

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИКИ

Конспект лекцій

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в
приладобудуванні»
спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка

Укладачі: Ю. В. Куц, Ю. Ю. Лисенко, В. М. Сокурєнко

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

УДК 517.445/519.2
С71

Укладачі: *Куц Юрій Васильович*, д-р техн. наук, проф.
Лисенко Юлія Юріївна, канд. техн. наук, доц.
Сокурєнко Вячеслав Михайлович, канд. техн. наук, доц.

Рецензент *Єременко, В.С.*, д-р техн. наук, проф,
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний
редактор *Богдан, Г.А.*, канд. техн. наук

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря
Сікорського (протокол № 2 від 08.11.2024 р.)
за поданням вченої ради приладобудівного факультету
(протокол № 8/24 від 30.09.2024 р.)*

С71 **Спеціальні розділи математики** [Електронний ресурс] : конспект лекцій :
навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Комп'ютерно-
інтегровані системи та технології в приладобудуванні» спец. 174 Автоматизація,
комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка / КПІ ім. Ігоря Сікорського ;
уклад.: Ю. В. Куц, Ю. Ю. Лисенко, В. М. Сокурєнко. – Електрон. текст. дані
(1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 196 с.

Навчальний посібник написано на основі однойменного курсу, який викладається студентам приладобудівного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського. Навчальний посібник складається з чотирьох розділів і містить лекції з загальних питань перетворення Лапласа, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів. Призначений для вивчення студентами, які в подальшому займатимуться розробленням комп'ютерно-інтегрованих систем та технологій у галузі приладобудування.

УДК 517.445/519.2

Реєстр. № НП 24/25-070. Обсяг 8,9 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	7
ВСТУП.....	9
РОЗДІЛ 1. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ	10
Лекція 1. Перетворення Лапласа	10
1.1. Стисла історична довідка.....	10
1.2. Загальні відомості про метод інтегральних перетворень	11
1.3. Комплексні числа та функції	12
1.4. Оригінал та зображення	15
1.5. Відшукування зображень деяких функцій	16
Лекція 2. Основні властивості перетворення Лапласа	17
2.1. Теореми додавання, подібності, запізнювання, випередження, зміщення	18
2.2. Теореми про диференціювання оригіналу та зображення.....	22
2.3. Теореми про інтегрування оригіналу та інтегрування зображення.....	24
2.4. Згортка функцій та її властивості.....	26
2.5. Множення зображень	27
Лекція 3. Визначення оригіналів за їх зображеннями	29
3.1. Теорема обернення	29
3.2. Перша та друга теореми розкладання.....	30
3.3. Операторний метод розв'язання звичайних диференціальних рівнянь	34
Лекція 4. Застосування операційного числення.....	35
4.1. Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.....	35
4.2. Розв'язання систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.....	38
4.3. Розв'язання задач електротехніки та теорії керування	41
Питання для самоконтролю до розділу 1.....	44
РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ	46
Лекція 5. Основні поняття та визначення теорії ймовірностей.....	46
5.1. Загальні поняття та визначення.....	46
5.2. Випадкові події	48
5.3. Дії з множинами та їх позначення.....	49

5.4. Елементи комбінаторики	52
5.5. «Геометричні» ймовірності	53
Лекція 6. Ймовірнісний простір. Теореми додавання і множення ймовірностей подій.....	55
6.1. Ймовірнісна модель стохастичних експериментів	55
6.2. Аксиоми сучасної теорії ймовірностей (аксиоми Колмогорова)	56
6.3. Умовна ймовірність	57
6.4. Теореми множення ймовірностей	58
6.5. Теореми додавання ймовірностей	59
6.6. Формула повної ймовірності	61
6.7. Поняття гіпотез. Формула Байєса	62
Лекція 7. Випадкова величина (ВВ). Теореми про дисперсію та математичне сподівання дискретних ВВ	63
7.1. Поняття ВВ.....	63
7.2. Числові характеристики дискретних ВВ	64
7.3. Дисперсія числа появ подій в незалежних випробуваннях	66
7.4. Однаково розподілені взаємно незалежні випадкові величини	67
7.5. Поняття про моменти розподілу ВВ вищих порядків.....	69
Лекція 8. Повторювання випробувань. Закони великих чисел	70
8.1. Схема Бернуллі. Розподіл Бернуллі	70
8.2. Локальна теорема Лапласа.....	71
8.3. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа	71
8.4. Розподіл Пуассона	72
8.5. Закони великих чисел.....	73
Лекція 9. Неперервні ВВ.....	77
9.1. Функція розподілу ймовірностей ВВ.....	77
9.2. Щільність розподілу ймовірностей.....	78
9.3. Приклади розподілів неперервних ВВ.....	80
9.4. Характеристики неперервних ВВ.....	86
Лекція 10. Функціональні перетворення ВВ	89
10.1. Функція одного випадкового аргументу та її розподіл.....	89
10.2. Математичне сподівання функції одного випадкового аргументу	91
Лекція 11. Система двох ВВ.....	97
11.1. Загальне поняття про систему декількох ВВ	97

11.2. Закон розподілу ймовірностей дискретної двовимірної ВВ.....	97
11.3. Інтегральна функція двовимірної ВВ та її властивості.....	98
11.4. Диференціальна функція неперервної двовимірної ВВ та її властивості	99
11.5. Числові характеристики системи двох ВВ: кореляційний момент та коефіцієнт кореляції.....	100
11.6. Умовні закони розподілу складових системи ВВ.....	101
11.7. Умовні числові характеристики	104
Питання для самоконтролю до розділу 2.....	106
РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ	109
Лекція 12. Основи статистичного опрацювання експериментальних даних	109
12.1. Основні терміни та визначення	110
12.2. Точкові оцінки характеристик ряду спостережень	115
Лекція 13. Методи визначення точкових та інтервальних оцінок ряду спостережень.....	119
13.1. Метод максимальної правдоподібності.....	119
13.2. Метод моментів.....	121
13.3. Метод квантилів.....	122
13.4. Інтервальні оцінки характеристик ряду спостережень	123
13.5. Порядкові статистики ряду спостережень	124
Лекція 14. Методи оцінювання параметрів закону розподілу даних	126
14.1. Оцінювання параметрів за відомим законом розподілу ймовірностей.....	126
14.2. Оцінювання центру розподілу за невідомого закону розподілу ймовірностей.....	133
Лекція 15. Методи визначення закону розподілу даних	133
15.1. Загальні поняття про статистичні гіпотези та їх перевірку	134
15.2 Попереднє оцінювання закону розподілу даних за діаграмою $\beta_1 \beta_2$	136
15.3. Методи оцінювання закону розподілу з групуванням даних	138
Лекція 16. Кореляційний аналіз.....	143
16.1. Загальні відомості про поняття кореляції	143
16.2. Коефіцієнт парної кореляції Пірсона.....	147
16.3. Кореляційний аналіз, що ґрунтується на порядкових статистиках. Рангова кореляція.....	149
Лекція 17. Регресійний аналіз	153
17.1. Лінійна регресія	153
17.2. Нелінійна регресія	160

Питання для самоконтролю до розділу 3.....	164
РОЗДІЛ 4. ВИБРАНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	166
Лекція 18. Основні положення теорії випадкових процесів.....	166
18.1. Поняття випадкового процесу	167
18.2. Реалізації випадкового процесу.....	168
18.3. Неперервний і дискретний параметр часу.....	169
18.4. Кореляційна теорія та її застосування в технічних системах.....	169
18.6. Енергетичний спектр випадкового процесу.....	173
18.7. Ергодічні випадкові процеси	173
Питання для самоконтролю до розділу 4.....	174
ДОДАТКИ.....	176
Додаток А. Формули перетворення Лапласа.....	176
Додаток Б. Властивості перетворення Лапласа	177
Додаток В. Значення функції стандартного закону розподілу Гаусса	178
Додаток Г. Значення функції $\Phi(x)$ для інтегральної теореми Муавра-Лапласа.....	180
Додаток Д. Значення квантилів розподілу Стюдента $t_p(v)$ з v ступенями свободи.....	182
Додаток Е. Значення квантилів розподілу χ^2 Пірсона для v ступенів свободи та рівня імовірності P	183
Додаток Ж. Значення квантилів стандартного розподілу Гаусса	185
Додаток З. Критичні точки розподілу Фішера (f -розподілу).....	186
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	189

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ВВ	випадкова величина
МНК	метод найменших квадратів
СКВ	середньоквадратичне відхилення
C	константа
D	дисперсія
$D(x)$	оператор дисперсії
F	статистика Фішера
$F_{\alpha}(v_1, v_2)$	граничне значення з таблиці розподілу Фішера
$F(x)$	інтегральна функція розподілу випадкової величини
H	гіпотеза
H_0	основна (нульова) гіпотеза
H_1	альтернативна (конкуруюча) гіпотеза
$K(p)$	передавальна функція
M	математичне сподівання
$M(x)$	оператор математичного сподівання
Me	вибіркова медіана, оцінка медіани
$Med(x)$	оператор медіани
n	обсяг вибірки
P	ймовірність
$P(A)$	ймовірність події A
$p(x)$	функція щільності розподілу ймовірності випадкової величини
$t_p(v)$	квантиль розподілу Стюдента для довірчої ймовірності P і кількості степенів свободи v
r	коефіцієнт кореляції Пірсона
r_s	коефіцієнт кореляції Спірмена
r_k	коефіцієнт кореляції Кенделла
s	СКВ, СКВ випадкової складової похибки вимірювання
$\hat{s}$	оцінка СКВ

$\hat{s}^2$	вибіркова дисперсія, оцінка дисперсії
x, y	результат спостереження випадкової величини
$\bar{x}$	вибіркове середнє
$x_{[i]}$	i -та порядкова статистика, варіаційний ряд
$x_{i,k}$	k -й результат вимірювання i -ї вхідної величини
α	рівень значущості, помилка першого роду
β	помилка другого роду
$\Delta_y(x)$	довірчий інтервал випадкової похибки індивідуального значення y
$\Delta_{\bar{y}}(x)$	довірчий інтервал випадкової похибки середнього значення y
μ	математичне сподівання
$\hat{\mu}$	оцінка математичного сподівання
ν	кількість степенів свободи
ω_i	елементарна подія
Ω	множина, простір елементарних подій
ξ («ксі»)	випадкова величина (зазвичай, перша)
η («ета»)	випадкова величина (зазвичай, друга)
ζ («дзета»)	випадкова величина (зазвичай, третя)
$\theta = \theta(\xi_1, \dots, \xi_N)$	оцінка статистики критерію
χ^2_γ	γ -квантиль розподілу Пірсона з ν степенями свободи
$\wedge$	символ оцінки

ВСТУП

Конспект лекцій складений на основі силабусу дисципліни «Спеціальні розділи математики» для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», освітньої програми «Комп'ютерно-інтегровані системи та технології в приладобудуванні». Конспект лекцій містить чотири розділи та охоплює питання операційного числення, основ теорії ймовірностей та математичної статистики, базових відомостей про випадкові процеси.

Актуальність ґрунтовної математичної підготовки фахівців, які займаються розробленням та удосконаленням комп'ютерно-інтегрованих технологій в галузі приладобудування, постійно зростає. Науково-технічний прогрес постійно вимагає, по-перше, освоєння нових методів та алгоритмічно-програмних засобів вимірювань та контролю, засобів автоматизації виробничих процесів; по-друге, обґрунтування необхідної точності вимірювань на основі коректного застосування методів теорії ймовірностей та математичної статистики; по-третє, постійне удосконалення форм і методів оброблення та представлення результатів вимірювань, що знаходить відбиття в нових стандартах і нормативних документах, вимагає знання та досвіду практичного застосування методів та критеріїв математичної статистики; по-четверте, застосування різних методів вимірювань, контролю та діагностики постійно поширюється на нові сфери діяльності людини, в яких об'єкти досліджень мають яскраво виражену ймовірнісну природу. Це стосується, до прикладу, вимірювань та контролю в області нанотехнологій.

Мета навчального видання полягає в ознайомленні студентів з основними поняттями і теоретичними положеннями перетворення Лапласа, теорії ймовірностей та математичної статистики, базових понять теорії випадкових процесів, сприянні розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

У цьому розділі:



Лекція 1. Перетворення Лапласа.
Лекція 2. Основні властивості перетворення Лапласа.
Лекція 3. Визначення оригіналів за їх зображеннями.
Лекція 4. Застосунки операційного числення.

Лекція 1. Перетворення Лапласа

1.1. Стисла історична довідка

Операційне або символічне числення є ефективним методом дослідження теоретичних і прикладних задач у різних областях науки і техніки, зокрема, у фізиці, математиці, механіці, теорії автоматичного регулювання, електротехніці, радіотехніці та ін. Особливо значну роль відіграє операційне числення як ефективний інструмент розв'язання лінійних диференціальних рівнянь, обчислення інтегралів, розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки.

Методи операційного числення базуються на заміні операцій диференціювання та інтегрування заданої функції алгебраїчними операціями. У результаті цього багато математичних дій, виконання яких у диференціальному та інтегральному численні є достатньо складними, зводяться до простіших алгебраїчних дій.

Основи операційного числення були закладені ще у XVIII ст., але строге математичне обґрунтування з'явилося лише у перші роки минулого століття на основі теорії функції комплексної змінної. Значний внесок у розвиток цього розділу математики зробили видатні вчені Г. Лейбніц (1646-1716), Л. Ейлер (1707-1783), Ж. Лагранж (1736-1813), Ж. Фур'є (1768-1830), О. Коші (1789-1857),

П. Лаплас (1749-1827). Саме П. Лаплас запропонував інтегральне перетворення для обчислення зображень, яке носить його ім'я.

В Україні вперше теоретичні основи операційного числення були обґрунтовані у 1862 році в монографії «Символьне числення та його застосування до інтегрування лінійних диференціальних рівнянь» професора Київського університету М.Є. Ващенко-Захарченка.

Англійський інженер-електрик О. Хевісайд (1850-1925) ввів у символічне числення оператор $p = d/dt$ та розглянув правила його застосування у розрахунках. Крім того він запропонував одиничну функцію названу його ім'ям, використання якої дає змогу формально обмежити час існування функції напіввіссю $t \geq 0$ і задовольнити умову застосування перетворення Лапласа.

Строге математичне обґрунтування операційного числення було дано пізніше, у 20-х роках XX ст. Бромвичем і Карсоном, які пов'язали цей метод із методом інтегральних перетворень.

1.2. Загальні відомості про метод інтегральних перетворень

В цілому, *інтегральним перетворенням* функції $f(t)$ (*функції-оригіналу*), яка належить певному класу функцій, називається перетворення виду

$$F(p) = \int_a^b k(t, p) \cdot f(t) dt, \quad (1.1)$$

де $k(t, p)$ – *ядро перетворення*. Вид ядра перетворення визначає його властивості та залежності від характеру задач, на розв'язання яких воно орієнтовано. Ядро може бути як дійсним, так і комплекснозначним. До прикладу, якщо $k(t, p) = e^{-pt}$ маємо перетворення Лапласа, якщо $k(t, p) = 1/\pi t$ – перетворення Гільберта, а якщо $k(t, p) = e^{-i\omega t}$ – перетворення Фур'є.

Функцію $F(p)$ називають *зображенням* функції-оригіналу $f(t)$. Той факт, що функція $F(p)$ є зображенням оригіналу $f(t)$ символічно позначатимемо наступним чином: $f(t) \rightarrow F(p)$.

Більшість перетворень виду (1.1) є зворотними. Тому для певного інтегрального перетворення функція $f(t)$ може бути отримана з функції $F(p)$ за допомогою відповідної інтегральної *функції обернення*, тобто $f(t) \leftarrow F(p)$.

Загалом оператор (1.1) діє в просторі, елементами якого є функції $f(t)$. Згідно з виразу (1.1) функція-оригінал $f(t)$ змінної t (найчастіше часу)

перетворюється у відповідну функцію-зображення $F(p)$ іншої змінної p . Таке перетворення переводить дослідження $f(t)$ в область їх зображень $F(p)$. Це дає змогу замінити математичні дії над функціями часу, тобто дії над оригіналами, більш простими діями над їхніми зображеннями. Після розв'язку цих рівнянь здійснюють зворотний перехід до функції дійсної змінної t . Зазначене вище ілюструє рис. 1.1.

Математичні операції з зображеннями виконуються значно простіше, а пошук та аналіз інформаційних ознак сигналів у значній кількості практичних завдань легше здійснити для функцій-зображень. До прикладу, перетворення Фур'є дає змогу перейти від дослідження неперервних в часі сигналів до їх образів – спектрів, що представлені ~~набором чисел~~ в частотній області.

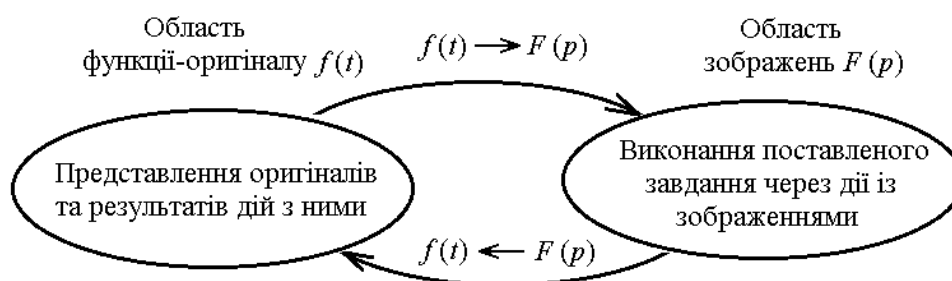


Рис. 1.1. Умовне графічне представлення загальної методології застосування інтегральних перетворень

Метод інтегральних перетворень виявився ефективним інструментом для розв'язання інтегральних рівнянь, лінійних диференціальних рівнянь за заданих початкових умов, систем лінійних диференціальних рівнянь, дослідження перехідних процесів в динамічних системах, аналізу роботи електричних кіл.

Опанування інтегрального перетворення Лапласа і розвиненого на його основі операторного метода передбачає вивчення:

- інтегрального перетворення Лапласа, його властивостей та застосування для визначення зображень;
- правил виконання операцій із зображеннями;
- способів визначення оригіналів за їх зображеннями.

1.3. Комплексні числа та функції

Комплексні числа вводять в математиці за допомогою уявної одиниці i , як числа, що дає в квадраті « -1 », тобто $i = \sqrt{-1}$. Загальна форма **комплексного числа** в **алгебраїчній формі** дається таким виразом:

$$\boxed{a = \alpha + i\beta}, \quad (1.2)$$

де α, β – дійсні числа, які мають назви відповідно дійсної та уявної частини числа a і позначаються так: $\alpha = \operatorname{Re} a$, $\beta = \operatorname{Im} a$ (від французьких слів «*real*» – дійсний і «*imaginaire*» – уявний).

Комплексні числа зображуються на площині векторами чи точками: число $a = \alpha + i\beta$ зображується точкою з абсцисою α і ординатою β або вектором, що починається в точці 0 (полюсі) і закінчується в точці a (рис. 1.2).

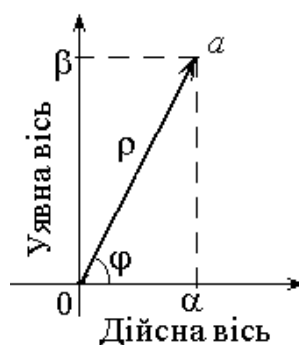


Рис. 1.2. Графічне представлення комплексного числа вектором на площині

Якщо ввести замість декартових координат точки, яка відповідає числу a , полярні координати, то отримаємо другу, **тригонометричну форму** запису комплексного числа

$$\boxed{a = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)}, \quad (1.3)$$

де ρ – довжина радіус-вектора відповідної точки, яка називається ще **модулем** або **абсолютною величиною** комплексного числа, φ – плоский кут (в радіанах), який називають **аргументом** комплексного числа. Для модуля і аргументу комплексного числа ще використовують такі позначення

$$\rho = |a|, \quad \varphi = \arg a. \quad (1.4)$$

Зв'язок між парами координат ρ, φ та α, β встановлюють рівняння

$$\alpha = \rho \cos \varphi, \quad \beta = \rho \sin \varphi, \quad (1.5)$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}. \quad (1.6)$$

В цих перетвореннях $0 \leq \rho < \infty$, а значення кута φ має нескінченну множину значень, які відрізняються одне від одного на $2\pi k$ (k – ціле число). *Головне значення аргументу* міститься в проміжку $-\pi/2 < \varphi \leq \pi/2$.

Для комплексних чисел має місце формула Ейлера

$$\cos kx + i \cdot \sin kx = e^{ikx}, \quad (1.7)$$

з якої витікають такі рівняння, що дають змогу виразити тригонометричні функції через комплексні експоненти

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}. \quad (1.8)$$

Використовуючи формулу Ейлера (1.7) отримують третю, **показникову**, форму запису комплексного числа

$$a = \rho e^{i\varphi}. \quad (1.9)$$

Всі три форми запису комплексного числа (1.2), (1.3) та (1.9) є еквівалентними.

Для комплексних чисел існує поняття спряжених чисел. Два комплексних числа називаються **взаємно спряженими** (позначаються a та $\bar{a}$), якщо їх дійсні частини рівні, а уявні частини відрізняються тільки знаком. Добуток комплексно спряжених чисел дає дійсне число, до прикладу

$$a \cdot \bar{a} = (\alpha + i\beta) \cdot (\alpha - i\beta) = \alpha^2 - i\alpha\beta + i\alpha\beta - i^2\beta^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Два комплексних числа є рівними, якщо рівні їх дійсні та уявні частини.

Над комплексними числами виконують арифметичні операції додавання (дійсні частини додаються до дійсної, уявні – до уявної), віднімання, множення та ділення. Зведення комплексного числа в n -у степінь виконують за **формулою Муавра для цілого показника**

$$a^n = [\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.10)$$

Добування кореня n -ї степені комплексного числа як дія, обернена до зведення комплексного числа в n -у степінь, виконують за **формулою Муавра для дробного показника**. Якщо $a = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то маємо

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = \overline{0, (n-1)}. \quad (1.11)$$

Додавання, віднімання, множення, ділення та зведення в цілу степінь – дії однозначні; добування кореня n -ї степені комплексного числа завжди дає n різних значень.

Якщо величина $z = x + iy$ – комплексна змінна, то результат проведення над z певних алгебраїчних дій є **алгебраїчною функцією комплексної змінної**, що позначатимемо наступним чином: $w = f(z)$.

Комплексна функція від комплексного z (або дійсного t) аргументу може

бути представлена у виді

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad (1.12)$$

де $u(z)$, $v(z)$ – дійсні функції комплексного аргументу z , які називаються відповідно **дійсною** і **уявною** частинами функції $f(t)$ ($u(t)$, $v(t)$ – дійсні функції дійсного аргументу t функції $f(t)$).

Тепер розглянемо поняття аналітичної функції.

Якщо функція $w = f(z)$ диференційована у всіх точках деякого кола з центром S_0 , то вона називається **аналітичною в точці** S_0 ; функція називається **аналітичною у зв'язаній області** (тобто у зв'язаній області декількох змінних), якщо вона аналітична у всіх точках цієї області.

Необхідною і достатньою умовою того, щоби комплексна функція $u + iv = f(x + iy)$ була аналітичною є виконання **умови Коші-Рімана**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.13)$$

1.4. Оригінал та зображення

Сутність операторного методу, який ґрунтується на перетворенні Лапласа, полягає у відображенні функції дійсної змінної t (часової області) функцією комплексної змінної – оператора $p = s + i\sigma$ (область комплексних величин) таким чином, щоб замість інтегрально-диференціальних рівнянь функції дійсної змінної t отримати алгебраїчні рівняння для функції аргументу p .

Оригіналом називається комплексна функція $f(t) = u(t) + iv(t)$ дійсної змінної t , яка задовольняє умови:

- 1) $f(t)$ – однозначна неперервна або кусково-неперервна функція разом зі своїми похідними n -го порядку в інтервалі значень $(-\infty, \infty)$;
- 2) $f(t) = 0$ для $t < 0$;
- 3) існують такі числа $M > 0$ і s , що для всіх t виконується нерівність

$$|f(t)| < Me^{st}, \quad (1.14)$$

тобто $|f(t)|$ зростає не швидше показникової функції виду Me^{st} .

Число $s_0 \geq 0$, для якого нерівність (1.14) виконується за будь-якого

$s = s_0 + \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$) і не виконується за значення $s = s_0 - \varepsilon$ (де s_0 – точна нижня межа чисел s), називається **показником росту функції** $f(t)$.

Друга умова означає, що деякий фізичний процес, який описує функція $f(t)$, починається у момент часу $t = 0$ і розвиток цього процесу до початкового моменту (тобто при $t < 0$) не має значення. Третій умові задовольняють всі обмежені функції: функції-оригінали $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$ є або обмеженими, або збігаючими до нескінченності, але не швидше ніж показникова функція $e^{s_0 t}$. Їх називають **функціями експоненціального типу**.

Зображенням функції-оригіналу $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, $s = \operatorname{Re} p$, $\sigma = \operatorname{Im} p$, яка визначається **інтегралом Лапласа**

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.15)$$

Цей визначений інтеграл є має нескінченну область інтегрування, тобто є невласним.

Область існування зображення визначається такою теоремою:

Теорема 1.1

Якщо $f(t)$ – оригінал з показником росту s_0 , то функція $F(p)$ збігається у напівплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ і є на ній аналітичною функцією.

1.5. Відшукування зображень деяких функцій

Одинична функція Хевісайда задається виразом:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Для значення $t = 0$ маємо: $\eta(0) = 0,5$, $\lim_{t \rightarrow 0+0} \eta(t) = 1$.

Отримаємо зображення функції Хевісайда за формулою (1.15)

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \eta(t) dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-pt} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pa} \right). \quad (1.17)$$

Якщо $\operatorname{Re} p > 0$, то $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-pa} = 0$. Отже маємо: $\boxed{\eta(t) \rightarrow 1/p, \operatorname{Re} p > 0}$.

Експоненціальна функція $e^{\alpha t}$. За формулою (1.15) визначаємо

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(p-\alpha)t} dt = -\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha} \Big|_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{e^{-(p-\alpha)a}}{p-\alpha} \right). \quad (1.18)$$

Якщо $\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0$, то $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-(p-\alpha)a} = 0$. Отже, маємо:

$$\boxed{e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p-\alpha}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha}.$$

Гармонічна функція $\sin t$. Представимо гармонічну функцію з використанням формули Ейлера (1.8) та скористаємось виразом (1.15)

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-pt} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} dt = \frac{1}{2i} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_0^a e^{-(p-i)t} dt - \int_0^a e^{-(p+i)t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(p-i)t}}{p-i} \Big|_0^a + \frac{e^{-(p+i)t}}{p+i} \Big|_0^a \right] = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right] = \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i}{p^2 - i^2} = \frac{1}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

Отже, $\boxed{\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}}$.

Відшукування зображень безпосередньо за формулою (1.15) пов'язане з обчисленням невластних інтегралів і може бути достатньо складною задачею. У багатьох випадках для цього набагато зручнішим є використання властивостей перетворення Лапласа, які розглядатимуться в наступній лекції.

Зведення формул перетворення Лапласа для ряду функцій наведено у додатку А.

Лекція 2. Основні властивості перетворення Лапласа

Визначення зображень оригіналів, які являють собою складні функції дійсного аргументу через інтеграл Лапласа – складна задача. Значно простіше вона розв'язується за допомогою певних правил, які складають суть операційного числення. Ці правила сформульовані на основі доведення ряду теорем операційного числення.

2.1. Теореми додавання, подібності, запізнювання, випередження, зміщення

Перетворення Лапласа має властивість лінійності, що доводить теорема 2.1.

Теорема 2.1

Якщо $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$, ..., $f_n(t) \rightarrow F_n(p)$ і $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – числа, то

$$\boxed{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) \rightarrow \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p) + \dots + \alpha_n F_n(p).} \quad (2.1)$$

Доведення. З формули інтеграла Лапласа витікає, що $\alpha_1 f_1(t) \rightarrow \alpha_1 F_1(p)$ та $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \rightarrow \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$, оскільки інтегрування є лінійною операцією. Продовжуючи додавати до сум (2.1) інші пари оригіналів та зображень з індексами 3, 4, ..., n, доводимо справедливості цієї теореми, що і доводить властивість лінійності перетворення Лапласа.

Теорема 2.2

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і α – число, то

$$\boxed{f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).} \quad (2.2)$$

Доведення. Нехай $\alpha > 0$. Виконуючи заміну змінної $\alpha t = \tau$, маємо:

$$f(\alpha t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} \tau} f(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

або $f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, що і доводить теорему подібності.

Поклавши в рівнянні (2.2) $\alpha = 1/\beta$, як наслідок отримуємо таку властивість:

$$F(\beta p) \rightarrow \frac{1}{\beta} f\left(\frac{t}{\beta}\right). \quad (2.4)$$

Теорема подібності справедлива і у випадку, коли α – комплексне число.

**Теорема
2.3**

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $t_0 > 0$, то

$$\boxed{f(t-t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p)}. \quad (2.5)$$

Доведення. За умовою теореми маємо

$$f(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ f(t-t_0), & t > t_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Зсуваючи графік функції $f(t)$ (рис. а) праворуч на величину t_0 , отримаємо графік функції $f(t-t_0)$ (рис. б).

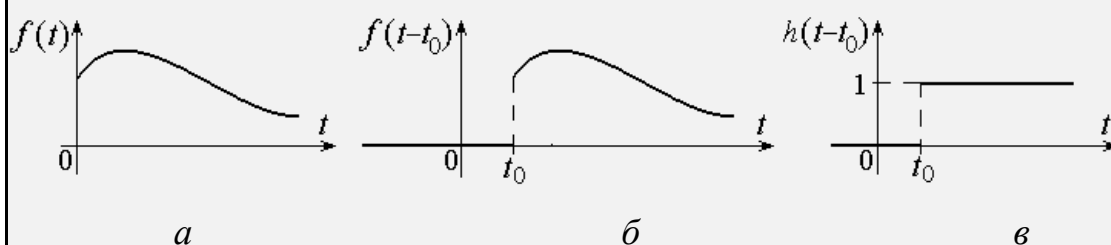


Рис. 2.1. Графічна ілюстрація до теореми запізнювання

Зображення оригіналу функції $f(t-t_0)$ визначається як

$$f(t-t_0) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt. \quad (2.7)$$

Виконуючи заміну змінної $t-t_0 = \tau$, отримаємо:

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \int_0^{\infty} e^{-p(\tau+t_0)} f(\tau) d\tau = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

Маємо: $f(t-t_0) \rightarrow e^{-pt_0} F(p)$, $t > t_0$, що доводить теорему запізнювання.

Множення зображення $F(p)$ на e^{-pt_0} зсуває графік його оригіналу $f(t)$ праворуч на t_0 , тобто приводить до запізнювання оригіналу на час t_0 .

Застосовуючи теореми подібності та запізнювання, можна визначити зображення для оригіналу виду $f(\alpha t - t_0)$, $t_0 > 0$, де α – число. Нехай $f(t) \rightarrow F(p)$. Тоді згідно з теоремою подібності $f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$. За теоремою запізнювання визначаємо

$$f(\alpha t - t_0) = f\left[\alpha\left(t - \frac{t_0}{\alpha}\right)\right] \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) e^{-\frac{t_0}{\alpha} p}. \quad (2.9)$$

Функція

$$h(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

називається **узагальненою одиничною функцією** (рис. 2.1, в). Вона має зображення

$$h(t - t_0) \rightarrow \frac{e^{-pt_0}}{p}. \quad (2.11)$$

Теорема 2.4

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $t_0 > 0$, то

$$f(t + t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} \left(F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right), \quad (2.12)$$

Доведення. Графік функції $f(t + t_0)$ (рис. 2.2, а) отримують шляхом зміщення графіка $f(t)$ (рис. 2.2, б) ліворуч на величину t_0 .

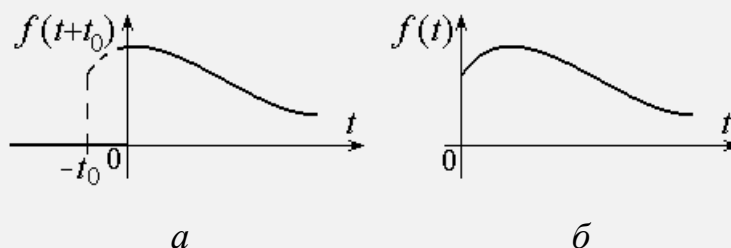


Рис. 2.2. Графічна ілюстрація до теореми випередження

Зміщена частина графіку $f(t)$ ліворуч від нуля вироджується у відрізок осі t , а усічена частина для $t > 0$ є графіком функції $f(t + t_0)$ (рис. 2.2а). Маємо

$$f(t + t_0) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t + t_0) dt. \quad (2.13)$$

Зробивши заміну змінної $t + t_0 = u$, $t_0 \leq u < \infty$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t + t_0) dt &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-p(u-t_0)} f(u) du = e^{pt_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-pu} f(u) du = \\ &= e^{pt_0} \left(F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pu} f(u) du \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

що і доводить теорему.

Теорема 2.5

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і p_0 – число, то

$$\boxed{e^{-p_0 t} f(t) \rightarrow F(p + p_0)}. \quad (2.15)$$

Доведення. Згідно означення зображення функції маємо

$$e^{-p_0 t} f(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-p_0 t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+p_0)t} f(t) dt, \quad (2.16)$$

або $e^{-p_0 t} f(t) \rightarrow F(p + p_0)$, що і доводить теорему зміщення.

Таким чином, у випадку множення оригіналу на $e^{\pm p_0 t}$ в площині p відбувається зміщення на вектор $\mp p_0$ (рис. 2.3).

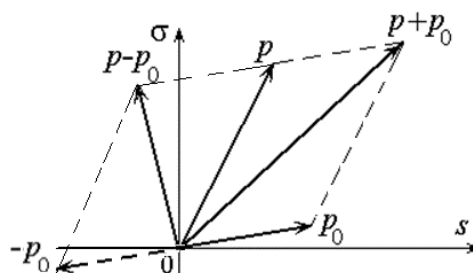


Рис. 2.3. Графічна ілюстрація до теореми зміщення

Теорему зміщення застосовують при розгляді фізичних явищ, пов'язаних із загасанням коливань.

2.2. Теорема про диференціювання оригіналу та зображення

Наступні дві теореми стосуються диференціювання оригіналу та диференціювання зображення.

Теорема 2.6

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і функції $f'(t)$, $f''(t)$, ... $f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то

$$\boxed{f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0)},$$

$$\boxed{f''(t) \rightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0)},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\boxed{f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)},$$

(2.17)

де $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Доведення. За визначенням зображення маємо

$$f'(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt. \quad (2.18)$$

Інтегруючи праву частину за частинами отримаємо

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + pF(p). \quad (2.19)$$

Оскільки $\operatorname{Re}(p) = s > s_0$, то $|e^{-pt} f(t)| < Me^{-(s-s_0)t}$, тому $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0$. Якщо оригінал $f(t)$ в точці $t = 0$ є неперервною функцією, то $f(0) = 0$, оскільки $f(t) = 0$ при $t < 0$; якщо при $t = 0$ функція $f(t)$ має розрив першого роду, то при $t \rightarrow 0$ функція $f(t)$ має границю справа: $\lim_{t \rightarrow 0+0} e^{-pt} f(t) = f(0)$, тобто

$e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty = -f(0)$. Таким чином, $f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0)$, $\operatorname{Re}(p) > s_0$.

Якщо при $t = 0$ функція $f(t)$ неперервна, то $f'(t) \rightarrow pF(p)$. Це означає, що диференціюванню оригіналу $f(t)$ у просторі зображень відповідає множення на p функції $F(p)$.

Інтегруючи двічі по частинам інтеграл $\int_0^\infty e^{-pt} f''(t) dt$, отримаємо:

$$f''(t) \rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Використовуючи метод математичної індукції та припускаючи, що вираз

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) = \Phi(p)$$

є справедливим для n , покажемо, що він є вірним і для $n+1$.

З доведення теореми для $n = 1$ маємо

$$\left[f^{(n)}(t) \right]' \rightarrow p\Phi(p) - f^{(n)}(0) \text{ або}$$

$$f^{(n+1)}(t) \rightarrow p^{n+1} F(p) - p^n f(0) - \dots - pf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0). \quad (2.20)$$

Формула є вірною і для будь-якого натурального числа n . Якщо функція $f^{(n)}(t)$ має зображення, то і $f^{(n-1)}(t)$ має зображення; зворотнє взагалі не завжди можливе.

Якщо при $t = 0$ функція $f(t)$ та її похідна $f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ є неперервними, то $f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p)$. Отже, n -кратному диференціюванню в просторі оригіналів відповідає множення на p^n функції $F(p)$ в просторі зображень. В цьому частковому випадку величину p розглядають як оператор.

Наведемо без доведення таку теорему.

Теорема 2.7 | Якщо $F(p) \rightarrow f(t)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$\begin{aligned}
 & \boxed{F'(p) \rightarrow -t f(t)}, \\
 & \boxed{F''(p) \rightarrow (-1)^2 t^2 f(t)}, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \boxed{F^{(n)}(p) \rightarrow (-1)^n t^n f(t)}, \quad \text{Re } p > s_0.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Отже, диференціюванню зображення $F(p)$ відповідає у просторі оригіналів операція множення на $-t$ функції $f(t)$.

2.3. Теореми про інтегрування оригіналу та інтегрування зображення

Спочатку доведемо теорему про інтегрування оригіналу.

Теорема 2.8

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\text{Re } p > s_0$, то

$$\boxed{\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}}, \quad \text{Re } p > s_0. \tag{2.22}$$

Доведення. Функція $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, вочевидь, задовольняє умовам 1 і 2 функції-оригіналу, а також умові 3, оскільки

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| < \int_0^t M e^{s_0 \tau} d\tau = \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1) < M_1 e^{s_0 t}, \tag{2.23}$$

де $M_1 = M/s_0$. Отже, функції $f(t)$ є оригіналом з показником росту s_0 .

Нехай $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, $\text{Re } p > s_0$. Тоді згідно з теоремою диференціювання оригіналу маємо $\varphi'(t) \rightarrow p\Phi(p)$, $\varphi(0) = 0$. Оскільки $\varphi'(t) = f(t) \rightarrow F(p)$, то $F(p) = p\Phi(p)$. Звідси отримаємо

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Отже, інтегруванню оригіналу $f(t)$ у просторі зображень відповідає ділення функції $F(p)$ на p .

Розглянемо тепер інтегрування зображень.

Теорема 2.9

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ та інтеграл $\varphi(t) = \int_p^\infty F(p) dp$ збігається у напівплощині $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$, то

$$\boxed{\int_p^\infty F(p) dp \rightarrow \frac{f(t)}{t}}, \quad \operatorname{Re} p > s_0. \quad (2.24)$$

Доведення. В напівплощині $\operatorname{Re} p > s_0 + \delta$ (рис. 2.4) інтеграл Лапласа $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ збігається рівномірно відносно p .

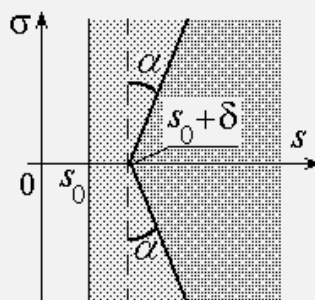


Рис. 2.4. Графічне представлення області існування зображення

Тому в цій напівплощині його інтегрують за параметром p , і за контур інтегрування можна обрати будь-який промінь, що виходить з точки p і утворює з дійсною віссю гострий кут. Маємо

$$\int_p^\infty F(p) dp = \int_p^\infty dp \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt. \quad (2.25)$$

За умовою інтеграл $\int_p^\infty F(p) dp$ збігається у напівплощині $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$, тому

$$\int_p^\infty dp \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \int_0^\infty f(t) dt \int_p^\infty e^{-pt} dp \quad (2.26)$$

або, враховуючи, що $\int_p^\infty e^{-pt} dp = \frac{e^{-pt}}{(-t)} \Big|_p^\infty = \frac{e^{-pt}}{t} \Big|_\infty^p = \frac{e^{-pt}}{t}$, отримуємо:

$$\int_p^\infty F(p) dp = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt. \quad (2.27)$$

Отже, функція $f(t)/t$ є оригіналом з показником росту $S_1 > S_0$, а інтегрування $F(p)$ зводиться в просторі оригіналу до ділення функції $f(t)$ на t .

2.4. Згортка функцій та її властивості

Згорткою неперервних функцій $\varphi(t)$ і $f(t)$, $0 \leq t < \infty$ (позначається як $\varphi(t) * f(t)$) називають інтеграл

$$\varphi * f = \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (2.28)$$

Згорткою є дія, яка парі функцій з певної множини ставить у відповідність іншу певну функцію з цієї множини. Дія отримання згортки називається **згортанням функцій**.

Згортка функцій має такі властивості:

1. Комутативність: $\varphi * f = f * \varphi$. Ця властивість легко доводиться з (2.28) шляхом заміни $t - \tau = u$.

2. Асоціативність: $(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi)$.

3. Дистрибутивність відносно додавання: $\varphi * (f + \psi) = \varphi * f + \varphi * \psi$.

4. Абсолютна величина згортки: $|\varphi * f| \leq |\varphi| * |f|$.

5. Якщо функції $\varphi(t)$ і $f(t)$ – неперервні функції при $t \geq 0$, то їх згортка $\varphi * f$ є також неперервною функцією при $t \geq 0$.

6. Якщо функції $f(t)$ і $\varphi(t)$ – неперервні при $t \geq 0$, і їх згортка $f * \varphi = 0$, то принаймні одна з них при $t \geq 0$ дорівнює нулю (*теорема Тітчмарша*).

7. Якщо функції $f(t)$ і $\varphi(t)$ – оригінали, то і їх згортка $f * \varphi$ також є оригіналом.

2.5. Множення зображень

В операційному численні важливе місце відіграє теорема про множення зображень (теорема Бореля) та її наслідок – інтеграл Дюамеля.

Теорема 2.10

(Бореля)

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ і $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_1$, то

$$f * \varphi \rightarrow F(p)\Phi(p).$$

Доведення. Маємо

$$\varphi * f \rightarrow \int_0^\infty e^{-pt} f * \varphi dt = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau. \quad (2.29)$$

В цьому виразі двократний інтеграл по області $D: 0 \leq t < \infty, 0 \leq \tau \leq t$ (рис.2.5) збігається абсолютно, оскільки зображення оригіналу $f * \varphi$ визначено в напівплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ при $s_0 > s_1$. Тому у двократному інтегралі можна змінити порядок інтегрування ($0 \leq \tau < \infty, \tau \leq t < \infty$):

$$f * \varphi \rightarrow \int_0^\infty \varphi(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau) dt. \quad (2.30)$$

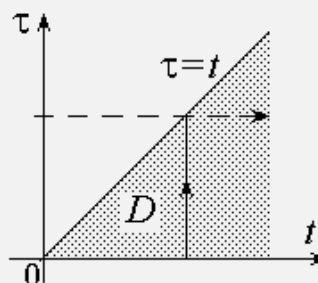


Рис. 2.5. Графічне зображення області D

Позначивши $t - \tau = u$ отримаємо ($t = u + \tau$, $dt = du$, при $t = \tau$ $u = 0$, при $t = \infty$ $u = \infty$), отримуємо:

$$f * \varphi \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \varphi(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du = F(p) \Phi(p). \quad (2.31)$$

Отже, згортці в просторі оригіналу відповідає множення функцій в просторі зображень.

Тепер розглянемо інтеграл Дюамеля, який має винятково важливе значення в аналізі лінійних систем (наведена нижче теорема дана без доведення).

**Теорема
2.11**

*(інтеграл
Дюамеля)*

Якщо $f * \varphi \rightarrow F(p) \Phi(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) \varphi'_t(t-\tau) d\tau + f(t) \varphi(0) \rightarrow p F(p) \Phi(p), \quad (2.32)$$

або

$$\int_0^t \varphi(\tau) f'_t(t-\tau) d\tau + \varphi(t) f(0) \rightarrow p F(p) \Phi(p). \quad (2.33)$$

Вирази (2.32) і (2.33) вперше у 1853 р. застосував Жан Марі Констан Дюамель до розрахунку динаміки механічних систем. Пізніше цей метод почав використовуватися і для розрахунку електротехнічних ланцюгів.

Для використання інтеграла Дюамеля в електротехнічних розрахунках для пошуку реакції ланцюга на певний електричний сигнал необхідно попередньо визначити **перехідну функцію** ланцюга, яка є відгуком ланцюга на ступінчатий одиничний вхідний сигнал. Для лінійного ланцюга перехідною функцією може бути аперіодичний, коливальний, загасаючий коливальний процеси або їх комбінація.

Якщо вхідний сигнал ланцюга заданий функцією $u(t)$, де t – незалежна змінна, то реакція ланцюга на цей сигнал виражається формулою:

$$u_{\text{вих}}(t) = \int_0^t u'(\tau) h(t-\tau) d\tau + u(0) h(t),$$

де $u'(t)$ – похідна вхідного впливу в часі.

Основні властивості перетворення Лапласа наведені в додатку Б.

Лекція 3. Визначення оригіналів за їх зображеннями

Перетворення Лапласа кожному оригіналу $f(t)$ ставить у відповідність одне і тільки одне зображення $F(p)$. Обернена задача відновлення оригіналу за зображенням теж розв'язується однозначно. Ця процедура здійснюється за допомогою оберненого перетворення Лапласа, яке виконується згідно з теоремою обернення.

3.1. Теорема обернення

Теорема 3.1

Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником зростання s_0 , а $F(p)$ – зображення цієї функції, то в будь-якій точці неперервності $f(t)$ виражається через $F(p)$ за формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (3.1)$$

Інтеграл в виразі (3.1) береться по будь-якій прямій $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і розуміється як головне значення, тобто

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{s-iR}^{s+iR} e^{pt} F(p) dp. \quad (3.2)$$

У точках розриву маємо:

$$\int_{s-iR}^{s+iR} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)].$$

Формула (3.1) ще має назву **формули обернення Рімана-Мелліна** і визначає **обернене перетворення Лапласа**.

З формули (3.1) випливає **теорема одного єдино можливого оригіналу**:

Теорема 3.2

Якщо два оригінали $f_1(t)$ і $f_2(t)$ мають одне і те саме зображення $F(p)$, то вони є рівними в точках неперервності.

Відшукування оригіналів безпосередньо за формулою (3.1) є складною математичною задачею. Тому на практиці користуються простішим способом, використовуючи наслідки з теореми обертання – так звані теореми розкладання.

3.2. Перша та друга теореми розкладання

Теорема 3.3

Якщо функція $F(p)$ – аналітична в нескінченно віддаленій точці $F(\infty) = 0$ і в околі цієї точки її розкладання в ряд за степенями $1/p$ має вид

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}, \quad (3.3)$$

то функція $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ є оригіналом, що відповідає зображенню $F(p)$.

Теорема 3.4

Якщо зображення $F(p)$ є однозначною функцією й має лише скінченне число полюсів $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$, що лежать у скінченній площині, то відповідний оригінал $f(t)$ дорівнює сумі лишків функції $e^{pt}F(p)$, що обчислені в усіх полюсах p_k функції $F(p)$, тобто

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{res} \{ e^{pt} F(p), p_k \}. \quad (3.4)$$

В теорії комплексних функцій **лишком** в ізольованій особливій точці p_0 (яка належить області комплексних чисел) називається інтеграл виду

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} F(p) dp$$

де γ – контур, що належить околу точки p_0 і охоплює її. Обхід контуру – позитивний, тобто проти ходу стрілки годинника. Лишки позначаються як res (від французького «*residu*» – віднімати):

$$\operatorname{res}_{p_0} F(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} F(p) dp.$$

До прикладу, лишок $F(p)$ в простому (тобто однократному) полюсі a визначається як:

$$\operatorname{res} F(a) = \lim_{p \rightarrow a} [F(p) \cdot (p - a)].$$

Для розв'язання практичних задач важливе значення має обернене перетворення дробово-раціональних функцій виду $F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, де $P_m(p)$, $Q_n(p)$ – багаточлени степенів відповідно m і n ($m < n$), $p_1, p_2, \dots, p_r$ – корені багаточлена $Q_n(p)$ з кратностями $l_1, l_2, \dots, l_r$ ($l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$).

Нагадаємо загальну властивість алгебраїчних рівнянь, які представляються в такому загальному виді

$$Q_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3.5)$$

Корінь рівняння (3.5) називається **коренем багаточлена** $Q_n(p)$. Якщо p_1 – корінь багаточлена $Q_n(p) = 0$, то $Q_n(p)$ ділиться на $(p - p_1)$ без залишку. Якщо $Q_n(p)$ ділиться на $(p - p_1)^{l_1}$, але вже не ділиться на $(p - p_1)^{l_1+1}$, то p_1 називається **l_1 -кратним коренем рівняння** $Q_n(p) = 0$. В цьому випадку p_1 є спільним коренем багаточлена $Q_n(p)$ та його похідних до $(l_1 - 1)$ порядку включно. Однократний корінь рівняння (3.5) називають ще **простим коренем**.

**Теорема
3.5
(основна
теорема
алгебри)**

Будь-яке рівняння n -го степеня, коефіцієнти якого дійсні чи комплексні числа, має n коренів дійсних чи комплексних, якщо k -кратні корені рахувати за k коренів, тобто багаточлен $Q_n(p)$ можна представити у вигляді

$$Q_n(p) = (p - p_1)^{l_1} \cdot (p - p_2)^{l_2} \cdot \dots. \quad (3.6)$$

З курсу алгебри відома ціла низка способів розкладання багаточлена $Q_n(p)$ (3.5) на множники. Нагадаємо ці способи.

1. Спосіб винесення спільного множника за дужки:

$$p^3 + 2p^2 + p = p(p^2 + 2p + 1).$$

2. Розкладання способом групування:

$$ap^3 - bp + bp^3 - ap = p^3(a + b) - p(a + b) = (p^3 - p)(a + b) = p(p^2 - 1)(a + b).$$

3. Розкладання за формулами множення:

$$(p^2 \pm 2p + a^2) = (p \pm a)^2,$$

$$(p^2 - a^2) = (p - a)(p + a),$$

$$(p^3 \pm 3p^2a + 3pa^2 \pm a^3) = (p \pm a)^3,$$

$$(p^3 \pm a^3) = (p \pm a)(p^2 - pa + a^2).$$

4. Заміна одного з членів рівною йому сумою двох членів

Приклад 3.1.

$$p^2 + 7p + 12 = p^2 + 3p + 4p + 12 = p(p + 3) + 4(p + 3) = (p + 3)(p + 4).$$

5. Додавання до багаточлена двох протилежних членів

Приклад 3.2.

$$p^2 + 6p + 8 = p^2 + 6p + 9 - 9 + 8 = (p + 3)^2 - 1 = (p + 2)(p + 4).$$

6. Розклад квадратного тричлена на лінійні множники, тобто представлення у вигляді добутку двочленів першого ступеня. Для рівнянь виду

$$ap^2 + bp + c = 0 \text{ корені знаходять як } p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \text{ Тоді квадратний}$$

тричлен представляється добутком

$$ap^2 + bp + c = (p - p_1)(p - p_2).$$

Можливе застосування перелічених способів розкладання багаточлена в комбінації один з одним.

Повернімось до виразу (3.4). На підставі відомої загальної формули для обчислення лишку багаточлена $\varphi(z)$

$$\operatorname{res} \varphi(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ (z - z_0)^n \varphi(z) \right\} \quad (3.7)$$

запишемо (3.4) у такому виді

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{(l_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{l_k-1}}{dp^{l_k-1}} \left\{ (p - p_k)^{l_k} e^{pt} F(p) \right\}, \quad (3.8)$$

де підсумовування виконується по всіх полюсах p_k зображення $F(p)$, тобто по усіх нулях багаточлена $Q_n(p)$.

У випадку, коли усі полюси p_k прості (тобто $l_k = 1$), формула (3.8) спрощується:

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \lim_{p \rightarrow p_k} \left\{ (p - p_k) e^{pt} F(p) \right\}. \quad (3.9)$$

Ще більше спростити визначення $f(t)$ можна, якщо усі корені $p_1, p_2, \dots, p_r$ багаточлена $Q_n(p)$ є простими. Тоді є можливість скористатись формулою

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t}. \quad (3.10)$$

На практиці при відшуванні оригіналу не дуже складного дробово-раціонального зображення достатньо розкласти заданий дріб у суму найпростіших раціональних методом невизначених коефіцієнтів, відшукати оригінали, що відповідають кожному з них за таблицею оригіналів та зображень та властивостей перетворення Лапласа і записати шуканий оригінал.

Приклад 3.3. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2-1}.$$

Розв'язання. Представимо зображення у такому вигляді:

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2-1} = \frac{p+3}{(p+1)(p-1)}.$$

У цього дробу: $P_m(p) = p+3$, $Q_n(p) = (p-1)(p+1)$. Оскільки обидва корені знаменника $p_1 = 1$, $p_2 = -1$ є простими, то за формулою (3.9), таблицею оригіналів та зображень і властивістю лінійності отримаємо

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \lim_{p \rightarrow 1} \left\{ (p-1)e^{pt} \frac{p+3}{(p+1)(p-1)} \right\} + \lim_{p \rightarrow -1} \left\{ (p+1)e^{pt} \frac{p+3}{(p+1)(p-1)} \right\} = \\
 &= \lim_{p \rightarrow 1} \left\{ e^{pt} \frac{p+3}{(p+1)} \right\} + \lim_{p \rightarrow -1} \left\{ e^{pt} \frac{p+3}{(p-1)} \right\} = 2e^t - e^{-t}.
 \end{aligned}$$

3.3. Операторний метод розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Властивості перетворення Лапласа дають можливість розв'язати різні прикладні задачі, в тому числі надати зручний спосіб розв'язання лінійних диференціальних рівнянь. Ця задача розв'язується за такою схемою:

- переведення за допомогою перетворення Лапласа лінійного диференціального рівняння в алгебраїчне відносно зображення;
- визначення з алгебраїчного рівняння зображення шуканого оригіналу;
- відтворення оригіналу за його зображенням по Лапласу.

Постановка задачі. Нехай маємо диференціальне рівняння n -го порядку

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (3.11)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – дійсні числа. Початкові умови задаються значеннями

$$x(0) = c_0, \quad x'(0) = c_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \quad (3.12)$$

Початкові умови (3.12) дорівнюють граничним значенням функції $x(t)$ та її похідних при $t \rightarrow 0 + 0$.

Нехай невідома функція $x(t)$, її похідні $x'(t), \dots, x^{(n)}(t)$ та функція $f(t)$ задовольняють умовам функції оригіналу. Позначимо: $f(t) \rightarrow F(p)$, $x(t) \rightarrow X(p)$. Згідно з теоремою диференціювання оригіналу (2.17) маємо

$$\begin{aligned}
 x'(t) &\rightarrow pX(p) - c_0, \\
 x''(t) &\rightarrow p^2 X(p) - pc_0 - c_1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x^{(n)}(t) &\rightarrow p^n X(p) - p^{n-1}c_0 - \dots - c_{n-1},
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

де $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

У відповідності до теореми лінійності отримаємо

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \dots + a_n x(t) \rightarrow p^n X(p) - p^{n-1} c_0 - \dots - c_{n-1} + \dots + a_{n-2} [p^2 X(p) - p c_0 - c_1] + a_{n-1} [p X(p) - c_0] + a_n X(p). \quad (3.14)$$

Оскільки $f(t) \rightarrow F(p)$, згідно з теоремою про єдність оригіналу у просторі зображень отримаємо алгебраїчне рівняння

$$p^n X(p) - p^{n-1} c_0 - \dots - c_{n-1} + \dots + a_{n-1} [p X(p) - c_0] + a_n X(p) = F(p), \quad (3.15)$$

або

$$(p^n + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) = F(p) + p^{n-1} c_0 + \dots + c_{n-1} + \dots + a_{n-1} c_0. \quad (3.16)$$

Рівняння (3.16) називається **операторним рівнянням диференціального рівняння** (3.11) з початковими умовами (3.12). Це рівняння є алгебраїчним відносно функції $X(p)$. З рівняння (3.16) отримаємо зображення

$$X(p) = \frac{F(p) + p^{n-1} c_0 + \dots + c_{n-1} + \dots + a_{n-1} c_0}{(p^n + \dots + a_{n-1} p + a_n)}. \quad (3.17)$$

Далі, користуючись теоремою розкладання та властивостями перетворення Лапласа, знаходимо для зображення $X(p)$ оригінал $x(t)$. Неперервна функція $x(t)$, згідно теореми про єдиність оригіналу, є розв'язком рівняння (3.11), яке задовольняє початкові умови (3.12).

Лекція 4. Застосування операційного числення

Перетворення Лапласа і розвинене на його основі операційне числення є зручним інструментом розв'язування різних задач в математиці, фізиці, електротехніці, радіотехніці, теорії автоматичного регулювання тощо. Такий спосіб розв'язування технічних задач отримав назву *операційного методу*. Розглянемо деякі застосунки цього методу.

4.1. Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Узагальнимо методику розв'язання звичайних диференціальних рівнянь за допомогою операторного методу.

Постановка задачі. Нехай маємо диференціальне рівняння

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t) \quad (4.1)$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – коефіцієнти рівняння (задані числа), $f(t)$ – задана функція, яка є оригіналом, $x = x(t)$ – невідома функція. Треба знайти розв’язок рівняння (4.1), який задовольняє початковим умовам:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad (4.2)$$

де $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ – задані числа.

Розв’язання задачі. Методика пошуку розв’язку рівняння операційним методом така:

1. Здійснюється перехід від функцій $x(t)$ та $f(t)$ до їх зображень: перехід $x(t) \rightarrow X(p)$ здійснюється формально, а $f(t) \rightarrow F(p)$ – згідно з фактичним виразом функції $f(t)$.

2. Застосовуються теореми про диференціювання оригіналу і лінійність та здійснюється перехід від рівняння (4.1) до рівняння виду

$$\boxed{L(p) \cdot X(p) + Q(p) = F(p)}, \quad (4.3)$$

яке називається **зображуючим (операторним) рівнянням**. Багаточлен $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ називається **характеристичним багаточленом** рівняння (4.1), $Q(p)$ – багаточлен степеня $(n-1)$, коефіцієнти якого залежать від початкових даних $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$. На відміну від диференціального рівняння (4.1), рівняння (4.3) є лінійним алгебраїчним відносно $X(p)$.

3. Рівняння (4.3) розв’язується відносно $X(p)$

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)}. \quad (4.4)$$

В частковому випадку за нульових початкових умов $x_0 = x'_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$ маємо $Q(p) = 0$ і вираз (4.4) спрощується:

$$X(p) = F(p)/L(p).$$

4. Здійснюється зворотний перехід від зображення до оригіналу: $X(p) \rightarrow x(t)$. Функція $x(t)$ і є розв’язком рівняння (4.1).

Функція $Z(p) = 1/L(p)$ називається **передавальною функцією**. Якщо

розуміти $F(p)$ як зображення вхідного сигналу, $X(p)$ – як зображення реакції системи на це збурення, то зображення відгуку отримують шляхом множення

$$\boxed{X(p) = Z(p)F(p)}. \quad (4.5)$$

Проілюструємо використання наведеної методики таким прикладом.

Приклад 4.1. Знайти розв’язок диференціального рівняння

$$x'' + 4x' + 4x = e^{-2t} (\cos t + 2 \sin t),$$

що задовольняє початковим умовам: $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.

Розв’язання. Нехай $x(t) \rightarrow X(p)$. Тоді згідно з теоремою про диференціювання оригіналу та з урахуванням початкових умов маємо

$$x'(t) \rightarrow pX(p) + 1, \quad x''(t) \rightarrow p^2X(p) + p - 1.$$

За таблицею відповідності оригіналів і зображень і теоремою лінійності знаходимо

$$(\cos t + 2 \sin t) \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} + 2 \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{p + 2}{p^2 + 1}.$$

Далі, за теоремою зсунення маємо

$$e^{-2t} (\cos t + 2 \sin t) \rightarrow \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1}.$$

З урахуванням отриманих зображень представимо операторне рівняння як

$$p^2X(p) + p - 1 + 4pX(p) + 4 + 4X(p) = \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1}$$

і після перетворень

$$(p^2 + 4p + 4)X(p) + p + 3 = \frac{p + 4}{(p + 2)^2 + 1}.$$

З останнього рівняння знаходимо зображення розв’язку

$$X(p) = - \frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{[(p + 2)^2 + 1](p + 2)^2}.$$

Розкладемо вираз для $X(p)$ на простіші дроби методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} X(p) &= -\frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{[(p+2)^2 + 1](p+2)^2} = \frac{Ap + B}{[(p+2)^2 + 1]} + \frac{Cp + D}{(p+2)^2} = \\ &= \frac{(A+C)p^3 + (4A+4C+B+D)p^2 + (4A+5C+4B+4D)p + (4B+5D)}{[(p+2)^2 + 1](p+2)^2}. \end{aligned}$$

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A+C = -1, \\ 4A+4C+B+D = -7, \\ 4A+5C+4B+4D = -16, \\ 4B+5D = -11. \end{cases}$$

Її розв'язання дає такі значення: $A = -1$, $B = -4$, $C = 0$, $D = 1$. Це дає змогу представити $X(p)$ сумою таких простіших дробів:

$$X(p) = -\frac{p+4}{(p+2)^2 + 1} + \frac{1}{(p+2)^2} = -\frac{p+2}{(p+2)^2 + 1} - 2\frac{1}{(p+2)^2 + 1} + \frac{1}{(p+2)^2}.$$

З урахуванням того, що $\cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 1}$, $\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$, $t \rightarrow \frac{1}{p^2}$, отримаємо такий розв'язок

$$x(t) = e^{-2t} (t - \cos t - 2 \sin t).$$

4.2. Розв'язання систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розв'язування систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь принципово не відрізняється від розв'язування одного рівняння. Відмінність лише в тому, що замість одного операторного рівняння отримують систему операторних рівнянь. Кожне з цих рівнянь є лінійним алгебраїчним відносно зображення оригіналу. Розв'язавши його, отримуємо зображення оригіналу, після чого переходимо до оригіналу.

Проілюструємо сказане таким прикладом.

Приклад 4.2. Знайти розв'язок системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' - x - 2y + 9t = 0, \\ y' - 2x - y = 4e^t \end{cases}$$

з початковими умовами: $x(0)=1$, $y(0)=2$.

Розв'язання. Введемо позначення: $x(t) \rightarrow X(p)$, $y(t) \rightarrow Y(p)$. Оскільки за таблицею відповідності оригіналів та зображень маємо $t \rightarrow \frac{1}{p^2}$, $e^t \rightarrow \frac{1}{p-1}$, то з урахуванням початкових умов, теореми про диференціювання і теореми лінійності отримаємо таку систему операторних рівнянь відносно зображень $X(p)$, $Y(p)$:

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = 1 - \frac{9}{p^2} = \frac{p^2-9}{p^2}, \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = 2 + \frac{4}{p-1} = \frac{2p+2}{p-1}. \end{cases}$$

Визначимо $X(p), Y(p)$ за формулою Крамера:
 $X(p) = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $Y(p) = \frac{\Delta y}{\Delta}$, де детермінант другого порядку обчислюється як

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3 = (p-3)(p+1).$$

Тоді маємо

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \frac{p^2-9}{p^2} & -2 \\ \frac{2p+2}{p-1} & p-1 \end{vmatrix} = \frac{p^4 + 2p^3 - 4p^2 + 18p - 9}{p^2(p-1)},$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} p-1 & \frac{p^2-9}{p^2} \\ -2 & \frac{2p+2}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{2p^3 + 4p^2 - 18}{p^2}.$$

Отже, зображення оригіналів визначаємо як

$$X(p) = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{p^4 + 2p^3 - 4p^2 + 18p - 9}{p^2(p-1)(p-3)(p+1)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{2p^3 + 4p^2 - 18}{p^2(p-3)(p+1)}.$$

Розкладемо зображення у суму найпростіших дробів, користуючись методом невизначених коефіцієнтів. Для $X(p)$ маємо

$$X(p) = \frac{p^4 + 2p^3 - 4p^2 + 18p - 9}{p^2(p-1)(p-3)(p+1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{p-3} + \frac{E}{p+1}.$$

З цього рівняння отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} B + C + D + E = 1, \\ A - 3B - 2C - 4E = 2, \\ -3A - B - 3C - D + 3E = -4, \\ -A + 3B = 18, \\ 3A = -9. \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи дає такі результати

$$A = -3, B = 5, C = -2, D = 2, E = -4.$$

З урахуванням визначених коефіцієнтів запишемо зображення $X(p)$ у такій формі

$$X(p) = -\frac{3}{p^2} + \frac{5}{p} - \frac{2}{p-1} + \frac{2}{p-3} - \frac{4}{p+1}.$$

В аналогічний спосіб визначаємо зображення $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{6}{p^2} - \frac{4}{p} + \frac{2}{p-3} + \frac{4}{p+1}.$$

Використовуючи таблицю відповідності зображень та оригіналів та теорему лінійності, запишемо розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$x(t) = -3t + 5 - 2e^t + 2e^{3t} - 4e^{-t}, \quad y(t) = 6t - 4 + 2e^{3t} + 4e^{-t}.$$

4.3. Розв'язання задач електротехніки та теорії керування

Методи операційного числення для аналізу процесів, що відбуваються в електричних колах, виявились дуже зручними та ефективними. Вперше їх запропонував відомий англійський фізик О. Хевісайд.

Застосування перетворення Лапласа для розрахунку перехідних процесів в електричних контурах розглянемо на прикладі підключення послідовно з'єднаних елементів – резистора R , котушки індуктивності L та конденсатора C , до джерела напруги (рис. 4.1). Початкові умови: струм в колі $i(0) = 0$, заряд на обкладинках конденсатора $Q(0) = 0$, прикладена електрорушійна сила $e(t)$.

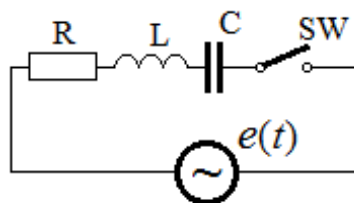


Рис. 4.1. Дослідження перехідного процесу в послідовному RLC -контурі

Диференціальне рівняння, що описує зміну сили струму в електричному данцізі має такий вид:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{Q(t)}{C} = e(t). \quad (4.6)$$

Зв'язок заряду та електричного струму подають такі формули:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = i(t), \quad Q(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (4.7)$$

З урахуванням (4.7) рівняння (4.6) набуває такого виду:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = e(t). \quad (4.8)$$

В виразі (4.7) перша складова – це падіння напруги на індуктивності, друга – падіння напруги на опорі, третя складова – падіння напруги на ємності.

Введемо позначення зображень: $e(t) \rightarrow E(p)$, $i(t) \rightarrow I(p)$. Тоді операторне рівняння електричного кола запишеться у такому виді

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{1}{Cp}I(p) = E(p). \quad (4.9)$$

З (4.9) визначимо вираз для зображення сили струму в електричному колі

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}. \quad (4.10)$$

Операторний опір $Z(p)$ електричного кола – це відношення операторного зображення напруги до операторного зображення струму, що діють на елементі або ділянці кола:

$$\boxed{Z(p) = \frac{E(p)}{I(p)}}. \quad (4.11)$$

Він має розмірність Ом. Для виразу (4.10) це

$$Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}.$$

Величина, обернена операторному опору, називається **операторною провідністю** (має розмірність См – сіменс)

$$\boxed{Y(p) = 1/Z(p)}. \quad (4.12)$$

Тоді закон Ома в операторній формі запишеться як

$$I(p) = E(p)/Z(p). \quad (4.13)$$

Передавальною функцією $K(p)$ електричного чотириполюсника називається відношення зображення напруги на його виході до зображення напруги на вході (рис. 4.2):

$$\boxed{K(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}}. \quad (4.14)$$

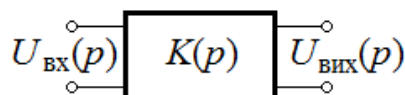


Рис. 4.2. До визначення передавальної функції

Користуючись теоремою обернення або її наслідками, з виразу (4.10) можна знайти силу струму як функцію часу $i(t)$.

Приклад 4.3. Виконати аналіз перехідного процесу в RC -ланцюжку (рис.4.3, а), на який подається одиничний імпульс напруги (рис. 4.3, б). Необхідно знайти закон зміни в часі напруги на конденсаторі $u_C(t)$ за умови, що напруга на ньому в момент подачі імпульсу дорівнює 0, тобто $u_C(0) = 0$.

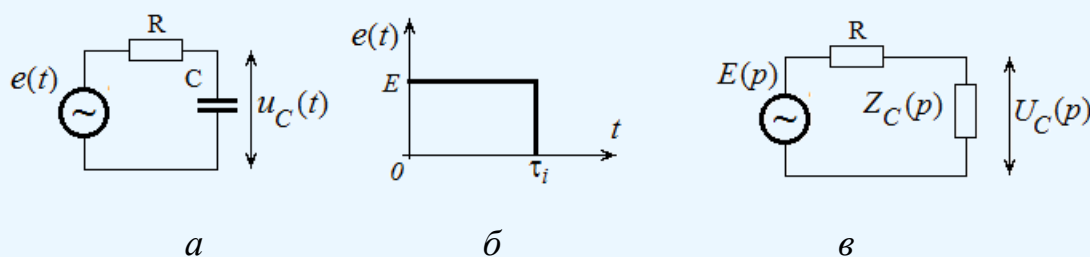


Рис. 4.3. Електрична схема (а), одиничний імпульс напруги (б) та схема заміщення (в)

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок за допомогою передавальної функції ланцюга. Скористаємось схемою заміщення ланцюга, яка представлена на рис.4.3, в. Передавальна функція визначається виразом

$$K(p) = \frac{U_C(p)}{E(p)} = \frac{(pC)^{-1}}{R + (pC)^{-1}} = \frac{1}{pRC + 1} = \frac{1}{p\tau_0 + 1}.$$

В цьому записі τ_0 – постійна часу. Для аналітичного запису вхідного сигналу (рис. 4.3б) скористаємось принципом суперпозиції: представимо $e(t)$ різницею двох більш простих сигналів (функцій Хевісайда): $e(t) = E \cdot \eta(t) - E \cdot \eta(t - \tau_i)$, після чого знайдемо відгук на кожний з них та отримаємо кінцевий результат.

Спочатку знайдемо зображення по Лапласу першої складової вхідного сигналу

$$e_1(t) = E \cdot \eta(t) \rightarrow E_1(p) = E/p.$$

Визначимо зображення першого елементарного відгуку

$$U_{C1}(p) = E_1(p) \cdot K(p) = E / [p(p\tau_0 + 1)].$$

Визначимо оригінал відгуку від першої складової вхідного сигналу. Для цього знайдемо лишки по двом полюсам: $p_1 = 0$, $p_2 = -1/\tau_o$.

$$\begin{aligned} u_{C1}(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E\eta(t)pe^{pt}}{p(p\tau_o + 1)} + \lim_{p \rightarrow -\frac{1}{\tau_o}} \frac{E\eta(t)(p + 1/\tau_o)e^{pt}}{p(p\tau_o + 1)} = \\ &= E \cdot \eta(t) + \frac{E\eta(t)}{\tau_o} \left(\frac{1}{-1/\tau_o} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_o}} \cdot \eta(t) = \\ &= E \cdot 1(t) - Ee^{-\frac{t}{\tau_o}} \cdot \eta(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_o}} \right) \cdot \eta(t). \end{aligned}$$

В аналогічний спосіб визначимо оригінал відгуку від другої складової вхідного сигналу:

$$u_{C2}(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_o}{\tau_o}} \right) \cdot \eta(t - \tau_i).$$

Нарешті, визначимо відгук на прямокутний імпульс як різницю відгуків від двох складових:

$$u_C(t) = u_{C1}(t) - u_{C2}(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_o}} \right) \cdot \eta(t) - E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_o}{\tau_o}} \right) \cdot \eta(t - \tau_i).$$

З отриманого результату витікає, що на інтервалі часу $[0, \tau_i)$ конденсатор заряджається і напруга на ньому збільшується за експоненціальною функцією, а на інтервалі $[\tau_i, \infty)$ – розряджається, напруга експоненціально спадає.

Питання для самоконтролю до розділу 1

1. Які форми представлення комплексних чисел вам відомі?
2. Які функції можуть бути оригіналами для перетворення Лапласа?
3. Дайте визначення зображення функції-оригіналу перетворення Лапласа.
4. Отримайте зображення по Лапласу функції Хевісайда.
5. Згортка функцій та її властивості.
6. Наведіть теореми додавання, подібності, запізнювання для перетворення Лапласа та поясніть зміст всіх складових (функцій та аргументів).

7. Наведіть теореми випередження та зміщення для перетворення Лапласа та поясніть зміст всіх складових (функцій та аргументів).
 8. Інтеграл Дюамеля та теорема про його зображення по Лапласу. Використання інтеграла Дюамеля в електротехнічних розрахунках.
 9. Теорема обернення. Її зміст та використання для визначення функції-оригіналу за її зображенням.
 10. Перша теорема розкладання, її зміст та використання для визначення зображень.
 11. Друга теорема розкладання, її зміст та використання для визначення зображень.
 12. Способи розкладання багаточлена $Q_n(p)$ на множники.
 13. Наведіть формули для визначення функції-оригіналу за полюсами зображення та розшифруйте зміст всіх складових.
 14. Як розкласти зображення по Лапласу на прості дроби?
 15. З якою метою проводиться розкладання зображення по Лапласу на прості дроби?
 16. Операторний метод розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.
 17. Викладіть алгоритм розв'язання систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
 18. Застосування операційного числення для розв'язання задач електротехніки та теорії управління.
 19. Наведіть означення та зміст понять операторний опір та операторна провідність.
 20. Передавальна функція та її використання в електротехнічних розрахунках.
 21. Викладіть алгоритм аналізу перехідних процесів операторним методом.
-

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

У цьому розділі:



- Лекція 5. Основні поняття та визначення теорії ймовірностей.
- Лекція 6. Ймовірнісний простір. Теореми додавання і множення ймовірностей подій.
- Лекція 7. Випадкова величина (ВВ). Теореми про дисперсію та математичне сподівання дискретних ВВ.
- Лекція 8. Схема Бернуллі. Розподіл Бернуллі.
- Лекція 9. Неперервні ВВ.
- Лекція 10. Функціональні перетворення ВВ.
- Лекція 11. Система двох ВВ.

Лекція 5. Основні поняття та визначення теорії ймовірностей

5.1. Загальні поняття та визначення

Теорією ймовірностей називається розділ математики, що вивчає закономірності у випадкових явищах.

Випадкове явище – це таке явище, яке за умови багаторазового відтворення одного й того ж досліду (випробування, експерименту) перебігає щоразу дещо в інший спосіб. Для них характерна значна степінь невизначеностей, непередбачуваностей.

Приклад 5.1. Поширені випадкові явища:

- повторне зважування одного і того ж тіла (або будь-яке інше вимірювання);
- випробування на визначення для серії однотипних виробів часу безвідмовної роботи;
- стрільба з однієї гармати по одній цілі;
- відхилення центра маси літака від заданої траєкторії під час польоту;
- досліди з підкиданням монети чи гральних кісток;
- контроль партії виробів одним з методів неруйнівного контролю.

Первинним поняттям теорії ймовірностей є поняття множини.

Множина – це набір (сукупність, збірка) будь-яких об’єктів, які мають спільну характеристичну властивість. Такі об’єкти називаються **елементами**.

Георг Кантор (1845-1918), німецький математик, який створив основи теорії множин, дав таке означення: «Множина є багато чого, що мислиться як єдине».

Множини можуть мати найрізноманітнішу природу.

Відомо три види множин: скінченні, нескінченні і пуста множина, тобто множина, що не містить жодного елемента (вона позначається як $\emptyset$).

Приклад 5.2. Позначення множин точок на прямій:

- $[\alpha, \beta]$ – відрізок (включає межові точки);
- (α, β) – інтервал;
- $(\alpha, \beta]$ – проміжок;
- $[\alpha, +\infty)$ – проміжок.

Приклад 5.3. Числові множини:

- N – множина натуральних чисел;
- Z – множина цілих чисел;
- Q – множина раціональних чисел;
- R – множина дійсних чисел;
- C – множина комплексних чисел.

Для порівняння множин вводиться поняття потужності множини:

Потужність множини – це узагальнене поняття кількості її елементів.

Г. Кантор визначав **кардинальне число** множини A як її властивість, яка лишається після абстрагування від якості елементів множини та їх порядку у множині. Позначення кардинального числа множини A : $\bar{A}$ або $\text{card } A$. Якщо A – скінченна множина з « n » елементів, то $\text{card } A = n$.

Потужність всіх дійсних чисел дорівнює потужності континуума (від латинського «*continuum*» – безперервне, суцільне), що позначається так: $\text{card } A = c$, де c – потужність континууму.

Дві множини A і B називаються **рівнопотужними**, якщо існує взаємно однозначна функція $f: A \rightarrow B$ з областю визначення A і множиною значень B (тобто коли кожному елементу з A можна поставити у відповідність елементи з B). Цей факт записує так: $\text{card } A = \text{card } B$.

5.2. Випадкові події

Будь-яка наука, що розвиває загальну теорію певного кола явищ, ґрунтується на своїх поняттях і визначеннях. Це стосується і теорії ймовірностей.

Дослід (експеримент, випробування) – деяка відтворювана сукупність умов, за виконання яких спостерігається те чи інше явище, фіксується той чи інший результат. Дослід може проводитись як людиною, так і відбуватись незалежно від дій людини.

Якщо результати дослідів варіюються за його повторювання, кажуть про дослід з **випадковим наслідком**. Саме такі дослідні є предметом вивчення теорії ймовірностей.

Результат проведеного дослідів називається **подією (елементарною подією)**. За результатами дослідів подія може відбутись чи не відбутись. Елементарні події позначатимемо ω_i .

Сукупність всіх елементарних подій: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ утворює **простір елементарних подій**. Запис $\omega_i \in \Omega$ читається як: « ω_i є елементом простору Ω ». Математичний об'єкт Ω можна розглядати як достовірну подію.

Множину можна задати, перелічивши всі її елементи, або визначивши правило, за яким визначається приналежність елемента до множини.

Приклад 5.4. Під час однократного підкидання монети, простір елементарних подій задається так: $\Omega = \{\Gamma, P\}$, де Γ – герб, P – решітка.

Приклад 5.5. У випадку n -кратного підкидання монети маємо:

$$\Omega = \{\omega: \omega=(a_1, \dots, a_n), a_i = \Gamma \text{ чи } P\}.$$

Читається як « Ω – це простір елементарних подій, утворених сукупністю наслідків $(a_1, \dots, a_n)$, кожен з яких може набути значенням Γ чи P ». В цьому випадку загальне число можливих наслідків дорівнює 2^n .

Поряд з поняттям елементарних подій введемо більш складне поняття **події**. Необхідність його введення зумовлена тим, що експериментатора зазвичай цікавить не те, який конкретно наслідок має місце за результатами випробування, а те, чи належить наслідок певній підмножині тобто частині множини Ω . Позначення $A \subset \Omega$ читається як: «подія A є підмножиною Ω (частиною Ω)», або « A міститься у Ω ». Знак $\subset$ – знак приналежності, знак «включення».

5.3. Дії з множинами та їх позначення

$\omega_i \in A$ – елемент ω_i належить підмножині (події) A ;

$\omega_i \notin A$ – елемент ω_i не належить A ;

$A = \emptyset$ – A є пустою множиною, тобто множиною, що не має жодного елемента (це аналог задання 0 на числовій осі);

$A = B$ – рівність множин, має місце коли $A \subset B$ і $B \subset A$ (тобто A є підмножиною B і навпаки), тобто A і B складаються з одних і тих самих елементів;

$A \cup B$ – **об'єднання множин** – це множина, що складається з елементів, що належать хоча б одній з множин A і B ;

$A \cap B$ – **переріз множин** – це множина, що складається з елементів, що належать як A , так і B .

Операції об'єднання і перерізу комутативні, асоціативні та взаємодистрибутивні.

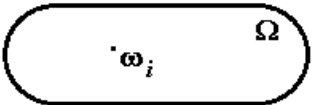
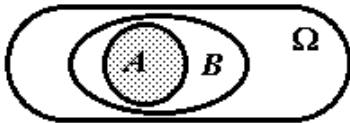
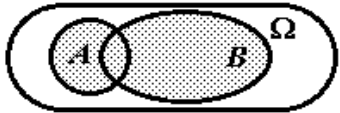
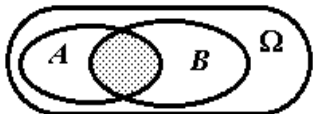
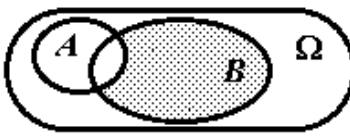
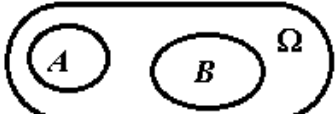
$\bar{A} = B \setminus A = \{\omega_i \in B : \omega_i \notin A\}$ – доповнення множини A ; пуста множина: $\emptyset = A \setminus A$.

$A^c = \Omega \setminus A$ – доповнення підмножини A до Ω .

Операції об'єднання, перерізу і доповнення пов'язані законами де Моргана, наприклад: $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

Для наочного зображення множин і операцій з ними застосовують **круги Ейлера (діаграми Венна)**. Ймовірнісне трактування теоретико-множинних операцій та їх графічне зображення за допомогою діаграм Венна представлено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1. Ймовірнісне трактування теоретико-множинних операцій

Теоретико-множинні об'єкти та операції	Ймовірнісне трактування	Геометричне представлення
Ω – множина	простір елементарних подій, достовірна подія	
ω_i – елемент Ω , $\omega_i \in \Omega$	елементарна подія	
A – підмножина множини Ω	подія	
$\emptyset$ – пуста множина	неможлива подія	
$A \subset B$ – підмножина A є частиною підмножини B	подія A тягне подію B	
A^c – доповнення підмножини A до Ω	подія A не відбулась	
$A \cup B$ – об'єднання підмножин A і B	відбулась принаймні одна з подій – A чи B	
$A \cap B$ – переріз підмножин A і B	відбулись одночасно дві події – A і B	
$B \setminus A$ – різниця підмножин B і A	відбулась подія B в той час як подія A не відбулась	
$A \cap B = \emptyset$ – множини A і B не мають спільних елементів	події A і B несумісні	

Розглянемо ряд означень, пов'язаних з поняттям «подія».

- **Ймовірністю події** називається міра степені об'єктивної можливості цієї події. Позначатимемо $P(A)$ – ймовірність події A ; ймовірність довільної події A належить інтервалу $[0, 1]$, тобто $0 \leq P(A) \leq 1$.
- **Вірогідною** називається подія U , яка за результатами досліду неодмінно повинна відбутись: $P(U) = 1$;
- **Неможливою** називається подія V , яка за результати досліду не може відбутись: $P(V) = 0$;
- Дві події називаються **несумісними**, якщо в ході випробувань поява однієї з них виключає можливість появи іншої. Наприклад, попадання з одного пострілу у дві мішені.
- Дві події називаються **сумісними**, якщо в ході випробувань поява однієї з них не виключає можливість появи іншої. До прикладу, попадання артилерійським залпом (10 пострілів) в 2,3,...цілі.
- Події називаються **єдино можливими**, коли в ході випробувань неминуче станеться хоча б одна з цих подій. Приклад: події за наслідком кидання монети, кубиків.
- Дві єдино можливі несумісні події називаються **протилежними**. Приклад: події за наслідком кидання монети. Позначаються: A і $\bar{A}$.
- Якщо за наслідками ряду випробувань можуть з'явитись декілька можливих подій і немає підстав припускати, що поява одних подій є більш можливою за появу інших, такі події називаються **рівноможливими**. Приклад: кидання грального кубика, монети.
- **Повна група подій**. Декілька подій в певному досліді утворюють повну групу подій, якщо за результатами досліду неминуче повинна з'явитись хоча б одна з них.

Класичне визначення ймовірності деякої події A дається формулою

$$P(A) = m/n, \quad (5.1)$$

де m – кількість елементарних наслідків досліду, що сприяють появі події появи A , n – число всіх можливих елементів простору Ω . Отже, дослідження теоретико-ймовірнісних схем зі скінченим числом рівноймовірних наслідків зводиться до розв'язання задач комбінаторики.

Існує й інше, статистичне, означення ймовірності події A , яке ґрунтується на результатах ряду повторюваних випробувань. В його основі лежить поняття відносної частоти події:

$$W(A) = m(n)/n, \quad (5.2)$$

де $m(n)$ – число випробувань, в яких настала подія A при загальному числі випробувань n .

За **статистичну ймовірність** приймається відносна частота події A за умови $n \rightarrow \infty$:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(A). \quad (5.3)$$

Класичне визначення ймовірності використовують для аналізу теоретичних моделей, а статистичне – для опрацювання експериментальних даних. До прикладу, при оцінюванні випадання решітки у випадку підкидання монети (за припущення про рівні ймовірності подій) $P(A) = 1/2$; якщо при підкиданні монети в 40 дослідах отримали 19 решіток, то маємо статистичну ймовірність $W(A) = 19/40$. Отже, приймаємо: $P(A) \approx 19/40$.

5.4. Елементи комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, який вивчає найпростіші «поєднання» елементів множин.

1. **Перестановками** з « n » елементів називаються такі їх поєднання, які відрізняються одне від одного тільки порядком елементів. Число перестановок

$$P_n = n!. \quad (5.4)$$

Факторіали великих чисел можуть бути наближено обчислені за **формулою Стірлінга**:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}, \quad n \gg 1. \quad (5.5)$$

2. **Розміщенням** з « n » елементів по « m » називають такі їх поєднання, які відрізняються один від одного самими елементами або їх порядком.

Приклад 5.6. Розміщення з 3 елементів a, b, c по 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb . Подібні комбінації утворюються, наприклад, у випадку послідовного вибору без повернення елементів $a_{i1}, \dots, a_{im}$ з деякої загальної сукупності $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Число всіх розміщень визначається формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (5.6)$$

3. **Сполучення** з « n » елементів по « m » називають їх поєднання, що

відрізняються один від одного самими елементами. Тобто в комбінаціях $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$, складених із загальної сукупності $a_1, \dots, a_n$ обсягу n не враховується порядок елементів, так що комбінації з одними і тими самими елементами вважаються рівними.

Приклад 5.7. Сполучення з 3 елементів a, b, c по 2: $ab; ac; bc$.

Число всіх сполучень визначається формулою

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (5.7)$$

Властивість: $C_n^m = C_n^{n-m}$.

4. Вибір елементів з поверненням. Нехай з певної сукупності n елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$ виконується вибір, за якого послідовно вибирається один з елементів a_i , який щоразу повертається у загальну сукупність. За r кроків реєструється вибірка $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}$. Число можливих комбінацій (вибірок) дорівнює

$$K = n^r. \quad (5.8)$$

Цей результат легко перевірити на прикладі кидання монети.

5.5. «Геометричні» ймовірності

«Геометричні» ймовірності застосовують для обчислення ймовірності на множинах нескінченних обсягів. Такі множини є рівнопотужними з множинами точок прямої, площі деякої фігури або об'єму. Це дає змогу обчислювати ймовірності через відношення довжин відрізків, площ фігур або об'ємів тривимірних тіл.

Приклад 5.8. Нехай на відрізок довжиною L деякої прямої навмання «кидається» точка. Якою є ймовірність того, що вона впаде не далі, ніж на відстань l від середини вказаного відрізка? (див. рис. 5.1).

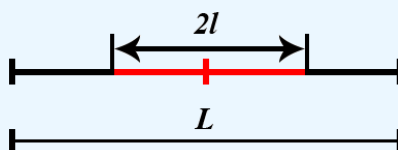


Рис. 5.1. Визначення геометричної ймовірності за довжиною відрізків

Розв'язання. Подія A – «точка знаходиться від середини на відстані не більше l » – настає в результаті попадання в будь-яку точку відрізка $2l$. Частка Δ таких точок x у всьому відрізку може бути визначена як відношення довжин відрізків

$$L(A)/L = 2l/L.$$

Для всіх можливих випадків шукана ймовірність визначається як

$$P(A) = \frac{L(A)}{L} = \begin{cases} \frac{2l}{L}, & \text{якщо } 2l < L, \\ 1, & \text{якщо } 2l \geq L. \end{cases}$$

Приклад 5.9. Нехай на відрізок довжиною L «кидаються» навмання і незалежно одна від одної дві різні точки ξ_1 і ξ_2 . Якою є ймовірність того, що відстань між ними буде не більше l ?

Розв'язання. Розглянемо наступну модель. Координату точки ξ_1 , відкладемо на відрізку $[0, L]$ осі x_1 , а координату ξ_2 – на $[0, L]$ осі x_2 (рис. 5.2).

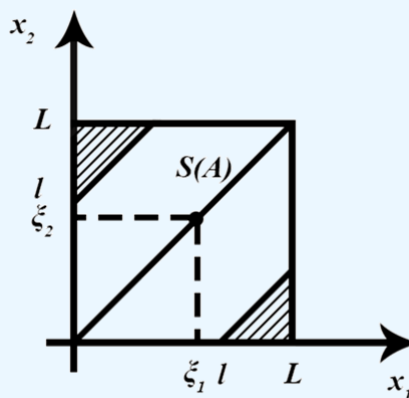


Рис. 5.2. Визначення геометричної ймовірності за площею фігур

Можна вважати, що точка (ξ_1, ξ_2) кидається навмання в квадрат зі стороною L .

Шукана ймовірність співпадає з ймовірністю події A , яка полягає в тому, що випадково кинута точка (ξ_1, ξ_2) потрапляє в область квадрата, обмежену прямими з рівняннями $x_2 = x_1 \pm l$ (на рис. 5.2 це незашифрована

область). Тому ймовірність події A може бути визначена як відношення площ:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S} = \frac{S(A)}{L \cdot L} = \frac{L^2 - (L-l)^2}{L^2} = 1 - \left(1 - \frac{l}{L}\right)^2.$$

Лекція 6. Ймовірнісний простір. Теореми додавання і множення ймовірностей подій

6.1. Ймовірнісна модель стохастичних експериментів

Трійка об'єктів $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, де $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – простір подій, $\mathcal{F}$ – алгебра множин, тобто непорожня сукупність підмножин з Ω , $\mathcal{F} = \{A: A \subset \Omega\}$, а $P = \{P(A); A \in \mathcal{F}\}$ – ймовірність будь-якої події $A \in \mathcal{F}$ називається **ймовірнісною моделлю** або **ймовірнісним простором**.

Події $A \in \mathcal{F}$ утворюються з елементарних подій за допомогою теоретично-множинних операцій (об'єднання, перерізу, доповнення). Алгебри подій будуються за наступним загальним принципом. Говоритимемо, що система множин $D = \{D_1, \dots, D_n\}$ утворює **розбиття** множин Ω , а $D_i \in$ **атомами** розбиття, якщо D_i непорожні, попарно несумісні, а їх сума $\sum D_i = \Omega$ (рис. 6.1).

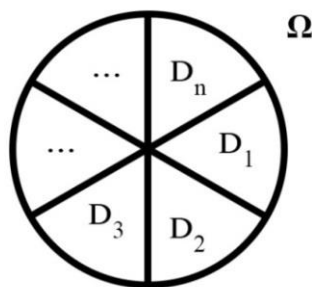


Рис. 6.1. Розбиття множини Ω

Всі можливі об'єднання атомів з D_i разом з пустою множиною утворюють алгебру, породжену розбиттям D . Цей факт позначається так: $\mathcal{F} = \alpha(D)$.

Задана на алгебрі множин ймовірнісна міра (або просто ймовірність) має такі властивості:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ (невід'ємність).

2. $\boxed{P(\emptyset) = 0}$.
3. $\boxed{P(\Omega) = 1}$.
4. $\boxed{P(D_1) + P(D_2) + \dots + P(D_n) = 1}$ (нормованість).
5. $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

В частковому випадку, якщо $A \cap B = \emptyset$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B); \quad (6.1)$$

$$P(\bar{A}) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A). \quad (6.2)$$

6.2. Аксиоми сучасної теорії ймовірностей (аксиоми Колмогорова)

Узагальнюючи наведені вище дані, викладемо **аксиоми сучасної теорії ймовірності (аксиоми Колмогорова)**, які покладені в основу побудови ймовірнісного простору.

1. $\mathcal{F}$ є алгеброю множин.

Система $\mathcal{F}$ підмножин множини Ω називається **алгеброю**, якщо $\Omega \in \mathcal{F}$, об'єднання, перетин і різниця двох множин системи також належать цій системі, тобто якщо $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$, $A \cup B \in \mathcal{F}$, $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

2. Кожній множині $A \in \mathcal{F}$ поставлене у відповідність деяке невід'ємне число $P(A)$, що називається **ймовірністю події A** .

$$3. \quad \boxed{P(\Omega) = 1}.$$

4. $\boxed{P(\emptyset) = 0}$, де $\emptyset$ – порожня множина, тобто множина, яка не містить жодного елемента.

5. Якщо події A і B несумісні, тобто $A \cap B = \emptyset$, то

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B)}. \quad (6.3)$$

Сукупність об'єктів $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, що задовольняє аксиоми 1–5, називається **ймовірнісним простором** і повністю визначає ймовірнісну модель експерименту зі скінченним числом наслідків.

6.3. Умовна ймовірність

Для довільних подій A та B з ймовірністю $P(B) \neq 0$ **умовна ймовірність** події A за умови, що B відбулася визначається як відношення $P(AB)/P(B)$ і позначається:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}. \quad (6.4)$$

Це визначення можна пояснити такими міркуваннями. Нехай простір подій Ω містить N елементів, подія A – n , подія B – m , а подія AB – p елементарних подій. Графічна ілюстрація простору подій представлена на рис. 6.2.

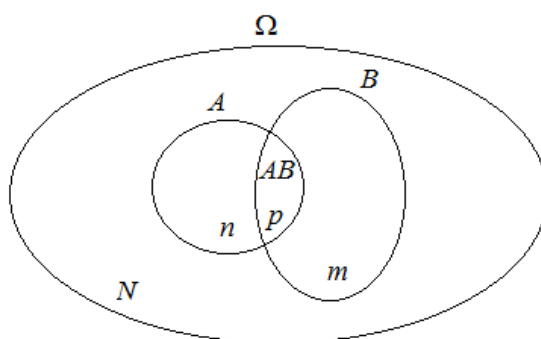


Рис. 6.2. Представлення простору подій кругами Ейлера

Всі елементарні події є рівноймовірними. До проведення експерименту маємо: $P(B) = m/N$, $P(A) = n/N$.

Нехай визначається $P(A)$ і в ході експерименту відбулася подія B . Це приводить до того, що початковий простір Ω трансформувався (звужився) до події B . Отже, новий (апостеріорний) простір подій $\Omega_1 = B \cap \Omega = B$. З цього простору тільки подія AB пов'язана зі здійсненням події A . Отже,

$$P(A|B) = \frac{p}{m} = \frac{p}{N} \cdot \frac{1}{m/N} = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A). \quad (6.5)$$

Подія A не залежить від події B , якщо має місце рівняння:

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}. \quad (6.6)$$

Якщо A не залежить від B , то і B не залежить від A . Тому для незалежних подій:

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}. \quad (6.7)$$

Поняття незалежних подій можна розширити на довільну кількість подій. Якщо події $B_1, B_2, \dots, B_n$ незалежні, то $P(B_1 B_2 \dots B_n) = P(B_1)P(B_2) \dots P(B_n)$.

6.4. Теореми множення ймовірностей

Добутком двох подій A і B називають подію AB , яка полягає у спільній появі цих подій.

Теорема 6.1 Ймовірність спільної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності першої події A на умовну ймовірність події B , визначену за припущення, що подія A відбулася:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A). \quad (6.8)$$

Для незалежних подій A і B маємо: $P(B|A) = P(B)$. В цьому частковому випадку має місце така теорема.

Теорема 6.2 Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (6.8)$$

Наведені теореми 6.1 і 6.2 поширюються на довільне число залежних чи незалежних подій.

Теорема 6.3 Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_n). \quad (6.9)$$

Доведення. Позначимо як A подію появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$. Події A і $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$ (жодна з подій не наступила) протилежні, отже сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 1. \quad (6.10)$$

Користуючись теоремою множення 6.2, отримуємо:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \dots \cdot P(\bar{A}_n). \quad (6.11)$$

6.5. Теореми додавання ймовірностей

Сумою $A + B$ двох подій A і B називають подію, що полягає у появі A чи B , чи обох цих подій.

Дві події називаються **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в тому самому випробуванні.

Теорема 6.4

Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_r$ є такими, що кожні дві з них є несумісними, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює сумі ймовірностей:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_r) = P(A_1) + \dots + P(A_r). \quad (6.12)$$

Доведення. Нехай з n рівноймовірних випадків m_1 випадків є сприятливими для настання події A (рис.6.3). Тоді $P(A) = \frac{m_1}{n}$.

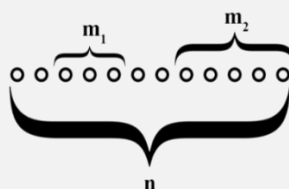


Рис. 6.3. Ілюстрація до теореми 6.4

Нехай також m_2 випадків є сприятливими для появи події B , тому: $P(B) = \frac{m_2}{n}$.

Число випадків сприятливих подій або A або B дорівнює $m_1 + m_2$, тому:

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B). \quad (6.13)$$

Розглянута теорема відображає властивість адитивності ймовірнісної міри. Її висновок можна поширити на довільну сукупність попарно несумісних подій.

Приклад 6.1. Стрілок стріляє по мішені, яка розділена на три частини. Ймовірність влучання у першу область дорівнює 0,25, у другу – 0,4. Знайти ймовірність того, що стрілок за одного пострілу влучання або в першу, або у другу область.

Розв'язання. Позначимо: подія A – «стрілок влучив у першу область» і подія B – «стрілок влучив у другу область». Ці події несумісні, бо влучання у одну область виключає попадання в другу, тому застосуємо теорему додавання ймовірностей: $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,25 + 0,4 = 0,65$.

Теорема 6.5

Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності спільної появи цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B|A). \quad (6.14)$$

У випадку незалежних подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \quad (6.15)$$

Приклад 6.2. Ймовірність влучання у ціль під час стрільби першої та другої гармати дорівнює відповідно 0,6 і 0,5. Знайти ймовірність влучання в ціль в одному залпі (з обох гармат) хоча б з одної гармати.

Розв'язання. Позначимо: подія A – «перша гармата влучила у ціль» і подія B – «друга гармата влучила у ціль». Ймовірність влучання в ціль кожною з гармат не залежить від результату стрільби другої гармати, тому події A і B є незалежними.

Ймовірність події AB (обидві гармати поцілили у ціль):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3.$$

Тоді шукана ймовірність

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8.$$

Повною групою називають сукупність єдино можливих подій випробування.

Приклад 6.3. Стрілець виконує два постріли по мішені. Подія A_1 – одне влучання, подія A_2 – два влучання, і подія A_3 – промах, утворюють повну групу подій.

Теорема 6.6 | Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, \dots, A_r$, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_r) = 1. \quad (6.16)$$

Протилежними називаються дві єдино можливі події, що утворюють повну групу.

Приклад 6.4. Влучання в ціль – подія A , промах – $\bar{A}$.

Теорема 6.7 | Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (6.17)$$

Приклад 6.5. Скористаємось умовою прикладу 6.2. Визначимо для події $A+B$ протилежну подію – жодна з гармат не влучила у ціль. Її ймовірність, враховуючи незалежність подій, можна визначити як добуток ймовірностей протилежних подій:

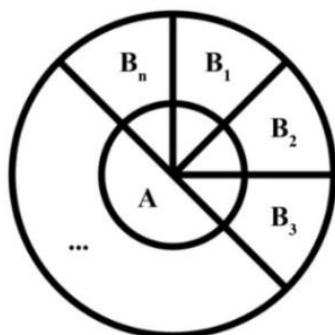
$$(1-P(A)) \cdot (1-P(B)) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2.$$

Оскільки події A і B незалежні, то $P(A+B) = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B})$. Тоді шукана ймовірність

$$P(A+B) = 1 - (1-P(A)) \cdot (1-P(B)) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

6.6. Формула повної ймовірності

Нехай подія A може наступити за умови однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \dots, B_n$, які утворюють повну групу (рис. 6.4). Нехай відомі ймовірності цих подій і умовні ймовірності виду $P(A|B)$ є відомими. Тоді як знайти ймовірність $P(A)$? Відповідь на це питання дає теорема 6.8.

Рис. 6.4. Представлення події A з несумісними подіями $B_1, B_2, \dots, B_n$ **Теорема 6.8**

Ймовірність події A , яка може наступити лише за умови появи події з несумісних подій $B_1, B_2, \dots, B_n$, які утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i). \quad (6.18)$$

6.7. Поняття гіпотез. Формула Байєса

Нехай подія A може наступити за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \dots, B_n$, що утворюють повну групу. Оскільки наперед невідомо, яка з подій наступить, їх називають **гіпотезами (науковими припущеннями)**. Ймовірність появи події A визначається формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n).$$

Припустимо, що проведено випробування, за результатами якого мала місце подія A . Як трансформувалась (у зв'язку з тим, що подія A вже настала) ймовірність гіпотез? Простими словами будемо шукати умовні ймовірності $P(B_1|A), P(B_2|A), \dots, P(B_n|A)$.

З теореми 6.1 множення ймовірностей маємо:

$$P(AB_i) = P(A) \cdot P(B_i|A); \quad P(AB_i) = P(B_i) \cdot P(A|B_i).$$

З цих рівнянь отримаємо апостеріорну ймовірність i -ї гіпотези:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)}. \quad (6.19)$$

Ця формула називається **формулою Байєса** (за прізвищем видатного англійського математика, пресвітеріанського священника Т. Bayes, 1701-1761). Вона була вперше опублікована у 1763 році. Ця формула дає змогу переоцінити ймовірність гіпотез після того, як стає відомим результат випробування, в якому з'явилась подія A .

Лекція 7. Випадкова величина (ВВ). Теореми про дисперсію та математичне сподівання дискретних ВВ

7.1. Поняття ВВ

В ході проведених експериментів мають справу з подіями різного фізичного змісту. Аналізувати та досліджувати безпосередньо самі події дуже важко, оскільки вони визначаються не числами, а вербальними (від латинського «*verbalis*» – словесний) конструкціями, певними логічними умовами. Тому від випадкових подій переходять до ВВ. Це значно спрощує дослідження самих подій і дає змогу математично формалізувати цей процес.

Випадковою величиною (дійсною випадковою величиною, ВВ) називають числову функцію $\xi = \xi(\omega)$ з областю визначення $\Omega = \{\omega_i\}$ та областю значень $x \subseteq R$. Отже, ВВ – це правило (числова функція, задана на просторі подій), яка ставить у відповідність елементарній події $\omega \in \Omega$ число $x \subseteq R$.

Зазвичай, ВВ позначають літерами грецького алфавіту: ξ («ксі»), η («ета»), ζ («дзета») тощо.

Якщо ВВ ξ набуває кінцеве або зліченне число значень, така ВВ називається **дискретною**, у протилежному випадку – **неперервною**. Ілюстрацію задання дискретної ВВ показано на рис. 7.1.

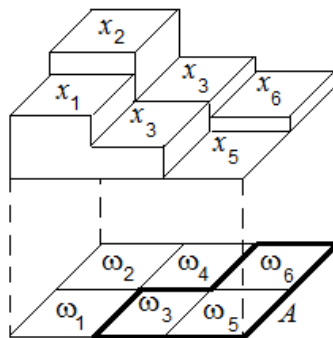


Рис. 7.1. Графічне представлення задання дискретної ВВ

Законом розподілу називається співвідношення, яке пов'язує її можливі значення з відповідними ймовірностями, з якими ці значення приймаються.

Форми представлення закону розподілу можуть бути різними: таблична, графічна, аналітична – тобто формулою, яка відтворює правило обчислення ймовірностей. Найпростішою формою закону розподілу дискретної ВВ $\xi(\omega)$ є таблиця (див. табл. 7.1).

Варто пам'ятати, що сума ймовірностей у цьому ряді завжди дорівнює одиниці: $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$. Таку таблицю або її графічне представлення називають **розподілом імовірності** ВВ ξ .

Таблиця 7.1. Таблиця із законом розподілу дискретної ВВ

$\xi(\omega)$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{n-1}	x_n
P	P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_{n-1}	P_n

Крім табличного способу розподіли можуть задаватись графічно чи аналітично, тобто формулою, яка відтворює правило обчислення ймовірностей. Прикладами такого завдання є розподіли Бернуллі та Пуассона, які розглядатимуться в лекції 8.

Та обставина, що для різних ω ВВ ξ може набувати одне й те саме значення є суттєвою: множина $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ можливих значень ВВ може бути значно спрощена відносно множини Ω .

В прикладних задачах теорії ймовірностей частіше розглядають не самі ВВ, а їх розподіли. Це пов'язано з тим, що зазвичай результатами експериментів є не випадкові події ω_i , а ВВ, тобто певні числові значення, які реєструються різними приладами чи іншими технічними засобами.

7.2. Числові характеристики дискретних ВВ

7.2.1. Математичне сподівання дискретної ВВ

Математичне сподівання дискретної ВВ – це сума добутків всіх її можливих значень та їх ймовірностей

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{i=1}^n x_i P_i. \quad (7.1)$$

Це не випадкова величина – число. Ймовірносний сенс математичного сподівання дискретної ВВ полягає у тому, що воно наближено дорівнює середньому арифметичному спостережуваних значень ВВ. Дійсно, якщо спостережувані значення рівноімовірні, тобто $P_i = 1/n$, то

$$M\xi = \sum_{i=1}^n x_i P_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (7.2)$$

Математичне сподівання характеризує розміщення розподілу ВВ на осі x , тому його ще називають **центром розподілу**.

Математичне сподівання дискретної ВВ має такі властивості:

1. $\boxed{MC = C}$, тобто математичне сподівання константи $C = \text{const}$ дорівнює константі.
2. $\boxed{M(C \cdot \xi) = C \cdot M\xi}$.
3. Математичне сподівання добутку двох незалежних ВВ дорівнює добутку їх математичних сподівань

$$\boxed{M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta}. \quad (7.3)$$

4. Математичне сподівання суми двох ВВ (залежних або незалежних) дорівнює сумі їх математичних сподівань

$$\boxed{M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta}. \quad (7.4)$$

5. Математичне сподівання відхилення (тобто різниці) між ВВ та її математичним сподіванням дорівнює нулю: $\boxed{M(\xi - M\xi) = 0}$.

7.2.2. Дисперсія дискретної ВВ

Дисперсія (від латинського «*dispersus*» – розсіювання) дискретної ВВ – це математичне сподівання квадрата відхилень ВВ від її математичного сподівання

$$\boxed{D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - M\xi)^2 \cdot P_i}. \quad (7.5)$$

Це не випадкова величина, яка характеризує розсіювану ВВ в околі її математичного сподівання.

Дисперсія дискретної ВВ має такі властивості:

1. $\boxed{D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2}$.

2. $\boxed{DC = 0}.$

3. $\boxed{D(C\xi) = C^2 \cdot D\xi}.$

4. Дисперсія суми двох незалежних ВВ дорівнює сумі їх дисперсій

$$\boxed{D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta}. \quad (7.6)$$

5. Дисперсія різниці двох незалежних ВВ дорівнює сумі їх дисперсій

$$\boxed{D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta}. \quad (7.7)$$

6. $\boxed{D\xi \geq 0}.$

7.2.3. Середнє квадратичне відхилення (СКВ) ВВ

Середнє квадратичне відхилення (СКВ) ВВ – це додатне значення кореня квадратного з дисперсії

$$\boxed{\sigma_\xi = +\sqrt{D\xi}}. \quad (7.8)$$

Зручність використання цієї характеристики у випадку досліджень фізичних величин особливо відчутна: розмірність σ_ξ збігається з розмірністю ξ , тобто $\dim(\sigma_\xi) = \dim(\xi)$.

Для незалежних ВВ доведена така теорема.

**Теорема
7.1**

СКВ суми скінченного числа взаємо незалежних ВВ дорівнює квадратному кореню з суми квадратів СКВ цих величин:

$$\boxed{\sigma_{(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)} = \sqrt{(\sigma_{\xi_1})^2 + (\sigma_{\xi_2})^2 + \dots + (\sigma_{\xi_n})^2}}. \quad (7.9)$$

Ця теорема широко використовується в теорії похибок для визначення СКВ випадкової складової результату непрямого вимірювання фізичних величин.

7.3. Дисперсія числа появ подій в незалежних випробуваннях

Нехай здійснюється n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність події A постійна. Як визначити дисперсію числа появ події A ?

Відповідь на це питання дає така теорема.

Теорема 7.2

Дисперсія числа появи події A в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність $P(A)$ появи події A постійна, дорівнює добутку числа випробувань n на ймовірність появи p і не появи q події в одному випробуванні:

$$\boxed{D\xi = npq}. \quad (7.10)$$

Доведення: Розглянемо випадкову величину $\mu(\omega)$ – число появ події A в n незалежних випробуваннях. Вочевидь, загальне число появ події в цих випробуваннях дорівнює сумі появ події в окремих випробуваннях

$$\mu(\omega) = \mu_1(\omega) + \mu_2(\omega) + \dots + \mu_n(\omega), \quad (7.11)$$

де $\mu_i(\omega)$ – число настання події в i -му випробуванні.

ВВ $\mu_i(\omega)$ взаємно незалежні, оскільки наслідок кожного випробування не залежить від наслідків решти випробувань, тому (див. властивості дисперсії)

$$D\mu = D\mu_1 + D\mu_2 + \dots + D\mu_n. \quad (7.12)$$

Обчислимо $D\mu_i$ за формулою

$$D\mu_i = M\mu_i^2 - (M\mu_i)^2. \quad (7.13)$$

За умовою теореми $M\mu_i = p$. Визначимо математичне сподівання $M\mu_i^2$. Якщо $\mu_i(\omega)$ набуває в кожному окремому випробуванні тільки два значення (поява події A і не появи події $\bar{A}$ – протилежні події), а саме «1» з ймовірністю p і «0» з ймовірністю $q=1-p$:

$$M\mu_i^2 = 1^2 p + 0^2 q = p. \quad (7.14)$$

Тоді $D\mu_i = p - p^2 = p(1-p) = pq$. Очевидно, дисперсія кожної з решти ВВ також дорівнює pq . Тоді $D\mu = npq$.

7.4. Однаково розподілені взаємно незалежні випадкові величини

Така модель сукупності ВВ є базовою для опрацювання результатів багаторазових вимірювань числового значення певної фізичної величини.

Результат кожного окремого вимірювання залежить від багатьох випадкових факторів: варіації напруги джерел живлення, механічних вібрацій, коливань метеорологічних параметрів, наявності зовнішніх електромагнітних завад тощо. Такі фактори не можуть бути заздалегідь враховані. Це дає підстави розглядати можливі результати n окремих вимірювань однієї фізичної величини, тобто сукупність значень $x_1, x_2, \dots, x_n$, як такі, що з'явилися в результаті випробувань сукупності n взаємно незалежних ВВ $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$. Останні мають однакові розподіли ймовірності, отже і однакові числові характеристики – математичне сподівання та дисперсію (у разі опрацювання результатів фізичних експериментів значення $M\xi, D\xi, \sigma_\xi$ – розмірні величини).

Розглянемо n взаємно незалежних ВВ $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$, які мають однакові розподіли, отже і однакові числові характеристики. Така ймовірнісна модель використовується у випадку опрацювання даних повторюваних вимірювань фізичної величини незмінного числового значення.

Найбільший інтерес для практичного застосування представляє вивчення середнього арифметичного ВВ

$$\bar{\xi}(\omega) = \frac{\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{n}. \quad (7.15)$$

Для $\bar{\xi}(\omega)$ мають місце такі теореми.

**Теорема
7.3**

Математичне сподівання середнього арифметичного однаково розподілених взаємно незалежних ВВ дорівнює математичному сподіванню « a » кожної з цих величин:

$$M\bar{\xi}(\omega) = M\xi_i(\omega) = a. \quad (7.16)$$

**Теорема
7.4**

Дисперсія середнього арифметичного n однаково розподілених взаємно незалежних ВВ в n разів менша за дисперсію складових

$$D\bar{\xi}(\omega) = \frac{D\xi}{n}. \quad (7.17)$$

**Теорема
7.5**

СКВ середнього арифметичного n однаково розподілених взаємно незалежних ВВ в $\sqrt{n}$ разів менше СКВ σ_ξ кожної з них:

$$\sigma_{\bar{\xi}} = \sigma_{\xi} / \sqrt{n}. \quad (7.18)$$

7.5. Поняття про моменти розподілу ВВ вищих порядків

Приклад 6.6. Розглянемо дискретну ВВ $\xi(\omega)$, задану таким розподілом:

$\xi(\omega)$	1	2	5	100
p	0,6	0,2	0,19	0,01

Її математичне сподівання:

$$M_{\xi} = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,19 + 100 \cdot 0,01 = 2,95.$$

Тепер розглядаємо закон розподілу $\xi^2(\omega)$ та визначимо $M_{\xi^2}(\omega)$

$\xi^2(\omega)$	1	4	25	10000
p	0,6	0,2	0,19	0,01

$$M_{\xi^2}(\omega) = 1 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,19 + 10000 \cdot 0,01 = 106,15.$$

З цього прикладу видно, що $M_{\xi^2}(\omega) \gg M_{\xi}$. Це пояснюється тим, що після зведення в квадрат, внесок великих, але малоїмовірних значень ВВ в математичне сподівання суттєво збільшився. Ось чому виявляється доцільним розглядати математичне сподівання цілої додатної степені ВВ більшої за одиницю (тобто моменти розподілу ВВ вищих порядків)!

Початковим моментом порядку k ВВ $\xi(\omega)$ називають математичне сподівання величини $\xi^k(\omega)$

$$v_k = M_{\xi^k}(\omega). \quad (7.19)$$

Центральним моментом порядку k ВВ $\xi(\omega)$ називають математичне сподівання величини $(\xi - M_{\xi})^k$

$$\mu_k = M(\xi - M_{\xi})^k. \quad (7.20)$$

Використовуючи властивості математичного сподівання, можна отримати:

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2,$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1 v_2 + 2 v_1^3,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4 \nu_3 \nu_1 + 6 \nu_2 \nu_1^2 - 3 \nu_1^4.$$

Моменти більш високих порядків використовують рідко.

Лекція 8. Повторювання випробувань. Закони великих чисел

8.1. Схема Бернуллі. Розподіл Бернуллі

Схема Бернуллі – це ймовірнісна модель, що відповідає n незалежним випробуванням з двома наслідками. Така модель виникає, до прикладу, під час контрольних випробувань приладів чи виробів (справний/несправний, норма/брак), або у випадку підкидання монет (герб/решітка).

Два наслідки кожного випробування в схемі Бернуллі позначають символами 1 чи 0, або називають успіхом та неуспіхом, а відповідні їм ймовірності – літерами p і $q=1-p$. Якщо позначити число успіхів (число одиниць) в n випробуваннях як μ_n , то

$$P(\mu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}, \quad m = \overline{0, n}, \quad (8.1)$$

тобто це ймовірність складної події типу $\underbrace{AA \dots A}_m \underbrace{\bar{A} \bar{A} \dots \bar{A}}_{n-m}$ – досягнення m успіхів та $(n-m)$ неуспіхів в n випробуваннях.

Виведення наведеної вище формули ґрунтується на таких міркуваннях:

- не важливо, в якому порядку відбуваються успіхи;
- ймовірність однієї складної події (m успіхів в n випробуваннях) визначається як $p^m q^{n-m}$;
- загальна кількість складних подій дорівнює числу сполучень з n елементів по m – C_n^m .

Розподіл ВВ μ_n з ймовірностями $P(\mu_n = m)$ називається **розподілом Бернуллі (біноміальним)**. Назва «біноміальний» пояснюється тим, що $P(\mu_n = m)$ можна розглядати як загальний член розкладу **бінома Ньютона**:

$$(p+q)^n = C_n^0 p^n + C_n^1 p^{n-1} q + \dots + C_n^m p^m q^{n-m} \dots + C_n^n q^n. \quad (8.2)$$

За великих n для обчислення ймовірності того, що число успіхів в n випробуваннях схеми Бернуллі знаходиться в межах між значеннями m_1 та m_2 , тобто $m_1 \leq \mu_n \leq m_2$, використовують локальну та інтегральну теореми Муавра-Лапласа. Асимптотична формула обчислення ймовірності такої події для $p=0,5$

отримана видатним англійським математиком А. Муавром у 1730 році, а в 1783 році відомий французький математик П. Лаплас узагальнив її для довільного $p \in [0, 1]$.

8.2. Локальна теорема Лапласа

Теорема 8.1

Якщо ймовірність p появи події A в кожному досліді постійна і відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A в n дослідів з'явиться m разів наближено дорівнює (чим більше n , тим точніше) значенню функції:

$$P_n(m) = y(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad (8.3)$$

де $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$

Для функції $\varphi(x)$ складені довідкові таблиці. Ця функція є парною: $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Задовільна точність обчислення функції (8.3) досягається, якщо $npq \geq 10$.

8.3. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Теорема 8.2

Якщо ймовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює p , $0 < p < 1$, постійна, то за умови $n \rightarrow \infty$ для будь-яких a і b :

$$P\left\{a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

де $\Phi(\cdot)$ – функція Лапласа:

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2} dx. \quad (8.4)$$

В наведеній теоремі np – математичне сподівання ВВ μ_n ($M\mu_n = np$), npq – дисперсія ВВ μ_n ($D\mu_n = npq$).

Функція Лапласа є непарною: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Значення цієї функції табульовані (див. додаток Г). На практиці найчастіше використовуються в розрахунках такі значення: $\Phi(0) = 0$; $\Phi(1) = 0,3413$; $\Phi(2) = 0,4772$; $\Phi(3) = 0,4987$.

8.4. Розподіл Пуассона

Розглянемо інший приклад аналітичного завдання дискретної ВВ – розподіл Пуассона. Нехай виконується n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність настання події A дорівнює $P(A) = p$. Для визначення ймовірності появ k разів події A в таких дослідах використовують формулу Бернуллі. Однак вона не придатна у разі, якщо $p \leq 0,1$, а $n \gg 1$. В таких випадках вдаються до формули Пуассона.

Зробимо важливе припущення: добуток np зберігає постійне значення: $np = \lambda$. Це означає, що середнє число появи подій A в різних серіях випробувань (за різних n) лишається незмінним.

Скористаємось формулою Бернуллі з підстановкою $p = \lambda/n$:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}. \quad (8.5)$$

Визначимо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{n^k} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}. \quad (8.6)$$

Перша і остання границі прямують до 1. Другий множник, згідно з виразом для другої чудової границі ($\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$), дорівнює

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda} \right]^{-\lambda} = e^{-\lambda}. \quad (8.7)$$

Тому маємо:
$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Ця формула виражає закон *розподілу Пуассона* ймовірностей масових (n – велике) рідких (p – мале) подій. Як видно, закон Пуассона є однопараметровим, тобто залежить від одного параметра λ .

8.5. Закони великих чисел

На перший погляд здається, що у випадку, коли про кожну ВВ з їх певної сукупності маються достатньо скромні (неповні) відомості, навряд чи можна встановити якісь закономірності для суми значного числа ВВ. Але це не так! Виявляється, що за певних доволі загальних умов сумарна поведінка достатньо великої кількості ВВ майже втрачає випадковий характер і стає закономірною. Ці умови визначають ряд теорем, які мають загальну назву – закони великих чисел. До них належать, в першу чергу, теореми Чебишова та Бернуллі. Для їх кращого розуміння, спочатку розглянемо нерівність Чебишова.

8.5.1. Нерівність Чебишова (Бьєнеме-Чебишова)

Ця нерівність отримана французьким статистиком І.-Ж. Бьєнеме у 1853 р, а пізніше – відомим російським математиком П. Л. Чебишовим (1821–1894).

Лема 8.1

Якщо ВВ ξ може набувати лише невід'ємних значень, тобто $\xi \geq 0$, і має скінченне математичне сподівання, то $P(\xi \geq 1) \leq M\xi$.

Доведення. Наведемо доведення для дискретної ВВ $\xi \geq 0$, значення якої мають ймовірності p_i , $i = 1, 2, \dots$. Для всіх значень ВВ $\xi \geq 1$ можна записати

$$P(\xi \geq 1) = \sum_{i: x_i \geq 1} p_i \leq \sum_{i: x_i \geq 1} x_i p_i \leq \sum_i x_i p_i = M\xi, \quad (8.8)$$

що і доводить цю лему. Для випадку неперервної ВВ доведення виконується за такою ж схемою.

Нерівність (8.8) називають ще *першою формою нерівності Чебишова*.

Друга форма нерівності Чебишова дається у такому формулюванні.

**Лема
8.2**

Якщо ВВ ξ має скінченні математичне сподівання $\mathbf{M}\xi$ та дисперсію $\mathbf{D}\xi$, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ виконуються нерівності:

$$P(|\xi - \mathbf{M}\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2} \quad (8.9)$$

$$P(|\xi - \mathbf{M}\xi| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}. \quad (8.10)$$

Доведення. Для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ розглянемо ВВ $\eta = \frac{(\xi - \mathbf{M}\xi)^2}{\varepsilon^2}$, яка може набувати лише невід'ємних значень. З урахуванням леми можна скласти нерівність $P(\eta \geq 1) \leq \mathbf{M}\eta$, або

$$P\left(\eta = \frac{(\xi - \mathbf{M}\xi)^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right) \leq \mathbf{M}\left(\eta = \frac{(\xi - \mathbf{M}\xi)^2}{\varepsilon^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}. \quad (8.11)$$

Враховуючи, що нерівності $\frac{(\xi - \mathbf{M}\xi)^2}{\varepsilon^2} \geq 1$ і $|\xi - \mathbf{M}\xi| \geq \varepsilon$ – еквівалентні, нерівність (8.11) доводить нерівність (8.9).

Оскільки події $|\xi - \mathbf{M}\xi| < \varepsilon$ та $|\xi - \mathbf{M}\xi| \geq \varepsilon$ – протилежні, можна записати

$$P(|\xi - \mathbf{M}\xi| < \varepsilon) + P(|\xi - \mathbf{M}\xi| \geq \varepsilon) = 1. \quad (8.12)$$

Використовуючи (8.12) і (8.9), можна отримати іншу форму представлення нерівності Чебишова

$$P(|\xi - \mathbf{M}\xi| < \varepsilon) = 1 - P(|\xi - \mathbf{M}\xi| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}, \quad (8.13)$$

що і доводить нерівність (8.10).

8.5.2. Теорема Чебишова

**Теорема
8.3
(Чебишова)**

Якщо $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ – попарно незалежні ВВ, а їх дисперсії рівномірно обмежені (не перевищують постійне число C), то яким би малим не було додатне число ε , ймовірність нерівності:

$$\left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{M\xi_1(\omega) + M\xi_2(\omega) + \dots + M\xi_n(\omega)}{n} \right| < \varepsilon \quad (8.14)$$

буде як завгодно близькою до одиниці, якщо число n є достатньо великим. Іншими словами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{M\xi_1(\omega) + M\xi_2(\omega) + \dots + M\xi_n(\omega)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (8.15)$$

Таким чином, теорема Чебишова стверджує, що якщо розглядається достатньо велике число незалежних ВВ, які мають обмежені дисперсії, то майже вирогідною можна вважати подію, яка полягає в тому, що відхилення середнього арифметичного ВВ від середнього арифметичного їх математичних сподівань буде за абсолютною величиною скільки завгодно малим. В цій теоремі не робилось жодних припущень щодо рівності математичних сподівань ВВ.

Сутність теореми Чебишова така. Хоча окремі незалежні ВВ можуть набувати значення, суттєво віддалені від своїх математичних сподівань, середнє арифметичне достатньо великої кількості ВВ з великою ймовірністю набуває значень близьких до певного постійного числа, а саме до числа $\frac{M\xi_1(\omega) + M\xi_2(\omega) + \dots + M\xi_n(\omega)}{n}$. Іншими словами окремі ВВ можуть мати значний розкид, а їх середнє арифметичне розсіяно мало. Отже, не можна впевнено передбачити, яке з можливих значень прийме кожна з ВВ, але можна передбачити, яке значення матиме їх середнє арифметичне.

Отже, середнє арифметичне достатньо великої кількості незалежних ВВ (дисперсії яких рівномірно обмежені) втрачає характер ВВ. Це пояснюється тим, що відхилення $\xi_i - M\xi_i$ мають знаковмінний характер, а в середньому арифметичному вони компенсуються.

8.5.3. Практичне значення теореми Чебишова

Для зменшення випадкової складової похибки вимірювання значення фізичної величини виконують декілька її вимірювань, а в якості її числового

значення приймають арифметичне середнє (тут і далі, згідно «Міжнародного словника метрології: основні та загальні поняття і відповідні терміни» використовуємо такі терміни, до прикладу, фізична величина – довжина, значення фізичної величини – 4,5 м, числове значення фізичної величини – 4,5). За яких умов такий спосіб визначення числового значення фізичної величини можна вважати правильним? Відповідь на це питання дає теорема Чебишова.

Розглянемо числові значення кожного вимірювання як набір *невинадкових* чисел, які виникають в експерименті з рядом ВВ $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$. До цих ВВ можна застосувати теорему Чебишова, якщо вони попарно незалежні, мають однакове математичне сподівання і їх дисперсії рівномірно обмежені.

Перша умова виконується, якщо результати кожного вимірювання не залежать від решти результатів.

Друга вимога виконується, якщо вимірювання виконані без систематичних похибок, а вимірювана величина є незмінною впродовж процесу вимірювання.

Третя вимога виконується, якщо прилад забезпечує певну точність вимірювань, а в ряду спостережень відсутні значення, що містять грубу похибку вимірювання (промах), тобто мають обмежену дисперсію.

За виконання цих умов і достатньо великому n ймовірність виконання нерівності $|\bar{\xi} - a| < \varepsilon$ як завгодно близька до одиниці. Тобто достовірним є висновок про те, що середнє арифметичне як завгодно мало відрізняється від істинного (але не відомого) значення вимірюваної величини. Однак внаслідок наближеного виконання цих умов годі сподіватись, що за рахунок збільшення $n \rightarrow \infty$ можна як завгодно зменшувати похибку визначення середнього.

На теоремі Чебишова ґрунтується широко вживаний в статистиці **вибірковий метод**, сутність якого полягає у тому, що за порівняно невеликою випадковою вибіркою роблять висновок про характеристики всієї генеральної сукупності.

8.5.4. Теорема Бернуллі

Ця теорема є найпростішим видом закону великих чисел. Нехай виконується n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p . Чи можна передбачити, якою буде відносна частота появи події A ?

Відповідь на це запитання дає доведена швейцарським математиком Яковом Бернуллі теорема, яка поклала початок теорії ймовірностей як науки.

**Теорема
8.4
(Бернуллі)**

Якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p появи події A постійна, то як завгодно близькою до 1 є ймовірність того, що відхилення її відносної частоти від ймовірності p за абсолютною величиною, буде скільки завгодно малим, якщо число випробувань є достатньо великим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1. \quad (8.16)$$

За достатньо великих значень n відносна частота має властивість стійкості і обґрунтовує дане раніше статистичне визначення ймовірності.

Лекція 9. Неперервні ВВ

Неперервною називають ВВ, яка може набувати всі значення з певного скінченного чи нескінченного проміжку. Число можливих значень неперервної ВВ безмежне.

9.1. Функція розподілу ймовірностей ВВ

Загальною формою закону розподілу ВВ ξ (дискретної чи неперервної) є інтегральна функція розподілу, або просто функція розподілу.

Функція розподілу $F(x)$, $x \in R$ ВВ ξ визначається виразом:

$$F(x) = P(\xi < x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (9.1)$$

Формула (9.1) тлумачиться так: значення функції розподілу за будь-яких x дорівнює ймовірності того, що ВВ набуває значень, менших за $x \in (-\infty; \infty)$.

Функція розподілу має такі властивості:

- 1) вона монотонна, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$;
- 2) вона неперервна зліва, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$;
- 3) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $F(\infty) = \lim_{x \uparrow \infty} F(x) = 1$.

Для $a < b$ $a \leq \xi < b$ маємо

$$\Delta F(x) = F(b) - F(a) = P(\xi < b) - P(\xi \leq a) = P(a \leq \xi < b). \quad (9.2)$$

Для довільно фіксованого числа C маємо:

$$P(\xi = C) = F(C + 0) - F(C). \quad (9.3)$$

Якщо функція $F(x)$ в точці " C " безперервна, то ймовірність того, що $\xi = C$ дорівнює 0, а якщо в т. C є стрибок (розрив), то $F(C + 0) - F(C) = \Delta F(C) > 0$, тобто величина стрибка $\Delta F(C)$ дорівнює ймовірності того, що ВВ ξ набуває значення C .

9.2. Щільність розподілу ймовірностей

Якщо існує така функція $p(x)$, що для всіх x має місце співвідношення

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy, \quad (9.4)$$

то $p(x)$ називається **щільністю розподілу ймовірностей** ВВ, а ВВ, які мають цю властивість, називаються **неперервними**. Отже, якщо $F(x)$ неперервна, то

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (9.5)$$

9.2.1. Ймовірнісний сенс щільності розподілу

За визначенням щільності розподілу маємо

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}. \quad (9.6)$$

З диференціального числення відомо, що приріст функції наближено дорівнює диференціалу функції: $F(x + \Delta x) - F(x) \approx dF(x) \approx F'(x)dx = p(x)dx$. Цей вираз має наступний ймовірнісний сенс: ймовірність того, що ВВ набуде значень з інтервалу $(x, x + \Delta x)$, тобто $\xi(\omega) \in (x, x + \Delta x)$, наближено дорівнює (з точністю до нескінченно малих вищого порядку відносно Δx) добутку щільності ймовірності в точці x на довжину інтервалу

Цей результат трактується так: ймовірність того, що ВВ ξ набуде значень з інтервалу $(x, x + \Delta x)$, наближено дорівнює площі прямокутника з основою Δx і висотою $p(x)$. Геометрично це положення пояснює рис. 9.1, на якому зображено: на епюрі (а) – функції розподілу ймовірностей неперервної ВВ, на епюрі (б) – щільність розподілу ймовірності.

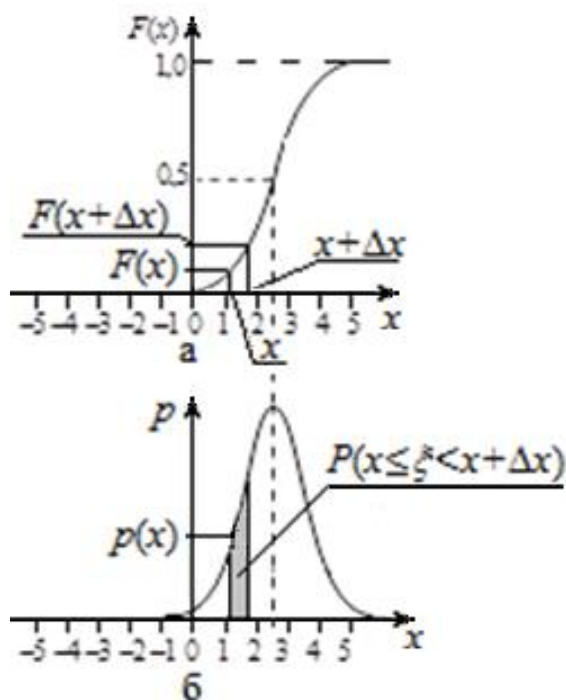


Рис. 9.1. Геометрична інтерпретація ймовірнісного сенсу щільності розподілу

9.2.2. Властивості щільності розподілу

1) $p(x) \geq 0;$

2) Умова нормування ймовірнісної міри:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1;$$

3) Для довільних a і b має місце співвідношення:

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x) dx. \quad (9.7)$$

Функція $p(x)$ може мати розриви першого роду (має місце розрив функції першого роду, якщо в точці розриву існують скінченні односторонні границі функції праворуч і ліворуч). Функцію $F(x)$ ще називають **інтегральною**, а $p(x)$ – **диференціальною** функціями розподілу.

Значення $p(x)$ можуть бути більшими за 1. Крім того, якщо ВВ має розмірність, то функція $p(x)$ має розмірність, обернену до розмірності ВВ.

9.3. Приклади розподілів неперервних ВВ

9.3.1. Рівномірний розподіл імовірностей

Щільність рівномірного розподілу ймовірностей (рис. 9.2, а) визначається як

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ 1/(b-a), & x \in [a, b] \end{cases} \quad -\infty < a < b < \infty, \quad (9.8)$$

де a – ліва межа, b – права межа розподілу.

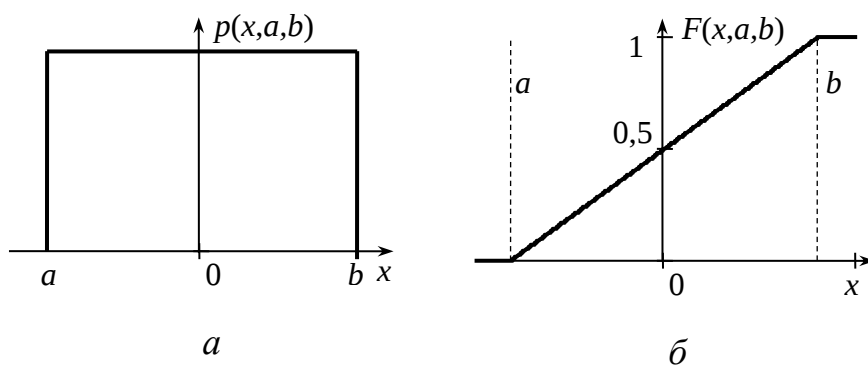


Рис. 9.2. Диференціальна (а) та інтегральна (б) функції

Функція розподілу (інтегральна, рис. 9.2, б) визначається як

$$F(x; a; b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (9.9)$$

Математичне сподівання ВВ ξ з рівномірним розподілом дорівнює

$\mathbf{M}\xi = \frac{a+b}{2}$, а дисперсія – $\mathbf{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$. Такий розподіл має, до прикладу, похибка квантування аналого-цифрового перетворювача.

9.3.2. Трикутний розподіл імовірностей (розподіл Сімпсона)

Щільність трикутного розподілу ймовірностей (рис. 9.3, а) визначається як

$$p(x, a, b) = \begin{cases} 0, & a > x > b, \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a \leq x \leq \frac{b+a}{2}, \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \frac{b+a}{2} \leq x \leq b, \end{cases} \quad (9.10)$$

де a, b – відповідно ліва і права межі розподілу.

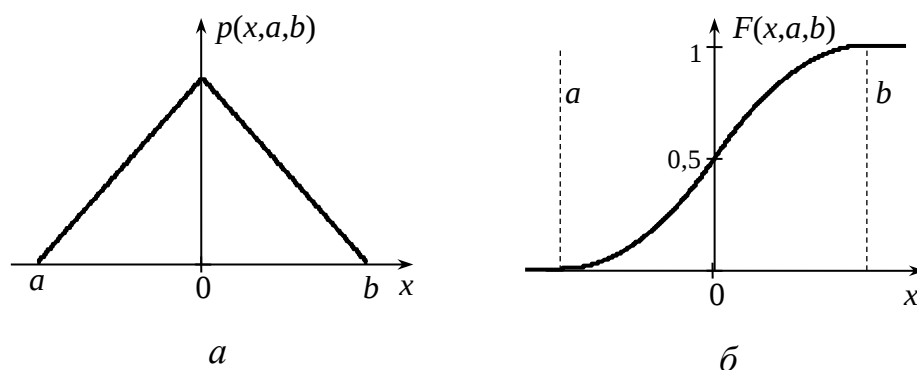


Рис. 9.3. Диференціальна (а) та інтегральна (б) функції розподілу Сімпсона

Функція розподілу (інтегральна, рис. 9.3, б) визначається виразом:

$$F(x; a; b) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a \leq x \leq \frac{b+a}{2}, \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \frac{b+a}{2} \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (9.11)$$

Математичне сподівання ВВ ξ з розподілом Сімпсона дорівнює $\mathbf{M}\xi = (a+b)/2$, а дисперсія – $\mathbf{D}\xi = (b-a)^2/6$. Такий розподіл має, до прикладу, похибка квантування часового інтервалу, яка виникає двічі – на початку і в кінці часового інтервалу.

9.3.3. Гауссовий (нормальний) розподіл імовірностей

Розподіл гауссової ВВ відіграє важливу роль у теорії похибок. Цей закон вперше отримав А. Муавр в 1738 р., а К. Гаусс в 1809 р. використав його в теорії похибок.

Щільність гауссового розподілу (рис. 9.4, а) дається формулою:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \sigma > 0, \quad (9.12)$$

де μ – параметр розташування; σ – параметр масштабу. Математичне сподівання гауссової ВВ ξ дорівнює $\mathbf{M}\xi = \mu$, а дисперсія – $\mathbf{D}\xi = \sigma^2$.

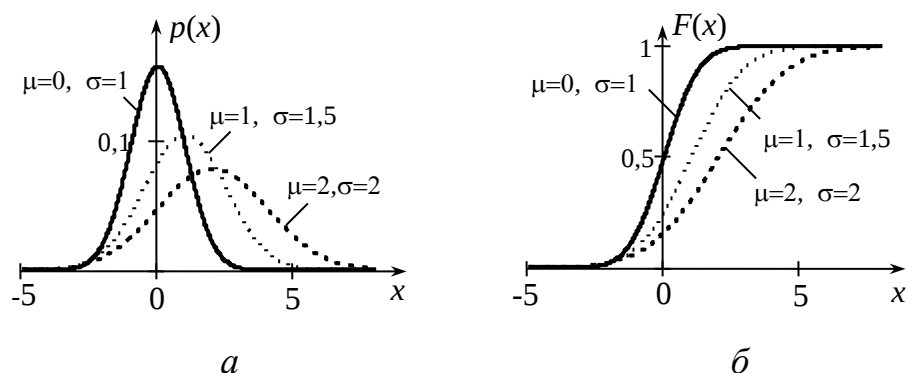


Рис. 9.4. Диференціальна (а) та інтегральна (б) функції розподілу ймовірності Гаусса

Функція $p(x)$ є симетричною відносно μ та парною.

Стандартний вид цього розподілу має місце для параметрів $\sigma = 1, \mu = 0$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (9.13)$$

Графік щільності ймовірності стандартного розподілу Гаусса з позначенням ймовірності потрапляння значень ВВ в різні інтервали наведено на рис. 9.5.

Функція розподілу (інтегральна, рис. 9.4, б) не виражається через елементарні функції, натомість обчислюється через **функцію помилок Гаусса**, значення якої табульовані

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du. \quad (9.14)$$

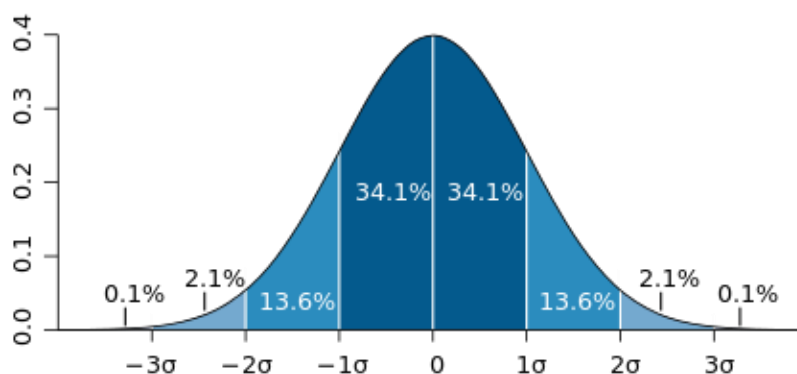


Рис. 9.5. Графік щільності ймовірності стандартного розподілу Гаусса

Отже, $\text{erf}(x)$ – це ймовірність того, що ВВ із нормальним розподілом, що має нульове середнє і дисперсію $\frac{1}{2}$, належить інтервалу $\pm x$, тобто $\xi \in [-x, x]$.

В теорії ймовірностей частіше використовують **інтеграл ймовірності Гаусса** (функцію стандартного розподілу нормованих ухилень ВВ $\frac{\xi - \mu}{\sigma}$):

$$\Phi_F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (9.15)$$

Застосовуючи цю функцію можна обчислювати ймовірності подій з гауссовим розподілом за довільних параметрів розподілу:

$$\begin{aligned} P(x_1 < \xi < x_2) &= F(x_2) - F(x_1) = \\ &= \Phi_F\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi_F\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \quad (9.16)$$

В таблиці додатку В приведені значення функції $\Phi_F(u)$ для додатних значень аргументів $u = \frac{x - \mu}{\sigma} > 0$. Значення функції $\Phi_F(u)$ для негативних значень аргументу розраховується як

$$\Phi_F(-u) = 1 - \Phi_F(u). \quad (9.17)$$

9.3.4. Розподіл χ^2 (розподіл Пірсона)

Цей розподіл пов'язаний з ім'ям видатного англійського математика, статистика, біолога та філософа К. Пірсона (1857–1936).

Нехай $\xi_i (i=1,2,3\dots n)$ – ВВ з розподілом Гаусса, і нехай $M\xi_i=0$, а $D\xi_i=1$. Тоді сума квадратів цих величин $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ розподілена за законом χ^2 («хі квадрат») з $k=n$ степенями свободи. Якщо ці величини пов'язані одним лінійним співвідношенням, то число степенів свободи зменшується на одиницю: $k=n-1$.

Диференціальна функція цього розподілу дається формулою:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2^{0,5k} \Gamma(0,5k)} \cdot e^{-x/2} \cdot x^{(k/2-1)}, & x > 0, \end{cases} \quad (9.18)$$

де $\Gamma(0,5k)$ – *гамма-функція* від параметра $0,5k$,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \cdot e^{-t} dt.$$

Цікаво, що функція $\Gamma(z)$ (*інтеграл Ейлера*) поширює значення факторіала $z!$ на випадок довільного комплексного числа, зокрема, то

$$\Gamma(z) = (z-1)!.$$

Розподіл χ^2 визначається одним параметром – числом степенів свободи k . Для ВВ з розподілом χ^2 маємо: $M\chi^2 = k$, $D\chi^2 = 2k$. Графіки щільності ймовірності та функції розподілу χ^2 (Пірсона) наведено на рис. 9.6.

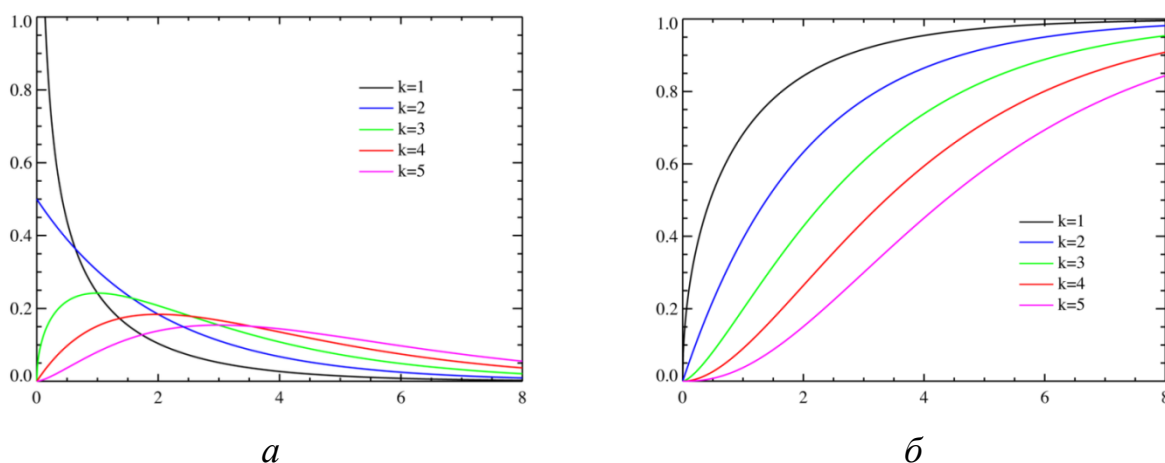


Рис. 9.6. Графіки щільності ймовірності (а) та функції розподілу (б) χ^2

Багато розподілів визначаються через розподіл χ^2 , до прикладу, розподіл ВВ

$\sqrt{\chi^2}$ – довжини випадкового вектору $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ з незалежними нормально розподіленими компонентами. За великих n використовують апроксимацію цього розподілу нормальним: розподіл нормованої величини $\frac{\chi^2 - k}{\sqrt{2k}}$ збігається зі стандартним гауссовим розподілом.

9.3.5. Розподіл Стюдента

Нехай ξ – ВВ з гаусовим розподілом, $\mathbf{M}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = 1$, а η – незалежна від ξ ВВ з розподілом χ^2 і k степенями свободи. Тоді нова ВВ

$$T = \frac{\xi}{\sqrt{\eta/k}} \quad (9.19)$$

має розподіл, який називається ***t-розподілом*** або ***розподілом Стюдента*** (за псевдонімом англійського статистика В. Госсета) з k степенями свободи.

Цей розподіл виникає в задачі оцінення сподіваного значення нормально розподіленої вибірки малого розміру. Зі збільшенням k цей розподіл швидко наближається до гауссового.

9.3.6. Показниковий розподіл

ВВ ξ розподілена за показниковим (експоненційним) законом з параметром $\lambda > 0$, якщо її щільність розподілу має такий аналітичний вираз:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (9.20)$$

Цей розподіл є однопараметровим. Відповідна функція розподілу має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (9.21)$$

Графіки щільності і функції показникового розподілу для різних значень параметру λ наведено на рис. 9.7, а, б.

Математичне сподівання і дисперсія дорівнюють відповідно

$$\mathbf{M}\xi = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{D}\xi = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (9.22)$$

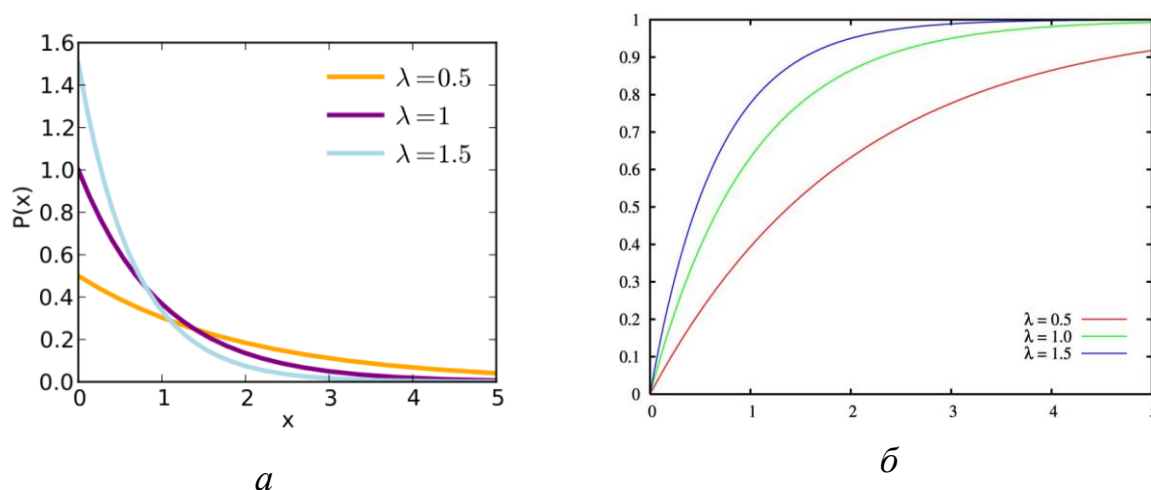


Рис. 9.7. Графіки щільності (а) та функції (б) показникового розподілу

Приклад використання цього розподілу: у найпростішому потоці подій ВВ τ (як інтервал часу між двома послідовними подіями) буде розподілена за показниковим законом. В теорії надійності цей розподіл використовують для оцінювання тривалості безвідмовної роботи технічних пристроїв. В цих випадках змінна x набуває значення часу.

9.4. Характеристики неперервних ВВ

9.4.1. Математичне сподівання

Вперше це поняття застосував Християн Гюйгенс в 1657 році в роботі «Про розрахунки в азартній грі».

Математичним сподіванням (або першим початковим моментом) неперервної ВВ ξ з функцією розподілу $F(x)$, яка не має стрибків, називається число, яке визначається інтегралом:

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx. \quad (9.23)$$

В загальному випадку, якщо функція $F(x)$ має стрибки, то

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \sum_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} xp(x)dx + \sum_j p_j x_j, \quad (9.24)$$

де $x_j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – точки розриву функції $F(x)$, $p(x) = F'(x)$, p_j – стрибки $F(x)$ в цих точках. Для фізичних величин розмірності ВВ та їх математичного сподівання збігаються.

Властивості математичного сподівання:

1. $\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}\xi_i.$
2. $\mathbf{M}C = C$, де C – постійна величина або не випадкова числова функція.
3. $\mathbf{M}(C \cdot \xi) = C\mathbf{M}\xi.$
4. Математичне сподівання функції $\varphi(\xi)$ від ξ , яка має розподіл $F(x)$, визначається виразом:

$$\mathbf{M}[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p(x) dx. \quad (9.25)$$

5. Якщо ξ_1 і ξ_2 незалежні, то $\mathbf{M}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \mathbf{M}\xi_1 \cdot \mathbf{M}\xi_2.$

9.4.2. Дисперсія

Дисперсією ВВ ξ називається математичне сподівання квадрата відхилення значень ξ від її математичного сподівання

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2 dF(x). \quad (9.26)$$

Ця числова характеристика визначає розкид значень ВВ в околі її математичного сподівання.

Дисперсія безперервної ВВ визначається формулою

$$\mathbf{D}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2 p(x) dx. \quad (9.27)$$

Якщо значення ВВ є відліками сигналу (до прикладу, струму чи напруги), то дисперсія має сенс середньої потужності сигналу. Дисперсія має розмірність квадрата розмірності ξ . Арифметичне значення квадратного кореня з дисперсії – це СКВ ВВ $\sigma_{\xi} = +\sqrt{\mathbf{D}\xi}$.

ВВ $(\xi - \mathbf{M}\xi)$ називається **середнім ухиленням**, а ВВ $\frac{\xi - \mathbf{M}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}$ ($\mathbf{D}\xi \neq 0$) називається **нормованим ухиленням**.

Дисперсія неперервної ВВ має такі самі властивості як і дисперсія дискретної ВВ. Нагадаємо їх.

1. Дисперсія постійної C чи числової функції $C(t)$ дорівнює нулю:

$$\boxed{DC = DC(t) = 0}.$$

2. $\boxed{D(C \cdot \xi) = C^2 D\xi}$, $D(C(t) \cdot \xi) = C^2(t) \cdot D\xi$.

3. Для суми двох незалежних ВВ ξ_1 і ξ_2 маємо

$$\boxed{D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2}. \quad (9.28)$$

Якщо ВВ ξ_1 і ξ_2 залежні, то

$$\begin{aligned} \boxed{D(\xi_1 + \xi_2)} &= \mathbf{M}(\xi_1 + \xi_2)^2 - (\mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2)^2 = \\ &= [\mathbf{M}\xi_1^2 - (\mathbf{M}\xi_1)^2] + [\mathbf{M}\xi_2^2 - (\mathbf{M}\xi_2)^2] + 2[\mathbf{M}(\xi_1 \cdot \xi_2) - \mathbf{M}\xi_1 \cdot \mathbf{M}\xi_2] = \\ &= \boxed{D\xi_1 + D\xi_2 + 2\text{cov}(\xi_1, \xi_2)}, \end{aligned} \quad (9.29)$$

де $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$ – *коваріація* ВВ ξ_1 і ξ_2 .

9.4.3. Моменти вищих порядків

Початковий момент k -того порядку в загальному випадку визначається як

$$\boxed{\mathbf{M}\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots} \quad (9.30)$$

Центральний момент k -того порядку в загальному випадку визначається як

$$\boxed{\mathbf{M}(x - \mathbf{M}\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^k dF(x)}. \quad (9.31)$$

В теорії похибок велике значення відіграє *змішаний центральний момент другого порядку*, який називається *коваріацією* (або *кореляційним моментом*). Для двох ВВ ξ і η він, в загальному виді, визначається як

$$\boxed{K_{\xi\eta} = \mathbf{M}\{(x - \mathbf{M}\xi) \cdot (y - \mathbf{M}\eta)\}}. \quad (9.32)$$

Кореляційний момент, нормований за допомогою середніх квадратичних відхилень, називається *коефіцієнтом кореляції* ВВ ξ і η

$$\boxed{\rho_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}}. \quad (9.33)$$

Коефіцієнт $\rho_{\xi\eta}$ задовольняє нерівність $-1 \leq \rho_{\xi\eta} \leq 1$ та характеризує ступінь лінійного зв'язку між ξ і η . Якщо $\rho_{\xi\eta} = 0$, то ВВ називають *некорельованими*.

Лекція 10. Функціональні перетворення ВВ

10.1. Функція одного випадкового аргументу та її розподіл

Якщо кожному можливому значенню ВВ $\xi(\omega)$ поставлено у відповідність одне можливе значення ВВ $\eta(\omega)$, то $\eta(\omega)$ називається **функцією випадкового аргументу** $\xi(\omega)$:

$$\eta(\omega) = \varphi(\xi(\omega)). \quad (10.1)$$

Розглянемо як можна знайти розподіл функції за відомим розподілом дискретного та неперервного аргументів (далі аргумент ω для спрощення аналітичних виразів опускатимемо).

Нехай ξ – дискретна ВВ. Можливі два випадки.

1. Якщо різним можливим значенням аргументу ξ відповідають різні можливі значення функції η , то ймовірності відповідних значень ξ і η є рівними між собою.

Приклад 10.1. Якщо дискретна ВВ ξ задана розподілом

ξ	2	5
P	0,7	0,3

то розподіл функції $\eta = \xi^2$ визначається таблицею:

η	4	25
P	0,7	0,3

2. Якщо різним можливим значенням аргументу ξ відповідають значення функції η , серед яких є рівні між собою, то слід додавати ймовірності повторюваних значень η .

Приклад 10.2. Якщо дискретна ВВ ξ задана розподілом

ξ	-2	2	3
P	0,4	0,3	0,3

і треба знайти розподіл функції $\eta = \xi^2$ можна побачити, що значення -2 і 2 дають однакові значення ВВ η , тому їх імовірності в розподілі η повинні додаватись. З урахуванням цього розподіл ВВ η набуде вигляду

η	4	9
P	0,7	0,3

Тепер розглянемо випадок, коли ξ – неперервна ВВ і відома її щільність розподілу $p(x)$. Як визначити розподіл функції $\eta = \varphi(\xi)$?

Доведене таке твердження: якщо функція $y = \varphi(x)$ диференційована, строго зростаюча або строго спадна і має обернену функцію $x = \psi(y)$, то щільність розподілу $g(y)$ для ВВ η знаходять за виразом

$$\boxed{g(y) = p(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|}. \quad (10.2)$$

Приклад 10.3. Неперервна ВВ ξ має гауссовий розподіл, а $M\xi = 0$. Необхідно знайти щільність розподілу ВВ $\eta = \xi^2$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = x^2$ є диференційованою і строго зростаючою, то можна застосувати (10.2). Спочатку знайдемо обернену функцію:

$$x = \psi(y) = y^{1/2}.$$

За умовою задачі $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, тому маємо:

$$p(\psi(y)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{2/2}}{2\sigma^2}}.$$

Визначимо похідну від оберненої функції по y :

$$\psi'(y) = \frac{d\psi(y)}{dy} = \frac{1}{2} y^{-1/2}.$$

Тоді шукана щільність розподілу визначається як

$$g(y) = \frac{1}{2y^{1/2}\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{2/2}}{2\sigma^2}}.$$

Користуючись формулою (10.2), можна довести, що лінійна функція виду $\eta = A\xi + B$ аргументу ξ з гауссовим розподілом і параметрами $\mathbf{M}\xi = a$, $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\xi}$ також має гауссовий розподіл з параметрами

$$\boxed{\mathbf{M}\eta = Aa + B, \quad \sigma_\eta = |A| \cdot \sigma.} \quad (10.3)$$

Приклад 10.4. Знайти щільність розподілу лінійної функції $\eta = 3\xi + 1$, якщо її аргумент має гауссовий розподіл з параметрами $\mathbf{M}\xi = 2$, $\sigma = 0,5$.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення ВВ η :

$$\mathbf{M}\eta = 3 \cdot 2 + 1 = 7, \quad \sigma_\eta = 3 \cdot 0,5 = 1,5.$$

Тепер можна записати аналітичний вираз для щільності розподілу:

$$p(y) = \frac{1}{1,5 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-7)^2}{2 \cdot 1,5^2}} = \frac{1}{1,5 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-7)^2}{4,5}}.$$

10.2. Математичне сподівання функції одного випадкового аргументу

Розглянемо перший випадок. Нехай аргумент ξ є дискретною ВВ і задана функція $\eta = \varphi(\xi)$ аргументу ξ . Необхідно знайти математичне сподівання цієї функції, якщо розподіл аргументу ξ заданий таблицею:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Очевидно, η є також дискретною ВВ зі значеннями $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, $\dots$, $y_n = \varphi(x_n)$ та тими самими ймовірностями. Розподіл нової ВВ задається таблицею:

η	y_1	y_2	$\dots$	y_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Отже, математичне сподівання дискретної ВВ η визначається як

$$\boxed{\mathbf{M}[\varphi(\xi)] = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot p_i = \sum_{i=1}^n y_i \cdot p_i.} \quad (10.4)$$

Розглянемо другий випадок. Нехай аргумент ξ – неперервна ВВ. Нехай також аргумент ξ задано щільністю розподілу $p(x)$. Для визначення математичного сподівання функції $\eta = \varphi(\xi)$ знайдемо спочатку щільність розподілу $g(y)$ ВВ η , після чого отримаємо:

$$\mathbf{M}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} yg(y)dy. \quad (10.5)$$

Якщо визначення $g(y)$ ускладнене, можна скористатись іншою формулою:

$$\mathbf{M}[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot p(x)dx. \quad (10.6)$$

10.3. Функція двох випадкових аргументів. Розподіл суми незалежних доданків

Якщо кожній парі можливих значень ВВ ξ і η відповідає одне можливе значення ВВ τ , то τ називають *функцією двох випадкових аргументів* ξ і η : $\tau = \varphi(\xi, \eta)$.

Характерний приклад функції двох випадкових аргументів – $\tau = \xi + \eta$. Задача визначення розподілу ВВ τ за розподілами складових часто виникає в інженерній практиці. До прикладу, якщо ξ – похибка показань вимірювального приладу (з гауссовим розподілом), а η – похибка заокруглення показань до найближчої поділки шкали (розподілена рівномірно), то виникає задача пошуку закону розподілу суми похибок $\tau = \xi + \eta$. Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Нехай ξ і η – дискретні ВВ. Для того, щоб скласти закон розподілу функції $\tau = \xi + \eta$, необхідно знайти всі можливі значення τ та їх імовірності. Розглянемо таку задачу на прикладі.

Приклад 10.5. Задані дискретні незалежні ВВ з такими розподілами

ξ	1	2	η	3	4
P	0,4	0,6	P	0,2	0,8

Необхідно скласти розподіл ВВ $\tau = \xi + \eta$.

Розв'язання. Можливі значення τ – це суми кожного можливого значення ξ зі всіма можливими значеннями η

$$z_1 = 1 + 3 = 4; z_2 = 1 + 4 = 5; z_3 = 2 + 3 = 5; z_4 = 2 + 4 = 6.$$

Визначимо ймовірності цих значень нової ВВ. Для того, щоб $\tau = 4$, достатньо аби тільки ξ набула значення 1, а $\eta = 3$. Ймовірності цих значень отримуємо з розподілів – це відповідно 0,4 та 0,2. Оскільки аргументи ξ та η незалежні, то події $\xi = 1$ та $\eta = 3$ також незалежні, тому ймовірність їх сумісної появи згідно з теоремою множення ймовірностей дорівнює $0,4 \cdot 0,2 = 0,08$. Аналогічно знайдемо:

$$P(\tau = 1 + 4 = 5) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32;$$

$$P(\tau = 2 + 3 = 5) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12;$$

$$P(\tau = 2 + 4 = 6) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48.$$

Залишилось записати розподіл у формі таблиці:

τ	4	5	6
P	0,08	$0,32 + 0,12 = 0,44$	0,48

Перевіряємо суму ймовірностей повної групи подій : $0,08 + 0,44 + 0,48 = 1$.

Випадок 2. Нехай ξ і η – неперервні ВВ. Доведено таке твердження: якщо ξ і η – незалежні ВВ, що мають щільності розподілу відповідно $p_1(x)$ і $p_2(y)$, то щільність розподілу $g(z)$ суми $\tau = \xi + \eta$ (за умови, що щільність розподілу хоча би одного з аргументів задана на інтервалі $(-\infty, \infty)$ однією формулою) визначається згорткою цих розподілів

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)p_2(z-x)dx \quad (10.7)$$

або за рівносильним виразом

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(z-y)p_2(y)dy. \quad (10.8)$$

Диференціальну функцію (щільність розподілу) суми незалежних ВВ називають **композицією**.

Закон розподілу ймовірностей називають **стійким**, якщо композиція таких законів і самі закони складових відрізняються лише параметрами. Гауссовий розподіл має властивість стійкості: композиція гауссових розподілів також є гауссовим розподілом, математичне сподівання та дисперсія якого дорівнюють відповідно суммам математичних сподівань та дисперсій складових.

10.4. Функція багатьох випадкових аргументів. Метод лінеаризації функцій ВВ

В інженерній практиці часто зустрічаються ймовірнісні задачі, які можуть бути наближено розв'язані без знання законів розподілу ймовірностей ВВ. Для їх розв'язання достатньо визначити числові характеристики ВВ – математичне сподівання, дисперсію та коефіцієнти кореляції. До кола таких задач належить і оцінювання похибок результатів непрямих вимірювань. Рівняння вимірювання в цьому випадку представляється функціональною залежністю результатів $x_1, x_2, \dots, x_n$ прямих вимірювань:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (10.9)$$

Передбачається, що функція (10.9) є неперервною.

Приклад 10.6. Типова ймовірнісна задача – визначити дисперсію вимірювання швидкості руху об'єкта за формулою $v=s/t$, якщо шлях s , який пройшов об'єкт та відповідний час t отримано з певними середніми квадратичними похибками.

Приклад 10.7. Типова ймовірнісна задача – визначити дисперсію значення об'єму правильної призми з прямокутником в основі ($V = abc$), якщо сторони призми (величини a , b і c) отримано з певними середніми квадратичними похибками. В таких задачах величини s , t , a , b і c розглядаються як ВВ.

Розглядаючи результати вимірювань як реалізації ВВ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, а значення y – як реалізацію ВВ η , ймовірнісну модель вимірювання представимо виразом:

$$\eta = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \quad (10.10)$$

Значна частина нелінійних функціональних залежностей, які зустрічаються на практиці, в обмеженому діапазоні значень можуть бути наближено представлені лінійними, до прикладу в околі математичних сподівань їх випадкових аргументів. На цьому наближенні власне і ґрунтується метод лінеаризації функцій ВВ.

Лінеаризацією функції називається наближена заміна нелінійної функції лінійною. Замінивши нелінійну функцію випадкових аргументів лінійною, отримуємо можливість знаходити числові характеристики ВВ η за числовими

характеристиками випадкових аргументів $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, застосовуючи для цього властивості математичного сподівання і дисперсії. Наприклад, для лінійної функції одного випадкового аргументу виду $\eta = k\xi + a$, маємо: $\mathbf{M}\eta = k\mathbf{M}\xi + a$, $\mathbf{D}\eta = k^2\mathbf{D}\xi$.

Обґрунтуємо метод лінеаризації функцій ВВ для опрацювання результатів непрямих вимірювань. Розглянемо спочатку задачу лінеаризації функції одного випадкового аргументу $\eta = f(\xi)$. Передбачається, що ξ і η – неперервні ВВ.

З курсу вищої математики відомо, що будь-яка неперервна диференційована функція $y = f(x)$ може бути розкладена в ряд Тейлора в околі певної точки a

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + f''(a) \cdot \frac{(x - a)^2}{2} + \dots, \quad (10.11)$$

$$\text{де } f'(a) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=a}; \quad f''(a) = \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right|_{x=a}.$$

З математичної точки зору, лінеаризація функції одного випадкового аргументу зводиться до наближеного представлення цієї функції першими двома членами ряду Тейлора. Геометрично лінеаризована функція буде дотичною до функції $y = f(x)$ в точці a .

Перейдемо від ВВ η, ξ до їх невинескових значень y, x , оскільки, строго кажучи, диференціювати по випадковим аргументам не можна. Розглянемо ряд Тейлора в околі точки $a = \mathbf{M}\xi$ і обмежимося двома першими членами розкладу:

$$y \approx f(\mathbf{M}\xi) + f'(\mathbf{M}\xi) \cdot (x - \mathbf{M}\xi). \quad (10.12)$$

Можна очікувати, що таке саме лінійне співвідношення пов'язує ВВ η, ξ

$$\eta \approx f(\mathbf{M}\xi) + f'(\mathbf{M}\xi) \cdot (\xi - \mathbf{M}\xi). \quad (10.13)$$

Числові характеристики для цієї лінеаризованої функції визначаються як

$$\mathbf{M}\eta \approx \mathbf{M}[f(\mathbf{M}\xi) + f'(\mathbf{M}\xi) \cdot (\xi - \mathbf{M}\xi)] = f(\mathbf{M}\xi), \quad (10.14)$$

$$\mathbf{D}\eta \approx [f'(\mathbf{M}\xi)]^2 \cdot \mathbf{D}\xi. \quad (10.15)$$

Поширюючи цей результат на випадок « n » незалежних аргументів маємо

$$\boxed{\mathbf{M}\eta \approx f(\mathbf{M}\xi_1, \mathbf{M}\xi_2, \dots, \mathbf{M}\xi_n)}, \quad (10.16)$$

$$\mathbf{D}\eta \approx \sum_{j=1}^n \left[f'(\mathbf{M}\xi_j) \right]^2 \cdot \mathbf{D}\xi_j = \sum_{j=1}^n \left(\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|_{x=\mathbf{M}\xi_j} \right)^2 \cdot \sigma_{\xi_j}^2. \quad (10.17)$$

Похідні $\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|_{x=\mathbf{M}\xi_j}$ в рівнянні (10.17) називають **коефіцієнтами впливу**.

Якщо аргументи $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ є корельованими, їх зв'язки необхідно врахувати у формулі (10.17), яка трансформується до такого виду:

$$\mathbf{D}\eta \approx \sum_{j=1}^n \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{x=\mathbf{M}\xi_j} \right)^2 \cdot \sigma_{\xi_j}^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x=\mathbf{M}\xi_i} \right) \cdot \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{x=\mathbf{M}\xi_j} \right) \cdot r_{ij} \cdot \sigma_{\xi_i} \cdot \sigma_{\xi_j}, \quad (10.18)$$

де r_{ij} – коефіцієнт кореляції ВВ ξ_i, ξ_j .

Функція $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ декількох випадкових аргументів $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ називається **майже лінійною**, якщо у всьому діапазоні практично можливих значень аргументів вона може бути з достатньою для практики точністю замінена лінійною функцією

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \approx f(\mathbf{M}\xi_1, \mathbf{M}\xi_2, \dots, \mathbf{M}\xi_n) + \sum_{j=1}^n \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{x=\mathbf{M}\xi_j} \right) \cdot (\xi_j - \mathbf{M}\xi_j). \quad (10.19)$$

Нижче наведені формули диференціювання, які найчастіше використовуються для визначення коефіцієнтів впливу:

$$\begin{aligned} (x_1 x_2)' &= x_1' x_2 + x_1 x_2'; & \left(\frac{x_1}{x_2} \right)' &= \frac{x_1' x_2 - x_1 x_2'}{x_2^2}; \\ (x_1^{x_2})' &= x_2 x_1^{x_2-1} x_1' + x_1^{x_2} \ln x_1 \cdot x_2'; & (\alpha x)' &= \alpha; & (x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}; \\ (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}; & (e^x)' &= e^x; & (a^x)' &= a^x \ln a; \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x}; & (\sin x)' &= \cos x; & (\cos x)' &= -\sin x; \\ (\arctg x)' &= \frac{1}{1+x^2}; & (\tg x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Лекція 11. Система двох ВВ

11.1. Загальне поняття про систему декількох ВВ

Крім одновимірних ВВ, значення яких визначаються одним числом, в теорії ймовірностей досліджуються ВВ, можливі значення яких визначаються двома, трьома, ... n числами. Такі ВВ називають відповідно **двовимірними**, **тривимірними**, ... **n -вимірними**.

Найбільш поширеними в практиці інженерних розрахунків є двовимірні ВВ. Двовимірну ВВ будемо надалі позначати як (ξ, η) . Кожну з величин ξ і η називають **складовою (компонентою)** ВВ. Обидві величини ξ і η , що розглядаються одночасно, створюють систему двох ВВ (але функціонально вони не пов'язані). Двовимірна ВВ має місце, до прикладу, під час вимірювання двох параметрів деталі – внутрішнього та зовнішнього діаметрів труби, знаходження площі дефекту на поверхні деталі за двома декартовими координатами тощо.

Геометрично двовимірну ВВ (ξ, η) можна інтерпретувати як випадкову точку на площині, тобто як точку з випадковими координатами.

Розрізняють дискретні та неперервні багатовимірні ВВ.

11.2. Закон розподілу ймовірностей дискретної двовимірної ВВ

Законом розподілу дискретної двовимірної ВВ називають перелік можливих значень компонент ВВ (ξ, η) (тобто пар чисел (x_i, y_j)) та їх ймовірностей $P(x_i, y_j)$, $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, m$. Такий розподіл зручно представляти у вигляді таблиці (див. виділену частину табл. 11.1).

Таблиця 11.1. Загальний вид розподілу дискретної двовимірної ВВ

η	ξ	x_1	...	x_i	...	x_n	$\sum_{i=1}^n P(x_i, y_j)$
y_1		$P(x_1, y_1)$	...	$P(x_i, y_1)$	...	$P(x_n, y_1)$	$P(y_1)$
...		...	...	...	...	...	
y_j		$P(x_1, y_j)$		$P(x_i, y_j)$		$P(x_n, y_j)$	$P(y_j)$
...		...	...	...	...	...	
y_m		$P(x_1, y_m)$		$P(x_i, y_m)$		$P(x_n, y_m)$	$P(y_m)$
	$\sum_{j=1}^m P(x_i, y_j)$	$P(x_1)$		$P(x_i)$		$P(x_n)$	-

Оскільки представлені в табл. 11.1 події утворюють повну групу подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці. Знаючи розподіл двовимірної дискретної ВВ, можна знайти розподіл кожної компоненти. До прикладу, події $(\xi = x_1, \eta = y_1), (\xi = x_1, \eta = y_2), \dots (\xi = x_1, \eta = y_m)$ є несумісними, тому ймовірність $P(x_1) = P(\xi = x_1)$ згідно з теоремою додавання ймовірностей (крайній лівий стовпчик табл. 11.1) дорівнює

$$P(x_1) = P(x_1, y_1) + P(x_1, y_2) + \dots + P(x_1, y_m) = \sum_{j=1}^m P(x_1, y_j). \quad (11.1)$$

Аналогічно, склавши «рядок y_j », отримаємо ймовірність $P(y_j) = P(\eta = y_j)$.

11.3. Інтегральна функція двовимірної ВВ та її властивості

Інтегральною функцією двовимірної ВВ (ξ, η) називають функцію $F(x, y)$, що визначає для кожної пари чисел x, y ймовірність того, що ξ набуде значення, меншого за x , і одночасно η матиме значення, менше за y :

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y). \quad (11.2)$$

Геометрично це визначення можна трактувати таким чином: функція $F(x, y)$ – це ймовірність того, що ВВ (ξ, η) потрапить на площині з декартовою системою координат XOY у нескінченний квадрант з вершиною в точці (x, y) , розміщений ліворуч та нижче цієї вершини (рис. 11.1).

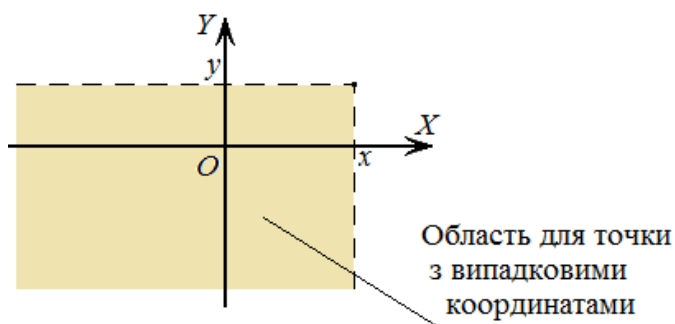


Рис. 11.1. Геометрична інтерпретація сутності інтегральної функції двовимірної ВВ

Функція $F(x, y)$ має такі властивості:

1. Значення інтегральної функції задовольняє подвійній нерівності

$$0 \leq F(x, y) \leq 1.$$

2. $F(x, y)$ – неспадна функція, тобто

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y) \quad \text{якщо } x_2 > x_1,$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1) \quad \text{якщо } y_2 > y_1.$$

3. Мають місце граничні співвідношення:

$$F(-\infty, y) = 0; \quad F(x, -\infty) = 0; \quad F(-\infty, -\infty) = 0; \quad F(\infty, \infty) = 1.$$

4. Якщо $x_1 \leq \xi < x_2, \eta < y$, то $P(x_1 \leq \xi < x_2, \eta < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y)$.

5. За умови $y \rightarrow \infty$ інтегральна функція системи ВВ перетворюється на інтегральну функцію компоненти ξ , тобто $F(x, \infty) = F(x)$;

6. За умови $x \rightarrow \infty$ інтегральна функція системи перетворюється на інтегральну функцію компоненти η , тобто $F(\infty, y) = F(y)$.

11.4. Диференціальна функція неперервної двовимірної ВВ та її властивості

Якщо $F(x, y)$ всюди неперервна і всюди має неперервну змішану частинну похідну другого порядку, то має сенс говорити про диференціальну функцію двовимірної ВВ.

Диференціальною функцією розподілу $p(x, y)$ двовимірної неперервної ВВ (ξ, η) називають другу змішану частинну похідну від інтегральної функції

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (11.3)$$

Геометрично функція $p(x, y)$ трактується як поверхня, яку називають *поверхнею розподілу*.

Ймовірнісний сенс диференціальної функції неперервної двовимірної ВВ трактується так. Функцію $p(x, y)$ можна розглядати як межу відношення ймовірності потрапляння випадкової точки на площині з випадковими координатами (ξ, η) в прямокутник зі сторонами Δx і Δy до площі цього прямокутника, якщо $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, тобто

$$p(x, y) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x - 0,5\Delta x < \xi \leq x + 0,5\Delta x, y - 0,5\Delta y < \eta \leq y + 0,5\Delta y)}{\Delta x \Delta y}. \quad (11.4)$$

Диференціальна функція двовимірної ВВ має такі властивості:

1. Диференціальна функція неперервної двовимірної ВВ є невід'ємною:

$$p(x, y) \geq 0.$$

2. Двократний невластний інтеграл від диференціальної функції неперервної двовимірної ВВ з нескінченними межами дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1.$$

3. Диференціальні функції компонент неперервної двовимірної ВВ визначаються таким чином:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy, \quad p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx. \quad (11.5)$$

11.5. Числові характеристики системи двох ВВ: кореляційний момент та коефіцієнт кореляції

Для опису системи двох ВВ крім математичних сподівань та дисперсій її компонент користуються й іншими параметрами, до яких належать кореляційний момент і коефіцієнт кореляції.

Кореляційним моментом $\mu_{x,y}$ ВВ ξ і η називають математичне сподівання добутку відхилень цих ВВ від їх математичних сподівань:

$$\mu_{x,y} = \mathbf{M}[(\xi - \mathbf{M}\xi) \cdot (\eta - \mathbf{M}\eta)]. \quad (11.6)$$

Кореляційний момент дискретних ВВ обчислюють за формулою:

$$\mu_{x,y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - \mathbf{M}\xi) \cdot (y_j - \mathbf{M}\eta) \cdot P(x_i, y_j), \quad (11.7)$$

а для неперервних ВВ –

$$\mu_{x,y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi) \cdot (y - \mathbf{M}\eta) \cdot p(x, y) dx dy. \quad (11.8)$$

Характеристика $\mu_{x,y}$ дає уявлення про зв'язок між ξ і η . Для незалежних ВВ маємо $\mu_{x,y} = 0$. Дві ВВ називають **корельованими**, якщо $\mu_{x,y} \neq 0$.

Дві корельовані ВВ також є залежними. Обернене твердження не завжди має місце: залежні величини можуть виявитись як корельованими, так і некорельованими.

Коефіцієнтом кореляції $r_{x,y}$ ВВ ξ і η називають відношення

$$r_{x,y} = \frac{\mu_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (11.9)$$

У випадку, якщо ξ і η – розмірні величини, розмірність $\mu_{x,y}$ дорівнюватиме добутку розмірностей цих ВВ. Натомість $r_{x,y}$ – безрозмірна величина і змінюється в зручному для аналізу обмеженому інтервалі значень: $-1 \leq r_{x,y} \leq 1$.

11.6. Умовні закони розподілу складових системи ВВ

Раніше було встановлено: якщо події A і B є залежними, то умовна ймовірність події B є відмінною від її безумовної ймовірності та визначається як

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Аналогічне положення має місце і для ВВ. Нехай (ξ, η) – двовимірна ВВ, і ξ і η залежні між собою. Умовний розподіл характеризує залежність ВВ.

Умовним розподілом однієї з ВВ називається розподіл цієї величини, визначений за умови, що інша ВВ прийняла певне значення (або потрапила в певний інтервал значень).

Умовні розподіли мають місце як для дискретних, так і для неперервних ВВ. Розглянемо ці два випадки.

11.6.1. Умовні закони розподілу складових системи дискретних ВВ

Розглянемо дискретну двовимірну ВВ (ξ, η) , розподіл якої визначає набір ймовірностей $P(\xi = x_i, \eta = y_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Нехай можливими значенням компонент ВВ є такі значення

$$x_1, x_2, \dots, x_n; \quad y_1, y_2, \dots, y_m.$$

Припустимо, що в результаті випробування ВВ η набула значення $\eta = y_1$; в цьому випадку ξ дорівнюватиме одному зі своїх можливих значень – $x_1, x_2, \dots$ чи x_n (див. табл. 11.1). Позначимо умовну ймовірність того, що ξ набуде,

до прикладу, значення x_1 за умови $\eta = y_1$, через $P(x_1 | y_1)$. В загальному випадку умовні ймовірності позначатимемо як $P(x_i | y_j)$, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$.

Зазначимо, що у загальному випадку $P(x_i | y_j) \neq P(x_i)$.

Умовним розподілом дискретної компоненти ξ за умови $\eta = y_j$ називають сукупність умовних ймовірностей $P(x_1 | y_j), P(x_2 | y_j), \dots, P(x_n | y_j)$, обраних за припущення, що подія $\eta = y_j$ вже відбулась.

В аналогічний спосіб визначається умовний розподіл компоненти η .

Якщо відомий закон розподілу двовимірної дискретної ВВ, можна обчислити, за аналогією до умовної ймовірності подій, умовні закони розподілу її компонент. До прикладу, умовний закон розподілу ξ за умови, що подія $\eta = y_1$ вже відбулась, визначається за формулою

$$P(x_i | y_1) = \frac{P(x_i, y_1)}{P(y_1)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.10)$$

Аналогічно визначаються умовні закони розподілу складової η

$$P(y_j | x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (7.11)$$

Важливою властивістю умовного закону розподілу дискретної ВВ є те, що сума ймовірностей умовного розподілу дорівнює одиниці. Ця властивість умовних розподілів використовується для контролю правильності обчислень.

11.6.2. Умовні закони розподілу складових системи неперервних ВВ

Нехай (ξ, η) – неперервна двовимірна ВВ, а $p(x)$ і $p(y)$ – щільності розподілу ймовірностей ВВ ξ і η .

Умовною диференціальною функцією $\varphi(x|y)$ складової ξ за заданого значення $\eta = y$ називають відношення диференціальної функції $p(x, y)$ системи ВВ до диференціальної функції $p(y)$ складової η :

$$\varphi(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}. \quad (11.12)$$

Відмінність функції $\varphi(x|y)$ від безумовної диференціальної функції $p(x)$

полягає в тому, що $\varphi(x|y)$ дає розподіл ξ за умови, що складова η набула значення $\eta = y$, натомість функція $p(x)$ дає розподіл ВВ ξ незалежно від значення ВВ η .

Аналогічно визначається умовна диференціальна функція $\psi(y|x)$ складової η за даного значення $\xi = x$:

$$\boxed{\psi(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}}. \quad (11.13)$$

Якщо $p(x, y)$ відома, то умовні диференціальні функції можуть бути визначені згідно з такими виразами:

$$\boxed{\varphi(x|y) = \frac{p(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx}, \quad \boxed{\psi(y|x) = \frac{p(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy}}. \quad (11.14)$$

Запишемо формули у виразі (11.14) в іншому вигляді:

$$\boxed{p(x, y) = p(y) \cdot \varphi(x|y) = p(x) \cdot \psi(y|x)}. \quad (11.15)$$

З виразу (11.15) випливає такий висновок: множенням закону розподілу однієї складової на умовний закон розподілу іншої знаходимо закон розподілу системи неперервних ВВ.

Властивості умовної диференціальної функції:

1. $\boxed{\psi(y|x) \geq 0}.$
2. $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y|x) dy = 1}.$

11.6.3. Критерій незалежності ВВ

Випадкові величини ξ і η є **незалежними** $\varphi(x|y)$ тоді і тільки тоді, коли умовний розподіл ВВ ξ за умови $\eta = y$ збігається з безумовним розподілом ВВ ξ .

Зокрема, дискретні величини ξ і η є незалежними тоді і тільки тоді, коли всі умовні ймовірності збігаються з безумовними, тобто $\forall i, j: p(x_i|y_j) = p(x_i)$. Тут математичний символ $\forall$ – це **квантор загальності** $\varphi(x|y)$ (читається як «всі», «кожен», «будь-який»).

11.7. Умовні числові характеристики

Оскільки умовний розподіл має всі властивості безумовного розподілу, то за ним можна визначити числові характеристики, які називаються **умовними числовими характеристиками**.

11.7.1. Умовне математичне сподівання

Важливою числовою характеристикою умовного розподілу ймовірностей є умовне математичне сподівання.

Умовне математичне сподівання дискретної ВВ η , якщо $\xi = x$ (де x – одне з можливих значень ξ) – це сума добутків можливих значень η на їх умовні ймовірності:

$$\mathbf{M}(\eta | \xi = x) = \sum_{j=1}^m y_j P(y_j | x). \quad (11.16)$$

Умовне математичне сподівання неперервної ВВ η – це інтеграл виду:

$$\mathbf{M}(\eta | \xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \psi(y | x) dy. \quad (11.17)$$

В такий самий спосіб визначається і $\mathbf{M}(\xi | \eta = y)$.

Функція $g(\xi) = \mathbf{M}(\eta | \xi)$ називається **функцією регресії** ВВ η на ВВ ξ , а її графік – **лінією регресії**. Лінія регресії графічно зображає залежність «в середньому» ВВ η від значень ξ .

Властивості умовного математичного сподівання:

$$1. \quad \mathbf{M}(C\eta) \equiv C, \quad C = \text{const.}$$

$$2. \quad \mathbf{M}((a\xi + b) | \eta) = a\mathbf{M}(\xi | \eta) + b.$$

$$3. \quad \mathbf{M}((\xi_1 + \xi_2) | \eta) = \mathbf{M}(\xi_1 | \eta) + \mathbf{M}(\xi_2 | \eta).$$

4. Нехай ξ_1, ξ_2 – незалежні ВВ. За умови, що ВВ η набула будь-яке конкретне значення, маємо

$$\mathbf{M}((\xi_1 \cdot \xi_2) | \eta) = \mathbf{M}(\xi_1 | \eta) \cdot \mathbf{M}(\xi_2 | \eta). \quad (11.18)$$

$$5. \boxed{\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi|\eta)) = \mathbf{M}\xi}.$$

6. Нехай $u(\xi)$ і $v(\eta)$ – деякі функції ВВ ξ і η , тоді

$$\boxed{\mathbf{M}(u(\xi)v(\eta)|\eta) = v(\eta)\mathbf{M}(u(\xi)|\eta)}. \quad (11.19)$$

7. Якщо ξ і η – незалежні ВВ, то

$$\boxed{\mathbf{M}(\xi|\eta) \equiv \mathbf{M}\xi}.$$

11.7.2. Умовна дисперсія

Умовною дисперсією $\mathbf{D}(\xi|\eta)$ ВВ ξ відносно ВВ η називають

$$\boxed{\mathbf{D}(\xi|\eta) = \mathbf{M}\left(\left[\xi - \mathbf{M}(\xi|\eta)\right]^2|\eta\right)}. \quad (11.20)$$

Формула (11.20) для дискретних і неперервних ВВ набуває відповідно такого вигляду

$$\boxed{\mathbf{D}(\xi|y_j) = \sum_{i=1}^n \left[x_i - \mathbf{M}(\xi|y_j)\right]^2 P(x_i|y_j)}, \quad (11.21)$$

$$\boxed{\mathbf{D}(\xi|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - \mathbf{M}(\xi|y)\right]^2 p(x|y) dx}. \quad (11.22)$$

Властивості умовної дисперсії:

$$1. \boxed{\mathbf{D}(C|\eta) \equiv 0}, \quad C = \text{const.}$$

$$2. \boxed{\mathbf{D}((a\xi + b)|\eta) = a^2\mathbf{D}(\xi|\eta)}.$$

$$3. \boxed{\mathbf{D}(\xi|\eta) = \mathbf{M}(\xi^2|\eta) - \mathbf{M}^2(\xi|\eta)}.$$

4. Нехай ξ_1, ξ_2 – незалежні ВВ за умови, що ВВ η набула будь-яке конкретне значення, тоді

$$\boxed{\mathbf{D}(\xi_1 + \xi_2|\eta) = \mathbf{D}(\xi_1|\eta) + \mathbf{D}(\xi_2|\eta)}. \quad (11.23)$$

5. Нехай $u(\xi)$ і $v(\eta)$ – деякі функції ВВ ξ і η , тоді

$$\boxed{\mathbf{D}(u(\xi)v(\eta)|\eta) = v^2(\eta)\mathbf{D}(u(\xi)|\eta)}. \quad (11.24)$$

6. Якщо ξ і η – незалежні ВВ, то

$$\mathbf{D}(\xi|\eta) \equiv \mathbf{D}\xi.$$

$$7. \mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\mathbf{D}(\xi|\eta)) + \mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi|\eta) - \mathbf{M}\xi)^2. \quad (11.25)$$

Питання для самоконтролю до розділу 2

1. Поняття множини. Дії з множинами. Приклади числових множин та множин точок на прямій.
2. Потужності множини та їх використання для порівняння множин.
3. Імовірнісна модель стохастичних експериментів з кінцевим числом наслідків та аксіоми, покладені в основу її побудови.
4. Властивості імовірності випадкових подій.
5. Основні терміни та визначення теорії ймовірностей: випробування, випадкова подія, імовірність події, вірогідні та неможливі, сумісні та несумісні події, протилежні події, повна група подій.
6. Запишіть формули для найпростіших «поєднань» – перестановок, розміщень, сполучень.
7. Назвіть основні дії з множинами та поясніть їх зміст.
8. Наведіть основні формули комбінаторики.
9. Для яких випадків розрахунку ймовірностей застосовують поняття «геометрична» ймовірність?
10. Наведіть приклади застосування розрахунку «геометричної» ймовірності.
11. Ймовірнісний простір та його компоненти.
12. Аксіоми теорії ймовірності.
13. Поняття умовної ймовірності подій.
14. Наведіть визначення та зміст понять залежні та незалежні випадкові події.
15. Теореми множення ймовірностей випадкових подій.
16. Теореми додавання ймовірностей випадкових подій.
17. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.
18. Випадкова величина та її види.
19. Розподіл дискретної ВВ.
20. Визначення математичного сподівання дискретної ВВ та його властивості.

21. Визначення дисперсії дискретної ВВ та наведіть її властивості.
22. Сформулюйте теорему, яка визначає дисперсію числа появи події A в n незалежних випробуваннях.
23. Сформулюйте теореми про математичне сподівання і дисперсію середнього арифметичного.
24. Дайте визначення початкових і центральних моментів ВВ.
25. Розкрийте зміст схеми Бернуллі.
26. Дайте пояснення локальної теореми Лапласа.
27. Розкрийте зміст інтегральної теореми Муавра-Лапласа.
28. Розподіл Пуассона та зміст його параметра.
29. Нерівність Чебишова.
30. Теорема Чебишова та її практичне значення.
31. Теорема Бернуллі.
32. Рівномірний розподіл та його характеристики.
33. Розподіл Сімпсона та його характеристики.
34. Розподіл Гаусса та його характеристики.
35. Функція розподілу імовірностей ВВ та її властивості.
36. Щільність розподілу імовірностей неперервної ВВ та її властивості.
37. Розподіл χ^2 (розподіл Пірсона).
38. Визначення та формула математичного сподівання неперервної ВВ.
39. Сформулюйте властивості математичного сподівання.
40. Визначення та формула неперервної ВВ.
41. Як визначається розподіл функції дискретного випадкового аргументу?
42. Як визначається розподіл функції неперервного випадкового аргументу?
43. Як визначається математичне сподівання функції одного дискретного випадкового аргументу?
44. Як визначається математичне сподівання функції одного неперервного випадкового аргументу?
45. Наведіть методику визначення розподілу суми двох дискретних ВВ.
46. Наведіть формули композиції щільностей розподілу двох ВВ та необхідні умови для їх застосування.
47. Розкрийте зміст поняття «стійкий закон розподілу ймовірностей».
48. Дайте визначення та розкрийте зміст умовних розподілів ВВ.
49. Запишіть вираз для умовної щільності розподілу.

50. Сформулюйте критерій незалежності ВВ, використовуючи поняття умовної ймовірності.
 51. Дайте визначення умовного математичного сподівання дискретної та неперервної ВВ.
 52. Властивості умовного математичного сподівання.
 53. Дайте визначення умовної дисперсії дискретної та неперервної ВВ.
 54. Властивості умовної дисперсії.
-

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

У цьому розділі:



- Лекція 12. Основи статистичного опрацювання експериментальних даних.
- Лекція 13. Методи визначення точкових та інтервальних оцінок ряду спостережень.
- Лекція 14. Методи оцінювання параметрів закону розподілу даних.
- Лекція 15. Методи визначення закону розподілу даних.
- Лекція 16. Кореляційний аналіз.
- Лекція 17. Регресійний аналіз.

Лекція 12. Основи статистичного опрацювання експериментальних даних

Відомо, що повну інформацію про ВВ містить її закон розподілу ймовірності. Встановлення закону розподілу ВВ за результатами експериментів – основне завдання математичної статистики. Можна сказати, що теорія ймовірності і математична статистика вирішують взаємно зворотні завдання. Теорія ймовірності за відомими законами розподілу передбачає результати випадкових експериментів (наскільки можливий той або інший результат, чи має місце залежність величин, наскільки вона сильна тощо). Математична статистика за результатами експерименту намагається встановити закони розподілу, залежності ВВ, рівності або відмінності розподілів та ін.

12.1. Основні терміни та визначення

В ході дослідження явищ навколишнього середовища, вимірюванні фізичних величин, контролю якості продукції та ін. мають справу зі спостереженнями (результатами вимірювань), отриманими на об'єктах різної природи. Як **спостереження** можуть розглядатись такі процеси як вимірювання, випробування, дослідження тощо. В цьому контексті спостереження слід розуміти не як процес отримання інформації про властивість об'єкта, а як певне число, яке кількісно характеризує цю властивість.

Результат спостереження – зафіксоване значення величини або числа за показуючим пристроєм засобу вимірювальної техніки в заданий момент часу

Відповідно **статистичні дані** – це результати спостережень, набори іменованих чи неіменованих чисел.

Результат спостереження можна прийняти як результат вимірювання у випадку вимірювань з однократними спостереженнями. Якщо вимірювання проводиться з багаторазовими спостереженнями, то результат вимірювання отримують шляхом опрацювання ряду спостережень, яке ґрунтується на статистичних методах.

Завдання математичної статистики полягає в тому, щоб на підставі знання деяких властивостей підмножини елементів, взятих із деякої множини, висловити деякі твердження про властивості цієї множини – генеральної сукупності. Сукупність, яка об'єднує всі елементи, що мають деяку спільну ознаку, називається **генеральною**. Наприклад, якщо розглядається якась людська ознака (національність, стать, освіта або коефіцієнт інтелекту IQ), то для неї генеральною сукупністю буде все населення Землі. Це дуже велика сукупність, тобто число елементів в сукупності n велике. Число елементів називається **обсягом сукупності**. Таким чином, уся множина об'єктів, що підлягає дослідженню, є генеральною сукупністю (рис. 12.1). Сукупності можуть бути кінцевими і нескінченними. Генеральна сукупність – всі люди – хоч і дуже велика, проте звичайно кінцева. Генеральна сукупність – усі зірки, – нескінченна.

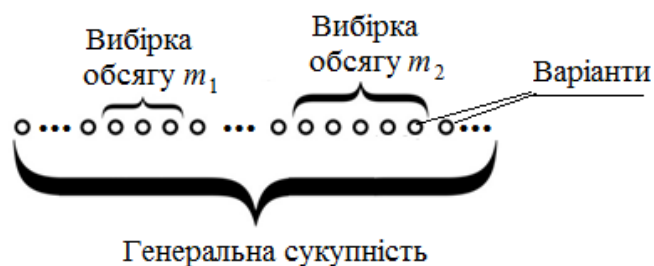


Рис. 12.1 Формування вибірок з генеральної сукупності

Якщо дослідник проводить вимірювання деякої неперервної ВВ ξ , то кожен результат вимірювання x можна вважати елементом деякої необмеженої генеральної сукупності. У цій сукупності незліченна кількість результатів розподілена за ймовірністю під впливом похибок в приладах, неуважності експериментатора, випадкових завад в самому явищі.

Якщо проведемо n повторних вимірювань, тобто отримаємо n конкретних різних числових значень $x_1, x_2, \dots, x_n$, то цей результат експерименту в ймовірнісному сенсі можна розглядати як вибірку *обсягу* n з гіпотетичної генеральної сукупності результатів одиничних вимірювань сукупності n ВВ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, які мають однакові розподіли.

Вибірка – це одна або декілька вибірових одиниць, узятих з генеральної сукупності та призначених для отримання інформації про неї. Елементи вибірки називають *варіантами*. Вибірковою одиницею може бути один з елементів, з яких складається генеральна сукупність, або певна кількість продукції, матеріалу, які створюють сукупність і узяті з одного місця, в один час для формування частини вибірки. До прикладу, для задач контролю та діагностики одиницею є результат одного спостереження під час вимірювання, а вибіркою – сукупність результатів спостережень при проведенні вимірювань з багаторазовими спостереженнями.

Вибірка має достатньо повно відображати особливості всіх об'єктів генеральної сукупності, щоб отримувані оцінки були вірогідними, тобто вона має бути репрезентативною (представницькою). Вибірка буде *репрезентативною*, якщо відбір елементів у вибірку проводиться випадково. Це означає, що всі елементи генеральної сукупності мають однакову ймовірність потрапити у вибірку. Якщо вибірка виявиться нерепрезентативною (її називають *зміщеною*), то з ростом її обсягу може зменшитися точність або можуть бути зроблені помилкові висновки.

Функції результатів спостережень $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, що використовуються для оцінювання параметрів розподілів або для перевірки статистичних гіпотез, називають *статистиками* або *статистичними оцінками*. Якщо в ймовірнісній моделі числові значення $x_1, x_2, \dots, x_n$, розглядаються як результати спостережень ВВ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, то статистики, як функції ВВ, тобто $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, самі є випадковими величинами. Статистики, що є вибірковими аналогами характеристик ВВ (математичного сподівання, медіани, дисперсії, моментів) і використовувані для оцінювання цих характеристик, називають *статистичними характеристиками*.

У ймовірнісній моделі вибірки спостережуваних значень розглядають як реалізацію незалежних однаково розподілених ВВ $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$. При цьому вважають, що отримані в ході спостережень конкретні значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ відповідають певній елементарній події $\omega = \omega_0$, тобто

$$x_1 = \xi_1(\omega_0), x_2 = \xi_2(\omega_0), \dots, x_n = \xi_n(\omega_0), \quad \omega_0 \in \Omega. \quad (12.1)$$

У випадку повторних спостережень будуть отримані інші значення, які відповідають іншій елементарній події $\omega = \omega_1$. Мета опрацювання статистичних даних полягає в тому, щоб за наслідками спостережень, що відповідають елементарній події $\omega = \omega_0$, зробити висновки про ймовірнісну міру P і результати спостережень за різних можливих ω .

Варіаційним рядом $x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[n]}$ називається вибірка, записана в порядку зростання її варіант $x_{[1]} \leq x_{[2]} \leq \dots \leq x_{[n]}$.

Елементи варіаційного ряду позначаються як $x_{[i]}$.

У випадку дослідження неперервної (або з обсягом варіант $n > 100$) ВВ варіаційний ряд розбивається на класи (інтервали) і отримується інтервальний варіаційний ряд. Ширину інтервалів Δx визначають формулою

$$\Delta x = (x_{[n]} - x_{[1]}) / k, \quad (12.2)$$

де k – кількість класів.

Оптимальна кількість класів залежить від обсягу вибірки. Для визначення кількості класів можна користуватися табл. 12.1.

Таблиця 12.1. Визначення кількості класів в залежності від обсягу вибірки

Обсяг вибірки n	25÷40	40÷60	60÷80	100÷200	200÷1000
Кількість класів k	5÷6	6÷8	7÷10	8÷12	10÷15

Припустимо, що зроблено n вимірювань дискретної ВВ ξ і отримано k різних значень $x_1, x_2, \dots, x_k$. При цьому значення x_1 спостерігалось m_1 разів, x_2 – m_2 разів, ..., x_k – m_k разів. Отже, з нескінченної гіпотетичної генеральної сукупності результатів вимірювань зроблено вибірку обсягу $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$. Числа $m_1, m_2, \dots, m_k$ називають **частотами** спостережуваних значень $x_1, x_2, \dots, x_k$. Величини $\tilde{m}_1 = m_1 / n, \tilde{m}_2 = m_2 / n, \dots, \tilde{m}_k = m_k / n$ називають **відносними частотами** варіант x_i . Очевидно, що $\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \dots + \tilde{m}_k = 1$. Отримані результати зручно представити у табличному вигляді (табл. 12.2). Вважатимемо, що варіанти $x_1, x_2, \dots, x_k$ розташовані в порядку зростання, тобто побудовано варіаційний ряд (перший рядок таблиці). Другий рядок таблиці являє собою варіаційний ряд для частот, третій – для відносних частот, четвертий – для кумулятивних (накопичених) відносних частот.

Таблиця 12.2. Структура таблиці для запису результатів спостережень

x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
m_i	m_1	m_2	...	m_i	...	m_k
$\tilde{m}_i$	m_1/n	m_2/n	...	m_i/n	...	m_k/n
$F_i = \sum_{j=1}^i \tilde{m}_j$	m_1/n	$\frac{m_1 + m_2}{n}$	...	$\sum_{j=1}^i m_j/n$	...	$\sum_{j=1}^k m_j/n = 1$

Якщо кількість варіант k не дуже велика, то для того, щоб отримати більш наочне уявлення про розподіл ВВ ξ , будують **полігон частот**. Для цього на осі абсцис відкладають значення варіант $x_1, x_2, \dots, x_k$, а на осі ординат відповідні значення частот $m_1, m_2, \dots, m_k$, або відносних частот, або кумулятивних відносних частот F_i . Очевидно, що полігон відносних частот дає уявлення про розподіл ймовірностей, а графік кумулятивних відносних частот можна назвати емпіричною функцією розподілу ймовірностей. Ця функція виражає залежність між значеннями кількісної ознаки і накопиченою частотою. Отже, **емпіричною функцією розподілу** $F_n(x)$ називається частка елементів вибірки, менших за x . Ця функція містить всю інформацію про результати спостережень. Вона визначена на всій числовій осі. Ясно, що $F(x) = 0$ для всіх $x < x_1$ і $F(x) = 1$ для всіх $x > x_k$. На інтервалі $x_1 < x < x_k$ функція $F(x)$ має вид ступінчастої монотонно зростаючої від 0 до 1 функції, такої, що $F(a) = P(\xi < a)$ (рис. 12.1).

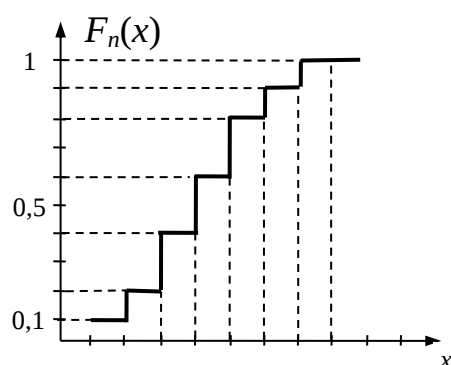


Рис. 12.1. Приклад емпіричної функції розподілу ймовірностей

У випадку інтервального варіаційного ряду частота дорівнює загальній кількості варіант в даному класі. Всі класи, крім останнього, є напіввідкритими справа інтервалами (наприклад, $[a_i; a_{i+1})$), а останній закритий $[a_{k-1}; a_k]$.

Для запису емпіричної функції розподілу у вигляді формули зручно скористатись функцією $s(x, y)$ двох змінних:

$$c(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq y, \\ 1, & x > y. \end{cases} \quad (12.3)$$

ВВ, що формують результати спостережень, позначимо $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Тоді емпірична функція розподілу $F_n(x)$ має вид

$$F_n(x) = F_n(x, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(x, \xi_i(\omega)). \quad (12.4)$$

Згідно із законом великих чисел для кожного дійсного числа x емпірична функція розподілу $F_n(x)$, за умови $n \rightarrow \infty$, сходиться до функції розподілу $F(x)$ результатів спостережень, тобто

$$F_n(x) \rightarrow F(x). \quad (12.5)$$

Для інтервального варіаційного ряду також можна скласти таблицю (див. табл. 12.3), в якій a_i – границя класових інтервалів.

Таблиця 12.3. Варіант таблиці для інтервального варіаційного ряду

Номер класу	1	2	...	k
Класовий інтервал	$[a_0; a_1)$	$[a_1; a_2)$	...	$[a_{k-1}; a_k]$
Частота	m_1	m_2	...	m_k
Відносна частота	$\tilde{m}_1 = m_1 / n$	$\tilde{m}_2$	...	$\tilde{m}_k$
Щільність відносної частоти	$p_1 = \tilde{m}_1 / \Delta x$	p_2	...	p_k

Якщо на осі абсцис відкласти класові інтервали і над ними побудувати прямокутники з висотами, рівними відповідним щільностям p_i відносної частоти, то площа кожного прямокутника дорівнюватиме відносній частоті $S_i = \Delta x p_i = \Delta x \tilde{m}_i / \Delta x = \tilde{m}_i$. Отримана в такий спосіб ступінчаста фігура називається **гістограмою** (рис. 12.2).

Площа під гістограмою дорівнює одиниці, оскільки дорівнює сумі площ прямокутників $S = \sum_{i=1}^k S_i = \sum_{i=1}^k \tilde{m}_i = 1$. Ламана лінія, яка обводить гістограму, є графіком **емпіричної функції щільності ймовірностей**.

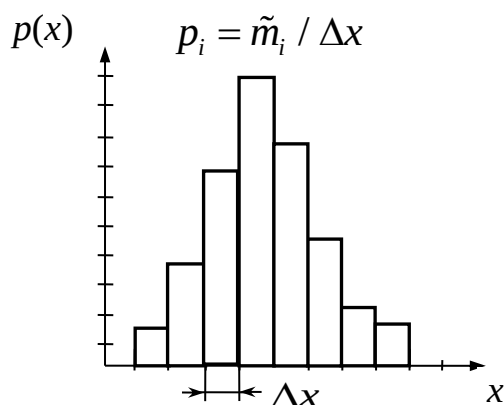


Рис. 12.2. Приклад емпіричної функції щільності розподілу імовірностей

За умови нескінченно великої кількості інтервалів, частота $\tilde{m}_i$ є наближенням ймовірності потрапляння ВВ в i -й інтервал

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx \approx p_i. \quad (12.6)$$

Цю властивість використовують для порівняння теоретичного і емпіричного розподілів.

Вважатимемо емпіричну щільність ймовірностей неперервної ВВ постійною всередині кожного інтервалу, а емпіричну функція розподілу на кожному інтервалі – як лінійно зростаючою від початкового до кінцевого інтервального значення.

12.2. Точкові оцінки характеристик ряду спостережень

Методологічною основою статистичного опрацювання результатів вимірювання є **вибірковий метод**, сутність якого полягає у перенесенні результатів дослідження вибірки на генеральну сукупність. Така можливість обґрунтовується так. Нехай генеральна сукупність має певний генеральний параметр Q . Проводиться серія з n незалежних вимірювань ВВ ξ з певним невідомим законом розподілу ймовірностей. Результатом вимірювання є вибірка $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ обсягу n . Необхідно знайти оцінку генерального параметра Q

$$\hat{Q} = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n). \quad (12.6)$$

Тут і далі оцінки параметрів і характеристик позначатимемо символом $\hat{}$.

Параметром $\hat{Q}$ може бути, до прикладу, математичне сподівання, дисперсія, інші моменти ВВ вищих порядків, медіана, мода тощо.

Вважається, що x_i отримують за незмінних умов, і всі результати вимірювання незалежні. Кожне з x_i , $i = \overline{1, n}$ є реалізацією генеральної сукупності ξ . Нагадаємо, що генеральна сукупність – це сукупність всіх можливих значень досліджуваної ВВ, тобто власне сама ВВ. Кожне значення x_i розглядається як реалізація ВВ ξ_i , а всю вибірку $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ – як реалізацію випадкового вектора $(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n)$, де всі ξ_i , $j = \overline{1, n}$ незалежні і підпорядковані тому самому розподілу ймовірності, що й ξ . Такий перехід дає можливість вважати вибіровий параметр $\hat{Q}$ функцією ВВ

$$\hat{Q} = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n), \quad (12.7)$$

що дає змогу не лише знаходити аналітичні розв'язки (12.7), але й отримувати вирази для розподілів ймовірностей випадкових векторів $(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n)$ і ВВ Q .

Оцінювання – це визначення наближеного значення невідомої характеристики або параметра розподілу (генеральної сукупності), іншої оцінюваної складової математичної моделі реального (технічного, економічного тощо) явища або процесу за результатами спостережень. Параметром генеральної сукупності у випадку вимірювань може бути число, набір чисел (вектор) або функція. Оцінювання проводять за допомогою оцінок – статистик.

Точкове оцінювання – спосіб оцінювання, що полягає в тому, що безпосередньо отримане значення оцінки приймають як невідоме значення параметра розподілу. Відповідно **точкова оцінка параметра** Q – це статистична оцінка, яка визначається одним числом $\hat{Q}$ (12.6) за вибіркою $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$. Така функція вибірки власне і називається точковою оцінкою $\hat{Q}$, оскільки вона визначає одну точку на числовій осі. Наприклад, як оцінки положення центру розподілу використовуються вибірове середнє, медіана, мода¹, середнє арифметичне максимального та мінімального елементів вибірки, середнє геометричне², середнє гармонічне³ тощо.

Наявність декількох методів оцінювання одних і тих же параметрів призводить до необхідності вибору кращого між ними. Степінь відповідності Q його оцінці $\hat{Q}$ залежить не тільки від обсягу n вибірки, але й від виду функції φ . Остання з вимог найкращого наближення $\hat{Q}$ до Q повинна задовольняти таким показникам якості як незсуненість, обґрунтованість, ефективність.

¹ **Мода** – це значення ВВ, яке має найбільшу частоту у вибірці.

² **Середнє геометричне додатних чисел** – це корінь n -ї степені із добутку n чисел.

³ **Середнє гармонічне** – це обернена величина середнього обернених величин.

Незсуненість оцінки передбачає, що зі збільшенням кількості спостережень середнє значення оцінки прямує до значення оцінюваного параметра:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M(\hat{Q})) = Q. \quad (12.8)$$

Якщо ця умова не виконується, оцінку називають **зсуненою**, а величину зсуву визначають як різницю $M(\hat{Q}) - Q$. Цей зсув може зумовлюватися як властивостями самої функції φ , так і похибками вимірювання, калібрування, не випадковим характером отриманої вибірки, чи комбінацією цих чинників. Якщо зсув не залежить від обсягу вибірки він називається **систематичною похибкою**. Наявність систематичних похибок унеможливорює оцінювання істинного значення вимірюваного параметра.

Оцінка називається **обґрунтованою**, коли зі збільшенням обсягу вибірки вона збігається з відповідним параметром генеральної сукупності, тобто для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε має місце рівняння

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Q - \hat{Q}| \leq \varepsilon) = 1, \quad (12.9)$$

тобто зі зростанням n оцінки $\hat{Q}$ все щільніше концентруються в околі Q .

Вимога **ефективності** оцінки полягає в тому, що для вибірок рівного обсягу ефективна оцінка повинна мати мінімальне розсіювання (вибіркову дисперсію). Якщо маємо $D(\hat{Q}_1) \leq D(\hat{Q}_2)$, то більш ефективною є оцінка $\hat{Q}_1$.

Оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності є **вибіркове середнє**:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (12.10)$$

Ця оцінка є незсуненою, обґрунтованою та ефективною.

Якщо вибіркові дані згруповані у варіаційний ряд, то оцінку математичного сподівання визначають за формулою

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i x_i, \quad (12.11)$$

де x_i – значення варіанти для варіаційного ряду або середина класового інтервалу для інтервального варіаційного ряду; m_i – частота варіанти або класова частота.

Вибіркова медіана Me також може слугувати оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності (особливо у випадку симетричного закону розподілу генеральної сукупності). Для дисперсії вибіркової медіани справедливе співвідношення:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{D}(\hat{Me})) = \frac{\pi}{2} \mathbf{D}(\bar{x}). \quad (12.12)$$

Зауважимо, що дисперсія оцінки медіани перевищує дисперсію вибіркового середнього $\bar{x}$ в $\pi/2$ разів, тобто оцінка вибіркового середнього є більш ефективною.

Вибіркова дисперсія $\hat{s}^2$ є оцінкою дисперсії генеральної сукупності:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbf{M}\xi)^2. \quad (12.13)$$

Ця оцінка є незсуненою, але якщо дійсне значення математичного сподівання $\mathbf{M}\xi$ є невідомим та використовується вибіркове середнє, то отримана оцінка дисперсії

$$\hat{s}_*^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (12.14)$$

є зсуненою: $\hat{s}_*^2 = \frac{n-1}{n} \hat{s}^2$.

Для отримання незсуненої оцінки дисперсії використовують формулу:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (12.15)$$

В цій формулі знаменник $\boxed{\nu = n-1}$ називається **кількістю степенів свободи**. В загальному випадку, значення ν дорівнює різниці між обсягом вибірки, з якої обчислено цю оцінку, мінус кількість констант, необхідних для обчислення оцінки і визначених на підставі тих самих значень. Наприклад, у рівнянні (12.16) втрачено один степінь вільності під час визначенні $\bar{x}$ на основі n спостережень.

У випадку, коли вибірккові дані представлені інтервальним варіаційним рядом, для достатньо великого обсягу n і малої кількості класів, оцінка вибіркової дисперсії є завищеною (зсуненою) на величину $\Delta x^2/12$, де Δx — ширина класового інтервалу. Для розрахунку цієї оцінки вводять **поправку Шеппарда**¹:

¹ Поправка Шеппарда застосовується при нормальному і логнормальному законах розподілу ВВ та не застосовується при рівномірному та експоненціальному законах.

$$\boxed{\hat{S}'^2 = \hat{S}^2 - \Delta x^2 / 12}. \quad (12.16)$$

Точковою оцінкою стандартного відхилення вибіркового середнього $\bar{x}$ є статистика:

$$\boxed{\hat{s}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (12.17)$$

Ця статистика характеризує сукупність вимірювань, тоді як $\hat{s}$ характеризує окреме вимірювання.

Лекція 13. Методи визначення точкових та інтервальних оцінок ряду спостережень

Для знаходження точкових оцінок найчастіше використовують метод максимальної правдоподібності, метод моментів та метод квантилів.

13.1. Метод максимальної правдоподібності

Цей метод запропонований у 1912 році видатним англійським статистиком Р.А. Фішером (1890–1962 р.). Метод базується на принципі, згідно якого найкращою оцінкою параметра ВВ є та оцінка, яка найбільш ймовірна за результатами проведення експерименту. Як найбільш правдоподібне значення параметра Q береться та його оцінка $\hat{Q}$, для якої ймовірність отримати в n експериментах дану вибірку $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є максимально великою. Кожна з величин x_i має щільність розподілу ймовірності $f(x_i, Q)$.

Функція правдоподібності визначається таким рівнянням:

$$\boxed{L(x_1, x_2, \dots, x_n | Q) = f(x_1 | Q) \cdot f(x_2 | Q) \cdot \dots \cdot f(x_n | Q)}, \quad (13.1)$$

тобто ця функція дорівнює добутку умовних ймовірностей n ВВ, параметри розподілу яких відповідають максимуму ймовірності появи параметра Q. Вона має максимум при $\hat{Q} = Q$, де $\hat{Q}$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n | Q)}{\partial Q} = 0, \quad (13.2)$$

або рівнозначного рівняння

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n | Q)}{\partial Q} = 0. \quad (13.3)$$

Якщо потрібно оцінити не один, а декілька невідомих параметрів $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$, то оцінки максимуму функцій правдоподібності для цих параметрів знаходять, розв'язуючи систему з k рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n | Q_1, \dots, Q_k)}{\partial Q_1} = 0, \\ \dots, \\ \frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n | Q_1, \dots, Q_k)}{\partial Q_k} = 0. \end{cases} \quad (13.4)$$

Застосування методу максимальної правдоподібності розглянемо на прикладі оцінювання параметрів положення $\mathbf{M}\xi = \nu$ та розсіювання $+\sqrt{\mathbf{D}\xi} = \sigma$ ВВ, розподіленої за гауссовим законом, за вибіркою $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функція правдоподібності визначається рівнянням

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n | \nu, \sigma) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} \exp \left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \nu)^2}{2\sigma^2} \right). \quad (13.5)$$

Якщо цю функцію домножити на $(2\pi)^{0,5n}$ і взяти її логарифм, отримаємо:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n | \nu, \sigma) = -n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \nu)^2. \quad (13.6)$$

Диференціюємо отримане рівняння за параметрами ν та σ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n | \nu, \sigma)}{\partial \nu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \nu) = 0, \\ \frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n | \nu, \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \nu)^2 = 0. \end{cases} \quad (13.7)$$

Перше рівняння системи дорівнюватиме 0 у випадку, якщо

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \nu) = \sum_{i=1}^n x_i - n\nu = 0, \quad (13.8)$$

звідки, з урахуванням $\hat{\nu} = \nu$ отримаємо

$$\boxed{\hat{\nu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}}. \quad (13.9)$$

Отриману оцінку математичного сподівання підставимо у друге рівняння системи (13.7), матимемо

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (13.10)$$

Отримані оцінки (13.9) та (13.10) збігаються з оцінками математичного сподівання (12.10) та середньо квадратичного відхилення (12.14). Тому вони є обґрунтованими та ефективними. Оцінка математичного сподівання $\bar{x}$ є незсунутою і має гауссовий розподіл, а оцінка дисперсії $\hat{\sigma}^2 = \hat{s}^2$ зсунута і має розподіл χ^2 , який при $n \rightarrow \infty$ наближається до гауссового.

Отже, оцінки, отримані за методом максимальної правдоподібності є: 1) обґрунтованими; 2) асимптотично ефективними; 3) мають асимптотично гауссовий розподіл; 4) відповідають умові: якщо для параметра Q існує ефективна оцінка, то рівняння правдоподібності має єдиний розв'язок, який збігається з цією оцінкою.

13.2. Метод моментів

Цей метод розроблений відомим англійським математиком та статистиком К. Пірсоном (1857–1936) і є історично першим методом оцінювання параметрів. Він полягає у прирівнюванні певного числа вибірових моментів до відповідних моментів розподілу, функціонально зв'язаних з невідомими параметрами:

$$\begin{cases} m_1(Q_1, \dots, Q_k) = m_1^*(x_1, \dots, x_n), \\ \dots, \\ m_j(Q_1, \dots, Q_k) = m_j^*(x_1, \dots, x_n), \\ \dots, \\ m_k(Q_1, \dots, Q_k) = m_k^*(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (13.11)$$

де $m_j(Q_1, \dots, Q_k)$ – j -й момент розподілу (початковий або центральний) з невідомими параметрами, $m_j^*(x_1, \dots, x_n)$ – j -й вибіровий момент (початковий або центральний).

За аналогією до моментів ВВ ξ (7.19) і (7.20) для вибірки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вводяться вибірові моменти, які визначаються з цієї вибірки:

- **початковий вибіровий момент порядку k** – це ВВ

$$v_j^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j; \quad (13.12)$$

- **центральний вибіровий момент порядку k** – це ВВ

$$\mu_j^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^j. \quad (13.13)$$

Оцінки параметрів Q_j розраховують шляхом розв'язання отриманих рівнянь (13.11) відносно цих параметрів.

Оцінки, отримані за методом моментів, є асимптотично незміщеними та асимптотично нормальними, але не є асимптотично ефективними, тобто навіть за великих обсягів вибірки вони не мають найменшої можливої дисперсії.

13.3. Метод квантилів

Квантілем називається значення ранжируваної змінної, що відокремлює від варіаційного ряду певну частку обсягу сукупності. Квантиль є однією з числових характеристик ВВ.

Розглянемо це поняття на прикладі неперервної ВВ ξ , яка має розподіл ймовірностей $F(x)$. Для фіксованого дійсного числа $\alpha \in [0, 1]$, α -**квантилем** (або **квантилем рівня α**) розподілу $F(x)$ називається число x_α таке, що

$$F(x_\alpha) = \alpha. \quad (13.14)$$

Графічну ілюстрація поняття квантиля подано на рис. 13.1.

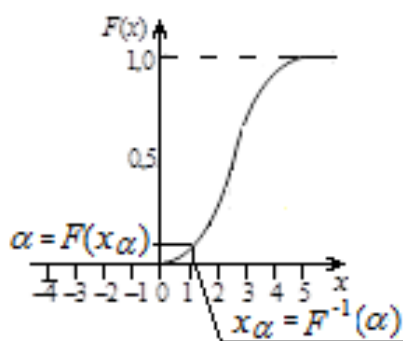


Рис. 13.1. Визначення квантиля рівня α

Очевидно, що для неперервних розподілів справедлива рівність

$$P\left(x_{\frac{1-\alpha}{2}} \leq \xi \leq x_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) = \alpha. \quad (13.15)$$

В табл. 13.1 наведено квантили стандартного гауссового розподілу, які часто використовуються під час статистичних розрахунків.

Таблиця 13.1. Найбільш вживані квантилі стандартного гауссового розподілу

Ймовірність, %	99,99	99,90	99,00	97,72	97,50	95,00	90,00	84,13	50,00
Квантиль	3,715	3,090	2,326	2,000	1,960	1,645	1,282	1,000	0,000

Вибіркові квантилі відсікають в межах варіаційного ряду певну частину його членів. Так, квантиль 0,25 (або 25-процентий квантиль або **нижній квантиль**) змінної – це таке значення $(x_{0,25})$, що 25% значень змінної потрапляють нижче даного значення. Відповідно квантиль 0,75 називають **верхнім квантилем**.

Перейдемо тепер безпосередньо до методу квантилів. Цей метод подібний до методу моментів. При використанні цього методу теоретичні квантилі, як функції невідомих параметрів закону розподілу, прирівнюються до вибірових квантилів. У результаті отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \kappa_{\alpha 1}(Q_1, \dots, Q_k) = \kappa_{\alpha 1}^*(x_1, \dots, x_n), \\ \dots, \\ \kappa_{\alpha j}(Q_1, \dots, Q_k) = \kappa_{\alpha j}^*(x_1, \dots, x_n), \\ \dots, \\ \kappa_{\alpha k}(Q_1, \dots, Q_k) = \kappa_{\alpha k}^*(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (13.16)$$

де $\kappa_{\alpha i}(Q)$ і $\kappa_{\alpha i}^*(x)$ – відповідно теоретичні і вибірові квантилі рівня αi , яка розв'язується відносно невідомих параметрів $Q_1, \dots, Q_k$.

Цей метод зручно використовувати, якщо існує аналітичний вираз функції $F^{-1}(P | Q)$, оберненої до функції розподілу $F(x | Q)$.

13.4. Інтервальні оцінки характеристик ряду спостережень

Розглянуті вище точкові оцінки дають одне числове значення параметра, яке є ВВ і в загальному випадку відрізняється від детермінованого істинного значення параметра. Ця випадковість обумовлена тим, що оцінки параметрів розподілу генеральної сукупності обчислюють не за всією сукупністю, а за вибірками з обмеженою кількістю елементів. Випадковість відбору елементів з генеральної сукупності у вибірку і визначає випадковість отриманого значення оцінки. За отриманим значенням оцінки параметра не можна судити про її точність.

Більш інформативним був би результат оцінювання, який характеризувався можливим відхиленням оцінки від параметра і ймовірністю виконання цієї умови. Цю задачу вирішує інтервальне оцінювання параметра.

Інтервальне оцінювання – це спосіб оцінювання, за якого визначається інтервал, у якому із заданою ймовірністю знаходиться шукане (істинне) значення параметра розподілу.

Цей інтервал називається **довірчим** або **надійним**, а відповідна ймовірність – **довірчою ймовірністю** або **надійністю**. Чим більшим є довірчий інтервал, тим більша впевненість, що оцінювана величина знаходиться в межах інтервалу.

Довірча ймовірність визначається як величина $P_d = 1 - \alpha$, де α називається **рівнем значущості**, який дорівнює ймовірності того, що надійний інтервал не накриває значення параметра, тобто ймовірності того, що при оцінюванні допущена помилка.

Припустимо, що необхідно визначити довірчий інтервал для параметра Q генеральної сукупності, використовуючи незміщену та обґрунтовану вибірку оцінку $\hat{Q}$. Ця оцінка має вибіркового розподіл з середнім $M\hat{Q} = Q$ і стандартним відхиленням $\sigma_Q \rightarrow 0$ за умови $n \rightarrow \infty$. Можна вказати ймовірність

$$P_d(|\hat{Q} - Q| \leq \varepsilon) = 1 - \alpha, \quad (13.17)$$

з якою відхилення оцінки від її математичного сподівання не буде перевищувати деякого додатного числа ε . Цей вираз можна переписати так:

$$P_d(\hat{Q} - \varepsilon \leq Q \leq \hat{Q} + \varepsilon) = 1 - \alpha, \quad (13.18)$$

де $\hat{Q} - \varepsilon$, $\hat{Q} + \varepsilon$ – нижня та верхня границі довірчого інтервалу. Ці границі є ВВ, оскільки отримана за вибілковими спостереженнями оцінка $\hat{Q}$ є ВВ.

13.5. Порядкові статистики ряду спостережень

Розглянуті вище методи точкового та інтервального оцінювання передбачають обґрунтування законів розподілу ВВ, для яких визначаються їх параметри. В більшості технічної та нормативної літератури припускають, що результати спостережень формуються за сукупним впливом багатьох малих факторів, і в силу центральної граничної теореми теорії ймовірності ця величина добре наближається (за розподілом) до гауссової ВВ. Таке твердження є справедливим, якщо фактори, що визначають похибки діють адитивно і незалежно один від одного. На припущенні про гауссовий закон розподілу результатів спостережень побудовано більшість класичних моделей і методів кореляційного, регресійного, дисперсійного аналізу, моделей вимірювань, тощо.

Проте таке теоретичне припущення не завжди можна підтвердити експериментальними дослідженнями, що обмежує можливість використання гауссового розподілу і, відповідно, параметричних методів статистики.

Альтернативами параметричним методам статистики є так звані **непараметричні методи**, за якими наближення функції розподілу знаходяться безпосередньо із отриманих вибірових даних.

Переваги непараметричних методів полягають у тому, що їх можна застосовувати:

- для перевірки гіпотез про параметри генеральної сукупності, коли випадкові величини не розподілені за гауссовим законом;
- для номінальних і порядкових (тобто згрупованих по певним категоріям з урахуванням частоти появи) даних;
- для перевірки гіпотез, які не пов'язані з параметрами генеральної сукупності;
- у більшості випадків для непараметричних методів обчислення простіші, ніж для параметричних, а самі методи зрозуміліші.

Недоліки непараметричних методів полягають у тому, що вони менш точні, чим відповідні параметричні критерії, менш інформативні та менш ефективні.

Одним з типів методів, які входять в групу непараметричних є **рангові**, в яких використовуються не самі вибірові значення, а їх ранги. Такі методи дають змогу оцінити властивості ВВ незалежно від їх функцій розподілу.

Рангом числа x_i у вибірці $x_1, \dots, x_n$ називають той номер r_i , який воно отримує при упорядкуванні всієї групи за зростанням (спаданням). Так, ранг $r_1 = 1$ отримує найменше (найбільше) число у вибірці, ранг 2 – найменше (найбільше) із тих, що залишилися, і т.д. Ранг $r_n = n$ отримає найбільше (найменше) з чисел у вибірці.

Якщо допускається, що результати спостережень $x_1, \dots, x_n$, розподілені неперервно, то рівність серед чисел $x_1, \dots, x_n$ теоретично має нульову ймовірність, але на практиці величини x_i вимірюються з обмеженою точністю і тому їх рівність є можливою. Якщо серед чисел $x_1, \dots, x_n$ виявляються однакові, то їм надають спільний **середній ранг**. Так, наприклад, якщо однакові величини займають третє, четверте та п'яте місця у вибірці, кожне з них отримує середній ранг $r_3 = r_4 = r_5 = (3+4+5)/3$. Такі ранги називають «**зв'язаними**». Правильність визначення рангів здійснюється за перевіркою виконання рівності:

$$\sum_i r_i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Вибірка, елементи якої розміщені на місцях, номери яких відповідають їх рангам, називаються **ранжованою** або **варіаційним рядом**. Елементи варіаційного ряду називаються **порядковими статистиками**.

При заміні числових значень спостережень їх рангами неминує виникати втрата інформації. Іноді така втрата може бути повною. Нехай, наприклад, $x_1, \dots, x_n$, результати незалежних вимірювань невідомої величини A . Якщо замінити дану вибірку послідовністю рангів отримуємо деяку перестановку чисел $1, 2, \dots, n$. Ця перестановка не містить інформації про значення величини A , яке може мати розмірність, а ранги – безрозмірні.

Попри цей недолік, методи рангової статистики дають змогу вирішувати всі ті задачі оброблення експериментальних даних, що й параметричні методи, зокрема ті, що ґрунтуються на припущенні про гауссовість, тому їх широко застосовують для розв'язання різних статистичних задач.

Лекція 14. Методи оцінювання параметрів закону розподілу даних

14.1. Оцінювання параметрів за відомим законом розподілу ймовірностей

Загальна постановка задачі така. Відомим є закон розподілу ймовірностей $ВВ \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ (його аналітичний запис), але невідомі параметри розподілу. За отриманої вибірки $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ необхідно визначити точкові та інтервальні оцінки (довірчий інтервал $\pm \Delta x_d$ та довірчу ймовірність P_d) центру розподілу. Графічну ілюстрацію постановки задачі у випадку пошуку оцінок параметру розміщення розподілу наведено на рис. 14.1. Оцінюється параметр M_ξ , довірчий інтервал будується відносно оцінки $\bar{x}$.

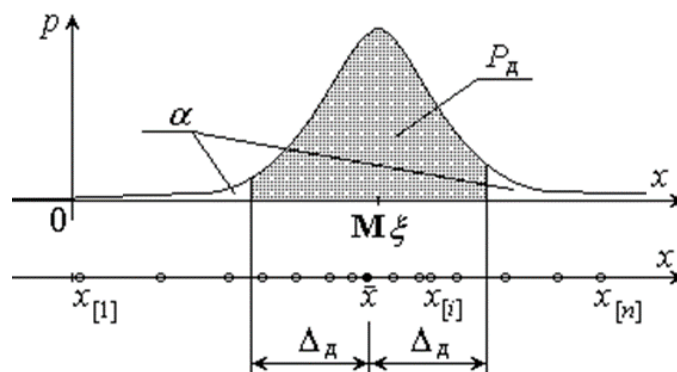


Рис. 14.1. Графічна ілюстрація процесу побудови точкової та інтервальної оцінок параметру розподілу ВВ за вибіркою $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$

14.1.1. Оцінювання параметрів розподілу Гаусса

Нагадаємо, що щільність розподілу Гаусса (диференціальна функція розподілу) (рис. 14.2, *а*) та функція розподілу (інтегральна) (рис. 14.2, *б*) визначаються відповідно формулами:

$$p(x; \mu; \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (14.1)$$

$$F(x; \mu; \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt, \quad (14.2)$$

де μ – параметр положення (зсуву), σ – параметр розсіювання.

Для розв'язання практичних задач часто застосовується функція нормованого або стандартного розподілу Гаусса ($\mu=0, \sigma=1$):

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (14.3)$$

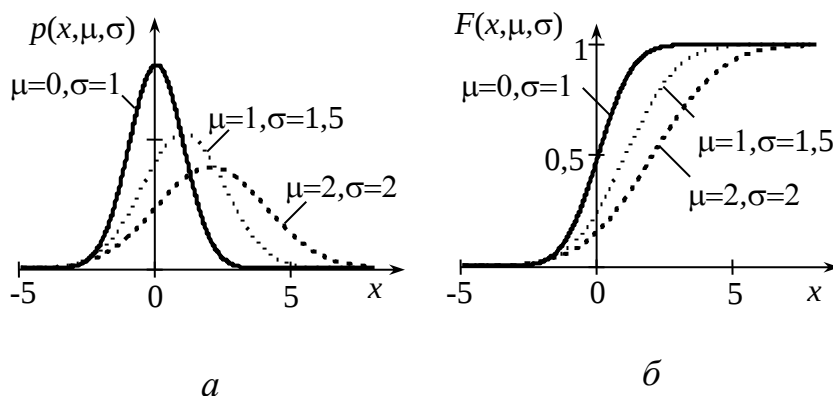


Рис. 14.2. Функції розподілу імовірності Гаусса:

а – диференціальна; *б* та – інтегральна

Розглянемо спочатку точкові оцінки параметра μ , які отримують за рядом спостережень $x_i, i = \overline{1, n}$.

1. Оцінка найбільшої правдоподібності параметра μ визначається формулою

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (14.4)$$

Оцінка є обґрунтованою, незміщеною і ефективною. Вона розподілена так само як ВВ з математичним сподіванням $\mathbf{M}(\hat{\mu}) = \mu$ і дисперсією $\mathbf{D}(\hat{\mu}) = \sigma^2 / n$.

2. **Оцінка за значенням медіани.** Як оцінку параметра μ можна використовувати вибірккову медіану:

$$\hat{\mu} = \mathbf{Med}(x), \quad (14.5)$$

де $\mathbf{Med}(x)$ – оператор вибіркової медіани.

В статистиці **медіана** – це величина ознаки, що розташована посередині ранжованого ряду, тобто це величина, що розташована в середині ряду величин, переставлених у зростаючому або спадному порядку (нагадаємо, що в теорії ймовірностей медіаною функції розподілу F називається таке число x_{med} , для якого $F(x_{\text{med}}) = 0,5$). Медіана ділить ряд значень ознаки на дві рівні частини, по обидві сторони від неї розміщується однакова кількість одиниць сукупності. Медіана є квантилем порядку $1/2$ і обчислюється як

$$\mathbf{Med}(x) = \begin{cases} x_{[(n+1)/2]}, & \text{якщо } n \text{ не парне,} \\ 0,5(x_{[n/2]} + x_{[(n+1)/2]}), & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases} \quad (14.6)$$

Ефективність оцінки при $n \rightarrow \infty$ прямує до $2/\pi = 0,637$, тобто для досягнення цією оцінкою ефективності оцінки максимальної правдоподібності необхідний в $\pi/2$ більший обсяг спостережень.

3. Оцінки Діксона за порядковими статистиками (квантилями):

– середнє з двох оптимальних порядкових статистик:

$$\hat{\mu} = 0,5 \cdot (x_{[i]} + x_{[j]}). \quad (14.7)$$

Оптимальні порядкові статистики для оцінки (14.7) наведені у табл. 14.1. Якщо $n > 20$, можна скористатись залежністю $i=[0,27n]$, $j=[0,73n]$, де $[\cdot]$ – оператор заокруглення до найближчого цілого.

Таблиця 14.1. Оптимальні порядкові статистики для оцінки Діксона

n	2	3	4	5	6		7	8	9	10	11
i	1	1	2	2	2		2	3	3	3	3
j	2	3	3	4	5		6	6	7	8	9

<i>n</i>	12	13	14	15	16	17	18	19	20	∞
<i>i</i>	4	4	4	4	5	5	5	6	6	$[0,27n]$
<i>j</i>	9	10	11	12	12	13	14	14	15	$[0,73n]$

– середнє за варіаційним рядом з усіх спостережень крім двох крайніх:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=2}^{n-1} x_{[i]}. \quad (14.8)$$

Ефективність оцінки (14.7) прямує до 0,81 при $n \rightarrow \infty$, а ефективність оцінки (14.8) не поступається оцінці (14.4).

4. **Швидкі оцінки Кенуя.** До таких оцінок належать такі.

– середньоквартильна оцінка:

$$\hat{\mu} = 0,5 \cdot (x_{[0,25n]} + x_{[0,75n]}). \quad (14.9)$$

Цей метод рекомендований лише для швидкого наближеного оцінювання.

– оцінка за трьома квантилями:

$$\hat{\mu} = 0,2x_{[n/16]} + 0,6x_{[n/2]} + 0,2x_{[15n/16]}. \quad (14.10)$$

Ефективність оцінки дорівнює приблизно 0,83. Метод достатньо стійкий до відхилення розподілу спостережень від розподілу Гаусса.

– оцінка за п'ятьма квантилями:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{6} (x_{[n/16]} + x_{[n/4]} + 2x_{[n/2]} + x_{[3n/4]} + x_{[15n/16]}). \quad (14.11)$$

Ефективність оцінки дорівнює приблизно 0,93. Метод стійкий до відхилення розподілу спостережень від розподілу Гаусса.

5. **Стійка оцінка Ходжеса-Лемана за середніми Уолша.** Ця оцінка застосовується у випадку відхилення розподілу спостережень від розподілу Гаусса та наявності аномальних значень.

За рядом спостережень $x_i, i = \overline{1, n}$ визначають множину $(n(n+1)/2)$ середніх Уолша:

$$z_{i,j} = 0,5(x_i + x_j), \quad i \leq j. \quad (14.12)$$

Оцінка Ходжеса-Лемана визначається як медіана отриманої множини середніх Уолша: $\hat{\mu} = \mathbf{Med}(z)$.

Перейдемо до розгляду інтервальних оцінок параметра μ .

1. Інтервальна оцінка μ за відомого значення σ

Нижню і верхню границі інтервальної оцінки параметра μ (14.4) і (14.8) для довірчої ймовірності P розраховують за формулами:

$$\mu_{\text{н}}(n, P) = \hat{\mu} - u_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \mu_{\text{в}}(n, P) = \hat{\mu} + u_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (14.13)$$

де u_{γ} – γ -квантиль стандартного розподілу Гаусса (див. додатку Ж), $\gamma = (1 + P)/2$ – для двосторонньої оцінки і $\gamma = P$ для односторонньої оцінки.

2. Інтервальна оцінка μ за невідомого значення σ . Нижня і верхня границі інтервальної оцінки параметра μ (14.4) і (14.8) з довірчою ймовірністю P розраховують за формулами:

$$\mu_{\text{н}}(n, P) = \hat{\mu} - t_{\gamma}(v) \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \mu_{\text{в}}(n, P) = \hat{\mu} + t_{\gamma}(v) \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad (14.14)$$

де $t_{\gamma}(v)$ – γ -квантиль розподілу Стюдента з $v = n - 1$ степенями свободи (див. додаток Г), S – оцінка СКВ, $\gamma = (1 + P)/2$ – для двосторонньої оцінки і $\gamma = P$ для односторонньої оцінки.

Для практичного використання часто обирають $P = 0,95$ ($\gamma = \frac{1+P}{2} = 0,975$), тоді можна застосовувати апроксимацію:

$$t_{0,975}(v) = 1,96 + \frac{2,5}{v - 0,8}. \quad (14.15)$$

Перейдемо до розгляду точкових оцінок параметра σ , які отримують за рядом спостережень x_i , $i = 1, n$.

1. Оцінка σ найбільшій правдоподібності σ :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}. \quad (14.16)$$

2. Оцінка σ за вибірковим розмахом R . За обсягу спостережень $n \leq 20$ рекомендується застосовувати таку формулу для спрощеного розрахунку:

$$\hat{\sigma} = R \cdot d(n), \quad (14.18)$$

де $R = x_{[n]} - x_{[1]}$, $d(n)$ – параметр, який пов’язує значення СКВ та розмаху для розподілу Гаусса (табл. 14.2).

Таблиця 14.2. Коефіцієнт d для визначення σ за вибіркоvim розмахом

n	d	n	d	n	d	n	d
2	0,8862	7	0,3698	12	0,3069	17	0,2787
3	0,5908	8	0,3562	13	0,2998	18	0,2747
4	0,4857	9	0,3367	14	0,2935	19	0,2711
5	0,4299	10	0,3249	15	0,2880	20	0,2677
6	0,3946	11	0,3152	16	0,2831		

3. **Оцінка σ Даутона за порядковими статистиками.** Досить простою з огляду на обчислювальну складність та достатньо ефективною ($E \approx 0,94$) є така оцінка СКВ:

$$\hat{\sigma} = \frac{1,77245}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_{[i]} \cdot (2 \cdot i - n - 1)). \quad (14.19)$$

Перейдемо до розгляду інтервальних оцінок параметра σ .

Методи визначення інтервальних оцінок параметра σ залежать від методів визначення точкових оцінок.

Нижню і верхню границі **інтервальної оцінки параметра σ** (14.16) при довірчій ймовірності P_d визначають за формулами:

$$\sigma_n(n, P_d) = \sqrt{\frac{1}{\chi_{\gamma'}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}, \quad \sigma_b(n, P_d) = \sqrt{\frac{1}{\chi_{\gamma''}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}, \quad (14.20)$$

де $\hat{\mu}$ – вибіркова оцінка параметра μ , χ_{γ}^2 – γ -квантиль розподілу Пірсона з $\nu = n - 1$ степенями свободи (якщо значення μ відоме, то $\nu = n$) (додаток Е), $\gamma' = (1 + P_d) / 2$, $\gamma'' = (1 - P_d) / 2$ для двосторонньої оцінки і $\gamma' = P_d$, $\gamma'' = 1 - P_d$ – для односторонньої.

14.1.2. Оцінювання параметрів рівномірного розподілу

Щільність і функція рівномірного розподілу описується формулами (9.8) і (9.9), а їх графіки подані відповідно на рис. 9.2, а і б. Розглянемо точкові оцінки параметрів рівномірного закону розподілу. За достатнього обсягу вибірки ($n > 50$) для оцінювання параметрів a і b можна запропонувати прості оцінки:

$$\boxed{a = x_{[1]}}, \quad \boxed{b = x_{[n]}}. \quad (14.21)$$

Зрозуміло, що ці оцінки не є стійкими до наявності спостережень з надмірною похибкою та значною мірою залежать від обсягу даних.

За малого обсягу даних ($n \leq 50$) більш доцільним є застосування таких оцінок:

$$\boxed{a = \bar{x} - s\sqrt{3}}, \quad \boxed{b = \bar{x} + s\sqrt{3}}, \quad (14.22)$$

де $\bar{x}$ – оцінка математичного сподівання, отримана за методом максимальної правдоподібності, S – оцінка СКВ.

Для забезпечення стійкості до наявності у ряді спостережень даних з надмірною похибкою у виразі (14.22) замість оцінок $\bar{x}$ і S застосовують відповідні усічені оцінки:

$$\boxed{\bar{x} = \text{Med}(x)}, \quad \boxed{s = 1,15 \cdot \text{Med}(\Delta x)}, \quad (14.23)$$

де Δx – множина модулів різниць між результатами спостережень і медіаною ряду спостережень: $\boxed{\Delta x_i = |x_i - \text{Med}(x)|}$.

14.1.3. Оцінювання параметрів трикутного розподілу

Щільність і функція трикутного розподілу описується формулами (9.10) і (9.11), а їх графіки подані відповідно на рис. 9.3, а і б. Розглянемо точкові оцінки параметрів цього розподілу.

За достатнього обсягу даних ($n > 50$) для оцінювання параметрів a і b беруть прості оцінки (14.21): $\boxed{a = x_{[1]}}$, $\boxed{b = x_{[n]}}$. Так само як і для рівномірного розподілу ці оцінки не є стійкими до наявності спостережень з надмірною похибкою та залежать від обсягу даних.

За малого обсягу даних ($n \leq 50$) більш доцільним є застосування таких оцінок:

$$\boxed{a = \bar{x} - s\sqrt{6}}, \quad \boxed{b = \bar{x} + s\sqrt{6}}. \quad (14.24)$$

Для забезпечення стійкості до наявності у ряді спостережень даних з надмірною похибкою у виразі (14.24) замість оцінок $\bar{x}$ і S застосовують відповідні стійкі або усічені оцінки, наприклад:

$$\boxed{\bar{x} = \text{Med}(x)}, \quad \boxed{s = 1,75 \cdot \text{Med}(\Delta x)}. \quad (14.25)$$

14.2. Оцінювання центру розподілу за невідомого закону розподілу ймовірностей

Як первинні (грубі) оцінки центру групування значень ВВ за невідомого закону розподілу ймовірностей можуть бути використані різні граничні нерівності, які дають змогу отримати інтервальні оцінки центру розподілу.

Нерівність Чебишова. Виконаємо підстановку $\varepsilon = k\sigma$ у нерівність Чебишова (8.9)

$$P(|x - \mu| \geq k\sigma) < 1/k^2, \quad (14.26)$$

де μ і σ – відповідно математичне сподівання та стандартне відхилення розподілу ймовірності.

З нерівності (14.26) з урахуванням того, що $P(|x - \mu| \geq k\sigma) = 1 - P_d$ впливає

$$\boxed{\xi - \frac{\sigma}{\sqrt{1 - P_d}} \leq \mu \leq \xi + \frac{\sigma}{\sqrt{1 - P_d}}}, \quad (14.27)$$

де P_d – довірча ймовірність.

Якщо замість значення ВВ ξ використовується вибіркове середнє $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, то виконується нерівність

$$\boxed{\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n(1 - P_d)}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n(1 - P_d)}}}. \quad (14.28)$$

Якщо відомо, що розподіл є симетричним відносно центра μ , то відповідний довірчий інтервал визначається як:

$$\boxed{\bar{x} - \frac{2\sigma}{3\sqrt{n(1 - P_d)}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{3\sqrt{n(1 - P_d)}}}. \quad (14.29)$$

Отже, тільки знання того факту, що розподіл ВВ є симетричним, дає змогу отримати вузький довірчий інтервал для центру розподілу за незмінної довірчої ймовірності.

Лекція 15. Методи визначення закону розподілу даних

Вибір методу та правильне оцінювання закону розподілу даних є важливим етапом статистичного аналізу експериментальних даних, оскільки від виду закону залежить коректність визначення точкових та інтервальних оцінок параметрів розподілу та інших статистичних характеристик.

Визначення законів розподілу ймовірності полягає у висуненні та перевірці гіпотез про закони розподілу статистичних даних.

15.1. Загальні поняття про статистичні гіпотези та їх перевірку

Нехай ξ – досліджувана неперервна ВВ зі щільністю ймовірності $p_{\xi}(x)$, θ – невідомий інформативний параметр, $X = (x_1, \dots, x_N)$ – реалізація обсягу N випадкової вибірки $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $\hat{\theta}$ – оцінка параметра θ .

Статистичною перевіркою гіпотези називають перевірку будь-якого припущення щодо ймовірнісних характеристик ВВ, які спостерігаються в експерименті. Припущення в статистиці називається **гіпотезою**, позначається літерою H . Воно може стосуватись вигляду розподілу досліджуваної ВВ, її параметрів, числових характеристик, наявності/відсутності дефектів об'єкта контролю тощо.

Нульовою гіпотезою H_0 називається основна (висунута) гіпотеза, яка полягає в порівнянні параметра θ з його оцінкою $\hat{\theta}$. Нульова гіпотеза зазвичай стверджує, що відмінність між порівнюваними величинами відсутня, а наявні відхилення обумовлені лише випадковим характером оцінки $\hat{\theta}$.

Альтернативною (конкуруючою) H_1 називається гіпотеза, яка приймається в тому випадку, коли нульова гіпотеза H_0 відхиляється. Альтернативних гіпотез може бути одна або більше. Для однієї альтернативної гіпотези маємо

$$\boxed{H_0: \theta = \theta_0}; \quad \boxed{H_1: \theta = \theta_1 \text{ або } \theta \neq \theta_0}.$$

Вибір альтернативної гіпотези визначається постановкою задачі.

Гіпотеза називається **простою**, якщо вона припускає, що параметр θ приймає тільки одне значення, наприклад, $\boxed{H_0: \theta = \theta_0}; \boxed{H_1: \theta = \theta_1}$. Гіпотеза називається **складною**, якщо вона припускає, що параметр θ приймає скінчену чи злічену кількість значень, наприклад, $\boxed{H_0: \theta = \theta_0}; \boxed{H_1: \theta \neq \theta_0 \text{ або } H_1: \theta > \theta_0}$. В техніці найчастіше мають справу з простими гіпотезами.

Параметричною називається гіпотеза, якщо закон розподілу ВВ ξ передбачається відомим і перевіряються припущення щодо значень його параметрів.

Непараметричною називається гіпотеза, якщо закон розподілу ВВ невідомий, а висновки, зроблені на основі непараметричної гіпотези, не залежать від невідомого теоретичного розподілу ВВ ξ або його параметрів.

Прийняття рішення на підставі статистичної перевірки гіпотез завжди супроводжується помилками двох видів.

Помилкою першого роду називається помилка відхилення вірної нульової гіпотези. Імовірність помилки першого роду позначається так: $P(H_1|H_0) = \alpha$.

Помилкою другого роду називається помилка неправильного прийняття нульової гіпотези. Імовірність помилки другого роду позначається так: $P(H_0|H_1) = \beta$.

Якщо необмежено збільшувати обсяг вибірки N , є принципова можливість одержання як завгодно малих помилок α і β . Приклад визначення помилок α і β наведено на рис. 15.1.

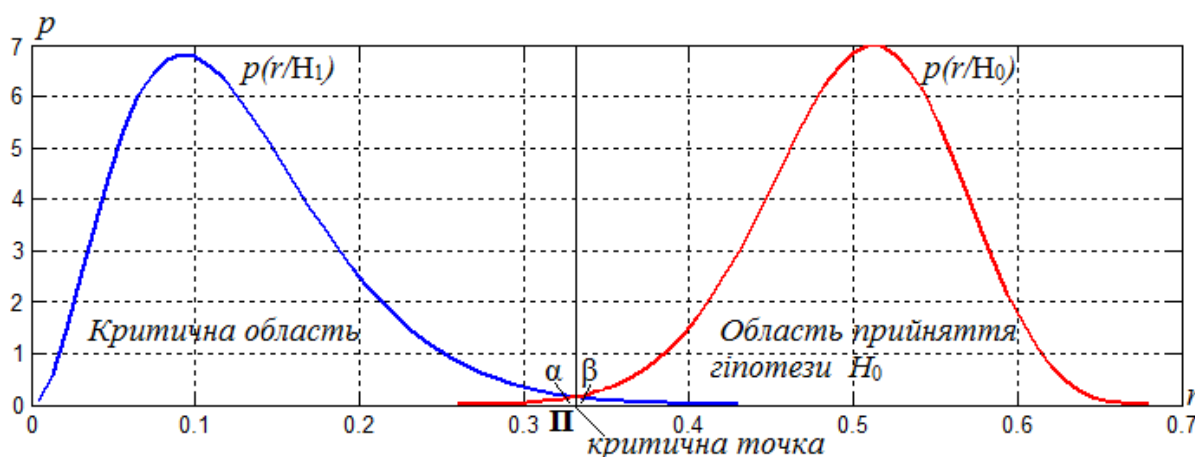


Рис. 15.1. Пояснення до змісту понять «помилка першого і другого роду».

Статистичним критерієм називається правило, згідно з яким гіпотеза H_0 приймається або відхиляється. Статистичний критерій встановлює, для яких результатів випадкової вибірки гіпотеза, що перевіряється, приймається, а для яких — відхиляється. Для побудови статистичного критерію використовується деяка **статистика** — функція від вектору спостережень, за значеннями якої приймають або відхиляють гіпотезу H_0 . Зокрема, статистикою критерію є оцінка параметра θ . Значення статистики критерію, за яких гіпотеза H_0 відхиляється, утворюють **критичну область** гіпотези, що перевіряється.

В процесі побудови критерію прагнуть зменшити до мінімуму ймовірності помилок α і β . Характеристиками якості статистичного критерію перевірки гіпотез є рівень значущості і потужність статистичного критерію.

Рівень значущості α – це ймовірність відхилення вірної гіпотези H_0 , тобто ймовірність помилки першого роду. Значення α зазвичай вибирається з ряду 0,005; 0,01; 0,05; 0,1; в технічних застосунках, як правило, $\alpha = 0,05$.

Потужністю критерію називається ймовірність $M = 1 - \beta$ недопущення помилки другого роду. Із двох критеріїв, що характеризуються однією і тією ж ймовірністю α , обирають той, що має більшу потужність (меншу помилку β).

Для статистичної перевірки гіпотез необхідно виконати такі дії:

1. Сформулювати гіпотези H_0 і H_1 .
2. Визначити (вибрати) статистику критерію – функцію $\theta = \theta(\xi_1, \dots, \xi_N)$ параметра θ .
3. Задати рівень значущості статистичного критерію α і визначити критичну область для гіпотези H_0 , що перевіряється.
4. Одержати реалізацію випадкової вибірки $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$.
5. Підставити у функцію $\theta = \theta(\xi_1, \dots, \xi_N)$ реалізацію випадкової вибірки.
6. Якщо значення θ потрапляють у критичну область, гіпотеза H_0 відхиляється.

15.2 Попереднє оцінювання закону розподілу даних за діаграмою β_1, β_2

На рис. 15.2 показані області в площині (β_1, β_2) для різних розподілів – розподілу Гаусса, бета-розподілу (окремий випадок – експоненціальний розподіл) і логарифмічно нормального, де β_1 – корінь квадратний з нормованого показника асиметрії, а β_2 – нормований показник ексцесу:

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}}, \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \quad (15.1)$$

де μ_j – центральні моменти ВВ j -го порядку. Сюди входить і t -розподіл Стюдента – розподіл, що сходиться до нормального, якщо його параметр (число ступенів свободи) збільшується.

Для гауссового розподілу $\beta_1 = 0$ і $\beta_2 = 3$. Тому на рис. 15.2 цей розподіл представлений однією точкою, як і експоненціальний ($\beta_1 = 4$ і $\beta_2 = 9$) та рівномірний ($\beta_1 = 0$ і $\beta_2 = 1,8$) розподіли. Це пояснюється тим, що у цих розподілів немає параметра форми і тому вони мають єдину форму. Гамма-розподіл, логарифмічно нормальний розподіл і t -розподіл Стюдента

представлені кривими. Таким чином, гамма-розподіл можна підібрати для усіх значень β_1 і β_2 , що лежать поблизу середньої кривої.

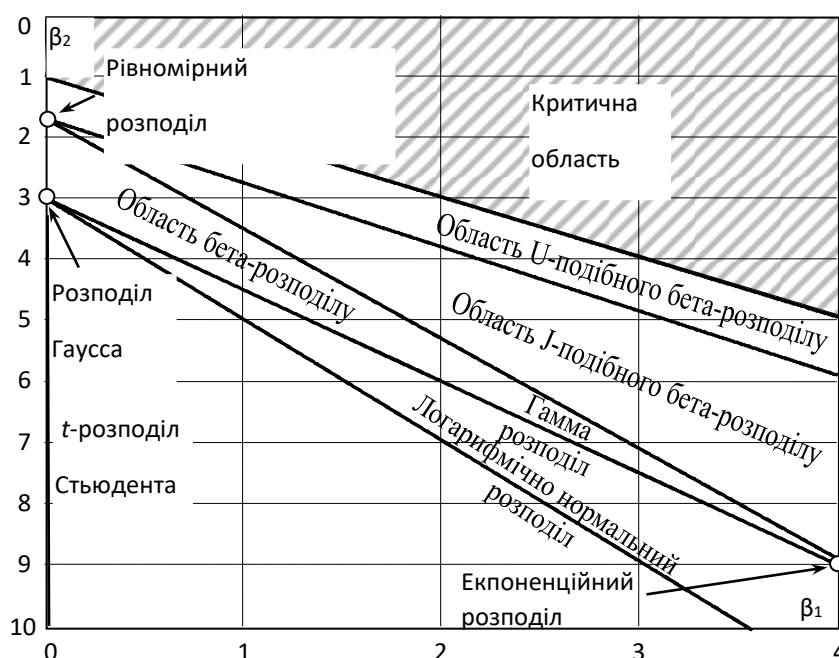


Рис. 15.2. Області у площині (β_1, β_2) для різних розподілів

Велика область значень β_1 і β_2 не охоплена жодним з розглянутих раніше розподілів. Такі розподіли можуть бути описані спеціальними сімействами розподілів, наприклад Джонсона або Пірсона.

Для застосування графіків, зображених на рис. 15.2, необхідно замість невідомих значень β_1 і β_2 використати їх оцінки $\hat{\beta}_1$ і $\hat{\beta}_2$, що визначаються з отриманої вибірки

$$\hat{\beta}_1 = \sqrt{\frac{\hat{\mu}_3}{(\hat{\mu}_2)^{3/2}}}, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\mu}_2^2}, \quad (15.2)$$

де $\hat{\mu}_j$ – оцінки центральні моменти ВВ j -того порядку.

Оцінки центральних моментів розраховуються за вибірками ВВ $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ обсягу n

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^j. \quad (15.3)$$

Точка з координатами (β_1, β_2) наноситься на рис. 15.2. Якщо ця точка лежатиме досить близько від точки, кривої або області, що відповідає одному з названих розподілів, останній використовують для опису емпіричних даних. Це дає змогу висунути гіпотезу про вид розподілу, значущість якого можна далі кількісно оцінити за допомогою різних критеріїв. Після підтвердження гіпотези приступають до знаходження оцінок параметрів розподілу.

Застосовуючи цей метод, необхідно враховувати обмеження: для будь-якої множини даних обчислені значення $\hat{\beta}_1$ і $\hat{\beta}_2$ є лише оцінками для β_1 і β_2 , схильні до коливань від вибірки до вибірки.

15.3. Методи оцінювання закону розподілу з групуванням даних

Розглянуті тут методи застосовують загальні критерії згоди, які полягають у порівнянні вибірових групових оцінок емпіричних даних (гістограми, полігону частот тощо) з теоретичними, заздалегідь відомими функціями розподілу. Всі відомі загальні критерії згоди можна розбити на три основні групи:

- критерії, засновані на вивченні різниці між теоретичною щільністю розподілу і емпіричною гістограмою;
- критерії, засновані на відстані між теоретичною і емпіричною функціями розподілу імовірності;
- кореляційно-регресійні критерії засновані на вивченні кореляційних та регресійних зв'язків між емпіричними та теоретичними порядковими статистиками.

15.3.1. Аналіз варіаційних рядів

Полігоном частот для неперервного розподілу називають ломану лінію, відрізки якої з'єднують точки $(\bar{x}_1, \hat{m}_1), (\bar{x}_2, \hat{m}_2), \dots, (\bar{x}_j, \hat{m}_j)$, де $\bar{x}_j$ – середини інтервалів, на які розбита область значень ВВ ξ , – відповідні частоти інтервалів, l – кількість інтервалів. Якщо немає іншої інформації, областю значень величини ξ є інтервал від мінімального до максимального значень ряду спостережень. Частоти інтервалів визначають як кількість значень ряду, які знаходяться у межах j -го інтервалу.

Полігон відносних частот – це ломана лінія, відрізки якої з'єднують точки $(\bar{x}_1, \hat{m}_1 / n), (\bar{x}_2, \hat{m}_2 / n), \dots, (\bar{x}_j, \hat{m}_j / n)$, де n – обсяг даних ряду спостережень.

Гістограма – ступінчаста фігура, яка складається з прямокутників, основи яких відповідають довжині інтервалів h , а висоти дорівнюють $\hat{m}_j / (n \cdot h)$. Площа гістограми завжди дорівнює одиниці.

Емпірична функція розподілу (функція розподілу вибірки) – це функція $F(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $\xi < x$:

$$F(x) = n_x / n, \quad (15.4)$$

де n_x – кількість варіант, менших за x , n – обсяг вибірки.

Емпірична функція розподілу має такі властивості:

1. Область значень функції $[0,1]$.
2. Функція $F(x)$ – неспадна.
3. Якщо x_1 – найменша варіанта, x_k – найбільша, то $F(x) = 0$, якщо $x < x_1$ та $F(x) = 1$, якщо $x > x_k$.

Методика побудови полігону частот та гістограми така:

1. Визначається мінімальне і максимальне вибірккові значення.
2. Експериментальні дані розбиваються на l інтервалів. У випадку $n < 100$ кількість інтервалів визначають як найближче ціле від кореня квадратного з обсягу ряду спостережень n ($l = [\sqrt{n}]$). Якщо обсяг даних $n > 100$, то за **формулою Старджесса** отримують $l = 1 + 3,31 \lg(n)$. Рекомендується обирати непарне значення l .
3. Визначається ширина інтервалів гістограми.
4. Визначаються границі інтервалів $int_j = x_{\min} + j \cdot h, j = 0 \dots l$ та середини інтервалів $\bar{x}_j = (int_j + int_{j-1}) / 2, j = 1 \dots l$.
5. Розраховуються емпіричні частоти $\hat{m}_j$ – кількість значень ряду в j -му інтервалі ($\hat{m}_j = \hat{m}_j + 1$ якщо $int_{j-1} \leq x_i < int_j, i = 1 \dots n, j = 1 \dots l$).
6. Будується полігон частот (рис. 15.3).

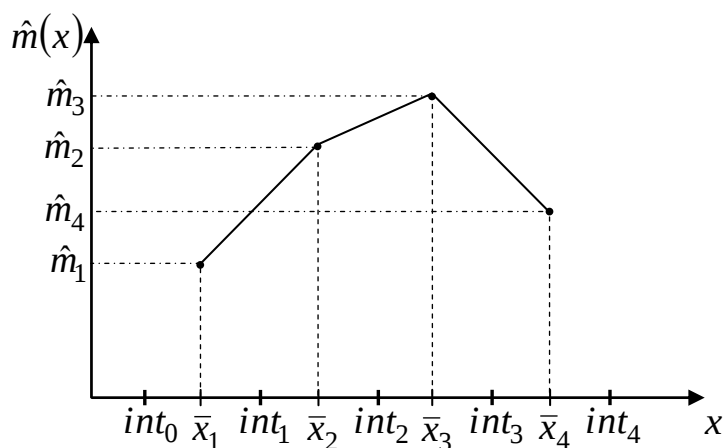


Рис. 15.3. Полігон частот

7. Розраховуються оцінки гістограми $p_j = \hat{m}_j / (n \cdot h)$. Якщо будь-яке значення $p_j = 0$, то необхідно зменшити кількість інтервалів l або об'єднати сусідні інтервали.
8. Будується гістограма, за виглядом якої виноситься гіпотеза про тип закону розподілу (рис. 15.4).

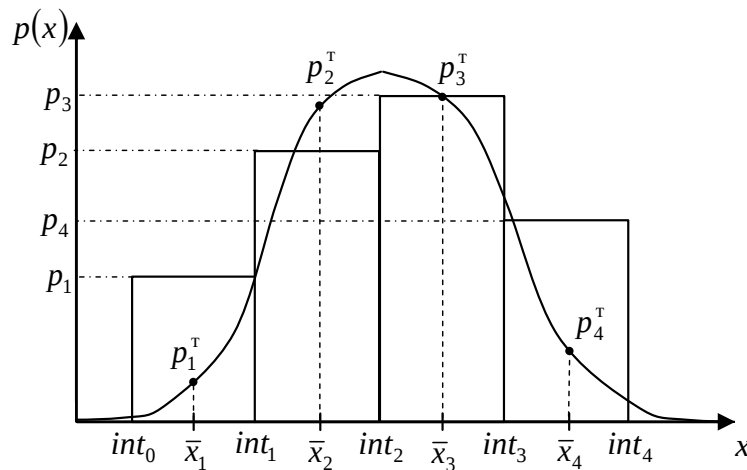


Рис. 15.4. Гістограма та теоретична щільність розподілу ймовірності

Методика побудови оцінки інтегральної функції розподілу така:

Кроки 1...5 є ідентичними методиці побудови полігону частот та гістограми.

6. Розраховуються відносні частоти $w_j = \hat{m}_j / n$.

7. Розраховуються оцінки інтегральної функції розподілу $F_j = \sum_{i=1}^j w_i, j=1...l$.

8. Будується оцінка інтегральної функції розподілу, за виглядом якої виноситься гіпотеза про тип закону розподілу (рис. 15.5).

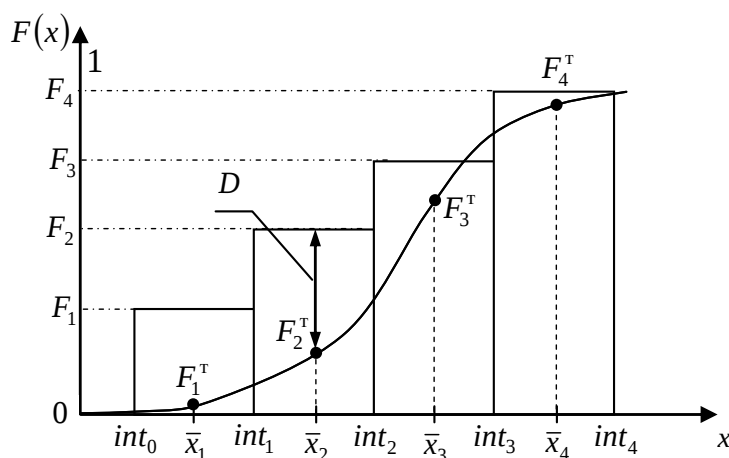


Рис. 15.5. Емпірична і теоретична функції розподілу

15.3.2. Перевірка гіпотез про згоду оцінки закону розподілу з теоретичною моделлю

Критерій χ^2 Пірсона:

1. За досліджуваною вибіркою розраховуються параметри для обраної функції щільності $p(x)$. Наприклад, для нормального закону це оцінки математичного сподівання $\bar{x}$ і СКВ $s(x)$.
2. За обраною функцією щільності $p(x)$ та розрахованими значеннями інтервалів гістограми $\bar{x}_j$ визначаються відповідні теоретичні значення

$$p_j^T = p(\bar{x}_j) \quad (\text{рис. 15.4}).$$

3. Розраховуються теоретичні частоти для всіх інтервалів $m_j^T = p_j^T nh$.
4. Розраховується статистика χ_p^2 :

$$\chi_p^2 = \sum_{j=1}^l \frac{(\hat{m}_j - \hat{m}_j^T)^2}{\hat{m}_j^T} = nh \sum_{j=1}^l \frac{(p_j - p_j^T)^2}{p_j^T}. \quad (15.5)$$

Якщо $\chi_p^2 < \chi_\alpha^2(v)$ – приймається гіпотеза про обраний закон розподілу.

Значення $\chi_\alpha^2(v)$ знаходять за таблицями χ^2 -розподілу (табл. 15.1), значення $v = l - k - 1$, де k – кількість параметрів обраного закону розподілу.

Таблиця 15.1. Граничні значення статистики $\chi^2_\alpha(v)$

v	Рівень значущості α			v	Рівень значущості α		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
1	2,71	3,84	6,64	11	17,3	19,7	24,7
2	4,61	5,99	9,21	12	18,5	21,0	26,2
3	6,25	7,81	11,3	13	19,8	22,4	27,7
4	7,78	9,49	13,3	14	21,1	23,7	29,1
5	9,24	11,1	15,1	15	22,3	25	30,6
6	10,6	12,6	16,8	16	23,5	26,3	32,0
7	12,0	14,1	18,5	17	24,8	27,6	33,4
8	13,4	15,5	20,1	18	26,0	28,9	34,8
9	14,7	16,9	21,7	19	27,2	30,1	36,2
10	16,0	18,3	23,2	20	28,4	31,4	37,6

Критерій Колмогорова-Смірнова:

Мірою розбіжності між емпіричним і теоретичним законами розподілу в цьому критерії є максимальне значення D модуля різниці між емпіричною функцією розподілу $F(x)$ і вибраною теоретичною функцією розподілу $F^T(x)$:

$$D = \max |F^T(x) - F(x)|. \quad (15.6)$$

Колмогоровим доведено, що незалежно від вигляду передбачуваної функції розподілу неперервної ВВ ξ у разі необмеженого збільшення числа незалежних вимірювань n ймовірність нерівності $D\sqrt{n} \leq \lambda$ наближається до межі ймовірності $P(\lambda)$, яка дорівнює

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-2k^2\lambda^2}. \quad (15.7)$$

Послідовність застосування критерію така:

1. Будується оцінка інтегральної функції розподілу $F(x)$ за виглядом якої виноситься гіпотеза про тип закону розподілу, відповідна інтегральна функція $F^T(x)$ наноситься на тому ж графіку (рис. 15.5).
2. Знаходиться максимальне значення D модуля різниці між $F(x)$ і $F^T(x)$ (рис. 15.5).
3. Знаходиться величина λ , яка дорівнює

$$\lambda = D\sqrt{n}. \quad (15.8)$$

4. Рішення щодо гіпотези про закон розподілу приймається двома способами.

- 4.1. Якщо для заданої ймовірності P маємо $\lambda < \lambda(P)$, то приймається гіпотеза про те, що закон розподілу $F(x)$ відповідає обраному $F^T(x)$. Значення $\lambda(P)$ приведені в табл. 15.2.

Таблиця 15.2. Граничні значення $\lambda(P)$

P	0,99	0,95	0,9
$\lambda(P)$	0,44	0,52	0,57

- 4.2. За обчисленим значенням λ за формулою (15.7) або табл. 15.3 визначається ймовірність $P(\lambda)$ як ймовірність того, що за рахунок випадкових причин максимальна розбіжність між емпіричною і теоретичною функціями розподілу буде не менше, ніж отримана за результатами вимірювань. Отже, якщо ймовірність $P(\lambda)$ достатньо велика, то гіпотезу про відповідність експериментального розподілу $F(x)$ теоретичному $F^T(x)$ слід розглядати як правдоподібну, що не суперечить експериментальним даним.

Таблиця 15.3. Значення ймовірності для критерію Колмогорова-Смірнова

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0,0	1,000	0,7	0,711	1,2	0,112
0,3	1,000	0,8	0,544	1,3	0,068
0,4	0,997	0,9	0,393	1,4	0,040
0,5	0,964	1	0,270		
0,6	0,864	1,1	0,178		

Лекція 16. Кореляційний аналіз

16.1. Загальні відомості про поняття кореляції

Кореляція в широкому розумінні слова означає зв'язок, співвідношення між об'єктивно існуючими явищами та процесами. В математичній статистиці – це ймовірнісна або систематична залежність між ознаками різних явищ і процесів, яка на відміну від функціональної, обтяжена дією випадкових факторів.

Функціональний і кореляційний зв'язок – два основні типи зв'язку, що визначають співвідношення між явищами і процесами. Будь-який причинний вплив може виражатися або функціональним, або кореляційним зв'язком. Проте

не кожна функція або кожна кореляція відповідає причинній залежності між явищами.

Для ефективного вивчення зв'язків необхідно використовувати сукупності, однорідні відносно тих ознак, зв'язок яких вивчається. Якщо визначають час, витрачений працівником на вироблення одиниці виробу на підприємствах, що розрізняються між собою тільки технічним рівнем виробництва, слід очікувати, що в цьому випадку матиме місце дуже тісний зв'язок між цими ознаками. Чим тісніший зв'язок між явищами, тим, більше виключається дія другорядних причин і тим менше позначаються (впливають) випадкові впливи. В результаті кореляційний зв'язок наближається до функціонального (рис. 16.2, з). Тому функціональний зв'язок може розглядатися як граничний випадок кореляції.

Іноді істинний функціональний зв'язок важко виявити внаслідок похибок вимірювання, зміни умов реалізації, помилкового або формального розгляду причинних стосунків, що накладаються. Тоді невинні змінні, що знаходяться у функціональній залежності, перетворюються у випадкові, а зв'язок починає набувати стохастичного характеру. Наприклад, закон вільного падіння¹ виконується точно тільки в безповітряному просторі. У випадку відхилення від цієї умови закон проявляється у вигляді кореляції.

Причинний вплив може бути виражений у вигляді функціонального або кореляційного зв'язку. Але звідси зовсім не витікає зворотне твердження, що за будь-яким кореляційним або функціональним зв'язком прихована причинна залежність. Завдання наукового дослідження полягає в пошуку причинних залежностей. Тільки знання істинних причин явищ дає змогу правильно тлумачити спостережувані закономірності. Проте кореляція як формально-статистичне поняття сама по собі не розкриває причинного характеру зв'язку. За допомогою кореляційного аналізу не можна вказати, яке з явищ брати за причину, а яке за наслідок. Кореляція лише дає оцінку сили або тісноти зв'язку.

Розглянемо тепер різні види кореляції. На рис. 16.1 наведено основні класифікаційні ознаки та відповідні види кореляції.

1. За характером кореляції розрізняють:

а) **позитивну кореляцію**. Вона має місце, якщо із збільшенням або зменшенням значень однієї змінної значення іншої відповідно збільшуються або зменшуються (рис. 16.2, а). Позитивна кореляція називається також рівнонапрявленою (або прямою) кореляцією;

Приклад 16.1. Позитивна кореляція існує, наприклад, між продуктивністю праці і заробітною платою, між ростом і вагою.

¹ Закон вільного падіння: на тіло діє сила тяжіння; воно падає з прискоренням $9,8 \text{ м/с}^2$.

б) **негативну (або обернену) кореляцію**. При цьому виді кореляції із збільшенням або зменшенням значень однієї змінної значення іншої відповідно зменшуються або збільшуються (рис. 16.2, б). Негативна кореляція існує, наприклад, між продуктивністю праці і вартістю виробу.

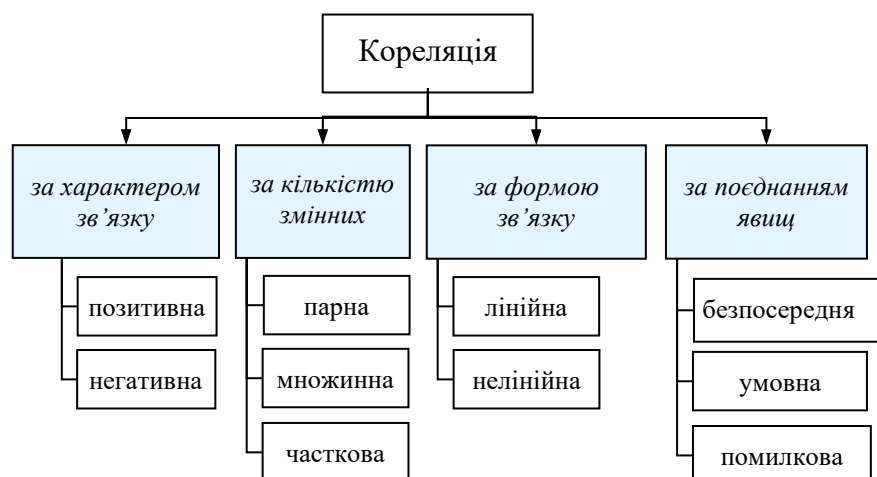


Рис. 16.1. Класифікаційні ознаки та види кореляції

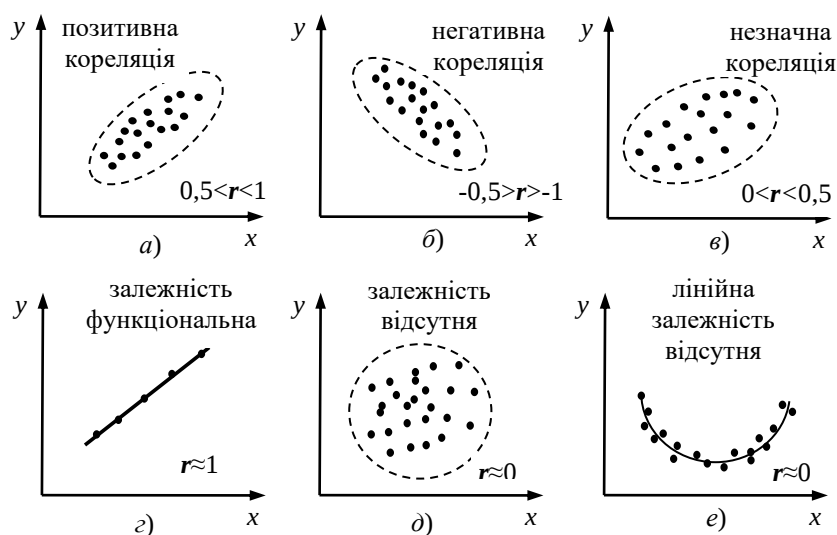


Рис. 16.2. Графічне зображення функціонального і стохастичного зв'язків між величинами x і y

2. За кількістю змінних розрізняють:

а) **просту (або парну) кореляцію**. Це кореляція між двома змінними;

б) **множинну кореляцію**. Це кореляція між більш ніж двома змінними. За допомогою множинної кореляції охоплюється увесь причинно-наслідковий комплекс, в якому окремі явища, є наслідком не однієї, а декількох причин. Множинна кореляція служить віддзеркаленням цих об'єктивно існуючих множинних зв'язків. Встановлення цих зв'язків, що супроводжується їх поясненням, розкриває механізм явищ;

в) **часткову кореляцію**. Це кореляція між двома змінними при “фіксованому” впливі інших змінних, що включені в аналіз. За допомогою часткової кореляції якнайповніше досліджується причинно-наслідковий комплекс і розкривається внутрішня структура співвідношень між ознаками досліджуваних явищ. Якщо визначати кореляцію між залежною змінною (наслідок) і кожною пояснюючою змінною (причиною) окремо, то вплив інших змінних позначатиметься на мірі зв'язності виділених змінних. Це може привести до помилкових висновків.

3. За формою зв'язку розрізняють:

а) **лінійну кореляцію**. Для цього виду кореляції між досліджуваними змінними існують лінійні співвідношення;

б) **нелінійну кореляцію**. При цьому виді кореляції між досліджуваними змінними існують нелінійні співвідношення.

4. За типом поєднання явищ розрізняють:

а) **безпосередню кореляцію**. В цьому випадку досліджувані явища сполучені між собою безпосередньо. Визначальна змінна чинить прямий вплив на залежну змінну. Безпосередня кореляція існує, якщо з одного явища логічно витікає інше, для пояснення цієї кореляції не треба залучати інші явища;

б) **непряму кореляцію**. Про непряму кореляцію говорять у випадку, коли досліджувані змінні не мають безпосереднього причинно-наслідкового зв'язку, а визначаються загальною для них причиною. Логічно обґрунтувати такий зв'язок можна за допомогою інших явищ. Але у цьому випадку існує небезпека переходу на формальний шлях дослідження, що може привести до помилкової кореляції.

Приклад 16.2. Наочний приклад непрямої кореляції дає статистика дореволюційної росії. Було встановлено тісна кореляція між числом пожеж в країні і розмірами врожаю. Очевидно, погані врожаї ніяк не можна вважати причиною пожеж в будівлях, а боротися з пожежами не можливо за допомогою агротехнічних заходів. В дійсності в цьому прикладі між змінними існує лише непрямий зв'язок: і розміри врожаю, і число пожеж суттєво залежать від третього явища – посухи, яка призводить до поганого врожаю та сприяє виникненню пожеж.

в) **помилкова кореляція**. Під помилковою кореляцією (нонсенс-кореляцією) розуміють формальний зв'язок між явищами, що не знаходить логічного пояснення та оснований лише на кількісному співвідношенні між ними.

Приклад 16.3. В статистиці відомим є приклад помилкової кореляції між числом лелек, що звили гнізда в районах Східної Пруссії, і народжуваністю в цих районах в ці ж роки. Обчислення, виконані заради жарту, показали позитивну кореляцію між цими явищами.

Завдання кореляційного аналізу:

1) Визначення ступеня зв'язку (тісноти, сили, строгості, інтенсивності) двох і більше явищ. Загальні знання про об'єктивно існуючі причинні зв'язки повинні доповнюватися науково пояснюваними знаннями про міру залежності між ними. Тут мова йде, в основному, про верифікацію вже відомих зв'язків.

2) Відбір факторів, що чинять найбільш суттєвий вплив на результативну ознаку, на основі вимірювання ступеня зв'язності між явищами. Відібрані фактори використовують у подальшому аналізі. Найважливішими факторами в рамках кореляційного та регресивного аналізу вважаються ті, які корелюють найсильніше з досліджуваними явищами.

3) Виявлення невідомих причинних зв'язків. При вирішенні цієї задачі необхідно враховувати своєрідні взаємозв'язки в причинно-наслідковому комплексі і особливості науково-методологічних правил статистичного дослідження, що спираються на кількісні зв'язки між явищами.

16.2. Коефіцієнт парної кореляції Пірсона

Ступінь стохастичного лінійного зв'язку між ВВ ξ і η із гауссовим розподілом оцінюється **коефіцієнтом кореляції Пірсона**:

$$r = \frac{\mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)\}}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta},$$

де $\text{cov}(\xi, \eta)$ – оператор коваріації ВВ ξ і η .

Властивості коефіцієнта кореляції Пірсона:

1. $|r| \leq 1$;
2. Якщо $r = 0$, то ξ і η – незалежні ВВ;
3. Якщо $|r| = 1$, то між ξ і η має місце функціональний зв'язок;
4. Якщо $0 < |r| < 1$, то між ξ і η має місце стохастичний зв'язок.

Для статистичного визначення коефіцієнта кореляції між ξ і η проводять ряди незалежних випробувань, результатом яких є пари величин (x_i, y_i) – реалізації (ξ, η) . На кореляційному полі – координатній площині у вигляді точок з координатами (x_i, y_i) , будується діаграма розсіювання (рис. 16.2), за аналізом якої висувається гіпотеза про вид залежності між ξ і η (лінійна чи нелінійна). У випадку гіпотези про лінійність визначають статистичну оцінку коефіцієнта кореляції:

$$\hat{r} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (16.1)$$

$$\text{де } \bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i.$$

За малого обсягу вибірки n оцінка $\hat{r}$ є зміщеною відносно генерального параметра r . Для усунення зміщення оцінку корегують:

$$\hat{r}^* = \hat{r} \left[1 + \frac{1 - \hat{r}^2}{2(n-3)} \right]. \quad (16.2)$$

Значення оцінок коефіцієнта кореляції завжди є відмінним від нуля. Тому виникає задача перевірки значущості коефіцієнта кореляції. Гіпотеза H_0 про випадковість відхилень від нуля вибіркового коефіцієнта кореляції у випадку генеральної сукупності з параметром $r = 0$, перевіряється за t -розподілом з $(n-2)$ степенями свободи (додаток Д) статистики:

$$\hat{t} = \frac{\hat{r} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - \hat{r}^2}}. \quad (16.3)$$

Якщо $|\hat{t}| \geq t_{n-2, \alpha}$ – гіпотеза $H_0 : r = 0$ відхиляється, і $\hat{r}$ визнається значущим.

Приклад 16.4. За результатами сумісних вимірювань величин x і y отримані такі результати спостережень:

x	0,5	1,6	3,3	3,1	5,0	3,5	5,6	4,9	4,8	5,4
y	2,2	1,0	1,7	2,6	3,7	2,1	3,7	2,6	4,0	3,7

Необхідно оцінити ступень зв'язку між величинами x і y .

Розв'язання. За формулою (15.1): $\sum_{i=1}^{10} x_i = 37,7$; $\bar{x} = \frac{37,7}{10} = 3,77$;

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 27,3; \quad \bar{y} = \frac{27,3}{10} = 2,73; \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{26,001} = 5,099;$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{9,201} = 3,033; \quad \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 11,939;$$

$$\hat{r} = \frac{11,939}{5,099 \cdot 3,033} = 0,772.$$

Оскільки маємо малий обсяг вибірок, розрахуємо значення скорегованого коефіцієнта кореляції (16.2):

$$\hat{r}^* = 0,772 \left[1 + \frac{1 - (0,772)^2}{2(10 - 3)} \right] = 0,794.$$

Перевіримо значущість отриманої оцінки за виразом (16.3)

$$\hat{t} = \frac{0,794\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-(0,794)^2}} = 3,696,$$

З таблиці додатку Д для рівня значущості $\alpha = 0,05$ маємо $t_{8;0,05} = 1,86$. Оскільки $|\hat{t}| = 3,696 \geq t_{8;0,05} = 1,86$, гіпотеза $H_0: r = 0$ не приймається і $\hat{r}^* = 0,794$ визнаємо значущим.

16.3. Кореляційний аналіз, що ґрунтується на порядкових статистиках. Рангова кореляція

У випадку, коли визначається взаємозв'язок між рядами спостережень, які мають довільні закони розподілів, а також коли аналізуються ознаки, що не піддаються безпосередньому кількісному оцінюванню, однак мають ряд якісних градацій застосовують коефіцієнти рангової кореляції.

16.3.1. Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Для розрахунку коефіцієнта рангової кореляції за обома рядами спостережень x_i і y_i формують ряди рангів і Ry . За вибірками будуються варіаційні ряди, потім кожному значенню вихідної вибірки ставиться ранг у відповідності його номеру у варіаційному ряду. Якщо у вибірці є однакові значення, то для них розраховується середній ранг, який приписується кожному з чисел. Такі ранги називаються зв'язаними, а їх група – зв'язаною.

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена r_s :

$$r_s = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n D_i^2, \quad (16.4)$$

де n – кількість пар спостережень, $D_i = Rx_i - Ry_i$ – різниці пар рангів у досліджуваних вибірках.

Для перевірки правильності розрахунків сума різниць рангів D_i повинна дорівнювати нулю.

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена має такі властивості:

1. $|r_s| \leq 1$;
2. $r_s = 1$ – випадок рівності рангів у обох рядах, тобто різниці $D_i = 0$;
3. $r_s = -1$, має місце протилежне впорядкування послідовностей рангів;
4. $r_s = 0$, кореляція відсутня.

Приклад 16.5. За результатами сумісних вимірювань величин x та y отримані такі результати спостережень:

x	2,7	2,1	4,9	4,3	5,2	6,2	8,2	9,5	10,3	11,6
y	4,3	1,7	3,6	3,9	5,5	4,2	4,5	4,9	7,4	5,8

Необхідно оцінити ступень зв'язку між величинами x та y за допомогою коефіцієнта кореляції Спірмена.

Розв'язання. Впорядкуємо вибірки x і y та визначимо номери їх елементів:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	2,1	2,7	4,3	4,9	5,2	6,2	8,2	9,5	10,3	11,6
y	1,7	3,6	3,9	4,2	4,3	4,5	4,9	5,5	5,8	7,4

Визначимо ранги спостережень початкових вибірок як відповідні номери у впорядкованих вибірках:

x	2,7	2,1	4,9	4,3	5,2	6,2	8,2	9,5	10,3	11,6
R_x	2	1	4	3	5	6	7	8	9	10
y	4,3	1,7	3,6	3,9	5,5	4,2	4,5	4,9	7,4	5,8
R_y	5	1	2	3	8	4	6	7	10	9

Розрахуємо значення різниць рангів D_i та відповідні значення D_i^2 :

$R_x - R_y$	-3	0	2	0	-3	2	1	1	-1	1
D_i^2	9	0	4	0	9	4	1	1	1	1

Перевіримо правильність розрахунків: $\sum_{i=1}^n D_i = 0$.

За формулою (15.4): $\sum_{i=1}^n D_i^2 = 30$; $r_s = 1 - \frac{6 \cdot 30}{10(10^2 - 1)} = 1 - \frac{180}{990} = 0,818$.

16.3.2. Коефіцієнт рангової кореляції Кендалла

Іншу рангову міру зв'язку запропонував М. Дж. Кендалл. Вона базується на визначенні узгодженості пар рангів у досліджуваних вибірках. Якщо пари (x_i, y_i) *узгоджені* ($1 \leq i < j \leq n$), то повинні виконуватися нерівності $x_i < x_j$ і $y_i < y_j$ або $x_i > x_j$ і $y_i > y_j$ (тобто $\text{sign}(x_j - x_i) \cdot \text{sign}(y_j - y_i) = 1$).

$$T = S - Q = \sum_{i < j} \text{sign}(x_j - x_i) \cdot \text{sign}(y_j - y_i);$$

$$T \in [-0,5 \cdot n(n-1); 0,5 \cdot n(n-1)]$$

Значення $\max T = 0,5 \cdot n(n-1)$ визначається через абсолютно узгодженні порядки $x_1, \dots, x_n$ і $y_1, \dots, y_n$. Для визначення ступеня узгодженості вибірок застосовується **коефіцієнт рангової кореляції Кендалла**:

$$\hat{r}_k = \frac{T}{T_{\max}} = \frac{2(S - Q)}{n(n-1)} = 1 - \frac{4}{n(n-1)}Q. \quad (16.5)$$

Коефіцієнт Кендалла має такі властивості:

1. Якщо між послідовностями порядкових статистик існує повна відповідність, тобто кожний елемент займає одне й те саме місце в обох рангах, то $\hat{r}_k = 1$.

2. Якщо має місце взаємно обернена залежність тобто у другій послідовності ранги розміщені в зворотному порядку порівняно з першою, то $\hat{r}_k = -1$.

3. У всіх інших випадках $-1 < \hat{r}_k < 1$.

Розглянемо методику оцінювання кореляції двох вибірок X і Y за способом, який запропонував Кендалл:

1. Впорядковуємо вибірку X за зростанням, а значення вибірки Y перерозподіляємо за значеннями впорядкованої вибірки X , зберігаючи взаємну відповідність значень x_i і y_i як у початковій вибірці (отримуємо вибірку Y^*).

2. Визначаємо ранги R^* отриманої вибірки Y^* .

3. За отриманою послідовністю рангів R^* визначаємо кількість інверсій. **Інверсією** Q_i називають пару рангів R_i^* і R_j^* ($i < j, i = 1, \dots, n-1, j = i+1, \dots, n$), якщо

$R_i^* > R_j^*$. Отриману сумарну кількість інверсій використовуємо як оцінку Q .

4. За формулою (16.5) визначаємо оцінку коефіцієнта кореляції Кендалла.

Приклад 16.6. За результатами сумісних вимірювань величин x і y отримані такі результати спостережень:

x	1,4	4,9	3,1	4,2	5,4	8,6	9,2	8,0	11,1	10,7
y	1,9	3,6	2,0	2,1	2,9	6,0	6,2	5,4	6,6	5,6

Необхідно оцінити ступень зв'язку між величинами x та y за допомогою коефіцієнта кореляції Кендалла.

Розв'язання. Впорядкуємо вибірку x і за нею вибірку y :

x	1,4	3,1	4,2	4,9	5,4	8,0	8,6	9,2	10,7	11,1
y^*	1,9	2,0	2,1	3,6	2,9	5,4	6,0	6,2	5,6	6,6

Визначимо ранги вибірки y^* :

y^*	1,9	2,0	2,1	3,6	2,9	5,4	6,0	6,2	5,6	6,6
R^*	1	2	3	5	4	6	8	9	7	10

Оскільки $R_5^* < R_4^*$, $R_9^* < R_7^*$ і $R_9^* < R_8^*$, то кількість інверсій $Q = 3$. За формулою (16.5) коефіцієнт рангової кореляції Кендалла:

$$\hat{r}_k = \frac{4}{n(n-1)} Q = 1 - \frac{4}{10(10-1)} 3 = 1 - \frac{12}{90} = 0,867.$$

Лекція 17. Регресійний аналіз

Якщо взаємозв'язок аналізованих ВВ η і ξ достовірно виявлено (див. лекцію 16), наступним етапом є встановлення виду математичної залежності між η і ξ . Якщо залежність в загальному випадку виражається як $M(\eta) = g(\xi)$, тобто шуканою є залежність математичного сподівання величини η від ξ , така залежність називається **регресійною**, а визначення такої залежності та оцінювання її статистичних властивостей є змістом **регресійного аналізу**.

Залежно від моделі шуканої функції $g(\xi)$ розрізняють лінійну, нелінійну та множинну регресії, а відповідно до методів оцінювання параметрів моделі – параметричну та непараметричну регресії.

Якщо досліджуються вибірки $x = (x_i, i = \overline{1, n})$ і $y = (y_i, i = \overline{1, n})$, загальна схема регресійного аналізу містить такі етапи:

1. Знаходження вибіркової оцінки регресії.
 - 1.1. Вибір моделі та оцінювання її параметрів.
 - 1.2. Оцінювання статистичної значущості отриманих параметрів.
2. Оцінювання адекватності обраної моделі, тобто оцінювання статистичної значущості вибіркової регресії у порівнянні із розсіюванням значень y_i , яке характеризується СКВ s_y .
3. Визначення довірчих областей, які із заданою імовірністю містять середні або індивідуальні значення η , за якими визначають границю похибки значення η для заданого значення ξ .

Найбільш повно наразі розроблений апарат регресійного аналізу, який передбачає, що вибіркові значення y_i статистично незалежні та мають гауссовий розподіл. У випадку порушення цієї умови застосовують методи непараметричної регресії.

17.1. Лінійна регресія

У випадку лінійної регресії розглядається модель залежності двох величин η і ξ в такому загальному виді:

$$\boxed{\eta(\xi) = k\xi + b.}$$

Початковими даними (рис. 17.1) можуть бути n пар вибірових значень (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$. У випадку значень $y_{i,k}$ величини η з багаторазовими спостереженнями обсягом m , тобто якщо $k = \overline{1, m}$, маємо n пар x_i та середніх значень $\bar{y}_i$. Далі будемо використовувати лише позначення y_i .

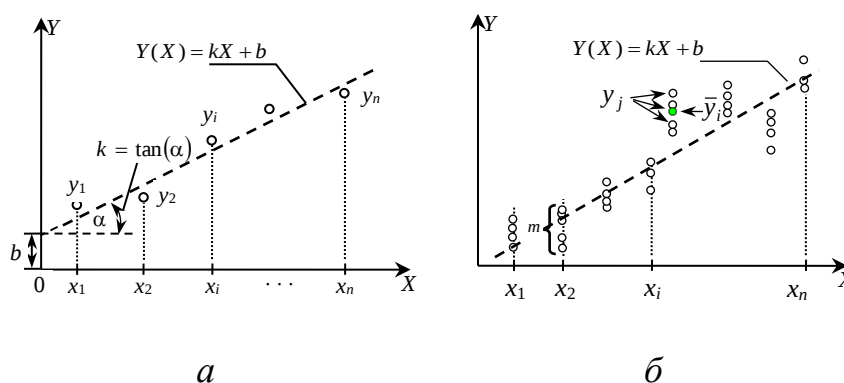


Рис. 17.1. Графічне зображення початкових даних для визначення регресії: значення η , отримані з одноразових (а) або багаторазових (б) вимірювань

Існує декілька методів оцінювання коефіцієнтів регресії k і b – спрощені, метод найменших квадратів (МНК) та метод найбільшої правдоподібності. Далі розглянемо перші два, як найбільш прості та придатні для застосування.

17.1.1. Спрощені методи оцінювання коефіцієнтів регресії

Метод Бартлетта-Кенуя. Пари спостережень (x_i, y_i) упорядковуються по x і розбиваються на три приблизно рівні групи обсягом M (перша і остання групи повинні бути обов'язково рівного обсягу). У кожній групі знаходяться суми $\sum y_i$ і $\sum x_i$ (позначимо їх відповідно Y_1, Y_2, Y_3 і X_1, X_2, X_3). Тоді коефіцієнти регресії оцінюються за допомогою співвідношень:

$$\boxed{k = \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1}}, \quad \boxed{b = \bar{y} - k\bar{x}} \text{ або } \boxed{b = \frac{Y_2}{M} - k \frac{X_2}{M}}. \quad (17.1)$$

СКВ коефіцієнта k : $\boxed{S_k = \frac{0,8s\sqrt{n}}{X_3 - X_1}}$, де $\boxed{s = \frac{8}{9} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|y_i - y_{i+1}|}{n}}$.

У виразі (17.1) замість значень сум або середніх значень можна використовувати відповідні значення медіан, що забезпечує більшу стійкість до наявності спостережень з надмірною похибкою.

Якщо n пар спостережень розбиваються на чотири групи, які містять в собі $1/6, 1/3, 1/3$ та $1/6$ частин спостережень, то

$$\boxed{k = \frac{3Y_1 + Y_2 - Y_3 - 3Y_4}{3X_1 + X_2 - X_3 - X_4}} \quad \text{з СКВ} \quad \boxed{S_k = \frac{1,9s\sqrt{n}}{3X_1 + X_2 - X_3 - X_4}}.$$

Ці оцінки застосовні для великих вибірок обсягу $n \geq 100$.

Метод Керріча. Для окремого випадку лінійної залежності виду $y = bx$ Керріч запропонував інший простий метод оцінювання. Для множини $\{x_i, y_i, i = \overline{1, n}\}$ обчислюємо різниці d_i , оцінки їх математичного сподівання і СКВ

$$\boxed{d_i = \lg y_i - \lg x_i}, \quad \boxed{\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i}, \quad \boxed{S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}}.$$

Оскільки будь-яке відношення y_i / x_i є оцінкою k , то будь-яке значення d_i є оцінкою $\lg(k)$. Коли $S_{\bar{d}} / \bar{d} \ll 1$, оцінкою $\lg(k)$ є величина $\bar{d}$, тобто $\lg(k) = \bar{d}$. Отже, оцінка буде дорівнювати $\boxed{\tilde{b} = 10^{\bar{d}}}$.

17.1.2. Стійкі методи оцінювання коефіцієнтів регресії

Розглянемо метод побудови лінійної регресії за умови точно відомих значень вхідних величин і розподілах похибок вимірювань вихідних величин, відмінних від гауссових.

Якщо значення вхідних величин x_i точно відомі, а випадкова похибка вимірювань $y_i, i = \overline{1, m}$ має розподіл, близький до гауссового, але відмінний від строго гауссового, або можуть містити грубі похибки, для побудови лінійної регресії виду $Y = kX + b$ рекомендується використовувати стійкі методи, зокрема метод оцінки Хубера.

У випадку використання стійких методів необхідно отримати початкові наближення коефіцієнтів регресії b_0, k_0 . Як такі наближення можна застосувати МНК-оцінки або оцінки Вальда та Барлетта.

Для отримання **стійких оцінок Вальда та Барлетта** множину експериментальних точок розбивають на дві або три групи рівного обсягу (у порядку зростання x_i) і знаходять медіани значень x_i і y_i по першій (X^I і Y^I) і другій (X^{II} і Y^{II}) (чи третій) групах. Оцінки коефіцієнтів регресії обчислюють як

$$\boxed{k_0 = \frac{(Y^{\text{II}} - Y^{\text{I}})}{(X^{\text{II}} - X^{\text{I}})}, \quad \boxed{b_0 = \bar{Y} - k \cdot \bar{X}}, \quad (17.2)$$

де $\bar{X}, \bar{Y}$ – середні значення вхідних і вихідних величин відповідно.

Стійкі оцінки Хубера знаходять із застосуванням ітераційної процедури. На q -му кроці виконують такі операції:

1. Обчислюють відхилення даних від розрахункової лінії:

$$z_{iq} = Y_i - (b_{q-1} + k_{q-1} X_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (17.3)$$

2. Обчислюють оцінку СКВ як медіану відхилень:

$$s_q = 1,48 \cdot \text{Med}[|z_{iq}|]. \quad (17.4)$$

3. Визначають значення u_{iq} і v_{iq} :

$$u_{iq} = \begin{cases} \frac{z_{iq}}{s_q}, & \text{якщо } \left| \frac{z_{iq}}{s_q} \right| < 1,5; \\ 1, & \text{якщо } \left| \frac{z_{iq}}{s_q} \right| > 1,5; \end{cases} \quad v_{iq} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \left| \frac{z_{iq}}{s_q} \right| < 1,5; \\ 0, & \text{якщо } \left| \frac{z_{iq}}{s_q} \right| > 1,5; \end{cases} \quad (17.5)$$

4. Обчислюють суми:

$$h_{0q} = \sum_{i=1}^n u_{iq}; \quad h_{1q} = \sum_{i=1}^n X_i \cdot u_{iq}; \quad c_{0q} = \sum_{i=1}^n v_{iq}; \quad c_{1q} = \sum_{i=1}^n X_i \cdot v_{iq}; \quad c_{2q} = \sum_{i=1}^n v_{iq}. \quad (17.6)$$

5. Обчислюють прирости оцінок:

$$\Delta b_q = \frac{(h_{1q} c_{1q} - h_{0q} c_{2q})}{(c_{1q}^2 - c_{0q} c_{2q})}, \quad \Delta k_q = \frac{(h_{0q} c_{1q} - h_{1q} c_{0q})}{(c_{1q}^2 - c_{0q} c_{2q})}. \quad (17.7)$$

6. Обчислюють нові значення коефіцієнтів:

$$b_q = b_{q-1} + \Delta b_q, \quad k_q = k_{q-1} + \Delta k_q. \quad (17.8)$$

Ітераційний процес закінчується після виконання заданої кількості кроків q , або при виконанні правила зупинки:

$$\Delta b_q < d \cdot S(b_0) \quad \text{і} \quad \Delta k_q < d \cdot S(k_0), \quad (17.9)$$

де $S(b_0), S(k_0)$ – СКВ початкових наближень, $d > 0$ – задається,

$$y_0(x) = b_0 + k_0 x, \quad S(y_0) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_0(x_i))^2}{n-2},$$

$$S(k_0) = \frac{S(y_0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad S(b_0) = S(k_0) \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

17.1.3. Оцінювання коефіцієнтів регресії методом найменших квадратів

Значення коефіцієнтів регресії k і b знаходять із умови мінімуму суми квадратів відхилень початкових значень y_i і значень, отриманих за побудованою функцією $Y(X) - y_{\text{рег.}}$: $\min \left(\sum_{i=1}^n (y_{\text{рег.}} - y_i)^2 \right)$.

Виходячи з цієї умови, значення коефіцієнтів регресії знаходять за такими формулами:

$$\boxed{b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n (x_i y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}, \quad \boxed{k = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}. \quad (17.10)$$

Після проведеного оцінювання необхідно перевірити статистичну значущість отриманих коефіцієнтів k і b .

Перевірка значущості коефіцієнтів k і b

Для оцінювання значущості використовується критерій Стюдента для перевірки двох гіпотез:

- H_0 – оцінка коефіцієнта статистично не є значущою, тобто дорівнює 0;
- H_1 – оцінка коефіцієнта статистично є значущою, тобто не дорівнює 0.

Розраховується t -статистика:

$$\boxed{t_k = \frac{|k|}{S_k}}, \quad \boxed{t_b = \frac{|b|}{S_b}}, \quad (17.11)$$

де S_k , S_b – оцінки СКВ коефіцієнтів k і b відповідно:

$$\boxed{S_y = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{\text{рег.}})^2}}, \quad \boxed{S_k = \frac{S_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}, \quad \boxed{S_b = S_k \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}}. \quad (17.12)$$

де $\bar{x}$ – середнє арифметичне вибірових значень ряду $\{x_i, i = \overline{1, n}\}$.

Якщо $t_k < t_\alpha(v)$ або $t_b < t_\alpha(v)$ приймається гіпотеза H_0 , тобто для обсягу вибірки n коефіцієнт k або b є статистично незначущим.

Якщо $t_k \geq t_\alpha(v)$ приймається гіпотеза H_1 , відповідний коефіцієнт є статистично значущим. Значення $t_\alpha(v)$ знаходиться як односторонній довірчий інтервал з таблиці розподілу Стюдента (додаток Г) для ступенів свободи $v = n - 2$ та рівня значущості $\alpha = 1 - P$.

Перевірка адекватності отриманої моделі

Загалом проводиться перевірка гіпотези, що обрана модель виду $Y = g(X)$, побудована за результатами парних вимірювань $x_i, y_i, i = \overline{1, n}$, задовільно погоджується з цими даними. Як правило, приймають рівень значущості $\alpha = 0,05$. Для перевірки зазначеної гіпотези застосовують критерій Фішера за умови, що похибка значень y має гауссовий закон розподілу.

Критерій Фішера. Перевірку адекватності моделі регресії проводять із застосуванням критерію Фішера для перевірки двох гіпотез:

- H_0 – модель не адекватна;
- H_1 – модель адекватна (лінійна).

Суть перевірки полягає в тому, що значення спостережень y_i ($\bar{y}_i$) повинні знаходитися приблизно на прямій $Y(X)$, тобто їх відхилення від прямої регресії не мають бути занадто великими по відношенню до відхилення значень в групі спостережень $y_{i,k}$ від їх середнього $\bar{y}_i$.

Статистика Фішера розраховується за формулами:

$$F = S_y^2 / S_{\text{гр}}^2, \quad (17.13)$$

де S_y – СКВ розсіювання значень y_i навколо регресії (17.12),

$S_{\text{гр}}$ – СКВ розсіювання значень в групі спостережень навколо $\bar{y}_i$, у випадку багаторазових спостережень Y :

$$S_{\text{гр}}^2 = \frac{1}{n(m-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (y_{i,k} - \bar{y}_i)^2; \quad (17.14)$$

у випадку однократних вимірювань величин Y значення $S_{\text{гр}}^2$ має бути відомим до проведення експерименту.

Якщо $F < F_{\alpha}(v_1, v_2)$, то модель є адекватною, інакше – неадекватною.

Значення $F_{\alpha}(v_1, v_2)$ знаходиться з таблиці розподілу Фішера (див. додаток 3) для ступенів свободи $v_1 = n - 2$, $v_2 = m - 1$ та рівня значущості $\alpha = 1 - P$.

У випадку однократних вимірювань Y значення $F_{\alpha}(v_1, \infty)$ знаходяться з таблиці розподілу Фішера (табл. 17.1).

Таблиця 17.1. Значення коефіцієнтів Фішера $F_{\alpha}(v_1, \infty)$

v_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\alpha=0,01$	21,31	2,09	1,95	1,85	1,78	1,72	1,68	1,64	1,61	1,58	1,55
$\alpha=0,05$	3,01	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76

Визначення довірчих інтервалів значень y , розрахованих за регресією

Оцінюються СКВ випадкової складової похибки середнього значення і індивідуального значення y :

$$s_{\bar{y}}(x) = S_y \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (17.15)$$

$$s_y(x) = S_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (17.16)$$

СКВ випадкової складової похибки середнього значення $\bar{y}$ досягає свого максимального значення на краях лінії регресії.

За отриманими значеннями s оцінюють довірчий інтервал $\Delta(\cdot)$ випадкової похибки середнього та індивідуального значення y :

$$\Delta_{\bar{y}}(x) = t_{\alpha/2}(v) \cdot s_{\bar{y}}(x), \quad \Delta_y(x) = t_{\alpha/2}(v) \cdot s_y(x), \quad (17.17)$$

де $t_{\alpha/2}(v)$ – квантиль розподілу Стюдента для довірчої імовірності $P = 1 - \alpha$ і $v = n - 2$ ступеней свободи (див. додаток Г).

Як видно з формул (17.14)-(17.16) довірчі області, які із заданою імовірністю P містять середні або індивідуальні значення Y , залежать від відстані значення x (за яким визначають y) від середнього $\bar{x}$ (рис. 17.2).

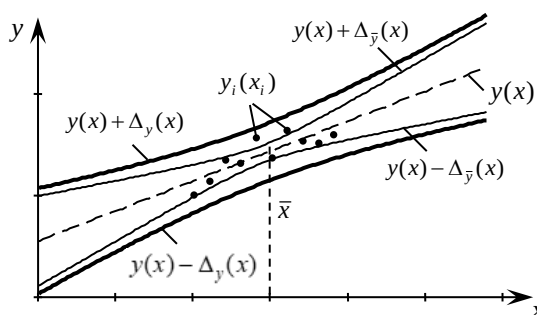


Рис. 17.2 Графік довірчих інтервалів регресії

17.2. Нелінійна регресія

17.2.1. Степенева функція (геометрична регресія)

Розглянемо степеневу функцію, яка в найбільш загальному вигляді задається таким виразом:

$$F(x, K, m) = Kx^m. \quad (17.18)$$

За умови, що $F(x, K, m) > 0$, $x > 0$, прологарифмуємо (17.18):

$$\ln F(x, K, m) = \ln K + m \ln x. \quad (17.19)$$

Як відомо, якщо функція $F(\cdot)$ є наближаючою для деякої функції $f(\cdot)$, то функція $\ln F(\cdot)$ буде наближаючою для функції $\ln f(\cdot)$. Якщо ввести змінну $x' = \ln x$, то, як виходить з виразу (17.19) $\ln F(\cdot)$ буде функцією від x' : $\Phi(x')$.

Позначимо:

$$m = A, \quad \ln K = B, \quad (17.20)$$

тоді вираз (17.19) приймає вигляд:

$$\Phi(x', A, B) = Ax' + B. \quad (17.21)$$

Отже, задача побудови регресії зводиться до знаходження наближаючої функції у вигляді лінійної. В результаті для знаходження регресії як степеневій використовують такий алгоритм:

1. Логарифмують вихідні значення x і y .
2. За формулами (17.10) визначають параметри A і B як, відповідно, k і b , наближаючої функції вигляду (17.21).

3. За формулами (17.20) знаходять значення параметрів K і m : $\boxed{K = e^B}$
 $\boxed{m = A}$.
4. Оцінюють границі похибки лінеаризованої функції $\Phi(x, A, B)$: $\Delta_{\text{лін}, \bar{y}}(x)$ і $\Delta_{\text{лін}, y}(x)$ (17.17).
5. Оцінюють границі похибки шуканої функції $y(x)$:

$$y(x) \pm \Delta_{\bar{y}}(x) = e^{\Phi(\ln(x), A, B) \pm \Delta_{\text{лін}, \bar{y}}(\ln(x))},$$

$$y(x) \pm \Delta_y(x) = e^{\Phi(\ln(x), A, B) \pm \Delta_{\text{лін}, y}(\ln(x))}.$$

17.2.2. Показникова функція

Показникова функція задається виразом:

$$\boxed{F(x, K, m) = Ke^{mx}, K > 0}. \quad (17.22)$$

Прологарифмувавши вираз (17.22), за умови $F(x, K, m) > 0, x > 0$, отримаємо:

$$\ln F(x, K, m) = \ln K + mx. \quad (17.23)$$

Позначимо:

$$x' = x, \quad m = A, \ln K = B. \quad (17.24)$$

Тоді вираз (17.23) набуває вигляду (17.21) і задача побудови регресії зводиться до попередньої. Для знаходження регресії як показникової використовують такий алгоритм:

1. Логарифмують вихідні значення тільки y .
2. Згідно формули (17.10) визначають параметри A і B як, відповідно, k і b наближаючої функції вигляду (17.22).
3. Знаходять згідно з виразом (17.23) значення параметрів K і m : $\boxed{K = e^B}$,
 $\boxed{m = A}$.
4. Оцінюють границі похибки лінеаризованої функції $\Phi(x, A, B)$: $\Delta_{\text{лін}, \bar{y}}(x)$ та $\Delta_{\text{лін}, y}(x)$ (17.17).
5. Оцінюють границі похибки шуканої функції $y(x)$:

$$y(x) \pm \Delta_{\bar{y}}(x) = e^{\Phi(x, A, B) \pm \Delta_{\text{лін}, \bar{y}}(x)},$$

$$y(x) \pm \Delta_y(x) = e^{\Phi(x, A, B) \pm \Delta_{\text{лін}, y}(x)}.$$

17.2.3. Дробово-лінійна функція

Дробово-лінійна функція задається виразом виду:

$$F(x, K, m) = (Kx + m)^{-1}. \quad (17.25)$$

Перепишемо (17.24) наступним чином:

$$(F(x, K, m))^{-1} = Kx + m. \quad (17.26)$$

Позначимо:

$$x' = x, \quad m = B, \quad K = A. \quad (17.27)$$

Тоді вираз (17.26) приймає вигляд (17.21) і задача побудови регресії зводиться до попередньої. Для знаходження регресії як дробово-лінійної використовують такий алгоритм:

1. Вихідні значення y замінюють на $y' = 1/y$.
2. За формулами (17.10) визначають параметри A і B як k і b відповідно, наближаючої функції вигляду (17.21).
3. За формулами (17.27) знаходять значення параметрів K і m : $K = A$, $m = B$
4. Оцінюють границі похибки лінійної функції $\Phi(x, A, B)$: $\Delta_{\text{лін}, y}(x)$ і $\Delta_{\text{лін}, y}(x)$.
5. Оцінюють границі похибки шуканої функції $y(x)$:

$$y(x) \pm \Delta_{\bar{y}}(x) = \left(\Phi(x, A, B) \pm \Delta_{\text{лін}, \bar{y}}(x) \right)^{-1},$$

$$y(x) \pm \Delta_y(x) = \left(\Phi(x, A, B) \pm \Delta_{\text{лін}, y}(x) \right)^{-1}.$$

17.2.4. Логарифмічна функція

Логарифмічна функція задається таким виразом:

$$F(x, K, m) = K \ln x + m. \quad (17.28)$$

З виразу (17.28) видно, що для переходу до лінійної функції (17.21) досить зробити підстановку $x' = \ln x$. Відповідно, для знаходження регресії як логарифмічної використовують наступний алгоритм:

1. Вихідні значення x замінюють на $x' = \ln(x)$.
2. За формулами (17.10) визначають параметри A і B як відповідно k і b наближаючої функції вигляду (17.21).

3. Знаходять значення параметрів K і m : $\boxed{K = A}$, $\boxed{m = B}$.
4. Оцінюють границі похибки лінійної функції $\Phi(x, A, B)$: $\Delta_{\text{лін}, \bar{y}}(x)$ і $\Delta_{\text{лін}, y}(x)$.
5. Оцінюють границі похибки шуканої функції $y(x)$:

$$y(x) \pm \Delta_{\bar{y}}(x) = \Phi(\ln(x), A, B) \pm \Delta_{\text{лін}, \bar{y}}(\ln(x)),$$

$$y(x) \pm \Delta_y(x) = \Phi(\ln(x), A, B) \pm \Delta_{\text{лін}, y}(\ln(x)).$$

17.2.5. Гіперболічна функція

Гіперболічна функція задається таким виразом:

$$\boxed{F(x, K, m) = K/x + m}. \quad (17.29)$$

Для переходу до лінійної функції (17.19) досить зробити підстановку $x' = 1/x$. Відповідно, для знаходження регресії як гіперболічної використовують такий алгоритм:

1. Вихідні значення x замінюють на $x' = 1/x$.
2. За формулами (17.10) визначають параметри A і B як відповідно k і b наближаючої функції вигляду (17.21).
3. Знаходять значення параметрів K і m : $\boxed{K = A}$, $\boxed{m = B}$.
4. Оцінюють границі похибки лінійної функції $\Phi(x, A, B)$: $\Delta_{\text{лін}, \bar{y}}(x)$ і $\Delta_{\text{лін}, y}(x)$.
5. Оцінюють границі похибки шуканої функції $y(x)$:

$$y(x) \pm \Delta_{\bar{y}}(x) = \Phi(1/x, A, B) \pm \Delta_{\text{лін}, \bar{y}}(1/x),$$

$$y(x) \pm \Delta_y(x) = \Phi(1/x, A, B) \pm \Delta_{\text{лін}, y}(1/x).$$

Узагальнені відомості для нелінійної регресії експериментальних даних відповідно розглянутим функціям наведені у табл. 17.2.

Таблиця 17.2. Нелінійні функції, параметри яких оцінюють за лінійною регресією

Назва	Функція	Проміжне перетворення		Значення	
		для x	для y	K	m
Степенева	$y = Kx^m$	$\ln(x)$	$\ln(y)$	e^B	A
Показникова	$y = Ke^{mx}$	—	$\ln(y)$	e^B	A
Дробово-лінійна	$y = \frac{1}{Kx + m}$	—	$\frac{1}{y}$	A	B

Логарифмічна	$y = K \ln x + m$	$\ln(x)$	—	A	B
Гіперболічна	$y = K \frac{1}{x} + m$	$\frac{1}{x}$	—	A	B
Дробово-раціональна	$y = \frac{x}{Kx + m}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	B	A

Питання для самоконтролю до розділу 3

1. Поясніть терміни «вибірка», «генеральна сукупність», «порядкова статистика», «статистична оцінка».
2. Які показники якості статистичних оцінок вам відомі?
3. Наведіть та поясніть методи отримання статистичних оцінок характеристик випадкових величин.
4. Наведіть означення незсуненої, обґрунтованої та ефективної точкової оцінки та поясніть їх зміст.
5. Наведіть незсунену, обґрунтовану та ефективну оцінку математичного сподівання генеральної сукупності.
6. Які оцінки називають точковими?
7. Наведіть статистичні оцінки математичного сподівання і дисперсії.
8. Які оцінки називають інтервальними?
9. Що таке ранг елемента вибірки та які правила його визначення?
10. Яку вибірку називають ранжованою?
11. Розкрийте зміст визначення точкових оцінок за методом максимальної правдоподібності.
12. Як визначаються вибіркові моменти за рядом спостережень?
13. Розкрийте зміст визначення точкових оцінок за методами моментів та квантилів.
14. Що таке квантиль розподілу?
15. Які параметри визначають закон розподілу Гаусса?
16. Наведіть відомі вам методи отримання точкових оцінок параметрів закону розподілу Гаусса.
17. Наведіть відомі вам методи отримання інтервальних оцінок параметрів закону розподілу Гаусса.
18. Розкрийте зміст поняття «статистична гіпотеза» та наведіть приклади

аналітичного запису основної і альтернативної гіпотез.

19. Наведіть означення помилок першого і другого роду.
 20. Наведіть та поясніть відомі методи визначення закону розподілу за даними ряду спостережень.
 21. Для якої мети застосовують діаграму $\beta_1\beta_2$?
 22. Поясніть суть та послідовність застосування спеціалізованих критеріїв згоди із визначеними законами розподілу.
 23. Які методи передбачають групування даних?
 24. Наведіть алгоритм побудови полігону частот, гістограми та інтегральної функції розподілу? Як перевірити їх правильність?
 25. Що таке гістограма?
 26. Методика побудови гістограми.
 27. Наведіть оцінку кореляційних функцій сигналів за їх однією реалізацією.
 28. Поясніть суть терміну «кореляція». Як оцінюють ступінь кореляційного зв'язку?
 29. Наведіть класифікацію видів кореляції за різними ознаками.
 30. Проілюструйте графічно різні види парної кореляції.
 31. Поясніть сутність парної, множинної та часткової видів кореляції.
 32. Наведіть формулу статистичної оцінки коефіцієнта парної кореляції Пірсона.
 33. В яких випадках використовують кореляційний аналіз, що ґрунтується на порядкових статистиках?
 34. Наведіть формули для коефіцієнтів рангової кореляції Спірмена і Кендалла та дайте до них необхідні пояснення.
 35. Які передумови застосування регресійного аналізу ви знаєте?
 36. Які методи оцінювання коефіцієнтів регресійної моделі вам відомі? Проведіть порівняльний аналіз запропонованих методів.
 37. За яких умов доцільне застосування спрощених або стійких методів оцінювання коефіцієнтів регресійної моделі?
 38. Наведіть загальну послідовність застосування регресійного аналізу.
 39. Які передумови застосування методу найменших квадратів?
 40. Наведіть приклади розрахунку та розкрийте сутність довірчих границь рівняння регресії.
-

ВИБРАНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

У цьому розділі:



Лекція 18. Основні положення теорії випадкових процесів.

Лекція 18. Основні положення теорії випадкових процесів

Спостерігаючи та вивчаючи фізичні явища навколишнього світу, діагностуючи різні технічні та біологічні об'єкти, дослідник часто зустрічається з процесами, перебіг яких в часі неможливо передбачити і представити певною детермінованою функцією. Ця невизначеність викликана різними випадковими чинниками, які впливають на процес і не можуть бути заздалегідь виявлені, усунені чи враховані.

Характерним прикладом є виникнення теплового шуму в провідниках. Це явище призводить до того, що в електронних ланцюгах напруга теплових шумів додається до інформаційних сигналів і, за низьких рівнів останніх, може створити суттєві проблеми у розв'язанні задач вимірювання інформативних параметрів сигналів.

Окрім зазначеного, самі досліджувані явища можуть мати випадкову природу. Такі явища породжують в технічних системах сигнали, аргументами яких є як час, так і випадкові події. Методів класичної теорії ймовірностей недостатньо для створення моделей таких сигналів та дослідження таких явищ. Для їх дослідження створено спеціальний розділ теорії ймовірностей – **теорію випадкових процесів**, що вивчає закономірності динаміки розвитку випадкових явищ.

18.1. Поняття випадкового процесу

У широкому розумінні процес – це послідовна в часі зміна явищ, станів, стадій у розвитку будь-чого (від латинського «*processus*» – рух).

Випадковим процесом називається будь-який процес, що протікає в часі t і залежить від елементарних подій ω з області подій Ω .

Параметричне сімейство (сукупність) дійсних випадкових ВВ, що змінюються з часом, називається **дійсним випадковим процесом**. Випадковий процес позначається як параметрична множина $\{\xi(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$, де T – область визначення процесу $\xi(t)$.

Багатовимірні сумісні функції розподілу ймовірності випадкових процесів $\xi(\omega, t_1), \xi(\omega, t_2), \dots, \xi(\omega, t_n)$ для всіх наборів $\{t_j, j = \overline{1, n}\}$ і $n = 1, 2, 3, \dots$

$$F_{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n\}. \quad (18.1)$$

називаються **скінченномірними функціями розподілу** випадкового процесу $\xi(t)$.

Випадковий процес вважається повністю заданим, якщо задана послідовність його скінченномірних функцій розподілу

$$\begin{aligned} &F_{(1)}(x; t), \\ &F_{(2)}(x_1, x_2; t_1, t_2), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &F_{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n), \\ &t_j \in T, \quad j = \overline{1, n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (18.2)$$

Процеси, які можна задати послідовністю (18.2), називаються **сепарабельними**.

Це поняття пояснимо таким прикладом. Сепарабельність функції, у випадку функції декількох змінних – це можливість відокремлення впливу аргументів на загальний результат. Наприклад, функція виду $f(x_1, \dots, x_n) = \sum f_i(x_i), i = \overline{1, n}$ – сепарабельна, оскільки кожна складова є функцією одного аргументу, натомість функція $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$ не є сепарабельною.

18.2. Реалізації випадкового процесу

Функція, що з'являється в результаті спостереження за випадковим процесом, називається його *реалізацією* або *вибірковою функцією процесу*.

Випадковий процес має подвійний характер. Функція $\xi(\omega, t)$ для кожної фіксованої елементарної події $\omega \in \Omega$ є звичайною не випадковою функцією дійсного параметра t . З іншого боку, для кожного фіксованого $t = t_1$ функція $\xi(\omega, t_1) \in \text{ВВ}$ та має визначений розподіл ймовірності

$$F(x_1, t_1) = P\{\xi(t_1) < x_1\} \quad (18.3)$$

Ілюстрацію цього положення подано на рис. 17.1.

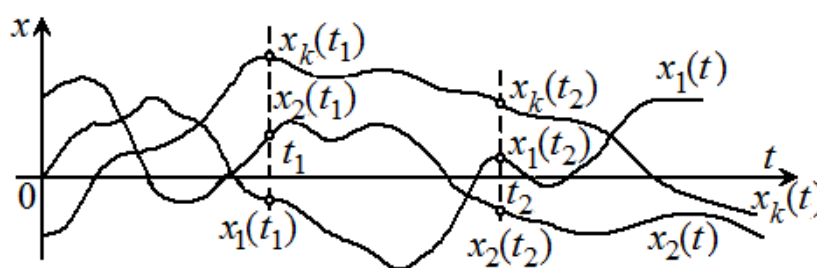


Рис. 18.1. Приклад реалізацій випадкового процесу

На рис. 18.1 показано сукупність трьох реалізацій випадкового процесу $\xi(\omega, t)$. Така сукупність називається ще *ансамблем реалізацій*.

Якщо зафіксувати два моменти часу t_1 і t_2 , то в кожному експерименті отримаємо два значення $x(t_1)$ і $x(t_2)$ однієї реалізації. В цілому, сумісний розгляд цих значень приводить до системи двох ВВ $(\xi(\omega_g, t_1), \xi(\omega_g, t_2))$.

Оскільки випадкові процеси, які розглядаються у фіксовані моменти часу, є ВВ, то можна ставити питання про визначення математичного сподівання (середнього значення) та дисперсії випадкового процесу у фіксовані моменти часу:

$$\boxed{v_1(t) = \mathbf{M}\{\xi(\omega, t)\}}, \quad \boxed{D(t) = \mathbf{M}\{(\xi(\omega, t) - v_1(t))^2\}}. \quad (18.4)$$

Так само, як і у випадку ВВ дисперсія характеризує розкид значень випадкового процесу відносно середнього значення $M(t)$. Зі збільшенням $D(t)$ збільшується ймовірність появи дуже великих за абсолютною величиною значень ВВ. Як і для ВВ для випадкового процесу зручною характеристикою є СКВ $\boxed{\sigma(t) = +\sqrt{D(t)}}$. У випадку досліджень фізичних процесів значення СКВ має таку саму розмірність як і ВВ.

Далі в цьому розділі, з метою спрощення аналітичних викладок, в загальному записі випадкових процесів опускатимемо аргумент ω .

18.3. Неперервний і дискретний параметр часу

Параметр t може набувати різних значень із деякого інтервалу $[T_1, T_2]$ дійсної прямої. Існує два найбільш важливих випадки:

Випадок 1. Послідовність значень параметра $t_j \in [T_1, T_2]$, $j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ або $j = 0, 1, 2, \dots$ є скінченною або зліченною, тобто область зміни параметра складається з ізольованих точок (як правило, цілих чисел, але для часу – іменованих), що являють собою, наприклад, арифметичну прогресію.

Випадок 2. Інтервал значень: $t_j \in [T_1, T_2]$, де $[T_1, T_2]$ – деякий скінчений інтервал на дійсній прямій.

Першому випадку відповідають випадкові процеси з дискретним часом – **випадкові послідовності**. Реалізація випадкової послідовності називається **часовим рядом**. Другому випадку відповідають випадкові процеси з неперервним часом – власне **випадкові процеси**.

18.4. Кореляційна теорія та її застосування в технічних системах

Багато тверджень, що використовуються в теорії випадкових процесів, можуть бути сформульовані подвійно – в широкому і строгому (вузькому) розумінні. Про формулювання тих або інших тверджень, властивостей об'єктів дослідження в широкому сенсі говорять у випадках, коли обмежуються дослідженнями тільки перших двох моментів (моментних функцій) випадкового процесу $\xi(t)$ – середнього значення і кореляційної функції.

Для реальних (дійсних) процесів використовується модель гільбертового випадкового процесу.

Комплекснозначним називається випадковий процес $\{\xi(t), t \in T\}$, у якого дійсна та уявна частина суть дійсні процеси: $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$, де $i = \sqrt{-1}$.

Гільбертовим називається комплекснозначний випадковий процес $\{\xi(t), t \in T\}$, у якого для всіх t виконується умова:

$$\mathbf{M}|\xi(t)|^2 < \infty, t \in T. \quad (18.5)$$

Коваріацією $B(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in T \times T$ гільбертового випадкового процесу $\xi(t)$ називається функція, що визначається так:

$$B(t_1, t_2) = \mathbf{M} \left[\xi(t_1) \overline{\xi(t_2)} \right]. \quad (18.6)$$

Кореляційною функцією $R(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in T \times T$ називається функція, яка визначається як

$$R(t_1, t_2) = \mathbf{M} \left(\left[\xi(t_1) - \mathbf{M}\xi(t_1) \right] \left[\xi(t_2) - \mathbf{M}\xi(t_2) \right] \right). \quad (18.7)$$

Кореляційну функцію $R(t_1, t_2)$ випадкового процесу $\xi(t)$ часто називають **автокореляційною функцією** процесу $\xi(t)$.

Характерний вид функції $R(t_1, t_2)$ наведено на рис. 18.2.

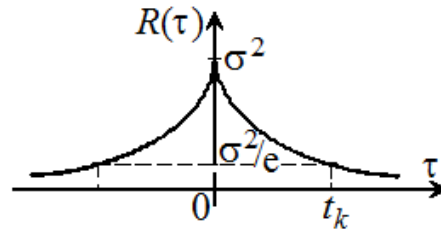


Рис. 18.2. Визначення інтервалу кореляції

Інтервал часу t_k , на якому кореляційна функція, що характеризує зв'язок між значеннями випадкового процесу, зменшується в M разів, називається **інтервалом (часом) кореляції** випадкового процесу.

Цей параметр визначається доволі суб'єктивно (рис. 18.2). Зазвичай обирають $M = 10$ або $M = e$. Проте він дає змогу оцінити зв'язок між двома рознесеними в часі значеннями випадкового процесу. На інтервалі кореляції, більшому за t_k , значення випадкового процесу слабо пов'язані одне з одним. Отже, знання кореляційної функції дає змогу оцінити швидкість зміни випадкового процесу.

Зв'язок між коваріацією і кореляційною функцією розкриває таке співвідношення:

$$B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) + \mathbf{M}\xi(t_1)\mathbf{M}\xi(t_2) = R(t_1, t_2) + v_1(t_1)v_1(t_2). \quad (18.8)$$

Якщо моменти часу збігаються, тобто $t_1 = t_2 = t$, вираз (18.8) набуває виду:

$$\boxed{B(t,t) = R(t,t) + \nu_1^2(t)} \quad (18.9)$$

Всі три елементи в останньому виразі мають самостійний фізичний зміст і характеризують потужності компонент і самого процесу $\xi(t)$ в момент часу t :

- $B(t,t)$ – повна потужність процесу,
- $R(t,t)$ – потужність флуктацій (змінної складової процесу),
- ν_1^2 – потужність постійної складової.

Для двох випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ вводиться поняття взаємної кореляційної функції $R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$.

Взаємно кореляційною функцією $R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in T_1 \times T_2$ випадкових процесів $\{\xi(t), t \in T_1\}$ і $\{\eta(t), t \in T_2\}$ називається функція, що визначається виразом:

$$\boxed{R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\left(\left[\xi(t_1) - \mathbf{M}\xi(t_1)\right]\left[\eta(t_2) - \mathbf{M}\eta(t_2)\right]\right)}. \quad (18.10)$$

18.5. Стаціонарні випадкові процеси

Важливим класом випадкових процесів є **стаціонарні випадкові процеси**, тобто такі процеси, які поводять себе більш або менш однаково при зсуві початку відліку в часі. Розрізняють випадкові процеси стаціонарні в широкому і вузькому сенсі.

Випадковий процес називають **стаціонарним у вузькому сенсі**, коли послідовність його скінченновимірних функцій розподілу не залежить від початку відліку процесу в часі, тобто коли для довільних $t_1, \dots, t_n$, таких, що $t_k + \tau \in T$, $k = 1, 2, \dots, n$ незалежно від τ , виконується умова:

$$\boxed{F_{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) = F_{(n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots} \quad (18.11)$$

Для такого процесу будь-яка характеристика, що визначається сумісним розподілом, наведеним вище, не залежить від τ . Це стосується всіх моментів даного розподілу, якщо вони існують.

Стаціонарним в широкому сенсі називають гільбертів процес $\{\xi(t), t \in T\}$,

у якого перші два моменти не залежать від початку відліку, тобто якщо

$$\boxed{\mathbf{M}\xi(t_1) = v_1 = \text{const};}$$

$$\boxed{\mathbf{M}[\xi(t_1) - \mathbf{M}\xi(t_1)][\xi(t_2) - \mathbf{M}\xi(t_2)] = R(t_2 - t_1) = R(\tau),} \quad (18.12)$$

де $R(\tau)$ – неперервна функція по τ .

Кореляційна функція стаціонарного процесу є парною функцією:

$$R(\tau) = R(-\tau) \quad (18.13)$$

та задовольняє нерівності:

$$R(0) \geq |R(\tau)|. \quad (18.14)$$

Із стаціонарності у вузькому сенсі випливає стаціонарність у широкому сенсі. Зворотне твердження не завжди вірне.

Важливий в практичних застосуваннях гауссовий стаціонарний в широкому сенсі процес є стаціонарним і у вузькому сенсі.

Для двох стаціонарних випадкових процесів вводиться поняття стаціонарної зв'язаності.

Випадкові процеси $\xi(t)$ і $\eta(t)$ називаються **стаціонарно зв'язаними у вузькому сенсі**, якщо сумісна функція розподілу $n + m$ ВВ

$$\xi(t_1 + \tau), \dots, \xi(t_n + \tau),$$

$$\eta(t_1 + \tau), \dots, \eta(t_m + \tau)$$

для будь яких $n, m = 1, 2, 3, \dots$ не залежить від τ .

Стаціонарні в широкому сенсі випадкові процеси $\xi(t)$ і $\eta(t)$ називаються **стаціонарно зв'язаними в широкому сенсі**, якщо їхня взаємна кореляційна функція:

$$\boxed{R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \mathbf{M}[\xi(t_1) - \mathbf{M}\xi(t_1)][\eta(t_2) - \mathbf{M}\eta(t_2)] = R_{\xi\eta}(t_2 - t_1) = R_{\xi\eta}(\tau)} \quad (18.15)$$

залежить тільки від різниці аргументів $\tau = t_2 - t_1$.

На відміну від автокореляційної функції стаціонарного процесу, взаємна кореляційна функція двох стаціонарно зв'язаних процесів, в загальному випадку, є непарною і задовольняє нерівності:

$$R_{\xi\eta}(-\tau) = -R_{\xi\eta}(\tau), \quad (18.16)$$

$$R_{\xi\eta}(0) \geq |R_{\xi\eta}(\tau)|.$$

18.6. Енергетичний спектр випадкового процесу

Важливою характеристикою випадкового процесу є його **енергетичний спектр**. Він визначається як перетворення Фур'є від кореляційної функції:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau, \quad (18.17)$$

де f – частота.

Справедливим є і обернене перетворення Фур'є від енергетичного спектру

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f\tau} df. \quad (18.18)$$

Енергетичний спектр визначає розподіл потужності випадкового процесу (до прикладу шумової складової сигналу) по осі частот.

Випадковий процес з постійним енергетичним спектром, $G(f) = \text{const}$, називається **білим шумом**.

Модель випадкового процесу у вигляді білого шуму використовують в аналізі систем управління, засобів вимірювання, контролю та діагностики.

18.7. Ергодичні випадкові процеси

В деяких випадках, наприклад, в апаратурному аналізі випадкових процесів виникає необхідність визначення характеристик досліджуваних явищ усередненням їх реалізацій за часом. Це можливо в аналізі стаціонарних випадкових процесів, що задовольняють ергодичній гіпотезі.

Оскільки випадковий процес є функцією двох змінних ($t \in (-\infty, \infty)$ і $\omega \in \Omega$), маємо можливість для визначення характеристик процесів, крім усереднення по множині реалізацій (за ймовірнісною мірою, див. рис. 18.1), проводити усереднення в часі. Необхідну і достатню умову, за якої можна замінити усереднення по множині реалізацій процесу $\xi(t)$ (стаціонарного в широкому сенсі) усередненням в часі однієї реалізації, дає ергодична теорема. Згідно з нею для виконання рівності

$$\boxed{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt = \mathbf{M}\xi(t)} \quad (18.19)$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\boxed{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = 0} \quad (18.20)$$

Процеси, що задовольняють наведеній умові, називаються **ергодичними відносно математичного сподівання**. Якщо замість процесу $\xi(t)$ розглядати процес $\eta(t, \tau) = \xi(t)\xi(t - \tau)$, то у випадку застосування до нього ергодичної теореми для всіх t і τ говорять, що процес $\xi(t)$ **ергодичний відносно кореляційної функції**.

У виразах (18.19) і (18.20) використане позначення $\lim$. – це **збіжність у середньому** (від англійського «*limit in mean*»). Це один з видів збіжності послідовності ВВ, яка вводиться так: послідовність ВВ $\xi_1, \xi_2, \dots$ є такою, що збігається у середньому порядку p ($0 < p < \infty$) до ВВ ξ , якщо

$$\boxed{\mathbf{M}|\xi_n - \xi|^p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty}.$$

При $p = 2$ таку збіжність називають збіжністю у середньому квадратичному.

Питання для самоконтролю до розділу 4

1. Наведіть означення випадкового і дійсного випадкового процесів.
2. Наведіть означення скінченномірних функцій розподілу.
3. Чим відрізняються випадкові послідовності та випадкові процеси?
4. Наведіть означення гільбертового комплекснозначного випадкового процесу.
5. Як можна визначити інтервал кореляції випадкового процесу за його кореляційною функцією?
6. Розкрийте зв'язок між коваріацією та кореляційною функцією та їх фізичний зміст.
7. Як визначається взаємно кореляційна функція двох випадкових процесів?

8. Дайте означення стаціонарного у вузькому сенсі випадкового процесу.
 9. Дайте означення стаціонарного у широкому сенсі випадкового процесу.
 10. Як пов'язані між собою енергетичний спектр випадкового процесу та його кореляційна функція?
 11. Дайте визначення поняття «білий шум».
 12. В чому полягає практична цінність моделі ергодичних випадкових процесів?
-

ДОДАТКИ

Додаток А

Формули перетворення Лапласа

Таблиця А.1

Оригінал	Зображення
$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
$\eta(t-t_0)$	$\frac{1}{p}e^{-t_0 p}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$
$\sin^2 \alpha t$	$\frac{2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}$
$\cos^2 \alpha t$	$\frac{p^2 + 2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}$
$\sin(\omega t - \varphi_0)$	$e^{\frac{-\varphi_0}{\omega}} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t - \varphi_0)$	$e^{\frac{-\varphi_0}{\omega}} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$	1

Оригінал	Зображення
$\delta'(t)$	p
A	$\frac{A}{p}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
$t \sin \alpha t$	$\frac{2\alpha p}{(p^2 + \alpha^2)^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{i(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{i\psi}}{p - i\omega}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$
$f(t - \tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$
$\frac{\sin \alpha t}{t}$	$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\alpha}$
$\sin \alpha n$	$\frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}$
$\cos \alpha n$	$\frac{e^p (e^p - \cos \alpha)}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}$
$a^{\alpha n}$	$\frac{e^p}{e^p - a^\alpha}$

Додаток Б

Властивості перетворення Лапласа

Таблиця Б.1

Властивість	Оригінал	Зображення
Лінійність	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(p) + \beta F_2(p)$
Подібність	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
Зсунення	$e^{\alpha t} f(t)$	$F(p - \alpha)$
Запізнювання	$f(t - \tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$
Диференціювання оригіналу	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots f^{(n-1)}(0)$
Диференціювання зображення	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$
Інтегрування оригіналу	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
Інтегрування зображення	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(p) dp$

Додаток В

Значення функції стандартного закону розподілу Гаусса

В таблиці В.1 приведені значення функції стандартного гауссівського закону розподілу $\Phi_r(u)$, що розраховується за формулою:

$$\Phi_r(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (\text{В.1})$$

тобто значення площі під кривою, що розраховується за формулою:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (\text{В.2})$$

Таблиця В.1

z	$\Phi_r(z)$	$\Phi_r(0,5+z)$	$\Phi_r(1+z)$	$\Phi_r(1,5+z)$	$\Phi_r(2+z)$	$\Phi_r(2,5+z)$	$\Phi_r(3+z)$
0,00	0,50000	0,69146	0,84134	0,93319	0,97725	0,99379	0,99865
0,01	0,50399	0,69497	0,84375	0,93448	0,97778	0,99396	0,99869
0,02	0,50798	0,69847	0,84614	0,93574	0,97831	0,99413	0,99874
0,03	0,51197	0,70194	0,84850	0,93699	0,97882	0,99430	0,99878
0,04	0,51595	0,70540	0,85083	0,93822	0,97932	0,99446	0,99882
0,05	0,51994	0,70884	0,85314	0,93943	0,97982	0,99461	0,99886
0,06	0,52392	0,71226	0,85543	0,94062	0,98030	0,99477	0,99889
0,07	0,52790	0,71566	0,85769	0,94179	0,98077	0,99492	0,99893
0,08	0,53188	0,71904	0,85993	0,94295	0,98124	0,99506	0,99896
0,09	0,53586	0,72240	0,86214	0,94408	0,98169	0,99520	0,99900
0,10	0,53983	0,72575	0,86433	0,94520	0,98214	0,99534	0,99903
0,11	0,54380	0,72907	0,86650	0,94630	0,98257	0,99547	0,99906
0,12	0,54776	0,73237	0,86864	0,94738	0,98300	0,99560	0,99910
0,13	0,55172	0,73565	0,87076	0,94845	0,98341	0,99573	0,99913
0,14	0,55567	0,73891	0,87286	0,94950	0,98382	0,99585	0,99916
0,15	0,55962	0,74215	0,87493	0,95053	0,98422	0,99598	0,99918
0,16	0,56356	0,74537	0,87698	0,95154	0,98461	0,99609	0,99921
0,17	0,56750	0,74857	0,87900	0,95254	0,98500	0,99621	0,99924
0,18	0,57142	0,75175	0,88100	0,95352	0,98537	0,99632	0,99926
0,19	0,57535	0,75490	0,88298	0,95449	0,98574	0,99643	0,99929
0,20	0,57926	0,75804	0,88493	0,95543	0,98610	0,99653	0,99931
0,21	0,58317	0,76115	0,88686	0,95637	0,98645	0,99664	0,99934
0,22	0,58706	0,76424	0,88877	0,95728	0,98679	0,99674	0,99936
0,23	0,59095	0,76731	0,89065	0,95818	0,98713	0,99683	0,99938
0,24	0,59483	0,77035	0,89251	0,95907	0,98745	0,99693	0,99940
0,25	0,59871	0,77337	0,89435	0,95994	0,98778	0,99702	0,99942
0,26	0,60257	0,77637	0,89617	0,96080	0,98809	0,99711	0,99944
0,27	0,60642	0,77935	0,89796	0,96164	0,98840	0,99720	0,99946
0,28	0,61026	0,78230	0,89973	0,96246	0,98870	0,99728	0,99948
0,29	0,61409	0,78524	0,90147	0,96327	0,98899	0,99736	0,99950
0,30	0,61791	0,78814	0,90320	0,96407	0,98928	0,99744	0,99952

Продовження табл. В.1

z	$\Phi_r(z)$	$\Phi_r(0,5+z)$	$\Phi_r(1+z)$	$\Phi_r(1,5+z)$	$\Phi_r(2+z)$	$\Phi_r(2,5+z)$	$\Phi_r(3+z)$
0,31	0,62172	0,79103	0,90490	0,96485	0,98956	0,99752	0,99953
0,32	0,62552	0,79389	0,90658	0,96562	0,98983	0,99760	0,99955
0,33	0,62930	0,79673	0,90824	0,96638	0,99010	0,99767	0,99957
0,35	0,63683	0,80234	0,91149	0,96784	0,99061	0,99781	0,99960
0,36	0,64058	0,80511	0,91308	0,96856	0,99086	0,99788	0,99961
0,37	0,64431	0,80785	0,91466	0,96926	0,99111	0,99795	0,99962
0,38	0,64803	0,81057	0,91621	0,96995	0,99134	0,99801	0,99964
0,39	0,65173	0,81327	0,91774	0,97062	0,99158	0,99807	0,99965
0,40	0,65542	0,81594	0,91924	0,97128	0,99180	0,99813	0,99966
0,41	0,65910	0,81859	0,92073	0,97193	0,99202	0,99819	0,99968
0,42	0,66276	0,82121	0,92220	0,97257	0,99224	0,99825	0,99969
0,43	0,66640	0,82381	0,92364	0,97320	0,99245	0,99831	0,99970
0,44	0,67003	0,82639	0,92507	0,97381	0,99266	0,99836	0,99971
0,45	0,67364	0,82894	0,92647	0,97441	0,99286	0,99841	0,99972
0,46	0,67724	0,83147	0,92785	0,97500	0,99305	0,99846	0,99973
0,47	0,68082	0,83398	0,92922	0,97558	0,99324	0,99851	0,99974
0,48	0,68439	0,83646	0,93056	0,97615	0,99343	0,99856	0,99975
0,49	0,68793	0,83891	0,93189	0,97670	0,99361	0,99861	0,99976

Примітки. z – значення аргументу u від 0,00 до 0,49. Значення аргументу u від 0,50 та вище знаходять як суму z і значень 0,5; 1,0 тощо.

Приклад: для $u = 1,86 = (1,5 + 0,36)$ знаходимо $\Phi_r(1,86) = 0,96856$.

Значення функції $\Phi_r(u)$ для негативних значень аргументу u розраховуються за формулою:

$$\Phi_r(-u) = 1 - \Phi_r(u). \quad (Д1.3)$$

Значення квантиля u_α рівня α знаходять як значення аргументу u відповідного значенню функції $\Phi_r(u) = \alpha$.

Приклад: Значенню $\alpha = 0,99$ відповідає найближче табличне значення $\Phi_r = 0,99010$. За таблицею В.1 для цього значення функції знаходять значення аргументу: $u = 2,0 + 0,33 = 2,33$.

Додаток Г

Значення функції $\Phi(x)$ для інтегральної теореми Муавра-Лапласа

В таблиці Г.1 приведені значення функції $\Phi(u)$ для інтегральної теореми Муавра-Лапласа, що розраховується за формулою:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (\text{Г.1})$$

Таблиця Г.1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,004	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,334
0,02	0,008	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,012	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,016	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,148	0,7	0,258	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,4	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,1	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,17	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,1	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,8	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,291	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,5	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,195	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,2	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,377
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,379
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,381
0,23	0,091	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,383
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,2	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,219	0,9	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,6	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,394
0,3	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,328		

Продовження табл. Г.1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,5	0,4938
1,27	0,398	1,6	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,3	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,475	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,6	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,7	0,4965
1,37	0,4147	1,7	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,1	0,4821	2,76	0,4971
1,4	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,483	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,8	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,2	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,498
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,9	0,4981
1,47	0,4292	1,8	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,3	0,4893	2,96	0,4985
1,5	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,2	0,49931
1,53	0,437	1,86	0,468	2,38	0,4913	3,4	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,4	0,4918	3,6	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,8	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4	0,499968
1,57	0,4418	1,9	0,4713	2,46	0,4931	4,5	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5	0,499997

Примітки:

1. При знаходженні значень $\Phi(x)$ слід враховувати, що $\Phi(x)$ – непарна функція:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

2. При $x \geq 5$ значення функції $\Phi(x) = 0,5$.

Додаток Д

Значення квантилів розподілу Стюдента $t_p(v)$ з v ступенями свободи

Таблиця Д.1

v	Довірча імовірність P ($P = 1 - \alpha$, де α – рівень значущості)									
	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,975	0,99
1	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82
2	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965
3	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541
4	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747
5	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365
6	0,265	0,404	0,543	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143
7	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998
8	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896
9	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821
10	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764
11	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718
12	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681
13	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650
14	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624
15	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602
16	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583
17	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567
18	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552
19	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539
20	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528
25	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485
30	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457
40	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423
60	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390
120	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358
∞	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326

Примітки. Квантилі рівня $\alpha = 0,5$ при будь-якому v рівні нулю.

Квантилі рівня $P < 0,5$ визначаються за формулою:

$$t_p(v) = -t_{1-p}(v). \quad (\Gamma.1)$$

Для проміжних значень P , що знаходяться між двома сусідніми табличними значеннями P_1 і P_2 , тобто $P_1 < P < P_2$, значення квантиля $t_p(v)$ може бути визначено методом лінійної інтерполяції:

$$t_p(v) = (P - P_1) \frac{t_{P_2} - t_{P_1}}{P_2 - P_1} + t_{P_1}. \quad (\Gamma.2)$$

Додаток Е

**Значення квантилів розподілу χ^2 Пірсона
для ν ступенів свободи та рівня імовірності P**

Таблиця Е.1

ν	P									
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	$3,9 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672

Продовження табл. Е.1

v	P									
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
31	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003
32	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
33	15,815	17,074	19,047	20,867	23,110	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648
34	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964
35	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275
36	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581
37	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	48,363	52,192	55,668	59,892	62,883
38	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	49,513	53,384	56,896	61,162	64,181
39	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
41	21,421	22,906	25,215	27,326	29,907	52,949	56,942	60,561	64,950	68,053
42	22,138	23,650	25,999	28,144	30,765	54,090	58,124	61,777	66,206	69,336
43	22,859	24,398	26,785	28,965	31,625	55,230	59,304	62,990	67,459	70,616
44	23,584	25,148	27,575	29,787	32,487	56,369	60,481	64,201	68,710	71,893
45	24,311	25,901	28,366	30,612	33,350	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166
46	25,041	26,657	29,160	31,439	34,215	58,641	62,830	66,617	71,201	74,437
47	25,775	27,416	29,956	32,268	35,081	59,774	64,001	67,821	72,443	75,704
48	26,511	28,177	30,755	33,098	35,949	60,907	65,171	69,023	73,683	76,969
49	27,249	28,941	31,555	33,930	36,818	62,038	66,339	70,222	74,919	78,231
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
100	67,328	70,06	74,22	77,93	82,358	118,49	124,34	129,56	135,80	140,16

Додаток Ж

Значення квантилів стандартного розподілу Гаусса

Таблиця Ж.1

γ	u_γ	γ	u_γ	γ	u_γ	γ	u_γ
0,50	0,00000	0,76	0,70630	0,950000	1,64485	0,999200	3,15591
0,52	0,05015	0,78	0,77219	0,960000	1,75069	0,999400	3,23888
0,54	0,10043	0,80	0,84162	0,970000	1,88079	0,999500	3,29053
0,56	0,15097	0,81	0,87790	0,975000	1,95996	0,999600	3,35279
0,58	0,20189	0,820	0,91536	0,980000	2,05375	0,999700	3,43161
0,60	0,25335	0,840	0,99446	0,990000	2,32635	0,999800	3,54008
0,62	0,30548	0,860	1,08032	0,992000	2,40891	0,999900	3,71902
0,64	0,35846	0,880	1,17499	0,994000	2,51214	0,999950	3,89059
0,66	0,41246	0,900	1,28155	0,995000	2,57583	0,999990	4,26489
0,68	0,46770	0,910	1,34075	0,996000	2,65207	0,999995	4,41717
0,70	0,52440	0,920	1,40507	0,997000	2,74778	0,999999	4,75342
0,72	0,58284	0,930	1,47579	0,998000	2,87816		
0,74	0,64334	0,940	1,55477	0,999000	3,09023		

Додаток 3

Критичні точки розподілу Фішера (f -розподілу)

Таблиця 3.1

Рівень значущості 0,05									
$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	9,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Таблиця 3.2

Рівень значущості 0,01										
$V_1 \backslash V_2$		2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,3	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,1	26,6	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,4	13,9	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	9,9	9,5	9,0
6	13,7	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	8,1	7,7	7,3	6,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	6,8	6,5	6,1	5,7
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,7	5,3	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,5	5,1	4,7	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,7	4,3	3,9
11	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,7	4,4	4,0	3,6
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,2	3,8	3,4
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,3	4,0	3,6	3,2
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,1	3,8	3,4	3,0
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,0	3,7	3,3	2,9
16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,6	3,2	2,8
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,8	3,5	3,1	2,7
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,6
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,6	3,3	2,9	2,4
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,2	2,9	2,4
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,5	3,1	2,8	2,3
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,3	3,0	2,7	2,2
26	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,3	3,0	2,6	2,1
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	3,2	2,9	2,5	2,1
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,2	2,8	2,5	2,0
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,0	2,7	2,3	1,8
60	7,1	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	2,8	2,5	2,1	1,6
120	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,7	2,3	2,0	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,2	1,8	1,0

Примітка: V_1 відноситься до більшої дисперсії, V_2 – до меншої.

ЛІТЕРАТУРА

1. Операційне числення: практикум [Електронний ресурс]: навч. осіб. / В.П. Легеза, Л.М. Олещенко; КПІ ім.. Ігоря Сікорського.— Електронні текстові дані (1 файл: 1,4 Мбайт). — К.: КПІ ім.. Ігоря Сікорського, 2018. — 70 с.
2. Теоретичні основи інформаційно-вимірювальних систем: Підручник / В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Єренменко та ін.; під ред. чл.-кор. НАН України В.П. Бабака / — К.: Ун-т новітніх технологій, 2017. — 496 с.
3. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика / В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. — К.: Техніка, 2004.- 288 с.
4. Статистичний аналіз даних вимірювань: навч. посіб. / Єременко В.С., Куц Ю.В., Мокійчук В.М., Самойліченко О.В. — К.: НАУ, 2015.— 321 с.
5. ДСТУ ISO 3534-1:2008 Статистика. Словник термінів і позначки. Частина 1. Загальні статистичні терміни та терміни теорії ймовірностей (ISO 3534-1:2006, IDT) чин. з 01.01.2010. К.: Держспоживстандарт (в електронному вигляді), 42 с. — (Національний стандарт України).
6. Статистика. Словник термінів і позначень. Частина 2. Прикладна статистика (ISO 3534-2: 2006, IDT): ДСТУ ISO 3534-2:2008. — [Чинний від 2010-01-01]. — К. : Держспоживстандарт України, 2008. — 43 с. — (Національний стандарт України).
7. Теорія ймовірностей у задачах автоматизації виробництва: Навчально-методичний посібник з курсу «Спеціальні розділи математики» для студ. спец. «Автоматизоване управління технологічними процесами» напряму «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Уклад.: А. І. Жученко, В. В. Миленський, Л. Д. Ярошук. — К.: НТУУ «КПІ», 2008. — 70 с.
8. Жильцов О. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов; за ред. Г.О. Михаліна. — К.: Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.
9. Дорожовець М. Опрацювання результатів вимірювань: навч. посібник / М. Дорожовець. — Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2007. — 624 с.
10. Марченко Б. Г., Приймак М. В., Щербак Л. М. Теоретичні основи аналізу стохастичних сигналів і шумів. Навчальний посібник. — Тернопіль: ТДТУ ім. І. Пулюя, 2001. — 179 с.
11. Куц Ю.В., Щербак Л.М. Статистична фазометрія.— Тернопіль: ТДТУ ім. І. Пулюя. — 2009. — 383 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсолютна величина комплексного числа	13	Випадкові послідовності	169
Автокореляційна функція	170	Випадкові процеси	169
Аксиоми Колмогорова	56	стаціонарно зв'язані у вузькому сенсі	172
Алгебра множин	56	стаціонарно зв'язані у широкому сенсі	172
Алгебраїчна функція комплексної змінної	14	Гамма-функція	84
Ансамбль реалізацій	168	Генеральна сукупність	110
Аргумент комплексного числа	13	Гіпотеза	62, 134
Білий шум	173	альтернативна (конкуруюча)	134
Біном Ньютона	70	непараметрична	134
Варіанти вибірки	111	основна (нульова)	134
Варіаційний ряд	112, 125	параметрична	134
Взаємно кореляційна функція	171	проста	134
Взаємно спряжені комплексні числа	14	складна	134
Вибір елементів з поверненням	53	Гістограма	114, 138
Вибірка		Дисперсія	
визначення	111	дискретної ВВ	65
репрезентативна	111	неперервної ВВ	87
Вибіркова дисперсія	118	неперервної ВВ умовна	105
Вибіркова медіана	118	Діаграми Венна	50
Вибіркова функція процесу	168	Добуток двох подій	58
Вибіркове середнє	117	Довірчий інтервал	124
Вибірковий метод	76, 115	Дослід (експеримент, випробування)	48
Вибірковий момент		Енергетичний спектр	173
початковий порядку k	121	Ергодичний процес	
центрального порядку k	121	відносно кореляційної функції	174
Випадкова величина (ВВ)		відносно математичного сподівання	174
n -вимірна	97	Ефективність оцінки	117
визначення	63	Закон розподілу	
двовимірна	97	дискретної ВВ	64
дискретна	63	дискретної двовимірної ВВ	97
неперервна	63	Збіжність у середньому	174
неперервна	77	Згортка	26
тривимірна	97	Зображення	11, 16
Випадкове явище	46	Зображуюче (операторне) рівняння	36
Випадковий процес		Інверсія рангів	152
визначення	167	Інтеграл	
гільбертовий	169	Дюамеля	28
дійсний	167	Ейлера	84
комплекснозначний	169	ймовірності Гаусса	83
стаціонарний у вузькому сенсі	171	Лапласа	16
стаціонарний у широкому сенсі	171	Інтервал (час) кореляції	170
Випадкові величини		Інтервальна оцінка параметра μ	131
корельовані	100	за відомого значення σ	129
незалежні	103	за невідомого значення σ	130
некорельовані	88	Ймовірнісна модель	55

Ймовірнісний простір	55, 56	Критерій Фішера адекватності моделі регресії	158
Ймовірність		Критична область	135
довірча	124	Круги Ейлера	50
класичне визначення	51	Лишок	30
події	56	Лінеаризація функції	94
статистичне визначення	52	Лінія регресії	104
умовна	57	Математичне сподівання	
Ймовірність події	51	дискретної ВВ	64
Кардинальне число	48	неперервної ВВ	86
Квантіль		умовне дискретної ВВ	104
визначення	122	умовне неперервної ВВ	104
рівня α	122	Медіана	128
Квантор загальності	103	Метод оцінювання коефіцієнтів регресії	
Квартиль		Бартлетта-Кенуя	154
верхній (0,75)	123	Вальда та Барлетта	155
нижній (0,25)	123	ітераційний Хубера	155
Кількість степенів свободи	118	Керріча	155
Коваріація	88, 170	Множина	47
Коефіцієнт		Мода	116
впливу	96	Модуль комплексного числа	13
кореляції	88, 101	Момент	
Коефіцієнт кореляції		змішаний центральний другого порядку	
Кендалла	151		88
Пірсона	147	кореляційний	88
Спірмена	150	кореляційний системи двох ВВ	100
Комбінаторика	52	початковий порядку k	69
Комплексне число		центральний порядку k	69
в алгебраїчній формі	12	Надійний інтервал	124
в показниковій формі	14	Надійність	124
в тригонометричній формі	13	Наукове припущення	62
Композиція	93	Незсуненість оцінки	117
Кореляційна функція	170	Непараметричні методи	125
Кореляція		Нерівність Чебишова	133
безпосередня	146	Нерівність Чебишова (Бьєнеме-Чебишова)	
лінійна	146		73
множинна	145	Нормоване ухилення	87
негативна (обернена)	144	Об'єднання множин	49
нелінійна	146	Обсяг сукупності	110
непряма	146	Операторна провідність	42
позитивна	144	Операторне рівняння диференціального	
помилкова	146	рівняння	35
проста (парна)	145	Операторний опір	42
часткова	146	Оцінка	
Корінь багаточлена		зсунена	117
l_1 -кратний	31	обґрунтована	117
визначення	31	Оцінювання	
простий	31	визначення	116
Критерій χ^2 Пірсона	141	інтервальне	124
Критерій Колмогорова-Смірнова	142	точкове	116
		Переріз множин	49
		Перестановки	52

Перетворення		Сепарабельні процеси.....	167
інтегральне	11	Середнє гармонічне	116
обернене Лапласа	29	Середнє геометричне додатних чисел ...	116
Повна група подій	51, 60	Середнє квадратичне відхилення (СКВ)	
Події		дискретної ВВ.....	66
єдино можливі	51	Середнє ухилення	87
несумісні.....	51	Систематична похибка	117
протилежні	51	Скінченномірні функції розподілу	167
протилежні	61	Складова (компонента) ВВ	97
рівноможливі	51	Сполучення	52
сумісні	51, 59	Спостереження	110
Подія		Статистика	135
вірогідна	51	Статистика (статистична оцінка).....	111
елементарна	48	Статистична перевірка гіпотези	134
неможлива.....	51	Статистичний критерій.....	135
Показник росту функції.....	16	Статистичні дані.....	110
Полігон відносних частот.....	138	Статистичні характеристики.....	111
Полігон частот	113, 138	Сума двох подій	59
Помилка		Схема Бернуллі.....	70
другого роду.....	135	Теорема	
першого роду	135	алгебри основна.....	31
Поправка Шеппарда.....	118	одного єдино можливого оригіналу	29
Порядкові статистики	125	Тітчмарша	26
Потужність критерія	136	Теорія випадкових процесів.....	166
Потужність множини	48	Теорія ймовірностей	46
Простір елементарних подій	48	Точкова оцінка	
Ранг		визначення	116
визначення	125	стандартного відхилення вибіркового	
зв'язаний	125	середнього.....	119
середній	125	Точкова оцінка параметра σ	
Рангові методи	125	Даутона за порядковими статистиками	
Ранжована вибірка	125		131
Реалізація випадкового процесу	168	за вибіркоким розмахом R	130
Регресійна залежність	153	найбільшої правдоподібності	130
Результат спостереження.....	110	Точкова параметра μ	
Рівень значущості.....	124, 135	Діксона за порядковими статистиками	
Розміщення	52	(квантилями).....	128
Розподіл ймовірностей		за значенням медіани.....	128
χ^2 (Пірсона).....	84	найбільшої правдоподібності	127
Бернуллі (біноміальний).....	70	стійка Ходжеса-Лемана за середніми	
гаусовий (нормальний)	82	Уолша	129
показниковий	85	швидка Кенуя	129
Пуассона.....	73	Умова Коші-Рімана.....	15
рівномірний.....	80	Формула	
стійкий.....	93	Байєса	63
Стюдента (t -розподіл)	85	Муавра для дробного показника	14
трикутний (Сімпсона)	81	Муавра для цілого показника	14
умовний дискретної компоненти.....	102	обернення Рімана-Мелліна	29
умовний, визначення.....	101	Старджесса.....	139
Розподілом імовірності		Стірлінга.....	52
дискретної ВВ.....	64	Функція	

аналітична в точці	15	диференціальна двовимірної ВВ	99
аналітична у зв'язаній області	15	емпірична	113, 138
випадкового аргументу	89	інтегральна двовимірної ВВ	98
гармонічна	17	неперервної ВВ	77
двох випадкових аргументів	92	умовна диференціальна компоненти ..	102
експоненціальна	17	Функція щільності ймовірностей	
експоненціального типу	16	емпірична	114
Лапласа	71	Функція-оригінал	11, 15
майже лінійна	96	Характеристичний багаточлен	36
одинична Хевісайда	16	Центр розподілу	65
передавальна	7, 36, 42	Часовий ряд	169
перехідна	28	Частота варіанти	
помилки Гаусса	82	абсолютна	112
правдоподібності	119	відносна	112
регресії	104	Щільність розподілу ймовірностей	
узагальнена одинична	20	неперервної ВВ	78
Функція обернення	11	Ядро перетворення	11
Функція розподілу			