Візуалізація групової гри переслідування на площині

Барановська Л.В.[1][0000-0003-0024-8180], Гирявець Д.М.[2][0000-0003-1310-0943], Барановська Г.Г. [3][0000-0002-6878-6973]

[1, 2, 3] КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
lesia@baranovsky.org

Анотація. У даній роботі розглянуто диференціальні ігри групового переслідування. Наведено схему методу розв'язуючих функцій А.О. Чикрія. Знайдено достатні умови для закінчення гри і одержано рівняння для чисельного знаходження розв'язуючих функцій. Сформульовано достатні умови для закінчення гри для процесу з простими матрицями. Для задачі простого переслідування реалізовано візуалізацію траєкторії рухів переслідувачів і втікача на площині. Для цього був створений програмний продукт на мові програмування Python. Даний програмний продукт є прототипом системи моделювання «переслідувачі-втікач», яку можна буде застосовувати для вибору керування в задачах переслідування. У розробці було розглянуто два випадки вибору керування втікача. В першому, керування втікача будується за наступним алгоритмом: втікач визначає найближчого переслідувача в плані евклідової норми; втікач будує своє керування на промені, який виходить з положення найближчого переслідувача та перетинає положення втікача, у напрямку протилежному переслідувачу з максимальною швидкістю. В другому випадку, керування втікача задає користувач.

Ключові слова: конфліктно-керовані процеси, диференціальні ігри, ігри переслідування, групова задача переслідування.

1 Схема методу

У теорії динамічних ігор (конфліктно-керованих процесів, диференціальних ігор) розроблено ряд методів, які забезпечують гарантований результат. До таких методів належать, зокрема, перший прямий метод Л.С. Понтрягіна, метод екстремального прицілювання М.М. Красовського і метод розв'язуючих функцій А.О. Чикрія [1]. У даній роботі застосований буде саме останній метод, який дає теоретичне обґрунтування класичного правила паралельного переслідування і методу зближення за променем. Схема методу для диференціально-різницевих ігор розроблено в роботах [2, 3, 4]. У роботах [5–8] розглянуто задачу зближення для групи переслідувачів та одного втікача. Схему методу розв'язуючих функцій для диференціально-різницевих систем нейтрального типу розроблено у роботі [9]. Для об'єктів з різною інерційністю у роботі [10] запропоновано модифікацію методу. Ігрові проблеми зближення при відмові керуючих пристроїв розглянуто у роботах [11, 12].

Розглянемо рух керованого об'єкта, який описується системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{z}_l = A_l z_l + \varphi_l(u_l, v),\ z_l \in R^{n_l},\ l = \overline{1,\vartheta},\ u_l \in U_l,\ v \in V \qquad (1)$$

де A_l – квадратна матриця порядку $n_l, n_1 + \cdots n_\vartheta = n$, U_l та V – непорожні компакти з деяких скінченновимірних просторів, вектор-функція $\varphi_l(u_l, v): U_l \times V \to R^{n_l}$ неперервна за сукупністю змінних. Нехай $z(0) = z^\circ$– початковий стан процесу (1). Термінальна множина є циліндричною і має вигляд

$$M^* = \cup_{l=1,\dots,\vartheta}\{M_l^\circ + M_l\} = \cup_{l=1,\dots,\vartheta} M_l^* \qquad (2)$$

де M_l° - лінійний підпростір з R^{n_l}, M_l – випуклий компакт з ортогонального доповнення L_l до $M_l^\cdot$ в просторі R^{n_l}.

Гра (1), (2) вважається закінченою, якщо для деякого $l = \overline{1,\vartheta}$ виконується умова $z_l \in M_l^\cdot$. Переслідувачі використовуть квазістратегії, а втікач - програмне керування. Нехай π_l – оператор ортогонального проектування з R^{n_l} на L_l. Розглянемо багатозначні відображення $W_l(t, v) = \pi_l e^{A_l t}\varphi_l(U_l, v)$, $W_l(t) = \cap_{v\in V} W_l(t, v)\,, t \geq 0, v \in V$.

Умова Понтрягіна. Відображення $W_l(t) \neq \emptyset$ для всіх $l = \overline{1,\vartheta}, t \geq 0$.

Виберемо борелівський селектор $\gamma_l(t)$ відображення $W_l(t)$. Зафіксуємо його та покладемо $\xi_l\big(t, z_l, \gamma_l(\cdot)\big) = \ \pi_l e^{A_l t} z_l + \int_0^t \gamma_l(\tau) d\tau$.Кожному переслідувачу поставимо у відповідність розв'язуючу функцію

$$\alpha_l\big(t, \tau, z_l, v, \gamma_l(\cdot)\big) =$$
$$= \sup\{\alpha_l \geq 0: [W_l(t-\tau, v) - \gamma_l(t-\tau)] \cap \alpha_l\Big(M_l - \xi_l\big(t, z_l, \gamma_l(\cdot)\big)\Big) \neq \emptyset\} \qquad (3)$$

Якщо $\xi_l\big(t, z, \gamma_l(\cdot)\big) \in M_l$, то покладемо $\alpha_l\big(t, \tau, z, v, \gamma_l(\cdot)\big) = +\infty, 0 \leq \tau \leq t, v \in V$. В інших випадках $\alpha_l\big(t, \tau, z, v, \gamma_l(\cdot)\big)$ обмежена при будь-яких $\tau \in [0, t]$, $v \in V$. Візьмемо $\gamma(\cdot) = column(\gamma_1(\cdot), \dots, \gamma_\vartheta(\cdot)$ і нехай$\Gamma_\vartheta = \{\gamma(\cdot): \gamma_l(t) \in W_l(t), t \geq 0, l = \overline{1,\vartheta}\}$,$T_\vartheta\big(z, \gamma(\cdot)\big) = \min\{t \geq 0: \inf\limits_{v(\cdot)\in\Omega_V} \max\limits_{l=1,\dots,\vartheta} \int_0^t \alpha_l\big(t, \tau, z_l, v(\tau), \gamma_l(\cdot)\big)\, d\tau \geq 1\}$.

Теорема 1 [1]. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), виконується умова Понтрягіна, z°- початковий стан процесу (1), і для деякого борелівський селектор $\gamma^\circ(t) \in \Gamma_\vartheta$ виконується нерівність $T_\vartheta(z^\circ, \gamma^\circ(\cdot)) < +\infty$. Тоді траєкторія процесу (1) хоча б одного l може бути приведена на термінальну множину M_l^* з початкового стану z° в момент $T_\vartheta\Big(z^\circ, \gamma^\circ(\cdot)\Big)$.

2 Приклад задачі для процесу з простими матрицями

Розглянемо задачу групового переслідування з ϑ переслідувачами та одним втікачем:

$$\dot{z}_l = a_l z_l + u_l - v, \qquad a_l < 0, z_l \in R^k, \| u_l \| \leq 1, \| v \| \leq 1, l = \overline{1,\vartheta} \quad (4)$$

Гра вважається закінченою, якщо для деякого l $x_l = y$. Термінальна множина $M^* = \cup_{l=1,\dots,\vartheta}\{\mathring{M}_l\} = \cup_{l=1,\dots,\vartheta}\{z_l: z_l = 0\}$. $W_l(t) = \{0\}, l = \overline{1,\vartheta},$ отже селектори $\gamma_l(t) = 0$ функції $\xi_l(t, z_l, \gamma_l(\cdot)) = e^{a_l t} z_l, l = \overline{1,\vartheta},$ розв'язуючі функції переслідувачів $z_l \neq 0$ $\alpha_l(t, \tau, z_l, v, 0) = \max\{\alpha_l \geq 0: -\alpha_l e^{a_l t} z_l \in e^{a_l(t-\tau)}(S - v)\} = e^{-a_l \tau}\alpha_l(z_l, v)$, де $\alpha_l(z_l, v)$ має вигляд

$$\alpha_l(z_l, v) = \frac{(z_l, v) + ((z_l, v)^2 + \|z_l\|^2(1 - \|v\|^2))^{1/2}}{\| z_l \|^2}, l = \overline{1,\vartheta}. \quad (5)$$

Час завершення групового переслідування $T_\vartheta(z) = \min\left\{t \geq 0: \inf\limits_{v(\cdot)\in\Omega_V} \max\limits_{l=1,\dots,\vartheta} \int_0^t e^{-a_l\tau}\alpha_l(z_l, v(\tau))\, d\tau = 1\right\}$. Позначимо $\delta(z) = \min\limits_{\|v\|\leq 1} \max\limits_{l=1,\dots,\vartheta} \alpha_l(z_l, v)$, отримали обмеження зверху

$$T_\vartheta(z) \leq \frac{1}{a_*} \ln\left(1 + \frac{a_*\vartheta}{\delta(z)}\right), \quad (6)$$

де $a_* = -\max\limits_{l=1,\dots,\vartheta} a_l$ [1].

Теорема 2 [1]. Нехай z° - початковий стан (4). Тоді, якщо $0 \in int\, co\{z_l^\circ\}$, то задача групового переслідуваня вирішувана в момент $T_\vartheta(z^\circ)$, для якого справедлива оцінка (6). При цьому, якщо $t_* = t_*(v(\cdot))$ – момент переключення $t_* \leq T_\vartheta(z^\circ)$, який є нулем контрольної функції $1 - \max\limits_{l=1,\dots,\vartheta} \int_0^t e^{-a_l\tau}\alpha_l(z_l, v(\tau))\, d\tau$, то керування переслідувачів, які реалізують час $T_\vartheta(z^\circ)$, на інтервалі $[0, t_*]$ має вигляд $u_l(\tau) = v(\tau) - \alpha_l(z_l^\circ, v(\tau))z_l^\circ, l = \overline{1,\vartheta}$,а на інтервалі $(t_*, T_\vartheta(z^\circ)]$ – $u_l(\tau) = v(\tau)$ для індексів l, які задовільняють рівності $\int_0^t e^{-a_l\tau}\alpha_l(z_l^\circ, v(\tau))\, d\tau = \max\limits_{l=1,\dots,\vartheta} \int_0^t e^{-a_l\tau}\alpha_l(z_l^\circ, v(\tau))\, d\tau$, для інших індексів керування довільні на інтервалі $(t_*, T_\vartheta(z^\circ)]$. Якщо $0 \notin int\, co\{z_l^\circ\}$, то вирішувана задача втечі, яка реалізується на будь-якому постійному керуванні втікача, на якому досягається мінімум функції $\max\limits_{l=1,\dots,\vartheta} \alpha_l(z^\circ, v)$.

3 Візуалізація простого переслідування на площині

Нехай є ϑ переслідувачів та один втікач. Вважаємо, що положення учасників є геометричні точки, тобто не враховуємо їх розміри. Закони рухів переслідувачів мають вигляд $\dot{x}_l = u_l, \quad x_l \in R^k, k \geq 1, ||\, u_l|| \leq a_l, l = \overline{1, \vartheta}.$ Закон руху втікача $\dot{y} = v, \; y \in R^k, ||\, v|| \leq b$. Нехай $a_l \geq b, l = \overline{1, \vartheta}$ та існує певна дискретизація часу.

Для представлення траєкторій рухів переслідувачів та втікача у грі для випадку площини, був створений програмний продукт на мові програмування Python. Для програми вхідними даними є наступні відомості: кількість переслідувачів; початкові координати всіх учасників; максимальні значення швидкості для всіх учасників. Для того, щоб алгоритм працював потрібен вибір керування втікача. У розробці було розглянуто два випадки вибору керування втікача. В першому, керування втікача будується за наступним алгоритмом: 1) втікач визначає найближчого переслідувача в плані евклідової норми; 2) втікач будує своє керування на промені, який виходить з положення найближчого переслідувача та перетинає положення втікача, у напрямку протилежному переслідувачу з максимальною швидкістю. В другому випадку, керування втікача задає користувач.

Література

1. Chikrii, A.: Conflict-Controlled Processes. Springer Science &Business Media (2013).
2. Baranovska, L.V.: Quasi-Linear Differential-Deference Game of Approach. In: Sadovnichiy, V., Zgurovsky, V. (eds.) Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems, pp. 505–524. Springer, Cham (2019).
3. Baranovska, L.V.: On Quasilinear Differential-Difference Games of Approach. Journal of Automation and Information Sciences 49(8), 53–67 (2017).
4. Baranovska, Lesia V.: Pursuit differential-difference games with pure time-lag. Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B 24(3), 1024–1031 (2019).
5. Baranovskaya, G.G., Baranovskaya, L.V.: Group Pursuit in Quasilinear Differential-Difference Games. Journal of Automation and Information Sciences 29(1), 55–62 (1997).
6. Baranovskaya, L.V., Chikrij, A.A., Chikrij, Al.A.: Inverse Minkowski functionals in a nonstationary problem of group. Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya (1), 109–114 (1997).
7. Baranovskaya, L.V., Chikrij, A.A., Chikrij, Al.A.: Inverse Minkowski functionals in a nonstationary problem of group. Journal of Computer and Systems Sciences International 36(1), 101–106 (1997).
8. Барановская, Л.В., Барановская, Г.Г.: О дифференциально-разностной игре группового преследования. Доповіді Національної академії наук України (3), 12–15 (1997).
9. Baranovskaya, L.V.: A method of resolving functions for one class of pursuit problems. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, vol.2, 4(74), 4–8 (2015).
10. Baranovska, L.V.: Method of resolving functions for the differential-difference pursuit game for different-inertia objects. In: Sadovnichiy, V., Zgurovsky, V. (eds.) Advances in Dynamical Systems and Control, vol.69, pp. 159–176 (2016).
11. Chikrij, A.A., Baranovskaya, L.V., Chikrij, Al.A.: The game problem of approach under the condition of failure of controlling devices. Problemy Upravleniya i Informatiki (Avtomatika) (4), 5–13 (1997).
12. Baranovskaya, L.V., Chikrii, Al.A.: Game Problems for a Class of Hereditaly Systems. Journal of Automation and Information Sciences 29(2-3), pp. 87–97 (1997).