задач математичного програмування з прямими обмеженнями. Для пошуку стаціонарних точок потрібно: провести дослідження на розв'язність задачі, у позитивному випадку використати диференціальні умови оптимальності, застосувати достатні умови оптимальності.

Із критерія Сільвестра витікає, що функція $f(x)$ є строго опуклою. Дійсно,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; \rightarrow \Delta_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right) = 8 > 0, \Delta_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right) = \det \left| \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \right| = 31 > 0 -$$

це необхідна і достатня диференціальна умова строгої опуклості функції. Тоді задача оптимізації буде строго опуклою (обмеження – лінійні) і множина її глобальних мінімумів містить одну точку. Диференціальні умови оптимальності мають вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 8x_1 - x_2 = \begin{cases} = 0, & 4 < x_1 < 8, \\ \geq 0, & x_1 = 4, \\ \leq 0, & x_1 = 8; \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1 + 4x_2 = \begin{cases} = 0, & -1 < x_2 < 2, \\ \geq 0, & x_2 = -1, \\ \leq 0, & x_2 = 2. \end{cases}$$

Далі потрібно скласти дев'яти систем шляхом попарного комбінування цих піввідношень. Наприклад, розглянемо систему

$$8x_1 - x_2 > 0, x_1 = 4, \\ -x_1 + 4x_2 = 0, -1 < x_2 < 2.$$

Вона має розв'язок (4,1), який і буде точкою глобального мінімуму. Всі інші системи такого типу (8 штук) будуть несумісними. Зауважимо, що досліджувати на оптимальність стаціонарну точку не потрібно в силу існування єдності розв'язку задачі.

Задача 4. Розв'язати задачу методом Лагранжа

$$f(x, y) = 5x^2 + 4xy + y^2 \rightarrow \min, \\ x + y = 1.$$

Розв'язок. Задача особливостей не має. Відноситься до задач математичного програмування з функціональними обмеженнями у вигляді рівностей. Для пошуку стаціонарних точок потрібно: провести дослідження на розв'язність задачі, у позитивному випадку використати теорему Лагранжа у вигляді системи рівнянь; для визначення їх екстремальності потрібно застосувати достатні умови оптимальності.

Ця задача еквівалентна одномірній екстремальній задачі без обмежень для функції

$$\varphi(x) = 2x^2 + 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Очевидно, що $Q_* = \{-0.5, 1.5\}$.

Цей же розв'язок ми отримаємо, застосувавши метод Лагранжа для вихідної задачі.

Складемо функцію Лагранжа

$$L = 5x^2 + 4xy + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Для визначення стаціонарних точок маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 10x + 4y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 4x + 2y + \lambda = 0, \\ x + y &= 1. \end{aligned}$$

Виключаючи із цієї системи множник Лагранжа λ , отримаємо

$$\begin{aligned} 3x + y &= 0, \\ x + y &= 1. \end{aligned}$$

Звідси: $x = -0.5, y = 1.5$ •

Задача 5. Серед трикутників даного периметра знайти трикутник найбільшої площі.

Задача відноситься до того ж класу, що і задача 4, але має геометричний зміст.

Розв'язок. Позначимо довжини сторін трикутника через x, y, z , а через p – його периметр. За формулою Герона маємо

$$S_{\Delta} = \left(\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - x\right)\left(\frac{p}{2} - y\right)\left(\frac{p}{2} - z\right)\right)^{1/2}.$$

Тоді приходимо до такої екстремальної задачі:

$$\begin{aligned} \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - x\right)\left(\frac{p}{2} - y\right)\left(\frac{p}{2} - z\right) &\rightarrow \max \\ x + y + z &= p. \end{aligned}$$

Ця задача може бути розв'язана як двомірна задача безумовної оптимізації (див. задачу 4), або ж як тримірна оптимізаційна задача з функціональними обмеженнями типу рівності і для неї застосуємо теорему Лагранжа.

Функція Лагранжа буде мати вигляд

$$L = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - x\right)\left(\frac{p}{2} - y\right)\left(\frac{p}{2} - z\right) + \lambda(x + y + z - p).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - y\right)\left(\frac{p}{2} - z\right) + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - x\right)\left(\frac{p}{2} - z\right) + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - x\right)\left(\frac{p}{2} - y\right) + \lambda = 0, \\ x + y + z &= p. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо, що $x = y = z = \frac{p}{3}$ •

Домашнє завдання 1.

Задача 1.1. Знайти Q_* для функції $f(x) = ||x^2 - 1| - 1| - 1|$, $x \in R^1$.

Задача 1.2. Нехай $f(x) = \frac{1}{1 + \exp x^{-1}}$, якщо $x \neq 0$; $f(0) = 0$. Знайти точки екстремуму цієї функції на відрізках $[0,1]$, $[-1,0]$, $[-1,1]$ та на R^1 .

Задача 1.3. Нехай функція $f(x)$ аналітична на відрізку $[a, b]$, тобто ряд Тейлора для цієї функції збігається до $f(x)$, $x \in [a, b]$. Чи може ця функція мати на $[a, b]$ нескінченне число точок локального екстремуму?

Задача 1.4. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на відрізку $[a, b]$ і в точці $x_* \in [a, b]$ досягає своєї нижньої грані. Довести, що тоді необхідно, щоб $f'(x_*)(x - x_*) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Чи буде виконання цієї умови достатнім для того, щоб в точці $x_* \in [a, b]$ досягалась нижня грань функції $f(x)$ на $[a, b]$?

Задача 1.5. Знайти всі розв'язки наступних задач безумовної (без обмежень) оптимізації:

$$5.1. f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \min_{x \in R^2};$$

$$5.2. f(x) = x_1 + x_2 + 4\sin x_1 \sin x_2 \rightarrow \min_{x \in R^2};$$

$$5.3. f(x) = x_1 x_2^2 x_3^3 (7 - x_1 - 2x_2 - 3x_3) \rightarrow \max_{x \in R^3}.$$

Задача 1.6. Переконайтесь у тому, що функція $f(x) = x_1 \exp x_1 - (1 + \exp x_1) \cos x_2$ має нескінченно багато точок локального мінімуму і жодної точки локального максимуму на R^2 .

Задача 1.7. Переконайтесь у тому, що функція $f(x) = (x_1 - x_2^2)(2x_1 - x_2^2)$ досягає мінімуму в точці $\bar{x} = (0,0)$ вздовж кожної прямої, яка проходить через $\bar{x}$, але $\bar{x}$ не являється точкою локального мінімуму цієї функції.

Задача 1.8. Чи може точка $\bar{x} = (0,0)$ бути точкою глобального мінімуму для функції

$$8.1. f(x) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^4 + x_2^4}, x \neq 0; f(0) = 0?$$

$$8.2. f(x) = \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2}, x \neq 0; f(0) = 0?$$

Задача 1.9. Використовуючи геометричні міркування (метод ліній рівня), знайти розв'язок задачі математичного програмування:

$$\begin{aligned} (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 &\rightarrow \min, \\ x_1^2 + x_2^2 &\geq 9, x_1 \geq 2, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Задача 1.10. Розв'язати

$$\begin{aligned} a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2 &\rightarrow \min, \\ -1 &\leq x_1 \leq x_2 \leq 1, \end{aligned}$$

де a, b, c – такі дійсні числа, для яких виконуються нерівності $a > 0$, $4a < c > b^2$.

Задача 1.11. Розв'язати задачу методом Лагранжа

$$\begin{aligned} f(x, y) = 3x^2 + 4xy + y^2 &\rightarrow \min, \\ x + y &= 1. \end{aligned}$$

Задача 1.12. Вписати в круг трикутник з максимальною сумою квадратів сторін.

Практичні 2. Диференціальні умови оптимальності в задачі математичного програмування (теорема Лагранжа). Субградієнт та субдиференціал опуклої функції. Недиференційовні умови оптимальності.

Теоретичні засади.

Теорема Лагранжа – диференціальні умови оптимальності в задачі математичного програмування.

Розглянемо задачу вигляду

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \\ g_i(x) &\leq 0, \quad i = \overline{1, k}, \\ g_i(x) &= 0, \quad i = \overline{k+1, m}, \quad x \in U_0 \subset R^n. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Зв'яжемо із задачею (2.1) множину векторів

$$\Lambda = \{\lambda \in R^m: \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}\} \quad (2.2)$$

Для задачі (2.1) уведемо функцію Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x). \quad (2.3)$$

Градiєнт функції Лагранжа по x будемо позначати через $L'_x(x, \lambda_0, \lambda)$.

Теорема 2.1. (Принцип Лагранжа). Нехай в задачі (2.15) множина U_0 – опукла, функції $f(x), g_i(x), i = \overline{1, k}$ – диференційовні в точці $\hat{x}_* \in U_0$, функції $g_i(x), i = \overline{k+1, m}$ – диференційовні в околі точки $\hat{x}_*$. Якщо $\hat{x}_*$ – локальний розв'язок задачі (2.15), то існують число $\lambda_{0,*} \geq 0$ і вектор $\lambda_* \in \Lambda$, не рівні одночасно нулеві і такі, що

$$(L'_x(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*), x - \hat{x}_*) \geq 0 \quad \forall x \in U_0, \quad (2.4)$$

$$\lambda_{i,*} g_i(\hat{x}_*) = 0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (2.5)$$

Люба точка $\hat{x}_* \in \Omega$, що задовольняє умовам (2.4) – (2.5) при деяких $\lambda_{0,*} \geq 0, \lambda_* \in \Lambda, (\lambda_{0,*}, \lambda_*) \neq 0$, називається стаціонарною точкою задачі (2.1). Принцип Лагранжа стверджує, що при вказаних припущеннях любий локальний розв'язок задачі (2.1) являється стаціонарною точкою. Зворотнє гарантується лише при додаткових припущеннях щодо задачі (2.1).

Числа $\lambda_{i,*}, i = \overline{0, m}$ називаються множниками Лагранжа. Вони визначені з точністю до додатної постійної. Це дозволяє розглядати в теоремі 2.1 лише два випадки: $\lambda_{0,*} = 0$ або $\lambda_{0,*} = 1$. Любе додаткове припущення, яке забезпечує в рамках даної теореми випадок $\lambda_{0,*} = 1$, називають умовою регулярності. Саму задачу (2.1) при цьому називають регулярною. Для регулярної задачі функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, \lambda) = L(x, 1, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x). \quad (2.6)$$

Для регулярної задачі опуклого програмування умови (2.4) – (2.5) є не тільки необхідними, але й достатніми.

Теорема 2.2. Нехай в задачі (2.1) множина U_0 – опукла, функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, k}$ – опуклі на U_0 та диференційовні в точці $\hat{x}_* \in U_0$, функції $g_i(x)$, $i = \overline{k+1, m}$ – лінійні. Якщо при $\lambda_{0,*} = 1$ і деякому $\lambda_* \in \Lambda$ виконуються умови (2.4) – (2.5), то $\hat{x}_* = x_*$.

Наведемо деякі випадки реалізації умови (2.4) при конкретизації множини U_0 .

Лема 2.1. 1) Якщо $U_0 = R^n$, то умова (2.4) еквівалентна умові

$$L'_x(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*) = 0;$$

2) якщо

$$U_0 = \{x \in R^n: a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\},$$

де $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$, $i = \overline{1, n}$ (коли $a_i = -\infty$ або $b_i = \infty$, то відповідний знак нерівності слід розуміти як строгий).

Тоді умова (2.4) буде еквівалентною умові

$$\frac{\partial L(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*)}{\partial x_i} \begin{cases} = 0, & a_i < \hat{x}_{*,i} < b_i, \\ \geq 0, & \hat{x}_{*,i} = a_i \neq -\infty, \\ \leq 0, & \hat{x}_{*,i} = b_i \neq \infty, i = \overline{1, n}; \end{cases}$$

3) якщо

$$U_0 = \{x \in R^n: x_i \geq 0, i = \overline{1, s}\},$$

де $0 \leq s \leq n$ ($s = 0$ відповідає випадку $P = R^n$). Тоді умова (2.4) буде еквівалентною сукупності умов

$$\frac{\partial L(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*)}{\partial x_i} \geq 0, \hat{x}_* \frac{\partial L(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, s},$$

$$\frac{\partial L(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{s+1, n}.$$

Умови регулярності.

Теорема 2.3. Нехай виконуються умови теореми 2.1 і додатково виконується хоч би одна із наступних умов:

1) обмеження – рівності відсутні, тобто $k = m$, і існує точка $\bar{x} \in U_0$ така, що $g_i(\bar{x}) < 0 \forall i = \overline{1, k}$;

2) множина U_0 – поліедр, функції $g_1(x), \dots, g_k(x)$ – лінійні;

3) множина U_0 – поліедр, функції $g_{l+1}(x), \dots, g_k(x) (0 < l \leq k)$ – лінійні і існує точка $\bar{x} \in U_0$ така, що $g_i(\bar{x}) < 0 \quad \forall i = \overline{1, l}$;

4) функції $g_{l+1}(x), \dots, g_k(x) (0 \leq l \leq k)$ – лінійні і існує точка $\bar{x} \in ri U_0 \cap \Omega$ така, що $g_i(\bar{x}) < 0 \quad \forall i = \overline{1, l}$.

Якщо $\hat{x}_*$ – локальний розв'язок задачі (2.1), то існує такий вектор $\lambda_* \in \Lambda$, що при $\lambda_{0,*} = 1$ виконуються умови (2.4) – (2.5).

Субградієнт та субдиференціал опуклої функції. Субдиференціал $\partial f(x)$ функції $f(x)$, $x \in \Omega \subseteq R^n$ це множина всіх субградієнтів цієї, тобто векторів $c(y) \in R^n$, визначених в точці $y \in \Omega$, для яких виконується нерівність

$$f(x) - f(y) \geq (c(y), x - y) \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.7)$$

Властивості субдиференціалів.

- 1) Якщо $g(x) = f(x + x_0)$, то $\partial g(x) = \partial f(x + x_0)$.
- 2) Якщо $g(x) = \lambda f(x)$, $\lambda > 0$, то $\partial g(x) = \lambda \partial f(x)$.
- 3) Якщо $f_i(x)$ – опуклі функції на R^n , $I = \overline{1, m}$, то

$$\partial (\sum_{i=1}^m f_i(x)) = \sum_{i=1}^m \partial f_i(x).$$

- 4) Якщо $f_i(x)$ – опуклі функції на R^n , $I = \overline{1, m}$, то
- $$F(x) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x) \text{ – опукла,}$$
- причому,

$$\partial F(x) = \{c: \sum_{i \in Q(x)} \alpha_i c_i, \quad c_i \in \partial f_i(x), \quad \alpha_i \geq 0, \quad i \in Q(x), \quad \sum_{i \in Q(x)} \alpha_i = 1\},$$

де $Q(x) = \{j: 1 \leq j \leq m, \quad f_j(x) = F(x)\}$.

- 5) Якщо C – опукла компактна множина із R^n , то функція

$$f(x) = \max_{c \in C} (c, x) \text{ – опукла,}$$

причому,

$$\partial f(x) = \{c: c \in C, (c, x) = f(x)\} \quad \blacksquare$$

Задача 1. Використовуючи геометричні міркування та теорему Лагранжа, розв'язати задачу

$$\begin{aligned} x_1^2 + (x_2 - 1)^2 &\rightarrow \min, \\ x_1^2 + 4x_2^2 &\leq 4, \quad x_1^2 + x_2 \geq 2. \end{aligned}$$

Розв'язок. Застосування геометричних міркувань (методу ліній рівня) для задач математичного програмування загального виду і малої розмірності дозволяє звести аналіз локальних умов оптимальності (теорема Лагранжа) до одного випадку. Для порівняння представлено розв'язок задачі шляхом аналізу всіх систем оптимальності у вигляді рівнянь і нерівностей.

1. Метод ліній рівня. Із рис.2.1 витікає, що розв'язком вихідної задачі будуть точки А та В.

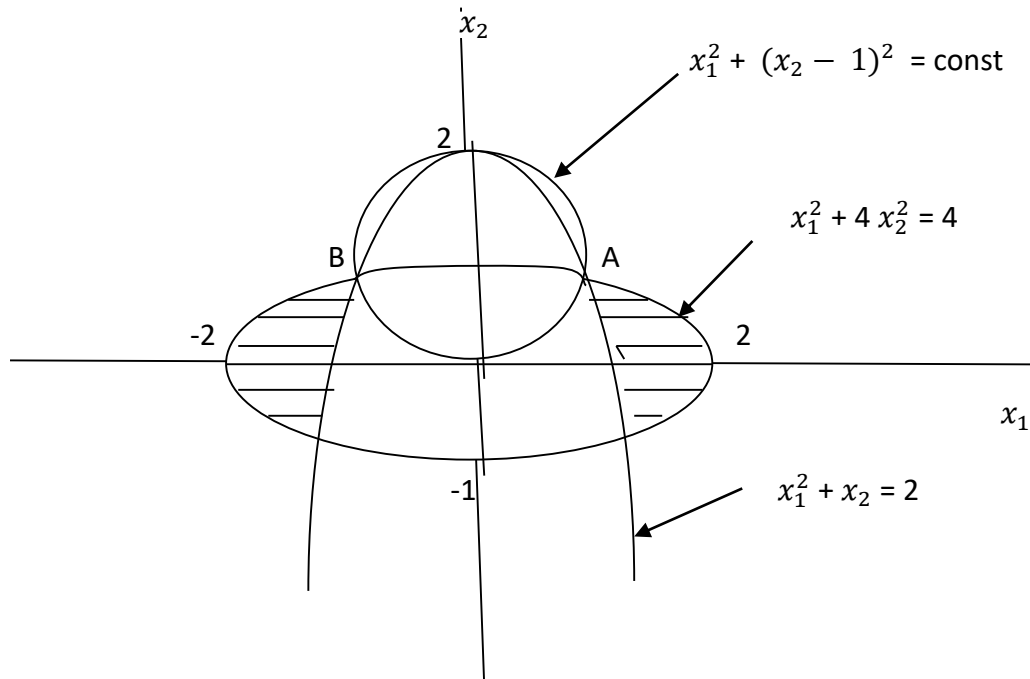


Рис.2.1.

Координати цих точок визначаються із системи

$$x_1^2 + 4x_2^2 = 4, \quad x_1^2 + x_2 = 2,$$

або із рівняння

$$4x_2^2 - x_2 - 2 = 0.$$

Його розв'язки мають вигляд

$$x_2 = \frac{1 \pm (33)^{1/2}}{8}.$$

Шукані координати будуть мати вигляд

$$A = \left(\left(\frac{15 - (33)^{1/2}}{8} \right)^{1/2}, \frac{1 + (33)^{1/2}}{8} \right), \quad B = \left(- \left(\frac{15 - (33)^{1/2}}{8} \right)^{1/2}, \frac{1 + (33)^{1/2}}{8} \right).$$

2. Застосуємо тепер теорему Лагранжа з урахуванням активних обмежень.

2.1. Запишемо спочатку вихідну задачу у стандартній формі (див. лекція 1)

$$f(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \min,$$

$$g_1(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \leq 0,$$

$$g_2(x) = -x_1^2 - x_2 + 2 \leq 0.$$

Зауважимо, що на ендегенні змінні відсутні обмеження типу рівності і прямі обмеження. Згідно з теоремою Вейерштраса (див. лекція 1) задача має розв'язок і, згідно з теоремою про регулярність вихідної задачі (див. лекція 2) внутрішність області визначення функції $f(x)$ непорожня. Тому вихідна задача оптимізації регулярна і ми можемо покласти множник Лагранжа при функції $f(x)$ рівним одиниці, тобто $\lambda_0 = 1$.

2.2. Складаємо функцію Лагранжа

$$L = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + \lambda_1 (x_1^2 + 4x_2^2 - 4) + \lambda_2 (-x_1^2 - x_2 + 2),$$

$$\lambda_i \geq 0, i = \{1, 2\}.$$

Згідно з геометричним розв'язком задачі, активними обмеженнями є 1 та 2, тобто $\lambda_i > 0$, $i = \{1, 2\}$.

2.3. Умови оптимальності будуть мати вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 x_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 1) + 8\lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0, \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 &= 0, \\ -x_1^2 - x_2 + 2 &= 0.\end{aligned}$$

Розв'язуючи два останніх рівняння умов оптимальності, знайдемо координати точок А і В. Із перших двох рівнянь системи оптимальності маємо

$$\begin{aligned}1 + \lambda_1 - \lambda_2 &= 0, \\ 2(x_2 - 1) + 8\lambda_1 x_2 - \lambda_2 &= 0.\end{aligned}$$

Тоді

$$\lambda_2 = 1 + \lambda_1, \quad \lambda_1 = -\frac{2x_2 - 3}{8x_2 - 1} = -\frac{(33)^{\frac{1}{2}} - 11}{(33)^{1/2}} > 0, \rightarrow \lambda_2 > 0.$$

Таким чином, в нашій задачі $Q_* = \{A, B\}$.

3. Застосуємо теорему Лагранжа при відсутності геометричного розв'язку.

3.1. Регулярність задачі встановлюється аналогічно п. 2.

3.2. Складаємо функцію Лагранжа

$$\begin{aligned}L &= x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + \lambda_1 (x_1^2 + 4x_2^2 - 4) + \lambda_2 (-x_1^2 - x_2 + 2), \\ \lambda_i &\geq 0, i = \{1, 2\}.\end{aligned}$$

3.3. Нехай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$. Тоді умови оптимальності будуть мати вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 1) + 8\lambda_1 x_2 = 0, \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 &= 0.\end{aligned}$$

Нехай $x_1 \neq 0$. Тоді $\lambda_1 = -1$, що суперечить припущенню. Нехай $x_1 = 0$. Тоді $x_2 = \pm 1$. Точки з такими координатами не належать області визначення функції $f(x)$.

3.4. Нехай $\lambda_2 > 0, \lambda_1 = 0$. Тоді умови оптимальності будуть мати вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 - 2\lambda_2 x_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 1) - \lambda_2 = 0, \\ -x_1^2 - x_2 + 2 &= 0.\end{aligned}$$

Нехай $x_1 \neq 0$. Тоді $\lambda_2 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, x_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$. Точки з такими координатами не належать області визначення функції $f(x)$. Нехай $x_1 = 0$. Тоді $x_2 = 2, \lambda_2 = 2$. Точка з такими координатами не належить області визначення функції $f(x)$.

3.5. Нехай $\lambda_2 > 0, \lambda_1 > 0$. Це випадок п. 2.3, тобто в нашій задачі $\Omega_* = \{A, B\}$.

Задача 2. Потрібно знайти розв'язок задачі

$$\begin{aligned}f(x) &= x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \\ g_2(x) &= -x_1 - x_2 + 1 \leq 0.\end{aligned}$$

Розв'язок. Задача аналогічна попередній. Потрібно з'ясувати її розв'язність і застосувати теорему Лагранжа для пошуку стаціонарних точок.

Задача регулярна: існує точка, для якої виконуються нерівності $g_1(\bar{x}) < 0, g_2(\bar{x}) < 0$, наприклад, $\bar{x}' = (0.51, 0.51)$. Згідно теореми Вейерштаса, задача має розв'язок.

1. Складаємо функцію Лагранжа

$$L = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2 (-x_1 - x_2 + 1), \lambda_i \geq 0, i = \{1, 2\}.$$

2. Нехай $\lambda_i > 0, i = \{1, 2\}$. Тоді умови оптимальності будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 + x_2 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1 + 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 &= 0, \\ -x_1 - x_2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Із двох останніх рівнянь системи оптимальності знаходимо дві точки $(x^1)' = (0, 1)$, $(x^2)' = (1, 0)$. Для першої точки із двох перших рівнянь системи оптимальності знаходимо $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = -0.5$,

тобто ця точка не являється стаціонарною. Для другої точки із двох перших рівнянь системи оптимальності знаходимо

$$\lambda_2 = 1, \lambda_1 = -0.5,$$

тобто ця точка теж не являється стаціонарною.

3. Нехай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$. Тоді умови оптимальності будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 + x_2 + 2\lambda_1 x_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1 + 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Виключаючи λ_1 із перших двох рівнянь, отримаємо рівняння

$$x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

Яке разом із останнім рівнянням системи оптимальності породжує чотири точки $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$. Ні одна із них не являється стаціонарною точкою в силу того, що

$$\lambda_1 = -\frac{2x_1 + x_2}{2x_1} < 0$$

при таких значеннях координат.

4. Нехай $\lambda_2 > 0, \lambda_1 = 0$. Тоді умови оптимальності будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 + x_2 - \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1 + 2x_2 - \lambda_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язуючи останню систему, отримаємо

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

тобто ця точка є стаціонарною. Згідно теореми Вейерштраса, задача має розв'язок: $f(x)$ – неперервна, множина Ω , яка є пертином розв'язків нерівностей $g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0$ – компактна. Тоді в силу єдиності стаціонарної точки вона і буде точкою глобального мінімуму. Більше того, функція $f(x)$ є строго опуклою в силу критерію Сільвестра: матриця других похідних буде додатньо визначеною, тобто задача буде строго опуклою і мати єдиний розв'язок •

Задача 3. Знайти субдиференціал функції

$$f(x) = |x + 1| + |x - 1|, x \in R^1.$$

Розв'язок. Із рис. 2.2. витікає, що функція $f(x)$ має таке аналітичне представлення

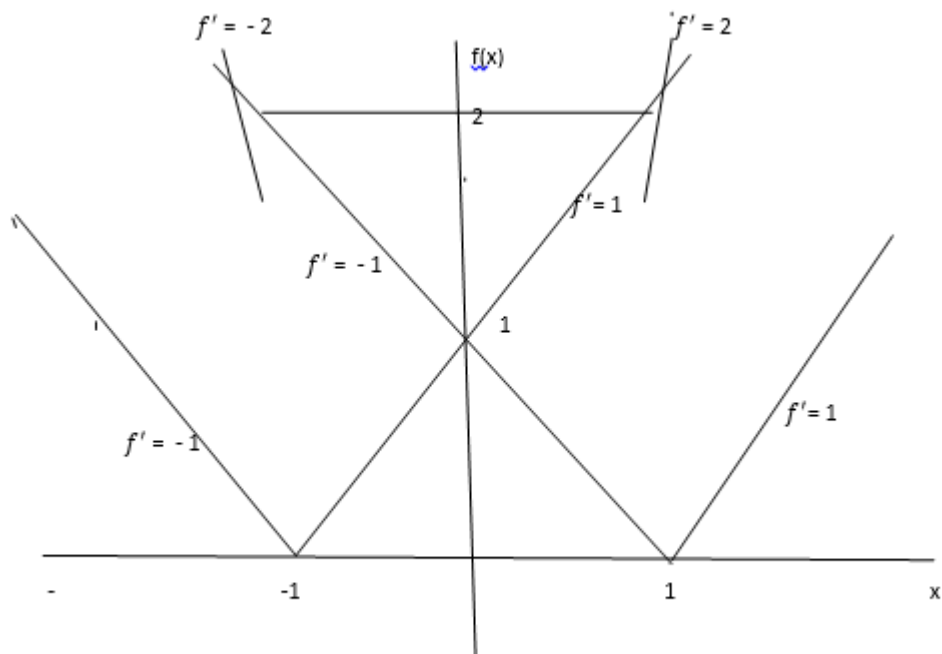


Рис.2.2.

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & -\infty < x \leq -1, \\ 2, & -1 < x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq \infty \end{cases}. \quad (2.8)$$

Спираючись на означення субдиференціала та вигляд функції $f(x)$ – (2.8), отримаємо

$$\partial f(x) = \begin{cases} -2, & -\infty < x < -1, \\ [-2, 0], & x = -1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ [0, 2], & x = 1, \\ 2, & 1 < x < \infty \end{cases}. \quad (2.9)$$

Отримаємо той же результат, використовуючи властивості субдиференціала. Нам підходить властивість 3). Розглянемо дві функції

$$f_1(x) = |x + 1|, \quad f_2(x) = |x - 1|.$$

Тоді

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\partial f_1(x) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < -1, \\ [-1, 1], & x = -1, \\ 1, & -1 < x < \infty \end{cases}, \quad \partial f_2(x) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 1, \\ [-1, 1], & x = 1, \\ 1, & 1 < x < \infty \end{cases}.$$

Таким чином,

- 1) якщо $-\infty < x < -1$, то $\partial f(x) = -2$;
- 2) якщо $x \in (-1, 1)$, то $\partial f(x) = 0$;
- 3) якщо $x = -1$, то $\partial f(x) = [-2, 0]$;
- 4) якщо $1 < x < \infty$, то $\partial f(x) = 2$;
- 5) якщо $x = 1$, то $\partial f(x) = [0, 2]$,

або

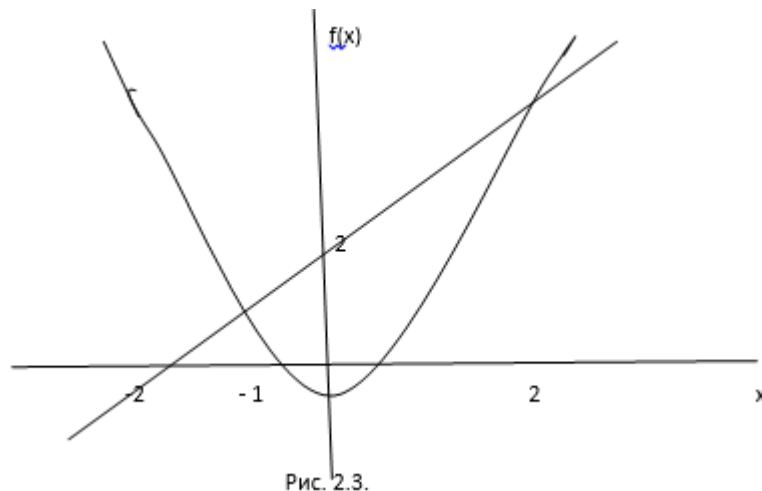
$$\partial f(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) = \begin{cases} -2, & -\infty < x < -1, \\ [-2, 0], & x = -1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ [0, 2], & x = 1, \\ 2, & 1 < x < \infty \end{cases},$$

що співпадає із формулою (2.9) •

Задача 4. Знайти субдиференціал функції

$$F(x) = \max \{ x^2, x + 2 \}.$$

Розв'язок. Із рис. 2.3. витікає, що функція $f(x)$ має таке аналітичне представлення



$$F(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq -1, \\ 2 + x, & -1 < x \leq 2, \\ x^2, & 2 < x \leq \infty \end{cases},$$

$$\partial F(x) = \begin{cases} 2x, & -\infty < x < -1, \\ [-2, 1], & x = -1, \\ 1, & -1 < x < 2, \\ [1, 4], & x = 2, \\ 2x, & 2 < x < \infty \end{cases}. \quad (2.10)$$

Цей же результат дасть властивість 4). Дійсно, збудуємо функцію $Q(x)$. Для цього позначимо: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2 + x$. Тоді

$$Q(x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x < -1 \\ \{1, 2\}, & x = -1, \\ 2, & -1 < x < 2, \\ \{2, 1\}, & x = 2 \\ 1, & 2 < x < \infty \end{cases};$$

$$c_1(x) = \partial f_1(x) = 2x, x \in R^1, \quad c_2(x) = \partial f_2(x) = 1, x \in R^1.$$

Нехай:

$$1) -\infty < x < -1, \text{ тоді } \alpha_1(x) = 1, \quad \partial F(x) = c_1(x) \alpha_1(x) = 2x;$$

2) $x = -1$, $\partial F(x) = c_1(-1) \alpha_1(-1) + c_2(-1) \alpha_2(-1) = -2 \alpha_1(-1) + (1 - \alpha_1(-1)) = [-2, 1]$, якщо $\alpha_1(-1) \in [1, 0]$;

3) $-1 < x < 2$, тоді $\alpha_2(x) = 1$, $\partial F(x) = c_2(x) \alpha_1(x) = 1$;

4) $x = 2$, $\partial F(x) = c_1(2) \alpha_1(2) + c_2(2) \alpha_2(2) = 4 \alpha_1(2) + (1 - \alpha_1(2)) = [1, 4]$, якщо $\alpha_1(2) \in [0, 1]$;

5) $2 < x < \infty$, тоді $\alpha_1(x) = 1$, $\partial F(x) = c_1(x) \alpha_1(x) = 2x$.

Це співпадає з (2.10) •

Задача 5. Знайти всі розв'язки задачі

$$f(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} |x_j - a_j| \rightarrow \min,$$

$$\sum_{1 \leq j \leq n} x_j = 0, \quad a_j \in R^1.$$

Розв'язок. Складемо функцію Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \sum_{1 \leq j \leq n} |x_j - a_j| + \lambda \sum_{1 \leq j \leq n} x_j.$$

Доповнення : *двоїстість опуклих задач нелінійного програмування.*

Розглянемо задачу нелінійного програмування

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \\ g_i(x) &\leq 0, \quad i = \overline{1, k}, \\ g_i(x) &= 0, \quad i = \overline{k+1, m}, \quad x \in U_0 \subseteq R^n. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Зв'яжемо із цією задачею множини векторів

$$\Omega = \{x \in U_0 \subseteq R^n: g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad g_i(x) = 0, \quad i = \overline{k+1, m}\}, \quad (2.12)$$

$$\Lambda = \{\lambda \in R^m: \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}\}. \quad (2.13)$$

і функцію Лагранжа (для регулярної задачі)

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j(x).$$

Двоїстою до вихідної задачі називається задача

$$\varphi(\lambda) \rightarrow \max, \quad \lambda \in \Lambda, \quad (2.14)$$

де

$$\varphi(\lambda) = \inf_{x \in \Omega} L(x, \lambda).$$

Нехай виконуються умови теореми про достатні умови оптимальності у формі принципу Лагранжа. Тоді точка x_* буде розв'язком вихідної задачі тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор $\lambda^* \in \Lambda$, що справедливо співвідношення двоїстості

$$f(x_*) = \varphi(\lambda^*),$$

яке рівносильне умовам

$$L(x_*, \lambda^*) = \min_{x \in \Omega} L(x, \lambda^*),$$

$$\lambda_i^* g_i(x_*) = 0, \quad i = \overline{1, k} \quad \bullet$$

Тепер повернемося до нашого прикладу. Безпосередньо перевіряємо (див. Рис. 2.4),

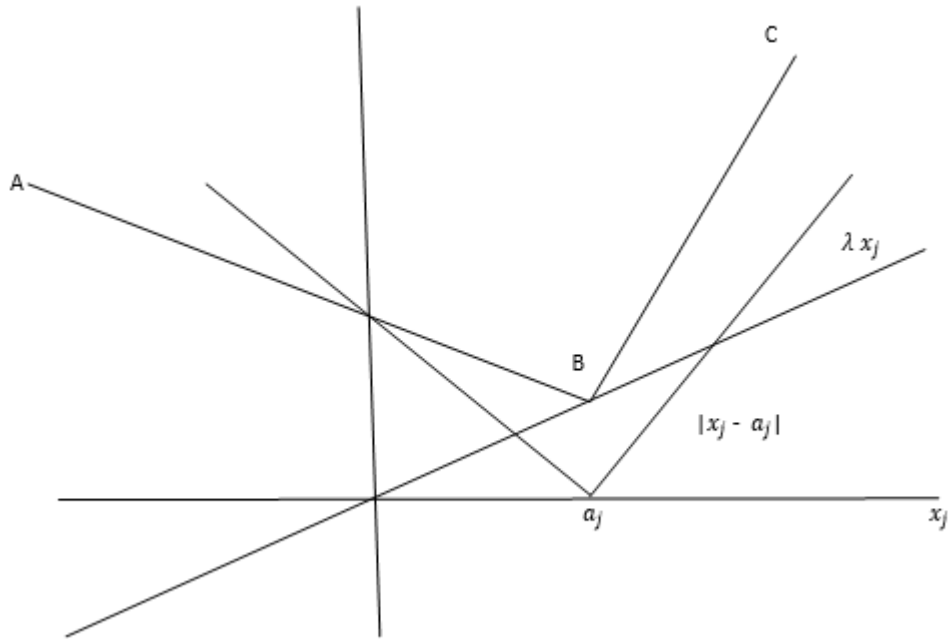


Рис.2.4.

що вздовж ламаної ABC будемо мати

$$\inf_{x_j \in R^1} (|x_j - a_j| + \lambda x_j) = \begin{cases} \lambda a_j, & |\lambda| \leq 1, \\ -\infty, & |\lambda| > 1 \end{cases}.$$

Тоді

$$\varphi(\lambda) = \inf_{x \in R^n} L(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda A, & |\lambda| \leq 1, \\ -\infty, & |\lambda| > 1 \end{cases},$$

де

$$A = \sum_{j=1}^n a_j.$$

Двоїста задача має вигляд

$$\varphi(\lambda) = \lambda A \rightarrow \max, |\lambda| \leq 1.$$

Її розв'язком є величина $\lambda^* = \text{sign } A$, і при цьому $\varphi(\lambda^*) = |A|$. Тоді, згідно твердженню із додатку, вказаний розв'язок співпадає із задачею

$$\sum_{1 \leq j \leq n} |x_j - a_j| = |A|, \quad \sum_{1 \leq j \leq n} x_j = 0. \quad (2.15)$$

Якщо $A = 0$, то $x_j^* = a_j$, $j = \overline{1, n}$ – єдиний розв'язок нашої задачі. Нехай $A \neq 0$. Будемо шукати розв'язок задачі (2.15) у вигляді

$$x_j = a_j - \lambda_j A, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тоді для чисел λ_j отримаємо систему

$$\sum_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j| = 1, \quad \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_j = 1.$$

Таким чином,

$$x_j^* = a_j - \lambda_j^* A, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\lambda_j^* \geq 0, \quad \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_j^* = 1.$$

Наведемо геометричну ілюстрацію розв'язку.

Нехай $n = 2$, $a_j > 0$, $a_2 > a_1$, $\lambda_1^* = \lambda$, $\lambda_2^* = 1 - \lambda$. Тоді

$$x_1^* = a_1 - \lambda(a_1 + a_2) = a_1(1 - \lambda) - \lambda a_2 \rightarrow x_1^* \in [-a_2, a_1],$$

$$x_2^* = a_2 - (1 - \lambda)(a_1 + a_2) = a_2 \lambda - (1 - \lambda)a_1 \rightarrow x_2^* \in [-a_1, a_2].$$

Домашнє завдання 2.

Задача 2.1. Використовуючи геометричні міркування та принцип Лагранжа, розв'язати задачу

$$x_1 \rightarrow \max, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \geq 1, x_1 + x_2 \leq 1.$$

Задача 2.2.

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_j \leq b, b \in R^1.$$

Задача 2.3. Знайти субдиференціал функції

$$f(x) = \max\{|x|, |x - 2|\}, x \in R^1.$$

Задача 2.4. Знайти субдиференціал функції

$$f(u) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x + t y|, u = (x, y) \in R^2.$$

Задача 2.5. Розв'язати задачу

$$f(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} |x_j - a_j| \rightarrow \min, \\ \sum_{1 \leq j \leq n} x_j^2 \leq 1, a_j \in R^1.$$

Практичні 3. Ефективні та слабо ефективні оцінки та розв'язки задач векторної оптимізації.

Теоретичні засади.

Постановка задачі векторної оптимізації. Розглянемо таку задачу: $x \in X \subset R^n$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \rightarrow (\max), \quad (3.1)$$

де $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ – однозначні функції на Ω .

В задачі (3.1) операцією $(\max)$ ми фіксуємо наш намір знайти такі вектори (альтернативи) $x \in X$, які б одночасно максимізували (при $(\min)$ – мінімізували) компоненти вектора f . Якщо такий вектор існує, то його варто вважати розв'язком задачі. Але такі випадки унікальні. Для того щоб розширити коло розв'язних

оптимізаційних векторних моделей, потрібно ввести відношення переваги для векторів, що дасть можливість визначити операцію (тах) в задачі (3.1).

Відношення переваги та функції цінності. Досить загальним і добре розробленим являється спосіб опису переваг на "мові" бінарних відношень.

Нехай A довільна множина. Бінарним відношенням ρ на множині A називається підмножина множини $A^2 = A \times A$, тобто сукупність впорядкованих пар (a, b) , де $a, b \in A$. Якщо $(a, b) \in \rho$, то кажуть, що a та b знаходяться у відношенні ρ і цей факт записують таким чином: $a\rho b$. В залежності від властивостей бінарних відношень здійснюють їх типізацію. Наведемо визначення найбільш розповсюджених типів бінарних відношень.

Відношення ρ називається рефлексивним, якщо $(a, a) \in \rho$ для любого $a \in A$, іррефлексивним, якщо $(a, a) \notin \rho$, тобто a несправедливо для жодного $a \in A$.

Відношення ρ називається симетричним, якщо із $(a, b) \in \rho$ витікає $(b, a) \in \rho$, асиметричним, якщо $(a, b) \in \rho$ тягне за собою $(b, a) \notin \rho$, і антисиметричним, якщо із $(a, b) \in \rho$ і $(b, a) \in \rho$ випливає $a = b$.

Відношення ρ називається транзитивним, якщо із $(a, b) \in \rho$ і $(b, c) \in \rho$ витікає $(a, c) \in \rho$.

Елементи a і b із A називаються порівнювальними по ρ , якщо справедливо або $a\rho b$, або $b\rho a$, і непорівнювальними по ρ в зворотньому випадку. Відношення ρ називається повним (або зв'язним), якщо довільні $a, b \in A$ порівнювальні (в тому числі при $a = b$). Відношення, яке не являється повним, називається частковим (або незв'язним).

Рефлексивне, симетричне і транзитивне відношення називається еквівалентністю.

Іррефлексивне транзитивне відношення називається строгим (частковим) порядком, а рефлексивне і транзитивне відношення – (частковим) квазіпорядком. Антисиметричний квазіпорядок називається (частковим) порядком.

На R^1 бінарне відношення $\geq$ є повним порядком, а бінарне відношення $>$ – лише строгим частковим порядком.

Розглянемо відношення $\geq, \succ, >, \succ,$ які визначаються на R^m наступним чином:

$$1) a \geq b \leftrightarrow a_i \geq b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

2) $a \succ b \leftrightarrow a \geq b$ і $a \neq b$ (тобто виконуються m нерівностей $a_i \geq b_i$, причому хоч би одне із них - строге;)

$$3) a > b \leftrightarrow a_i > b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

Очевидно, що відношення 1) є частковим порядком, відношення 2) і 3) - строгі часткові порядки.

Елемент $a^0 \in A$ називається *максимальним по P відносно B* , якщо в B не існує елемента a , строго більш переважного, ніж a^0 .

Числова функція ψ , яка визначена на A , називається *зростаючою (неспадаючою) по P* , якщо із aPb слідує $\psi(a) > \psi(b)$ (відповідно $\psi(a) \geq \psi(b)$) для любых $a, b \in A$. Має місце

Лема 3.1. Нехай $B \subseteq A$ і $a^0 \in B$ доставляє неспадуючій по P функції ψ найбільше на B значення. Для того щоб елемент a^0 був максимальним по P , достатньо виконання однієї із наступних умов:

- 1) ψ зростає по P на B ;
- 2) a^0 – єдина точка максимуму функції ψ на B .

Ефективні та слабо ефективні оцінки та розв'язки задач векторної оптимізації. Будемо вважати, що всі компоненти вектора f являються рівнозначними. Значення $f_i(x)$ при фіксованому $x \in X$ будемо називати i -ою оцінкою в фіксованій точці. Нехай $Y_i = f_i(X)$. Тоді $Y = Y_1 \times \dots \times Y_m \subseteq R^m$ – множина оцінок векторної задачі максимізації. Із попернього пункту витікає, що на Y можна ввести відношення нестрогої переваги $\succeq$, два відношення строгої переваги $\succ, >$ та відношення байдужості $=$, яке являється відношенням еквівалентності: рефлексивне, симетричне, транзитивне. Згідно з загальним означенням максимального елементу попереднього пункту, оцінка $y^* \in Y$ називається *найкращою по $\succeq$ в Y* , якщо $y^* \succeq y \ \forall y \in Y$. В силу того, що відношення $\succeq$ є частковим порядковим, то може існувати лише одна така оцінка.

Оцінка $y^0 \in Y$ називається *максимальною по $\succ(>)$ відносно Y* , якщо не існує оцінки $y \in Y$ такої, що $y \succ y^0$ ($y > y^0$). Оцінка, максимальна по $\succeq$, називається *ефективною або Парето - оптимальною*. Множину ефективних оцінок позначимо через $P(Y)$.

Оцінка, максимальна по $>$, називається *слабо ефективною або оптимальною по Слейтеру*. Множину таких оцінок позначимо через $S(Y)$.

Оскільки із $y > y^0$ витікає $y \succeq y^0$, то всяка ефективна відносно Y оцінка являється і слабо ефективною, так що $P(Y) \subseteq S(Y)$.

Умови оптимальності. Для ефективних по Слейтеру оцінок має місце

Теорема 3.1. Нехай $y^0 \in Y$ і всі $y_i^0 > 0$. Оцінка y^0 слабо ефективна тоді і тільки тоді, коли існує вектор $\mu \in M$ такий, що

$$\min_{i \in [0, m]} \mu_i y_i^0 = \max_{y \in Y} \min_{i \in [0, m]} \mu_i y_i. \quad (3.2)$$

Для слабо ефективної оцінки $y^0 \in Y$ можемо покласти $\mu = \mu^0$, де $\mu^0 \in M$ – вектор з компонентами

$$\mu_i^0 = \frac{\lambda^0}{y_i^0}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \lambda^0 = \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{y_k^0} \right)^{-1}, \quad (3.3)$$

і тоді

$$\max_{y \in Y} \min_{i \in [0, m]} \mu_i y_i^0 = \lambda^0,$$

причому, M – множина векторів із R^m з додатними компонентами, що в сумі дорівнюють одиниці.

Теорема 3.2. Якщо функція $\varphi(y)$ зростає по $>$ на Y , то довільна її точка максимуму на Y буде слабо ефективною.

Теорема 3.3. Нехай функція $\varphi(y)$ не спадає по $\geq$ на Y , а y^0 – її точка максимуму на Y . Для ефективності y^0 достатньо виконання однієї із умов:

- 1) φ зростає по $\geq$ на Y ,
- 2) y^0 – єдина точка максимуму φ на Y .

Для практичного використання результатів наведених вище двох теорем (перевірки умови зростання функції $\varphi(y)$ по $>$ на Y чи умови не спадання по $\geq$ на Y) корисною є така

Лема 3.2. Якщо функція $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_m)$ визначена на $Z = Z_1 \times \dots \times Z_m$, $Z_i \in R$ і не спадає по кожній змінній y_i (зростає по кожній змінній y_i ; не спадає по кожній і зростає хоч би по одній змінній y_i) при любых фіксованих значеннях інших змінних $y_j \in Z_j$, то така функція не спадає по $\geq$ та $>$ (зростає по $\geq$; зростає по $>$).

В якості функції $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_m)$ часто беруть лінійну функцію

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_m) = i = \sum_{i=1}^m y_i \mu_i, \quad \mu_i > 0.$$

Тоді люба точка максимуму цієї функції буде оптимальною за Парето (ефективною) ■

Задача 1. Знайти за визначенням множину ефективних оцінок (оптимальних за Парето) у двокритеріальній задачі.

$$f_1(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \quad f_2(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \quad x \in X,$$

де $X = \{x_1 + x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \leq 6, x \in R_+^2\}$.

Розв'язок. Відобразимо область визначення показників X в область їх значень Y (див. Рис.3.1.)

1.1. Відобразимо ділянку границі $AB = \{x_1 \in [0, 4], x_2 = 0\}$. Тоді $y_1 = 2x_1, y_2 = x_1$ і $y_2 = 0.5y_1, y_1 \in [0, 8]$ (див. Рис.3.2), що буде відповідати ділянці $f(A) f(B)$.

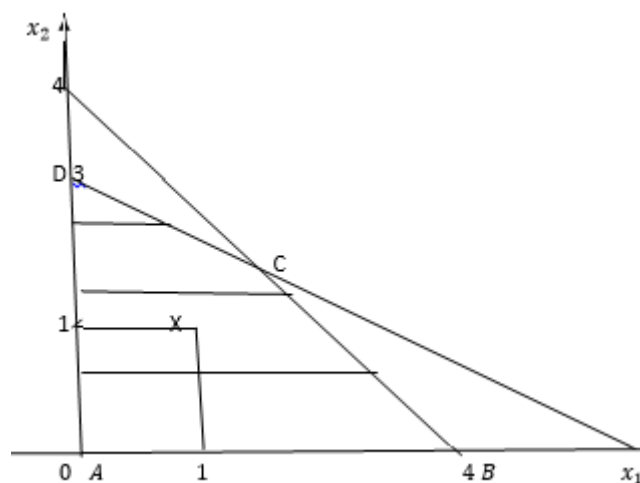


Рис.3.1.

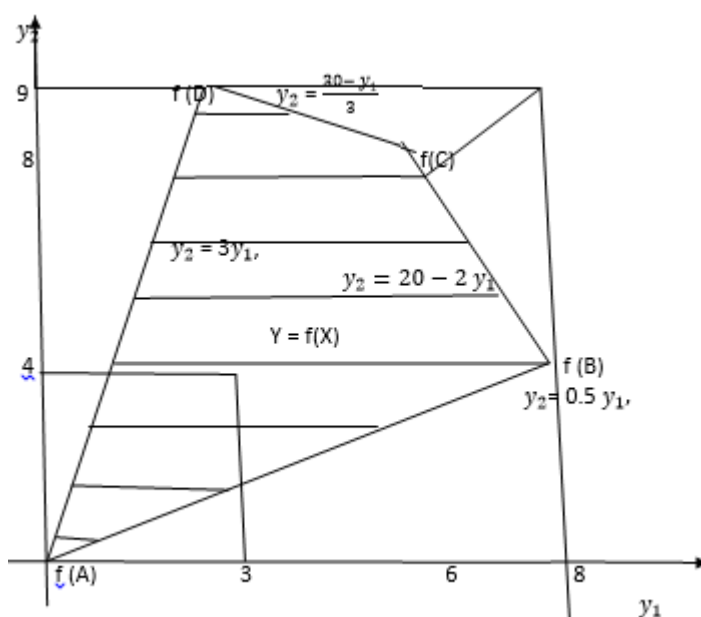


Рис.3.2.

1.2. Знайдемо координати точки С як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 &= 6. \end{aligned}$$

Звідси – С(2,2).

1.3. Відобразимо ділянку границі $BC = \{x_2 = 4 - x_1, x_1 \in [2,4]\}$. Тоді $y_2 = 20 - 2y_1, y_1 \in [6,8]$, що буде відповідати ділянці $f(B)f(C)$.

1.4. Відобразимо ділянку границі $DC = \{x_1 \in [0,2], x_2 = 0.5(6 - x_1)\}$. Тоді $y_2 = \frac{30 - y_1}{3}, y_1 \in [3,6]$, що буде відповідати ділянці $f(C)f(D)$.

1.5. Відобразимо ділянку границі $AD = \{x_1 = 0, x_2 \in [0,3]\}$. Тоді $y_2 = 3y_1, y_1 \in [0,3]$, що буде відповідати ділянці $f(B)f(A)$.

1.6. Візьмемо довільну точку в області X, наприклад точку з координатами (1,1).

Її образом буде точка з координатами (3, 4), яка буде належати області Y. Тоді внутрішність області X відобразиться у внутрішність області Y.

1.7. Розв'язком задачі буде множина: $P(Y) = S(Y) = f(D)f(C) \cup f(B)f(C)$.

1.8. Виділимо один розв'язок методом ідеальної точки. Із рис.3.2 бачимо, що ідеальна точка буде мати координати (8, 9), але вона не буде належати множині Y. Побудуємо її проекцію на множину $P(Y)$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$y_2 = 20 - 2 y_1,$$

$$y_2 = 5 + 0.5 y_1.$$

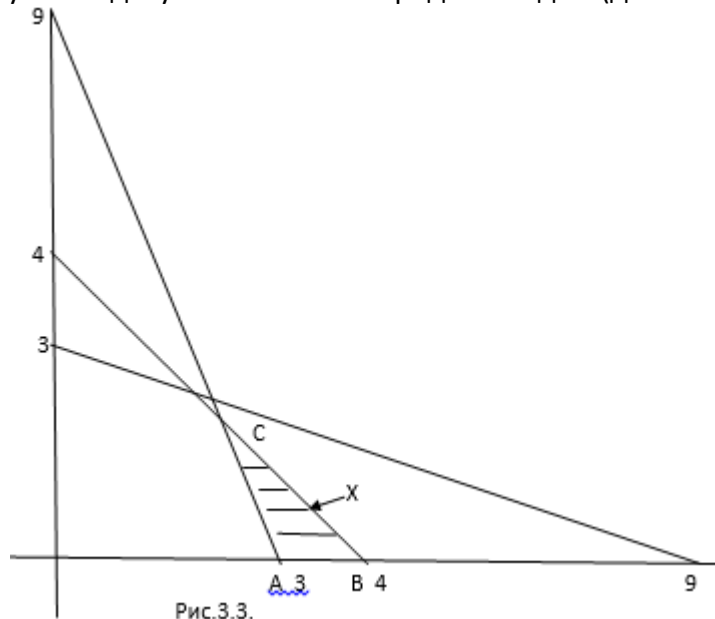
Друге рівняння у цій системі отримане із двох умов: координати ідеальної точки, добуток кутових коефіцієнтів ортогональних прямих довінює - 1. Шукана точка буде мати координати (6, 8) •

Задача 2. Знайти за визначенням множину слабо ефективних оцінок (оптимальних за Слейтером) у двокритеріальній задачі

$$f_1(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max, f_2(x) = x_1 + 4 x_2 \rightarrow \max, x \in X,$$

де $X = \{3 x_1 + x_2 \geq 9, x_1 + 3 x_2 \leq 9, x_1 + x_2 \leq 4, x \in R_+^2\}$.

Розв'язок. Розв'язуємо задачу за схемою попередньої задачі (див.Рис.3.3.)



2.1. Відобразимо ділянку границі $AB = \{x_1 \in [3,4], x_2 = 0\}$. Тоді $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1$ і $y_2 = y_1$, $y_1 \in [3,4]$, що буде відповідати ділянці $f(A) f(B)$ на рис.3.4.

2.2. Знайдемо координати точки C як розв'язок системи рівнянь

$$x_1 + x_2 = 4,$$

$$3 x_1 + x_2 = 9.$$

Звідси $C(2.5,1.5)$.

2.3. Відобразимо ділянку границі $BC = \{x_2 = 4 - x_1, x_1 \in [2.5,4]\}$. Тоді $y_2 = 16 - 3 x_1$, $y_1 = 4$, що буде відповідати ділянці $f(B) f(C)$.

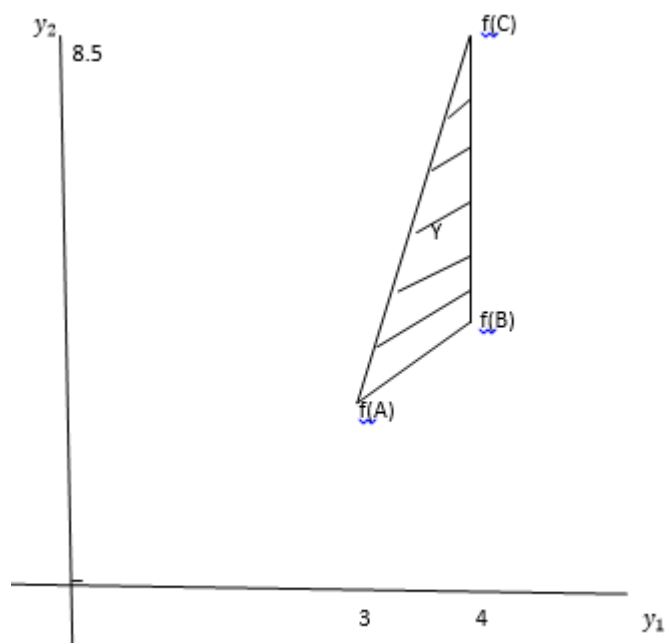


Рис.3.4.

2.4. Відобразимо ділянку границі $AC = \{x_1 \in [2.6, 3], x_2 = 9 - 3x_1\}$.

Тоді $y_1 = 9 - 2x_1$, $y_2 = 36 - 11x_1$ і $y_2 = \frac{61}{2} - \frac{11}{2}y_1$, що буде відповідати ділянці $f(C)f(A)$.

2.5. $S(Y) = f(B)f(C)$, $P(Y) = \emptyset$ •

Задача 3. Знайти за допомогою згортки множину ефективних оцінок (оптимальних за Парето) у двокритеріальній задачі

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \quad x \in X, \end{aligned}$$

де

$$X = \{x_1 + x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \leq 6, x \in R_+^2\}.$$

Розв'язок. Це задача 1. Запишемо для неї лінійну згортку в області Y

$$y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2,$$

де

$$\mu_i \geq 0, y_i = f_i(x), \quad i = \overline{1,2}.$$

Вона досягає свого максимуму в точках (див. рис. 3.5) $P(Y) = f(D)f(C) \cup f(B)f(C)$ •

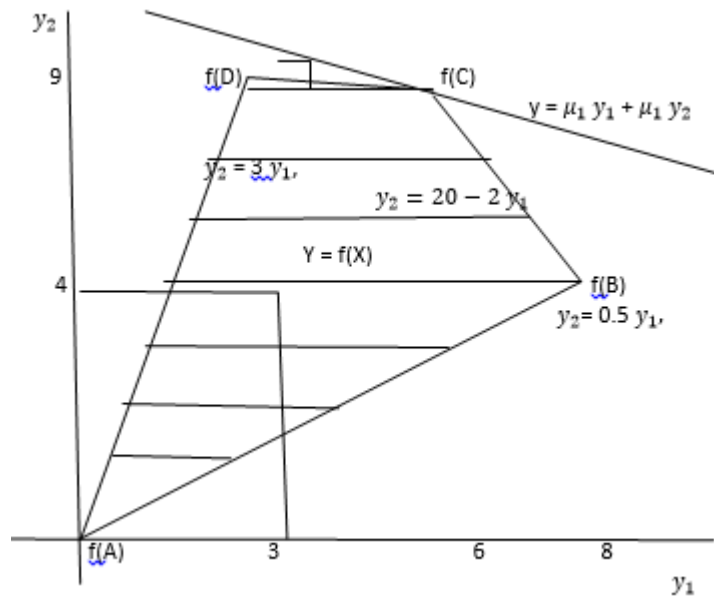


Рис.3.5.

Домашнє завдання 3.

Задача 3.1. Знайти за визначенням множину ефективних оцінок (оптимальних за Парето) у двокритеріальній задачі

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= x_2 \rightarrow \max, x \in X, \end{aligned}$$

де

$$X = \{x_1 + x_2 \geq 5, -4x_1 + x_2 \leq 0, x_1 - 4x_2 \leq 0, x \in R_+^2\}.$$

Задача 3.2. Знайти за визначенням множину слабо ефективних оцінок (оптимальних за Слейтером) у двокритеріальній задачі

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, x \in X, \end{aligned}$$

де

$$X = \{-x_1 + 2x_2 \geq 2, 3x_1 - 2x_2 \leq 6, x_1 - x_2 \leq 3, x \in R_+^2\}.$$

Задача 3.3. Знайти за допомогою згортки множину ефективних оцінок (оптимальних за Парето) у двокритеріальній задачі

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1 \rightarrow \max, \\ f_2(x) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, x \in X, \end{aligned}$$

де

$$X = \{x_1 + x_2 \geq 5, -2x_1 + x_2 \leq 0, x_1 - 2x_2 \leq 0, x \in R_+^2\}.$$

Практичні 4. Гарантована рівновага, рівновага за Нешем і Бержу.

Теоретичні засади.

Визначення безкоаліційної гри та оптимальність.

Означення 4.1. Безкоаліційною грою називається система

$$\Gamma = \{I, \{X_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I}\}, \quad (4.1)$$

в якій I і $X_i \in R^n$, $i \in I$ – множини, а H_i – дійсні функції на множині $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Елементи множини $I = \{1, \dots, m\}$ називаються гравцями, елементи кожної із множин $x^{(i)} \in X_i$ – стратегіями гравця i , елементи декартового добутку $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in X$ – ситуаціями, $H_i(x)$ – виграш гравця i в ситуації x .

Змістовно процес гри Γ полягає у виборі кожним із гравців однієї своєї стратегії $x^{(i)} \in X_i$, яка б по можливості збільшувала його індивідуальний виграш $H_i(x)$.

Визначимо декілька частинних класів безкоаліційних ігор.

Означення 4.2. Безкоаліційна гра Γ із (1.1) називається грою з постійною сумою, якщо існує постійна c така, що

$$\sum_{i \in I} H_i(x) = c \quad (4.2)$$

для всіх ситуацій $x \in X$.

У випадку двох гравців з нульовою сумою будемо мати антоганістичну гру двох осіб.

Означення 4.3. Якщо в безкоаліційній грі Γ із (4.1) множина стратегій $x^{(i)}$ кожного із гравців $i \in I$ кінечна, то гра Γ називається кінечною.

Кінечна гра двох осіб називається біматричною в силу можливостей росташування виграшів гравців у вигляді матриці.

Під оптимальністю будемо розуміти різні варіанти формалізованого опису змістовних представлень про вигідність, стійкість і справедливість.

Допустимі ситуації та ситуації рівноваги. Нехай $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}, x^{(i)}, x^{(i+1)}, \dots, x^{(m)})$ – довільна ситуація у грі Γ , $\hat{x}^{(i)}$ – деяка стратегія i -го гравця. Тоді $x \mid \hat{x}^{(i)} = (x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}, \hat{x}^{(i)}, x^{(i+1)}, \dots, x^{(m)})$ – нова ситуація у грі Γ .

Означення 4.4. Ситуація x в грі (4.1) називається допустимою для гравця i , якщо для будь-якої його стратегії $\hat{x}^{(i)}$

$$H_i(x \mid \hat{x}^{(i)}) \leq H_i(x). \quad (4.3)$$

Множину всіх ситуацій, допустимих в грі Γ для гравця i , позначимо через $\mathfrak{S}_i(\Gamma)$.

Означення 4.5. Ситуація в грі Γ , яка допустима для всіх гравців, називається ситуацією рівноваги.

Множину всіх ситуацій рівноваги в грі Γ позначимо через $\mathfrak{Z}(\Gamma)$. Очевидно, що

$$\mathfrak{Z}(\Gamma) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{Z}_i(\Gamma).$$

Стратегія буде рівноважною в бескоаліційній грі, коли вона входить хоч би в одну із рівноважних ситуацій гри.

Розглянемо ситуації, оптимальні за Парето. Для цього нам потрібно буде порівнювати ситуації по виграшам, які отримують в них окремі гравці. З цією метою позначимо

$$H'_I(x) = (H_1(x), \dots, H_m(x))$$

і будемо вважати, що

$$H_I(x) < H_I(y),$$

якщо $H_i(x) < H_i(y)$ при всіх $i \in I$;

$$H_I(x) \overline{<} H_I(y),$$

якщо $H_i(x) \leq H_i(y)$ при всіх $i \in I$, але $H_I(x) \neq H_I(y)$;

$$H_I(x) \leq H_I(y),$$

якщо $H_i(x) \leq H_i(y)$ при всіх $i \in I$.

Означення 4.6. Ситуація x^0 в грі Γ називається оптимальною по Парето, якщо не існує ситуації $x \in X$, для якої має місце векторна нерівність $H_I(x^0) \overline{<} H_I(x)$.

Множину всіх ситуацій в грі Γ , оптимальних по Парето, позначимо через $\mathfrak{Z}^P(\Gamma)$.

Підкреслимо формальну різницю між ситуацією рівноваги та ситуацією, оптимальною по Парето: в першій жоден гравець, діючи самостійно, не може збільшити свого власного виграшу; в другій – всі гравці, діючи спільно, не можуть збільшити виграш кожного.

Відмітимо одну властивість ситуацій, оптимальних по Парето.

Теорема 4.1. Які б не були оптимальні по Парето ситуації x та y у грі Γ , не може бути $H_I(x) \overline{<} H_I(y)$ (внутрішня стійкість).

Якщо множина $B(\Gamma) = \{H_I(x) : x \in X\}$ компактна, а функції виграшу H_i неперервні, то яка б не була ситуація $x \in \mathfrak{Z}^P(\Gamma)$, знайдеться ситуація $y \in \mathfrak{Z}^P(\Gamma)$, для якої $H_I(x) \overline{<} H_I(y)$ (зовнішня стійкість) •

Гарантуючі ситуації та стратегії. Визначимо умови, при яких i -й гравець може вибрати таку свою стратегію, яка, з одного боку, не залежить від поведінки інших гравців, а, з другого боку, забезпечує найбільший можливий його виграш. З цією метою

визначимо величину виграшу i - го гравця, яку назовемо його гарантією і позначимо через $H_i[x^{(g,i)}]$. Гарантія повинна задовольняти умовам:

1) виграш гравця повинен бути не менше його гарантії

$$H_i[x^{(g,i)}] \leq H_i(x||x^{(g,i)}) \quad \forall x/x^{(g,i)} \in X/X_i; \quad (4.4)$$

2) гарантії повинні бути найбільшими із всіх можливих гарантії

$$H_i^g = H_i[x^{(g,i)}] = \max_{x_i} H_i[x^{(i)}], \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.5)$$

де

$$H_i[x^{(i)}] = \min_{x/X_i} H_i(x||x^{(i)}).$$

Означення 4.7. Стратегія $\hat{x}^{(g,i)} \in X_i$ називається максимінною для i - го гравця в грі Γ , якщо

$$\hat{H}_i^g = H_i[\hat{x}^{(g,i)}] = \max_{x_i} H_i[x^{(i)}]. \quad (4.6)$$

Число $\hat{H}_i^g$ називається максиміном i - го гравця в грі Γ .

Лема 4.1. Максимінна стратегія $\hat{x}^{(g,i)} \in X_i$ для i - го гравця в грі Γ є для нього гарантуючою, тобто $\hat{x}^{(g,i)} = x^{(g,i)}$, а його максимін співпадає з його найбільшою гарантією, тобто $\hat{H}_i^g = H_i^g$.

Теорема 4.2. Якщо множини X_i – компактні в R^n , а функції $H_i(x)$, $x \in X$ – неперервні, то множина гарантованих ситуацій у грі Γ буде непорожньою.

Пошук максимінів та максимінних стратегій є непростю математичною задачею. Більш дослідженою являється проблема побудови сідлових точок антагоністичних ігор та їх зв'язок з максимінними стратегіями. З цією метою розглянемо антагоністичну гру

$$\Gamma_i = \{I, \{X_j\}_{j \in I}, H_i\}. \quad (4.7)$$

В грі (4.7) i - ий гравець (за рахунок вибору своєї стратегії $x_i^{(i)} \in X_i$) намагається максимізувати, а інші гравці – мінімізувати (шляхом вибору $x_i/x_i^{(i)} \in X/X_i$) ціну гри $H_i(x_i)$, де x_i - ситуація в антагоністичній грі Γ_i .

Означення 4.8. Ситуація $x_i^s \in X$ називається сідловою точкою для гри Γ_i , якщо

$$H_i(x_i^s||x^{(i)}) \leq H_i(x_i^s) \leq H_i(x||x_i^{(s,i)}) \quad \forall x \in X. \quad (4.8)$$

Лема 4.2. Якщо ситуація $x_i^s \in X$ – сідлова точка в грі Γ_i , то стратегія $x_i^{(s,i)}$ для i - го гравця являється максимінною, тобто $x_i^{(s,i)} = \hat{x}^{(g,i)}$, а ціна гри $H_i(x_i^s)$ співпадає з максиміном i - го гравця $\hat{H}_i^g$.

Лема 4.2 дає спосіб побудови гарантованих стратегій. Для цього потрібно знайти сідлові точки x_i^s (якщо вони існують) для n антагоністичних ігор Γ_i . Тоді гарантована ситуація і гарантовані виграші гравців мають вигляд: $x^g = (x_1^{s,1}, \dots, x_n^{s,n})$, $H_i^g = H_i(x_i^s)$, $i = \overline{1, n}$.

Рівновага за Нешем. Якщо гравців не влаштовують результати гарантованих виграшів або гарантій, то можна перейти до пошуку інших рівноваг, які були б певному сенсі кращими від гарантованої рівноваги.

Означення 4.9. Ситуація $x^N \in X$ називається рівноважною за Нешем для гри Γ , якщо

$$H_i(x^N | x^{(i)}) \leq H_i(x^N), \quad i = \overline{1, n}, \quad \forall x \in X. \quad (4.9)$$

Позитивні властивості рівноваги за Нешем (випадок двох гравців).

Властивість 1. Для антагоністичної гри з функцією виграшу $H(x^{(1)}, x^{(2)})$ сідлова точка співпадає з рівноважною по Нешу ситуацією у відповідній некоаліційній грі двох осіб з функцією виграшу $H(x^{(1)}, x^{(2)})$ першого гравця і функцією виграшу $-H(x^{(1)}, x^{(2)})$ для другого гравця.

Властивість 2. В деяких іграх двох осіб один із гравців, діючи самостійно і використовуючи "свою" стратегію із рівноважної по Нешу ситуації, може примусити іншого діяти найкращим для себе чином. Дійсно, запишемо умови рівноваги за Нешем для двох гравців

$$H_1(x^{(1)}, x^{(N,2)}) \leq H_1(x^N) \quad \forall x^{(1)} \in X_1,$$

$$H_2(x^{(N,1)}, x^{(2)}) \leq H_2(x^N) \quad \forall x^{(2)} \in X_2.$$

Властивість 3. Виграш гравців в рівноважній по Нешу ситуації x^N не менше їх гарантованих виграшів при умові існування обох рівноваг.

Негативні особливості рівноваги за Нешем.

Особливість 1. Якщо множина ситуацій рівноваги за Нешем складається більше ніж із одного елемента, то гравці повинні домовлятися між собою якої іменної ситуації притримуватись. Цей факт "переводить" некоаліційну гру в кооперативну гру.

Особливість 2. При реалізації вибраної ситуації рівноваги за Нешем кожен із гравців повинен бути переконаним в тому, що інші гравці неодмінно будуть дотримуватись "своїх" стратегій із обраної ситуації.

Особливість 3. Множина ситуацій рівноваги по Нешу не являється внутрішньо стійкою, тобто можуть існувати дві ситуації рівноваги по Нешу і при цьому виграші всіх гравців в одній із них буде строго більшим ніж відповідні виграші в іншій.

Особливість 4. Ситуації рівноваги по Нешу, взагалі кажучи, можуть бути покращеними, тобто для ситуації рівноваги по Нешу x^N може існувати ситуація $x^* \in X$ така, що

$$H_i(x^*) > H_i(x^N), \quad i = \overline{1,2}.$$

Теорема 4.3. Нехай множини стратегій гравців X_i – опуклі та компактні в R^n . Нехай для кожного гравця $i \in I$ його функція виграшу $H_i(x)$ є неперервною на множині ситуацій X і вігнутою (опуклою вгору) за його стратегіями $x_i \in X_i$ для кожного набору стратегій всіх інших гравців $x_I \in X_I$. Тоді множина рівноваг за Нешем є непорожньою та компактною.

Рівновага за Бержу. В цьому пункті визначимо ситуацію рівноваги, яка позбавлена негативних особливостей 1 і 2, характерних для рівноваги за Нешем.

Означення 4.10. Ситуація $x^B \in X$ називається рівноважною за Бержу для гри Γ , якщо одночасно виконуються нерівності

$$H_i(x || x^{(B,i)}) \leq H_i(x^B), \quad (4.10)$$

$$\max_{x_i} \min_{x_{-i}} H_i(x) \leq H_i(x^B), \quad i = \overline{1,n}, \quad \forall x \in X. \quad (4.11)$$

Тут слід відзначити, що умова (4.11) не являється обов'язковою: у разі її невиконання хоч би по одному індексу за основу приймається виконання умови (4.10).

Порівняння рівноваги за Бержу з рівновагою по Нешу.

1. Для антоганістичної гри з функцією виграшу $H(x^{(1)}, x^{(2)})$ сідлова точка співпадає як з рівноважною по Нешу ситуацією у відповідній безкоаліційній грі двох осіб з функцією виграшу $H(x^{(1)}, x^{(2)})$ першого гравця і функцією виграшу $-H(x^{(1)}, x^{(2)})$ для другого гравця, так і з ситуацією рівноваги за Бержу в тій же грі двох осіб.

2. Ситуація рівноваги як по Нешу, так і по Бержу стійка по відношенню до відхилення від них.

3. Ситуаціям рівноваги як по Нешу, так і по Бержу притаманна властивість індивідуальної раціональності: виграти гравців в обох ситуаціях рівноваги не менше гарантованих.

4. Рівноваги за Бержу мають "менш коаліційний характер" ніж рівноваги по Нешу: у випадку єдиної точки рівноваги за Бержу інші гравці завжди будуть дотримуватись відповідних стратегій з обраної ситуації в силу нерівності (4.10).

Задача 1. Знайти гарантовані виграші та гарантовані стратегії

$$\begin{aligned} X_1 &= [0,10], \quad X_2 = [0,5], \\ H_1(x) &= 20 x_1 x_2 + 4 x_2^2 - 80 x_2 - 25 x_1, \\ H_2(x) &= x_1^2 + (x_1 + 4)(1 - x_2). \end{aligned}$$

Розв'язок.

1.1. Для знаходження максимального гарантованого виграшу та гарантованих стратегій першого гравця розв'яжемо таку задачу:

$$\alpha_1 = \max_{x_1 \in [0,10]} \min_{x_2 \in [0,5]} (20 x_1 x_2 + 4 x_2^2 - 80 x_2 - 25 x_1).$$

З цією метою побудуємо функцію

$f_1(x_1) = \min_{x_2 \in [0,5]} (20 x_1 x_2 + 4 x_2^2 - 80 x_2 - 25 x_1)$ - гарантований виграш першого гравця при виборі ним стратегії $x_1 \in [0,10]$. Відомо [Vogorbyov], що функція $f_1(x_1)$ буде неперервною.

Спочатку знайдемо похідну функції $H_1(x)$ відносно змінної x_2 :

$$\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_2} = 20 x_1 + 8 x_2 - 80.$$

Звідси витікає, що в області $X_1 \times X_2$ допустимих ситуацій похідна міняє знак, тобто функція $H_1(x)$ не є монотонною і її мінімум по x_2 при фіксованому x_1 може досягатись у внутрішніх точках відрізка X_2 . Тоді стаціонарні точки задовольняють рівнянню

$$5 x_1 + 2 x_2 - 20 = 0.$$

В силу того, що в цих точках

$$\frac{\partial^2 H_1(x)}{\partial x_2^2} = 8 > 0,$$

то вони утворюють множину глобальних мінімумів функції $H_1(x)$ по x_2 , коли $x_2 = -2.5 x_1 + 10$, $x_2 \in (0,5)$, $x_1 \in (2,4)$, і при цьому

$$f_1(x_1) = -25 (x_1^2 - 7 x_1 + 16).$$

При інших значеннях змінної x_1 мінімум функції $H_1(x)$ досягається на границях відрізка X_2 :

при $x_2 = 0$ будемо мати $f_1(x_1) = -25 x_1$;

при $x_2 = 5$ будемо мати $f_1(x_1) = 75 (x_1 - 4)$.

В області $x_1 \in [0,2]$, $x_2 \in [0,5]$ похідна $\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_2} \leq 0$, тобто функція $H_1(x)$ буде спадною по x_2 .

В області $x_1 \in [4,10]$, $x_2 \in [0,5]$ похідна $\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_2} \geq 0$, тобто функція $H_1(x)$ буде зростаючою по x_2 . Тоді

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 75 (x_1 - 4), & x_1 \in [0,2], \\ -25 (x_1^2 - 7 x_1 + 16), & x_1 \in (2,4), \\ -25 x_1, & x_1 \in [4,10]. \end{cases}$$

Таким чином, максимальний гарантований виграш першого гравця

$$\alpha_1 = \max_{x_1 \in [0,10]} f_1(x_1) = f_1(4) = -100,$$

а множиною його гарантованих стратегій буде $O_1 = \{4\}$.

1.2. Для знаходження максимального гарантованого виграшу та гарантованих стратегій другого гравця розв'яжемо таку задачу:

$$\alpha_2 = \max_{x_2 \in [0,5]} \min_{x_1 \in [0,10]} (x_1^2 + (x_1 + 4)(1 - x_2)).$$

З цією метою побудуємо функцію

$f_2(x_2) = \min_{x_1 \in [0,10]} (x_1^2 + (x_1 + 4)(1 - x_2))$ - гарантований виграш другого гравця при виборі ним стратегії $x_2 \in [0,5]$. З цією метою знайдемо похідну функції $H_2(x)$ відносно змінної x_1 :

$$\frac{\partial H_2(x)}{\partial x_1} = 2 x_1 + 1 - x_2.$$

Звідси витікає, що в області $X_1 \times X_2$ допустимих ситуацій похідна міняє знак, тобто функція $H_2(x)$ не є монотонною і її мінімум по x_1 при фіксованому x_2 може досягатись у внутрішніх точках відрізка X_1 . Тоді стаціонарні точки задовольняють рівнянню $2x_1 + 1 - x_2 = 0$. В силу того, що в цих точках

$$\frac{\partial^2 H_2(x)}{\partial x_1^2} = 2 > 0,$$

то вони утворюють множину глобальних мінімумів функції $H_2(x)$ по x_1 , коли $x_1 = 0.5(x_2 - 1)$, $x_1 \in (0, 10)$, $x_2 \in (1, 5]$, і при цьому

$$f_2(x_2) = -\frac{x_2 - 1}{4}(x_2 + 15).$$

При інших значеннях змінної x_2 мінімум функції $H_2(x)$ досягається на границі відрізка X_1 : при $x_1 = 0$ будемо мати $f_2(x_2) = 4(1 - x_2)$.

В області $x_2 \in [0, 1]$, $x_1 \in [0, 10]$ похідна $\frac{\partial H_2(x)}{\partial x_1} \geq 0$, тобто функція $H_2(x)$ буде зростаючою по x_1 . Тоді

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 4(1 - x_2), & x_2 \in [0, 1], \\ -\frac{x_2 - 1}{4}(x_2 + 15), & x_2 \in [1, 5]. \end{cases}$$

Таким чином, максимальний гарантований виграш другого гравця

$$\alpha_2 = \max_{x_2 \in [0, 5]} f_2(x_2) = f_2(0) = 4,$$

а множиною гарантованих стратегій буде $O_2 = \{0\}$.

Таким чином, гарантовану ситуацію утворює пара $(x^g)' = (4, 0)$.

Задача 2. Знайти рівноважні за Нешем ситуації.

$$\begin{aligned} X_1 &= [0, 5], \quad X_2 = [0, 10], \\ H_1(x) &= 6x_2^2 - 5x_1^2 - 10x_1x_2 + 40x_1 - x_2, \\ H_2(x) &= 8x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_1x_2 - x_1 + 50x_2, \end{aligned}$$

Розв'язок. Оскільки множини X_i є компактними, а $H_i(x)$, $i = \overline{1, 2}$ - вігнутими по своїм стратегіям, то, згідно [Voloshyn], множина рівноваг за Нешем є непорожньою та компактною.

Розв'яжемо систему оптимізаційних задач:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_1(x_2) &= \max_{x_1 \in X_1} (6x_2^2 - 5x_1^2 - 10x_1x_2 + 40x_1 - x_2), \\ \widehat{H}_2(x_1) &= \max_{x_2 \in X_2} (8x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_1x_2 - x_1 + 50x_2). \end{aligned}$$

Для цього потрібно побудувати:

- множину N_1 розв'язків першої задачі, вважаючи x_2 параметром;
- множину N_2 розв'язків другої задачі, вважаючи x_1 параметром.

Тоді множина рівноважних ситуацій за Нешем буде мати вигляд $N = N_1 \cap N_2$.

2.1. Побудуємо множину N_1 , використовуючи умови оптимальності. З цією метою

знайдемо похідну

$$\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_1} = -10x_1 - 10x_2 + 40.$$

Звідси витікає, що в області $X_1 \times X_2$ допустимих ситуацій похідна міняє знак, тобто функція $H_1(x)$ не є монотонною і її максимум по x_1 при фіксованому x_2 може досягатись у внутрішніх точках відрізка X_1 . Тоді стаціонарні точки задовольняють рівнянню:

$$-x_1 - x_2 + 4 = 0.$$

В силу того, що в цих точках

$$\frac{\partial^2 H_1(x)}{\partial x_1^2} = -10 < 0,$$

то вони утворюють множину глобальних максимумів функції $H_1(x)$ по x_1 , коли $x_1 = 4 - x_2$, $x_1 \in (0,5]$, $x_2 \in [0,4]$, і при цьому

$$\widehat{H}_1(x_2) = 11x_2^2 - 41x_2 + 80.$$

При інших значеннях змінної x_2 максимум функції $H_1(x)$ досягається на лівій границі відрізка X_1 : при $x_1 = 0$ будемо мати

$$\widehat{H}_1(x_2) = 6x_2^2 - x_2.$$

В області $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_2 \in [0,4]$ похідна $\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_1} \geq 0$, тобто функція $H_1(x)$ буде зростаючою по x_1 . В області $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 \in [0,5]$, $x_2 \in [0,10]$ похідна $\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_1} \leq 0$, тобто функція $H_1(x)$ буде спадною по x_1 . Тоді

$$\widehat{H}_1(x_2) = \begin{cases} 11x_2^2 - 41x_2 + 80, & x_1 = 4 - x_2, \quad x_2 \in [0,4], \\ 6x_2^2 - x_2, & x_1 = 0, \quad x_2 \in (4,10]. \end{cases}$$

Таким чином, $N_1 = \{x \in X_1 \times X_2: x_1 = 0, x_2 \in [4,10]; x_1 = 4 - x_2, x_2 \in [0,4]\}$ на рис.4.1. – це ламана ABC.

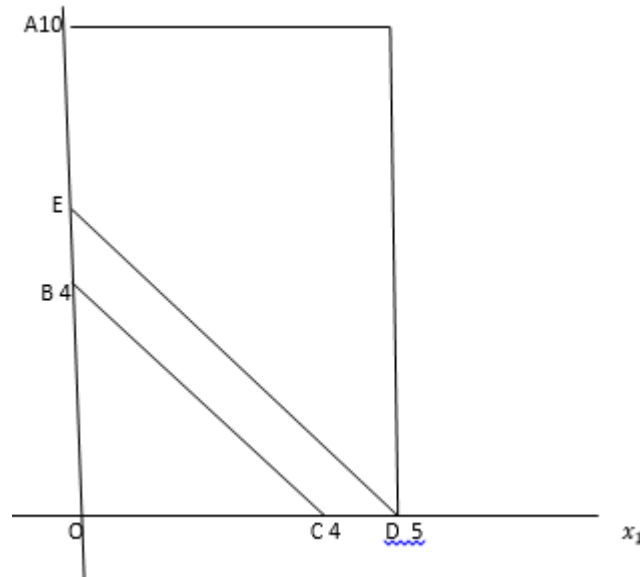


Рис.4.1.

2.2. Побудуємо N_2 , використовуючи умови оптимальності. З цією метою знайдемо похідну

$$\frac{\partial H_2(x)}{\partial x_2} = -10x_2 - 10x_1 + 50.$$

Звідси витікає, що в області $X_1 \times X_2$ допустимих ситуацій похідна міняє знак, тобто функція $H_2(x)$ не є монотонною і її максимум по x_2 при фіксованому x_1 може досягатись у внутрішніх точках відрізка X_2 . Тоді стаціонарні точки задовольняють рівнянню:

$$x_1 + x_2 = 5.$$

В силу того, що в цих точках

$$\frac{\partial^2 H_2(x)}{\partial x_2^2} = -10 < 0,$$

то вони утворюють множину глобальних максимумів функції $H_2(x)$ по x_2 , коли $x_2 = 5 - x_1$, $x_1 \in (0,5)$, $x_2 \in (0,5)$, і при цьому

$$\widehat{H}_2(x_1) = 13 x_1^2 - 51 x_1 + 125.$$

При інших значеннях змінної x_1 максимум функції $H_2(x)$ може досягатись на границях відрізка X_2 . Але в силу того, що в області $x_1 + x_2 \leq 5$, $x_1 \in [0,5]$ похідна $\frac{\partial H_2(x)}{\partial x_2} \geq 0$, тобто функція $H_2(x)$ буде зростаючою по x_2 ; в області $x_1 + x_2 \geq 5$, $x_1 \in [0,5]$ похідна $\frac{\partial H_2(x)}{\partial x_2} \leq 0$, тобто функція $H_2(x)$ буде спадною по x_2 , на границях відрізка X_2 максимуму функції $H_2(x)$ досягається при $x_2 = 5 - x_1$, $x_1 \in \{0,5\}$. Тоді

$$\widehat{H}_2(x_1) = 13 x_1^2 - 51 x_1 + 125, x_2 = 5 - x_1, x_1 \in [0,5].$$

Тому $N_2 = \{x \in X_1 \times X_2: x_2 = 5 - x_1, x_1 \in [0,5]\}$ на рис.4.1. – це відрізок ED.

Тоді $N = \{E = (0,5)\}$. В цій точці виграші гравців задаються вектором (145,125)). До речі, порівняємо виграші гравців з їх максимально можливими виграшами. Для першого гравця це буде $H_1(0, 10) = 590$, для другого – $H_2(5, 0) = 195$ •

Задача 3. Знайти рівноважні за Бержу ситуації

$$\begin{aligned} X_1 &= [0,5], X_2 = [0,10], \\ H_1(x) &= 4 x_1^2 - 5 x_2^2 + 8 x_1 x_2 + x_1, \\ H_2(x) &= x_2^2 - 2 x_1^2 + 10 x_1 x_2 - 10 x_1 + 6 x_2, \end{aligned}$$

Розв'язок. Розв'яжемо систему оптимізаційних задач:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_1(x_1) &= \max_{x_2 \in X_2} (4 x_1^2 - 5 x_2^2 + 8 x_1 x_2 + x_1), \\ \widehat{H}_2(x_2) &= \max_{x_1 \in X_1} (x_2^2 - 2 x_1^2 + 10 x_1 x_2 - 10 x_1 + 6 x_2). \end{aligned}$$

Для цього потрібно побудувати:

- множину B_1 розв'язків першої задачі, вважаючи x_1 параметром;
- множину B_2 розв'язків другої задачі, вважаючи x_2 параметром.

Тоді будемо мати $B = B_1 \cap B_2$ при умові, що рівновага за Берже повинна бути не менша, ніж гарантована рівновага.

3.1. Побудуємо множину B_1 , використовуючи умови оптимальності. Тоді

$$\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_2} = -10 x_2 + 8 x_1.$$

Звідси витікає, що в області $X_1 \times X_2$ допустимих ситуацій похідна міняє знак, тобто функція $H_1(x)$ не є монотонною і її максимум по x_2 при фіксованому x_1 може досягатись у внутрішніх точках відрізка X_2 . Тоді стаціонарні точки задовольняють рівнянню:

$$-5 x_2 + 4 x_1 = 0.$$

В силу того, що в цих точках

$$\frac{\partial^2 H_1(x)}{\partial x_2^2} = -10 < 0,$$

то вони утворюють множину глобальних максимумів функції $H_1(x)$ по x_2 , коли

$$x_2 = \frac{4}{5} x_1, x_1 \in [0,5], x_2 \in [0,4].$$

При цьому

$$\widehat{H}_1(x_1) = \frac{36}{5} x_1^2 + x_1.$$

Таким чином, координата x_2 завжди попадає на відрізок $[0,10]$, коли $x_1 \in [0,5]$, тобто $B_1 = \{x_2 = \frac{4}{5} x_1, x_1 \in [0,5]\}$ на рис. 4.2 – це лінія ОА.

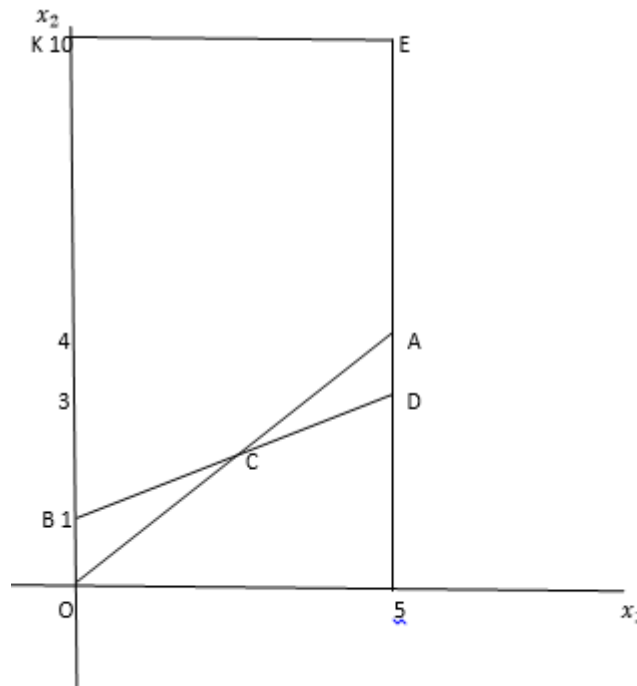


Рис.4.2.

3.2. Побудуємо B_2 , використовуючи умови оптимальності. Тоді

$$\frac{\partial H_2(x)}{\partial x_1} = -4 x_1 + 10 x_2 - 10.$$

Звідси витікає, що в області $X_1 \times X_2$ допустимих ситуацій похідна міняє знак, тобто функція

$H_2(x)$ не є монотонною і її максимум по x_1 при фіксованому x_2 може досягатись у внутрішніх точках відрізка X_1 . Тоді стаціонарні точки задовольняють рівнянню:

$$-2 x_1 + 5 x_2 = 5.$$

В силу того, що в цих точках

$$\frac{\partial^2 H_2(x)}{\partial x_1^2} = -4 < 0,$$

то вони утворюють множину глобальних максимумів функції $H_2(x)$ по x_1 , коли

$$x_1 = 5 \frac{x_2 - 1}{2}, x_2 \in (1,3), x_1 \in (0,5).$$

При цьому

$$\widehat{H}_2(x_2) = 13.5 x_2^2 - 19 x_2 + 12.5.$$

При інших значеннях змінної x_2 максимальне значення функція $H_2(x)$ по x_1 буде досягатись на кінцях відрізка X_1 :

при $x_1 = 0$ будемо мати

$$\widehat{H}_2(x_2) = x_2^2 + 6x_2;$$

при $x_1 = 5$ будемо мати

$$\widehat{H}_2(x_2) = x_2^2 + 56x_2 - 100.$$

В силу того, що в області $-2x_1 + 5x_2 \leq 5$, $x_1 \in [0, 5]$, $x_2 \in [0, 1]$ похідна $\frac{\partial H_2(x)}{\partial x_1} \leq 0$, тобто функція $H_2(x)$ буде спадною по x_1 , а в області $-2x_1 + 5x_2 > 5$, $x_1 \in [0, 5]$, $x_2 \in [3, 10]$ похідна $\frac{\partial H_2(x)}{\partial x_1} \geq 0$, тобто функція $H_2(x)$ буде зростаючою по x_1 , то

$$\widehat{H}_2(x_2) = \begin{cases} x_2^2 + 6x_2, & x_1 = 0, x_2 \in [0, 1], \\ 13.5x_2^2 - 19x_2 + 12.5, & x_1 = 5 \frac{x_2 - 1}{2}, x_2 \in (1, 3), \\ x_2^2 + 56x_2 - 100, & x_1 = 5, x_2 \in [3, 10] \end{cases}$$

на рис.4.2 це ламана – OBDE.

Таким чином, ми отримали точки: O = (0,0), C = (2.5, 2), A = (5,4), в яких виконуються нерівності із означення рівноваги за Бержу. В цих точках виграші гравців задаються векторами: (0,0), $(\frac{95}{2}, \frac{141}{4})$, (185, 140).

3.3. Для рівноваги за Бержу потрібно, щоб ці виграші були не менше гарантованих. Знайдемо гарантовані рівноваги у цій задачі, розв'язавши такі екстремальні задачі

$$\alpha_1 = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} (4x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_1x_2 + x_1),$$

$$\alpha_2 = \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} (x_2^2 - 2x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 6x_2).$$

Із аналізу поведінки функції $H_1(x)$ вздовж змінної x_2 (див. п.3.1) отримаємо, що

$$f_1(x_1) = \min_{x_2 \in X_2} (4x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_1x_2 + x_1) = 4x_1^2 + 51x_1 - 500$$

і досягається при $x_1 = 5$. Тоді $\alpha_1 = -145$.

Із аналізу поведінки функції $H_2(x)$ вздовж змінної x_1 (див. п.3.2) отримаємо, що

$$f_2(x_2) = \min_{x_1 \in X_1} (x_2^2 - 2x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 6x_2) = \begin{cases} x_2^2 + 56x_2 - 100, & x_1 = 5, x_2 \in [0, 2], \\ x_2^2 + 6x_2, & x_1 = 0, x_2 \in (2, 10] \end{cases}$$

і досягається при $x_2 = 10$. Тоді $\alpha_2 = 160$.

Висновок: ні одна із знайдених точок не є рівноважною за Бержу. Найближчою до рівноважної може виступати точка A = (5,4), в якій виграші гравців складуть (185, 140) •

Домашнє завдання 4.

Задача 4.1. Знайти гарантовані виграші та гарантовані стратегії

1.1. $X_1 = [0, 10]$, $X_2 = [0, 5]$,

$$H_1(x) = 36x_1x_2 + 9x_2^2 - 180x_2 - 180x_1,$$

$$H_2(x) = x_1^2 + (x_1 + 6)(1 - x_2).$$

1.2. $X_1 = [0, 10]$, $X_2 = [0, 5]$;

$$H_1(x) = 40x_1x_2 + 16x_2^2 - 240x_2 - 200x_1,$$

$$H_2(x) = x_1^2 + (x_1 + 8)(1 - x_2).$$

1.3. $X_1 = [0,10], X_2 = [0,5]$;

$$H_1(x) = 60x_1x_2 + 36x_2^2 - 600x_2 - 200x_1,$$

$$H_2(x) = x_1^2 - 6x_1 - x_2^2 + 12x_2.$$

1.4. $X_1 = [0,1], X_2 = [0,1]$;

$$H_1(x) = x_1x_2 + 2(1 - x_1)(1 - x_2),$$

$$H_2(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2.$$

1.5. $X_1 = [0,1], X_2 = [0,1]$;

$$H_1(x) = 4x_1x_2 + (1 - x_1)(1 - x_2),$$

$$H_2(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2.$$

Задача 4. 2. Знайти рівноважні за Нешем ситуації.

2.1. $X_1 = [0,5], X_2 = [0,10]$,

$$H_1(x) = -x_2^2 - 4x_1^2 - 10x_1x_2 - 9x_2 + 50x_1,$$

$$H_2(x) = 3x_1^2 - 5x_2^2 - 12x_1x_2 - 4x_1 + 60x_2.$$

2.2. $X_1 = [0,5], X_2 = [0,10]$;

$$H_1(x) = 6x_2^2 - 5x_1^2 - 10x_1x_2 + 40x_1 - x_2,$$

$$H_2(x) = 8x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_1x_2 - x_1 + 50x_2.$$

2.3. $X_1 = [0,5], X_2 = [0,10]$;

$$H_1(x) = 6x_2^2 - 5x_1^2 - 10x_1x_2 + 60x_1 - 2x_2,$$

$$H_2(x) = 3x_1^2 - 5x_2^2 - 14x_1x_2 - 2x_1 + 70x_2.$$

2.4. $X_1 = [0,5], X_2 = [0,10]$;

$$H_1(x) = 7x_2^2 - 6x_1^2 - 10x_1x_2 + 70x_1 - 5x_2,$$

$$H_2(x) = x_1^2 - 5x_2^2 - 16x_1x_2 - 7x_1 + 80x_2.$$

2.5. $X_1 = [0,5], X_2 = [0,10]$;

$$H_1(x) = 8x_2^2 - 7x_1^2 - 10x_1x_2 + 80x_1 - 9x_2,$$

$$H_2(x) = 4x_1^2 - 5x_2^2 - 18x_1x_2 - 5x_1 + 90x_2.$$

2.6. $X_1 = [0,5], X_2 = [0,10]$;

$$H_1(x) = 9x_2^2 - 8x_1^2 - 10x_1x_2 + 90x_1 - 6x_2,$$

$$H_2(x) = -x_1^2 - 5x_2^2 - 20x_1x_2 - 5x_1 + 100x_2.$$

Задача 4. 3. Дві фірми виробляють однаковий товар в об'ємах x_1 та x_2 відповідно. Витрати на виробництво складають c_1 та c_2 , $0 < c_1 \leq c_2$. Ціна залежить від сумарного об'єму і задається формулою $p(x_1, x_2) = k(x_1 + x_2)^\alpha$, $k > 0, \alpha \in (0, 1]$. Знайти рівноважні за Нешем ситуації.

Задача 4. 4. (Дюополія Бертрана). Дві фірми виробляють однаковий товар в об'ємах x_1 та x_2 відповідно, які визначаються відповідно до цін $p_i > 0$, $i = \overline{1, 2}$ за формулами $x_1(p_1, p_2) = a - b p_1 + c p_2 > 0$, $x_2(p_1, p_2) = a - b p_2 + c p_1 > 0$, $a, b, c > 0$. Фірми хочуть максимувати свої доходи. Знайти рівноважні за Нешем ситуації.

Задача 4.5. Знайти рівноважні за Бержу ситуації

5.1. $X_1 = [0, 5]$, $X_2 = [0, 10]$,

$$H_1(x) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 10x_1x_2 + 4x_1,$$

$$H_2(x) = 5x_2^2 - 3x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 60x_2.$$

5.2. $X_1 = [0, 5]$, $X_2 = [0, 10]$;

$$H_1(x) = 4x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_1x_2 + x_1,$$

$$H_2(x) = x_2^2 - 2x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 6x_2.$$

5.3. $X_1 = [0, 5]$, $X_2 = [0, 10]$;

$$H_1(x) = x_1^2 - 5x_2^2 + 12x_1x_2 + 6x_1,$$

$$H_2(x) = 3x_2^2 - 4x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 3x_2.$$

5.4. $X_1 = [0, 5]$, $X_2 = [0, 10]$;

$$H_1(x) = x_1^2 - 5x_2^2 - 16x_1x_2 - 7x_1 + 80x_2.$$

$$H_2(x) = 7x_2^2 - 6x_1^2 - 10x_1x_2 + 70x_1 - 5x_2.$$

5.5. $X_1 = [0, 5]$, $X_2 = [0, 10]$;

$$H_1(x) = 4x_1^2 - 5x_2^2 - 18x_1x_2 - 5x_1 + 90x_2.$$

$$H_2(x) = 8x_2^2 - 7x_1^2 - 10x_1x_2 + 80x_1 - 9x_2.$$

5.6. $X_1 = [0, 5]$, $X_2 = [0, 10]$;

$$H_1(x) = -x_1^2 - 5x_2^2 - 20x_1x_2 - 5x_1 + 100x_2.$$

$$H_2(x) = 9x_2^2 - 8x_1^2 - 10x_1x_2 + 90x_1 - 6x_2.$$

Практичні 5. Вибір нешівських рівноваг. Змішані стратегії. Знаходження рівноваг у змішаних стратегіях.

Теоретичні засади.

Змішані стратегії.

Означення 5.1. Нехай $G = \{X_i, H_i, i \in I\}$, X_i - скінченна множина стратегій i -го гравця (містить m елементів). Змішаною стратегією гравця i називається імовірнісний розподіл $\mu_i = \mu_i(x_i)$, $x_i \in X_i$, $0 \leq \mu_i(x_i) \leq 1$, $\sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) = 1$ ($\mu_i(x_i)$ - імовірність вибору i -м гравцем його "чистої" стратегії).

Отже, множина M_i змішаних стратегій i -го гравця є одиничним симплексом у просторі його стратегій $R^{|X_i|}$.

Змішаним розширенням гри G називається гра $\bar{G} = \{M_i, \bar{H}_i, i \in I\}$, де

$$\bar{H}_i(\mu) = \sum_{x \in X_i} H_i(x) \mu_1(x_1) \dots \mu_n(x_n) \quad \forall \mu \in M_I = \prod_{j=1}^m M_j. \quad (5.1)$$

Тут мається на увазі наступне: "лотерея" i -го гравця не залежить від "лотереї" j -го гравця для всіх $j \neq i$ і лише цей гравець знає стратегію x_i , яка дійсно випала у лотереї. Оскільки випадкові змінні незалежні у сукупності, то $\bar{H}_i(\mu)$ є очікуваним виграшем (математичним сподіванням) гравця i .

Означення 5.2. Чиста стратегія $x_i \in X_i$ гравця i у початковій грі G ототожнюється зі змішаною стратегією $\delta_{x_i} \in M_i$ у грі $\bar{G}$, у якій стратегія x_i обирається із імовірністю одиниця, тобто $\delta_{x_i}(x_i) = 1$; $\delta_{x_i}(y_i) = 0 \quad \forall y_i \neq x_i$.

У цьому випадку із формули (5.1) будемо мати

$$\bar{H}_i(\delta_x) = H_i \quad \forall x \in X_i, \delta_x = (\delta_{x_i}, i \in I).$$

Тому будемо розглядати множину X_i як підмножину M_i , а $\bar{H}_i$ - як розширення області визначення H_i з X_i на M_i .

Із теорії антагоністичних ігор двох осіб відомо, що у змішаному розширенні гри завжди існує її ціна та сідлова точка. Аналогічна ситуація має місце і для безкоаліційних ігор з кінечною множиною стратегій у гравців. Сформулюємо ряд тверджень, які допомагають будувати рівноважні ситуації у змішаному розширенні некооперативних ігор.

Теорема 5.1. Якщо X_i - скінченні множини стратегій для всіх $i \in I$. Тоді множина рівноваг Неша у грі $\bar{G}$ є непорожнім компактом в M_i і містить множину рівноваг Неша у вихідній грі G , тобто $NE(G) \subseteq NE(\bar{G})$.

Теорема 5.2. Гарантований виграш гравця у початковій грі не перевищує його гарантований виграш у змішаному її розширенні, тобто $\forall i \in I: \sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{I \setminus i} \in X_{I \setminus i}} H_i(x_i, x_{I \setminus i}) \leq$

$$\sup_{\mu_i \in M_i} \inf_{\mu_{I \setminus i} \in M_{I \setminus i}} \bar{H}_i(\mu_i, \mu_{I \setminus i}).$$

Теорема 5.3. (фон Нейман, Моргенштерн). Змішане розширення $\bar{G} = \{M_1, M_2, \bar{H}_1\}$ скінченної гри двох осіб з нульовою сумою $G = \{X_1, X_2, H_1\}$ має хоч би одну сідлову точку і ціну $\bar{v}$, для якої виконується нерівність

$$\bar{v} = \sup_{x_1 \in X_1} \inf_{x_2 \in X_2} H_1(x_1, x_2) \leq \bar{v} \leq \inf_{x_2 \in X_2} \sup_{x_1 \in X_1} H_1(x_1, x_2) = \tilde{v}.$$

Таким чином, якщо початкова гра G має ціну і у кожного гравця є оптимальна стратегія, то змішане розширення гри $\bar{G}$ має ту ж ціну і довільні опуклі комбінації оптимальних стратегій у грі G є оптимальними стратегіями у грі $\bar{G}$. Якщо ж гра G не має ціни, а отже, у гравців немає оптимальних стратегій, то у грі $\bar{G}$ кожен гравець має хоча б одну оптимальну змішану стратегію, а ціна гри належить відрізку $[\bar{v}, \tilde{v}]$.

Знаходження рівноваг у змішаних стратегіях. Нехай X_i скінченна множина стратегій гравця $i \in I$. Для довільної змішаної стратегії $\mu_i \in M_i$ позначимо через $[\mu_i] = \{x_i \in X_i: \mu_i(x_i) > 0\}$ – "носії" μ_i , тобто множину чистих стратегій гравця i , які входять у μ_i з додатною ймовірністю.

Означення 5.3. Змішана стратегія μ_i називається цілком змішаною, якщо $[\mu_i] = X_i$, тобто носієм μ_i є вся множина чистих стратегій.

Означення 5.4. Ситуація μ у грі $\bar{G}$ називається цілком змішаною, якщо μ_i – цілком змішана стратегія при всіх $i \in I$.

Теорема 5.4. Нехай початкова гра $G = \{X_i, H_i, i \in I\}$ має скінченні множини стратегій. Нехай $\mu^* \in NE(\bar{G})$ – рівновага Неша у змішаних стратегіях. Тоді справедлива така система рівностей

$$\forall i \in I, \forall x_i \in [\mu_i^*]: \bar{H}_i(\delta_{x_i}, \mu_{I \setminus i}^*) = \bar{H}_i(\mu^*). \quad (5.2)$$

Теорема 5.4 є основним інструментом, що дозволяє обчислювати рівноваги Неша у змішаних стратегіях. Дійсно, нехай ми шукаємо ситуацію $\mu \in NE(\bar{G})$, вважаючи носії всіх стратегій μ_i , заданими

$$[\mu_i] = Y_i \subseteq X_i, i \in I. \quad (5.3)$$

Тоді система (5.2) набуде вигляду

$$\forall i \in I, \forall x_i, y_i \in Y_i: \bar{H}_i(\delta_{x_i}, \mu_{I \setminus i}^*) = \bar{H}_i(\delta_{y_i}, \mu_{I \setminus i}^*). \quad (5.4)$$

Коли кількість стратегій в множині $X_i, i \in I$, невелика, то наступний алгоритм дозволяє повністю визначити $NE(\bar{G})$. Для цього фіксуємо підмножину $Y_i \subseteq X_i$.

Розв'язуємо систему (5.4) відносно змінних $\mu_i \in M_i$ для всіх $i \in I$. Для кожного розв'язку μ тепер потрібно перевірити нерівності

$$\forall i \in I, \forall x_i \in Y_i: \bar{H}_i(\delta_{x_i}, \mu_{I \setminus i}) \leq \bar{H}_i(\mu_i, \mu_{I \setminus i}).$$

Для біматричних ігор двох гравців змішані рівноваги Неша можна подати у аналітичній формі. Нехай виграші гравців задаються матрицями

$$U_i = (H_i(x_1, x_2)), x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, i = \{1, 2\},$$

де X_1 – множина рядків, X_2 – множина стовпців.

Змішана стратегія μ_1 є вектор – рядком $\mu_1 = [\mu_1(x_1)], x_1 \in X_1$, а змішана стратегія μ_2 є вектор – стовпчиком $\mu_2 = [\mu_2(x_2)], x_2 \in X_2$. Тоді виграш гравця i задається формулою

$$\bar{H}_i(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 U_i \mu_2, i = \{1, 2\}.$$

Нехай (μ_1^*, μ_2^*) – цілком змішана ситуація із $NE(\bar{G})$. Тоді система (8.4) набуде вигляду

$$U_1 \mu_2^* = \vartheta_1 J_{X_1}, \quad \mu_1^* U_2 = \vartheta_2 J_{X_2}, \quad (5.5)$$

де $\vartheta_i = \bar{H}_i(\mu_1^*, \mu_2^*)$ – NE-виграш гравця i ; J_{X_1}, J_{X_2} – відповідно вектор – стовпчик і вектор – рядок, всі компоненти яких дорівнюють 1.

Нехай матриці U_i – не вироджені. Тоді із першого рівняння системи (5.5) знаходимо

$$\mu_2^* = \vartheta_1^{-1} U_1^{-1} J_{X_1}.$$

Перемножуючи зліва на J_{X_2} цю рівність, одержимо

$$1 = \vartheta_1 J_{X_2} U_1^{-1} J_{X_1}$$

Звідси

$$\vartheta_1 = \frac{1}{J_{X_2} U_1^{-1} J_{X_1}}.$$

Тому

$$\mu_2^* = \frac{U_1^{-1} J_{X_1}}{J_{X_2} U_1^{-1} J_{X_1}}. \quad (5.6)$$

Аналогічно,

$$\mu_1^* = \frac{J_{X_1} U_2^{-1}}{J_{X_1} U_2^{-1} J_{X_2}}. \quad (5.7)$$

Таким чином, якщо U_i – не вироджені матриці і гра $G = \{X_i, H_i, i = \{1, 2\}\}$ має цілком змішану NE - ситуацію (μ_1^*, μ_2^*) , то вона єдина і визначається формулами (5.7), (5.6) ■

Задача 1. Знайти рівновагу за Нешем у біматричній грі

$$H^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Нехай (X_i^1, X_j^2) – ситуація у наведеній грі з множинами стратегій гравців $X^1 = X^2 = \{1, 2, 3, 4\}$. $N_k, k = \overline{1, 2}$ – множина ситуацій k – го гравця з найбільшими виграшами. Тоді

$$N_1 = \{(4, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}, \\ N_2 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 2)\}.$$

$$NE = N_1 \cap N_2 = \{(2, 2)\} \bullet$$

Задача 2. Знайти за означенням рівноваги за Нешем у змішаних стратегіях в біматричній грі з такими матрицями виграшу гравців:

$$H^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Розв'язок. Оскільки гра є біматричною, то кількість гравців $n = 2$, множина гравців $N = \{1, 2\}$. В силу того, що матриці виграшу гравців розмірності 2×2 , то за їхні множини стратегій можна

прийняти $X_1 = X_2 = \{1, 2\}$. Для знаходження рівноваг за Нешем у змішаних стратегіях побудуємо змішане розширення гри. Змішаною стратегією першого гравця буде розподіл ймовірностей $\mu^1 = (\mu_1(1), \mu_1(2))$, де $0 \leq \mu_1(1), \mu_1(2) \leq 1$, $\mu_1(1) + \mu_1(2) = 1$ на множині його чистих стратегій $X_1 = \{1, 2\}$. Аналогічно змішаною стратегією другого гравця буде розподіл ймовірностей $\mu^2 = (\mu_2(1), \mu_2(2))$, де $0 \leq \mu_2(1), \mu_2(2) \leq 1$, $\mu_2(1) + \mu_2(2) = 1$ на множині його чистих стратегій $X_2 = \{1, 2\}$.

Множинами змішаних стратегій гравців є одиничні симплекси

$$M_i = \{\mu^i = (\mu_i(1), \mu_i(2)): \mu_i(1), \mu_i(2) \in [0, 1], \mu_i(1) + \mu_i(2) = 1, i = \overline{1, 2}\}.$$

Для спрощення далі покладемо $\mu_1(1) = p$, $\mu_2(1) = q$. Тоді $\mu_1(2) = 1 - p$, $\mu_2(2) = 1 - q$. Математичні сподівання виграшів гравців будуть мати вигляд

$$\overline{H^1}(p, q) = (p \quad 1 - p) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 - q \end{pmatrix} = 2pq + p(1 - q) + 3(1 - p)q,$$

$$\overline{H^2}(p, q) = (p \quad 1 - p) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 - q \end{pmatrix} = 2pq + 3p(1 - q) + (1 - p)q.$$

Знайдемо рівновагу за Нешем. Для цього потрібно розв'язати систему оптимізаційних задач

$$\overline{H^1}(\hat{p}, \hat{q}) = \max_{p \in [0,1]} \overline{H^1}(p, \hat{q}) = \max_{p \in [0,1]} (2p\hat{q} + p(1-\hat{q}) + 3(1-p)\hat{q}),$$

$$\overline{H^2}(\hat{p}, \hat{q}) = \max_{q \in [0,1]} \overline{H^1}(\hat{p}, q) = \max_{q \in [0,1]} (2\hat{p}q + 3\hat{p}(1-q) + (1-\hat{p})q).$$

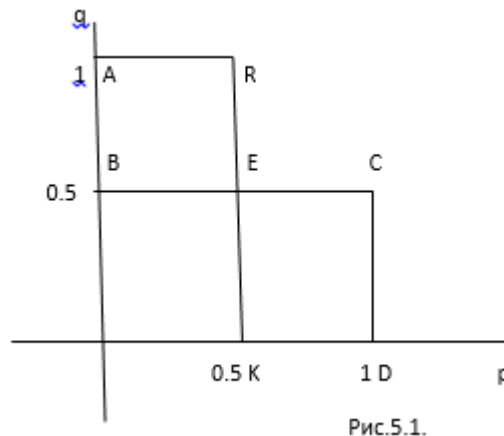
Нехай $N_k, k = \overline{1,2}$ – множини розв'язків наведених задач. Побудуємо N_1 . Оскільки функція $\overline{H^1}(p, \hat{q})$ є лінійною за p при фіксованому $\hat{q}$, то максимум буде досягатися або в 0, або в 1, залежно від коефіцієнта при p . Таким чином, ($\hat{q} = q$)

$$p = \begin{cases} 1, & q \in [0, 0.5), \\ 0, & q \in (0.5, 1], \\ [0, 1], & q = 0.5. \end{cases}$$

На Рис.5.1. множину N_1 складає ламана ABCD. Аналогічний результат отримаємо для множини N_2 .

$$q = \begin{cases} 1, & p \in [0, 0.5), \\ 0, & p \in (0.5, 1], \\ [0, 1], & p = 0.5. \end{cases}$$

На Рис.5.1. множину N_2 складає ламана ARKD.



Таким чином, (див. Рис.5.1.) ламані ABCD та ARKD перетинаються у трьох точках: (0,1), (0.5,0.5), (1,0), які є рівновагами Неша у грі $\overline{G}$ – змішаному розширенні вихідної гри G.

Оскільки змішані стратегії вихідної гри: $\mu_1(1) = p, \mu_2(1) = q; \mu_1(2) = 1 - p, \mu_2(2) = 1 - q$, то рівноваги Неша у змішаних стратегіях будуть мати вигляд $((p, 1-p), (q, 1-q))$. Тоді отримаємо, що

$$NE = \{((0,1), (1,0)); ((0.5,0.5), (0.5,0.5)); ((1,0), (0,1))\}.$$

Цим рівновагам відповідають такі виграші гравців: $\{(3,1), (1.5,1.5), (1,3)\}$ •

Задача 3. У грі приймають участь n гравців, які є агентами з продажу автомобілів. Загальний попит фіксований і дорівнює D . Нехай x_i – кількість автомобілів, яку гравець i бере на реалізацію. Припускається, що в кожного агента одна і та ж сама кількість покупців за

диницю часу. Тоді попит на автомобілі агента i дорівнює $D x_i (x_1 + \dots + x_n)^{-1}$. Нехай P_i – дохід агента i з продажу одного автомобіля, а C_i – витрати на його зберігання протягом одиниці часу. Одержимо гру в нормальній формі:

$$G = \{I = (1, \dots, n), X_i = [0, \infty), H_i = D P_i x_i (x_1 + \dots + x_n)^{-1} - C_i x_i\}.$$

Знайти рівноваги за Нешем у чистих стратегіях.

Розв'язок. Із означення рівноваги Неша маємо

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i} = D P_i \frac{(x_1 + \dots + x_n) \| x_i}{(x_1 + \dots + x_n)^2} - C_i = 0, i = \overline{1, n},$$

де $(x_1 + \dots + x_n) \| x_i$ – сума всіх членів, крім i – го.

Умови оптимальності перепишемо у вигляді

$$\frac{(x_1 + \dots + x_n) \| x_i}{(x_1 + \dots + x_n)^2} = \frac{C_i}{D P_i}, i = \overline{1, n}.$$

Складемо ці рівняння. Тоді можемо знайти

$$x_1 + \dots + x_n = \frac{(n-1)D}{\sum_{i=1}^n \frac{C_i}{P_i}},$$

$$\frac{(x_1 + \dots + x_n) - x_i}{(x_1 + \dots + x_n)^2} = \frac{C_i}{D P_i}, i = \overline{1, n}.$$

Домашнє завдання 5.

Задача 5.1. Знайти рівновагу за Нешем у біматричній грі в залежності від параметра a

1.1.

$$H^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & a \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

1.2.

$$H^1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & a & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.2. Знайти за означенням рівноваги за Нешем у змішаних стратегіях в біматричній грі з такими матрицями виграшу гравців:

2.1.

$$H^1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

2.2.

$$H^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

2.3.

$$H^1 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.3. Дві фірми незалежно і одночасно встановлюють ціни x_1 та x_2 на заємозамінну продукцію. Попит на ринку встановлюється згідно з вибраними цінами і дорівнює

$$d_1 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha_1}, \quad d_2 = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha_2}, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 1.$$

Витрати фірм на випуск одиниці продукції складають відповідно c_1 і c_2 . Фірми хочуть максимізувати свій прибуток. Побудувати нормальну форму гри і знайти рівноваги за Нешем у чистих стратегіях.

Практичні 6. Алгоритми знаходження рівноваг Неша у біматричних іграх.

Теорема 6.1. Нехай матриці виграшів гравців H^1 та H^2 розмірності $m \times m$ є квадратними та невиродженими. Тоді якщо гра має цілком змішану (чисті стратегії використовуються з ненульовою ймовірністю) єдину рівновагу за Нешем $(\hat{p}, \hat{q})$, то

$$\hat{p} = \alpha_2 e' (H^2)^{-1}, \quad \hat{q} = \alpha_1 (H^1)^{-1} e, \quad \alpha_i = \frac{1}{e' (H^i)^{-1} e}, \quad (6.1)$$

де $e = (1, \dots, 1)$ – вектор-рядок розмірності m , який складається з одиниць.

Навпаки, якщо вектори $\hat{p}$, $\hat{q}$ задовольняють формулам (6.1) та їхні компоненти невід'ємні, то пара $(\hat{p}, \hat{q})$ є рівновагою за Нешем в змішаних стратегіях гри G .

Теорема 6.2. Для того щоб ситуація $(\hat{p}, \hat{q})$ була рівновагою за Нешем біматричної гри G в змішаних стратегіях, необхідно й достатньо, щоб знайшлися множини $\widehat{X}_1 \subseteq X_1, \widehat{X}_2 \subseteq X_2$ та числа α_1, α_2 , для яких би виконувались умови:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in X_2} H_{j,k}^1 \widehat{q}_k &= \alpha_1 \quad \forall j \in \widehat{X}_1, \\ \sum_{k \in X_2} H_{j,k}^1 \widehat{q}_k &\leq \alpha_1 \quad \forall j \in X_1 \setminus \widehat{X}_1, \\ \sum_{k \in X_2} \widehat{q}_k &= 1, \quad \widehat{q}_k \geq 0 \quad \forall k \in X_2; \\ \sum_{j \in X_1} H_{j,k}^2 \widehat{p}_j &= \alpha_2 \quad \forall k \in \widehat{X}_2, \\ \sum_{j \in X_1} H_{j,k}^2 \widehat{p}_j &\leq \alpha_2 \quad \forall k \in X_2 \setminus \widehat{X}_2, \\ \sum_{j \in X_1} \widehat{p}_j &= 1, \quad \widehat{p}_j \geq 0 \quad \forall j \in X_1; \\ |\widehat{X}_1| &= |\widehat{X}_2|. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Графічний метод розв'язання матричних ігор $2 \times m$.

Цей метод застосовується для визначення рівноваг за Нешем в змішаних стратегіях до біматричних ігор з матрицями

$$H^1 = \begin{pmatrix} H_{1,1}^1 & H_{1,2}^1 & \dots & H_{1,m}^1 \\ H_{2,1}^1 & H_{2,2}^1 & \dots & H_{2,m}^1 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} H_{1,1}^2 & H_{1,2}^2 & \dots & H_{1,m}^2 \\ H_{2,1}^2 & H_{2,2}^2 & \dots & H_{2,m}^2 \end{pmatrix}.$$

Гра має рівновагу за Нешем у змішаних стратегіях: $p' = (p_1, p_2)$, $q^1 = (q_1, \dots, q_m)$, де ймовірності застосування чистих стратегій задовольняють умовам

$p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + \dots + q_m = 1$. Тому для застосування теореми 6.2 потрібно перебирати під матриці розмірності 2×2 . Кожна із них задається номерами двох стовпчиків k_1 та k_2 . Система (6.2) набуде вигляду

$$H_{1,k_1}^2 p_1 + H_{2,k_1}^2 (1 - p_1) = \alpha_2, \quad H_{1,k_2}^2 p_1 + H_{2,k_2}^2 (1 - p_1) = \alpha_2,$$

$$H_{1,k}^2 p_1 + H_{2,k}^2 (1 - p_1) \leq \alpha_2, \quad \forall k \neq k_1, k_2, \quad p_1 \in [0, 1].$$

Якщо ця система не сумісна, то переходимо до іншої пари k_1, k_2 . У випадку існування її розв'язку $\widehat{p}_1, \widehat{\alpha}_2$ розглянемо систему (6.1)

$$H_{1,k_1}^1 q + H_{2,k_1}^1 (1 - q) = \alpha_1, \quad H_{1,k_2}^1 q + H_{2,k_2}^1 (1 - q) = \alpha_1. \quad (6.3)$$

Нехай існує розв'язок q^* , $\widehat{\alpha}_1$. Тоді змішана стратегія першого гравця $\widehat{p}' = (\widehat{p}_1, 1 - \widehat{p}_1)$, а змішана стратегія $\widehat{q}' = (\widehat{q}_1, \dots, \widehat{q}_m)$ другого гравця має вигляд

$$\widehat{q}_k = \begin{cases} q^*, & k = k_1, \\ 1 - q^*, & k = k_2, \\ 0, & k \neq k_1, k_2 \end{cases}.$$

Таким чином $(\widehat{p}, \widehat{q})$ буде рівновагою за Нешем у змішаних стратегіях.

Для визначення пар k_1, k_2 , для яких існує розв'язок системи (6.2), можна використати геометричну інтерпретацію. На відріжку $[0, 1]$ будуюмо графіки сімейства лінійних функцій

$$l_k(p_1) = H_{1,k}^2 p_1 + H_{2,k}^2 (1 - p_1), \quad k = 1, \dots, m.$$

Точки злому верхньої згинаючої сімейства прямих $l_k(p_1)$, $k = 1, \dots, m$, відповідають парам k_1, k_2 , для яких існує розв'язок $\widehat{p}_1, \widehat{\alpha}_2$ системи (6.2). Далі послідовно перебираючи точки злому верхньої згинаючої, розв'язуємо (6.3), перевіряючи умову $q^* \in [0, 1]$.

Графічний метод розв'язання матричних ігор $m \times 2$.

Цей метод застосовується для визначення рівноваг за Нешем в змішаних стратегіях до біматричних ігор з матрицями

$$H^1 = \begin{pmatrix} H_{1,1}^1 & H_{1,2}^1 \\ H_{2,1}^1 & H_{2,2}^1 \\ \dots & \dots \\ H_{1,m}^1 & H_{1,m}^1 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} H_{1,1}^2 & H_{1,2}^2 \\ H_{2,1}^2 & H_{2,2}^2 \\ \dots & \dots \\ H_{1,m}^2 & H_{1,m}^2 \end{pmatrix}.$$

Цей метод зводиться до методу для матричних ігор $2 \times m$, якщо поміняти гравців місцями.

Для знаходження пар j_1, j_2 , для яких апріорі існує розв'язок системи

$$\begin{aligned} H_{j_1,1}^1 q + H_{j_1,2}^1 (1 - q_1) &= \alpha_1, & H_{j_2,1}^1 q + H_{j_2,2}^1 (1 - q_1) &= \alpha_1 \\ H_{j_1,1}^1 q_1 + H_{j_2,2}^1 (1 - q_1) &\leq \alpha_{21}, \quad \forall j \neq j_1, j_2, & q_1 &\in [0,1]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Для визначення пар j_1, j_2 , для яких існує розв'язок системи (6.4), можна використати геометричну інтерпретацію. На відрізку $[0,1]$ будуюмо графіки сімейства лінійних функцій

$$l_j(q_1) = H_{j,1}^1 q_1 + H_{j,2}^1 (1 - q_1), \quad j = 1, \dots, m.$$

Точки злому верхньої згинаючої сімейства прямих $l_j(q_1)$, $j = 1, \dots, m$, відповідають парам j_1, j_2 , для яких існує розв'язок $\widehat{q}_1, \widehat{\alpha}_1$ системи (6.4). Далі послідовно перебираючи точки злому верхньої згинаючої, розв'язуємо систему

$$H_{j_1,1}^2 p + H_{j_2,1}^2 (1 - p) = \alpha_2, \quad H_{j_1,2}^2 p + H_{j_2,2}^2 (1 - p) = \alpha_2, \quad p \in [0,1]. \quad (6.5)$$

Нехай $p^*, \widehat{\alpha}_2$ – розв'язок системи (6.5). Тоді змішана стратегія другого гравця $\widehat{q}' = (\widehat{q}, 1 - \widehat{q}_1)$, а змішана стратегія $\widehat{p}' = (\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_m)$ першого гравця має вигляд

$$\widehat{p}'_j = \begin{cases} p^*, & j = j_1, \\ 1 - p^*, & j = j_2, \\ 0, & j \neq j_1, j_2 \end{cases}.$$

Таким чином, $(\widehat{p}', \widehat{q}')$ буде рівновагою за Нешем у змішаних стратегіях ■

Задача 1. Знайти цілком змішану рівновагу за Нешем у біматричній грі

$$H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

1.1. Знаходимо обернені матриці

$$(H^1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (H^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Обчислимо виграші гравців

$$\alpha_1 = \frac{1}{e' (H^1)^{-1} e} = \left((1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{4},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{e' (H^2)^{-1} e} = \left((1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{2}{3}.$$

1.3. Знаходимо цілком змішані стратегії

$$\hat{p} = \alpha_2 e' (H^2)^{-1} = \frac{2}{3} (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = (1/3 \ 1/3 \ 1/3),$$

$$\hat{q} = \alpha_1 (H^1)^{-1} e = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, цілком змішана рівновага за Нешем має вигляд

$$(\hat{p}, \hat{q}) = ((1/3, 1/3, 1/3), (1/4, 1/4, 1/2)).$$

Цілком змішані рівноваги не включають рівноваг у чистих стратегіях. Для ілюстрації цього факту розглянемо застосування теореми 6.1 до задачі 2 із практичних 5.

Нехай виграші гравців мають вигляд

$$H^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Обернені матриці мають вигляд

$$(H^1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad (H^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо виграші гравців

$$\alpha_1 = \frac{1}{e' (H^1)^{-1} e} = \left((1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{3}{2},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{e' (H^2)^{-1} e} = \left((1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{3}{2}.$$

Знаходимо цілком змішані стратегії

$$\hat{p} = \alpha_2 e' (H^2)^{-1} = \frac{3}{2} (1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = (1/2 \ 1/2),$$

$$\hat{q} = \alpha_1 (H^1)^{-1} e = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

які співпали зі змішаними стратегіями в задачі 2 із практичних 5 •

Задача 2. Знайти геометричним методом рівновагу за Нешем у біматричній грі з матрицями виграшів гравців

$$H^1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2.5 & 4 & 4.5 \\ 3 & 2.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. На відрізку $[0,1]$ будуємо графіки сімейства функцій

$$l_1(p_1) = 0 p_1 + 3(1 - p_1), \quad l_2(p_1) = 2.5 p_1 + 2.5(1 - p_1) = 2.5,$$

$$l_3(p_1) = 4 p_1 + (1 - p_1) = 3 p_1 + 1, \quad l_4(p_1) = 4.5 p_1.$$

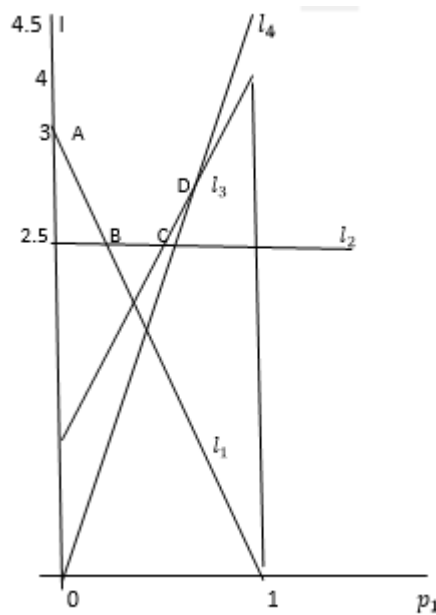


Рис.6.1.

Верхня огинаюча сімейства прямих $l_k(p_1)$ на Рис.6.1 – ABCD. Перша точка верхньої огинаючої

(перетин прямих l_1 та l_2 – точка B) має абсцису $\widehat{p_1} = \frac{1}{6}$. Розглянемо систему

$$4q + 5(1 - q) = \alpha_1,$$

$$2q + 1(1 - q) = \alpha_1.$$

Її розв'язок $q^* = 2 \notin [0,1]$. Тому переходимо наступної точки верхньої огинаючої

(перетин прямих l_2 та l_3 – точка C) має абсцису $\widehat{p_1} = \frac{1}{2}$. Система рівнянь

$$5q + 2(1 - q) = \alpha_1,$$

$$1q + 4(1 - q) = \alpha_1$$

має розв'язок $q^* = 2 \notin [0,1]$. Тому переходимо наступної точки верхньої огинаючої

(перетин прямих l_2 та l_3 – точка C) має абсцису $\widehat{p_1} = \frac{1}{2}$. Система рівнянь

$$5q + 2(1 - q) = \alpha_1,$$

$$1q + 4(1 - q) = \alpha_1$$

має розв'язок $q^* = \frac{1}{3} \in [0,1]$, $\alpha_1 = 3$. Перевіримо ще точку D – перетин прямих l_3 та l_4 має абсцису $\widehat{p_1} = \frac{2}{3}$. Система рівнянь

$$2q + 4(1 - q) = \alpha_1,$$

$$4q + 2(1 - q) = \alpha_1$$

має розв'язок $q^* = \frac{1}{2} \in [0,1]$, $\alpha_1 = 3$. Таким чином, маємо два розв'язки:

- 1) $\hat{p}' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\hat{q}' = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$, $\overline{H^1} = 3$, $\overline{H^2} = \frac{17}{6}$;
- 2) $\hat{p}' = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $\hat{q}' = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\overline{H^1} = 3$, $\overline{H^2} = \frac{17}{6}$.

Задача 3. Знайти геометричним методом рівновагу за Нешем у біматричній грі з матрицями виграшів гравців

$$H^1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. На відрізку $[0,1]$ будуюмо графіки сімейства функцій

$$l_1(q_1) = \frac{8}{3} q_1 + 0 (1 - q_1) = \frac{8}{3} q_1, \quad l_2(q_1) = 2 q_1 + 2 q = 2, \\ l_3(q_1) = 0 q_1 + 3 (1 - q_1) = 3 (1 - q_1).$$

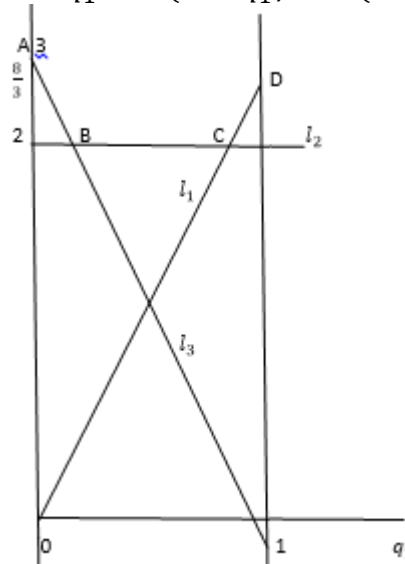


Рис.6.2.

Верхня огинаюча сімейства прямих $l_k(q_1)$ на Рис.6.2 – ABCD. Перша точка верхньої огинаючої

(перетин прямих l_2 та l_3 – точка B) має абсцису $\widehat{q_1} = \frac{1}{3}$. Розглянемо систему (6.5)

$$4p + 5(1 - p) = \alpha_2,$$

$$2p + 1(1 - p) = \alpha_2.$$

Її розв'язок $p^* = 2 \notin [0,1]$. Тому переходимо наступної точки верхньої огинаючої

(перетин прямих l_2 та l_1 – точка C) має абсцису $\widehat{q_1} = \frac{3}{4}$. Система рівнянь

$$2p + 4(1 - p) = \alpha_2,$$

$$4p + 2(1 - p) = \alpha_2$$

має розв'язок $p^* = \frac{1}{2} \in [0,1]$, $\alpha_2 = 3$.

Таким чином, одержимо змішані стратегії гравців: $\hat{q}' = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $\hat{p}' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

$$\overline{H^1} = 2, \overline{H^2} = 3 \bullet$$

Домашнє завдання 6.

Задача 6.1. Знайти цілком змішану рівновагу за Нешем у біматричній грі

1.1.

$$H^1 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

1.2.

$$H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.2. Знайти геометричним методом рівновагу за Нешем у біматричній грі з матрицями виграшів гравців

2.1.

$$H^1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 7.5 & 4 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0.5 & 5 \end{pmatrix};$$

2.2.

$$H^1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 9 \\ 6 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

2.3.

$$H^1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 8 \\ 8 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix};$$

2.4.

$$H^1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 7 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \\ 5 & 3 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Практичні 7. Статичні ігри з неповною інформацією: байєсові ігри.

Теоретичні засади.

Нагадаємо, що для ігор з повною інформацією нормальна форма гри -

$$G = \{I = \{1, \dots, m\}; X_i; H_i(x_1, \dots, x_m), x_i \in X_i, i \in I\}.$$

Якщо ми розглядаємо гру з одночасними ходами, то $X_i = A_i$ - множина ходів.

Ігри з повною інформацією проходять так:

- (1) - гравці одночасно обирають ходи;
- (2) - гравці отримують свої виграші $H_i(a_1, \dots, a_m)$, $i \in I$.

Опишемо тепер ситуацію ігор з неповною інформацією. Ми повинні спочатку врахувати той факт, що гравець знає свою функцію виграшу, але може не знати функцій виграшів інших гравців. Нехай можлива функція виграшу гравця i має вигляд

$$H_i(a_1, \dots, a_m; t_i),$$

де t_i - тип гравця, $t_i \in T_i$ - множина (простір) можливих типів гравця i .

Сказати, що гравець i знає свою функцію виграшу, означає, що він знає свій тип. Аналогічно, якщо гравець не знає функцій виграшів інших гравців, то він не знає їх типу, тобто

$$t_{-i} = \{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_m\} \in T_{-i},$$

де T_{-i} - множина можливих значень t_{-i} .

Тепер уведемо поняття про представлення гравця. Представлення гравця i про типи інших гравців - це ймовірність $p_i(t_{-i}|t_i)$ того, що типи інших гравців описуються вектором

$t_{-i} = \{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_m\}$ при умові, що i -й гравець має (і знає) свій тип t_i .

Означення 7.1. Байєсова гра m осіб у нормальній формі визначається:

- набором множин (просторів) ходів $A_1, \dots, A_m$;
- набором множин (просторів) типів $T_1, \dots, T_m$;
- представленнями $p_1, \dots, p_m$ гравців;
- функціями виграшів $H_1, \dots, H_m$ гравців.

Тип $t_i \in T_i$ гравця i йому відомий та визначає його функцію виграшів $H_i(a_1, \dots, a_m; t_i)$.

Представлення $p_i(t_{-i}|t_i)$ гравця i описують невизначеність відносно типів t_{-i} інших $m - 1$ гравців, при даному типі t_i гравця i . Цю гру будемо позначати $G = \{A, T, p, H\}$, де $A = A_1 \times \dots \times A_m$, $T = T_1 \times \dots \times T_m$, $p = (p_1, \dots, p_m)$, $H = (H_1, \dots, H_m)$.

Згідно [28], гра буде протікати таким чином:

- (1) природа обирає вектор типів $t = (t_1, \dots, t_m) \in T = T_1 \times \dots \times T_m$;
- (2) природа повідомляє кожному гравцю i його тип t_i ;
- (3) гравці одночасно обирають свої ходи;
- (4) гравці отримують виграші $H_i(a_1, \dots, a_m; t_i)$, $i \in I$.

Уведення етапів 1) - 2) зводять нашу гру до гри з неповною інформацією.

Коли Природа "об'являє" гравцю i його тип t_i , то він може обчислити представлення $p_i(t_{-i}|t_i)$, використовуючи формулу Байєса

$$p_i(t_{-i}|t_i) = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i}, t_i)}.$$

Далі, інші гравці можуть також обчислити різні представлення, які гравець i може мати в залежності від типу t_i .

Сформулюємо тепер означення рівноваги Байєса, або рівноваги Байєса - Неша (БН - рівноваги.) При цьому центральна ідея лишається тією ж самою: стратегія кожного

гравця повинна бути кращою відповіддю на стратегії інших гравців, тобто БН - рівновага – це рівновага Неша в Байєсовській грі.

Означення 7.2. В статичній Байєсовій грі $G = \{A_1, \dots, A_m; T_1, \dots, T_m; p_1, \dots, p_m; H_1, \dots, H_m\}$ ситуація (тобто набір "чистих" стратегій) $s^* \in \text{БН - рівновага}$, якщо для любого любого типу $t_i \in T_i$ стратегія $s_i^*(t_i)$ розв'язує задачу

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} H_i(s_1^*(t_1), \dots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), \dots, s_m^*(t_m); t_i) p_i(t_{-i}/t_i) \quad \blacksquare$$

Задача 1. Розглянемо наступну модифікацію дуополії Курно. Два гравці випускають однотипну продукцію. Ціна одиниці товару виражається формулою (обернена функція попиту) $P(Q) = a - Q$, $Q = q_1 + q_2$, $P(Q) > 0$. Нехай фірма 1 має функцію витрат $C_1(q_1) = B_L q_1$ із ймовірністю θ_1 і витрати $C_1(q_1) = B_H q_1$ із ймовірністю $1 - \theta_1$, причому $B_L < B_H < a$. Фірма 2 має функцію витрат $C_2(q_2) = C_L q_2$ із ймовірністю θ_2 і витрати $C_2(q_2) = C_H q_2$ із ймовірністю $1 - \theta_2$, причому $C_L < C_H < a$. Крім того, будемо припускати, що фірми знають свої функції витрат і ймовірності граничних витрат фірм – суперників. Знайти рівноваги Байєса – Неша випуску продукції обома фірмами. (Зауважимо, що в класичній дуополії Курно граничні витрати фіксовані.)

Розв'язок. Для фірми 1 будемо мати чистий прибуток при різних значеннях граничних витрат

$$\pi_1(q; B_L) = (a - q_1 - q_2 - B_L) q_1,$$

$$\pi_1(q; B_H) = (a - q_1 - q_2 - B_H) q_1.$$

Аналогічно для фірми 2 будемо мати

$$\pi_2(q; C_L) = (a - q_1 - q_2 - C_L) q_2,$$

$$\pi_2(q; C_H) = (a - q_1 - q_2 - C_H) q_2.$$

Представлення фірми 1 про витрати фірми 2 задаються умовними ймовірностями:

$\mu_1(H|H) = \mu_1(C_2(q_2) = C_H q_2 | C_1(q_1) = B_H q_1)$ – ймовірність того, що витрати фірми 2 будуть рівними $C_H q_2$, при умові, що витрати фірми 1 будуть рівними $B_H q_1$;

$\mu_1(L|H) = \mu_1(C_2(q_2) = C_L q_2 | C_1(q_1) = B_H q_1)$ – ймовірність того, що витрати фірми 2 будуть рівними $C_L q_2$, при умові, що витрати фірми 1 будуть рівними $B_H q_1$;

$\mu_1(H|L) = \mu_1(C_2(q_2) = C_H q_2 | C_1(q_1) = B_L q_1)$ – ймовірність того, що витрати фірми 2 будуть рівними $C_H q_2$, при умові, що витрати фірми 1 будуть рівними $B_L q_1$;

$\mu_1(L|L) = \mu_1(C_2(q_2) = C_L q_2 | C_1(q_1) = B_L q_1)$ – ймовірність того, що витрати фірми 2 будуть рівними $C_L q_2$, при умові, що витрати фірми 1 будуть рівними $B_L q_1$.

Представлення фірми 2 про витрати фірми 1 задаються відповідно умовними ймовірностями:

$\mu_2(H|H) = \mu_2(C_1(q_1) = B_H \ q_1 | C_2(q_2) = C_H \ q_2)$ – ймовірність того, що витрати фірми 1 будуть рівними $B_H \ q_1$, при умові, що витрати фірми 2 будуть рівними $C_H \ q_2$;

$\mu_2(L|H) = \mu_2(C_1(q_1) = B_L \ q_1 | C_2(q_2) = C_H \ q_2)$ – ймовірність того, що витрати фірми 1 будуть рівними $B_L \ q_1$, при умові, що витрати фірми 2 будуть рівними $C_H \ q_2$;

$\mu_2(H|L) = \mu_2(C_1(q_1) = B_H \ q_1 | C_2(q_2) = C_L \ q_2)$ – ймовірність того, що витрати фірми 1 будуть рівними $B_H \ q_1$, при умові, що витрати фірми 2 будуть рівними $C_L \ q_2$;

$\mu_2(L|L) = \mu_2(C_1(q_1) = B_L \ q_1 | C_2(q_2) = C_L \ q_2)$ – ймовірність того, що витрати фірми 1 будуть рівними $B_L \ q_1$, при умові, що витрати фірми 2 будуть рівними $C_L \ q_2$.

Оптимальна відповідь фірми 1 на очікуваний випуск фірми 2 є функцією її витрат.

Якщо $C_1(q_1) = B_H \ q_1$, то фірма 1 буде визначати свій середній чистий прибуток як розв'язок такої задачі

$$\begin{aligned} & \pi_1(q_1, \mu_1(H|H)q_2(H) + \mu_1(L|H)q_2(L); B_H) = \\ & = (a - q_1 - \mu_1(H|H)q_2(H) - \mu_1(L|H)q_2(L) - B_H) q_1 \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Якщо $C_1(q_1) = B_L \ q_1$, то фірма 1 буде визначати свій середній чистий прибуток як розв'язок такої задачі

$$\begin{aligned} & \pi_1(q_1, \mu_1(H|L)q_2(H) + \mu_1(L|L)q_2(L); B_L) = \\ & = (a - q_1 - \mu_1(H|L)q_2(H) - \mu_1(L|L)q_2(L) - B_L) q_1 \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Оптимальна відповідь фірми 2 на очікуваний випуск фірми 1 є функцією її витрат.

Якщо $C_2(q_2) = C_H \ q_2$, то фірма 2 буде визначати свій середній чистий прибуток як розв'язок такої задачі

$$\begin{aligned} & \pi_2(\mu_2(H|H) q_1(H) + \mu_2(L|H) q_1(L), q_2; C_H) = \\ & = (a - q_2 - \mu_2(H|H)q_1(H) - \mu_2(L|H)q_1(L) - C_H) q_2 \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Якщо $C_2(q_2) = C_L \ q_2$, то фірма 2 буде визначати свій середній чистий прибуток як розв'язок такої задачі

$$\begin{aligned} & \pi_2(\mu_2(H|L) q_1(H) + \mu_2(L|L) q_1(L), q_2; C_L) = \\ & = (a - q_2 - \mu_2(H|L)q_1(H) - \mu_2(L|L)q_1(L) - C_L) q_2 \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Умови оптимальності першого порядку для виписаних чотирьох задач на екстремум будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} 2 \ q_1(H) + \mu_1(H|H)q_2(H) + \mu_1(L|H)q_2(L) &= a - B_H, \\ 2 \ q_1(L) + \mu_1(H|L)q_2(H) + \mu_1(L|L)q_2(L) &= a - B_L, \\ 2 \ q_2(H) + \mu_2(H|H)q_1(H) + \mu_2(L|H)q_1(L) &= a - C_H, \\ 2 \ q_2(L) + \mu_2(H|L)q_1(H) + \mu_2(L|L)q_1(L) &= a - C_L. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо *оптимальні випуски обох фірм*: $q_1(H)$, $q_1(L)$, $q_2(H)$, $q_2(L)$.

Для реалізації цих розв'язків потрібно обчислити умовні ймовірності. Визначимо спочатку ймовірності поставки на ринк обома фірмами продукції різної якості

$$p(L,L) = \theta_1 \theta_2, \quad p(H,L) = (1 - \theta_1) \theta_2, \quad p(L,H) = \theta_1 (1 - \theta_2), \quad p(H,H) = (1 - \theta_1) (1 - \theta_2).$$

Тоді

$$\mu_1(L|L) = \frac{p(L,L)}{p(L,L) + p(L,H)} = \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_1 \theta_2 + \theta_1 (1 - \theta_2)} = \theta_2,$$

$$\mu_1(L|H) = \frac{p(H,L)}{p(H,L) + p(H,H)} = \frac{(1 - \theta_1) \theta_2}{(1 - \theta_1) \theta_2 + (1 - \theta_1) (1 - \theta_2)} = \theta_2,$$

$$\mu_1(H|L) = \frac{p(L,H)}{p(L,H) + p(L,L)} = \frac{(1 - \theta_2) \theta_1}{(1 - \theta_2) \theta_1 + \theta_1 \theta_2} = 1 - \theta_2,$$

$$\mu_1(H|H) = \frac{p(H,H)}{p(H,H) + p(H,L)} = \frac{(1 - \theta_2) (1 - \theta_1)}{(1 - \theta_1) \theta_2 + (1 - \theta_1) (1 - \theta_2)} = 1 - \theta_2;$$

$$\mu_2(L|L) = \frac{p(L,L)}{p(L,L) + p(H,L)} = \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_1 \theta_2 + (1 - \theta_1) \theta_2} = \theta_1,$$

$$\mu_2(L|H) = \frac{p(L,H)}{p(L,H) + p(H,H)} = \frac{(1 - \theta_2) \theta_1}{(1 - \theta_2) \theta_1 + (1 - \theta_1) (1 - \theta_2)} = \theta_1,$$

$$\mu_2(H|L) = \frac{p(H,L)}{p(H,L) + p(L,L)} = \frac{(1 - \theta_1) \theta_2}{(1 - \theta_1) \theta_2 + \theta_1 \theta_2} = 1 - \theta_1,$$

$$\mu_2(H|H) = \frac{p(H,H)}{p(H,H) + p(L,H)} = \frac{(1 - \theta_2) (1 - \theta_1)}{(1 - \theta_2) \theta_1 + (1 - \theta_1) (1 - \theta_2)} = 1 - \theta_1.$$

Для перевірки вписаних розв'язків припустимо, що перший виробник не змінює свої граничні витрати, тобто $B_L = B_H = B$, $\theta_1 = 1$.

Тоді *фірма 2* при $C_2(q_2) = C_L q_2$ буде визначати свій чистий прибуток як розв'язок такої задачі

$$\begin{aligned} \pi_2(q_1(L), q_2; C_L) = \\ = (a - q_2 - q_1(L) - C_L) q_2 \rightarrow \max, \rightarrow q_2 = q_2(L). \end{aligned}$$

При $C_2(q_2) = C_H q_2$ *фірма 2* буде визначати свій чистий прибуток як розв'язок такої задачі

$$\begin{aligned} \pi_2(q_1(H), q_2; C_H) = \\ = (a - q_2 - q_1(H) - C_H) q_2 \rightarrow \max, q_2 = q_2(H). \end{aligned}$$

При цьому *фірма 1* буде визначати свій середній чистий прибуток як розв'язок такої задачі

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1, (1 - \theta_2) q_2(H) + \theta_2 q_2(L); B) = \\ = (a - q_1 - (1 - \theta_2) q_2(H) - \theta_2 q_2(L) - B) q_1 \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Умови оптимальності для цих трьох задач будуть мати вигляд

$$a - 2q_2 - q_1(L) - C_L = 0,$$

$$\begin{aligned} a - 2q_2 - q_1(H) - C_H &= 0, \\ a - 2q_1 - (1 - \theta_2)q_2(H) - \theta_2q_2(L) - B &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Приймаючи для системи оптимальності (7.1) припущення $B_L = B_H = B$, $\theta_1 = 1$, отримаємо

$$\begin{aligned} 2q_1(H) + (1 - \theta_2)q_2(H) &= a - B, \\ 2q_1(L) + (1 - \theta_2)q_2(H) &= a - B, \\ 2q_2(H) + q_1(L) &= a - C_H, \\ 2q_2(L) + q_1(L) &= a - C_L. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Системи (7.2) і (7.3) співпали •

Задача 2. Розглянемо наступну модифікацію дуополії Бертрана з асиметричною інформацією. Попит на продукцію фірми i , $i = \overline{1,2}$ задається формулою

$$q_i(p_1, p_2) = a - p_i - b_i p_j, j \neq i.$$

Фірми мають нульові функції витрат. Чутливість попиту 2-ї фірми відносно ціни 1-ї фірми або висока $b_2 = b_H$, або низька $b_2 = b_L$, $b_H > b_L > 0$. Для першої фірми чутливість попиту незмінна. Фірма 1 знає чутливість $b_2 = b_H$ з ймовірністю θ , а чутливість $b_2 = b_L$ – з ймовірністю $1 - \theta$. Це все загальновідомо. Знайти рівновагу Байєса – Неша випуску продукції обома фірмами.

Розв'язок. Нехай $p_2^*(b_H)$ та $p_2^*(b_L)$ відповідно вибір фірми 2, а p_1^* – вибір фірми 1. Фірма 2 для визначення $p_2^*(b_H)$ розв'язує задачу

$$\max_{p_2} (a - p_2 - b_H p_1^*) p_2;$$

для визначення $p_2^*(b_L)$ розв'язує задачу

$$\max_{p_2} (a - p_2 - b_L p_1^*) p_2.$$

Фірма 1 для визначення p_1^* розв'язує задачу

$$\begin{aligned} \max_{p_1} & (\theta (a - p_1 - b_1 p_2^*(b_H)) p_1 + \\ & + (1 - \theta) (a - p_1 - b_1 p_2^*(b_L)) p_1). \end{aligned}$$

Для наведених вище оптимізаційних задач умови оптимальності першого порядку дають

$$p_2^*(b_H) = \frac{a - b_H p_1^*}{2},$$

$$p_2^*(b_L) = \frac{a - b_L p_1^*}{2},$$

$$\begin{aligned} & \theta (a - 2p_1^* - b_1 \frac{a - b_H p_1^*}{2}) + \\ & + (1 - \theta) (a - 2p_1^* - b_1 \frac{a - b_L p_1^*}{2}) = 0. \end{aligned}$$

Розв'язуючи виписану систему відносно цін, будемо мати

$$p_1^* = \frac{a(2 - b_1)}{4 - b_1(\theta b_H + (1 - \theta) b_L)},$$

$$p_2^*(b_H) = \frac{a(4 - 2b_H - (1 - \theta)(b_H - b_L))}{2(4 - b_1(\theta b_H + (1 - \theta)b_L))},$$

$$p_2^*(b_L) = \frac{a(4 - 2b_L - \theta(b_H - b_L))}{2(4 - b_1(\theta b_H + (1 - \theta)b_L))}.$$

При $\theta = 1$, $b_H = b_L = b_2$ ми отримаємо рівновагу Неша у класичній дуополії Бертрана

$$p_1^* = \frac{a(2 - b_1)}{4 - b_1 b_2}, \quad p_2^* = \frac{a(2 - b_2)}{4 - b_1 b_2}.$$

Ці розв'язки мають сенс, коли або $0 < b_i < 2$, $i = \overline{1, 2}$, або $b_i > 2$, $i = \overline{1, 2}$.

Зауважимо, що при $b_1 = b_2 = 2$ дуополія Бертрана має нескінченну множину рівноваг Неша.

$$p_2^* = \frac{a - 2p_1^*}{2}, \quad p_1^* \in (0, \frac{a}{2}] \bullet$$

Домашнє завдання 7.

Задача 7.1. Розглянемо наступну модифікацію дуополії Курно. Два гравці випускають однотипну продукцію. Ціна одиниці товару виражається формулою (обернена функція попиту) $p(Q) = a - Q$, $Q = q_1 + q_2$, $p(Q) > 0$. Фірми мають фіксовані функції $C_i(q_i) = C_i q_i$, $i = \overline{1, 2}$. Оборнена функція попиту змінна: $a = a_L$ із ймовірністю θ_1 , $a = a_H$ із ймовірністю $1 - \theta_1$, причому $C_1, C_2 < a_L < a_H$. Фірма 1 знає функцію оберненого попиту, а фірма 2 – не знає. Це все загальновідомо. Знайти рівновагу Байєса – Неша випуску продукції обома фірмами.

Задача 7.2. Розглянемо наступну модифікацію дуополії Бертрана з асиметричною інформацією. Попит на продукцію фірми $i = \overline{1, 2}$ задається формулою

$$q_i(p_1, p_2) = a - p_i - b_i p_j, \quad j \neq i.$$

Фірми мають фіксовані функції витрат $C_i(q_i) = C_i q_i$, $i = \overline{1, 2}$. Чутливість попиту i -ї фірми відносно ціни j -ї фірми або висока $b_i = b_H$, або низька $b_i = b_L$, $b_H > b_L > 0$. Для кожної фірми чутливість $b_i = b_H$ задається з ймовірністю θ , а чутливість $b_i = b_L$ – з ймовірністю $1 - \theta$.

Кожна фірма знає своє чутливість b_i і не знає b_j конкурента. Це все загальновідомо. Знайти рівновагу Байєса – Неша випуску продукції обома фірмами.

Практичні 8. Стабільні угоди кооперативних ігор.

Теоретичні засади.

Розглянемо необов'язкові домовленості як основу кооперативної поведінки гравців. Необов'язкові домовленості будуть складатись: із домовленості про вибір ситуації та зі сценарію реагування кожного гравця на відхилення будь – якої коаліції інших гравців. Цей сценарій оголошується наперед і називається «сценарієм погроз».

В умовах, коли реакція на порушення домовленості відсутня, стабільною угодою є так звана сильна рівновага за Нешем.

Означення 8.1. Для гри у нормальній формі $(X_i, H_i, i \in I)$ ситуація $\hat{x}$ називається сильною рівновагою за Нешем, якщо будь-якій коаліції гравців не вигідно відхилитись від даної ситуації у випадку, коли доповнювальна коаліція не реагує на відхилення, тобто $\forall T \subseteq I \nexists x_T \in X_T$, що

$$\begin{aligned} \forall i \in T \quad H_i(x_T, \widehat{x_{I \setminus T}}) &\geq H_i(\hat{x}), \\ \exists j \in T \quad H_j(x_T, \widehat{x_{I \setminus T}}) &> H_j(\hat{x}). \end{aligned}$$

Позначимо множину сильних рівноваг SNE.

У випадку наявності реакції на порушення домовленості треба визначити її сценарій.

Стабільні домовленості.

Погроза може слугувати сильним механізмом кооперації. Для досягнення стабільності домовленості (наприклад, вибору рівноваги Неша) гравці оголошують деяку схему реагування на можливі відхилення інших. Оскільки гравцеві, який відхилиться, може стати "погано," якщо оголошена погроза здійсниться, то він остерігатиметься відхилень, і необов'язкова домовленість виявиться стабільною. Таким чином, попередження є "розумним використанням потенційної сили."

Означення 8.2. Сценарієм попередження у грі G називається набір $(x_i, \theta_{I \setminus i})$, в якому відображення $\theta_{I \setminus i}: X_i \rightarrow X_{I \setminus i}$ – погроза гравцю i , причому

$$\theta_{I \setminus i}(x_i) = x_{I \setminus i}; \quad \forall y_i \in X_i \setminus \{x_i\}: H_i(y_i, x_{I \setminus i}) \leq H_i(x) \quad (8.1)$$

Далі з'ясуємо якими повинні бути ситуації, що забезпечують стабільність домовленості.

Лема 8.1. Нехай $(x_i, \theta_{I \setminus i}; i \in I)$ – сценарій попередження. Тоді ситуація x є гарантованою рівновагою

$$\sup_{y_i} \inf_{y_{I \setminus i}} H_i(y_i, y_{I \setminus i}) \leq H_i(x) \quad \forall i \in I.$$

Лема 8.2. Нехай X_i – компакти, H_i – неперервні функції при всіх $i \in I$. Тоді у грі G існує хоч би одна гарантована рівноважна ситуація. Для кожної такої ситуації x при всіх $i \in I$ існує набір погроз $\theta_{I \setminus i}$ такий, що набір $(x_i, \theta_{I \setminus i}; i \in I)$ є сценарієм попередження •

Означення 8.3. Поділом у грі G називається оптимальна за Парето ситуація гарантованої рівноваги •

Позначимо через $I(G)$ множину поділів у грі G .

Лема 8.3. Нехай X_i – компакти, H_i – неперервні функції при всіх $i \in I$. Тоді у грі G існує хоч би один поділ.

Лема 8.4. Нехай у грі в нормальній формі множини стратегій гравців $X_i, i = \overline{1,2}$ опуклі, а функції виграшів $H_i, i = \overline{1,2}$ – опуклі вгору. Тоді для оптимальності за Парето (ефективності) ситуації $\hat{x}$, необхідно і достатньо, щоб

$$\lambda H_1(\hat{x}) + (1 - \lambda) H_2(\hat{x}) = \max_{x \in X} (\lambda H_1(x) + (1 - \lambda) H_2(x)), X = X_1 \times X_2, \lambda \in [0,1].$$

α, β та γ – ядра.

Основною концепцією кооперативної рівноваги на основі погроз є α - ядро.

Означення 8.4. Для гри у нормальній формі G α - ядром називається множина C_α таких ситуацій $\hat{x}$, що для будь - якої коаліції $T \subseteq I$ і для будь - якої коаліційної стратегії $x_T \in X_T$, знайдеться така стратегія $x_{I \setminus T} \in X_{I \setminus T}$ (погроза $\theta_{I \setminus T}(x_T) = x_{I \setminus T}$) доповнюючої коаліції $I \setminus T$, що не може бути сумісною системою нерівностей

$$\begin{aligned} \forall i \in T \quad H_i(x_T, x_{I \setminus T}) &\geq H_i(\hat{x}) \\ \exists j \in T \quad H_j(x_T, x_{I \setminus T}) &> H_j(\hat{x}). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Таким чином, $(x_T, \theta_{I \setminus T}(.); T \in I)$ – коаліційний сценарій погроз. Згідно з означенням, ситуація $\hat{x}$ належить α - ядру, якщо будь - якому відхиленню x_T може бути протиставлений хід $x_{I \setminus T}$ доповнювальної коаліції $I \setminus T$, який застерігає хоча б одного члена коаліції T від прийняття рішення x_T , оскільки в цьому випадку цей гравець програє $H_i(x_T, x_{I \setminus T}) < H_i(\hat{x})$ або всі гравці коаліції отримують такий самий виграш, як і раніше $H_i(x_T, x_{I \setminus T}) = H_i(\hat{x}) \quad i \in T$.

Якщо α - ядро є порожнім, то потрібні більш складні сценарії погроз, які включають контрпогрози для стабілізації хоча б деяких поділів. Навпаки, якщо α - ядро містить велику кількість ситуацій, то при накладанні додаткових умов у ньому можна виділити специфічну множину, якою є β - ядро.

Означення 8.5. Для гри у нормальній формі G β - ядром називається множина C_β таких ситуацій $\hat{x}$, що для будь - якої коаліції $T \subseteq I$ існує спільна стратегія $x_{I \setminus T} \in X_{I \setminus T}$ доповнюючої коаліції $I \setminus T$, така, що $\forall x_T \in X_T$ не може бути сумісною системою нерівностей

$$\begin{aligned} \forall i \in T \quad H_i(x_T, x_{I \setminus T}) &\geq H_i(\hat{x}) \\ \exists j \in T \quad H_j(x_T, x_{I \setminus T}) &> H_j(\hat{x}). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Ясно, що $C_\beta \subseteq C_\alpha$. Розглянемо результати для гри двох осіб.

Для гри двох осіб можна визначити іншу підмножину α - ядра, а саме γ - ядро, яке може бути стабілізованим при поведінці, що заснована на найкращих відповідях гравців.

Означення 8.6. Для гри двох осіб у нормальній формі G γ - ядром називається множина C_γ , яка складається з таких поділів $\hat{x}$, для яких існує сценарій $(\hat{x}_1, \theta_2; \hat{x}_2, \theta_1)$, у якому погрози $\theta_i, i = \{1,2\}$, є попередженнями, тобто $\forall x_j \neq \hat{x}_j$ мають місце нерівності

$$H_j(x_j, \theta_i(x_j)) \leq H_j(\hat{x}), \quad H_i(x_j, \theta_i(x_j)) = \max_{x_i \in X_i} H_i(x_j, x_i), \quad i, j = \{1,2\}, \quad i \neq j.$$

Теорема 8.1. Нехай функції виграшів $H_i, i = \{1,2\}$ - взаємно однозначні, $\gamma_i = \max_{x_i \in X_i} H_i(x_i, r_j(x_i))$ – виграш за Штакельбергом, де $r_j(x_i) = \arg \max_{y_j \in X_j} H_j(x_i, y_j)$ – найкраща відповідь гравця $j \neq i$ на фіксовану стратегію $x_i \in X_i$ гравця i . Тоді γ - ядро задається умовами:

$$C_\gamma(G) = \{ \hat{x} \in PO: \gamma_i \leq H_i(\hat{x}), i = \{1,2\} \}.$$

Теорема 8.1 встановлює зв'язок між здійсненням стабільності за допомогою попереджень та боротьбою за лідерство. Вона стверджує, що у грі G виникає боротьба за лідерство тоді і тільки тоді, коли її γ - ядро порожнє. Таким чином, у грі з порожнім γ

- ядром стабільності будь - якого поділу загрожує можливість захоплення лідерства одним із гравців.

Теорема 8.2. Для гри двох осіб в нормальній формі α - ядро співпадає з множиною всіх поділів, тобто

$$C_{\alpha} = I(G) = \{\hat{x} \in PO: \alpha_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_j \in X_j} H_i(x_i, x_j) \leq H_i(\hat{x}), i = \overline{1,2}\},$$

а формі β - ядро задається умовами

$$C_{\beta} = \{\hat{x} \in PO: \beta_i = \min_{x_j \in X_j} \max_{x_i \in X_i} H_i(x_i, x_j) \leq H_i(\hat{x}), i = \overline{1,2}\} \blacksquare$$

Задача 1. Знайти α, β, γ – ядра гри двох осіб:

$$X_1 = [0,2], X_2 = [0,1], H_1(x) = x_1 - x_1 x_2 - 2 x_1^2, H_2(x) = 2 x_2 - x_1 x_2 - x_2^2.$$

Розв'язок. Спочатку знайдемо оптимальні за Парето (PO) ситуації гри. Оскільки стратегії гравців опуклі і компактні, функції виграшів – вігнуті, то кожна із них досягає максимуму. Розглянемо лінійну згортку

$$H(x, \lambda) = \lambda H_1(x) + (1 - \lambda) H_2(x) = \lambda x_1 + 2(1 - \lambda) x_2 - x_1 x_2 - 2 \lambda x_1^2 - (1 - \lambda) x_2^2, \lambda \in (0, 1).$$

Побудуємо множину розв'язків задачі

$$H(x, \lambda) \rightarrow \max_{x \in X} H(x, \lambda), X = X_1 \times X_2. \quad (8.1)$$

Оскільки множина X – компактна, а функція $H(x, \lambda)$ – вігнута по x , то задача (8.1) має розв'язок (лема 8.4) при деяких значеннях параметра λ . Необхідні і достатні умови оптимальності для задачі (8.1) будуть мати вигляд

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda - x_2 - 4 \lambda x_1 = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} = 2(1 - \lambda) - x_1 - 2(1 - \lambda) x_2 = 0. \quad (8.2)$$

Параметр $\lambda \in (0, 1)$ повинен бути таким, що $x_1 \in X_1 = [0,2], x_2 \in X_2 = [0,1]$.

Тоді, розв'язуючи систему (8.2), будемо мати

$$\widehat{x}_1 = \frac{2(\lambda - 1)^2}{8\lambda^2 - 8\lambda + 1}, \quad \widehat{x}_2 = \frac{8\lambda^2 - 7\lambda}{8\lambda^2 - 8\lambda + 1}, \quad \lambda \in \left(\frac{7}{8}, 1\right). \quad (8.3)$$

Таким чином,

$$I(G) = PO = \{(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2): \widehat{x}_1 = \frac{2(\lambda - 1)^2}{8\lambda^2 - 8\lambda + 1}, \widehat{x}_2 = \frac{8\lambda^2 - 7\lambda}{8\lambda^2 - 8\lambda + 1}, \lambda \in \left[\frac{7}{8}, 1\right]\}. \quad (8.4)$$

У (8.4) ми включили крайні точки відрізка $\left(\frac{7}{8}, 1\right)$ по неперервності.

Парето – оптимальним ситуаціям відповідають значення виграшів

$$H_1(\hat{x}) = 2(\lambda - 1)^3 \frac{-4\lambda + 3}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2},$$

$$H_2(\hat{x}) = (\lambda - 1)^2 (8\lambda - 1) \frac{6\lambda - 1}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2}, \lambda \in [\frac{7}{8}, 1]. \quad (8.5)$$

Для знаходження α - ядра гри, яке, згідно теореми 8.2, має вигляд

$$C_\alpha = I(G) = \{\hat{x} \in PO: \alpha_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_j \in X_j} H_i(x_i, x_j) \leq H_i(\hat{x}), i = \overline{1,2}\}.$$

Для цього потрібно знайти максимальні гарантовані виграші гравців

$$\alpha_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_j \in X_j} H_i(x_i, x_j), i, j = \overline{1,2}, i \neq j.$$

Розглянемо спочатку функцію виграшу першого гравця $H_1(x) = x_1 - x_1 x_2 - 2 x_1^2$. В силу того, що вона лінійна відносно x_2 , то $f_1(x_1) = \min_{x_2 \in X_2} (x_1 - x_1 x_2 - 2 x_1^2) = -2 x_1^2$. Тоді

$$\alpha_1 = \max_{x_1 \in [0,2]} (-2 x_1^2) = 0.$$

Аналогічно для функції виграшу другого гравця $H_2(x) = 2 x_2 - x_1 x_2 - x_2^2$ будемо мати

$$f_2(x_2) = \min_{x_1 \in X_1} (2 x_2 - x_1 x_2 - x_2^2) = -x_2^2. \text{ Тоді}$$

$$\alpha_2 = \max_{x_2 \in [0,1]} (-x_2^2) = 0.$$

Зрозуміло, що α - ядру будуть належати такі ситуації гри, які відповідають оптимальним за Парето значенням функцій виграшів гравців, які не менші їх максимальних гарантій, тобто

$$H_1(\hat{x}) = 2(\lambda - 1)^3 \frac{-4\lambda + 3}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2} \geq 0, \quad (8.6)$$

$$H_2(\hat{x}) = (\lambda - 1)^2 (8\lambda - 1) \frac{6\lambda - 1}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2} \geq 0. \quad (8.7)$$

Для нерівності (8.6) знаходимо, що $\lambda \in [\frac{3}{4}, 1] \rightarrow \lambda \in [\frac{7}{8}, 1]$. Для нерівності (8.7) знаходимо, що $\lambda \in [0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{6}, 1] \rightarrow \lambda \in [\frac{7}{8}, 1]$. Таким чином, $C_\alpha = I(G)$.

Побудуємо тепер β - ядро гри. Для цього потрібно знайти

$$\beta_i = \min_{x_j \in X_j} \max_{x_i \in X_i} H_i(x_i, x_j), i, j = \overline{1,2}, i \neq j.$$

Розглянемо спочатку функцію виграшу першого гравця $H_1(x) = x_1 - x_1 x_2 - 2 x_1^2$. Вона не являється монотонною за x_1 . Тоді максимум цієї функції слід шукати як в середині області, так і на її границях. Спочатку знайдемо максимум в середині області. Для цього знайдемо

$$\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_1} = 1 - x_2 - 4 x_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 H_1(x)}{\partial x_1^2} = -4 < 0.$$

Звідси $x_1 = \frac{1-x_2}{4} \in [0,2]$, коли $x_2 \in [0,1]$. Таким чином,

$$g_1(x_2) = \max_{x_1 \in [0,2]} (x_1 - x_1 x_2 - 2 x_1^2) = \frac{1-x_2}{4} - \frac{1-x_2}{4} x_2 - 2 \left(\frac{1-x_2}{4}\right)^2 = 2 \left(\frac{1-x_2}{4}\right)^2.$$

Звідси $\beta_1 = \min_{x_2 \in [0,1]} g_1(x_2) = 0$. Аналогічно для другого гравця

$$g_2(x_1) = \left(\frac{2-x_1}{2}\right)^2, \rightarrow \beta_1 = \min_{x_1 \in [0,2]} g_2(x_2) = 0.$$

Таким чином, $C_\beta = C_\alpha$.

Побудуємо тепер γ - ядро. Згідно теореми 8.1, воно буде мати вигляд

$$C_\gamma = \{\hat{x} \in PO: \gamma_i = \max_{x_i \in X_i} H_i(x_i, r_j(x_i)) \leq H_i(\hat{x}), i = \overline{1,2}\},$$

де γ_i - i - ий виграш за Штакельбергом,

$r_j(x_i) = \arg \max_{y_j \in X_j} H_j(x_i, y_j)$ - найкраща відповідь гравця $j \neq i$ на фіксовану стратегію $x_i \in X_i$

гравця i .

Спочатку побудуємо $r_1(x_2)$ - найкращу відповідь першого гравця на фіксовану стратегію $x_2 \in [0,1]$ другого гравця. Розв'яжемо задачу

$$g_1(x_2) = \max_{x_1 \in [0,2]} (x_1 - x_1 x_2 - 2 x_1^2) \forall x_2 \in [0,1].$$

Ця задача була розв'язана вище: $x_1 = \frac{1-x_2}{4} \in [0,2]$, коли $x_2 \in [0,1]$. Таким чином,

$$r_1(x_2) = \frac{1-x_2}{4}.$$

Тоді $\gamma_2 = \max_{x_2 \in X_2} H_2(x_2, r_1(x_2)) = \max_{x_2 \in [0,1]} (2 x_2 - \frac{1-x_2}{4} x_2 - x_2^2) = \max_{x_2 \in [0,1]} \frac{(7-3x_2)x_2}{4}$. Необхідні і

достатні умови оптимальності дають нам

$$\frac{\partial H_2(x_2, r_1(x_2))}{\partial x_2} = \frac{7-6x_2}{4} = 0.$$

Звідси $x_2 = \frac{7}{6} \notin [0,1]$, то $\max_{x_2 \in [0,1]} \frac{(7-3x_2)x_2}{4}$ буде досягатись на границях відрізка. В силу того, що

$$H_2(0, r_2(0)) = 0, H_2(1, r_2(1)) = 1, \text{ будемо мати } \gamma_2 = 1.$$

Аналогічно попередньому отримаємо, що $\gamma_1 = 0$.

Зрозуміло, що γ - ядро будуть належати такі ситуації гри, які відповідають оптимальним за Парето значенням функцій виграшів гравців і яких виконуються нерівності

$$H_1(\hat{x}) = 2(\lambda - 1)^3 \frac{-4\lambda + 3}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2} \geq 0, \quad (8.8)$$

$$H_2(\hat{x}) = (\lambda - 1)^2 (8\lambda - 1) \frac{6\lambda - 1}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2} \geq 1. \quad (8.9)$$

Із нерівності (8.8) отримаємо, що $\lambda \in [\frac{3}{4}, 1]$. Наближений розв'язок нерівності (8.9) буде: що $\lambda \in [0.2, 0.92]$. Тому остаточно будемо мати

$$C_\gamma = \{(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) : \widehat{x}_1 = \frac{2(\lambda-1)^2}{8\lambda^2-8\lambda+1}, \widehat{x}_2 = \frac{8\lambda^2-7\lambda}{8\lambda^2-8\lambda+1}, \lambda \in [\frac{7}{8}, 0.92]\} \bullet$$

Задача 2. Знайти γ – ядро гри двох осіб:

$$X_1 = [0, 1/2], X_2 = [0, 1/2], H_1(x) = x_1 - x_1x_2 - x_1^2, H_2(x) = x_2 - x_1x_2 - x_2^2.$$

Розв'язок. Спочатку знайдемо оптимальні за Парето ситуації гри. Зважаючи на те, що множини стратегій X_i опуклі і функції вигравів гравців H_i опуклі вгору, то, згідно леми 8.4, множина оптимальних за Парето ситуацій (РО) буде множиною оптимальних розв'язків задачі

$$H(\hat{x}) = H_1(\hat{x}) + (1-\lambda)H_2(\hat{x}) = \max_{x \in X} (\lambda(x_1 - x_1x_2 - x_1^2) + (1-\lambda)(x_2 - x_1x_2 - x_2^2)), \\ \lambda \in [0, 1].$$

Умови її оптимальності (необхідні і достатні) будуть мати вигляд

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda(1 - x_2 - 2x_1) - (1-\lambda)x_2 = \lambda - x_2 - 2x_1\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda x_1 - (1-\lambda)(1 - x_1 - 2x_2) = 1 - \lambda - x_1 - 2(1-\lambda)x_2 = 0.$$

Із умов оптимальності знаходимо

$$x_1 = \frac{(1-\lambda)(1-2\lambda)}{(1-2\lambda)^2}, x_2 = -\frac{\lambda(1-2\lambda)}{(1-2\lambda)^2}.$$

Ці розв'язки є недопустимим при всіх $\lambda \in [0, 1], \lambda \neq \frac{1}{2}$. Лише при $\lambda = \frac{1}{2}$ будемо мати

$$x_1 = \frac{1}{2} - x_2 \in [0, \frac{1}{2}], x_2 \in [0, \frac{1}{2}].$$

Тоді

$$PO = \{(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) : \widehat{x}_1 = \frac{1}{2} - \widehat{x}_2 \in [0, \frac{1}{2}], \widehat{x}_2 \in [0, \frac{1}{2}]\}.$$

Побудуємо γ - ядро. Згідно теореми 8.1, воно буде мати вигляд

$$C_\gamma = \{\hat{x} \in PO : \gamma_i = \max_{x_i \in X_i} H_i(x_i, r_j(x_i)) \leq H_i(\hat{x}), i = \overline{1, 2}\},$$

де γ_i – i – ий виграв за Штакельбергом,

$r_j(x_i) = \arg \max_{y_j \in X_j} H_j(x_i, y_j)$ – найкраща відповідь гравця $j \neq i$ на фіксовану стратегію $x_i \in X_i$ гравця i .

Спочатку побудуємо $r_1(x_2)$ - найкращу відповідь першого гравця на фіксовану стратегію $x_2 \in [0, 1/2]$ другого гравця. Розв'яжемо задачу

$$g_1(x_2) = \max_{x_1 \in [0, 1/2]} (x_1 - x_1 x_2 - x_1^2) \quad \forall x_2 \in [0, 1/2].$$

Її розв'язок має вигляд: $x_1 = \frac{1-x_2}{2} \in [0, 1/2]$, коли $x_2 \in [0, 1/2]$. Таким чином,

$$r_1(x_2) = \frac{1-x_2}{2}.$$

Тоді $\gamma_2 = \max_{x_2 \in X_2} H_2(x_2, r_1(x_2)) = \max_{x_2 \in [0, 1/2]} (x_2 - \frac{1-x_2}{2} x_2 - x_2^2) = \max_{x_2 \in [0, 1/2]} \frac{(1-x_2)x_2}{2}$. Необхідні і достатні умови оптимальності дають нам

$$\frac{\partial H_2(x_2, r_1(x_2))}{\partial x_2} = \frac{1-2x_2}{2} = 0.$$

Звідси $x_2 = \frac{1}{2} \in [0, 1/2]$, то $\gamma_2 = \max_{x_2 \in [0, 1/2]} \frac{(1-x_2)x_2}{2} = \frac{1}{8}$. Аналогічно, в силу симетрії, будемо мати

$$\gamma_1 = \frac{1}{8}.$$

Далі маємо систему нерівностей

$$H_1(\hat{x}) = \frac{1-2\hat{x}_2}{4} \geq \frac{1}{8},$$

$$H_2(\hat{x}) = \frac{\hat{x}_2}{2} \geq \frac{1}{8}, \quad \hat{x}_2 \in [0, 1/2].$$

Звідси $\hat{x}_2 = \hat{x}_1 = \frac{1}{4}$. Таким чином, $C_\gamma = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$.

Домашнє завдання 8.

Задача 8.1. Знайти α - ядро гри двох осіб.

$$1.1. X_1 = [0, 1], X_2 = [0, 0.5],$$

$$H_1 = x_1 - 2x_1x_2 - 2x_1^2,$$

$$H_2 = 2x_2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2.$$

$$1.2. X_1 = [0, \frac{3}{2}], X_2 = [0, \frac{1}{2}],$$

$$H_1 = x_1 - 2 x_1 x_2 - 3 x_1^2,$$

$$H_2 = 3 x_2 - 2 x_1 x_2 - 3 x_2^2.$$

Задача 8.2. Знайти β - ядро гри двох осіб.

$$2.1. X_1 = [0, 4], X_2 = [0, 5],$$

$$H_1 = 5 x_1 - 2 x_1 x_2 - 2 x_1^2,$$

$$H_2 = 2 x_2 - 2 x_1 x_2 - 3 x_2^2;$$

$$2.2. X_1 = [0, 2], X_2 = [0, 4],$$

$$H_1 = 4 x_1 - 2 x_1 x_2 - 3 x_1^2,$$

$$H_2 = 2 x_2 - 2 x_1 x_2 - 3 x_2^2.$$

Задача 8.3. Знайти γ - ядро гри двох осіб.

$$3.1. X_1 = [0, 2], X_2 = [0, 2],$$

$$H_1 = 2 x_1 - x_1 x_2 - x_1^2,$$

$$H_2 = 2 x_2 - x_1 x_2 - 2 x_2^2;$$

$$3.2. X_1 = [0, 5/2], X_2 = [0, 5/2],$$

$$H_1 = 3 x_1 - x_1 x_2 - x_1^2,$$

$$H_2 = 3 x_2 - x_1 x_2 - x_2^2.$$

Практичні 9. С - та N - ядра, вектор Шеплі в кооперативних іграх.

Теоретичні засади.

С - ядро.

Означення 9.1. Характеристичною функцією гри n осіб називається відображення $v: 2^I \rightarrow R^1$ таке, що

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad \forall S, T \subseteq I, S \cap T = \emptyset.$$

Означення 9.2. Кооперативною грою в характеристичній формі називається пара (I, v) , де v – характеристична функція (виграшів) •

Коаліція гравців S називається власною, якщо S не співпадає з I . Між грою в нормальній формі $G = \{I, X_i, H_i, i \in I\}$ та грою у характеристичній формі (I, v) можна встановити такий зв'язок

$$v(S) = \max_{x_S \in X_S} \min_{x_{I \setminus S} \in X_{I \setminus S}} \sum_{i \in S} H_i(x_S, x_{I \setminus S}), \quad S \subseteq I.$$

Означення 9.3. Поділом у грі в характеристичній формі (I, v) називається такий вектор $x' = \{x_1, \dots, x_m\}$, що

a) $x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in I$ – умова індивідуальної гарантії,

b) $\sum_{i \in I} x_i = v(I)$ – умова колективної гарантії •

В означенні 9.3 умова a) означає, що гравець в результаті поділу отримає не менший виграш, чим він міг би його отримати і так, не домовляючись з іншими гравцями. Умова b) означає, що ділиться увесь можливий сумарний виграш.

В якості відображення v часто виступають витрати c , тобто (I, c) – кооперативна гра в характеристичній формі. Зауважимо лише, що для кооперативної гри (I, c) нерівність a) потрібно поміняти на зворотню.

Означення 9.4. Нехай x та y – два поділи у грі в характеристичній формі (I, v) , а $S \subseteq I$ – деяка коаліція гравців. Будемо говорити, що поділ x домінує поділ y і позначати це через $x \gg y$, якщо

$$x_i > y_i \quad \forall i \in S \quad \text{та} \quad \sum_{i \in S} x_i \leq v(S).$$

Означення 9.5. С - ядром гри у характеристичній формі (I, v) (її розв'язком) називається множина всіх її недомінованих поділів •

Теорема 9.1. С - ядро кооперативної гри в характеристичній формі (I, v) є множина таких поділів, що

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subseteq I.$$

Для знаходження розв'язків системи лінійних нерівностей і рівнянь теореми 9.1 скористаємось барицентричними координатами.

Означення 9.6. (Барицентричні координати.) Нехай на площині задано трикутник $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, і нехай $M(m_1, m_2)$ – довільна точка, яка лежить в площині трикутника. Тоді її декартові координати m_i можна подати у вигляді

$$m_i = x_1 a_i + x_2 b_i + x_3 c_i, \quad i = \{1, 2\},$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Вектор x при цьому називають барицентричними координатами точки M .

Зауважимо, що трикутник може лежати у площині простору розмірності більше двох.

Вектор Шеплі.

Розглянемо вибір поділу, що відповідає принципу утилітаризму. У ньому доля прибутку кожного гравця в поділі $\sum_{i=1}^m x_i = v(I)$ залежить від його "внеску" у прибуток кожної коаліції, тобто від величини $v(S \cup i) - v(S)$, $i \notin S$ (прибуток коаліції S з гравцем i та без нього – "маргінальний прибуток").

Означення 9.7. Для гри (I, v) вектором Шеплі σ називається наступний поділ прибутку максимальної коаліції $v(I)$

$$\sigma_i = \sum_{0 \leq s \leq m-1} \frac{s!(m-s-1)!}{m!} \sum_{S \subset I, |S|=s} (v(S \cup i) - v(S)), I = \{1, \dots, m\}, v(\emptyset) = 0 \quad (9.1)$$

Формула (9.1) має таке змістовне пояснення. Нехай гравці із I упорядковані $(i_1, \dots, i_m)$ випадково з рівною ймовірністю для кожного упорядкування. Вага внеску i -го гравця в коаліцію S відповідає ймовірності того, що у черзі $(i_1, \dots, i_m)$ перед ним у точності стоять гравці із коаліції S . Ця ймовірність, очевидно, буде дорівнювати $\frac{s!(m-s-1)!}{m!}$, $s = |S|$.

Існує клас ігор, в яких вектор Шеплі завжди належить непорожньому C -ядру – це опуклі ігри.

Означення 9.8. Кооперативна гра в характеристичній формі (I, v) називається опуклою, якщо вона задовольняє одній із двох еквівалентних умов ($v(\emptyset) = 0$)

- 1) $\forall i \in I, \forall S, T \subseteq I \mid \{i\}: S \subseteq T \rightarrow v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$;
- 2) $\forall S, T \subseteq I: v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$.

Лема 9.1. Нехай (I, v) – опукла гра, $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ – деяке розташування гравців. Тоді вектор маргінальних внесків $x_{i_k} = v(i_1, \dots, i_k) - v(i_1, \dots, i_{k-1})$ належить ядру гри.

Тоді і вектор Шеплі буде належати C -ядру гри. Справедливе і обернене твердження – якщо всі вектори маргінальних внесків належать ядру, то гра є опуклою.

В опуклих іграх вектор Шеплі займає "центральне положення", оскільки ядро опуклої гри є опуклою оболонкою векторів маргінальних внесків. Тоді вектор Шеплі може бути охарактеризованим наступним чином.

Означення 9.9. Оператором значення гри (I, v) є відображення $F: R^{2^m} \rightarrow R^m$, що ставить у відповідність кожній грі (I, v) розподіл $F(v)$ величини $v(I)$:

$$\sum_{i \in I} F_i(v) = v(I).$$

Означення 9.10. Оператор значення гри (I, v) задовольняє "аксіомі анонімності", якщо він комутує з перестановкою гравців, тобто для довільної бієкції τ множини I у себе і $\forall v \in R^{2^m}$ має місце рівність

$$\tau(F(v)) = F(\tau(v)),$$

де

$$\tau(v)(S) = F(\tau(v)), S \subset I; \tau(x)_i = x_{\tau(i)} \quad \forall x \in R^m.$$

Означення 9.11. Оператор значення гри (I, v) задовольняє "аксіомі адитивності", якщо $F(v + \omega) = F(v) + F(\omega) \quad \forall v, \omega \in R^{2^m}$.

Означення 9.12. Оператор значення гри (I, v) задовольняє "аксіомі бовдура", якщо $\forall i \in I, v \in R^{2^m}$:

$$\{v(S \cup i) = v(S) \quad \forall S \subset I \mid i\} \rightarrow F_i(v) = 0.$$

Теорема 9.2. (Шеплі, 1953) Існує лише один оператор F , який задовольняє аксіомам анонімності, адитивності і бовдура. Це – вектор Шеплі.

N -ядро.

Повернемось до принципу егалітаризму у виборі розподілу кооперативної гри. Перший крок - виділення ядра. Другий - знаходження "егалітарного" розподілу з ядра.

Означення 9.13. Лексимінний оптимум $\gamma = \{\gamma_i\}_{i \in I}$ на множині векторів

$$e(x) = (e(x, S) = \sum_{i \in S} x_i - v(S))_{S \subset I}$$

таких, що

$$\sum_{i=1}^m x_i = v(I),$$

називається N - ядром гри (I, v) .

Величина $e(x, S)$ називається ексцесом, це по суті "наддохід" коаліції S порівняно з її власними можливостями. Ексцеси різних коаліцій порівнюються егалітарно. У першу чергу, розглядається мінімальний прибуток, який максимізується. Вектор ексцесів $e(\gamma)$ максимізує на множині розподілів x ,

$$\sum_{i=1}^m x_i = v(I),$$

егалітарну функцію колективної корисності за умови, що корисність кожної коаліції вимірюється її ексцесом

$$\min_{S \subset I} (\sum_{i \in S} \gamma_i - v(S)) = \max_{x: \sum_{i \in I} x_i = v(I)} \min_{S \subset I} (\sum_{i \in S} x_i - v(S)). \quad (9.2)$$

Далі серед розв'язків (9.2) N - ядро вибирає такий розподіл, при якому максимального значення досягає другий за мінімальністю коаліційний прибуток. Насамперед цей процес приводить до єдиного розподілу, який і буде N\$ - ядром.

Серйозним недоліком N - ядра є його немонотонність відносно до прибутку максимальної коаліції. Якщо деякі гравці "страждають" унаслідок покращення загальної ситуації, то вони можуть відмовитись від участі в максимальній коаліції (якщо при зростанні бюджету прибуток деяких членів суспільства падає, то вони будуть не зацікавленими в його зростанні, тобто покращенні добробуту всього суспільства в цілому.)

Таким чином, використання принципу "справедливості" в розподілі благ приводить у наслідок цього до "несправедливості" у їх утриманні. Точніше, має місце така

Лема 9.2. Нехай I має не менше дев'яти гравців. Тоді існують дві такі гри (I, v) і (I, ω) : $v(I) < \omega(I)$, $v(S) < \omega(S) \quad \forall S \subset I$, що для деякого гравця i можлива нерівність $\gamma_i > \mu_i$, де γ_i , μ_i – компоненти N - ядер відповідно ігор (I, v) і (I, ω) .

Алгоритм пошуку N - ядра.

Крок 1. Нехай $\aleph^{(1)}$ – множина всіх власних коаліцій I . Знайдемо максимум функції

$$\min_{S \subset \aleph^{(1)}} e(x, S)$$

на множині векторів, що задовольняють рівності

$$\sum_{i \in I} x_i = v(I).$$

N - ядро належить розв'язку цієї задачі. За допомогою допоміжної змінної ω ця задача зводиться до такої задачі лінійного програмування

$$\omega \rightarrow \max,$$

$$e(x, S) = \sum_{i \in S} x_i - v(S) \geq \omega, \quad S \subset \aleph^{(1)}, \quad \sum_{i=1}^m x_i = v(I). \quad (9.3)$$

Розв'язку задачі (9.3) $(x^{(1)}, \omega^{(1)})$ відповідає сідова точка $(x^{(1)}, \omega^{(1)}, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)})$ функції Лагранжа

$$L = \omega + \sum_{S \in \aleph^{(1)}} \lambda_S (\sum_{i \in S} x_i - v(S) - \omega) + \mu (\sum_{i=1}^m x_i - v(I)) = (1 - \sum_{S \in \aleph^{(1)}} \lambda_S) \omega + \sum_{i \in I} (\sum_{S \in \aleph^{(1)}} \lambda_S + \mu) x_i - \sum_{S \in \aleph^{(1)}} \lambda_S v(S) - \mu v(I),$$

де множник Лагранжа $\lambda_S \geq 0$, $S \in \aleph^{(1)}$, а множник Лагранжа $\mu \in R^1$.

Знайдена сідлова точка задовольняє, з другого боку, принципу Лагранжа. Тоді

$$\sum_{S \in \mathcal{K}^{(1)}} \lambda_S^{(1)} = 1,$$

тобто множина $X^{(1)} = \{S \in \mathcal{K}^{(1)} : \lambda_S^{(1)} > 0\}$ – не порожня. Із умов додаткової нежорсткості принципу Лагранжа будемо мати

$$X^{(1)} = \{S \in \mathcal{K}^{(1)} : \sum_{i \in S} x_i^{(1)} - v(S) = \omega^{(1)}\}.$$

Покладемо

$$\mathcal{K}^{(2)} = \mathcal{K}^{(1)} \setminus X^{(1)} = \{S \in \mathcal{K}^{(1)} : \sum_{i \in S} x_i^{(1)} - v(S) > \omega^{(1)}\}$$

і розглянемо систему рівнянь

$$e(x, S) = \sum_{i \in S} x_i - v(S) = \omega^{(1)}, \quad S \subset X^{(1)}. \quad (9.4)$$

Якщо ранг системи (9.4) буде дорівнювати m , то її розв'язок $x^{(1)}$ і буде N - ядром і алгоритм припиняє роботу. Якщо ж він менший за m , тобто дорівнює $m_1 < m$, то система (9.4) має безліч розв'язків, які можна задати у вигляді

$$x_j^{(1)} = b_j^{(1)} + \sum_{k=m_1+1}^m a_{j,k}^{(1)} x_k, \quad j = \{1, \dots, m_1\}. \quad (9.5)$$

Крок 2. Розв'язуємо задачу лінійного програмування

$$\omega \rightarrow \max,$$

$$e(x, S) = \sum_{i \in S} x_i - v^{(1)}(S) \geq \omega, \quad S \subset \mathcal{K}^{(2)}, \quad \sum_{i=m_1+1}^m x_i = v^{(1)}(I). \quad (9.6)$$

Розв'язку задачі (9.6) $(x^{(2)}, \omega^{(2)})$ відповідає сідлова точка $(x^{(2)}, \omega^{(2)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(2)})$ функції Лагранжа

$$L = \omega + \sum_{S \in \mathcal{K}^{(2)}} \lambda_S (\sum_{i \in S} x_i - v^{(1)}(S) - \omega) + \mu (\sum_{i \in I^{(1)}} x_i - v^{(1)}(I)) = (1 - \sum_{S \in \mathcal{K}^{(2)}} \lambda_S) \omega + \\ + \sum_{i \in I^{(1)}} (\sum_{S \in \mathcal{K}^{(2)}} \lambda_S + \mu) x_i - \sum_{S \in \mathcal{K}^{(2)}} \lambda_S v^{(1)}(S) - \mu v^{(1)}(I),$$

де множник Лагранжа $\lambda_S \geq 0$, $S \in \mathcal{K}^{(2)}$, а множник Лагранжа $\mu \in \mathbb{R}^1$.

Знайдена сідлова точка задовольняє принципу Лагранжа. Тоді

$$\sum_{S \in \mathcal{K}^{(2)}} \lambda_S^{(2)} = 1,$$

тобто множина $X^{(2)} = \{S \in \mathcal{K}^{(2)} : \lambda_S^{(2)} > 0\}$ – не порожня. Із умов додаткової нежорсткості принципу Лагранжа будемо мати

$$X^{(2)} = \{S \in \mathcal{K}^{(2)} : \sum_{i \in S} x_i^{(2)} - v^{(1)}(S) = \omega^{(1)}\}.$$

Покладемо

$$\mathcal{K}^{(3)} = \mathcal{K}^{(2)} \setminus X^{(2)} = \{S \in \mathcal{K}^{(2)} : \sum_{i \in S} x_i^{(2)} - v^{(1)}(S) > \omega^{(2)}\}$$

і розглянемо систему рівнянь

$$e(x, S) = \sum_{i \in S} x_i - v^{(1)}(S) = \omega^{(2)}, \quad S \subset X^{(2)}. \quad (9.7)$$

Якщо ранг системи (9.7) буде дорівнювати $m - m_1$, то її розв'язок $x^{(2)}$ разом із розв'язком (9.5) і буде N - ядром, і алгоритм припиняє роботу. Якщо ж він менший за $m - m_1$, тобто дорівнює $m_2 < m - m_1$, то система (9.7) має безліч розв'язків, які можна задати у вигляді

$$x_j^{(2)} = b_j^{(2)} + \sum_{k=m_2+1}^m a_{j,k}^{(2)} x_k, \quad j = \{m_1 + 1, \dots, m_2\}. \quad (9.8)$$

Далі алгоритм повторюється з очевидними змінами до вичерпання всіх x_i ■

Задача 1. Три музиканти одержать максимальний дохід 100 у.о., якщо виступатимуть разом. Якщо співак виступає окремо, то він одержить 20 у.о., якщо піаніст, то – 30 у.о. Ударник окремо не може заробити нічого. Якщо виступатимуть окремо піаніст з ударником, то вони зароблять 65 у.о., якщо співак та ударник, то – 50 у.о. Нарешті, якщо піаніст і співак відмовляться від ударника, то вони одержать разом 80 у.о. Знайти C -ядро гри.

Розв'язок. У цьому прикладі $I = \{1, 2, 3\}$, а характеристична функція приймає значення: $v(\{1\}) = 20$, $v(\{2\}) = 30$, $v(\{3\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = 80$, $v(\{2, 3\}) = 65$, $v(\{1, 3\}) = 50$, $v(\{1, 2, 3\}) = 100$. Відповідно

до теореми 9.1 елементи C - ядра гри повинні задовольняти умовам:

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 20, x_2 \geq 30, x_3 \geq 0, \\x_1 + x_2 &\geq 80, x_2 + x_3 \geq 65, x_1 + x_3 \geq 50, \\x_1 + x_2 + x_3 &= 100.\end{aligned}$$

Розглянемо три системи

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 80, x_2 + x_3 = 65, \\x_1 + x_2 + x_3 &= 100.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 &= 65, x_1 + x_3 = 50, \\x_1 + x_2 + x_3 &= 100.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 80, x_1 + x_3 = 50, \\x_1 + x_2 + x_3 &= 100.\end{aligned}$$

Розв'язуючи їх, отримаємо три точки: $A(35,45,20)$, $B(35,50,15)$, $C(30,50,20)$. Ці точки утворюють трикутник ABC , який буде лежати в площині $x_1 + x_2 + x_3 = 100$. Тоді C -ядро буде опуклою оболонкою цих точок (баріцентрична система координат), тобто

$$C = \{x = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C, \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}.$$

Якщо потрібно виділити один елемент C - ядра, то часто беруть центр цього трикутника. В нашому випадку це буде точка $D(\frac{100}{3}, \frac{145}{3}, \frac{55}{3})$.

Задача 2. Троє споживачів хочуть побудувати сховища спецпродукції. Витрати на будівництво залежать від об'єму сховища. Для спорудження сховища споживачі можуть організовувати коаліції. Витрати на будівництво задані характеристичною функцією: $v(\{1\}) = 2$, $v(\{2\}) = 3$, $v(\{3\}) = 2,5$; $v(\{1,2\}) = 4$, $v(\{2,3\}) = 5$, $v(\{1,3\}) = 3,9$; $v(\{1,2,3\}) = 6$. Знайти вектор Шеплі.

Розв'язок. Використаємо формулу (9.1) означення 9.7. Для $m = 3$ будемо мати

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{3} v(\{1\}) + \frac{1}{6} (v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3} (v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) = \\&= \frac{1}{3} v(\{1,2,3\}) + \frac{1}{6} (v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) - 2 v(\{2,3\})) + \frac{1}{6} (2 v(\{1\}) - v(\{2\}) - v(\{3\})) =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} 6 + \frac{1}{6} (4 + 3,9 - 2 \times 5) + \frac{1}{6} (2 \cdot 2 - 3 - 2,5) = 1,4 < v(\{1\}) = 2;$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{3} v(\{1,2,3\}) + \frac{1}{6} (v(\{1,2\}) + v(\{2,3\}) - 2 v(\{1,3\})) + \frac{1}{6} (2 v(\{2\}) - v(\{3\}) - v(\{1\})) = 2,45 < v(\{2\}) = 3;$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{3} v(\{1,2,3\}) + \frac{1}{6} (v(\{2,3\}) + v(\{1,3\}) - 2 v(\{1,2\})) + \frac{1}{6} (2 v(\{3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})) = 2,15 < v(\{3\}) = 2,5$$

...

Таким чином, вектор Шеплі має вигляд $(1,4, 2,45, 2,15)$, тобто споживачам вигідно об'єднатись в коаліцію $S = \{1,2,3\}$ і будувати одне сховище.

Задача 3. Знайти N - ядро у кооперативній грі з характеристичною функцією : $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$; $v(\{1,2\}) = 0.6$, $v(\{2,3\}) = 0.8$, $v(\{1,3\}) = 0.7$; $v(\{1,2,3\}) = 1$.

Розв'язок. Відповідно до алгоритму, на першому кроці розв'язуємо таку задачу лінійного програмування

$$\omega \rightarrow \max,$$

$$e(x, \{1,2\}) = x_1 + x_2 - 0.6 \geq \omega, \quad (9.9)$$

$$e(x, \{1,3\}) = x_1 + x_3 - 0.7 \geq \omega, \quad (9.10)$$

$$e(x, \{2,3\}) = x_2 + x_3 - 0.8 \geq \omega, \quad (9.11)$$

$$e(x, \{1\}) = x_1 \geq \omega, \quad e(x, \{2\}) = x_2 \geq \omega, \quad e(x, \{3\}) = x_3 \geq \omega, \quad (9.12)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \quad (9.13)$$

Вектор $((x^{(1)})', \omega^{(1)}) = (\frac{7}{30}, \frac{1}{3}, \frac{13}{30}, -\frac{1}{30})$ буде розв'язком цієї задачі. Перевіркою встановлюємо, що нерівності (9.9) – (9.11) виконуються як рівності. Тому множина

$$X^{(1)} = \{S \in \mathcal{K}^{(1)} : \sum_{i \in S} x_i^{(1)} - v(S) = \omega^{(1)}\} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}.$$

Покладемо

$$\mathcal{K}^{(2)} = \mathcal{K}^{(1)} \setminus X^{(1)} = \{S \in \mathcal{K}^{(1)} : \sum_{i \in S} x_i^{(1)} - v(S) > \omega^{(1)}\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Зазначимо, що елементами $\mathcal{K}^{(2)}$ будуть коаліції, для яких нерівності (9.12) виконуються строго.

Складемо систему рівнянь (9.4)

$$e(x, \{1,2\}) = x_1 + x_2 = \frac{17}{30},$$

$$e(x, \{1,3\}) = x_1 + x_3 = \frac{20}{30},$$

$$e(x, \{2,3\}) = x_2 + x_3 = \frac{23}{30}.$$

Її єдиний розв'язок $(x^{(1)})' = (\frac{7}{30}, \frac{1}{3}, \frac{13}{30})$ і буде N - ядром •

Домашнє завдання 9.

Задача 9.1. Знайти C - ядро у грі трьох осіб, для якої:

$$1.1. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) \geq 0, v(\{1,2\}) \geq 3, v(\{1,3\}) \geq 4, v(\{2,3\}) \geq 5, v(\{1,2,3\}) = 6;$$

$$1.2. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) \geq 0, v(\{1,2\}) \geq 0.5, v(\{1,3\}) \geq 0.6, v(\{2,3\}) \geq 0.7, v(\{1,2,3\}) = 1;$$

$$1.3. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) \geq 0, v(\{1,2\}) \geq 0.7, v(\{1,3\}) \geq 0.9, v(\{2,3\}) \geq 0.7, v(\{1,2,3\}) = 1;$$

$$1.4. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) \geq 0, v(\{1,2\}) \geq 0.5, v(\{1,3\}) \geq 0.8, v(\{2,3\}) \geq 0.8, v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Задача 9.2. Знайти N - ядро у грі трьох осіб з характеристичною функцією:

$$2.1. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 4, v(\{2,3\}) = 5, v(\{1,2,3\}) = 6.$$

$$2.2. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0.5, v(\{1,3\}) = 0.6, v(\{2,3\}) = 0.7, v(\{1,2,3\}) = 1.$$

$$2.3. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0.7, v(\{1,3\}) = 0.9, v(\{2,3\}) = 0.7, v(\{1,2,3\}) = 1.$$

$$2.4. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0.5, v(\{1,3\}) = 0.8, v(\{2,3\}) = 0.8, v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Задача 9.3. Знайти вектор Шеплі кооперативної гри трьох осіб з характеристичною функцією:

$$3.1. v(\{1\}) = 2, v(\{2\}) = 3, v(\{3\}) = 3, v(\{1,2\}) = 6, v(\{1,3\}) = 6, v(\{2,3\}) = 7, v(\{1,2,3\}) = 10.$$

$$3.2. v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = 2, v(\{3\}) = 3, v(\{1,2\}) = 5, v(\{1,3\}) = 4, v(\{2,3\}) = 6, v(\{1,2,3\}) = 8.$$

$$3.3. v(\{1\}) = 3, v(\{2\}) = 2, v(\{3\}) = 1, v(\{1,2\}) = 5, v(\{1,3\}) = 7, v(\{2,3\}) = 5, v(\{1,2,3\}) = 10.$$

$$3.4. v(\{1\}) = 2, v(\{2\}) = 4, v(\{3\}) = 3, v(\{1,2\}) = 6, v(\{1,3\}) = 6, v(\{2,3\}) = 8, v(\{1,2,3\}) = 10.$$

Практичні 10. Оптимальне керування динамічними системами: необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму для задачі з фіксованими крайовими умовами і нефіксованим часом.

Теоретичні засади.

Формалізація задач оптимального керування.

1. *Рівняння еволюції системи.* Нехай стан економічного процесу в момент часу $t \in [t_0, T]$ описується набором показників у вигляді вектора $x'(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in R^n$ і може змінюватись під впливом вектора керувань $u'(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in R^r$, тобто набору параметрів, на які впливає дослідник. Припустимо, що вектор $x(t)$ задовольняє системі звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)), \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.1)$$

В рівняннях (10.1) вектор керувань $u(t)$ при фіксованому $t \in [t_0, T]$ набуває значення із деякої відкритої чи замкнутої області $U \subseteq R^r$.

Часто систему (10.1) доповнюють початковими умовами

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.2)$$

Припустимо, що: 1) функції f_i в (10.1) та їх другі похідні по функціональним аргументам - неперервні по сукупності всіх аргументів: 2) допустимі керування - кусково неперервні функції з кінечним числом розривів першого роду.

При цих припущеннях кожному допустимому керуванню $u(t)$ відповідає єдиний розв'язок задачі Коші (10.1) - (10.2), який поточною задовольняє рівнянням $\forall t \in (t_0, T]$ окрім точок розриву керувань, і називається *траєкторією керованої системи*.

2. *Обмеження на траєкторії та керування.* Обмеження на вектори $x(t)$, $u(t)$ можуть бути як функціональними, так і точковими. До функціональних обмежень належать обмеження вигляду

$$J_j(x, u) = \int_{t_0}^T g_j(t, x(t), u(t)) dt + \varphi_j(x(t_0), x(T)) \leq 0, j = \overline{1, m}, \quad (10.3)$$

де функції $g_j(\cdot)$, $\varphi_j(\cdot)$ по гладкості такі ж, як і функції $f_i(\cdot)$, що застосовуються для опису динаміки процесу.

При цьому кажуть, що функціонали, які знаходяться в лівих частинах нерівностей (10.3), визначені на парі $(x(t), u(t))$.

До точкових обмежень належать обмеження вигляду

$$\Phi(x(t), u(t)) \in \Omega(t), t \in [t_1, t_2] \subset [t_0, T], \quad (10.4)$$

де $\Phi(\cdot)$ – деяка однозначна векторна функція розмірності l , $\Omega(t)$ – множина із R^l .

3. *Критерії оптимальності (ефективності).* Нехай для пари $(x(t), u(t))$ виконуються умови (10.1) – (10.4). Тоді таку пару будемо називати *допустимим процесом*. Зрозуміло, що таких пар може бути багато. В якості критерія оптимальності оберемо наступний функціонал

$$J_0(x, u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + \varphi_0(x(t_0), x(T)), \quad (10.5)$$

де функції $f_0(\cdot)$, $\varphi_0(\cdot)$ по гладкості такі ж, як і відповідні функції в (10.3).

Припустимо, що потрібно знайти таке керування, яке на траєкторіях системи (10.1)–(10.2) з обмеженнями (10.3) – (10.4) доставляє критерію (10.5) найменше або найбільше значення. Якщо таке керування існує, то пару $(x_*(t), u_*(t))$ будемо називати оптимальною: $u_*(t)$ – *оптимальне керування*, $x_*(t)$ – *оптимальна траєкторія*. Такі задачі складають сутність теорії оптимального керування. Далі, в силу частини 1, будемо розглядати лише задачі на пошук таких керувань, при яких критерій ефективності буде приймати найменше значення.

Принципи керування. Для динамічних процесів (не обов'язково оптимальних) існує два принципа керування: *програмне керування*, *керування з оберненим зв'язком або синтез*.

Програмне керування. Нехай якимсь чином вдалося побудувати керування в задачі (10.1) – (10.2), (10.3) – (10.5) у вигляді функції $u = u(t)$, яка залежить від параметрів вихідної задачі і початкових умов. Ця функція є "входом" для об'єкту керування (ОК), а "виходом" для нього буде траєкторія $x(t)$. В цій схемі всякі зміни в початкових умовах моделі (10.1) – (10.2), (10.3) – (10.5) приводять до необхідності перерахування вектора керування $u(t)$.

Керування з оберненим зв'язком. Нехай в задачі (10.1) – (10.2), (10.3) – (10.5) вдалось знайти керування у вигляді функції $u = u[t, x(t)]$, яка залежить від параметрів вихідної задачі і не залежить від початкових умов. В описаній схемі на відміну від схеми програмного керування присутній керуючий пристрій (КП), за допомогою якого формується функція керування: на "виході" ОК вимірюється в момент часу t вектор $x(t)$ і подається на "вхід" КП, який перетворює цей вектор у вектор керувань. При цьому керування не буде залежати від початкових умов, тобто їх зміна не приведе до необхідності перерахування вектора керувань.

Для практичних задач керування з оберненим зв'язком є більш привабливим, але задача пошуку функції, яка реалізує КП, являється набагато важчою від задачі пошуку програмного керування. Для оптимальних систем із керування з оберненим зв'язком при фіксованих початкових умовах однозначно визначається програмне керування, але із програмного керування визначити функцію, що реалізує КП, можна лише у виключних випадках.

Необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму для задачі з фіксованими крайовими умовами і нефіксованим часом. Нехай керований процес описується рівняннями (10.1) – (10.2) і задані дійсні числа x_i^1 , $i = \overline{1, n}$ та скалярна функція $f_0(t, x_1, \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t))$ з такими ж властивостями, що і функції f_i .

Задача оптимального керування полягає в наступному: знайти таке допустиме керування $u(t) \in U$, щоб відповідний розв'язок задачі (10.1) – (10.2) задовольняв умови

$$x_i(T) = x_i^1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10.6)$$

а функціонал

$$J(u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x_1, \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) dt \quad (10.7)$$

приймав найменше можливе значення. При цьому момент часу $t = T > t_0$ вважається невизначеним.

Припускаємо, що задача оптимального керування (10.1) – (10.2), (10.6) – (10.7) має розв'язок $(u_*(t), x_*(t))$ – оптимальну пару. Для його характеристики уведемо функцію Гамільтона

$$H(x, u, \psi_0, \psi, t) = \psi_0 f_0(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, x, u), \quad (10.8)$$

де ψ_0 – дійсне число, вектор спряжених змінних $\psi(t)$ задовольняє однорідній системі диференціальних рівнянь

$$\dot{\psi}_i = - \frac{\partial H(x, u, \psi_0, \psi, t)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.9)$$

Якщо $\psi_0 \neq 0$, то задача (10.1) – (10.2), (10.6) – (10.7) називається регулярною.

Теорема 10.1 (Принцип максимуму). Нехай $(u_*(t), x_*(t))$ – оптимальна пара в задачі (10.1)– (10.2), (10.6) – (10.7). Тоді з необхідністю існують такі число $\psi_{0,*} \leq 0$ та вектор - функція $\psi_*(t)$, для яких виконуються умови:

$$1) |\psi_{0,*}| + \sum_{i=1}^n |\psi_{i,*}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, T];$$

2) вектор - функції $x_*(t), \psi_*(t), u_*(t)$ задовольняють умовам (10.1) – (10.2), (10.6), (10.9);

3) функція $H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t)$ як функція змінної v досягає максимального значення при $v = u_*(t)$ при всіх $t \in [t_0, T]$ крім точок розриву $u_*(t)$, тобто

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) (=) \max_{v \in U} H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t); \quad (10.10)$$

4)

$$H(x_*(T), u_*(T), \psi_{0,*}, \psi_*(T), T) = 0 \quad \blacksquare \quad (10.11)$$

Задача 1. Розв'язати задачу оптимального керування, використовуючи принцип максимуму

$$J(u) = \int_0^T (x(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = u,$$

$$x(0) = x(T) = 0, \quad T > 0, \quad |u(t)| \leq 1 \quad - \text{кусково - неперервні функції.}$$

Розв'язок. Припускаємо, що задача має розв'язок. Зауважимо, що краєва задача

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x(T) = 0$$

завжди має розв'язок $(0,0) \quad \forall T > 0$.

1.1. Складаємо функцію Гамільтона

$$H = \psi_0 (x(t) + u^2(t)) + \psi(t) u(t).$$

1.2. Спряжена змінна задовольняє рівнянню

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H}{\partial x} = - \psi_0.$$

1. 3. Структуру оптимального керування знаходимо із умови поточкового максимуму

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), \psi_{0,*}) = \max_{|v| \leq 1} H(x_*(t), v, \psi_*(t), \psi_{0,*}).$$

1.4. Нехай $\psi_0 = 0$. Тоді

$$\psi(t) = C = \text{const} \neq 0,$$

$$u(t) = \text{sign } C \quad \forall t \in [0, T].$$

Нехай $u = \pm 1$. Тоді

$$x(t) = \pm t + D,$$

що неможливо: $x(T) \neq 0$.

1.5. Таким чином, $\psi_0 = -1$. Тоді

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \frac{t}{2} + A \geq 1, \\ \frac{t}{2} + A, & -1 < \frac{t}{2} + A < 1, \\ -1, & \frac{t}{2} + A \leq -1. \end{cases}$$

Для визначення стаціонарних точок потрібно знайти і проаналізувати розв'язки крайової задачі

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = x(T) = 0$$

зі знайденим керуванням. Можливі три варіанти розташування лінійної функції $\frac{t}{2} + A$ на відрізку $[0, T]$ в залежності від значення T (див. Рис. 10.1).

1) $t \in [0, T]$, керування не має переключень. Тоді

$$u(t) = \frac{t}{2} + A,$$

$$x(t) = \frac{t^2}{4} + A t + B.$$

Постійні визначаються із крайових умов для фазової змінної і керування

$$B = 0, \quad A = -\frac{T}{4}, \quad T \leq 4.$$

Таким чином, $T \in (0, 4]$,

$$u(t) = \frac{t}{2} - \frac{T}{4},$$

$$x(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{T}{4} t.$$

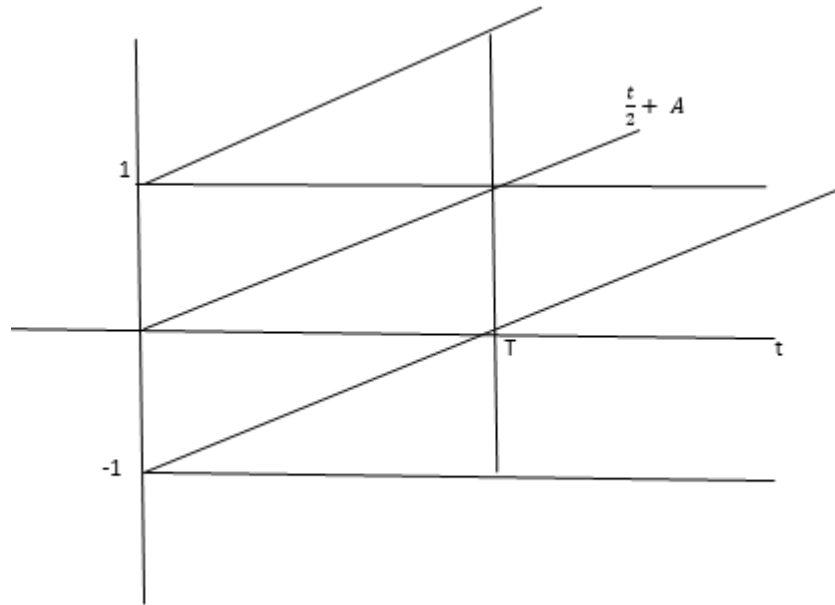


Рис. 10.1.

2) $t \in [0, T]$, керування має одне переключення. Тоді можливі два варіанти керування

2.1.

$$u(t) = -1, x(t) = -t, t \in [0, t_1],$$

$$u(t) = \frac{t}{2} + A, x(t) = \frac{t^2}{4} + A t + B, (t_1, T].$$

Постійні визначаються із крайових умов для фазової змінної і керування

$$-t_1 = \frac{t_1^2}{4} + A t_1 + B, -1 = \frac{t_1}{2} + A, \frac{T^2}{4} + A T + B = 0, \frac{T}{2} + A < 1.$$

З одного боку

$t_1 = T - 2\sqrt{T} > 0$ – розв’язок квадратного рівняння

$$t_1^2 - 2 t_1 T + T^2 - 4 T = 0, T > 4;$$

з іншого боку

$$\frac{T}{2} + A < 1 \rightarrow T < 4,$$

що неможливо.

2.2.

$$u(t) = \frac{t}{2} + A, x(t) = \frac{t^2}{4} + A t, t \in [0, t_1],$$

$$u(t) = 1, x(t) = t + B, (t_1, T].$$

Постійні визначаються із крайових умов для фазової змінної і керування

$$\frac{t_1^2}{4} + A t_1 = t_1 - T, \frac{t_1}{2} + A = 1 \rightarrow t_1 = 2\sqrt{T}.$$

З одного боку

$$T - 2\sqrt{T} > 0 \rightarrow T > 4;$$

з іншого боку

$$u(0) = 1 - \sqrt{T} > -1 \rightarrow T < 4,$$

що неможливо.

3) $t \in [0, T]$, керування має дві точки переключення. Тоді

$$u(t) = -1, x(t) = -t, t \in [0, t_1],$$

$$u(t) = \frac{t}{2} + A, x(t) = \frac{t^2}{4} + A t + B, (t_1, t_2],$$

$$u(t) = 1, x(t) = t - T, (t_2, T].$$

Постійні визначаються із крайових умов для фазової змінної і керування

$$\begin{aligned} -t_1 &= \frac{t_1^2}{4} + A t_1 + B, \quad -1 = \frac{t_1}{2} + A, \\ \frac{t_2^2}{4} + A t_2 + B &= t_2 - T, \quad \frac{t_2}{2} + A = 1. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо

$$t_1 = \frac{T-4}{2}, \quad t_2 = \frac{T+4}{2}.$$

Таким чином, при $T > 4$ будемо мати

$$\begin{aligned} u(t) &= -1, \quad x(t) = -t, \quad t \in [0, \frac{T-4}{2}], \\ u(t) &= \frac{t}{2} - \frac{T}{4}, \quad x(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{T}{4}t + (\frac{T-4}{4})^2, \quad t \in (\frac{T-4}{2}, \frac{T+4}{2}], \\ u(t) &= 1, \quad x(t) = t - T, \quad t \in (\frac{T+4}{2}, T]. \end{aligned}$$

Остаточно, при $T \in (0, 4]$ оптимальне керування не буде мати переключень, при $T > 4$ оптимальне керування буде мати дві точки переключення •

Задача 2. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \min, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u, \\ |u(t)| &\leq 2 \text{ - кусково-неперервні функції,} \\ x_1(-1) &= -1, \quad x_1(T) = 1, \quad x_2(-1) = x_2(T) = 0. \end{aligned}$$

Розв'язок. В цій задачі потрібно потрапити в точку з координатами $x_1(T) = 1, x_2(T) = 0$, яка не співпадає з початком координат. Уведемо нові координати

$$x_1 = y_1 + 1, \quad x_2 = y_2.$$

Тоді координати (y_1, y_2) задовольняють задачі

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = u,$$

$$y_1(-1) = -2, \quad y_1(T) = 0, \quad y_2(-1) = y_2(T) = 0.$$

Припускаємо, що задача має розв'язок.

2.1. Складаємо функцію Гамільтона

$$H = \psi_0 + \psi_1(t) y_2 + \psi_2(t) u(t), \quad \psi_0 \leq 0.$$

2.2. Спряжена змінна задовольняє рівнянню

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_2} = -\psi_1(t).$$

Спряжені змінні мають вигляд

$$\psi_1(t) = C, \quad \psi_2(t) = -Ct + D.$$

2.3. Структуру оптимального керування знаходимо із умови поточкового максимуму

$$H(y_*(t), u_*(t), \psi_*(t), \psi_{0*}) = \max_{|v| \leq 1} H(y_*(t), v, \psi_*(t), \psi_{0*}).$$

Тоді оптимальне керування має вигляд

$$u(t) = 2 \operatorname{sign} \psi_2(t).$$

Зрозуміло, що в цій задачі потрібно перевіряти чотири варіанти керувань, які визначаються можливими положеннями прямої, $\psi_2(t) = -Ct + D$ на відрізку $[0, T]$. Для визначення одного варіанту використаємо *метод фазового портрету*.

2.4. Нехай $u(t) = 2$, $t \in [0, T]$. Тоді вихідна система буде мати вигляд

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = 2.$$

Виключаючи стандартно час із цієї системи, отримаємо рівняння

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{y_2}{2}.$$

Останнє має загальний розв'язок у вигляді сім'ї парабол

$$y_1 = \frac{y_2^2}{4} + E.$$

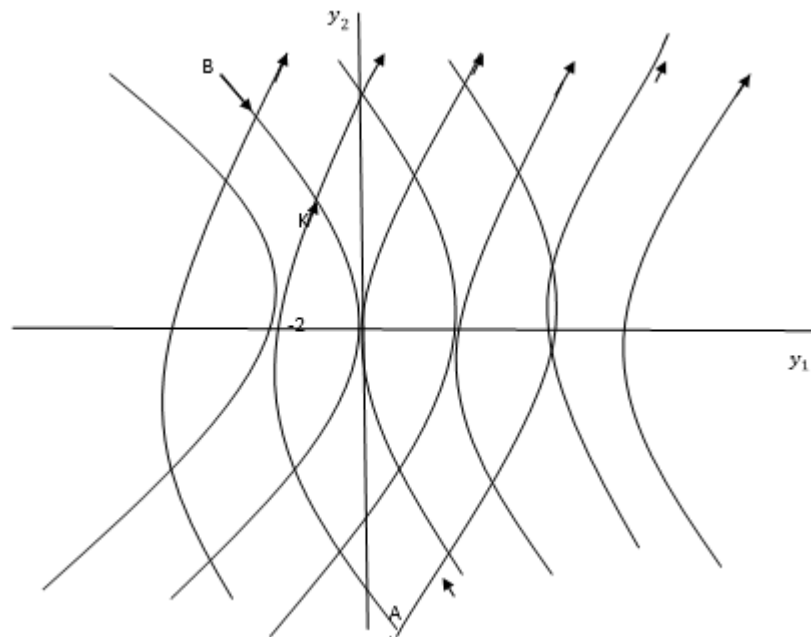


Рис. 10.2.

Через кожну точку фазової площини (див. Рис. 10.2.) проходить лише одна така парабола при певному значенні постійної E . Із другого рівняння системи витікає, що координата y_2 зростає, а координата y_1 згідно першого рівняння тієї ж системи веде себе наступним чином: при $y_2 < 0$ вона зменшується, при $y_2 > 0$ — збільшується. Таким чином, фазова точка рухається вздовж параболи знизу вгору, що відображено стрілками на рис. 10.2.

Нехай $u(t) = -2$, $t \in [0, T]$. Тоді вихідна система буде мати вигляд

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -2.$$

Виключаючи стандартно час із цієї системи, отримаємо рівняння

$$\frac{dy_1}{dy_2} = -\frac{y_2}{2}.$$

Останнє має загальний розв'язок у вигляді сім'ї парабол

$$y_1 = -\frac{y_2^2}{4} + G.$$

Через кожну точку фазової площини (див. Рис. 10.2.) проходить лише одна така парабола при певному значенні постійної G . Із другого рівняння системи витікає, що координата y_2 спадає, а координата y_1 згідно першого рівняння тієї ж системи веде себе наступним чином: при $y_2 < 0$ вона зменшується, при $y_2 > 0$ - збільшується. Таким чином, фазова точка рухається вздовж параболи згори до низу, що відображено стрілками на рис. 10.2.

Із рис. 10.2 витікає, що існує єдина крива АОВ, вздовж якої фазова точка може попасти в точку з координатами $(0, 0)$. Повертаючись до умов прикладу, бачимо, що із точки з координатами $(-2, 0)$ можна попасти в точку $(0, 0)$, рухаючись спочатку вздовж параболи $y_1 = \frac{y_2^2}{4} - 2$ ($u = 2$) до її перетину в точці К з параболою $y_1 = -\frac{y_2^2}{4}$ ($u = -2$) і далі вздовж неї до моменту попадання в точку $(0, 0)$. Координати точки К $(-1, 2)$. Для визначення моменту часу переключення керування t_1 і часу T попадання на початок координат маємо систему

$$\begin{aligned} 2 t_1 &= -2 t_1 + c, \quad \frac{t_1^2}{2} - 2 = -\frac{t_1^2}{2} + c t_1 + d, \\ -2T + c &= 0, \quad -T^2 + c T + d = 0. \end{aligned}$$

Звідси: $T = 2, t_1 = 1$.

2.5. Покажемо, що керування

$$u(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0, 1), \\ -2, & t \in [1, 2] \end{cases}.$$

є оптимальним. Для цього припустимо, що існує кусково неперервне керування $|\hat{u}(t)| \leq 2$ і число $\Theta < T = 2$:

$$\frac{d\hat{y}_1}{dt} = \hat{y}_2, \quad \frac{d\hat{y}_2}{dt} = \hat{u}, \quad \hat{y}_1(-1) = -2, \quad \hat{y}_2(-1) = 0, \quad \hat{y}_1(\Theta) = \hat{y}_2(\Theta) = 0.$$

Розглянемо дві функції: $Y(t) = y_1(t) + y_2(t)(1-t)$, $\hat{Y}(t) = \hat{y}_1(t) + \hat{y}_2(t)(1-t)$. Тоді

$$\frac{dY}{dt} = u(t)(1-t), \quad \frac{d\hat{Y}}{dt} = \hat{u}(1-t), \quad Y(-1) = \hat{Y}(-1), \quad Y(T) = \hat{Y}(\Theta) = 0.$$

Очевидно, що $\frac{dY}{dt} = 2|1-t|$. Враховуючи, що $|\hat{u}(t)| \leq 2$, отримаємо

$$\frac{dY}{dt} \geq \left| \frac{d\hat{Y}}{dt} \right| \geq \frac{d\hat{Y}}{dt}.$$

Інтегруючи отриману нерівність в межах від -1 до Θ , отримаємо

$$\int_{-1}^{\Theta} \frac{dY}{dt} dt \geq \int_{-1}^{\Theta} \frac{d\hat{Y}}{dt} dt,$$

або

$$Y(\Theta) - Y(-1) \geq \hat{Y}(\Theta) - \hat{Y}(-1) \rightarrow Y(\Theta) \geq 0.$$

З іншого боку,

$$-Y(\Theta) = Y(T) - Y(\Theta) = \int_{\Theta}^T \frac{dY}{dt} dt = 2 \int_{\Theta}^T |1-t| dt > 0 \rightarrow Y(\Theta) < 0,$$

що неможливо •

Задача 3. Показати, що в задачі

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^1 (x^2(t) - u^2(t)) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= u, \quad x(0) = 0, \quad T > 0, \quad |u(t)| \leq 1 \end{aligned}$$

- кусково - неперервні функції

оптимального керування не існує ($\inf J(u) = -1$). Що дає застосування принципу максимуму.

Розв'язок. Нехай задача має розв'язок. Застосуємо принцип максимуму для визначення стаціонарних точок.

3.1. Функція Гамільтона тепер буде мати вигляд

$$H = H = \psi_0 (x^2(t) - u^2(t)) + \psi(t) u(t).$$

3.2. Спряжена функція визначається із рівняння

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2\psi_0 x(t), \psi(1) = 0.$$

3.3. Припустимо, що $\psi_0 = 0$. Тоді $\psi(t) \equiv 0$, що неможливо.

Покладемо $\psi_0 = -0.5$. Тоді

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \psi(t) \leq -1, \\ -\psi(t), & -1 < \psi(t) < 1, \\ -1, & \psi(t) \geq 1, \end{cases}$$

де $\psi(t)$ визначається із двоточною крайовою задачею

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, x(0) = 0, \\ \dot{\psi} &= x(t), \psi(1) = 0. \end{aligned}$$

Нехай $-1 < \psi(t) < 1, t \in [0,1]$. Тоді отримаємо двоточкову краєву задачу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\psi, x(0) = 0, \\ \dot{\psi} &= x(t), \psi(1) = 0. \end{aligned}$$

Вона буде еквівалентна рівнянню

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) = 0.$$

Загальний розв'язок останнього

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Із крайових умов отримаємо, що $C_1 = C_2 = 0$, тобто $u = 0$ - стаціонарна точка, в якій $J = 0$.

Нехай $\psi(t) \leq -1, t \in [0,1]$. Тоді спряжена функція визначається із двоточною крайовою задачею

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1, x(0) = 0, \\ \dot{\psi} &= x(t), \psi(1) = 0. \end{aligned}$$

Звідси

$$u(t) = 1, \psi(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}, t \in [0,1].$$

Але $\psi(t) \in [-0.5, 0]$, тобто $u = 1$ не буде стаціонарною точкою.

3.4. Можна перебирати і інші варіанти. Якись із них будуть продуктивні, а якісь ні. Але всі ці варіанти не будуть мати ніякого відношення до оптимальності в силу того, що можна вказати таку послідовність керувань $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, на якій (див. Рис.10.3. – 10.4) $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = -1$.

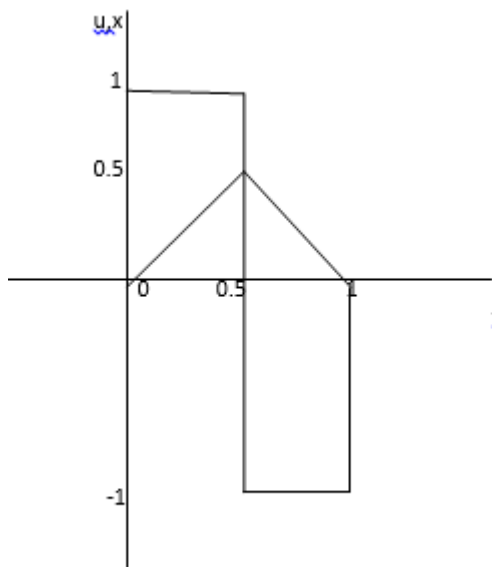


Рис.10.3.

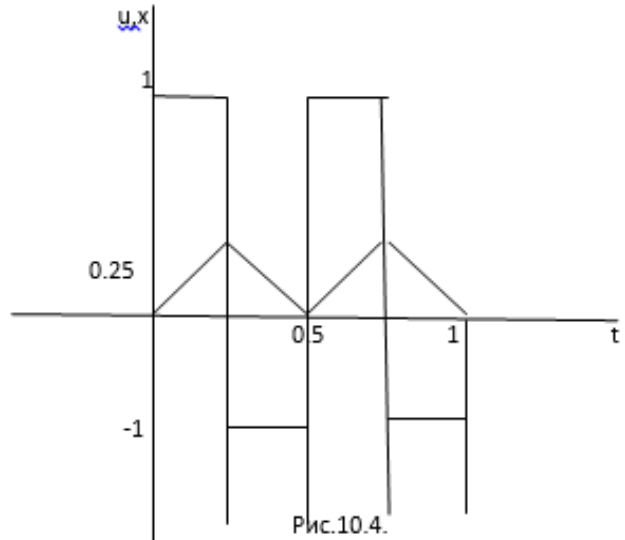


Рис.10.4.

Дійсно, нехай

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 0.5, \\ -1, & 0.5 < t \leq 1 \end{cases}.$$

Тоді

$$x_1(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 0.5, \\ 1 - t, & 0.5 < t \leq 1 \end{cases},$$

$$J(u_1) = \int_0^{0.5} (t^2 - 1) dt + \int_{0.5}^1 ((1 - t)^2 - 1) dt = -\frac{2}{3}.$$

Далі покладемо

$$u_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 0.25, \\ -1, & 0.25 < t \leq 0.5, \\ 1, & 0.5 < t \leq 0.75, \\ -1, & 0.75 < t \leq 1 \end{cases}.$$

Тоді

$$x_2(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 0.25, \\ 0.5 - t, & 0.25 < t \leq 0.5, \\ t - 0.5, & 0.5 < t \leq 0.75, \\ 1 - t, & 0.75 < t \leq 1 \end{cases}, \quad J(u_2) = -\frac{47}{48}.$$

.....

Не існує такої кусково - постійної функції, на якій би реалізувалась нижня грань (- 1) нашого функціоналу, тобто задача розв'язків не має •

Задача 4. Розв'язати задачу

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^4 x_1(t) dt \rightarrow \min, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u, \\ |u(t)| &\leq 2 - \text{кусово - неперервні функції,} \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_1(4) = x_2(4) = 0. \end{aligned}$$

Розв'язок. Нехай задача має розв'язок. Застосуємо принцип максимума для визначення стаціонарних точок.

4.1. Функція Гамільтона тепер буде мати вигляд

$$H = \psi_0 x_1 + \psi_1(t) x_2 + \psi_2(t) u(t), \psi_0 \leq 0.$$

4.2. Спряжена функція визначається із системи рівнянь

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1(t).$$

4.3. Структуру оптимального керування знаходимо із умови поточкового максимуму

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), \psi_{0*}) = \max_{|v| \leq 2} H(x_*(t), v, \psi_*(t), \psi_{0*}).$$

4.4. Тоді оптимальне керування має вигляд

$$u(t) = 2 \operatorname{sign} \psi_2(t).$$

4.5. Припустимо, що $\psi_0 = 0$. Тоді

$$\psi_2(t) = c t + d.$$

Можливі чотири варіанти розташування лінійної функції $\psi_2(t)$ на відрізку $[0,4]$. Значення $u = \pm 1$ не підходять: розв'язки системи

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u,$$

будуть містити два параметри, але при цьому потрібно задовольнити чотирьом умовам. Варіант з одним переключенням теж не підходить: розв'язки згаданої системи будуть містити три параметри, а потрібно задовольнити семи умовам- чотири краєвих умови і три умови неперервності.

4.6. Таким чином, $\psi_0 = -1$ і спряжена змінна визначається із системи рівнянь

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 1, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1(t).$$

Звідси отримаємо, що

$$\psi_1(t) = t + a, \quad \psi_2(t) = -\frac{t^2}{2} - a t + b.$$

Ця парабола – строго вігнута функція. На відрізку $[0,4]$ вона може бути: 1) додатньою, 2) від'ємною, 3) мати одну точку переключення, 4) мати дві точки переключення. Перші три варіанти були розглянуті вище і виявилися непродуктивними. Тому розглянемо варіант з двома точками переключення. Нехай

$$u(t) = \begin{cases} -2, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 2, & t_1 < t \leq t_2, \\ -2, & t_2 < t \leq 4 \end{cases}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -2t, \quad x_1(t) = -t^2, \quad 0 \leq t \leq t_1; \\ x_2(t) &= 2t + a, \quad x_1(t) = t^2 + at + b, \quad t_1 < t \leq t_2; \\ x_2(t) &= -2t + c, \quad x_1(t) = -t^2 + ct + d, \quad t_2 < t \leq 4. \end{aligned}$$

Із краєвих умов та неперервності для визначення невідомих отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} c &= 8, \quad d = -16, \\ -2t_1 &= 2t_1 + a, \quad -t_1^2 = t_1^2 + at_1 + b, \\ 2t_2 + a &= -2t_2 + 8, \quad t_1^2 = t_2^2 + at_2 + b = -t_2^2 + 8t_2 - 16. \end{aligned}$$

Тоді $a = -4, b = 2, t_1 = 1, t_2 = 3, J = -4$.

Домашнє завдання 10.

Задача 10.1. Розв'язати задачі оптимального керування, використовуючи принцип максимуму.

$$1.1. \int_0^1 x_2(t) dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x_1(0) = x_2(1) = 0, U = \{|u(t)| \leq 2, t \in [0,1]\}$ – кусково - неперервні функції.

$$1.2. \int_0^1 x_1(t) dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x_1(0) + x_1(1) = 0, x_2(0) + x_2(1) = 0,$$

$U = \{|u(t)| \leq 2, t \in [0,1]\}$ – кусково - неперервні функції.

$$1.3. \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), \int_0^1 x^2(t) dt = 1, x_1(0) = x_2(0) = x_1(1) = x_2(1) = 0, U = \{u(t) \in R^1, t \in [0,1]\}$ – кусково - неперервні функції.

Задача 10.2. Розв'язати задачі оптимальної швидкодії.

$$T \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), \int_0^T u^2(t) dt = 4, x_1(0) = 0, x_1(T) = 1, x_2(T) = -1,$$

$U = \{u(t) \in R^1, t \in [0,T]\}$ - кусково - неперервні функції.

Задача 10.3. Знайти найменше значення функціоналу

$$J(u) = \int_0^1 \sin u(t) dt$$

при умові

$$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 0, x(1) = 1,$$

$U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0,1]\}$ – кусково - неперервні функції.

Показати, що $u(t) = 0, t \in [0,1]$ – оптимальне керування, і переконатися в тому, що в принципі максимуму тут слід взяти $\psi_0 = 0$.

Задача 10.4. Застосувати принцип максимуму до задачі:

$$J(u) = \int_0^T x^2(t) dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 1, x(T) = 0,$$

де $U = \{u(t) \mid |u(t)| \leq 1, t \in [0, T]\}$ – кусково - неперервні функції, T – фіксоване число.

Показати, що при $T > 1$ оптимальне керування $u_*(t) = -1, t \in [0, 1]; u_*(t) = 0, t \in [1, T]$ на ділянці $[1, T]$ є особливим, тобто його не можна визначити із принципу максимуму.

Задача 10.5. Застосувати принцип максимуму до задачі:

$$J(u) = \int_0^1 u(t) \cos(0.5\pi x(t)) dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 0,$$

де $U = \{u(t) \mid |u(t)| \leq 1, t \in [0, T]\}$ – кусково - неперервні функції.

Задача 10.6. Показати, що задача:

$$J(u) = \int_0^T u^2(t)(u(t) - 1)^2 dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 0, x(T) = 1,$$

де $U = \{u(t) \in R^1: u(t) \in [0, 1], t \in [0, T]\}$ – кусково - неперервні функції, при $T = 1$ має єдиний розв'язок, а при $T > 1$ – безліч розв'язків. Чи зміниться цей висновок, якщо $U = R^1$? Або $x(T) = -1$?

Задача 10.7. За допомогою принципу максимуму дослідити задачу:

$$J(u) = x_1^2(1) + x_2^2(1) \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x(0) = \xi, \xi \in R^2,$$

де $U = \{u(t) \mid |u(t)| \leq 1, t \in [0, 1]\}$ – кусково - неперервні функції.

Практичні 11. Оптимальне керування динамічними системами: необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму для задач з рухомими границями.

Теоретичні засади.

Постановка задачі та математичний апарат для визначення співвідношень трансверсальності. Розглянемо задачу оптимального керування, коли лівий та правий кінці траєкторії динамічної системи, яка описує поведінку об'єкту керування, належать деяким підмножинам із R^n , а початковий і кінцевий моменти часу невідомі.

Потрібно мінімізувати критерій якості

$$J(t_0, T, u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + \Phi(T, x(T)) \quad (11.1)$$

при умовах

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad (11.2)$$

$$x(t_0) \in S_0(t_0), \quad x(T) \in S_1(T), \quad (11.3)$$

$$u(t) \in U \in R^r, \quad (11.4)$$

де $S_0(t_0), S_1(T) \subset R^n$ – фіксовані множини, функції f, f_0, Φ – неперервно диференційовані по t, u та двічі неперервно диференційовані по x .

Зрозуміло, що задача (11.1) – (11.4) співпадає із задачею оптимального керування із практичних 11, якщо множини $S_0(t_0), S_1(T)$ вироджуються в точки.

З іншого боку, принцип максимуму в розглянутих вище задачах дає лише необхідні умови оптимальності. Таким чином, якщо потрібно розв'язувати задачу оптимального керування з рухомими границями, то можливі такі міркування.

Нехай $u_*(t)$ – оптимальне керування в задачі з рухомими границями, а $x_*(t)$ – відповідна йому оптимальна траєкторія. Позначимо $x^0 = x_*(t_0), x^1 = x_*(T)$. Тоді очевидно, що $x^0 \in S_0(t_0), x^1 \in S_1(T)$.

Оптимальне керування $u_*(t)$ в задачі з рухомими границями являється оптимальним і в задачі з фіксованими границями

$$x_*(t_0) = x^0, \quad x_*(T) = x^1.$$

Звідси витікає, що керування $u_*(t)$ і траєкторія $x_*(t)$ повинні задовольняти принципу максимуму як необхідним умовам оптимальності. При розв'язанні задачі з фіксованими кінцями траєкторії, яка розглядалась в § 2, ці умови дають повну систему співвідношень для визначення всіх невідомих величин. В задачі з рухомими границями для "повноти" умов

принципу максимуму необхідна додаткова інформація щодо визначення точок $x_*(t_0), x_*(T)$. Ці точки, згідно з означенням, повинні належати множинам $S_0(t_0), S_1(T)$ відповідно.

Наведемо стисло математичний апарат для опису співвідношень, необхідних для визначення точок $x_*(t_0), x_*(T)$ в задачі з рухомими границями.

Множину M точок із R^n , які задовольняють рівнянню

$$F(x) = 0, \quad (11.5)$$

де F – скалярна функція, будемо називати *гіперповерхнею* в просторі R^n , а співвідношення (11.5) – рівнянням цієї гіперповерхні.

Точку x , в якій

$$(\text{grad } F(x))' = (F_x(x))' = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(x)}{\partial x_n} \right) = 0,$$

будемо називати *особливою точкою* гіперповерхні (11.5), а у випадку $\text{grad } F(x) \neq 0$ – *неособливою*.

Гіперповерхня, що задається рівнянням (11.5), називається *гладкою*, якщо функція $F(x)$ неперервно диференційовна у всіх точках множини M і не має особливих точок. Зокрема, якщо функція $F(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n - b$, $a_i, b \in R^1$, тобто лінійна, то визначена нею множина M буде гладкою, якщо хоч би один із коефіцієнтів a_i буде відрізнятися від нуля. Така множина називається *гіперплощиною*.

Вектор $\text{grad } F(x)$ називається *нормаллю (нормальним вектором)* гіперповерхні M в точці $x \in M$. Гіперплощина, яка проходить через точку $x^0 \in M$ і ортогональна вектору $\text{grad } F(x)$, називається *дотичною гіперплощиною*. Таким чином, рівняння цієї гіперплощини можемо записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x_0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) = 0.$$

Нехай $M_j, j = \overline{1, k}$ – гладкі гіперповерхні в R^n , що задаються рівняннями

$$F_j(x) = 0, j = \overline{1, k}. \quad (11.6)$$

Позначимо через M перетин множин $M_j, j = \overline{1, k}$. Цей перетин називається *гладкою $(n - k)$ -мірною гіперповерхнею* в R^n , якщо вектори

$$\text{grad } F_j(x), j = \overline{1, k} \quad (11.7)$$

лінійно незалежні $\forall x \in M$. Зокрема, якщо рівняння (11.6) лінійні, тобто

[illegible]

і при цьому вектори $a'_1 = (a_{1,1}, \dots, a_{1,n}), \dots, a'_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n})$ - ненульові і лінійно незалежні, то множина $\hat{M}$, яка визначається системою (11.8), називається *гладкою* ($n - k$) - *мірною гіперплощиною*.

Нехай M – $(n - k)$ - мірна гіперповерхня, яка визначається рівняннями (4.6), а L_j – дотична гіперплощина до поверхні $F_j(x)$, яка проходить через точку $x^0 \in M$. Перетин гіперплощин L_j , $j = \overline{1, k}$ називається *дотичним багатовидом до M в точці x^0* , тобто цей багатовид являє собою $(n - k)$ - мірну гіперплощину, що визначається рівняннями

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j(x_0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) = 0, \quad j = \overline{1, k}.$$

Таким чином, вектор, який виходить із точки x^0 , належить дотичному багатовиду тоді і тільки тоді, коли він ортогональний всім векторам (11.7).

Наведемо один результат, який буде корисним при формулюванні умов оптимальності для задач оптимального керування з рухомими границями.

Теорема 11.1. (Теорема Фаркаша). Нехай задана множина

$$K = \{e \in R^n : (c_i, e) \leq 0, i = \overline{1, m}; (c_i, e) < 0, i = \overline{m+1, p};$$

$$(c_i, e) = 0, \quad i = \overline{p+1, s},$$

де $c_i, i = \overline{1, s}$ – деякі фіксовані вектори із R^n .

Тоді для того, щоб деякий вектор $c \in R^n$ задовольняв нерівності

$$(c, e) \leq 0 \quad \forall e \in K,$$

необхідно і достатньо, щоб існували числа λ_i , $i = \overline{1, s}$, причому $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, p}$, такі, що

$$c = - \sum_{i=1}^S \lambda_i c_i \; .$$

Умови оптимальності з фіксованим часом. Припустимо спочатку, що в задачі (11.1) – (11.4) моменти часу t_0 та T фіксовані, тобто $\Phi(T, x(T)) = \Phi(x(T))$, $S_0(t_0) = S_0$, $S_I(T) = S_I$. Крім того, будемо вважати, що правий кінець траєкторії може належати одній із множин:

$$S_I = R^n; \quad (11.9)$$

$$S_I = \{x \in R^n: g_i(x) = 0, i = \overline{1, s_I}\}; \quad (11.10)$$

$$S_I = \{x \in R^n: g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m_I}; g_i(x) = 0, i = \overline{m_I + 1, s_I}\}. \quad (11.12)$$

Зокрема, якщо $g_i(x) = x_i - x_{s_I}^1, s_I = n, i = \overline{1, n}$, то із (11.10) отримаємо випадок закріпленого правого кінця: $x(T) = x^1$.

Аналогічно, будемо припускати, що лівий кінець траєкторії може належати одній із множин:

$$S_0 = R^n; \quad (11.13)$$

$$S_0 = \{x \in R^n: h_i(x) = 0, i = \overline{1, s_0}\}; \quad (11.14)$$

$$S_0 = \{x \in R^n: h_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m_0}; h_i(x) = 0, i = \overline{m_0 + 1, s_0}\}. \quad (11.15)$$

Наведені вище реалізації множин S_0, S_I охоплюють достатньо широке коло задач з рухомими кінцями.

Додатково до припущень задачі (11.1) – (11.4) будемо вимагати, щоб введені вище функції були двічі неперервно диференційовними по x .

Розглянемо функції (див. практичні 10)

$$H(x(t), v, \psi_0, \psi(t), t) = \psi_0 f_0(t, x(t), u(t)) + \sum_{j=1}^n f_j(t, x(t), u(t)) \psi_j(t), \quad (11.16)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (11.17)$$

Тоді має місце

Теорема 11.2. Нехай $(u_*(t), x_*(t))$ – оптимальна пара в задачі (11.1) – (11.4) з фіксованими значеннями величин t_0, T . Тоді з необхідністю існують такі число $\psi_{0,*} \leq 0$ та вектор - функція $\psi_*(t)$, для яких виконуються умови:

$$1) |\psi_{0,*}| + \sum_{i=1}^n |\psi_{i,*}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, T];$$

$$2) \text{ вектор - функції } x_*(t), \psi_*(t), u_*(t) \text{ задовольняють рівнянням (11.2), (11.17);}$$

3) функція $H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t)$ із (11.16) як функція змінної v досягає максимального значення при $v = u_*(t)$ при всіх $t \in [t_0, T]$ крім точок розриву $u_*(t)$, тобто

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) (=) \max_{v \in U} H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t); \quad (11.18)$$

4) на лівому і правому кінцях траєкторії $x(\cdot)$ виконуються умови трансверсальності: вектор $\psi_*(T) - \psi_{0,*}\Phi_x(x_*(T))$ буде ортогональним до множини S_I в точці $x_*(T) \in S_I$; вектор $\psi_*(t_0)$ буде ортогональним до множини S_0 в точці $x_*(t_0) \in S_0$.

Для регулярних задач застосування теореми 11.2 зводиться до двохточкової крайової задачі принципу максимуму з 2 n невідомими числовими параметрами. Для отримання співвідношень, з яких ці параметри можна визначити, розкриємо зміст умов трансверсальності при різних режимах на лівому та правому кінцях траєкторії.

Розглянемо спочатку правий кінець траєкторії.

Нехай множина S_I задана у вигляді (11.9), тобто кінець траєкторії вільний. Ортогональність вектора $\psi_*(T) - \psi_{0,*}\Phi_x(x_*(T))$ до множини S_I в точці $x_*(T)$ за означенням полягає в тому, що

$$(\psi_*(T) - \psi_{0,*}\Phi_x(x_*(T)), x - x(T)) = 0 \quad \forall x \in R^n,$$

тобто

$$\psi_*(T) - \psi_{0,*}\Phi_x(x_*(T)) = 0. \quad (11.19)$$

Співвідношення (11.19) породжує n граничних умов для крайової задачі принципу максимуму.

Нехай множина S_I задана у вигляді (11.10). Ортогональність вектора $\psi_*(T) - \psi_{0,*}\Phi_x(x_*(T))$ до множини S_I в точці $x_*(T)$ за означенням полягає в тому, що

$$(\psi_*(T) - \psi_{0,*}\Phi_x(x_*(T)), x - x(T)) = 0,$$

де x належить дотичному багатовиду, що визначається рівняннями

$$(g_{j,x}(x_*(T)), x - x_*(T)) = 0, g_{j,x}(x_*(T)) \neq 0, j = \overline{1, s_I}.$$

Тоді, згідно теореми 11.1, знайдуться такі дійсні числа $a_i, i = \overline{1, s_I}$, що

$$\psi_*(T) - \psi_{0,*}\Phi_x(x_*(T)) = \sum_{i=0}^{s_I} a_i g_{i,x}(x_*(T)). \quad (11.20)$$

До умови (11.20) потрібно ще додати умову належності точки $x_*(T)$ множині S_I , тобто

$$g_i(x_*(T)) = 0, i = \overline{1, s_I}. \quad (11.21)$$

Таким чином, рівності (11.20) - (11.21) дають $n + s_I$ умов, із яких s_I потрібно застосувати для визначення параметрів $a_i, i = \overline{1, s_I}$, а інші n приєднати до крайової задачі принципу максимуму в якості граничних умов.

Нехай множина S_I задана у вигляді (11.12) і $g_{j,x}(x_*(T)) \neq 0, j = \overline{1, s_I}$. Умова трансверсальності тоді означає, що існують такі дійсні числа $a_i, i = \overline{1, s_I}$, для яких має місце представлення (11.20), де

$$a_i g_i(x_*(T)) = 0, a_i \geq 0, i = \overline{1, m_I}; g_i(x_*(T)) = 0, i = \overline{m_I + 1, s_I}. \quad (11.22)$$

Таким чином, співвідношення (11.20), (11.22) знову дають $n + s_I$ умов, із яких s_I потрібно застосувати для визначення параметрів $a_i, i = \overline{1, s_I}$, а інші n приєднати до крайової задачі принципу максимуму в якості граничних умов.

На лівому кінці ситуація буде аналогічною.

Нехай множина S_0 задана у вигляді (11.13), тобто кінець траєкторії вільний. Ортогональність вектора $\psi_*(t_0)$ до множини S_0 в точці $x_*(t_0)$ породжує умову

$$\psi_*(t_0) = 0, \quad (11.22)$$

яка дає n граничних умов для крайової задачі принципу максимуму.

Нехай множина S_0 задана у вигляді (11.14). Ортогональність вектора $\psi_*(t_0)$ до множини S_0 в точці $x_*(t_0)$ означає, що знайдуться такі дійсні числа $b_i, i = \overline{1, s_0}$, для яких виконується умова

$$\psi_*(t_0) = - \sum_{i=0}^{s_I} b_i h_{i,x}(x_*(t_0)), h_{i,x}(x_*(t_0)) \neq 0, i = \overline{1, s_0}. \quad (11.23)$$

До умови (11.23) потрібно ще додати умову належності точки $x_*(t_0)$ множині S_{t_0} , тобто

$$h_i(x_*(t_0)) = 0, i = \overline{1, s_0}. \quad (11.24)$$

Таким чином, рівності (11.23) - (11.24) дають $n + s_0$ умов, із яких s_0 потрібно застосувати для визначення параметрів $b_i, i = \overline{1, s_0}$, а інші n приєднати до крайової задачі принципу максимуму в якості граничних умов.

Нехай множина S_0 задана у вигляді (11.15). Умова трансверсальності тоді означає, що існують такі дійсні числа $b_i, i = \overline{1, s_0}$, для яких має місце представлення (11.23), де

$$b_i h_i(x_*(t_0)) = 0, b_i \geq 0, i = \overline{1, m_0}; h_i(x_*(t_0)) = 0, i = \overline{m_0 + 1, s_0}. \quad (11.25)$$

Таким чином, співвідношення (11.23), (11.25) знову дають $n + s_0$ умов, із яких s_0 потрібно застосувати для визначення параметрів $b_i, i = \overline{1, s_0}$, а інші n приєднати до крайової задачі принципу максимуму в якості граничних умов.

Таким чином, умови трансверсальності на правому і лівому кінцях траєкторії у всіх зазначених вище випадках дають $2n$ граничних умов для крайової задачі принципу максимуму.

Умови оптимальності з нефіксованим часом. Повернемось до задачі (11.1) – (11.4). Тоді має місце

Теорема 11.3. Нехай набір $(t_{0,*}, T, u_*(t), x_*(t))$ - розв'язок задачі (11.1) – (11.4). Тоді з необхідністю існують такі число $\psi_{0,*} \leq 0$ та вектор - функція $\psi_*(t)$, для яких виконуються умови:

$$1) |\psi_{0,*}| + \sum_{i=1}^n |\psi_{i,*}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in [t_{0,*}, T_*];$$

$$2) \text{ вектор - функції } x_*(t), \psi_*(t), u_*(t) \text{ задовольняють рівнянням (11.2), (11.17);}$$

3) функція $H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t)$ як функція змінної v досягає максимального значення при $v = u_*(t)$ при всіх $t \in [t_0, T]$ крім точок розриву $u_*(t)$, тобто

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) (=) \max_{v \in U} H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t); \quad (41.26)$$

4) на лівому і правому кінцях траєкторії $x(\cdot)$ виконуються умови трансверсальності.

Розкриємо зміст умов трансверсальності, коли множини $S_0(t_0)$, $S_I(T)$ задаються у вигляді

$$S_I(T) = R^n, \quad (11.27)$$

$$S_I(T) = \{x \in R^n: g_i(x, T) \leq 0, \quad i = \overline{1, m_I};$$

$$g_i(x, T) = 0, \quad i = \overline{m_I + 1, s_I}\}, \quad (11.28)$$

$$S_0(t_0) = R^n; \quad (11.29)$$

$$S_0(t_0) = \{x \in R^n: h_i(x, t_0) \leq 0, \quad i = \overline{1, m_0};$$

$$h_i(x, t_0) = 0, \quad i = \overline{m_0 + 1, s_0}\}. \quad (11.30)$$

Будемо вимагати, щоб введені вище функції були двічі неперервно диференційовними по x і неперервно диференційовними по часу.

Нехай множина $S_I(T)$ задана у вигляді (11.27), тобто кінець траєкторії вільний. Тоді умови трансверсальності мають вигляд

$$\psi_*(T_*) - \psi_{0,*} \Phi_x(x_*(T_*), T_*) = 0,$$

$$H(x_*(T_*), u_*(T_*), \psi_{0,*}, \psi_*(T_*), T_*) - \psi_{0,*} \Phi_t(x_*(T_*), T_*) = 0. \quad (11.31)$$

Нехай множина $S_I(T)$ задана у вигляді (11.28), причому $g_{i,x}(x_*(T_*), T_*) \neq 0, g_{i,t}(x_*(T_*), T_*) \neq 0, i = \overline{1, s_I}$. Тоді існують такі дійсні числа $a_{i,*}, i = \overline{1, s_I}$, що

$$\psi_*(T_*) - \psi_{0,*} \Phi_x(x_*(T_*), T_*) = \sum_{i=1}^{s_I} a_{i,*} g_{i,x}(x_*(T_*), T_*),$$

$$a_{i,*} g_{i,t}(x_*(T_*), T_*) = 0, a_{i,*} \geq 0, i = \overline{1, m_I};$$

$$g_i(x_*(T_*), T_*) = 0, i = \overline{m_I + 1, s_I},$$

$$\begin{aligned} H(x_*(T_*), u_*(T_*), \psi_{0,*}, \psi_*(T_*), T_*) - \psi_{0,*} \Phi_t(x_*(T_*), T_*) = \\ = - \sum_{i=1}^{s_I} a_{i,*} g_{i,t}(x_*(T_*), T_*). \end{aligned} \quad (11.32)$$

Якщо правий кінець траєкторії закріплений, то

$$x(T_*) = x_I, \quad (11.33)$$

$$H(x_*(T_*), u_*(T_*), \psi_{0,*}, \psi_*(T_*), T_*) - \psi_{0,*} \Phi_t(x_*(T_*), T_*) = 0. \quad (11.34)$$

Аналогічної співвідношення отримаємо для лівого кінця траєкторії.

Нехай множина $S_0(t_0)$ задана у вигляді (4.29), тобто кінець траєкторії вільний. Тоді умови трансверсальності мають вигляд

$$\psi_*(t_{0,*}) = 0,$$

$$H(x_*(t_{0,*}), u_*(t_{0,*}), \psi_{0,*}, \psi_*(t_{0,*}), t_{0,*}) = 0. \quad (11.35)$$

Нехай множина $S_0(t_0)$ задана у вигляді (4.30), причому $g_{i,x}(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}) \neq 0, g_{i,t}(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}) \neq 0, i = \overline{1, s_0}$. Тоді існують такі дійсні числа $b_{i,*}, i = \overline{1, s_0}$, що

$$\psi_*(t_{0,*}) = - \sum_{i=1}^{s_0} b_{i,*} g_{i,x}(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}),$$

$$b_{i,*} g_i(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}) = 0, b_{i,*} \geq 0, i = \overline{1, m_0};$$

$$g_i(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}) = 0, i = \overline{m_0 + 1, s_0},$$

$$H(x_*(t_{0,*}), u_*(t_{0,*}), \psi_{0,*}, \psi_*(t_{0,*}), t_{0,*}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{s_0} b_{i,*} g_{i,t}(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}). \quad (11.36)$$

Якщо лівий кінець траєкторії закріплений, то

$$x(t_{0,*}) = x_0, \quad (11.37)$$

$$H(x_*(t_{0,*}), u_*(t_{0,*}), \psi_{0,*}, \psi_*(t_{0,*}), t_{0,*}) = 0. \quad (11.38)$$

Таким чином, умови трансверсальності на правому і лівому кінцях траєкторії у всіх зазначених вище випадках дають $2n + 2$ граничних умов для крайової задачі принципу максимуму, яка містить стільки ж невідомих постійних.

Принцип максимуму з інтегральними обмеженнями. В теоремах 11.2 і 11.3 точки $x(t_0)$, $x(T)$ належали різним множинам із R^n . Часто ці точки можуть належати одним множинам (змішані обмеження), а допустимі пари $(x(t), u(t))$ можуть задовольняти деяким інтегральним обмеженням. Сформулюємо принцип максимуму для одного варіанту таких обмежень.

Потрібно мінімізувати критерій якості

$$J_0(t_0, T, u) = \int_{t_0}^T \tilde{f}_0(t, x(t), u(t)) dt + \Phi_0(t_0, T; x(t_0), x(T)) \quad (11.39)$$

при умовах

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, T], \quad (11.40)$$

$$J_i(t_0, T, u) = \int_{t_0}^T \tilde{f}_i(t, x(t), u(t)) dt +$$

$$+ \Phi_i(t_0, T; x(t_0), x(T)) \leq 0, i = \overline{1, k}, \quad (11.41)$$

$$J_i(t_0, T, u) = \int_{t_0}^T \tilde{f}_i(t, x(t), u(t)) dt + \\ + \Phi_i(t_0, T; x(t_0), x(T)) = 0, i = \overline{k+1, m}, \quad (11.42)$$

$$u(t) \in U \in R^r, \quad (11.43)$$

де $t_0, T \in \Delta \subset R^1, \Delta$ - фіксований інтервал, функції $f, \tilde{f}_i, \Phi_i, i = \overline{0, m}$, - неперервно диференційовані по t, u та двічі неперервно диференційовані по x . Тоді має місце

Теорема 11.4. Нехай набір $(t_{0,*}, T_*, u_*(t), x_*(t))$ - розв'язок задачі (11.39) - (11.43). Тоді з необхідністю існують такі числа $\lambda_{i,*}, i = \overline{0, m}$, причому $\lambda_{j,*} \geq 0, j = \overline{0, k}$, та вектор - функція $\psi_*(t)$, для яких виконуються умови:

$$1) \sum_{j=0}^m |\lambda_{j,*}| + \sum_{i=1}^n |\psi_{i,*}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in [t_{0,*}, T_*];$$

2) вектор - функція $\psi_*(t)$ задовольняє рівнянню

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{\partial H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t)}{\partial x},$$

де $H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) = \sum_{i=1}^n f_i(t, x_*(t), u_*(t)) \psi_{*,i}(t) - \varphi_*(t), \varphi_*(t) = \sum_{j=0}^m \lambda_{j,*} \tilde{f}_j(t, x_*(t), u_*(t));$

3) функція $H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t)$ як функція змінної v досягає максимального значення при $v = u_*(t)$ при всіх $t \in [t_0, T]$ крім точок розриву $u_*(t)$, тобто

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) (=) \max_{v \in U} H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t); \quad (11.44)$$

4) трансверсальності по x

$$\psi_*(t_{0,*}) = \frac{\partial l_*(t_0, T; x(t_0), x(T))}{\partial x^0}, \psi_*(T_*) = - \frac{\partial l_*(t_0, T; x(t_0), x(T))}{\partial x^1},$$

де $x^0 = x(t_0), x^1 = x(T), l_*(t_0, T; x(t_0), x(T)) = \sum_{j=0}^m \lambda_{j,*} \Phi_j(t_{0,*}, T_*; x_*(t_{0,*}), x_*(T_*));$

5) умови доповнюючої нежорсткості

$$\lambda_{i,*} \left(\int_{t_{0,*}}^{T_*} \tilde{f}_i(t, x_*(t), u_*(t)) dt + \Phi_i(t_{0,*}, T_*; x_*(t_{0,*}), x_*(T_*)) \right) = 0, i = \overline{1, k};$$

6) стаціонарності по t_0 та T (у випадку рухомих кінців).

Задача 1. Розв'язати задачу оптимального керування, використовуючи принцип максимуму

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \min, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u, \\ x(0) &\in S(0) = \{x: x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \\ x(T) &\in S(T) = \{x: x_1 = 0\}, \\ |u(t)| &\leq 1 \text{ — кусково-неперервні функції,} \end{aligned}$$

Розв'язок.

1.1. Складаємо функцію Гамільтона

$$H = \psi_0 + \psi_1(t) x_2 + \psi_2(t) u(t), \quad \psi_0 \leq 0.$$

1.2. Спряжена змінна задовольняє рівнянню

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1(t).$$

Спряжені змінні мають вигляд

$$\psi_1(t) = C, \quad \psi_2(t) = -Ct + D.$$

1.3. Структуру оптимального керування знаходимо із умови поточкового максимуму

$$H(y_*(t), u_*(t), \psi_*(t), \psi_{0*}) = \max_{|v| \leq 1} H(y_*(t), v, \psi_*(t), \psi_{0*}).$$

Тоді оптимальне керування має вигляд

$$u(t) = \text{sign } \psi_2(t).$$

1.4. Із умови максимуму функції H отримаємо

$$u(t) = \text{sign } \psi_2(t).$$

1.5. Умови трансверсальності.

1.5.1. Умови трансверсальності при $t = T$ для попадання фазової точки на множину $S(T)$ для довідки:

$$\psi_*(T_*) - \psi_{0*} \Phi_x(x_*(T_*), T_*) = \sum_{i=1}^{s_I} a_{i*} g_{ix}(x_*(T_*), T_*),$$

$$a_{i*} g_i(x_*(T_*), T_*) = 0, \quad a_{i*} \geq 0, \quad i = \overline{1, m_I},$$

$$g_i(x_*(T_*), T_*) = 0, \quad i = \overline{m_I + 1, s_I},$$

$$H(x_*(T_*), u_*(T_*), \psi_*(T_*), \psi_{0*}, T_*) - \psi_{0*} \Phi_t(x_*(T_*), T_*) = - \sum_{i=1}^{s_I} a_{i*} g_{it}(x_*(T_*), T_*).$$

Для нашого прикладу будемо мати

$$\begin{aligned}\psi_1(T) &= a_1, \quad \psi_2(t) = a_1 (T - t), \\ g_1(x(T)) &= x_1(T) = 0, \quad \psi_0 + a_1 x_2(T) = 0.\end{aligned}$$

1.5.2. Умови трансверсальності при $t = 0$ для «виходу» фазової точки із множини $S(0)$ для довідки

$$\psi_*(t_{*0}) = - \sum_{i=1}^{s_0} b_{i*} h_{ix}(x_*(t_{*0}), t_{*0}),$$

$$b_{i*} \quad h_i(x_*(t_{*0}), t_{*0}) = 0, \quad b_{i*} \geq 0, \quad i = \overline{1, m_0},$$

$$h(x_*(t_{*0}), t_{*0}) = 0, \quad i = \overline{m_0 + 1, s_0},$$

$$H(x_*(t_{*0}), u_*(t_{*0}), \psi_*(t_{*0}), \psi_{0*}, t_{*0}) = \sum_{i=1}^{s_0} b_{i*} h_{it}(x_*(t_{*0}), t_{*0}).$$

Для нашого прикладу будемо мати

$$\psi_1(0) = -2 b_1 x_1(0), \quad \psi_2(0) = -2 b_1 x_2(0), \quad b_1 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0,$$

$$\psi_0 + \psi_1(0) x_2(0) + \psi_2(0) u(0) = 0.$$

Спряжені змінні будуть мати вигляд

$$\psi_1(t) = a_1, \quad \psi_2(t) = a_1 (T - t), \quad a_1 \neq 0.$$

Тоді $u(t) = \pm 1, t \in [0, T]$. Спочатку для розв'язання задачі застосуємо метод фазового портрета (див. Рис.11.1.), а потім перевіримо виконання вписаних вище співвідношень.

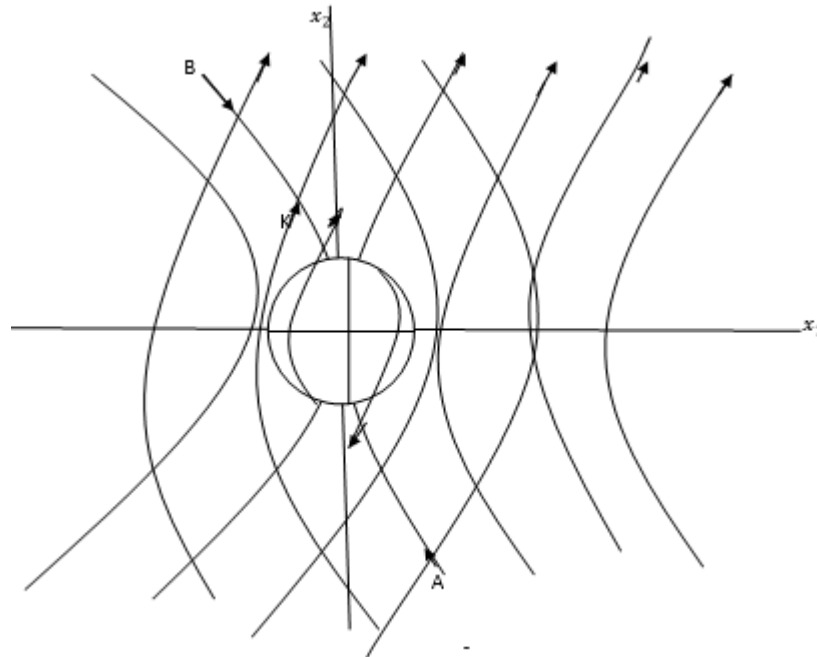


Рис. 11.1.

1.6. Нехай $-1 \leq x_1(0) \leq 0, x_2(0) = \mp (1 - x_1^2(0))^{1/2}$. Тоді

$$u = 1, \quad x_2(t) = t \mp (1 - x_1^2(0))^{1/2}, \quad x_1(t) = \frac{t^2}{2} \mp (1 - x_1^2(0))^{1/2} t + x_1(0).$$

Для визначення T маємо рівняння

$$\frac{T^2}{2} \mp (1 - x_1^2(0))^{1/2} T + x_1(0) = 0,$$

з якого знаходимо

$$T = \pm (1 - x_1^2(0))^{1/2} + (1 - x_1^2(0) - 2 x_1(0))^{1/2}.$$

Для умов трансверсальності на правому кінці траєкторії маємо:

$$a_1 > 0, \quad x_2(T) = T \mp (1 - x_1^2(0))^{1/2} = -\frac{\psi_0}{a_1} \in [1, \sqrt{2}];$$

для умов трансверсальності на лівому кінці траєкторії маємо:

$$x_1(0) = -\frac{a_1}{2b_1} \in [-1, 0] \rightarrow b_1 > 0; \quad x_2(0) = -\frac{T a_1}{2b_1} < 0 \rightarrow x_2(0) = -(1 - x_1^2(0))^{1/2};$$

$$x_1^2(0) + x_2^2(0) = 1 \rightarrow b_1 = \frac{a_1}{2} (1 + T^2)^{1/2}.$$

Таким чином, при $-1 \leq x_1(0) \leq 0$ отримаємо, що

$$x_2(0) = -(1 - x_1^2(0))^{1/2},$$

$$u = 1, \quad x_2(t) = t - (1 - x_1^2(0))^{1/2}, \quad x_1(t) = \frac{t^2}{2} - (1 - x_1^2(0))^{1/2} t + x_1(0),$$

$$T = (1 - x_1^2(0))^{1/2} + (1 - x_1^2(0) - 2 x_1(0))^{1/2}.$$

При $x_2(0) = -(1 - x_1^2(0))^{1/2}$ оптимальний час попадання на множину $S(T)$ буде складати

$$t_1 = T - 2 (1 - x_1^2(0))^{1/2}.$$

Нехай $0 < x_1(0) \leq 1$. Тоді, в силу симетрії, будемо мати

$$x_2(0) = (1 - x_1^2(0))^{1/2},$$

$$u = -1, \quad x_2(t) = -t + (1 - x_1^2(0))^{1/2}, \quad x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + (1 - x_1^2(0))^{1/2} t + x_1(0),$$

$$T = (1 - x_1^2(0))^{1/2} + (1 - x_1^2(0) + 2 x_1(0))^{1/2}.$$

При $x_2(0) = (1 - x_1^2(0))^{1/2}$ оптимальний час попадання на множину $S(T)$ буде складати

$$t_1 = T - 2 (1 - x_1^2(0))^{1/2} \bullet$$

Задача 2. Розв'язати задачу оптимального керування

$$J(u) = \int_0^1 x_1(t) dt \rightarrow \min,$$

$$\int_0^1 u^2(t) dt = 1,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_1(1) = 0.$$

Розв'язок. Припускаємо, що задача має розв'язок.

2.1. Складаємо функцію Гамільтона

$$H = \psi_0 x_1(t) + \lambda u^2(t) + \psi_1(t) x_2 + \psi_2(t) u(t), \quad \psi_0 \leq 0, \quad \lambda < 0.$$

Остання нерівність є наслідком того, що

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0.$$

2.2. Спряжена змінна задовольняє рівнянням і умовам трансверсальності

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1(t), \quad \psi_2(1) = 0.$$

Спряжені змінні мають вигляд

$$\psi_1(t) = -\psi_0 t + a, \quad \psi_2(t) = \psi_0 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - a(t-1).$$

2.3. Із умови максимуму функції Гамільтона по u , знаходимо оптимальне керування

$$u(t) = -\frac{\psi_2(t)}{2\lambda}.$$

Нехай $\psi_0 = 0$. Тоді

$$\psi_1(t) = -a, \quad \psi_2(t) = -a(t-1),$$

$$x_1(t) = -a(t-1);$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2\lambda} \left(\frac{t^2}{2} - t\right), \quad x_1(t) = \frac{a}{2\lambda} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right) + b.$$

Для того, щоб функція $x_1(t)$ задовольняла краєвим умовам потрібно покласти $a = b = 0$, що веде до рівностей $\psi_1(t) = \psi_2(t) = 0$, а це неможливо.

Нехай $\psi_0 = -1$. Тоді

$$\psi_1(t) = t + a, \quad \psi_2(t) = -\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - a(t-1),$$

$$u(t) = -\frac{\psi_2(t)}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda} \left[\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + a(t-1)\right],$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2\lambda} \left[\left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right) + a\left(\frac{t^2}{2} - t\right)\right],$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2\lambda} \left[\left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{4}\right) - \frac{5}{4} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right)\right], \quad a = -\frac{5}{8\lambda},$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left[\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + a(t-1)\right]^2 dt\right)^{1/2}.$$

Задача 3. За допомогою принципу максимуму дослідити задачу оптимального керування

$$J(u) = x_1^2(1) + x_2^2(1) \rightarrow \min,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u,$$

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

$$|u(t)| \leq 1 \text{ — кусково-неперервні функції.}$$

Розв'язок. Припускаємо, що задача має розв'язок.

3.1. Складаємо функцію Гамільтона

$$H = \psi_1(t) x_2 + \psi_2(t) u(t), \quad \psi_0 \leq 0.$$

3.2. Спряжена змінна задовольняє задачі

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1(t),$$
$$\psi_1(1) = -2x_1(1), \quad \psi_2(1) = -2x_2(1).$$

3.3. Оптимальне керування має вигляд

$$u(t) = \text{sign } \psi_2(t).$$

3.4. Двоточкова крайова задача принципу максимума запишеться таким чином:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \text{sign } \psi_2(t).$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1(t),$$

$$\psi_1(1) = -2x_1(1), \quad \psi_2(1) = -2x_2(1),$$

3.5. Нехай $\psi_2(t) < 0, t \in [0,1]$. Тоді $u = -1$ і

$$x_2(t) = -t + x_1^0, \quad x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + tx_1^0 + x_2^0.$$

Система для спряжених змінних має розв'язок

$$\psi_1(t) = C, \quad \psi_2(t) = -Ct + D.$$

Постійні C і D визначаються із системи

$$C = 1 - 2x_1^0 - 2x_2^0,$$
$$-C + D = 2 - 2x_1^0.$$

Тоді

$$D = 3 - 4x_1^0 - 2x_2^0,$$
$$C = 1 - 2x_1^0 - 2x_2^0.$$

Нехай

$$3 - 4x_1^0 - 2x_2^0 < 0, \quad 2 - 2x_1^0 < 0.$$

Тоді $u = -1$ і

$$J(u) = (-1 + x_1^0)^2 + \left(-\frac{1}{2} + x_1^0 + x_2^0\right)^2 > 0.$$

Для $x_1^0 = 1, x_2^0 = -0.5$ будемо мати $\psi_2(t) = 0$. Тоді

$$J(u) = 0,$$

де $u(t)$ – розв'язок системи інтегральних рівнянь (особливі керування)

$$\int_0^1 u(t) dt = -1,$$

$$\int_0^1 u(t)t dt = 0.5.$$

Аналогічно досліджуються три інших варіанти розташування лінійної функції $\psi_2(t)$ відносно відрізка $[0,1]$ •

Домашнє завдання 11.

Задача 11.1. Розв'язати задачу оптимального керування, використовуючи принцип максимуму

$$1.1. \quad T \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), \int_0^T u^2(t) dt = 4, x_1(0) = 0, x_1(T) = 1, x_2(T) = -1, U = \{u(t) \in R^1, t \in [0, T]\} - \text{кусково - неперервні функції.}$$

$$1.2. \quad T \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x(0) \in S_0 = \{x \in R^2: x_1^2 + x_2^2 = 1\}, x(T) \in S_T = \{x \in R^2: x_1 + x_2 = 5\}, U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]\} - \text{кусково - неперервні функції.}$$

$$1.3. \quad T \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x(0) \in S_0 = \{x \in R^2: x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, x(T) \in S_T = \{x \in R^2: x_1^2 + x_2^2 = 4\}, U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]\} - \text{кусково - неперервні функції.}$$

Задача 11.2. За допомогою принципу максимуму дослідити задачу:

$$J(u) = x_1^2(1) \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x(0) = \xi, \xi \in R^2,$$

де $U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0, 1]\}$ – кусково - неперервні функції.

Задача 11.3. За допомогою принципу максимуму дослідити задачу:

$$J(u) = x_2^2(1) \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x(0) = \xi, \xi \in R^2,$$

де $U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0, 1]\}$ – кусково - неперервні функції.

Практичні 12. Оптимальний синтез. Оптимальна стабілізація.

Теоретичні засади.

Наведемо основні співвідношення для розв'язання лінійно - квадратичної задачі оптимального синтезу.

$$J(u) = \int_{t_0}^T (x'(t) Q(t) x(t) + u'(t) H(t) u(t)) dt + x'(T) F x(T) \rightarrow \min, \quad (12.1)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t) x(t) + B(t) u(t), \quad 0 < t < T \quad (12.2) \quad x(t_0) = x^0, \quad (12.3)$$

де $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $H(t)$ – кусково - неперервні матриці розмірностей $n \times n$, $n \times r$, $n \times n$, $r \times r$ відповідно, $Q(t)$ – симетрична невід'ємно визначена матриця, $H(t)$ – симетрична додатно визначена матриця.

Оптимальне керування задається формулою

$$u = -H^{-1} B' K x(t), \quad (12.4)$$

де неперервна симетрична додатно визначена при $t_0 \leq t < T$ матриця задовольняє задачі Коші для рівняння Рікатті

$$\dot{K} = -KA - A'K + KBH^{-1}B'K - Q, \quad K(T) = F. \quad (12.5)$$

Оптимальне значення критерію має вигляд

$$J(u) = (x^0)' K(t_0) x^0. \quad (12.6)$$

Наведемо основні співвідношення для розв'язання лінійно - квадратичної задачі оптимальної стабілізації.

$$J(u) = \int_0^\infty (x'(t) Q x(t) + u'(t) H u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (12.7)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A x(t) + B u(t), \quad 0 < t < \infty, \quad (12.8)$$

$$x(0) = x^0, \quad (12.9)$$

де A , B , Q , H – числові матриці розмірностей $n \times n$, $n \times r$, $n \times n$, $r \times r$ відповідно, Q – симетрична невід'ємно визначена матриця, H – симетрична додатно визначена матриця.

Система (12.8) – (12.9) є цілком керованою: для неї виконується критерій Калмана

$$\text{rang}(B \ BA \ \dots \ BA^{n-1}) = n. \quad (12.10)$$

Оптимальне керування задається формулою

$$u = -H^{-1} B' K x(t), \quad (12.11)$$

де симетрична додатно визначена матриця задовольняє алгебраїчному рівнянню Рікатті

$$KA + A'K - KBH^{-1}B'K + Q = 0. \quad (12.12)$$

Оптимальне значення критерію має вигляд

$$J(u) = (x^0)' K x^0. \quad (12.13)$$

Нехай $K_T(t)$ - розв'язок задачі (12.1) – (12.3), K_∞ – розв'язок задачі (12.7) – (12.9). Тоді

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K_T(t) = K_\infty \quad \blacksquare \quad (12.14)$$

Задача 1. Розв'язати задачу оптимальної стабілізації

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^\infty (x^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= -x + u, \quad x(0) = 1, \\ u(t) &\in R^1. \end{aligned}$$

Розв'язок. В нашій задачі слід покласти $A = -1$, $B = 1$, $Q = H = 1$. Тоді закон синтезу має вигляд

$$u = -K x(t),$$

де число K є розв'язком рівняння

$$K^2 - 2K - 1 = 0.$$

Тоді

$$K = 1 + \sqrt{2}, \quad J = 1 + \sqrt{2} \quad \bullet$$

Задача 2. Розв'язати задачу оптимального синтезу

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^T (x_1^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \\ x_1(0) &= x_2(0) = 1, \\ u(t) &\in R^1 - \text{кусково-неперервна функція.} \end{aligned}$$

Розв'язок. В цьому випадку

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = 1.$$

Тоді

$$u = -H^{-1} B' K x(t) = -K_{1,2} x_1 - K_{2,2} x_2,$$

де

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{K}_{1,1} & \dot{K}_{1,2} \\ \dot{K}_{1,2} & \dot{K}_{2,2} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{1,2} & K_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{1,2} & K_{2,2} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{1,2} & K_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{1,2} & K_{2,2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} K_{1,1}(T) & K_{1,2}(T) \\ K_{1,2}(T) & K_{2,2}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В скалярному вигляді будемо мати

$$\begin{aligned} \dot{K}_{1,1} &= K_{1,2}^2 - 1, & K_{1,1}(T) &= 1, \\ \dot{K}_{1,2} &= -K_{1,1} + K_{1,2} K_{2,2}, & K_{1,2}(T) &= 0, \\ \dot{K}_{2,2} &= -2 K_{1,2} + K_{2,2}^2, & K_{2,2}(T) &= 0. \end{aligned}$$

Знайти розв'язок цієї системи безпосередньо ми не можемо. Тому зведемо її до однорідної, використовуючи заміну

$$K(t) = M(t) + h,$$

де $M(t)$, h - симетричні матриці, причому друга – числова.

$$\begin{aligned} 0 &= h_{1,2}^2 - 1, \\ 0 &= -h_{1,1} + h_{1,2} h_{2,2}, \\ 0 &= -2 h_{1,2} + h_{2,2}^2. \end{aligned}$$

Ця система має розв'язки $h_{1,2} = 1$, $h_{2,2} = \pm \sqrt{2}$, $h_{1,1} = \pm 1$. Обираємо додатно визначений розв'язок (згідно критерію Сільвестра)

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Матриця $M(t)$ буде задовольняти такій задачі Коші

$$\dot{M} = -M \hat{A} - \hat{A}' M + M B H^{-1} B' M, \quad M(T) = F - h = \hat{F}, \quad (12.15)$$

де

$$\hat{A} = A + B H^{-1} B' h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок задачі (12.15) задається формулою

$$M(t) = Y'(T, t) \left[\hat{F}^{-1} + \int_t^T Y(T, \tau) B H^{-1} B' Y'(T, \tau) d\tau \right]^{-1} Y(T, t), \quad (12.16)$$

де

$$Y(\tau, t) = X(\tau) X^{-1}(t), \quad \dot{X} = \hat{A} X, \quad X(0) = E_n.$$

Побудуємо для нашої задачі матрицю $X(t)$.

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{1,1} & \dot{X}_{1,2} \\ \dot{X}_{2,1} & \dot{X}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_{1,1}(0) & X_{1,2}(0) \\ X_{2,1}(0) & X_{2,2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скалярний варіант цієї системи набуде вигляду

$$\begin{aligned} \dot{X}_{1,1} &= X_{2,1}, & X_{1,1}(0) &= 1, \\ \dot{X}_{1,2} &= X_{2,2}, & X_{1,2}(0) &= 0, \\ \dot{X}_{2,1} &= X_{1,1} + \sqrt{2} X_{2,1}, & X_{2,1}(0) &= 0, \\ \dot{X}_{2,2} &= X_{1,2} + \sqrt{2} X_{2,2}, & X_{2,2}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Для $X_{2,2}$ маємо рівняння

$$\ddot{X}_{2,2} - \sqrt{2} \dot{X}_{2,2} - X_{2,2} = 0.$$

Корені його характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді

$$X_{2,2}(t) = -\frac{\lambda_2 - \sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 - \sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t},$$

$$X_{1,2}(t) = \left(\frac{(\lambda_2 - \sqrt{2})(\lambda_1 - \sqrt{2})}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) (-e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}),$$

$$X_{2,1}(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t},$$

$$X_{1,1}(t) = \frac{\lambda_1 - \sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_2 - \sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}.$$

Задача 3. Розв'язати задачу оптимальної стабілізації

$$J(u) = \int_0^\infty (4 x_1^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1,$$

$$u(t) \in R^1 - \text{кусково - неперервна функція.}$$

Розв'язок. Тоді

$$u = -K_{1,2} x_1 - K_{2,2} x_2,$$

де

$$0 = K_{1,2}^2 - 4,$$

$$0 = -K_{1,1} + K_{1,2} K_{2,2},$$

$$0 = -2 K_{1,2} + K_{2,2}^2,$$

Тоді

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оптимальне значення критерію $J = 10$ •

Домашнє завдання 12.

Задача 12.1. Розв'язати задачу оптимального синтезу

$$J(u) = \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt + x^2(1) \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = x + u, x(0) = 1,$$

$$u(t) \in R^1 - \text{кусково - неперервна функція}$$

Задача 12.2. Розв'язати задачу оптимального синтезу

$$J(u) = \int_0^T (x_2^2(t) + u^2(t)) dt + x_1^2(T) \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1,$$

$$u(t) \in R^1 - \text{кусково - неперервна функція.}$$

Задача 12.3. Розв'язати задачу оптимальної стабілізації

$$J(u) = \int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \dot{x}_2 = u_2,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1,$$

$$u(t) \in R^1 - \text{кусково - неперервна функція.}$$

Практичні 13. Оптимальна стабілізація з обмеженим керуванням. Ізодромний регулятор.

Теоретичні засади.

Наведемо основні співвідношення для лінійно - квадратичної задачі оптимальної стабілізації з обмеженим керуванням.

Нехай керована система задається лінійним рівнянням

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad 0 < t < \infty, \quad (13.1)$$

де A – числова матриця розмірності $n \times n$, B – числова матриця розмірності $n \times 1$, пар матриць (A, B) – цілком керована, тобто для неї виконується критерій Калмана

$$\text{rang}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n, \quad x(0) = x^0. \quad (13.2)$$

Потрібно знайти оптимальне керування за принципом оберненого зв'язку, яке б мінімізувало функціонал

$$J(u) = \int_0^\infty (x'(t) Q x(t) + u^2(t)) dt, \quad (13.3)$$

де Q – невід'ємно визначена, симетрична числова матриця
Функція Беллмана

$$S(x(t)) = \min_{|u(t)| \leq 1} \left\{ \int_t^\infty (x'(\tau) Q x(\tau) + u^2(\tau)) d\tau \right\}$$

задовольняє рівнянню

$$\min_{|u(t)| \leq 1} \left\{ x'(t) Q x(t) + u^2(t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)' (A x(t) + B u(t)) \right\} = 0. \quad (13.4)$$

1. Нехай $|u(t)| < 1$. Тоді

$$u = -B' K x, \quad (13.5)$$

де додатньо визначена, симетрична числова матриця матриця K задовольняє алгебраїчному рівнянню Ріккати

$$0 = KA + A'K - KB'B'K + Q, \quad S(x) = x' K x. \quad (13.6)$$

При цьому

$$J(u) = S(x^0) = x^{0'} K x^0 - \text{мінімальне значення критерію}.$$

2. Нехай $u(t) = -1$. Тоді функція Беллмана задовольняє рівнянню

$$x' Q x + 1 + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)' (A x(t) - B) = 0. \quad (13.7)$$

Розв'язок рівняння (13.7) по неперервності з'єднується із додатньо визначеним розв'язком рівняння (13.6).

3. Нехай $u(t) = 1$. Тоді функція Беллмана задовольняє рівнянню

$$x' Q x + 1 + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)' (A x(t) + B) = 0. \quad (13.8)$$

Розв'язок рівняння (13.8) по неперервності з'єднується із додатньо визначеним розв'язком рівняння (13.6) ■

Задача 1. Розв'язати задачу оптимальної стабілізації

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = -x + u, x(0) = x^0,$$

$$|u(t)| \leq 1 \text{ – кусково - неперервна функція.}$$

Розв'язок.

1.1. Нехай $u(t) < 1$. В нашому випадку $A = B = Q = 1$. Тоді

$$u = -Kx,$$

де додатнє K число задовольняє алгебраїчному рівнянню Ріккати

$$K^2 + 2K - 1 = 0.$$

Це буде число $K = -1 + \sqrt{2}$. Таким чином, якщо

$$|x^0| < 1 + \sqrt{2},$$

то

$$S(x^0) = (\sqrt{2} - 1)x^{0^2}.$$

1.2. Нехай $u(t) = -1$. Тоді функція Беллмана задовольняє рівнянню

$$x^2 + 1 + \frac{\partial S}{\partial x} (-x - 1) = 0.$$

Звідси

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{x^2 + 1}{x + 1}.$$

Тоді

$$S(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2 \ln |x + 1| + C.$$

Із умови неперервності функції Беллмана при $x = -(1 + \sqrt{2})$ знаходимо, що

$$S(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2 \ln |x + 1| - \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2} - \ln 2.$$

Таким чином, якщо

$$x^0 \leq -1 - \sqrt{2},$$

то

$$S(x^0) = \frac{x^{0^2}}{2} - x^0 + 2 \ln |x^0 + 1| - \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2} - \ln 2.$$

1.3. Нехай $u(t) = 1$. Тоді функція Беллмана задовольняє рівнянню

$$x^2 + 1 + \frac{\partial S}{\partial x} (-x + 1) = 0.$$

Звідси

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

Тоді

$$S(x) = \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln |x - 1| + C.$$

Із умови неперервності функції Беллмана при $x = 1 + \sqrt{2}$ знаходимо, що

$$S(x) = \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln |x - 1| - \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2} - \ln (\sqrt{2} + 1).$$

Таким чином, якщо

$$x^0 \geq 1 + \sqrt{2},$$

то

$$S(x^0) = \frac{x^{0^2}}{2} + x^0 + 2 \ln |x^0 + 1| - \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2} - \ln(\sqrt{2} + 1) \cdot$$

Задача 2. Знайти умови на дані задачі оптимальної стабілізації, при яких функція Беллмана буде визначена в полосі без обмежень на керування, а поза нею вона буде визначатись із рівняння з постійними значеннями керувань.

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^\infty (\alpha x_1^2(t) + \beta x_2^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min, \\ \frac{dx_1}{dt} &= a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + u, \\ x_1(0) &= x_1^0, x_2(0) = x_2^0, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta \neq 0, \\ |u(t)| &\leq 1 \text{ - кусково - неперервна функція.} \end{aligned}$$

Розв'язок. В цьому випадку

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = 1.$$

Нехай $a_{1,2} \neq 0$. Тоді $\text{rang}(B \ A B) = 2$, тобто вихідна система цілком керована. Формула, яка визначає оптимальне керування, тепер буде мати вигляд

$$u(x) = \begin{cases} -1, & \sigma \leq -1, \\ \sigma, & -1 < \sigma < 1, \\ 1, & \sigma \geq 1, \end{cases}$$

де $\sigma = -0.5 \frac{\partial S}{\partial x_2}$.

В області L , де $|u| < 1$, функція Беллмана $S(x)$ визначається із рівняння

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} (a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2} (a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 = 0.$$

Будемо шукати функцію Беллмана у вигляді

$$S_z(x) = K_{1,1} x_1^2 + 2 K_{1,2} x_1 x_2 + K_{2,2} x_2^2.$$

Тоді

$$\frac{\partial S_z}{\partial x_1} = 2 (K_{1,1} x_1 + K_{1,2} x_2), \quad \frac{\partial S_z}{\partial x_2} = 2 (K_{1,2} x_1 + K_{2,2} x_2).$$

Таким чином, в області $L = \{(x_1, x_2) : |u| < 1\}$ оптимальне керування має вигляд

$$u(x) = -K_{1,2} x_1 - K_{2,2} x_2,$$

де $K_{i,j}$ – розв'язки системи

$$\alpha + 2 a_{1,1} K_{1,1} + 2 a_{2,1} K_{1,2} - K_{1,2}^2 = 0,$$

$$a_{1,2} K_{1,1} + (a_{1,1} + a_{2,2}) K_{1,2} + a_{2,1} K_{2,2} - K_{1,2} K_{2,2} = 0,$$

$$\beta + 2 a_{1,2} K_{1,2} + 2 a_{2,2} K_{2,2} - K_{2,2}^2 = 0.$$

Рівняння замкнутої вихідної системи запишуться таким чином

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 - K_{1,2} x_1 - K_{2,2} x_2.\end{aligned}$$

Рівняння границь області L мають вигляд

$$K_{1,2} x_1 + K_{2,2} x_2 = \pm 1.$$

В кожній точці вписаних прямих виконується рівність

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{K_{1,2}}{K_{2,2}}.$$

Дотична до фазової кривої замкнутої системи має вигляд

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 - K_{1,2} x_1 - K_{2,2} x_2}{a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2}.$$

Якщо точка траєкторії замкнутої системи лежить на одній із ліній, які обмежують область L, то повинна виконуватись рівність

$$\frac{a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 \mp 1}{a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2} = - \frac{K_{1,2}}{K_{2,2}},$$

або щоб система

$$(a_{2,1} + R a_{1,1}) x_1 + (a_{2,2} + R a_{1,2}) x_2 = \pm 1,$$

$$K_{1,2} x_1 + K_{2,2} x_2 = \pm 1, \quad R = \frac{K_{1,2}}{K_{2,2}}$$

мала єдиний розв'язок.

Для того щоб траєкторія замкнутої системи не дотикалась до ліній, що обмежують область L, достатньо щоб вписана система не мала розв'язків, або щоб виконувались умови

$$\frac{a_{2,1} + R a_{1,1}}{K_{1,2}} = \frac{a_{2,2} + R a_{1,2}}{K_{2,2}} \neq 1.$$

Перша рівність приводить до рівняння

$$a_{1,2} R^2 + (a_{2,2} - a_{1,1}) R - a_{2,1} = 0.$$

Це рівняння має два дійсних розв'язки

$$R = \frac{a_{1,1} - a_{2,2} \pm \sqrt{(a_{1,1} - a_{2,2})^2 + 4 a_{1,2} a_{2,1}}}{2 a_{1,2}},$$

якщо

$$(a_{1,1} - a_{2,2})^2 + 4 a_{1,2} a_{2,1} \geq 0.$$

Повернемося тепер до системи рівнянь Ріккати – вони повинні виконуватись і при цьому їх розв'язки повинні задовольняти нерівностям (критерій Сільвестра)

$$K_{1,1} > 0, \quad K_{2,2} > 0, \quad K_{1,1} K_{2,2} > K_{1,2}^2.$$

Останнє рівняння цієї системи буде мати вигляд

$$-\beta - 2(a_{1,2} R + a_{2,2}) K_{2,2} + K_{2,2}^2 = 0.$$

Виключаючи $K_{1,1}$ із двох перших рівнянь, отримаємо

$$a_{1,2} (-\alpha - 2 a_{2,1} R K_{2,2} + R^2 K_{2,2}^2) = 2 a_{1,1} (-(a_{1,1} + a_{2,2}) R + a_{2,1}) K_{2,2} + R K_{2,2}^2.$$

Для $K_{2,2}$ ми отримали два рівняння – отже, повинні виконуватись рівності

$$\begin{aligned} 1 &= a_{1,2} R^2 - 2 a_{1,1} R, \\ a_{1,2} R + a_{2,2} &= a_{1,2} a_{2,1} R - a_{1,1} [(a_{1,1} + a_{2,2}) R + a_{2,1}], \\ \beta &= a_{1,2} \alpha. \end{aligned}$$

Для визначення R маємо два рівняння – отже, повинні виконуватись умови

$$a_{1,1} + a_{2,2} = 0, \quad a_{2,1} = 1, \quad \beta = a_{1,2} \alpha, \quad a_{1,2} > 0.$$

Друге рівняння (лінійне) тоді виконується тотожно. Таким чином, параметр R визначається формулою

$$R = \frac{-a_{2,2} + \sqrt{a_{2,2}^2 + a_{1,2}}}{a_{1,2}}.$$

Тоді розв'язки системи рівнянь Рікатті будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} K_{2,2} &= \sqrt{a_{2,2}^2 + a_{1,2}} + \sqrt{a_{2,2}^2 + (1 + \alpha) a_{1,2}}, \\ K_{1,2} &= \frac{-a_{2,2} + \sqrt{a_{2,2}^2 + a_{1,2}}}{a_{1,2}} (\sqrt{a_{2,2}^2 + a_{1,2}} + \sqrt{a_{2,2}^2 + (1 + \alpha) a_{1,2}}), \end{aligned}$$

$$K_{1,1} = \frac{K_{2,2} (R K_{2,2} - 1)}{a_{1,2}} > 0.$$

Умови виконання критерію Сільвестра в загальному випадку не будемо: перевірку будемо здійснювати при конкретних значеннях матриці A .

Система щодо неіснування точки дотику траєкторії замкнутої системи і ліній, що обмежують область L , буде суперечливою і при виконанні умов

$$a_{2,1} + R a_{1,1} = 0, \quad a_{2,2} + R a_{1,2} = 0,$$

або

$$a_{2,1} a_{1,2} = a_{2,2} a_{1,1}.$$

В силу того, що $a_{1,2} > 0$ завжди, тут можливі два варіанти

$$1) \quad a_{2,1} = a_{1,1} = 0, \quad R = -\frac{a_{2,2}}{a_{1,2}} = \frac{K_{1,2}}{K_{2,2}},$$

$$2) \quad R = -\frac{a_{2,2}}{a_{1,2}} = -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} = \frac{K_{1,2}}{K_{2,2}}.$$

Для варіанта 1) отримаємо

$$K_{2,2} = \sqrt{\beta}, \quad K_{1,2} = \sqrt{\alpha}, \quad a_{2,2} = -a_{1,2} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} < 0, \quad K_{1,1} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta a_{1,2}^2}} (\beta + a_{1,2} \sqrt{\alpha}).$$

При цьому виконуються нерівності критерію Сільвестра.

Другий варіант досліджується аналогічно при конкретній матриці А. Дійсно, нехай

$$a_{2,1} = -a_{1,1}, \quad a_{2,2} = -a_{1,2}, \quad a_{1,1} = a_{1,2} = 1, \quad \alpha = \beta = 1. \quad \text{Тоді}$$

$$R = 1, \quad K_{2,2} = 1, \quad K_{1,1} = 2, \quad K_{1,2} = 1.$$

Наприклад, нехай $\alpha = \beta = 1, a_{1,1} = q$ – додатне дійсне число. Тоді $a_{2,2} = -q, a_{1,2} = a_{2,1} = 1,$

$$K_{2,2} = \sqrt{q^2 + 1} + \sqrt{q^2 + 2}, \quad K_{1,2} = (q + \sqrt{q^2 + 1})(\sqrt{q^2 + 1} + \sqrt{q^2 + 2}),$$

$$K_{1,1} = (\sqrt{q^2 + 1} + \sqrt{q^2 + 2})((q + \sqrt{q^2 + 1})(\sqrt{q^2 + 1} + \sqrt{q^2 + 2}) - 1).$$

При цьому виконуються нерівності критерію Сільвестра.

У викладеному вище випадку функція Беллмана буде визначена в площі L у вигляді квадратичної форми і поза нею як розв'язок двох лінійних рівнянь Беллмана •

Задача 3. Побудувати ізодромний регулятор, коли динаміка системи має вигляд

$$\frac{dy}{dt} = 2y(t) + \xi(t) + \chi,$$

де $\xi(t)$ – керування, χ – постійне невідоме збурення.

Розв'язок. Нехай $z(t) = \frac{dy}{dt}$, тоді отримаємо розширену систему керування

$$\frac{dz}{dt} = 2z(t) + u(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = z(t),$$

де $u(t) = \xi(t)$ – нове керування.

Критерій оптимальності для розширеної системи буде мати вигляд

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (y^2 + z^2 + u^2) dt \rightarrow \min.$$

Рівняння Беллмана для нашої задачі оптимальної стабілізації запишеться таким чином

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} (y^2 + z^2 + u^2) + \frac{\partial S}{\partial y} z + \frac{\partial S}{\partial z} (2z(t) + u(t)) \right\} = 0,$$

де

$$S(y(t), z(t)) = \frac{1}{2} \min_u \left(\int_t^\infty (y^2(\tau) + z^2(\tau) + u^2(\tau)) d\tau \right).$$

Розкриваючи операцію мінімуму в лівій частині рівняння Беллмана, отримаємо

$$u = -\frac{\partial S}{\partial z}.$$

Тоді рівняння Беллмана набуде вигляду

$$y^2 + z^2 + 2 \left(\frac{\partial S}{\partial y} + 2 \frac{\partial S}{\partial z} \right) z - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = 0.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді квадратичної форми

$$S(y,z) = K_{1,1} y^2 + 2 K_{1,2} y z + K_{2,2} z^2.$$

де $K_{i,j}$ – елементи симетричної додатно визначеної матриці Ріккати.

Компоненти градієнту функції Беллмана $S(\cdot)$ обчислюються за формулами

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 2(K_{1,1} y + K_{1,2} z), \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 2(K_{1,2} y + K_{2,2} z).$$

Тоді рівняння Беллмана набуде остаточного вигляду

$$y^2 + z^2 + 4(K_{1,1} y + K_{1,2} z + 2 K_{1,2} y + 2 K_{2,2} z) - 4(K_{1,2} y + K_{2,2} z)^2 = 0.$$

Звідси отримаємо систему рівнянь для елементів матриці Ріккати

$$\begin{aligned} 1 - 4 K_{1,2}^2 &= 0, \\ K_{1,1} + 2 K_{1,2} - K_{1,2} K_{2,2} &= 0, \\ 1 + 4(K_{1,2} + 2 K_{2,2}) - 4 K_{2,2}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ця система має один додатно визначений розв'язок

$$K_{1,1} = \frac{-2 + \sqrt{7}}{4}, \quad K_{1,2} = \frac{1}{2}, \quad K_{2,2} = \frac{2 + \sqrt{7}}{2}.$$

Тоді керування матиме вигляд

$$u = -y - (2 + \sqrt{7})z.$$

При цьому замкнута система прийме вигляд

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\sqrt{7} y(t) - \int_0^t y(\tau) d\tau + \chi$$

і вона компенсує невідоме збурення χ .

Домашнє завдання 13.

Задача 13.1. Розв'язати задачу оптимальної стабілізації

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^\infty (x^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= x + u, \quad x(0) = x^0, \\ |u(t)| &\leq 1 \text{ – кусково-неперервна функція.} \end{aligned}$$

Задача 13.2. Розв'язати задачу оптимальної стабілізації

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min, \\ \frac{dx_1}{dt} &= 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_2 + u, \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \\ |u(t)| &\leq 1 \text{ – кусково-неперервна функція.} \end{aligned}$$

Задача 13.3. Побудувати ізодромний регулятор, коли динаміка системи має вигляд

$$\frac{dy}{dt} = -2y(t) + \xi(t) + \chi,$$

де $\xi(t)$ – керування, χ – постійне невідоме збурення.

Практичні 14. Достатні умови оптимальності Кротова.

Теоретичні засади.

Достатні умови оптимальності в термінах функції Кротова.

Нехай $K(t, x)$, $t \in [t_0, T]$, $x \in R^n$ – деяка неперервно диференційована функція і така, що $K(t, x(t))$ – неперервно диференційована функція відносно $t \in [t_0, T]$, де $x(t)$ – розв'язок задачі Коші

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x^0 \quad (14.1)$$

при допустимому керуванні $u(t) \in U$. Таку функцію в теорії оптимального керування називають функцією Кротова. Збудуємо функції

$$R(x, u, t) = (K_x(t, x), f(t, x, u)) + K_t(t, x) + f_0(t, x, u), \quad (14.2)$$

$$G(T, x) = \Phi(x) - K(T, x). \quad (14.3)$$

Повернемось до функції $K(t, x)$. В силу рівняння із (14.1) отримаємо

$$\frac{dK(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial K(t, x(t))}{\partial t} + (K_x(t, x), f(t, x, u)) = R(x, u, t) - f_0(t, x, u) \quad \forall u(t) \in U, \quad t \in [t_0, T].$$

Інтегруючи останній вираз по t на відрізку $[t_0, T]$, отримаємо

$$K(T, x(T)) - K(t_0, x^0) = \int_{t_0}^T R(x, u, t) dt - \int_{t_0}^T f_0(t, x, u) dt + \Phi(x(T)) - \Phi(x(t_0)),$$

або

$$J(t_0, x^0, u) = \int_{t_0}^T R(x, u, t) dt + G(T, x) + K(t_0, x^0), \quad (14.4)$$

де

$$J(t_0, x^0, u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x, u) dt + \Phi(x(T)), \quad (14.5)$$

функціонал, який мінімізується на розв'язках задачі Коші (14.1); всі екзогеннозадані функції є неперервними по сукупності аргументів.

Позначимо

$$R_{\min}(t, T) = \min_{(x, u) \in R^n \times U} R(x, u, t),$$

$$G_{\min}(T) = \min_{x \in R^n} G(T, x).$$

Тоді для будь-якої допустимої пари $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, T]$ буде мати місце нерівність

$$0 \leq J(t_0, x^0, u) - J(t_0, x^0, u_*) \leq \int_{t_0}^T (R(x, u, t) - R_{\min}(t, T)) dt + G(T, x(T)) - G_{\min}(T). \quad (14.6)$$

Очевидно, буде справедливою

Теорема 14.1. Для того щоб допустима пара $(x_*(t), u_*(t))$, $t \in [t_0, T]$, була оптимальною для вихідної задачі оптимального керування (14.1), (14.5), достатньо існування такої функції $K(t, x)$, відносно якої має місце рівність (14.4) та нерівності

$$R(x_*(t), u_*(t), t) \geq 0, \quad t \in [t_0, T], \quad (14.7)$$

$$G(T, x_*(T)) \geq 0 \quad (14.8)$$

Зауважимо, що викладені вище достатні умови оптимальності можуть бути розповсюджені на більш складні задачі оптимального керування, зокрема, на задачі з нефіксованим часом та на задачі зі змішаними (по керуванню та фазовим змінним) поточковими обмеженнями.

Зокрема, для задачі оптимальної швидкодії: $f_0(t, x, u) = 1$, $\Phi(x) = 0$, $x(T) = x^1$ має місце аналог теореми 14.1

Теорема 14.2. Нехай трійка $(x_*(t), u_*(t), T_*)$, $t \in [t_0, T_*]$ – деякий допустимий розв'язок задачі про «перехід» фазової траєкторії із точки x^0 в точку x^1 за кінечний час. Для того щоб ця трійка була оптимальною для вихідної задачі оптимальної швидкодії достатньо існування такої функції $K(t, x)$, відносно якої мають місце рівність (14.4) та співвідношення

$$\int_{t_0}^{T_*} R(x_*(t), u_*(t), t) dt < \int_{t_0}^{T_*} \bar{R}_{min}(t, T) dt + T_* - T, \quad \forall T \in [0, T_*], \quad (14.9)$$

$$G(T_*, x_*(T_*)) = \bar{G}_{min}, \quad K(t_0, x_*(t_0)) = \bar{K}^{(0)}, \quad (14.10)$$

де

$$\bar{R}_{min}(t, T) = R_{min}(t, T),$$

$$\bar{G}_{min} = \min_{T \geq t_0} G_{min}(T), \quad \bar{K}^{(0)} = \min_{x(t_0)} K(t_0, x(t_0)) \quad \bullet$$

Теорема 14.1 може бути розповсюджена на мінімізуючі послідовності: для того щоб деяка допустима послідовність пар $(x_*^{(l)}(t), u_*^{(l)}(t))$, $t \in [t_0, T]$, була мінімізуючою, достатньо існування такої функції $K(t, x)$, відносно якої мають місце рівності

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T R(x_*^{(l)}(t), u_*^{(l)}(t), t) dt \geq 0, \quad t \in [t_0, T], \quad (14.11)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} G(T, x_*^{(l)}(T)) \geq 0, \quad t \in [t_0, T] \quad \blacksquare \quad (14.12)$$

Задача 1. Використовуючи достатні умови оптимальності Кротова, довести, що задача

$$J(u) = \int_0^1 (x^2(t) - u^2(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = u(t), \quad t \in (0, 1],$$

$$x(0) = 0,$$

$$|u(t)| \leq 1 \text{ – кусково - неперервна функція}$$

не має розв'язків в класі кусково - неперервних функцій.

Розв'язок. Розглянемо послідовність допустимих пар $(x^{(l)}(t), u^{(l)}(t))$, $t \in [0, 1]$, де

$$u^{(l)}(t) = \begin{cases} +1, & \frac{m}{l} < t \leq \frac{m}{l} + \frac{1}{2l}, \\ -1, & \frac{m}{l} + \frac{1}{2l} < t \leq \frac{m}{l} + \frac{1}{l} \end{cases},$$

$$x^{(l)}(t) = \begin{cases} t - \frac{m}{l}, \frac{m}{l} < t \leq \frac{m}{l} + \frac{1}{2l}, \\ -t + \frac{m+1}{l}, \frac{m}{l} + \frac{1}{2l} < t \leq \frac{m}{l} + \frac{1}{l} \end{cases}, \quad m = \overline{0, l-1}, l = 1, 2, \dots$$

Вона є допустимою в силу того, що

$$\frac{dx^{(l)}(t)}{dt} = u^{(l)}(t), \quad x^{(l)}(0) = 0 \quad \forall l.$$

Візьмемо функцію $K(t, x) = t - 1$. Тоді

$$R(x, u, t) = (K_x(t, x), f(t, x, u)) + K_t(t, x) + f_0(t, x, u) = 1 + x^2 - u^2 \geq 0,$$

$$G(1, x) = -K(1, x) = 0.$$

Тому

$$R_{\min}(t) = \min_{x \in \mathbb{R}^1} \min_{|u(t)| \leq 1} (1 + x^2 - u^2) = 0,$$

$$G_{\min} = \min_{x \in \mathbb{R}^1} G(1, x) = 0,$$

$$K_{\min}^{(0)} = \min_{x \in \mathbb{R}^1} K(0, x) = -1,$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^1 R(x^{(l)}(t), u^{(l)}(t), t) dt = 0,$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J(0, 0, u^{(l)}) = \int_0^1 R_{\min}(t) dt + G_{\min} + K_{\min}^{(0)} = -1.$$

Отже, послідовність $(x^{(l)}(t), u^{(l)}(t))$, $t \in [0, 1]$, є мінімізуючою, але не існує кусково - неперервного керування, на якому б реалізувалась нижня грань функціоналу

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J(0, 0, u^{(l)}) = -1 \bullet$$

Задача 2. За допомогою достатніх умов оптимальності розв'язати задачу оптимальної швидкодії

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \min, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u(t), \quad t \in (0, T], \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0, \\ |u(t)| &\leq 1 - \text{кусково - неперервна функція.} \end{aligned}$$

Розв'язок. Для задачі швидкодії достатні умови полягають у виконанні рівності (14.4), нерівності

$$\int_0^{T^*} R(x_*(t), u_*(t), t) dt < \int_0^{T^*} R_{\min}(t) dt + T^* - T, \quad T \in [0, T^*], \quad (14.13)$$

співвідношення

$$G(T_*, x_*(T_*)) = \overline{G}_{\min}. \quad (14.14)$$

Застосовуючи до цієї задачі швидкодії принцип максимуму та міркування щодо оптимальності знайденої стаціонарної точки (див. практичні 10), отримаємо її оптимальний розв'язок: $T_* = 2$,

$$u_*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1), \\ 1, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

$$x_{1*}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{2}, & t \in [0,1), \\ \frac{t^2}{2} - 2t + 2, & t \in [1,2] \end{cases}, \quad x_{2*}(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0,1), \\ t - 2, & t \in [1,2] \end{cases}.$$

Візьмемо функцію Кротова у вигляді

$$K(t, x) = x_1(t) - (t - 1) x_2(t).$$

Тоді

$$R(x, u, t) = (K_x(t, x), f(t, x, u)) + K_t(t, x) + f_0(t, x, u) = x_2(t) - x_2(t) - (t - 1) u(t) + 1 = 1 + (1 - t)u(t),$$

$$G(T, x(T)) = -K(T, x(T)) = -x_1(T) + (T - 1) x_2(T);$$

$$\bar{R}_{min}(t, T) = \min_{|u| \leq 1} (1 + (1 - t)u(t)) = 1 - |t - 1| = R(x_*, u_*, t),$$

$$\int_0^2 R(x_*(t), u_*(t), t) dt - \int_0^T \bar{R}_{min}(t, T) dt = \int_T^2 (1 - |t - 1|) dt < 2 - T,$$

$$G(2, x_*(2)) = \bar{G}_{min} = 0,$$

$$K(0, x_*(0)) = 1 = \bar{K}^{(0)},$$

тобто $T_* = 2$.

Задача 3. За допомогою достатніх умов оптимальності розв'язати лінійну по керуванню задачу оптимального керування

$$\begin{aligned} \int_0^T (p_0(t, x) + q_0(t, x) u) dt &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= p(t, x) + q(t, x) u, \quad t \in (0, T], \\ x(0) &= x^0, \quad x(T) = x^1, \\ u(t) &\text{ — кусково — неперервна функція.} \end{aligned}$$

Розв'язок. У нашому випадку

$$\begin{aligned} R(x, u, t) &= (K_x(t, x), f(t, x, u)) + K_t(t, x) + f_0(t, x, u) = K_t(t, x) + K_x(t, x)(p(t, x) + q(t, x) u) + \\ &\quad + p_0(t, x) + q_0(t, x) u. \end{aligned}$$

Для того, щоб вираз $\min_{(x, u) \in R^n \times U} R(x, u, t)$ мав зміст потрібно, щоб функція $R(x, u, t)$ не залежала від u . Для цього потрібно, щоб коефіцієнт при u дорівнював нулеві, тобто

$$K_x(t, x) q(t, x) + q_0(t, x) = 0.$$

Тоді $x_*(t)$ знаходимо із умови

$$\min_x R(x, u, t),$$

і при цьому

$$u_*(t) = \left(\frac{dx_*(t)}{dt} - p(t, x_*(t)) \right) q(t, x_*(t))^{-1}.$$

Викладена вище ідея побудови оптимального розв'язку вихідної лінійної задачі оптимального керування без обмежень на останні реалізується таким чином.

1) Спочатку знаходимо функцію $K(t, x)$ як розв'язок рівняння

$$K_x(t, x) = - \frac{q_0(t, x)}{q(t, x)}.$$

Цей розв'язок має вигляд

$$K(t, x) = - \int_{x^0}^x \frac{q_0(t, \xi)}{q(t, \xi)} d \xi + c(t),$$

де $c(t)$ – довільна функція часу.

2) Знаходимо

$$\frac{\partial K(t, x)}{\partial t} = - \int_{x^0}^x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_0(t, \xi)}{q(t, \xi)} \right) d \xi + \dot{c}(t).$$

3) Тоді функція $R(x, u, t)$ набуде вигляду

$$R(x, u, t) = - \frac{q_0(t, x)p(t, x) + p_0(t, x)q(t, x)}{q(t, x)} = - \int_{x^0}^x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_0(t, \xi)}{q(t, \xi)} \right) d \xi + \dot{c}(t).$$

4) Знаходимо $x_*(t)$ як розв'язок рівняння

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

Або

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_0(t, x)p(t, x) + p_0(t, x)q(t, x)}{q(t, x)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_0(t, x)}{q(t, x)} \right) = 0.$$

Знайдена траєкторія $x_*(t)$ буде опимальною, якщо

$$x(0) = x^0, \quad x(T) = x^1.$$

Якщо краєві умови не задовольняються, потрібно на основі $x_*(t)$ збудувати мінімізуючу послідовність $x^{(l)}(t)$, для якої крайові умови вже будуть виконані.

5) Знаходимо

$$u_*(t) = \left(\frac{dx_*(t)}{dt} - p(t, x_*(t)) \right) q(t, x_*(t))^{-1}$$

або $u^{(l)}(t)$ •

Домашнє завдання 14.

Задача 14.1. Використовуючи достатні умови оптимальності Кротова, довести, що задача

$$J(u) = \int_0^1 (x_1^2(t) + x_2^2(t) - u^2(t)) dt \rightarrow \min,$$
$$\dot{x}_1 = x_2(t), \quad \dot{x}_2 = u(t), \quad t \in (0,1],$$
$$x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$|u(t)| \leq 1$ – кусково - неперервна функція не має розв'язків в класі кусково - неперервних функцій.

Задача 14.2. За допомогою достатніх умов оптимальності розв'язати задачу оптимальної швидкодії

$$T \rightarrow \min,$$
$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u(t), \quad t \in (0, T],$$
$$x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(T) = 1, \quad x_2(T) = 0,$$
$$|u(t)| \leq 1 \text{ – кусково - неперервна функція.}$$

Стаціонарну точку знайти за допомогою принципу максимуму.

Задача 14.3. За допомогою достатніх умов оптимальності розв'язати лінійну задачу оптимального керування

$$\int_0^T ((t+1)x^2(t) - txu) dt \rightarrow \min,$$
$$\dot{x} = -x + xu, \quad t \in (0, T],$$
$$x(0) = x^0, \quad x(T) = x^1,$$
$$u(t) \text{ – кусково - неперервна функція.}$$

Практичні 15. Лінійно – квадратичні безкоаліційні ігри.

Теоретичні засади.

Гарантована рівновага. Розглядається диференціальна гра двох осіб з позиційними стратегіями

$$\{\aleph, \Sigma, U_i, J_i(U), i \in \aleph\}, \quad (15.1)$$

в якій $\aleph = \{1, \dots, m\}$ – множина номерів гравців, кожен з яких може обирати та використовувати "свої" стратегії;

зміна стану керованої системи Σ описується задачею Коші для системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \sum_{j \in \aleph} B_j(t)u_j \quad (15.2)$$

з початковими умовами

$$x(t_0) = x^0;$$

стратегія i -го гравця задається лінійною формою вигляду

$$\widehat{U}_i = \{U_i: u_i(t, x) = Q_i(t) x, \quad \forall Q_i(t) \in C_{m_i \times m}[t_0, T]\} \quad (15.3)$$

неперервною матрицею $Q_i(t)$ розмірності $m_i \times m$;

для випадку $m = 2$ виграші гравців задаються у вигляді квадратичних функціоналів

$$J_1(U, t_0, x^0) = x'(T) C_1 x(T) + \int_{t_0}^T (-u_1'(t) D_{1,1} u_1(t) + u_2'(t) D_{1,2} u_2(t)) dt,$$

$$J_2(U, t_0, x^0) = x'(T) C_2 x(T) + \int_{t_0}^T (u_1'(t) D_{2,1} u_1(t) - u_2'(t) D_{2,2} u_2(t)) dt, \quad (15.4)$$

де $C_i, i = \overline{1,2}$ – симетричні числові невід'ємно визначені матриці розмірності $n \times n$,

$D_{i,j}, i, j = \overline{1,2}$ – симетричні числові додатньо визначені матриці розмірності $n \times n$, а в системі {15.2} матриці B_i будемо вважати одиничними.

Тоді, як і у стаціонарному випадку, ми повинні визначити величину гарантії гравця, тобто величину виграшу, яку він гарантовано отримає незалежно від дій іншого гравця.

Нехай $J_i[U_i^g, t_0, x^0], i = \overline{1,2}$ – гарантії гравців при фіксованих значеннях (t_0, x^0) .

Тоді ці гарантії задовольняють умовам

$$J_1[U_1^g, t_0, x^0] \leq J_1(U_1^g, U_2, t_0, x^0) \quad \forall U_2 \in \widehat{U}_2,$$

$$J_2[U_2^g, t_0, x^0] \leq J_2(U_1, U_2^g, t_0, x^0) \quad \forall U_1 \in \widehat{U}_1, \quad (15.5)$$

тобто, кожен із гравців отримує не менше своєї гарантії;
гарантії повинні бути найбільшими

$$J_i[U_i^g, t_0, x^0] = \max_{U_i} J_i[U_i, t_0, x^0], \quad i = \overline{1,2}, \quad (15.6)$$

де

$$J_1[U_1, t_0, x^0] = \min_{U_2} J_1(U_1, U_2, t_0, x^0), \quad J_2[U_2, t_0, x^0] = \min_{U_1} J_2(U_1, U_2, t_0, x^0).$$

Достатні умови розв'язності антагоністичної гри в термінах функції Беллмана.

З цією метою розглянемо функцію

$$V_1(S_1, x, u_1, u_2, t) = \frac{\partial S_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)' (A(t)x + u_1 + u_2) - u_1'(t) D_{1,1} u_1(t) + u_2'(t) D_{1,2} u_2(t), \quad (15.7)$$

де $S_1[t, x]$ – функція Беллмана.

Теорема 15.1. Нехай існують неперервно диференційована функція $S_1[t, x]$ та вектор-функції

$$u_i^{(s,1)}(t, x) = Q_i^{(s,1)}(t) x, \quad Q_i^{(s,1)}(t) \in C_{m_i \times m}[t_0, T], \quad i = \overline{1,2}$$

такі, що

1) при любых $x \in R^n$

$$S_1[T, x] = x'(T) C_1 x(T); \quad (15.8)$$

2) для всіх $(t, x) \in [t_0, T] \times R^n$

$$\begin{aligned}
V_1(S_1[t, x], x, u_1^{(s,1)}(t, x), u_2^{(s,1)}(t, x), t) &= 0, \\
V_1(S_1[t, x], x, u_1, u_2^{(s,1)}(t, x), t) &\leq 0 \quad \forall u_1 \in R^n, \\
V_1(S_1[t, x], x, u_1^{(s,1)}(t, x), u_2, t) &\geq 0 \quad \forall u_2 \in R^n.
\end{aligned} \tag{15.9}$$

Тоді, при будь-якій початковій позиції (t_0, x^0) стратегія $U_1^{(s,1)}$ ($u_1^{(s,1)}$) являється гарантуючою (максимінною) для першого гравця, а його найбільша гарантія (максимін) має вигляд

$$J_1[U_1^g, t_0, x^0] = J_1(U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0) = S_1[t_0, x^0]. \tag{15.10}$$

Аналогічно, за допомогою функції

$$V_2(S_2, x, u_1, u_2, t) = \frac{\partial S_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial S_2}{\partial x} \right)' (A(t)x + u_1 + u_2) + u_1'(t) D_{2,1} u_1(t) - u_2'(t) D_{2,2} u_2(t), \tag{5.11}$$

доводиться

Теорема 15.2. Нехай існують неперервно диференційована функція $S_2[t, x]$ та вектор - функції

$$u_i^{(s,2)}(t, x) = Q_i^{(s,2)}(t) x, \quad Q_i^{(s,2)}(t) \in C_{m_i \times m}[t_0, T], \quad i = \overline{1, 2}$$

такі, що

$$\begin{aligned}
1) \quad &\text{при любых } x \in R^n \\
&S_2[T, x] = x'(T) C_2 x(T);
\end{aligned} \tag{15.8}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad &\text{для всіх } (t, x) \in [t_0, T] \times R^n \\
&V_2(S_2[t, x], x, u_1^{(s,2)}(t, x), u_2^{(s,2)}(t, x), t) = 0, \\
&V_2(S_2[t, x], x, u_1^{(s,1)}(t, x), u_2, t) \leq 0 \quad \forall u_2 \in R^n, \\
&V_2(S_2[t, x], x, u_1, u_2^{(s,1)}(t, x), t) \geq 0 \quad \forall u_1 \in R^n.
\end{aligned} \tag{15.9}$$

Тоді, при будь-якій початковій позиції (t_0, x^0) стратегія $U_2^{(s,2)}$ ($u_2^{(s,2)}$) являється гарантуючою (максимінною) для другого гравця, а його найбільша гарантія (максимін) має вигляд

$$J_2[U_2^g, t_0, x^0] = J_2(U_1^{(s,2)}, U_2^{(s,2)}, t_0, x^0) = S_2[t_0, x^0]. \tag{15.10}$$

Явний вигляд найбільших гарантій у вихідній грі.

Теорема 15.3. Нехай матриці C_i із (15.4) – додатньо визначені. Якщо при всіх $t \in [t_0, T]$ матриці

$M_i(t) = C_i^{-1} + (-1)^i \int_t^T W(T, \tau) (D_{i,1}^{-1} - D_{i,2}^{-1}) W(T, \tau)' d\tau, i = \overline{1,2},$
де $W(t, \tau)$ – матриця Коші системи $\dot{X} = A(t)X, X(0) = E_n: W(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$

невироджені, то при довільній початковій позиції (t_0, x^0) найбільша гарантія (максимін) для i -го гравця

$$J_i[U_i^g, t_0, x^0] = (x^0)' W(T, t_0)' M_i^{-1}(t_0) W(T, t_0) x^0, i = \overline{1,2}.$$

Рівновага за Нешем.

Ситуація $(U^N)' = (U_1^N, \dots, U_m^N) \in U$ називається рівноважною за Нешем у грі (15.1), якщо

$$J_i(U^N || U_i, t_0, x^0) \leq J_i(U^N, t_0, x^0), \forall U_i \in U_i, i = \overline{1,m}. \quad (15.11)$$

Знайдемо достатні умови існування рівноваги за Нешем у грі (15.1) – (15.3) з функціями виграшів

$$J_i(U, t_0, x^0) = x'(T)C_i x'(T) + \int_{t_0}^T \left(\sum_{j \in K} u_j'[t] D_{i,j} u_j[t] + x'(t)G_i x(t) \right) dt, i = \overline{1,2}, \quad (15.12)$$

де $C_i, D_{i,j}, G_i$ – постійні симетричні квадратні матриці відповідних розмірностей.

Теорема 15.4. Нехай існують єдині неперервно диференційовані функції $S_i[t, x]$ та вектор-функції $u_i^N(t, x) = Q_i^N(t) x, Q_i^N(t) \in C_{n \times n}[0, T], i = \overline{1,2}$, такі, що

1) при любых $x \in R^n$

$$S_i[T, x] = x' C_i x; \quad (15.13)$$

2) для всіх $(t, x) \in [0, T] \times R^n$

$$V_i(S_i[t, x], x, u_1^N(t, x), u_2^N(t, x), t) = 0,$$

$$V_1(S_1[t, x], x, u_1, u_2^N(t, x), t) \leq 0, \quad \forall u_1 \in R^n,$$

$$V_2(S_2[t, x], x, u_1^N(t, x), u_2, t) \leq 0, \quad \forall u_2 \in R^n. \quad (15.14)$$

Тоді, при будь-якій початковій позиції $(t_0, T) \in [0, T] \times R^n$, ситуація U^N являється рівноважною за Нешем у диференціальній грі (15.1) – (15.3), (15.12) а виграші гравців мають вигляд

$$J_i(U_1^N, U_2^N, t_0, x^0) = S_i[t_0, x^0], i = \overline{1,2}.$$

Теорема 15.5. Для існування рівноважної за Нешем ситуації U^N у диференціальній грі (15.1) – (15.3), (15.12) при $G_i = 0, i = \overline{1,2}$, необхідно і достатньо, щоб матриці $Q_i^N(t), i = \overline{1,2}$ задовольняли системі матричних рівнянь Бернуллі

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1^N + \theta_1^N(A(t) - D_{2,2}^{-1}\theta_2^N) + (A'(t) - \theta_2^N D_{2,2}^{-1})\theta_1^N - \\ - \theta_1^N D_{1,1}^{-1}\theta_1^N + \theta_2^N D_{2,2}^{-1}D_{1,2}D_{2,2}^{-1}\theta_2^N = 0, \\ \dot{\theta}_2^N + \theta_2^N(A(t) - D_{1,1}^{-1}\theta_1^N) + (A'(t) - \theta_1^N D_{1,1}^{-1})\theta_2^N - \\ - \theta_2^N D_{2,2}^{-1}\theta_2^N + \theta_1^N D_{1,1}^{-1}D_{2,1}D_{1,1}^{-1}\theta_1^N = 0, \end{aligned} \quad (15.15)$$

з граничними умовами

$$\theta_i^N(T) = C_i. \quad (15.16)$$

При цьому стратегії гравців мають вигляд

$$u_i^N = -D_{i,i}^{-1}\theta_i^N(t)x, \quad (15.17)$$

а їх виграші задаються формулами

$$J_i(U^N, t_0, x^0) = x_0' \theta_i^N(t_0) x_0.$$

Рівновага за Берже.

Ситуація $(U^B)' = (U_1^B, \dots, U_m^B) \in U$ називається рівноважною за Бержу у грі (15.1) – (15.3), (15.12), якщо

$$J_i(U || U_i^B, t_0, x^0) \leq J_i(U^B, t_0, x^0), \forall U_j \in U_j, i, j = \overline{1, m}, j \neq i; \quad (15.18)$$

$$\max_{U_i \in U_i} \min_{U/U_i} J_i(U, t_0, x^0) \leq J_i(U^B, t_0, x^0), i = \overline{1, m}. \quad (15.19)$$

Зауважимо, що як і у випадку статичних ігор, вимога (15.19) не являється обов'язковою.

Як і у випадку рівноваги за Нешем покладемо $m = 2$. Знайдемо достатні умови існування рівноваги за Бержу у цій грі).

Теорема 15.6. Нехай $D_{i,j} < 0, i, j = \overline{1,2}, i \neq j$ та існують єдині неперервно диференційовані функції $S_i[t, x]$ та матриці $Q_i^B(t) \in C_{n \times n}[0, T], i = \overline{1,2}$, такі, що

1) при любых $x \in R^n$

$$S_i[T, x] = x' C_i x; \quad (15.20)$$

2) для всіх $(t, x) \in [0, T) \times R^n$

$$V_i(S_i[t, x], x, u_1^B(t, x), u_2^B(t, x), t) = 0,$$

$$V_1(S_1[t, x], x, u_1^B(t, x), u_2, t) \leq 0, \quad \forall u_2 \in R^n,$$

$$V_2(S_2[t, x], x, u_1(t, x), u_2^B(x, t), t) \leq 0, \quad \forall u_1 \in R^n. \quad (15.21)$$

Тоді, при будь-якій початковій позиції $(t_0, T) \in [0, T) \times R^n$, ситуація U^B являється рівноважною за Бержу (умова (15.18)) у диференціальній грі (15.1) – (15.3), (15.12), а виграші гравців мають вигляд

$$J_i(U_1^B, U_2^B, t_0, x^0) = S_i[t_0, x^0], \quad i = \overline{1, 2}.$$

Теорема 15.7. Нехай у диференціальній грі (15.1) – (15.3), (15.12) постійні матриці

$$D_{i,i} = D_0 > 0, D_{i,j} = -D_1 < 0,$$

$$C_i = C < 0, \quad i, j = \overline{1, 2}, \quad i \neq j.$$

Тоді в цій грі при будь-якій початковій позиції $(t_0, x_0) \in [0, T) \times R^n, x_0 \neq 0$ не існує рівноважної за Нешем ситуації, а ситуація рівноваги за Бержу існує і має вигляд $(U_1^B, U_2^B) = (D_1^{-1}\theta(t), D_1^{-1}\theta(t))$, де

$$\begin{aligned} \theta(t) = W'(T, t) [C^{-1} - \int_t^T W(T, \tau) (4D_1^{-1} + \\ + D_1^{-1}D_0D_1^{-1})W'(T, \tau) d\tau]^{-1} W(T, t) \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 1. Динаміка гри задається системою

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1^1(t) + u_2^1(t), \\ \dot{x}_2 &= u_1^2(t) + u_2^2(t), \\ x_1(0) &= x_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = x_1^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt.$$

Знайти гарантовані стратегії гравців.

Розв'язок. В нашому випадку будемо мати

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i, j = \overline{1, 2}.$$

Тоді

$$u_1 = \frac{1}{2} D_{1,1}^{-1} \frac{\partial S_1}{\partial x}, \quad u_2 = -\frac{1}{2} D_{1,2}^{-1} \frac{\partial S_1}{\partial x},$$

де $u'_1 = (u_1^1, u_1^2)$, $u'_2 = (u_2^1, u_2^2)$, а функція S_1 задовольняє задачі

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)' A(t) x - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)' (-D_{1,1}^{-1} + D_{1,2}^{-1}) \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0,$$

$$S_1[T, x] = x'(T) C_1 x(T). \quad (15.22)$$

Шукаємо розв'язок задачі (15.22) у вигляді

$$S_1[t, x] = x' \theta_1(t) x, \quad (15.23)$$

Тоді матриця $\theta_1(t)$ задовольняє задачі

$$\dot{\theta}_1 + \theta_1(t) A(t) + A'(t) \theta_1(t) - \theta_1(t) (D_{1,2}^{-1} - D_{1,1}^{-1}) \theta_1(t) = 0, \quad \theta_1(T) = C_1, \quad (15.24)$$

а стратегії для сідлової точки в антагоністичній грі для першого гравця набудуть вигляду

$$u_1 = D_{1,1}^{-1} \theta_1(t) x, \quad u_2 = -D_{1,2}^{-1} \theta_1(t) x.$$

При цьому його гарантований виграш має вигляд

$$J_1^g = (x^0)' \theta_1(0) x^0.$$

Для нашого випадку будемо мати

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$u_1^1 = x_1, \quad u_1^2 = 0, \quad J_1^g = 1.$$

Розглянемо антагоністичну гру для другого гравця. Тоді стратегії сідлових точок будуть мати вигляд

$$u_2 = \frac{1}{2} D_{2,2}^{-1} \frac{\partial S_2}{\partial x}, \quad u_1 = -\frac{1}{2} D_{2,1}^{-1} \frac{\partial S_2}{\partial x},$$

де $u'_1 = (u_1^1, u_1^2)$, $u'_2 = (u_2^1, u_2^2)$, а функція S_2 задовольняє задачі

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial S_2}{\partial x}\right)' A(t) x - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S_2}{\partial x}\right)' (-D_{2,2}^{-1} + D_{2,1}^{-1}) \frac{\partial S_2}{\partial x} = 0,$$

$$S_2[T, x] = x'(T) C_2 x(T). \quad (15.25)$$

Шукаємо розв'язок задачі (15.25) у вигляді

$$S_2[t, x] = x' \theta_2(t) x, \quad (15.26)$$

Тоді матриця $\theta_2(t)$ задовольняє задачі

$$\dot{\theta}_2 + \theta_2(t) A(t) + A'(t) \theta_2(t) - \theta_2(t) (D_{2,1}^{-1} - D_{2,2}^{-1}) \theta_2(t) = 0, \quad \theta_2(T) = C_2, \quad (15.27)$$

а стратегії для сідлової точки в антагоністичній грі для першого гравця набудуть вигляду

$$u_2 = D_{2,2}^{-1} \theta_2(t) x, \quad u_2 = -D_{2,1}^{-1} \theta_2(t) x.$$

При цьому його гарантований виграш має вигляд

$$J_2^g = (x^0)' \theta_2(0) x^0.$$

Для нашого випадку будемо мати

$$\theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$u_2^2 = x_2, \quad u_2^1 = 0, \quad J_2^g = 1.$$

Таким чином, гарантована ситуація у вихідній грі задається парою стратегій

$$u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

з вектором гарантованих виграшів (1,1) •

Задача 2. Для задачі 1 знайти рівновагу за Нешем.

Розв'язок. Тоді, згідно теореми 15.5, будемо мати

$$u_i^N = \theta_i^N(t)x, \quad i = \overline{1,2},$$

$$\dot{\theta}_1^N + 2 \theta_1^N \theta_2^N + \theta_1^N \theta_1^N + \theta_2^N \theta_2^N = 0,$$

$$\dot{\theta}_2^N + 2 \theta_1^N \theta_2^N + \theta_1^N \theta_1^N + \theta_2^N \theta_2^N = 0, \quad (15.28)$$

$$\theta_i^N(T) = C_i.$$

Очевидно, що $\theta_2^N = \theta_1^N + C$, де

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця θ_1^N буде задовольняти такому рівнянню Рікатті

$$\dot{\theta}_1^N + 4 \theta_1^N \theta_1^N + 4 \theta_1^N C + C C = 0,$$

$$\theta_1^N(T) = C_1.$$

Заміною $\theta_1^N = \Phi + h$ зводимо його до рівняння Бернуллі відносно матриці Φ

$$\dot{\Phi} + 4 \Phi^2 + 8 \Phi h + 4 C \Phi = 0, \quad \Phi(T) = C_1 - h,$$

де матриця h задовольняє рівнянню

$$4 h^2 + 4 C h + C^2 = 0 \bullet$$

Домашнє завдання 15.

Задача 15.1. Знайти гарантовану рівноважну ситуацію та значення виграшів у наступній диференціальній грі двох осіб:

1.1. Динаміка системи описується рівняннями

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$$

функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = x_1^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt.$$

1.2. Динаміка системи описується рівняннями

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$$

функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = x_1^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt.$$

Задача 15.2. Виписати співвідношення, які реалізують рівноважну за Нешем ситуацію у наступній диференціальній грі двох осіб:

2.1. Динаміка системи описується рівняннями

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$$

функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = x_1^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt.$$

2.2. Динаміка системи описується рівняннями

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$$

функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = x_1^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt.$$

Задача 15.3. Знайти рівноважну за Бержу ситуацію та значення виграшів у наступній диференціальній грі двох осіб:

3.1. Динаміка системи описується рівняннями

$$\dot{x}_1(t) = u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$$

функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = -x_1^2(1) - x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = -x_1^2(1) - x_2^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt.$$

3.2. Динаміка системи описується рівняннями

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$$

функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = -x_1^2(1) - x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = -x_1^2(1) - x_2^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt.$$

Література

- [1] Капустян В. О. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 Економіка / В. О. Капустян, Г. А. Мажара ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря, 2023. 120 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62311>
- [2] Капустян В.О., Мажара Г.А., Фартушний І.Д. Моделювання економіки: підручник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 051 Економіка. Київ: КПІ, 2022. 207 с.
- [3] Капустян В.О., Жуковська О.А. Економетрика: підручник для здобувачів ступеня бакалаврів спеціальності "Маркетинг". Київ : Освіта України, 2021. 220 с.
- [4] Волошин О. Ф., Мащенко С. О. Моделі та методи прийняття рішень. Навчальний посібник. К.: ВПЦ "Київський університет", 2010. 336 с.
- [5] Григорків В. С. Оптимальне керування в економіці. Чернівці: ЧНУ, 2011. 200с.
- [6] Капустян О.В., Сукретна А.В. Методи нелінійного аналізу в математичній економіці. Київ: КНУ, 2011. 213 с.
- [7] Мащенко С. О. Збірник задач з теорії ігор. К.: НУБіП України, 2014. 105 с.
- [8] Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М. Сучасний економічний аналіз: У 2 ч. Ч. 1. Мікроекономіка: Навч. посіб. К.: Вища школа, 2004. 262 с.
- [9] Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М. Сучасний економічний аналіз: У 2 ч. Ч. 2. Макроекономіка: Навч. посіб. К.: Вища школа, 2004. 207 с.
- [10] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах. Навч. посібник. К.: Либідь, 2003. 504 с.